UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

Teorema de Sturm e Zeros de Polinômios Ortogonais

Fernando Rodrigo Rafaeli

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Fernando Rodrigo Rafaeli [1]

Teorema de Sturm e Zeros de Polinômios Ortogonais

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2007

[1] contato: fe_ro_rafaeli@yahoo.com.br

Aos meus pais, Dionísio e Marlene
e aos meus irmãos Márcio e Cleber,
dedico.

Agradecimentos

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov, por toda orientação, dedicação e incentivo.

Aos professores do grupo de polinômios ortogonais, Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, Prof.ª Dr.ª Cleonice Fátima Bracciali e Prof.ª Dr.ª Eliana Xavier Linhares de Andrade.

À professora Débora Lobo, pela minha iniciação na carreira acadêmica.

Aos meus pais Dionísio e Marlene, que sempre me apoiaram e me incentivaram em meus estudos e aos meus irmãos Márcio e Cleber.

À Maria Zago, pelas orações e incentivo.

A todos os colegas de turma, em especial a Cristiane e a Gabi.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

A Deus, por tudo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o Teorema de Sturm para zeros de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem e suas extensões. Estes resultados clássicos são aplicados para análise de monotonicidade e convexidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos.

Abstract

We study Sturm's theorem on zeros of solution of linear second-order differential equations as well as its extension. These classical results are applied to analyze monotonicity and convexity of zeros of classical orthogonal polynomials.

Sumário

1 Resultados Preliminares **3**

1.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 3

1.1.1 Tópicos da Teoria 3

1.1.2 Transformadas 7

1.2 Polinômios Ortogonais 9

1.2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais 9

1.2.2 Propriedades elementares dos zeros 13

1.2.3 Polinômios ortogonais clássicos 16

2 Teoremas de Sturm-Liouville **26**

2.1 Teorema de Separação de Sturm 28

2.2 Teorema de Comparação de Sturm 29

2.3 Teorema de Convexidade 33

2.4 Limites para as Distâncias entre Zeros 34

2.5 Forma Integral do Teorema de Sturm 35

3 Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros **37**

3.1 Aplicações do Teorema de Comparação para Zeros 37

3.1.1 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi 37

3.1.2 Limites Superiores para os Zeros dos Polinômios de Gegenbauer 40

3.1.3 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi 46

3.1.4 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer 50

3.1.5 Resultados de Monotonicidade dos Zeros do Polinômio de Laguerre . . 53

3.2 Desigualdades Tipo Turán sobre Zeros 57

3.3 Forma Integral 62

3.3.1 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer 62

Referências Bibliográficas **67**

Introdução

Os polinômios ortogonais clássicos surgem cada vez mais em problemas fundamentais na matemática. Um estudo principal é o comportamento de seus zeros, pois há varias aplicações importantes. Uma delas é que esses zeros são os melhores nós da fórmula de quadratura de Gauss, isto é, a fórmula de quadratura com n nós

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu),$$

é exata para todo polinômio de grau $2n-1$ se, e somente se, x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, são os zeros do n-ésimo polinômio que é ortogonal em (a, b) com relação a função peso $\omega(x)$. Outro fato interessante é que os zeros dos polinômios ortogonais clássicos admitem uma bonita interpretação eletrostática. Para os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ esta interpretação é a seguinte: dadas duas cargas fixas com forças $(\beta+1)/2$ e $(\alpha+1)/2$, localizadas em -1 e 1, respectivamente, e n cargas unitárias livres em $(-1, 1)$, a única posição para a qual a energia atinge o mínimo global é quando a posição das cargas coincide com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Há ainda outras aplicações como em Teoria dos Códigos, Teoria do Potencial em Equações Diferenciais, Desigualdades Polinomiais, Regressão Polinomial e Processo de Nascimento e Morte em Estatística e Métodos de Relaxação em Álgebra Linear. Devido a importância dos zeros dos polinômios ortogonais, fazemos um estudo de suas propriedades de monotonicidade e convexidade.

Desenvolvemos um estudo detalhado do *Teorema Clássico de Sturm* para zeros de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem e suas extensões. Estes resultados são aplicados para análise dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite.

A dissertação está organizada da seguinte forma.

O primeiro capítulo - *Resultados Preliminares* - contém alguns tópicos básicos da teoria de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, a transformada de Liouville, as propriedades gerais dos polinômios clássicos, tais como fórmula do tipo de Rodrigues, relação de ortogonalidade, relação de recorrência e equação diferencial associada. No segundo capítulo - *Teoremas de Sturm-Liouville* - apresentamos em detalhes os teoremas clássicos de Sturm, que são os teoremas de separação e comparação, o teorema de convexidade e a versão integral do teorema de Sturm. No terceiro capítulo - *Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros* - apresentamos os resultados dos artigos (Elbert e Laforgia [7], [6] e [9], Ahmed, Muldoon e Spigler em [1], Deano, Gil e Segura em [3] e Elbert e Siafarikas em [11]).

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

1.1.1 Tópicos da Teoria

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é da forma

$$p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_2(x)y = p_3(x), \tag{1.1}$$

onde $p_i : I \to I\!R$, $i = 0, 1, 2, 3$, são funções contínuas no intervalo I, o qual pode ser finito ou infinito.

Nesta seção nos deteremos a escrever um pouco da teoria das equações lineares de segunda ordem e ao comportamento de suas soluções.

Dividindo (1.1) pelo coeficiente $p_0(x)$, obtemos a chamada *forma normal*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)y = r(x), \tag{1.2}$$

$$p = p_1/p_0,\ q = p_2/p_0,\ r = p_3/p_0. \tag{1.3}$$

Esta equação diferencial é equivalente a (1.1) quando $p_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Quando $p_0(x_0) = 0$ para algum ponto $x = x_0$, então as funções p e q não são definidas em x_0. Neste caso, dizemos que a equação diferencial (1.1) tem um *ponto singular*, ou uma *singularidade*, no ponto x_0.

Nesta discussão, trataremos somente de equações diferencias lineares de $2^{\underline{a}}$ ordem da forma (1.1) em intervalos onde $p_0(x) \neq 0$.

Para iniciar, consideremos o conjunto $C^2(I)$ das funções de classe C^2 definidas em I, isto é, o conjunto das funções que são duas vezes diferenciáveis e a segunda derivada é contínua em I. Claramente, $C^2(I)$ é um espaço vetorial, pois, dados $f, g \in C^2(I)$ e escalares α e β, temos $\alpha f + \beta g \in C^2(I)$.

Operador Diferencial. Dada uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma (1.1), chamamos a transformação linear

$$L : C^2(I) \to C^0(I) \tag{1.4}$$

definida por $L[f] = p_0 f'' + p_1 f' + p_2 f$ de operador diferencial associado à equação (1.1). O operador L de fato é linear, isto é, satisfaz $L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$ para quaisquer escalares α e β e funções f, g de $C^2(I)$.

Problema de Valor Inicial. Em geral, dada uma equação diferencial linear de segunda ordem, da forma (1.1) ou (1.2), o problema de encontrar uma solução $y(x)$ que satisfaz as condições iniciais dadas $f(x_0) = y_0$ e $f'(x_0) = y_0'$ é chamado de *problema de valor inicial.* Provaremos que, se as funções p_j são todas contínuas e $p_0(x) \neq 0$, este problema tem uma única solução.

Teorema 1.1. *(Existencia e Unicidade) Se p e q são funções contínuas em um intervalo (a, b), então o problema de valor inicial*

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{du}{dx} + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array}\right.$$

tem uma, e somente uma, solução definida em (a, b).

Teoria da Equação Homogênea. Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita *homogênea* se, para todo x em I, a função $p_3(x)$ na equação (1.1), ou $r(x)$ na equação (1.2), for identicamente igual a zero. Caso contrário, a equação é chamada *não-homogênea.* Vamos estudar a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, isto é,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)y = 0, \tag{1.5}$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo $I \subset I\!R$. Usando o operador diferencial L, esta equação reduz-se a L[y](x) = 0.

Uma característica fundamental da equação diferencial linear homogênea (1.5) é o chamado *Princípio da Superposição.* Dadas duas soluções f e g de (1.5) e quaisquer dois escalares

α e β, a função $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ é também solução de (1.5). Esta propriedade é característica das equações lineares homogêneas.

Vamos introduzir a noção de independência linear. Dada duas funções f e g definidas em um intervalo I, elas são ditas *linearmente dependentes* em I se, existem escalares α e β não simultaneamente nulos, tais que, $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$, para todo x em I. Se a condição $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ para todo x em I implicar que $\alpha = \beta = 0$, então as funções f e g são ditas *linearmente independentes.*

Tomando-se duas funções f e g diferenciáveis, podemos relacionar a dependência linear através do Wronskiano, o qual definiremos a seguir.

Definição 1.1. *O Wronskiano de quaisquer duas funções diferenciáveis f e g é definido por*

$$W(f, g; x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x). \tag{1.6}$$

Proposição 1.1. *Se f e g são funções diferenciáveis e linearmente dependentes em um intervalo I, então $W(f, g; x) \equiv 0$, para todo x em I.*

Demonstração:

Sejam f e g funções diferenciáveis definidas em I e escalares α e β ambos não nulos tais que $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$, para todo x em I. Daí, $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$, para todo x em I. Sem perda de generalidade, suponha que $\beta \neq 0$. Multiplicando a primeira equação por f' e a segunda por f e subtraindo ambos os resultados, obtemos para todo x em I, $\beta(f(x)g'(x) - g(x)f'(x)) = 0$, ou seja, $W(f, g; x) = 0$. ∎

Proposição 1.2. *Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo I com Wronskiano diferente de zero em um ponto x_0 de I, então f e g são linearmente independentes.*

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que f e g são linearmente dependentes. Então, existem escalares α e β ambos não nulos tais que $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$, para todo x em I. Daí, derivando, obtemos, $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$, para todo x em I. Em particular, para $x = x_0$ temos o sistema

$$\left| \begin{array}{c} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

cujo determinante é $W(f, g; x_0)$, o qual é diferente de zero por hipótese. Conseqüentemente $\alpha = \beta = 0$, o que é uma contradição. ∎

Teorema 1.2. *Sejam f e g duas soluções de (1.5) em um intervalo I. Então f e g são linearmente independentes em I se, e somente se, seu Wronskiano nunca se anula em I.*

Demonstração:

Da Proposição (1.2), resta provar que se f e g são soluções linearmente independentes de (1.5) em I, então seu Wronskiano é diferente de zero. Fixemos x_0 em I e provemos que $W(f, g; x_0) \neq 0$. Suponha, por contradição, que isso não ocorra. Concluímos então que o sistema

$$\left| \begin{array}{l} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

tem solução (α, β) não trivial. Formemos a função $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ a qual é solução de (1.5) pelo Princípio da Superposição, e, como $h(x_0) = h'(x_0) = 0$, pelo Teorema da Unicidade, $h(x) \equiv 0$ em I. Daí, concluímos que f e g são linearmente dependentes, o que é uma contradição. ■

Teorema 1.3. *Sejam f e g duas soluções da equação diferencial linear homogênea (1.5). Se $W(f, g; x_0) \neq 0$, para algum ponto x_0, então cada solução h desta equação diferencial é igual a alguma combinação linear de f e g, ou seja, $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ para algum par de escalares α e β.*

Demonstração:

Pelo Princípio da Superposição, qualquer $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ satisfaz (1.5). Por outro lado, suponha que a função h satisfaz a equação diferencial (1.5). Então, no ponto $x = x_0$, constantes α e β podem ser encontradas tais que

$$\alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = h(x_0), \ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = h'(x_0). \tag{1.7}$$

De fato, as constantes α e β são

$$\alpha = \frac{h(x_0)g'(x_0) - g(x_0)h'(x_0)}{f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}$$

$$\beta = \frac{f(x_0)h'(x_0) - h(x_0)g'(x_0)}{f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}.$$

Pelo Princípio da Superposição , para estas escolhas de α e β, a função $y(x) = h(x) - \alpha f(x) - \beta g(x)$ satisfaz a equação diferencial homogênea (1.5), com condições iniciais $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Daí, pelo Teorema da Unicidade, y é a solução trivial ($y(x) \equiv 0$) da equação diferencial homogênea. Conseqüentemente $h = \alpha f - \beta g$. ■

Este resultado é de suma importância, pois ele nos diz que se encontrarmos duas soluções linearmente independentes de (1.5) então a solução geral de (1.5) está determinada e é dada pela combinação dessas soluções.

Teorema 1.4. *O Wronskiano de quaisquer duas soluções de (1.5) satisfaz*

$$W(f,g;x) = W(f,g;x_0)exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right). \tag{1.8}$$

<u>Demonstração</u>:

Derivando (1.6) e escrevendo $W(f,g;x) = W(x)$ para abreviar, obtemos

$$W' = fg'' - gf''. \tag{1.9}$$

Pelo fato de que f e g são soluções de (1.5), temos que $f'' = -pf' - qf$ e $g'' = -pg' - qg$. Substituindo estas expressões de g'' e f'' em (1.5) e cancelando, chega-se a

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

que é uma equação linear de primeira ordem. A solução é dada por (1.8), onde x_0 pode ser tomado como qualquer ponto do intervalo de definição. ■

1.1.2 Transformadas

Neste trabalho, usaremos um tipo especial de transformada que reduz uma equação diferencial homogênea de segunda ordem em uma equação da forma Sturm-Liouville. Lembremos que uma equação diferencial de Sturm-Liouville é da forma

$$u'' + \lambda(x)u' = 0. \tag{1.10}$$

Sejam $K(x)$, $M(x)$, e $N(x)$ funções definidas em um intervalo (a,b), onde K e M possuem derivadas contínuas e $K(x) \neq 0$ neste intervalo. Se, na equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$K(x)y'' + M(x)y' + N(x)y = 0, \tag{1.11}$$

fizermos $y(x) = s(x)u(x)$, onde $u(x)$ é uma função desconhecida, $s(x)$ pode ser determinada tal que $u(x)$ satisfaça uma equação da forma (1.10). Com efeito, substituindo $y(x) = s(x)u(x)$ em (1.11) obtemos

$$u'' + \lambda u + \frac{2Ks' + Ms}{Ks} \cdot u' = 0, \quad \lambda = \frac{Ks'' + Ms' + Ns}{Ks}$$

Mas (1.10) implica em, $2Ks' + Ms = 0$. Calculando diretamente, segue que

$$s(x) = \mathrm{e}\bigg(-\int \frac{M}{2K}dx\bigg) \quad e \quad \lambda(x) = -\frac{d}{dx}\bigg(\frac{M}{2K}\bigg) - \bigg(\frac{M}{2K}\bigg)^2 + \frac{N}{K}. \tag{1.12}$$

Se introduzirmos em (1.11) uma nova variável independente definida por $x = \sigma(\theta)$, obtemos

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \cdot \sigma'(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sigma'(\theta)}$$

e

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot [\sigma'(\theta)]^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\sigma'(\theta)]^2} \cdot \bigg(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} \cdot \frac{dy}{d\theta}\bigg).$$

Substituindo na equação (1.11) segue

$$K \cdot \frac{1}{[\sigma'(\theta)]^2} \cdot \bigg(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} \cdot \frac{dy}{d\theta}\bigg) + M \cdot \frac{1}{\sigma'(\theta)} \cdot \frac{dy}{d\theta} + Ny = 0$$

e simplificando, chegamos a

$$K \cdot \sigma'(\theta) \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} + \big[M \cdot [\sigma'(\theta)]^2 - K \cdot \sigma''(\theta)\big] \cdot \frac{dy}{d\theta} + N[\sigma'(\theta)]^3 y = 0. \tag{1.13}$$

Aplicando o raciocínio anterior, escrevemos $y = s^*u$, onde s^* pode ser determinada de tal forma que u satisfaça

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^* u = 0, \tag{1.14}$$

logo

$$\frac{dy}{d\theta} = s^* \cdot \frac{du}{d\theta} + \frac{ds^*}{d\theta} \cdot u \qquad e \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2} = s^* \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2\frac{ds^*}{d\theta} \cdot \frac{du}{d\theta} + u \cdot \frac{d^2s^*}{d\theta^2}.$$

Então (1.13) se reduz a

$$K\sigma'(\theta)\bigg[s^*\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2\frac{ds^*}{d\theta}\frac{du}{d\theta} + u\frac{d^2s^*}{d\theta^2}\bigg] + \bigg[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)\bigg] \cdot \bigg[s^*\frac{du}{d\theta} + \frac{ds^*}{d\theta}u\bigg] + N[\sigma'(\theta)]^3 y = 0$$

ou seja,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^* u + \frac{1}{K\sigma'(\theta)s^*}\bigg(2K\sigma'(\theta)\frac{ds^*}{d\theta} + \big[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)\big]s^*\bigg)\frac{du}{d\theta} = 0 \tag{1.15}$$

onde

$$\lambda^* = \frac{1}{s^*} \cdot \frac{d^2s^*}{d\theta^2} + \frac{\big[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)\big]}{K\sigma'(\theta)s^*} \cdot \frac{ds^*}{d\theta} + \frac{N[\sigma'(\theta)]^2}{K}. \tag{1.16}$$

De (1.14) segue que

$$2K\sigma'(\theta)\frac{ds^*}{d\theta} + \big[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)\big]s^* = 0$$

ou equivalentemente

$$-\frac{\big[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)\big]}{2K\sigma'(\theta)}d\theta = \frac{1}{s^*} \cdot ds^*.$$

Um cálculo direto nos leva a $s^* = s \cdot (\sigma')^{1/2}$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\frac{ds^*}{d\theta} &= -\frac{[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)]}{2K\sigma'(\theta)} \cdot s^* \\ \frac{d^2s^*}{d\theta^2} &= \left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right]^2 \cdot s^* - \frac{d}{d\theta}\left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right] \cdot s^*\end{aligned}$$

então (1.16) é escrito como

$$\lambda^* = -\frac{d}{d\theta}\left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right] - \left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right]^2 + \frac{N}{K} \cdot [\sigma'(\theta)]^2. \tag{1.17}$$

1.2 Polinômios Ortogonais

Nesta seção, forneceremos algumas informações sobre polinômios ortogonais e também destacaremos algumas de suas propriedades. Para mais detalhes, consultar Szegő [15].

1.2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais

Sejam $[a, b]$ um intervalo dado, finito ou infinito, e $\omega(x)$ uma função definida e não-negativa em $[a, b]$. Vamos supor que

$$\int_a^b \omega(x)dx > 0,$$

para qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$. Toda função $\omega(x)$ que satisfaz essa propriedade é chamada *função peso* em $[a, b]$.

Definição 1.2. *Definimos o produto interno, associado ao peso $\omega(x)$, de duas funções f e g em $[a, b]$ por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx.$$

Definição 1.3. *Duas funções f e g são ortogonais em $[a, b]$ com relação a uma função peso $\omega(x)$, e escrevemos, $f \perp g$, se $\langle f, g\rangle = 0$.*

Definição 1.4. *Definimos por π_n o espaço dos polinômios de grau n.*

Definição 1.5. *Dizemos que uma seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal com respeito à função peso $\omega(x)$ em $[a, b]$ se, para todo $n \in I\!N$, o polinômio $P_n(x)$ é um polinômio de grau exatamente n, e para todo par (m, n) de números inteiros não-negativos, os polinômios $P_n(x)$ e $P_m(x)$ são ortogonais com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$, ou seja,*

$$\begin{aligned}&(i) \quad P_n(x) = a_n x^n + r_{n-1}, \quad a_n > 0, \quad r_{n-1} \in \pi_{n-1} \\ &(ii) \quad \langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = h_n\delta_{mn}\end{aligned} \tag{1.18}$$

onde $\delta_{i,j}$ representa o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{i,j} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{i,j} = 1$, se $i = j$. Por alguns motivos, em vez de exigirmos que todos os P_n sejam de grau exatamente n, impõe-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio seja positivo. Quando $h_n = 1$ em (1.18), dizemos que a seqüência de polinômios é ortonormal e denotamos por $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Por simplicidade e para evitar confusão, denotaremos os coeficientes do polinômio $P_n(x)$ por $a_{n,k},\ k = 0, ..., n$. Logo,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k,\ a_{n,n} \neq 0. \tag{1.19}$$

Destaquemos algumas propriedades dos polinômios ortogonais.

Propriedade 1. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais. Toda subseqüência finita $P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)$ de polinômios é linearmente independente.*

Demonstração:

Seja $c_j,\ j = 0, 1, ..., m$, escalares, tais que $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x) = 0$. Fazendo o produto interno por $P_k(x),\ k = 0, ..., m$, segue imediatamente que

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = 0.$$

Usando a definição de ortogonalidade (1.18),

$$0 = \sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = c_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle,$$

ou seja, $c_k = 0,\ k = 0, ..., m$. Portanto, o conjunto $\{P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)\}$ é linearmente independente. ■

Propriedade 2. *Seja $Q(x)$ um polinômio de grau menor ou igual do que n, então Q pode ser unicamente representado por*

$$Q(x) = \alpha_0 P_0(x) + ... + \alpha_n P_n(x)$$

com coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ reais.

Demonstração:

De fato, pela propriedade 1, os polinômios $P_0(x), ..., P_n(x)$ formam uma base para π_n, então cada elemento de π_n é unicamente representado como combinação de $P_0(x), ..., P_n(x)$. Os coeficiente $\alpha_j,\ j = 0, \ldots, n$ são facilmente determinados e são dados por $\alpha_j = \dfrac{\langle Q, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}$. ■

Propriedade 3. *Seja $Q(x)$ um polinômio de grau menor ou igual do que $n-1$, isto é, $Q \in \pi_{n-1}$. Então, $\langle Q, P_n \rangle = 0$. Em outras palavras, isto significa que $P_n(x)$ é ortogonal a todos os polinômios de grau menor ou igual do que $n-1$.*

Demonstração:

Seja $Q \in \pi_{n-1}$, então pela propriedade 2, existem escalares $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ tais que

$$Q(x) = \alpha_0 P_0(x) + ... + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x).$$

Da definição de ortogonalidade, segue imediatamente que

$$\langle Q, P_n \rangle = \alpha_0 \langle P_0, P_n \rangle + ... + \alpha_{n-1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle = 0,$$

ou seja, $Q \perp P_n$. ∎

Propriedade 4. *Quaisquer duas seqüências de polinômios ortogonais com mesma função peso diferem apenas de uma constante, em outras palavras, se $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são duas seqüências de polinômios ortogonais em $[a,b]$ com relação à função peso $\omega(x)$, então,*

$$Q_j(x) = \alpha_j P_j(x), \ j = 0, 1, 2, ...$$

Demonstração:

Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Pela Propriedade 2, existem escalares $\alpha_0, \ldots, \alpha_j$ tais que

$$Q_j(x) = \alpha_0 P_0(x) + \ldots + \alpha_j P_j(x).$$

Daí, pela ortogonalidade,

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \langle \sum_{i=0}^{j} \alpha_i P_i, P_k \rangle = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i \langle P_i, P_k \rangle = \alpha_k \langle P_k, P_k \rangle,$$

para $k = 0, \ldots, j-1$. Como $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$, então $\alpha_k = 0, \ k = 0, \ldots, j-1$. Portanto,

$$Q_j(x) = \alpha_j P_j(x), \ j = 0, 1, 2, ...$$

Mais ainda, α_j é dado por: $\alpha_j = \dfrac{\langle Q_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}$. ∎

Propriedade 5 (Relação de Recorrência)**.** *Toda seqüência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma,*

$$\begin{aligned} &P_{-1} = 0 \\ &P_0 = 1 \\ &P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x), \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.20}$$

com $A_{n+1},\ B_n,\ C_n \in I\!R,\ n = 1, 2, \ldots,$ *onde*

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \neq 0,$$
$$B_{n+1} = A_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}. \tag{1.21}$$

Demonstração:

Desde que $xP_n(x) \in \pi_{n+1}$, pela propriedade 2, existem escalares $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ tais que

$$xP_n(x) = \alpha_0 P_0(x) + \ldots + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n+1}P_{n+1}(x).$$

Usando a ortogonalidade, segue imediatamente que

$$\langle xP_n, P_j\rangle = \alpha_j\langle P_j, P_j\rangle \tag{1.22}$$

para $j = 0, \ldots, n+1$. Por outro lado, pela propriedade 3,

$$\langle xP_n, P_j\rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x)\omega(x)dx = \langle P_n, xP_j\rangle = 0 \tag{1.23}$$

para $j = 0, \ldots, n-2$. De (1.22) e (1.23), obtemos

$$xP_n(x) = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n+1}P_{n+1}(x), \tag{1.24}$$

ou seja

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x) \tag{1.25}$$

onde, $A_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}},\ B_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ e $C_{n+1} = \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}}$. ∎

Corolário 1.1. *Seja* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma seqüência de polinômios ortonormais. Então vale à seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x),\ n \geq 0, \tag{1.26}$$

com as condições iniciais $p_0(x) = 1$ *e* $p_{-1}(x) = 0$, *onde*

$$a_n = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \quad e \quad b_n = \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Aplicando a relação de recorrência de três termos à expressão

$$p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y) &= A_{m+1}(x-y)p_m(x)p_m(y) \\ &+C_{m+1}\left\{p_{m-1}(y)p_m(x) - p_{m-1}(x)p_m(y)\right\}. \end{aligned}$$

Por (1.21),

$$\begin{aligned} \frac{a_{m,m}}{a_{m+1,m+1}} \frac{p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y)}{x-y} &= p_m(x)p_m(y) \\ &+\frac{a_{m-1,m-1}}{a_{m,m}} \frac{p_m(x)p_{m-1}(y) - p_{m-1}(x)p_m(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Escrevendo a expressão acima para $m = 0, 1, ..., n$, (que vale para $m = 0$ com $a_{-1,-1}$ arbitrário) e somando-as, obtemos a importante identidade:

Teorema 1.5 (Identidade de Christoffel-Darboux)**.** *Seja* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma seqüência de polinômios ortonormais . Então,*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}. \tag{1.27}$$

No caso especial em que $y = x$, chegamos que

$$\sum_{k=0}^{n} \{p_k(x)\}^2 = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \left\{p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\right\}. \tag{1.28}$$

1.2.2 Propriedades elementares dos zeros

Teorema 1.6. *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma seqüência de polinômios ortogonais associados à função peso* $\omega(x)$ *no intervalo* $[a, b]$. *Então todos os zeros de* $P_n(x)$ *são reais, distintos e estão localizados em* $[a, b]$.

Demonstração:

Seja $n \geq 1$ arbitrário e fixo. Suponhamos que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b). Logo, $P_n(x) > 0$ ou $P_n(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$. Então,

$$\int_a^b P_n(x)\omega(x)dx > 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b P_n(x)\omega(x)dx < 0. \tag{1.29}$$

Mas, pela ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b P_n(x)\omega(x)dx = \langle 1, P_n(x)\rangle = 0. \tag{1.30}$$

De (1.29) e (1.30) temos um absurdo. Logo, $P_n(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a, b), ou seja, $P_n(x)$ tem pelo menos um zero real de multiplicidade ímpar em (a, b).

Seja $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,r}$, $r < n$, os zeros de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b). Então, pelo Teorema Fundamental de Álgebra,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \ldots (x - x_{n,r})q_{n-r}(x), \tag{1.31}$$

onde $q_{n-r}(x)$ é um polinômio de grau $n - r$. Observemos que $q_{n-r}(x)$ tem somente zeros complexos conjugados, zeros reais que não pertencem ao intervalo (a, b) ou zeros reais de multiplicidade par em (a, b). Conseqüentemente, $q_{n-r}(x)$ não muda de sinal neste intervalo. Agora, usando a ortogonalidade, temos

$$\int_a^b (x - x_{n,1})(x - x_{n,2})...(x - x_{n,r})P_n(x)\omega(x)dx = 0. \tag{1.32}$$

Substituindo (1.31) em (1.32) segue que

$$\int_a^b (x - x_{n,1})^2(x - x_{n,2})^2...(x - x_{n,r})^2 q_{n-r}(x)\omega(x)dx \neq 0. \tag{1.33}$$

De (1.32) e (1.33) chegamos a um absurdo. Logo, $r \geq n$. Como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, concluímos que $r = n$. Portanto, $P_n(x)$ tem exatamente n zeros distintos no intervalo (a, b).

Observe que podemos mostrar que os zeros de $P_n(x)$ são reais através da sequinte interpretação dos zeros como autovalores de uma matriz. Usando a fórmula de recorrência para os polinômios ortonormais, isto é, fazendo $n = 1, 2, \ldots, m$ em (1.26), respectivamente, obtemos o seguinte sistema linear

$$\left|\begin{array}{rcl} xp_0(x) & = & a_1p_1(x) + b_0p_0(x) + a_0p_{-1}(x) \\ xp_1(x) & = & a_2p_2(x) + b_1p_1(x) + a_1p_0(x) \\ & \ldots & \\ xp_m(x) & = & a_mp_m(x) + b_{m-1}p_{m-1}(x) + a_{m-1}p_{m-2}(x). \end{array}\right.$$

Na forma matricial, o sistema linear acima pode ser escrito como

$$J_m(x)u(x) = xu(x) - a_mp_m(x)e_m,$$

onde

$$J_m = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{m-2} & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix}, \quad u(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$e_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Consideremos $x_{m,k}$ um zero de $p_m(x),\ k = 1, ..., m$. Então,

$$J_m u(x_{m,k}) = x_{m,k} u(x_{m,k}),\ k = 1, ..., m.$$

Portanto, $x_{m,k}$ é um autovalor da matriz J_m com correspondente autovetor $u(x_{m,k})$. A matriz J_m é tridiagonal e simétrica e é conhecida como *matriz de Jacobi (finita)*. Lembre que toda matriz simétrica possui autovalores reais e distintos (Veja Horn e Johnson [13], Teorema2.5.6). Assim, a simetria de J_m implica imediatamente que todos os zeros de $p_m(x)$ são reais. ∎

Consideremos, daqui por diante, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais com $a_{n,n} > 0$. Então, de (1.28), obtemos a importante desigualdade

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0, \quad \forall x \in I\!R. \tag{1.34}$$

Como conseqüência imediata, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.7. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em $[a, b]$, com relação à função peso $\omega(x)$. Então, $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x), n \geq 1$, não possuem zeros em comum.*

Além disso, o teorema abaixo mostra que os zeros de dois polinômios de graus consecutivos se entrelaçam.

Teorema 1.8. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ com relação à função peso $\omega(x)$. Sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < ... < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$, $x_{n,0} = a$ e $x_{n,n+1} = b$. Então, cada intervalo $[x_{n,k}, x_{n,k+1}], k = 0, 1, ..., n$, contém exatamente um zero de $P_{n+1}(x)$.*

Demonstração:

Sejam $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1},\ 1 \leq k \leq n-1$, dois zeros consecutivos de $P_n(x)$. Então,

$$P'_n(x_{n,k})P'_n(x_{n,k+1}) < 0,\ 1 \leq k \leq n-1. \tag{1.35}$$

Lembrando que o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x),\ n \geq 1$, é positivo, se fizermos $x = x_{n,k}$ na desigualdade (1.34), teremos:

$$P'_n(x_{n,k})P_{n+1}(x_{n,k}) < 0,\ 1 \leq k \leq n-1. \tag{1.36}$$

Analogamente, se considerarmos $x = x_{n,k+1}$,

$$P_n'(x_{n,k+1})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0, \ 1 \leq k \leq n-1. \tag{1.37}$$

Multiplicando (1.36) e (1.37) e usando (1.35) chegamos que

$$P_{n+1}(x_{n,k})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0, \ 1 \leq k \leq n-1. \tag{1.38}$$

Então, existe pelo menos um zero de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,k}$ e $x_{n,k+1}$, o que resulta em pelo menos $n-1$ zeros de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,1}$ e $x_{n,n}$.

Precisamos ainda verificar a existência de pelo menos mais dois zeros: um entre $x_{n,0}$ e $x_{n,1}$ e outro entre $x_{n,n}$ e $x_{n,n+1}$.

Primeiramente, consideremos $x = x_{n,n}$ em (1.34). Então, $P_n'(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$. Como estamos considerando $a_{n,n} > 0$, vemos que $P_n'(x_{n,n}) > 0$. Logo, $P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$. Além disso, como $a_{n+1,n+1} > 0$, $P_{n+1}(x_{n,n+1}) > 0$. Então, $P_{n+1}(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n+1}) < 0$. Assim, provamos a existência de pelo menos um zero de $P_{n+1}(x)$ entre $x_{n,n}$ e $x_{n,n+1}$.

Analogamente, se considerarmos $x = x_{n,1}$ em (1.34), provamos a existência de pelo menos um zero entre $x_{n,0}$ e $x_{n,1}$, totalizando os $n+1$ zeros de $P_{n+1}(x)$. Dessa forma, temos que existe um, e somente um, zero de $P_{n+1}(x)$ em cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$, $\quad k = 0, 1, 2, ..., n$. Resumindo, se $x_{n,1} < \ldots < x_{n,n}$ e $x_{n+1,1} < \ldots < x_{n+1,n+1}$ são zeros de $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$, respectivamente, então

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

■

1.2.3 Polinômios ortogonais clássicos

Polinômios de Jacobi - $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

Os **polinômios de Jacobi** são definidos pela fórmula de Rodrigues (Szegö [15], p.67)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}, \tag{1.39}$$

onde α e β são números arbitrários. Para as considerações seguintes supomos que α e β são reais maiores que -1.

Seja $\varphi(x) := n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ uma função auxiliar. Então

$$(-2)^n \varphi(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}.$$

Pela fórmula de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^{\alpha+n}]\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[(1+x)^{\beta+n}] \\
&= (-1)^n\varphi(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}. \tag{1.40}$$

Para $x = 1$ o polinômio $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ assume o valor

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= \binom{n+\alpha}{n} \\
&= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Os três primeiros polinômios de Jacobi são:

$$\begin{aligned}
P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1; \\
P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]; \\
P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8}[(\alpha+\beta)^2+7(\alpha+\beta)+12]x^2+2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)x \\
&\quad +(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-4.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação a função peso $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } \; m \neq n \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2n+1)}\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } \; m = n \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Primeiramente de (1.40) o coeficiente de x^n em $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, o qual denotamos por $a_{n,n}$ é

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}\binom{n+\alpha}{n} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \end{aligned}$$

Continuando, consideremos sem perda de generalidade que $m \leq n$, assim, usando (1.39) temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\omega(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{(-1)^m}{2^m m!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left\{(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}\right\}\omega(x)dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left\{(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}\right\}dx.$$

Fazendo $g_m(x) := (1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}$ e integrando m vezes por parte, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(m)}g_m(x)dx.$$

Portanto,

- Se $n < m$ então temos que $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(m)} = 0$, logo $\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = 0$.
- Se $n = m$ então

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)}g_n(x)dx \\ &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx. \end{aligned}$$

Observe que $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)} = a_{n,n}n!$. Logo

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \frac{a_{n,n}}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx.$$

Agora, fazendo a mudança $x = 2t-1$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= \frac{2a_{n,n}}{2^n}\int_{-1}^{1}2^{\alpha+n}(1-t)^{\alpha+n}2^{\beta+n}(t)^{\beta+n}dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+n}(t)^{\beta+n}dt. \end{aligned}$$

Sabemos que $B(x,y)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t)^{y-1}t^{x-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (ver [2]), e portanto, segue que

$$\begin{aligned}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x),P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}B(\beta+n+1,\alpha+n+1)\\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.\end{aligned}$$

Substituindo $a_{n,n}$ nesta equação, temos

$$\begin{aligned}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x),P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= 2^{\alpha+\beta+n+1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}\\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{n!}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.\end{aligned}$$

A Relação de recorrência (1.20) para os polinômios de Jacobi, tem a seguinte forma

$$\begin{gathered}2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ =(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x+\alpha^2-\beta^2]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\ -2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).\end{gathered}$$

O n-ésimo polinômio de Jacobi satisfaz uma equação diferencial linear de segunda ordem, a qual vamos deduzir. Seja a função $u(x)=(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$. Pela diferenciação de $\log u$, obtemos a equação

$$(1-x^2)u'+[(\alpha+\beta+2n)x+\beta-\alpha]u=0. \tag{1.43}$$

Agora, diferenciando $(n+1)$-vezes (1.43) segue

$$(1-x^2)v''+[(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha]v'+(n+1)(\alpha+\beta+2n)v=0, \tag{1.44}$$

onde v denota a função $v=u^{(n)}$. Se fizermos $v=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, então (1.44) transforma-se em

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(\alpha+\beta+n+1)y=0.$$

Portanto, o polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisfaz a equação diferencial acima. Acabamos de deduzir uma das mais importantes propriedades dos polinômios de Jacobi. Enunciaremos este resultado através de teorema.

Teorema 1.9. *Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisfazem à equação diferencial de segunda ordem:*

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0 \tag{1.45}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\right\}+n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y=0.$$

Teorema 1.10. *Sejam $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. A equação diferencial*

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y' + \gamma y = 0 \tag{1.46}$$

onde γ é um parâmetro, tem solução polinomial não identicamente nula se, e somente se, γ é dado por $n(n+\alpha+\beta+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. A solução é $cP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, e não existe solução polinomial que seja linearmente independente de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Definição 1.6. *A série hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;z)$ é dada por*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} z^k$$

onde c é um inteiro positivo, converge para $|x| < 1$. Além disso, $Y(z) = {}_2F_1(a,b;c;z)$ satisfaz a equação diferencial

$$z(1-z)Y'' + [c-(a+b+1)z]Y' - abY = 0. \tag{1.47}$$

Se m é inteiro positivo,

$$\begin{aligned} \lim_{c\to-(m-1)} (c+m-1)\ {}_2F_1(a,b;c;z) &= (-1)^{m-1} \frac{a\ (a+1)\ b\ (b+1)...(b+m-1)}{m!\ (m-1)!} z^m \\ &\quad \times {}_2F_1(a+m, b+m; m+1; z) \end{aligned} \tag{1.48}$$

e a função $z^m\ {}_2F_1(a+m, b+m; m+1; z)$ satisfaz à equação (1.47) com $c = -(m-1)$.

Podemos representar o polinômio de Jacobi em termos da função hipergeométrica da seguinte forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{1.49}$$

De fato: Seja $y(x) = Y\left(\frac{1-x}{2}\right)$. Derivando, obtemos $y'(x) = \frac{-1}{2}Y'\left(\frac{1-x}{2}\right)$ e $y''(x) = \frac{1}{4}Y''\left(\frac{1-x}{2}\right)$.

Agora, fazendo $z = \frac{1-x}{2}$ em (1.47), vem

$$\frac{1-x}{2}\left(1-\frac{1-x}{2}\right)Y''\left(\frac{1-x}{2}\right) + \left[c-(a+b+1)\frac{1-x}{2}\right]Y'\left(\frac{1-x}{2}\right) - abY\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1-x^2}{4}Y''\left(\frac{1-x}{2}\right) + [2c-(a+b+1)+(a+b+1)x]\frac{1}{2}Y'\left(\frac{1-x}{2}\right) - abY\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0.$$

Logo,

$$(1-x^2)y''(x)+[2c-(a+b+1)+(a+b+1)x]y'(x)-aby(x)=0 \tag{1.50}$$

Comparando (1.45) e (1.50), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -2c+(a+b+1)=\beta-\alpha \\ a+b+1=\alpha+\beta+2 \\ -ab=n(n+\alpha+\beta+1) \end{cases} \tag{1.51}$$

Observemos que, em particular, $a=-n$, $b=n+\alpha+\beta+1$ e $c=\alpha+1$ é solução de (1.51), o que significa que

$$y(x)=F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

é solução da equação diferencial (1.45) satisfeita pelos polinômios de Jacobi.

Por outro lado, o teorema 1.10 afirma que não existe solução polinomial de (1.45) que seja linearmente independente de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Logo,

$$cP_n^{(\alpha,\beta)}(x)=y(x)=F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right).$$

Observe que, fazendo $x=1$, temos $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\dfrac{(\alpha+1)_n}{n!}$. Por outro lado, $F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;0)=1$. Logo, temos (1.49).

Aplicando a transformada da seção 1.1.2, obtemos a seguinte e importante transformação da equação diferencial do Polinômio de Jacobi:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left\{\frac{1}{4}\frac{1-\alpha^2}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\beta^2}{(1+x)^2}+\frac{n(n+\alpha+\beta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)/2}{1-x^2}\right\}u=0, \tag{1.52}$$

$$u=u(x)=(1-x)^{(\alpha+1)/2}(1+x)^{(\beta+1)/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x);$$

ou ainda,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left\{\frac{1/4-\alpha^2}{4\text{sen}^2\theta/2}+\frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2\theta/2}+\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\right\}u=0, \tag{1.53}$$

$$u=u(\theta)=\left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta).$$

Polinômios de Gegenbauer

Fazendo $\alpha=\beta=\lambda-1/2$ nos polinômios de Jacobi, obtemos os **Polinômios de Gegenbauer ou ultraesféricos**, que são ortogonais no intervalo $[-1,1]$, com relação à função peso

$w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

A notação usual para os polinômios ultraesféricos é $P_n^{(\lambda)}(x)$, onde

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x), \quad \alpha = \lambda - 1/2. \end{aligned} \tag{1.54}$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é dada por:

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\lambda)}(x), P_m^{(\lambda)}(x) \rangle &= \int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n \\ \dfrac{\pi 2^{1-2\lambda}}{n!(n+\lambda)} \dfrac{\Gamma(n+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2}, & \text{se} \quad m = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Os três primeiros polinômios Ultrasféricos são:

$$\begin{aligned} P_0^{(\lambda)}(x) &= 1; \\ P_1^{(\lambda)}(x) &= 2\lambda x; \\ P_2^{(\lambda)}(x) &= 2\lambda(\lambda+1)x^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Os Polinômios ultrasféricos satisfazem à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0. \tag{1.56}$$

Aplicando a transformada da seção 1.1.2, obtemos a seguinte e importante transformação da equação diferencial do Polinômio Ultrasférico:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{ \frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2} + \frac{1/2+\lambda-\lambda^2+x^2/4}{(1-x^2)^2} \right\} u = 0, \tag{1.57}$$

$$u = u(x) = (1-x^2)^{\lambda/2+1/4} P_n^{(\lambda)}(x);$$

ou

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left\{ (n+\lambda)^2 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\text{sen}^2\theta} \right\} u = 0, \;\; u = u(\theta) = (\text{sen}^2\theta)^{\lambda} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta). \tag{1.58}$$

Polinômios de Laguerre - $L_n^{(\alpha)}(x)$

Os **polinônios de Laguerre** são ortogonais no intervalo $[0,\infty)$, com relação à função peso $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1$, e podem ser definidos, pela Fórmula de Rodrigues, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n}e^{-x}\right].$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte

$$\left\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\right\rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \begin{cases} 0 & \text{, se } n \neq m; \\ n!\Gamma(\alpha+n+1) & \text{, se } n = m. \end{cases}$$

Obtemos também a relação de recorrência de três termos através de (1.20), que é dada por:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x-(2n+\alpha+1)]L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n = 1,2,\ldots$$

Dessa forma, temos que os quatro primeiros polinômios de Laguerre são:

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)} &= 1; \\ L_1^{(\alpha)} &= x-\alpha-1; \\ L_2^{(\alpha)} &= x^2-2(\alpha+2)x+(\alpha+2)(\alpha+1); \\ L_3^{(\alpha)} &= x^3-3(\alpha+3)x^2+3(\alpha+3)(\alpha+2)x-(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1). \end{aligned}$$

Esses polinômios satisfazem a seguinte equação diferencial:

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0.$$

Aplicando a transformada da Seção 1.1.3, obtemos

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{\frac{n+(\alpha+1)/2}{x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\right\}u = 0, \tag{1.59}$$

cuja solução é dada por

$$u = u(x) = e^{-x/2}x^{(\alpha+1)/2}L_n^{(\alpha)}(x).$$

Fazendo o limite $\lim\limits_{\beta\to\infty} {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\beta^{-1}x)$, obtemos a série hipergeométrica

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+v-1)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+v-1)}\frac{x^v}{v!}.$$

Pode-se, então, demonstrar que (ver Szegö [15], p. 103) $L_n^{(\alpha)}(x)$ é dado em termos das funções hipergeométricas, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n;\alpha+1;x). \tag{1.60}$$

Daí, obtemos a importante relação entre os polinômios de Jacobi e de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(1 - 2\beta^{-1}x).$$

Como conseqüência, se $l_{n,1}^{(\alpha)} < ... < l_{n,n}^{(\alpha)}$ denotam os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$, temos:

$$l_{n,n-j+1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{2}(1 - x_{n,j}^{(\alpha,\beta)}),\ j = 1, ..., n.$$

Portanto, obtemos os seguintes resultados para o menor e maior zeros do polinômio de Laguerre:

$$l_{n,1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{2}(1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}) \tag{1.61}$$

e

$$l_{n,n}^{(\alpha)} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta}{2}(1 - x_{n,1}^{(\alpha,\beta)}). \tag{1.62}$$

Polinômios de Hermite - $H_n(x)$

Os **polinômios de Hermite** são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ e são definidos pela fórmula de Rodrigues por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}.\right] \tag{1.63}$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte:

$$\langle H_n, H_m\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{, se } n \neq m; \\ \pi^{1/2}2^n n! & \text{, se } n = m, \end{cases}$$

e a relação de recorrência de três termos dos polinômios de Hermite pode ser obtido através de (1.20), ou também, podemos deduzi-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}}\left[e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}\left[\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right] \\
&= 2(-1)^n e^{x^2}\frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}\left[xe^{-x^2}\right] \\
&= 2(-1)^n e^{x^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}x\right)\left(\frac{d^{(n-k)}}{dx^{(n-k)}}\left[e^{-x^2}\right]\right) \\
&= 2(-1)^n e^{x^2}\left(x\frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}\left[e^{-x^2}\right] + n\frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}}\left[e^{-x^2}\right]\right) \\
&= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que os quatro primeiros polinômios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

Os polinômios de Hermite satisfazem a seguinte equação diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Aplicando a transformada da Seção 1.1.3, obtemos que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)u = 0, \tag{1.64}$$

cuja solução é dada por

$$u = u(x) = e^{-x/2}x^{(\alpha+1)/2}L_n^{(\alpha)}(x).$$

Um resultado muito interessante sobre os zeros de $H_n(x)$, demonstrado por Elbert e Laforgia em [8], é o seguinte:

Teorema 1.11. *Sejam $x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$, os zeros do polinômio ultraesférico $P_n^{(\lambda)}(x)$ e sejam $h_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, os zeros do polinômio de Hermite $H_n(x)$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Mais precisamente, Elbert e Laforgia em [8], mostraram a seguinte fórmula

$$\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}\left[1 - \frac{2n - 1 + 2h_{n,k}^2}{8\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \quad (\lambda \to \infty). \tag{1.65}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Capítulo 2

Teoremas de Sturm-Liouville

Consideremos a equação da onda simples

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0, \tag{2.1}$$

onde k é uma constante positiva e a equação geral de Sturm-liouville

$$y''(x) + F(x)y(x) = 0, \tag{2.2}$$

onde $F(x)$ é positiva e contínua em (a, b).

Relembremos a interpretação cinemática das equações (2.1) e (2.2). A primeira equação escrita na forma

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = 0$$

é aquela do oscilador harmônico, onde $x(t)$ é a posição da partícula P no tempo t movendo-se ao longo do eixo sobre a influência de uma força central proporcional a distância de P à origem O. Os zeros de $x(t)$ são simplesmente os tempos de passagem de P por O. A freqüência da oscilação é constante e para uma condição inicial dada a amplitude é constante. A segunda equação

$$\ddot{x}(t) + F(t)x(t) = 0$$

descreve um caso mais geral de movimento retilíneo sobre uma força central. Este movimento ainda é proporcional a distância de P a O, mas o fator de proporcionalidade $F(t)$ depende do tempo t. As oscilações variam em freqüência e amplitude, há amortecimentos, a força pode até mesmo ser mais fraca para puxar a partícula até o centro ou para impedí-la de escapar para o infinito.

A equação (2.1) tem soluções

$$y_1(x) = \text{sen}(kx) \text{ e } y_2(x) = \cos(kx),$$

as quais, como é obvio, são oscilatórias em $(-\infty, \infty)$.

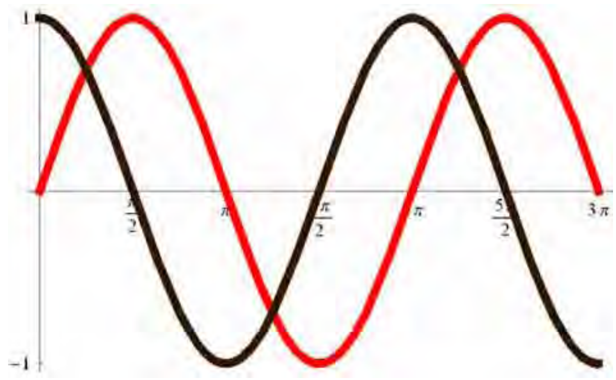

Figura 2.1: Gráfico de sin(x) e cos(x)

Observemos dois fenômenos interessantes. O primeiro é de que os zeros, das soluções linearmente independentes da equação (2.1), se entrelaçam. Podemos esperar então que, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes de uma equação diferencial de Sturm-Liouville, então entre dois zeros consecutivos de uma solução, há um zero da outra solução. A segunda observação é que a distância entre dois zeros consecutivos é π/k e torna-se menor quanto maior k. Outro fato interessante para se discutir e analisar é o de comparar duas equações da forma

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \text{ e } Y''(x) + F(x)Y(x) = 0,$$

pois, pelo princípio heurístico, uma força maior deverá oscilar mais do que uma força mais fraca. Para exemplificar, consideremos as seguintes equações diferenciais

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad e \quad Y''(x) + 9Y(x) = 0,$$

cujas soluções são, respectivamente, $y(x) = \text{sen}(x)$ e $Y(x) = \text{sen}(3x)$. É fácil ver que entre dois zeros quaisquer de $y(x)$ há zeros de $Y(x)$. Veja figura 2.2.

Provaremos que estes fenômenos observados ocorrem para as soluções de todas as equações diferenciais de Sturm-Liouville.

Nas seções a seguir, faremos uma discussão do comportamento dos zeros de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes variáveis, isto é, de equações da forma (2.2).

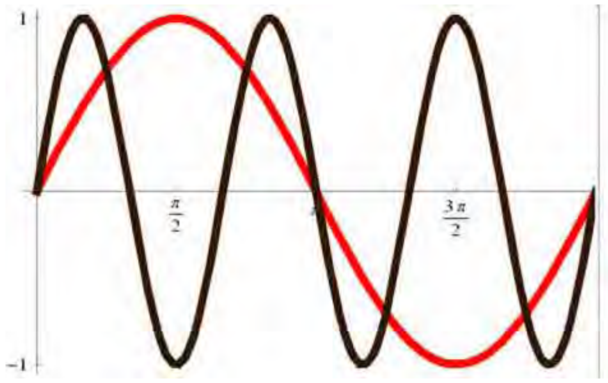

Figura 2.2: Gráfico de sin(x) e sin(3x)

2.1 Teorema de Separação de Sturm

Teorema 2.1. *(Teorema de Separação de Sturm): Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogênea (2.2) em um intervalo (a, b) e suponha que $y_1(x)$ tenha pelo menos dois zeros neste intervalo. Se ξ_1 e ξ_2 são dois zeros consecutivos de $y_1(x)$, então $y_2(x)$ tem um único zero no intervalo (ξ_1, ξ_2).*

Demonstração:

Sejam ξ_1 e ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) dois zeros consecutivos de $y_1(x)$ no intervalo (a, b), isto é, $y_1(\xi_1) = y_1(\xi_2) = 0$ e $y_1(x)$ é não nulo para $\xi_1 < x < \xi_2$. Mostraremos que existe exatamente um único ponto η entre ξ_1 e ξ_2 tal que $y_2(\eta) = 0$. (Ver figura 2.3)

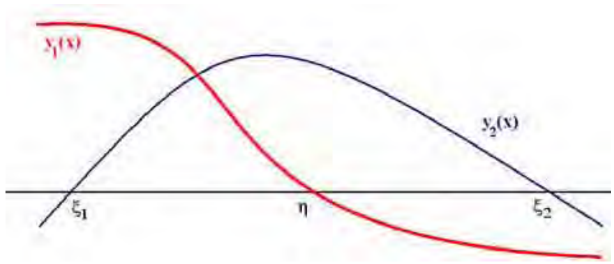

Figura 2.3:

Desde que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação (2.2), segue do Teorema (1.2) que o Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é não nulo em (a, b). Mais ainda, pela Fórmula de Abel (1.8) temos que

$$W(y_1, y_2; x) = C \neq 0,$$

onde C é uma constante, para todo x em (a,b). Assim, o Wronskiano não muda de sinal nesse intervalo. Desde que os valores do Wronskiano em $x=\xi_1$ e $x=\xi_2$ são

$$W(\xi_1)=-y_2(\xi_1)y_1'(\xi_1) \ \ e \ \ W(\xi_2)=-y_2(\xi_2)y_1'(\xi_2).$$

e desde que ξ_1 e ξ_2 são zeros consecutivos de $y_1(x)$, a derivada de $y_1(x)$ tem sinais opostos em ξ_1 e ξ_2 $(sgn(y_1'(\xi_1))=-sgn(y_1'(\xi_2)))$. Logo, $y_1(\xi_1)$ e $y_2(\xi_2)$ tem sinais opostos $(sgn(y_2(\xi_1))=-sgn(y_2(\xi_2)))$. Segue então que existe η entre ξ_1 e ξ_2 tal que $y_2(\eta)=0$. Este ponto η é único, pois se não fosse, pelo mesmo argumento utilizado existiria um outro zero de $y_1(x)$ entre ξ_1 e ξ_2 o que contradiz o fato desses zeros serem consecutivos. Portanto, $y_2(x)$ tem exatamente um único zero no intervalo (ξ_1,ξ_2). ■

Corolário 2.1. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes de (2.2) em um intervalo I. Então os zeros de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se alternam em I.*

2.2 Teorema de Comparação de Sturm

Teorema 2.2. *Sejam $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x)+f(x)y(x)=0 \ \ e \ \ Y''(x)+F(x)Y(x)=0$$

em um intervalo $I=(a,b)$, com $f(x)<F(x)$ funções contínuas para todo x em I. Suponha que a primeira equação tenha uma solução $y(x)$ com dois zeros consecutivos ξ_1 e ξ_2, onde $a<\xi_1<\xi_2<b$. Se $Y(x)$ é uma solução da segunda equação com um zero $x=\xi_1$, então $Y(x)$ tem pelo menos um zero η com $\xi_1<\eta<\xi_2$.

Demonstração:

Multiplicando a primeira equação por por $Y(x)$, a segunda por $y(x)$ e subtraindo os resultados, obtemos

$$Y''(x)y(x)-y''(x)Y(x)+[F(x)-f(x)]y(x)Y(x)=0.$$

A integração com respeito a x, de ξ_1 a ξ_2, implica que

$$[y(x)Y'(x)-Y(x)y'(x)]_{\xi_1}^{\xi_2}+\int_{\xi_1}^{\xi_2}[F(x)-f(x)]y(x)Y(x)dx=0$$

ou seja,

$$-Y(\xi_2)y'(\xi_2)+\int_{\xi_1}^{\xi_2}[F(x)-f(x)]y(x)Y(x)dx=0. \tag{2.3}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $y(x) > 0$ para todo $x \in (\xi_1, \xi_2)$, daí segue que $y'(\xi_2) \leq 0$. Se $Y'(\xi_1) > 0$ e $Y(x) > 0$ em todo intervalo (a, b) então

$$-Y(\xi_2)y'(\xi_2) > 0 \text{ e } \int_{\xi_1}^{\xi_2} [F(x) - f(x)]y(x)Y(x)dx > 0.$$

o que é contradição. Agora se $Y'(\xi_1) < 0$ e $Y(x) < 0$ em (a, b) segue que

$$-Y(\xi_2)y'(\xi_2) < 0 \text{ e } \int_{\xi_1}^{\xi_2} [F(x) - f(x)]y(x)Y(x)dx < 0.$$

o que é novamente uma contradição. Portanto, $Y(x)$ não pode permanecer com o mesmo sinal em todo intervalo (a, b). ∎

Teorema 2.3. *Sejam $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad e \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

em um intervalo $I = (a, b)$. Suponha que $f(x)$ e $F(x)$ são funções contínuas, com $f(x) < F(x)$, para todo x em I. Então entre dois zeros de $y(x)$ há pelo menos um zero de $Y(x)$.

Demonstração:

Sejam ξ_1 e ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ dois zeros consecutivos de $y(x)$ em (a, b) e suponha que $Y(x)$ não se anula para $\xi_1 < x < \xi_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $y(x)$ é positiva em (ξ_1, ξ_2). Seja $Y(x) > 0$ em (ξ_1, ξ_2) (veja figura 2.4). Então avaliando o Wronskiano de $y(x)$ e

Figura 2.4: Funções $y(x)$ e $Y(x)$ positivas em (ξ_1, ξ_2)

$Y(x)$ em $x = \xi_1$ e $x = \xi_2$, temos que

$$W(y, Y; \xi_1) = -Y(\xi_1)y'(\xi_1) \leq 0 \quad e \quad W(y, Y; \xi_2) = -Y(\xi_2)y'(\xi_2) \geq 0. \tag{2.4}$$

Mas, por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y, Y; x) &= \frac{d}{dx}[y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x)] \\ &= y(x)Y''(x) - Y(x)y''(x) \\ &= -y(x)F(x)Y(x) + y(x)f(x)y(x) \\ &= y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] < 0. \end{aligned}$$

Portanto, o Wronskiano de $y(x)$ e $Y(x)$ é uma função decrescente em $[\xi_1, \xi_2]$, o que contradiz (2.4). Agora, se $Y(x) < 0$ em (ξ_1, ξ_2), temos que

$$W(y, Y; \xi_1) = -Y(\xi_1)y'(\xi_1) \geq 0, \quad W(y, Y; \xi_2) = -Y(\xi_2)y'(\xi_2) \leq 0$$

e

$$\frac{d}{dx}W(y, Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] < 0,$$

o que é novamente uma contadição. Portanto, $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (ξ_1, ξ_2). ■

Teorema 2.4. *Sejam $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad e \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

em um intervalo $I = (a, b)$, com $f(x) < F(x)$ funções contínuas para todo x em I. Suponha que x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ maior do que a e que $\lim_{x \to a^+} W(y, Y; x) = 0$, isto é, $\lim_{x \to a^+} \{y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x)\} = 0$. Então $Y(x)$ tem pelo menos um zero X_1 tal que $a < X_1 < x_1$.

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, que $y(x)$ é positiva e não identicamente nula em (a, x_1), onde x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ maior do que a e $\lim_{x \to a^+} W(y, Y; x) = 0$. Se $Y(x) > 0$ em (a, x_1), temos então que

$$W(y, Y; x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \geq 0.$$

Por outro lado, temos

$$\frac{d}{dx}W(y, Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] < 0$$

no intervalo (a, x_1), ou seja, $W(y, Y; x)$ é uma função decrescente em (a, x_1). Como

$$\lim_{x \to a^+} W(y, Y; x) = 0,$$

temos uma contradição. Agora se $Y(x) < 0$ em (a, x_1), então

$$W(y, Y; x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}W(y, Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] > 0,$$

o que é novamente uma contadição. Portanto, $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a, x_1).

Corolário 2.2. *Sejam $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad e \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

em um intervalo $I = (a, b)$, com $f(x) < F(x)$ funções contínuas para todo x em I. Suponha que $y(a) = 0$ ou $\lim_{x\to a^+} W(y, Y; x) = 0$ e que x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ maior do que a. Então $Y(x)$ tem pelo menos um zero X_1 tal que $a < X_1 < x_1$.

Teorema 2.5. *(Teorema de Comparação de Sturm): Sejam as funções $y(x)$ e $Y(x)$ soluções não triviais das equações diferenciais*

$$y'' + f(x)y = 0, \quad Y'' + F(x)Y = 0$$

e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e $X_1, X_2, \ldots, X_m$ zeros de $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, em um intervalo $I = (a, b)$. Suponha que $f(x)$ e $F(x)$ são contínuas, que

$$f(x) < F(x), \quad a < x < x_m$$

e que

$$\lim_{x\to a^+} [y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)] = 0. \tag{2.5}$$

Então,

$$X_k < x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Demonstração:

Este teorema decorre dos Teoremas 2.3 e 2.4. De fato, sejam $x_1 < \ldots < x_m$ e $X_1 < \ldots < X_m$ os zeros de $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente. Então, aplicando o Teorema 2.4 no intervalo (a, x_1) concluímos que $a < X_1 < x_1$. Agora, aplicando o Teorema 2.3 em cada intervalo (x_k, x_{k+1}), $k = 1, \ldots, n-1$, segue que $x_k < X_{k+1} < x_{k+1}$. ■

Observe que, na hipótese, podemos ter $f(x) \leq F(x)$ desde que $f(x) \not\equiv F(x)$ em cada um dos intervalos $[a, x_1]$ e $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Vamos formular mais um resultado que é conseqüência do teorema anterior e que será denominado *Teorema de Comparação Paramétrica.*

Corolário 2.3. *Seja*

$$y''(x; \mu) + F(x; \mu)y(x; \mu) = 0$$

uma família de equações diferenciais de Sturm tais que, para todo $\mu \in (c, d)$, a solução $y(x; \mu)$ desta equação possui zeros $a < \xi_1(\mu) < \ldots < \xi_m(\mu) < b$ distintos. Se $\dfrac{\partial F(x; \mu)}{\partial \mu}$ existe e é menor do que zero, então, todos os zeros $\xi_k = \xi_k(\mu)$ de $y(x; \mu)$ são funções crescentes de μ.

Teorema 2.6. *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$(H_1(x)y'(x))' + F_1(x)y(x) = 0 \quad e \quad (H_2(x)y'(x))' + F_2(x)y(x) = 0$$

em um intervalo I, e suponha que H_1, H_2, F_1, F_2 são positivas, contínuas, $H_2(x) < H_1(x)$ e $F_2(x) > F_1(x)$ para todo $x \in I$. Então entre dois zeros de $y_1(x)$ há pelo menos um zero de $y_2(x)$.

Para demonstração deste teorema consultar Hille [12].

Corolário 2.4. *Seja $y(x;\mu)$ uma família de funções com relação ao parâmetro μ. Se para todo $\mu \in (c,d)$ a solução $y(x;\mu)$ da equação diferencial*

$$(H(x,\mu)y(x;\mu))' + F(x;\mu)y(x;\mu) = 0$$

possui zeros $c < \xi_1(\mu) < \ldots < \xi_m(\mu) < d$ e se $\dfrac{\partial H(x;\mu)}{\partial \mu} > 0$ e $\dfrac{\partial F(x;\mu)}{\partial \mu} < 0$, então os zeros $\xi = \xi(\mu)$ de $y(x;\mu)$ são funções crescentes de μ.

2.3 Teorema de Convexidade

Teorema 2.7. *Sejam $F(x)$ uma função contínua e decrescente em (a,b) e $y(x)$ uma solução não-trivial de*

$$y''(x) + F(x)y(x) = 0.$$

Se $x_1 < x_2 < x_3$ são três zeros consecutivos de $y(x)$, então $x_2 - x_1 < x_3 - x_2$, isto é, a seqüência de zeros de $y(x)$ é convexa. Similarmente, se $F(x)$ é crescente, a seqüência é côncava. Observe também que podemos reescrever a convexidade e a concavidade como, $x_3 - 2x_2 - x_1 > 0$ e $x_3 - 2x_2 - x_1 < 0$, respectivamente.

Demonstração:

Considere as equações

$$z''(x) + F(x + x_2)z(x) = 0 \;\; \text{e} \;\; Z''(x) + F(x + x_1)Z(x) = 0,$$

cujas soluções são $z(x) = y(x+x_2)$ e $Z(x) = y(x+x_1)$. Como, por hipótese, $F(x)$ é decrescente, temos que $F(x+x_2) < F(x+x_1)$. Desde que $z(0) = z(x_3 - x_2) = 0$ e $Z(0) = Z(x_2 - x_1) = 0$, pelo Teorema de Comparação de Sturm, segue o resultado. ■

2.4 Limites para as Distâncias entre Zeros

Consideremos os Teoremas de Comparação e de Convexidade de Sturm na seguinte forma:

Teorema 2.8. *Seja $y(x)$ uma solução não-trivial da equação diferencial de segunda ordem $y'' + F(x)y = 0$ em um intervalo (a, b), com $F(x)$ continua neste intervalo. Se $x_k < x_{k+1} < \dots$ denota os zeros consecutivos de $y(x)$ em (a, b), arranjados em ordem crescente, então:*

1. *Se existe $F_M > 0$ tal que $F(x) < F_M$ em (a, b) então*
$$\Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k > \frac{\pi}{\sqrt{F_M}}.$$

2. *Se existe $F_m > 0$ tal que $F(x) > F_m$ em (a, b) então*
$$\Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k < \frac{\pi}{\sqrt{F_m}}.$$

Demonstração:

Seja $x_k < x_{k+1}$ zeros consecutivos de $y(x)$. Como $y(x)$ é uma solução não trivial de $y'' + F(x)y = 0$, temos necessariamente que $y'(x_k)y'(x_{k+1}) \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $y(x)$ é positivo em (x_k, x_{k+1}). Então, $y'(x_k) > 0$ e $y'(x_{k+1}) < 0$ e portanto, a função
$$h(x) = \frac{-y'(x)}{y(x)}$$
satisfaz $\lim_{x\to x_k^+} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_{k+1}^-} h(x) = +\infty$. Além disso, $h(x)$ é diferenciável em (x_k, x_{k+1}) e
$$h'(x) = \frac{-y''(x)y(x) + y'(x)^2}{y(x)^2} = F(x) + h(x)^2.$$
Supondo agora que $F(x) < F_M$ para todo x em (a, b), onde $F_M > 0$, segue que $h' < F_M + h^2$ em (x_k, x_{k+1}). Seja $g(x) \equiv h'(x)/(F_M + h(x)^2) - 1 < 0$. Então
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon} g(x)dx < 0$$
ou seja,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arctan\left(\frac{h(x_{k+1}-\varepsilon)}{\sqrt{F_M}} \right) - \arctan\left(\frac{h(x_k+\varepsilon)}{\sqrt{F_M}} \right) \right] \Big/ \sqrt{F_M} - (x_{k+1} - x_k) < 0.$$
Logo, temos que
$$\frac{\pi}{\sqrt{F_M}} - (x_{k+1} - x_k) < 0.$$
Isto prova (1.). O item (2.) se prova de maneira análoga. ∎

Uma análise da prova mostra que o primeiro resultado ainda vale se existe um ponto em (a,b) onde $F(x) = F_M$ e $F(x) < F_M$ para os outros pontos. Por exemplo, encontramos este caso quando $F(x)$ alcança um máximo absoluto em (a,b), cujo valor é F_M. O segundo resultado do teorema pode ser generalizado da mesma maneira.

2.5 Forma Integral do Teorema de Sturm

Consideremos uma família parametrizada de funções $y(x,\mu)$ satisfazendo

$$(H(x,\mu)y'(x))' + F(x,\mu)y(x) = 0. \tag{2.6}$$

Lembremos que, pelo Corolário 2.4, se $H(x,\mu)$ é crescente e $F(x,\mu)$ é decrescente com relação ao parâmetro μ, então cada zero $\xi = \xi(\mu)$ é uma função crescente do parâmetro.

Elbert e Muldoon [10] obteram uma bonita fórmula para a derivada $\xi'(\mu)$ do zero ξ da solução $y(x)$ de (2.6). Esta fórmula é conhecida como *Fórmula de Richardson*. Demonstraremos esta fórmula a seguir:

Teorema 2.9. *(Fórmula de Richardson): Seja $y(x,\mu)$ solução de (2.6) para cada $x \in I$, e para cada μ em algum intervalo J. Suponha que as funções $H^{-1}(x,\mu)$ e $F(x,\mu)$ são continuamente diferenciáveis com respeito a ambas as variáveis. Então a solução $y = y(x,\mu)$ é também suave com respeito a x e a μ. Mais ainda, se os zeros da solução y são distintos, então cada zero ξ é uma função suave do parâmetro μ. Além disso, suponha que $y(a,\mu) = 0$ ou $y'(a,\mu) = 0$, onde a última derivada é com respeito à primeira variável. Então*

$$H(\xi,\mu)\Big[\frac{dy(x,\mu)}{dx}\Big|_{x=\xi}\Big]^2\,\xi'(\mu) = \int_a^\xi \left[-\,\frac{\partial F(x,\mu)}{\partial\mu}\,[y(x,\mu)]^2 + \frac{\partial H(x,\mu)}{\partial\mu}\,\Big[\frac{dy(x,\mu)}{dx}\Big]^2\right]dx. \tag{2.7}$$

<u>Demonstração</u>:

Diferenciando (2.6) com respeito ao parâmetro obtemos

$$D_x[H_\mu y_x + H y_{\mu x}] + F_\mu y + F y_\mu = 0. \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.6) por y_x e (2.8) por $(-y)$ e somando, obtemos

$$D_x[H y_x y_\mu - H y y_{\mu x} - H_\mu y_x y] = F_\mu y^2 + H_\mu y_\mu^2. \tag{2.9}$$

Agora, se $y(a,\mu)y_x(a,\mu) = 0$ para cada $\mu \in J$ e se, $\xi = \xi(\mu)$ é outro zero de $y(x,\mu)$, vemos, integrando (2.9) de a até ξ, que

$$H(\xi,\mu)y_x(\xi,\mu)y_\mu(\xi,\mu) = \int_a^\xi [F_\mu y^2 + H_\mu y_\mu^2]dx. \tag{2.10}$$

Também, diferenciando $y(\xi, \mu) = 0$, temos

$$y_x(\xi, \mu)\xi'(\mu) + y_\mu(\xi, \mu) = 0. \tag{2.11}$$

Então, substituindo (2.11) em (2.10), obtemos finalmente a fórmula de Richardson (2.7).

É óbvio que, quando $H(x, \mu) \equiv 1$, para os zeros da equação diferencial de Sturm-Liouville $y''(x) + F(x)y(x) = 0$, temos

$$\left[\frac{dy(x,\mu)}{dx}\Big|_{x=c}\right]^2 c'(\mu) = -\int_a^c \frac{\partial F(x,\mu)}{\partial \mu}\,[y(x,\mu)]^2 dx. \tag{2.12}$$

Consideremos agora o caso onde o ponto a é um ponto singular da equação diferencial. Assumimos novamente que $H(x, \mu) \equiv 1$. Então, se a é o ponto extremo esquerdo do intervalo I, para $\xi > a$ obtemos, como acima,

$$y_x(\xi, \mu)y_\mu(\xi, \mu) + [yy_{\mu x} - y_x y_\mu]\Big|_{x=a+\epsilon} = \int_{a+\epsilon}^{\xi} [F_\mu y^2] dx, \tag{2.13}$$

para cada $\epsilon > 0$. Obtemos o resultado (2.12) novamente, desde que a integral do lado direito da igualdade existe e desde que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} [y(a+\epsilon)y_{\mu x}(a+\epsilon) - y_x(a+\epsilon)y_\mu(a+\epsilon)] = 0. \tag{2.14}$$

■

Capítulo 3

Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros

3.1 Aplicações do Teorema de Comparação para Zeros

Neste capítulo, fizemos um estudo detalhado de alguns artigos que utilizam o Teorema de Comparação de Sturm para obter propriedades de monotonicidade e convexidade sobre zeros de alguns polinômios ortogonais clássicos.

3.1.1 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi

O resultado descrito a seguir, que é devido a Szegő [15], é uma aplicação direta do Teorema de Comparação de Sturm 2.5.

Para iniciar, consideremos os parâmetros α e β definidos apenas entre $-1/2$ e $1/2$, mais precisamente, $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$, excluindo, em geral, o caso $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$. Agora, denotemos por $x_{n,\nu} = x_{n,\nu}(\alpha, \beta)$, $\nu = 1, \ldots, n$, os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, arranjados em ordem decrescente, ou seja, $-1 < x_{n,n} < \ldots < x_{n,1} < 1$. Fazendo a mudança $x = \cos\theta$, temos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ são dados por $\theta_{n,\nu} = \arccos x_{n,\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$, com $0 < \theta_{n,1} < \ldots < \theta_{n,n} < \pi$.

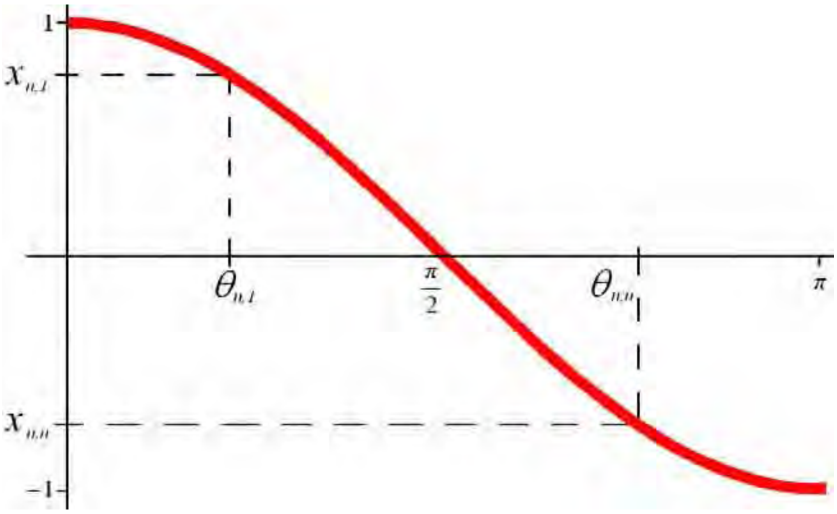

Figura 3.1: Gráfico de $x = \cos\theta$

Teorema 3.1. *Sob as condições acima mencionadas, temos:*

$$\theta_{n,v} - \theta_{n,\nu-1} < \frac{\pi}{n + (\alpha+\beta+1)/2}, \quad \nu = 1, 2, ..., n+1, \tag{3.1}$$

que vale para $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$, com o sinal de $=$ no lugar de $<$. Aqui,

$$\theta_{n,0} \quad := \quad \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha > -1/2 \\ -\theta_{n,1} & , \text{ se } \alpha = -1/2 \end{cases}$$

e

$$\theta_{n,n+1} \quad := \quad \begin{cases} \pi & , \text{ se } \beta > -1/2 \\ 2\pi - \theta_{n,n} & , \text{ se } \beta = -1/2 \end{cases}$$

Demonstração:

Notemos que, para

$$\begin{gathered} \alpha = \beta = -1/2 \Rightarrow \theta_{n,\nu} = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \qquad \alpha = \beta = +1/2 \Rightarrow \theta_{n,\nu} = \nu\frac{\pi}{n+1}, \\ \alpha = -\beta = +1/2 \Rightarrow \theta_{n,\nu} = \nu\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad \alpha = -\beta = -1/2 \Rightarrow \theta_{n,\nu} = \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi, \end{gathered} \tag{3.2}$$

para $\nu = 0, 1, ..., n+1$.

A desigualdade (3.1) segue imediatamente do Teorema de Comparação de Sturm 2.5, quando comparamos a equação (1.53), isto é,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + F_n(\theta; \alpha, \beta)u = 0,$$

$$F_n(\theta;\alpha,\beta) = \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4\mathrm{sen}^2(\theta/2)} + \frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)} + \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$$

cuja solução é

$$u(\theta) = \left(\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta),$$

com

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + f_n(\theta;\alpha,\beta)v = 0, \quad f_n(\theta;\alpha,\beta) = \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \tag{3.3}$$

com solução

$$v = \mathrm{sen}(n + (\alpha+\beta+1)/2)(\theta - \theta_{n,\nu-1}).$$

De fato, como $F_n > f_n$ temos que (1.53) é um majorante "Sturminiano" de (3.3). Assim, como $\theta_{n,\nu-1}$ é um zero de v, o próximo zero de v, o qual denotamos por $\bar{\theta}$, ocorre depois de $\theta_{n,\nu}$.

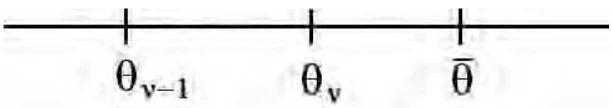

Figura 3.2: Desigualdades sobre zeros de Jacobi

Portanto, temos então que, $\theta_{n,\nu} - \theta_{n,\nu-1} < \bar{\theta} - \theta_{n,\nu-1} = \dfrac{\pi}{n + (\alpha+\beta+1)/2}$. ■

Teorema 3.2. *Sob as condições mencionadas no teorema anterior, temos:*

$$\frac{\nu + (\alpha+\beta-1)/2}{n + (\alpha+\beta+1)/2}\pi < \theta_{n,\nu} < \frac{\nu}{n + (\alpha+\beta+1)/2}\pi, \quad \nu = 1, 2, ..., n. \tag{3.4}$$

<u>Demonstração</u>:

Os limites (3.4) seguem da soma de (3.1) para $\nu = 1, 2, ..., n+1$, e do fato de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$. Com efeito,

$$\theta_{n,\nu} = (\theta_{n,1} - \theta_{n,0}) + (\theta_{n,2} - \theta_{n,1}) + \cdots + (\theta_{n,\nu} - \theta_{n,\nu-1}) < \nu\frac{\pi}{n + (\alpha+\beta+1)/2}$$

e

$$\pi - \theta_{n,n+1-\nu} = \theta_{n,\nu} < \frac{\nu}{n + (\alpha+\beta+1)/2}\pi$$

ou seja,

$$\theta_{n,n+1-\nu} > \pi\left(1 - \frac{\nu}{n + (\alpha+\beta+1)/2}\right) = \pi\frac{n - \nu + \frac{\alpha+\beta+1}{2}}{n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}}.$$

Fazendo a mudança $n+1-\nu=\mu$, temos

$$\theta_{n,\mu} > \pi \frac{\mu - 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2}}{n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}} = \pi \frac{\mu + \frac{\alpha+\beta-1}{2}}{n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}}.$$

No caso $\alpha = -1/2$, o fator ν do limite superior pode ser substituído por $\nu - 1/2$.

Se $\beta = -1/2$, o fator $\nu + (\alpha+\beta+1)/2$ do limite inferior pode ser substituído por $\nu + (\alpha+\beta)/2$.

Nos casos (3.2), valem os mesmos limites, com o sinal de $=$ no lugar de $<$. ■

3.1.2 Limites Superiores para os Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Seja $x_{nk}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, os zeros, arranjados em ordem decrescente, dos polinômios ultraesféricos $P_n^{(\lambda)}(x)$. Elbert e Laforgia em [7] estabeleceram limites superiores para $x_{nk}(\lambda)$. A ferramenta usada para obter esses limites é o Teorema de Comparação 2.5.

A idéia para resolver este problema é comparar a equação diferencial (1.57)

$$y'' + F(x)y = 0, \tag{3.5}$$

onde

$$F(x) = \left[\frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2} + \frac{1/2 + \lambda - \lambda^2 + x^2/4}{(1-x^2)^2}\right]$$

satisfeita por $u_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda/2+1/4} P_n^{(\lambda)}(x)$ com a equação diferencial

$$\widetilde{y}'' + \widetilde{F}(x)\widetilde{y} = 0, \tag{3.6}$$

onde $\widetilde{F}(x) < F(x)$ e cujos zeros da solução são conhecidos. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 3.3. *Seja $\rho(x)$ definido por*

$$\rho(x) = [\varphi'(x)]^{-1/2}. \tag{3.7}$$

Então as funções

$$v_1(x) = \rho(x)\cos\varphi(x), \quad v_2(x) = \rho(x) sen\varphi(x) \tag{3.8}$$

são soluções da equação diferencial

$$v'' + \left([\varphi']^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right)v = 0. \tag{3.9}$$

Demonstração:

A demonstração é facilmente verificada por substituição. ∎

Para o nosso propósito, tomemos

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{(A - Bs^2)^{1/2}}{1 - s^2} ds, \quad 0 < A < B, \; |x| \leq \sqrt{A/B}. \tag{3.10}$$

Claramente, $\varphi(x)$ é uma função estritamente crescente. As constantes A e B serão determinadas mais tarde. Fazendo a mudança

$$x = \sqrt{A/B}\mathrm{sen}\theta, \quad s = \sqrt{A/B}\mathrm{sen}\theta, \quad |\theta| < \pi/2 \tag{3.11}$$

a integral (3.10) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{A}{\sqrt{B}} \int_0^\theta \frac{\cos^2 t}{1 - (A/B)\mathrm{sen}^2 t} dt \\ &= \sqrt{B} I(\theta) \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde

$$I(\theta) = \theta - \sqrt{\frac{B - A}{B}} \arctan\left(\sqrt{\frac{B - A}{B}} \tan\theta\right). \tag{3.13}$$

Por (3.8) a função $v_1(x)$ tem zeros onde $\varphi(x) = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ e a função $v_2(x)$ tem zeros onde $\varphi(x) = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$. Suponha primeiramente n par e denotemos por $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ as soluções da equação

$$\varphi(\widehat{x}_{nk}(\lambda)) = (n + 1 - 2k)\pi/2, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.14}$$

desde que eles existam. Para assegurar a existência de todos os $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$, precisamos da relação

$$\varphi(\sqrt{A/B}) \geq (n - 1)\pi/2, \tag{3.15}$$

que será mostrada mais adiante.

Claramente, $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ são os zeros de $v_1(x)$ quando n é par. Similarmente, é fácil ver que $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ definido por (3.14) são zeros de $v_2(x)$ quando n é ímpar. Usando (3.12) e (3.11) a relação (3.14) pode ser escrita como

$$\widehat{x}_{nk}(\lambda) = \sqrt{A/B}\mathrm{sen}\theta_{nk}(\lambda) = \sqrt{A/B}\mathrm{sen} I^{-1}\left(\frac{n + 1 - 2k}{\sqrt{B}} \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Agora, escolhemos os valores de A e B de tal maneira que a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" para (3.9) no intervalo $(-\sqrt{A/B}, \sqrt{A/B})$. Para isso, pomos

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 2\lambda n + \varepsilon \\ B &= (n + \lambda)^2 + \delta \end{aligned} \tag{3.17}$$

e consideremos a diferença entre os coeficientes $(F(x) - \widetilde{F}(x))$ das equações diferenciais (3.5) e (3.9)

$$\left[\frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2} + \frac{1/2+\lambda-\lambda^2+x^2/4}{(1-x^2)^2}\right] - \left([\varphi']^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right), \quad |x| < \sqrt{A/B}. \tag{3.18}$$

De (3.10) obtemos

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi} = -\frac{1}{2}(\log\varphi')' = \frac{Bx}{2(A-Bx^2)} - \frac{x}{1-x^2} \tag{3.19}$$

e diferenciando obtemos

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = \frac{\rho''}{\rho} - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi}\right)'$$

e

$$\frac{\rho''}{\rho} = \frac{3B^2x^2+2AB}{4(A-Bx^2)} - \frac{Bx^2}{(1-x^2)(A-Bx^2)} - \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

Conseqüentemente (3.18) pode ser escrito como

$$\frac{G(x)}{4(1-x^2)^2(A-Bx^2)},$$

onde

$$\begin{aligned} G(x) &= 4B^2\delta x^6 + [4B^2(\lambda-\varepsilon) - 4B^2 - 8AB\delta + 4AB]x^4 \\ &\quad + [4A^2\delta - 8AB(\lambda-\varepsilon) + A^2 - 4AB + 3B^2]x^2 \\ &\quad + 4A^2(\lambda-\varepsilon) + 2AB - 2A^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Assim, a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" de (3.9) se $G(x) > 0$ para $|x| < \sqrt{A/B}$.

No lema a seguir, damos três exemplos de escolhas para ε e δ tais que $G(x) > 0$.

Lema 3.4. *A função $G(x)$ definida por (3.20) é positiva no intervalo $(-\sqrt{A/B}, \sqrt{A/B})$ nos seguintes casos*

(i) $\varepsilon = \delta = 0, \quad \lambda > 0$

(ii) $\varepsilon = \delta = \lambda, \quad \lambda > 0$

(iii) $\varepsilon = \lambda, \quad \delta = 0, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < 0$ *ou* $\lambda \geq 1$.

Demonstração:

Caso (i): Desde que $B - A = \lambda^2$ de (3.20) temos

$$\begin{aligned} G(x) &= 4(B^2\lambda - B^2 + AB)x^4 + (-8AB\lambda + A^2 - 4AB + 3B^2)x^2 \\ &\quad + 4A^2\lambda + 2AB - 2A^2 \\ &= 4\lambda(A-Bx^2)^2 + \lambda^2 q(x^2), \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde

$$q(t) = -4Bt^2 + (3B - A)t + 2A. \tag{3.22}$$

O Primeiro termo do lado direito de (3.21) é claramente positivo; Assim, para provar que $G(x) > 0$ é suficiente mostrar que $q(t) > 0$ quando $0 \leq t < A/B$. É claro que $q(0) > 0$ e $q(A/B) = 5A(B - A)/B > 0$. Além disso, $q(t)$ é côncava, portanto, concluímos que $q(t) > 0$ para todo $t \in [0, A/B]$.

Caso (ii): Como no caso (i) temos $B - A = \lambda^2$ e

$$G(x) = 4\lambda x^2(A - Bx^2)^2 + \lambda^2 q(x^2),$$

onde $q(t)$ é definido por (3.22). Como no caso anterior, concluímos que $G(x) > 0$.

Caso (iii): Agora temos $B - A = \lambda^2 - \lambda$ e

$$G(x) = (\lambda^2 - \lambda)q(x^2)$$

o qual é positivo para $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ ou $\lambda > 1$. Assim, a prova do lema (3.4) está completa. ■

Agora estamos prontos para provar o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Para $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$ seja $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ o $k-$ésimo zero positivo em ordem decrescente dos polinômios ultraesféricos $P_n^{(\lambda)}(x)$. Então as desigualdades*

$$x_{nk}(\lambda) \leq \widehat{x}_{nk}(\lambda), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, [n/2] \tag{3.23}$$

são válidas para as seguintes escolhas de A e B em (3.17):

(i) $\varepsilon = \delta = 0, \quad \lambda > 0$

(ii) $\varepsilon = \delta = \lambda, \quad \lambda > 0$

(iii) $\varepsilon = \lambda, \quad \delta = 0, \quad -\frac{1}{3} \leq \lambda < 0$ *ou* $\lambda \geq 1$.

Quando $\lambda = 0$ os polinômios Ultraesféricos reduzem-se aos polinômios de Tchebycheff e temos igualdade em (3.23) em todos os casos. Se $\lambda = 1$ temos igualdade no caso (iii).

Demonstração:

Para assegurar a existência de $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ precisamos provar a desigualdade (3.15). Por (3.12) temos

$$\varphi(\sqrt{A/B}) = (\pi/2)(\sqrt{B} - \sqrt{B - A}).$$

Realmente, para o caso (i)

$$\varphi(\sqrt{A/B}) = n\frac{\pi}{2} > (n-1)\frac{\pi}{2}$$

e para o caso (ii)

$$\varphi(\sqrt{A/B}) = [\sqrt{(n+\lambda)^2+\lambda} - \lambda]\frac{\pi}{2} \geq n\frac{\pi}{2} > (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, para o caso (iii), obtemos para $\lambda \geq -1/3$

$$\varphi(\sqrt{A/B}) = [n+\lambda - \sqrt{\lambda^2-\lambda}]\frac{\pi}{2} \geq (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Distinguimos os casos de n par e ímpar. Para valores de n par temos

$$P_n^{(\lambda)}(0) \neq 0, \quad \frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x)\bigg|_{x=0} = 0.$$

Consideremos a solução $v_1(x) = \rho\cos\varphi$ da equação (3.9). Por (3.10), (3.7) e (3.19) temos

$$\varphi(0) = 0, \quad \rho(0) = \frac{1}{\sqrt[4]{A}}, \quad \rho'(0) = 0,$$

conseqüentemente $v_1(0) > 0$ e $v_1'(0) = 0$. Além disso, pelo lema (3.4) a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" de (3.9). Daí, aplicando o Teorema de Comparação de Sturm (2.5) no ponto $x = 0$ concluímos que o $k-$ésimo zero positivo de $P_n^{(\lambda)}(x)$ ocorre antes do $k-$ésimo zero de $v_1(x)$, o que prova a primeira parte do teorema. Para n ímpar,

$$P_n^{(\lambda)}(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x)\bigg|_{x=0} \neq 0.$$

Tomando então a solução $v_2(x) = \rho\text{sen}\varphi$ da equação (3.9), segue que $v_2(0) = 0$ e $v_1'(0) > 0$. Assim, pelo mesmo argumento anterior, a prova está completa. ■

A fórmula (3.16) para $\widehat{x}_{nk}(\lambda)$ permite-nos obter bons limites superiores para $x_{nk}(\lambda)$, mas infelizmente sua aplicação não é imediata. Portanto, é útil relatar aqui algumas conseqüências do Teorema 3.5 que estabelecemos como corolário.

Corolário 3.1. *Se A e B satisfazem as condições do Teorema 3.5, então vale as desigualdades*

$$x_{nk}(\lambda) \leq \sqrt{A/B}sen\left(\frac{n+1-2k}{\sqrt{B}-\sqrt{B-A}}\frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1,2,\ldots,[n/2]. \tag{3.24}$$

Demonstração:

Desde que $\sqrt{(B-A/B)} < 1$ de (3.12) temos que

$$\varphi(x) \geq \sqrt{B}(\theta - \sqrt{(B-A)/B}\theta)$$

ou

$$\theta < \frac{\varphi(x)}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}}.$$

Conseqüentemente por (3.11)

$$x \leq \sqrt{A/B}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}}. \tag{3.25}$$

Além disso, pelo Teorema 3.5, temos $\varphi(\widehat{x}_{nk}(\lambda)) \leq \varphi(x_{nk}(\lambda))$ (porque $\varphi(x)$ é uma função estritamente crescente). Aplicando (3.25) com $x = x_{nk}(\lambda)$ e levando em conta (3.14) obtemos o resultado desejado. ■

Observação: De (3.24) e do Teorema 3.5 obtemos imediatamente o interessante limite superior para o maior zero

$$x_{n1}(\lambda) < \frac{\sqrt{n^2 + 2\lambda n}}{n + \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

Agora vamos usar (3.12) para encontrar os primeiros três termos da expansão em série de $I^{-1}(\theta)$. Desta maneira, obtemos aproximações para $x_{nk}(\lambda)$ que são particularmente precisos quando k é próximo a $[n/2]$. Por simplicidade, usamos a notação

$$m = \sqrt{(B-A)/B}.$$

Então, $0 < m < 1$ e por (3.12)

$$I(\theta) = \theta - m \arctan(m \tan \theta).$$

Da expansão de $\tan\theta$ e $\arctan\theta$ encontramos

$$I(\theta) = (1 - m^2)\theta - \frac{m^2}{3}(1 - m^2)\theta^3 - \frac{m^2(1 - m^2)(2 - 3m^2)}{15}\theta^5 + \cdots$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$I^{-1}(\theta) = \frac{\theta}{(1 - m^2)} - \frac{m^2}{3}\left(\frac{\theta}{1 - m^2}\right)^3 - \frac{2m^2(1 + m^2)}{15}\left(\frac{\theta}{1 - m^2}\right)^5 + \cdots \tag{3.26}$$

Desta maneira, conseguimos um resultado que fornece aproximações para $x_{nk}(\lambda)$. Enunciaremos este resultado no corolário a seguir:

Corolário 3.2. *Se A, B e λ satisfazem as condições do Teorema 3.5. Então para $x_{nk}^{(\lambda)}$ temos a fórmula de aproximação*

$$x_{nk}(\lambda) \doteq \sqrt{A/B}\left[\tau + \frac{2m^2 - 1}{6}\tau^3 + \frac{16m^4 - 4m^2 + 1}{120}\tau^5\right], \tag{3.27}$$

onde

$$\tau = (n + 1 - 2k)\frac{\sqrt{B}}{A}\frac{\pi}{2}, \quad m^2 = \frac{B - A}{B}.$$

Demonstração:

De (3.16) temos que calcular os três primeiros termos da expansão em série de sen$I^{-1}(\theta)$ com $\theta = (n+1-2k)\pi/2\sqrt{B}$. Usando a fórmula (3.26) para $I^{-1}(\theta)$ encontramos a expansão desejada. ■

3.1.3 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi

Seja $x_{nk}(\alpha,\beta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ os zeros dos polinômios de Jacobi, arranjados em ordem decrescente. Elbert, Laforgia e Rodonó em [9], usaram o Teorema de Comparação de Sturm 2.5, como na seção anterior, para obter desigualdades para x_{nk}.

Para isso, consideremos a função

$$u(x) = (1-x)^{(\alpha+1)/2}(1+x)^{(\beta+1)/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.28}$$

que é solução da equação diferencial (1.52)

$$u'' + q(x)u = 0 \tag{3.29}$$

onde

$$q(x) = \frac{1}{4}\frac{1-\alpha^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1-\beta^2}{(1+x)^2} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)/2}{1-x^2} \tag{3.30}$$

para, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Introduzindo a notação

$$\widetilde{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}, \quad \widetilde{\beta} = \beta + \frac{1}{2}$$

e

$$A = (2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})^2, \quad B = 4n^2 + 4n(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}) - (\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta})^2, \quad C = 2(\widetilde{\alpha}^2 - \widetilde{\beta}^2)$$

a função $q(x)$ assume a forma

$$q(x) = \frac{B - Cx - Ax^2}{4(1-x^2)^2} + \frac{\frac{3}{4}+\widetilde{\alpha}}{4(1-x)^2} + \frac{\frac{3}{4}+\widetilde{\beta}}{4(1+x)^2} + \frac{(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})/4+\frac{1}{8}}{1-x^2}. \tag{3.31}$$

O polinômio quadrático $B - Cx - Ax^2$ pode ser escrito como

$$B - Cx - Ax^2 = A(a-x)(x-b)$$

onde

$$a, b = \frac{\widetilde{\beta}^2 - \widetilde{\alpha}^2 \pm \sqrt{16n(n+\widetilde{\alpha})(n+\widetilde{\beta})(n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})}}{(2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})^2}, \quad a > b. \tag{3.32}$$

É claro que $-1 \leq b < a \leq 1$ e, de (3.32)

$$\sqrt{(1-a)(1-b)} = \frac{2\widetilde{\alpha}}{2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}, \quad \sqrt{(1+a)(1+b)} = \frac{2\widetilde{\beta}}{2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}. \tag{3.33}$$

Agora, introduzimos a função $\varphi(x)$ por

$$\varphi(x) = \int_x^a \sqrt{\frac{B - Cs_a S^2}{4(1-s^2)^2}} ds = \tag{3.34}$$

$$= \frac{2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}{2} \int_x^a \frac{\sqrt{(a-s)(s-b)}}{1-s^2} ds, \quad b \leq x \leq a.$$

É facil ver que $\varphi(x)$ é decrescente com relação a x. Fazendo a substituição

$$t^2 = \frac{a-x}{x-b}, \quad 0 \leq t < \infty$$

em (3.34) obtemos

$$\varphi(x) = (2n+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}) \arctan t - \widetilde{\alpha} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} t\right) - \widetilde{\beta} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+b}{1+a}} t\right).$$

Esta fórmula pode ser verificada diretamente pela diferenciação com respeito a x, levando em conta a fórmula (3.33). Além disso, temos

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = n\pi.$$

Agora, definimos a função $\rho(x)$ por

$$\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}[(a-x)(x-b)]^{-1/4}. \tag{3.35}$$

Portanto, pelo Lema 3.3, as funções

$$v_1(x) = \rho(x)\operatorname{sen}\varphi(x), \quad v_2(x) = \rho(x)\cos\varphi(x) \tag{3.36}$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.9)

$$v'' + \left([\varphi']^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right) v = 0,$$

para $b < x < a$.

Por (3.36) e (3.35) temos

$$\lim_{x \to a^-} v_1(x) = \lim_{x \to b^+} v_1(x) = 0.$$

Conseqüentemente, a função $v_1(x)$ tem zeros em ξ_k, onde

$$\varphi(\xi_k) = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.37}$$

com os casos especiais

$$\xi_0 = a, \quad \xi_n = b.$$

Agora, estamos em condição de provar o seguinte resultado:

Teorema 3.6. *Para $k = 1, 2, \ldots, n$, seja $x_{nk} = x_{nk}(\alpha, \beta)$ o $k-$ésimo zero, em ordem decrescente, do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Então, para $\alpha > -1/2$ e $\beta > -1/2$ temos*

$$\xi_k < x_{nk} < \xi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

onde, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ são definidos por (3.37). Em particular $\xi_0 = a$ e $\xi_n = b$ são dados por (3.32).

Demonstração:

Aplicaremos o Teorema da Comparação de Sturm 2.5 para as equações diferenciais (3.29) e (3.9). Realmente, mostraremos que a equação diferencial (3.29) é um majorante "Sturminiano" de (3.9).

Por (3.31) e (3.34) temos que mostrar a desigualdade

$$\frac{\frac{3}{4} + \widetilde{\alpha}}{4(1-x)^2} + \frac{\frac{3}{4} + \widetilde{\beta}}{4(1+x)^2} + \frac{(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})/4 + \frac{1}{8}}{1 - x^2} + \frac{\rho''}{\rho} > 0, \quad \text{para} \quad b < x < a, \tag{3.38}$$

onde, $\widetilde{\alpha} > 0$, $\widetilde{\beta} > 0$ e ρ é definido por (3.35).

Por (3.35) temos

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{1}\frac{1}{a - x} - \frac{1}{4}\frac{1}{x - b} - \frac{x}{1 - x^2}$$

e

$$\frac{\rho''}{\rho} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)'.$$

Usando essas relações em (3.38) temos que provar a desigualdade

$$2[(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})x + \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}](x - a)^2(x - b)^2 + P(x) > 0$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2)(x - a)^2(x - b)^2 - 2x(1 - x^2)(2x - a - b)(a - x)(x - b) + \\ &= +(1 - x^2)^2\left[3x^2 - 3(a + b)x + \frac{5a^2 + 2ab + 5b^2}{4}\right]. \end{aligned}$$

Desde

$$(\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta})x+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}>0, \quad -1\le x\le 1,$$

precisamos mostrar somente que $P(x)\ge 0$ para $b<x<a$.

Com as notações

$$\frac{a+b}{2}=F, \quad ab=G,$$

o polinômio $P(x)$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} P(x) \;=\; P(x;F,G) \;=\; & (x^2-2)(x^2-2Fx+G)^2+4x(1-x^2)(x-F)\cdot \\ & \cdot(x^2-2Fx+G)+(x^2-1)(3x^2-6Fx+5F^2-2G). \end{aligned}$$

Desde

$$P(x;F,G)=P(-x;-F,G),$$

é suficiente para provar a desigualdade $P(x)\ge$ somente para $F\ge 0$. Observemos que

$$2F-1\le G\le 2xF-x^2, \quad b\le x\le a.$$

Certamente, a primeira desigualdade é equivalente a $(1-a)(1-b)\ge 0$ o que é claramente verdadeira. A segunda delas é equivalente a $(a-x)(x-b)\ge 0$ o que é também verdadeiro para $b\le x\le a$.

Agora, $P(x;F,G)$ é um polinômio quadrático em G e o coeficiente de G^2 é x^2-2 que é negativo em nosso caso. Conseqüentemente, a fim de provar que $P(x)\ge 0$, temos somente que checar as desigualdades nos pontos extremos $G=2F-1$ e $G=2xF-x^2$, isto é,

$$P(x;F,2F-1)\ge 0, \quad P(x;F,2xF-x^2)\ge 0.$$

No primeiro caso obtemos

$$P(x;F,2F-1)=(x-1)^3F[(x+3)F+2(x+1)(x-2)].$$

Claramente, $(x-1)^3<0$ e $F\ge 0$, assim, temos que mostrar somente que a expressão no intervalo $b<a<x$ é negativa. Desde que

$$F=\frac{a+b}{2}\le\frac{1+x}{2}$$

precisamos provar que $(x+3)\dfrac{1+x}{2}+2(x+1)(x-2)<0$. Mas, isto é verdade porque esta desigualdade é equivalente a $\frac{5}{2}(1+x)(x-1)<0$. Isso prova que $P(x;F,2F-1)\ge 0$. A desigualdade $P(x;F,2xF-x^2)\ge 0$ segue imediatamente observando que isto é equivalente a

$5(x-1)^2(F-x)^2 \geq 0$. Assim, podemos concluir que $P(x) > 0$ em $b < x < a$, ou equivalentemente, que a equação (3.29) é um majorante "Sturminiano" de (3.9). Conseqüentemente, aplicando o Teorema da Comparação de Sturm 2.5 nas equações (3.29) e (3.9), concluímos que entre dois zeros consecutivos ξ_k, ξ_{k-1} de $v_1(x)$ ocorre pelo menos um zero de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Mas sabemos que no intervalo $(-1,1)$ a exatamente n zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, daí podemos concluir que em cada intervalo (ξ_k, ξ_{k-1}) ocorre exatamente o zero $x_{nk}(\alpha,\beta)$ de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. ∎

3.1.4 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Denotemos por $x_{nk}(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, os zeros positivos do polinômio ultraesférico $P_n^{(\lambda)}(x)$. Sabemos que $x_{nk}(\lambda)$ são funções decrescentes de λ. Entretanto, a questão muito natural é avaliar quantitativamente o comportamento dos zeros positivos. Uma forma natural para fazer tal avaliação é determinar a função extrema $f_n(\lambda)$ para a qual os produtos $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$, tornam-se funções crescentes de λ. O professor Askey conjecturou que a função apropriada será $f(\lambda) = \sqrt{\lambda+1}$. Esta conjectura foi estabelecida parcialmente em [4], pelo menos para n suficientemente grande e quando o parâmetro λ é relativamente pequeno. Esta conjectura foi provada por Ahmed, Muldoon e Spigler em [1] para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\lambda \in (-1/2, 3/2)$, ainda com a melhor função $f_n(\lambda) = [\lambda + (2n^2+1)/(4n+2)]^{1/2}$. Mais tarde, Elbert e Siafarikas em [11] estenderam o resultado de Ahmed, Muldoon e Spigler para todo $\lambda > -1/2$, provando assim esta conjectura. Em [5], Dimitrov e Rodrigues provaram que o resultado de Elbert e Siafarikas é preciso, isto é, que não pode ser melhorado. Estas contribuições ajudaram a conhecer o comportamento dos zeros dos polinômios Gegenbauer mais profundamente.

Nesta seção demonstraremos o resultado obtido por Ahmed, Muldoon e Spigler em [1]. Para isto, usaremos o Teorema de Comparação de Sturm, para obter $f := f_n(\lambda)$ e mostrar tal monotonicidade.

Para dar início, lembremos que a função $u = u_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda/2+1/4}P_n^{(\lambda)}(x)$ satisfaz a equação diferencial (1.57)

$$u'' + F(x;\lambda)u = 0, \tag{3.39}$$

onde

$$F(x;\lambda) = \frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2} + \frac{1/2+\lambda-\lambda^2+x^2/4}{(1-x^2)^2}.$$

Seja $t = f_n(\lambda)x$, então a função $U_\lambda(t) = u_\lambda(x)$,

$$U_\lambda(t) = \left(1 - \left(\frac{t}{f}\right)^2\right)^{\lambda/2+1/4} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{t}{f}\right) \tag{3.40}$$

é solução da equação diferencial

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + \widetilde{F}(t;\lambda)U(t) = 0, \tag{3.41}$$

com

$$\widetilde{F}(t;\lambda) = [f_n(\lambda)]^{-2} F\left(\frac{t}{f};\lambda\right).$$

ou seja,

$$\widetilde{F}(t;\lambda) = \frac{(n+\lambda)^2}{f^2 - t^2} + \frac{(1/2+\lambda-\lambda^2)f^2 + t^2/4}{(f^2-t^2)^2} \tag{3.42}$$

Conseqüentemente, os zeros de $U(t)$ são 0, $f_n(\lambda)$ e $t_{nk}(\lambda) = f_n(\lambda)x_{nk}^{(\lambda)}$.

Agora, estamos em condições de mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.7. *A função $t_{nk}(\lambda) = f_n(\lambda)x_{nk}(\lambda)$ cresce com $\lambda \in I$, onde $I \subset (-\frac{1}{2}, \infty)$, para toda função $f_n(\lambda)$ que satisfaz $f_n(\lambda) > 0$, $f_n'(\lambda) > 0$, $f_n'(\lambda)$ contínua para $\lambda \in I$ e*

$$\begin{aligned} &(f^2 - t^2)[2(n+\lambda)^2 f' - (2n+1)f] + 2t^2(n+\lambda)(f^2 - t^2) \\ &+ff'(1+2\lambda-2\lambda^2)(f^2-t^2) + t^2 ff' \geq 0, \quad 0 < t < f. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Demonstração:

A conclusão deste teorema segue do Teorema da Comparação de Sturm aplicado na equação diferencial de Sturm-Liouville (3.41). Isto implica que os zeros $t_{nk}(\lambda)$ da solução da equação diferencial (3.41) são funções crescentes de λ desde que a derivada parcial de $\widetilde{F}(t;\lambda)$ com respeito a λ é negativa para todo $t \in (0, f)$ quando $\lambda \in I$. Assim, de (3.42)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F}(t;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{(t^2-f^2)^3} &\{(f^2-t^2)[2(n+\lambda)^2 f' - (2n+1)f] + 2t^2(n+\lambda)(f^2-t^2)\} \\ &+ff'(1+2\lambda-2\lambda^2)(f^2-t^2) + t^2 ff' \end{aligned}$$

chegamos ao resultado desejado. ■

Spigler [14] chamou a função $f_n(\lambda)$ "aceitável" se satisfaz as hipóteses colocadas sobre f no teorema (3.7).

Para determinar f, dividimos (3.43) por $[f_n(\lambda)]^4$ e assim obtemos

$$\begin{aligned} &\left(1-\left(\frac{t}{f}\right)^2\right)\left[2(n+\lambda)^2\frac{f'}{f} - (2n+1)\right] + 2\left(\frac{t}{f}\right)^2(n+\lambda)\left(1-\left(\frac{t}{f}\right)^2\right) \\ &+\frac{f'}{f}(1+2\lambda-2\lambda^2)\left(1-\left(\frac{t}{f}\right)^2\right) + \left(\frac{t}{f}\right)^2\frac{f'}{f} \geq 0 \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, temos

$$\frac{f'}{f} \geq F\left(\frac{t^2}{f^2}\right), 0 < t < f, \tag{3.44}$$

onde

$$F(u) = \frac{(1-u)[2(n+1) - 2u(n+\lambda)]}{2(n+\lambda)^2(1-u) + (1+2\lambda-2\lambda^2)(1+u) + u}. \tag{3.45}$$

É fácil ver que o denominador de F é sempre positivo para $0 < u < 1$, $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$.

A fim de que (3.44) seja válido para todo $t \in (0, f_n(\lambda))$ é necessário e suficiente que

$$\frac{f'}{f} \geq \sup_{0<u<1} F(u). \tag{3.46}$$

Todavia, podemos mostrar que

$$\sup_{0<u<1} F(u) = F(0). \tag{3.47}$$

Para provar (3.47) observemos que isto é equivalente a

$$\frac{a - (a+b)u + bu^2}{A - Bu} \leq \frac{a}{A}, \quad 0 < u < 1 \tag{3.48}$$

onde $a = 2n+1$, $b = 2(n+\lambda)$, $A = 2(n+\lambda)^2 + 1 + 2\lambda - 2\lambda^2$ e $B = -2[1\lambda - \lambda^2 - (n+\lambda)^2]$. Uma condição necessária e suficiente para isso é que $A \geq B$ ou que $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$. Assim, para esses valores de λ, (3.46) é equivalente a

$$\frac{f'}{f} \geq \frac{2n+1}{2(n+\lambda)^2 + 1 + 2\lambda - 2\lambda^2}. \tag{3.49}$$

Desta forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.8. *Seja $x_{nk}(\lambda)$ o k-ésimo zero em ordem decrescente de $P_n^{(\lambda)}(x)$. Então, para $n \geq 2$ e $k = 1, \ldots, [n/2]$, o produto*

$$f_n(\lambda)x_{nk}(\lambda)$$

é função crescente de λ para $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$ e $f_n(\lambda) = [2n^2 + 1 + 2\lambda(2n+1)]^{1/2}$.

Demonstração:

Obtemos $f_n(\lambda)$ diretamente de (3.49). ∎

Observe que este resultado foi provado apenas para um pequeno intervalo de λ. A prova para todos os valores de λ, foi dada por Elbert e Siafarikas [11]. Eles usaram a versão integral do Teorema de Sturm. Demonstraremos isto na última seção desta capítulo.

3.1.5 Resultados de Monotonicidade dos Zeros do Polinômio de Laguerre

Para $\alpha > -1$ e $n = 1, 2, \ldots$, seja $l_{n,k} = l_{n,k}(\alpha)$ o k-ésimo zero do polinômio de Laguerre generalizado $L_n^{(\alpha)}(x)$, arranjados em ordem crescente. Elbert e Laforgia em [6] provaram que a seqüência $(n + (\alpha+1)/2)l_{n,k} - \frac{1}{4}l_{n,k}^2$ cresce com n e, como conseqüência deste resultado, obteram a desigualdade $l_{n,k}l_{n+m,k+1} < l_{n,k+1}l_{n+1,k}$, $m = 1, 2, \ldots$, $1 \leq k < k+1 \leq n$. A principal ferramenta usada por eles foi o Teorema de Comparação de Sturm 2.5. Vamos mostrar os resultados obtidos por eles, mais precisamente, provaremos os dois seguintes teoremas:

Teorema 3.9. *Para $-1 < \alpha \leq 1$ e $k = 1, 2, \ldots, n$, seja $l_{n,k} = l_{n,k}(\alpha)$ o k-ésimo zero positivo do polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ arranjados em ordem crescente. Então $(n+(\alpha+1)/2)l_{n,k} - \frac{1}{4}l_{n,k}^2$ cresce com n, isto é,*

$$\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)l_{n+1,k} - \frac{1}{4}l_{n+1,k}^2 > \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)l_{n,k} - \frac{1}{4}l_{n,k}^2. \tag{3.50}$$

Teorema 3.10. *Para α fixo, $-1 < \alpha \leq 1$ e $k = 1, 2, \ldots, n$, vale o seguinte resultado*

$$\begin{vmatrix} l_{n,k} & l_{n,k} \\ l_{n,k} & l_{n,k} \end{vmatrix} < 0, \quad 1 \leq k < k+1 \leq n, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.51}$$

Prova dos Teoremas: Sabemos de (1.59) que a função $y = y_n(x) = e^{-x/2}x^{(\alpha+1)/2}L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + f_n(x)y = 0, \tag{3.52}$$

onde

$$f_n(x) = \frac{n + \frac{\alpha+1}{2}}{x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}. \tag{3.53}$$

Consideremos a seguinte transformação

$$y(x) = a(x)z(t) \tag{3.54}$$

$$t = \int_{x'}^{x''} b(x)dx, \tag{3.55}$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções positivas, contínuas e duas vezes diferenciáveis em $I = [x', x'']$. Se $a^2(x)b(x) \equiv 1$ em I, então $z = z(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$z'' + F_n(t)z = 0, \tag{3.56}$$

onde

$$F_n(t) = \frac{3[b']^2 - 2bb''}{4b^4} + \frac{f_n(x)}{b^2}. \tag{3.57}$$

Para a prova dos Teoremas, usaremos duas transformações de (3.52). Para provar (3.50), seja $p_n(x)$ definida por

$$p_n(x) = \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)x - \frac{1}{4}x^2. \tag{3.58}$$

É fácil ver que

$$\max_{-\infty<x<\infty} p_n(x) = p_n(\tilde{x}_n) = \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)^2,$$

onde

$$\tilde{x}_n = 2n + \alpha + 1.$$

Mais ainda,

$$p_{n+1}(x) > p_n(\tilde{x}_n), \quad \text{para} \quad \tilde{x}_{n1} < x < \tilde{x}_{n2}, \tag{3.59}$$

onde

$$\tilde{x}_{n1} = \tilde{x}_n + 2 - \sqrt{4\tilde{x}_n + 4}, \quad \tilde{x}_{n2} = \tilde{x}_n + 2 + \sqrt{4\tilde{x}_n + 4}.$$

Agora distinguimos três casos:

a. $\tilde{x}_{n1} < l_{n+1,k} < \tilde{x}_{n2}$;

b. $\tilde{x}_{n2} \leq l_{n+1,k}$;

c. $0 < l_{n+1,k} < \tilde{x}_{n1}$.

Note que, usando (3.58), a desigualdade (3.50) pode ser escrita como

$$p_n(l_{n,k}) < p_{n+1}(l_{n+1,k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.60}$$

Caso a. De (3.59) obtemos imediatamente a desigualdade (3.60);

Caso b. Para provar este caso, usamos um resultado que é devido a Szegő [[15], p.129], que diz que $(n + (\alpha+1)/2)x_{n,k}$ decresce com n, isto é

$$\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)x_{n,k} > \left(n + 1 + \frac{\alpha+1}{2}\right)x_{n+1,k}, \quad \alpha > -1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dessa forma, obtemos

$$l_{n+1,k} < l_{n,k}\frac{2n + \alpha + 1}{2n + \alpha + 3}.$$

Além disso, de (3.58), a função $p_n(x)$ decresce com respeito a x em $[\tilde{x}_n + 2, \infty)$. Por esta razão, para provar (3.60) é suficiente mostrar que

$$p_n(l_{n,k}) < p_{n+1}(l_{n,k}(2n + \alpha + 1)/(2n + \alpha + 3)).$$

De fato, esta última desigualdade é verdadeira, pois é equivalente a $\left(\dfrac{2n+\alpha+1}{2n+\alpha+3}\right)^2 < 1.$

Caso c. Em (3.54), escolhemos $a(x)$ e $b(x)$ como

$$b(x) = b_n(x) = n + \frac{1}{2}(\alpha + 1) - \frac{1}{2}x; \quad a(x) = a_n(x) = [b(x)]^{-1/2}.$$

Fazendo $x' = 0$ em (3.55) encontramos que a função $z_n(t) = \sqrt{b_n(t)}y_n(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$z''(t) + F_n(t)z(t) = 0, \tag{3.61}$$

onde

$$F_n(t) = \frac{4t + 1 - \alpha^2}{4x^2 b_n^2(x)} + \frac{3}{16}\frac{1}{b_n^4(x)} \tag{3.62}$$

e

$$x = x_n(t) = 2n + \frac{1}{2}(\alpha + 1) - \sqrt{\left[n + \frac{1}{2}(\alpha + 1)\right] - t}.$$

Além de (3.61), consideremos a equação diferencial

$$w''(t) + F_{n+1}(t)w(t) = 0, \tag{3.63}$$

satisfeita por $z_{n+1}(t)$. Se pusermos $x'' = \tilde{x}_{n1}$ em (3.55), então $b_n(x)$ e $b_{n+1}(x)$ são positivos em $I = [0, \tilde{x}_{n1}]$. Agora, afirmamos que (3.61) é um majorante "Sturminiano" de (3.63). De fato, isto é verificado se mostrarmos que as funções $x_n(t)b_n(x)$ e $b_n(x)$ são crescentes com relação à n. Com efeito, temos que

$$\frac{\partial x_n(t)}{\partial n} = \frac{-2x}{2n + \alpha + 1 - x} < 0, \quad \frac{\partial b_n(x)}{\partial n} = \frac{2n + \alpha + 1}{2n + \alpha + 1 - x} > 0$$

e também

$$\frac{\partial}{\partial n}[x b_n(x)] = \frac{x^2}{2n + \alpha + 1 - x} > 0.$$

Daí, segue que $b_n(x)$ e $x b_n(x)$ são ambas crescentes com respeito a n, quando t é fixo.

A condição limite (2.5), do Teorema 2.5, é satisfeita em $t = 0$, isto é,

$$\lim_{t \to 0^+} [y'(t)Y(t) - y(t)Y'(t)] = 0.$$

Então, uma aplicação direta do Teorema de Comparação de Sturm 2.5 nos leva às seguintes desigualdades entre os zeros de $z_n(t)$ e $z_{n+1}(t)$

$$t_{n,k} < t_{n+1,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

onde $t_{n,k} = p_n(l_{n,k})$ e $t_{n+1,k} = p_{n+1}(l_{n+1,k})$. Isto completa a prova do Teorema 3.9.

Agora vamos provar o Teorema 3.10. Aplicando a transformação $t = x/l_{nk}$ na equação diferencial (3.52) (isto é, $b(x) = 1/l_{nk}$ em (3.55)), verificamos por (3.57) que a função $z_n(t) = y_n(x)$ satisfaz

$$z'' + l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t)z = 0, \tag{3.64}$$

daí, por (3.53)

$$l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t) = \frac{n + \frac{1}{2}(\alpha+1)}{t} l_{n,k} + \frac{1-\alpha^2}{4t^2} - \frac{1}{4} l_{n,k}^2. \tag{3.65}$$

Além de (3.64), consideremos a equação

$$w'' + l_{n+1,k}^2 f_{n+1}(l_{n+1,k}t)w = 0, \tag{3.66}$$

satisfeita por $z_{n+1}(t) = y_{n+1}(x)$. As funções $z_n(t)$ e $z_{n+1}(t)$ tem um zero comum em $t = 1$. Além disso, para $t > 1$ temos,

$$t[l_{n+1,k}^2 f_{n+1}(l_{n+1,k}t) - l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t)] > [n + 1 + \frac{1}{2}(\alpha+1)]l_{n+1,k} - \frac{1}{4} l_{n+1,k}^2$$
$$-[n + \frac{1}{2}(\alpha+1)]l_{n,k} + \frac{1}{4} l_{n,k}^2,$$

sendo o lado direito da desigualdade positivo em vista do Teorema 3.9. Por isso, (3.66) é um majorante "Sturminiano"de (3.64) e aplicando o Teorema de Comparação Comparação de Sturm temos que o próximo zero de $z_{n+1}(t)$ ocorre antes do próximo zero de $z_n(t)$, isto é,

$$\frac{l_{n+1,k+j}}{l_{n+1,k}} < \frac{l_{n,k+j}}{l_{n,k}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-k. \tag{3.67}$$

Isto prova (3.51) para $m = 1$. Então, por indução, obtemos de (3.67), a desigualdade mais geral

$$\frac{l_{n+m,k+j}}{l_{n+m,k}} < \frac{l_{n,k+j}}{l_{n,k}}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.68}$$

o que completa a prova do Teorema 3.10.

3.2 Desigualdades Tipo Turán sobre Zeros

Consideremos a equação hipergeométrica de Gauss (1.47), satisfeita pela função hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; x)$

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

com as seguintes restrições aos parâmetros que asseguram a condição oscilatória em $(0, 1)$

$$a < 0, \quad b > 1, \quad c - a > 1, \quad c - b < 0 \tag{3.69}$$

ou, por simetria, trocando a por b e vice-versa. Agora, ao invés de considerarmos os parâmetros a, b e c, consideremos os parâmetros reais

$$n = -a, \quad \alpha = c - 1, \quad \beta = a + b - c$$

o qual corresponde a conhecida notação para os polinômios de Jacobi (1.49)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-x)/2).$$

As condições oscilatórias (3.69) no intervalo $(0, 1)$ são reescritas, em termos dos parâmetros de Jacobi, como segue:

$$n > 0, \quad n + \alpha + \beta > 0, \quad n + \alpha > 0, \quad n + \beta > 0. \tag{3.70}$$

Aplicando a transformação (1.12) à equação diferencial hipergeométrica acima, chegamos a uma equação da forma (1.10)

$$u'' + \lambda(x)u' = 0.$$

com

$$4\lambda(x) = \frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1}{x(1-x)} + \frac{1-\alpha^2}{x^2} + \frac{1-\beta^2}{(1-x)^2} \tag{3.71}$$

onde

$$L = b - a = 2n + \alpha + \beta + 1.$$

Em [3], Deaño, Gil e Segura, estudaram as propriedades de monotonicidade de $\lambda(x)$ para todos os valores dos parâmetros L, α e β. Mostraremos os resultados obtidos por eles a seguir.

Mudança $z(x) = \arccos(1 - 2x)$:

A escolha $z(x) = \arccos(1-2x)$, leva o intervalo $(0,1)$ ao intervalo $(0,\pi)$. A nova variável $z(x)$ é o angulo θ em (1.53). Usaremos a notação $\theta(x)$ ao invés de $z(x)$. Aplicando a transformação de Liouville da Seção 1.1.2, obtemos

$$4\Omega(x) = L^2 - \frac{\alpha^2 - 1/4}{x} - \frac{\beta^2 - 1/4}{1-x}. \tag{3.72}$$

Observe que a equação diferencial na forma normal correspondente a $\Omega(x(\theta))$ em (3.72), torna-se e equação estudada por Szegő, Teoremas 3.1 e 3.2. Como veremos a seguir, usando o Teorema 2.8, obtemos os mesmos limites de Szegő quando $|\alpha|, |\beta| \leq 1/2$, extendo o resultado para todos os valores α e β desde que satisfaçam as condições oscilatória (3.70). Para isso, vamos destacar algumas propriedades de $\Omega(x)$. Temos que:

$$\Omega'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - 1/4}{x^2} - \frac{\beta^2 - 1/4}{(1-x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(\alpha^2-\beta^2)x^2 - 2(4\alpha^2-1)x + 4\alpha^2 - 1}{4x^2(1-x)^2} = 0.$$

Logo,

1. Se $|\alpha| = |\beta| = \dfrac{1}{2}$, então $\Omega'(x) = 0$;

2. Caso contrário:

   a. Se $|\alpha| \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$, então $\Omega(x)$ tem um mínimo absoluto em $[0,1]$;

   b. Se $|\alpha| \geq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \geq \dfrac{1}{2}$, então $\Omega(x)$ tem um máximo absoluto em $[0,1]$;

   c. Se $|\alpha| \geq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$, então $\Omega'(x) > 0$ em $(0,1)$;

   d. Se $|\alpha| \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \geq \dfrac{1}{2}$, então $\Omega'(x) < 0$ em $(0,1)$.

Nos casos onde existe um extremo absoluto, ele é atingido em

$$x_e = \frac{\sqrt{|1/4 - \alpha^2|}}{\sqrt{|1/4-\alpha^2|} + \sqrt{|1/4-\beta^2|}} \tag{3.73}$$

e o valor de $\Omega(x)$ neste ponto é

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4}\left[L^2 \pm \left(\sqrt{|1/4-\alpha^2|} + \sqrt{|1/4-\beta^2|}\,\right)^2\right] > 0, \tag{3.74}$$

onde o sinal + quando o extremo é máxino e o sinal − quando ele é um mínimo. Conseqüentemente, pelo Teorema 2.8, obtemos as seguintes relações em termos de $\theta(x)$.

Teorema 3.11. *Seja n, α e β satisfazendo (3.70). Seja x_k, $k = 1, \ldots, n$, $x_1 < \ldots < x_n$, os zeros de qualquer solução da equação hipergeométrica em $(0, 1)$ e seja $\theta_k = \arccos(1 - 2x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Então*

1. *Se $|\alpha| = |\beta| = \dfrac{1}{2}$, então $\Delta\theta_k = \dfrac{2\pi}{L}$;*

2. *Caso contrário:*

   a. *Se $|\alpha| \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$, então $\Delta\theta_k < \dfrac{2\pi}{\sqrt{L^2 + \left(\sqrt{1/4 - \alpha^2} + \sqrt{1/4 - \beta^2}\,\right)^2}}$*

   b. *Se $|\alpha| \geq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \geq \dfrac{1}{2}$, então $\Delta\theta_k > \dfrac{2\pi}{\sqrt{L^2 - \left(\sqrt{\alpha^2 - 1/4} + \sqrt{\beta^2 - 1/4}\,\right)^2}}$;*

   c. *Se $|\alpha| \geq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \leq \dfrac{1}{2}$, então $\Delta^2\theta_k < 0$;*

   d. *Se $|\alpha| \leq \dfrac{1}{2}$ e $|\beta| \geq \dfrac{1}{2}$, então $\Delta^2\theta_k > 0$.*

Mudança $z(x) = \log(x)$:

Fazendo a mudança $z(x) = \log(x)$, a correspondente função $\Omega(x)$ é

$$4\Omega(x) = -L^2 + \frac{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1}{1 - x} + \frac{1 - \beta^2}{(1 - x)^2}, \tag{3.75}$$

onde a singularidade em $x = 0$ foi eliminada pela nova variável $z(x)$ e desapareceu em $\Omega(x)$.

Novamente, calculando $\Omega'(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}\Omega'(x) &= \frac{1 - \beta^2}{2(1 - x)^3} + \frac{-1 + L^2 - \alpha^2 + \beta^2}{4(1 - x)^2} \\ &= \frac{(-1 + L^2 - \alpha^2 + \beta^2)x - 1 - L^2 + \alpha^2 + \beta^2}{4(x - 1)^3}.\end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes propriedades de monotonicidade em $(0, 1)$:

1. Se $|\beta| \leq 1$, então $\Omega'(x) > 0$;

2. Se $|\beta| > 1$, então $\Omega(x)$ tem somente um máximo absoluto, o qual está localizado em

$$0 < x_e = \frac{L^2 - \alpha^2 - (\beta^2 - 1)}{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1} < 1,$$

   onde

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{16}\frac{[(L + \alpha)^2 - (\beta^2 - 1)][(L - \alpha)^2 - (\beta^2 - 1)]}{\beta^2 - 1} > 1.$$

Conseqüentemente, temos o seguinte:

Teorema 3.12. *Sejam n, α e β satisfazendo (3.70) e $z(x) = \log(x)$. Então os zeros da função hipergeométrica em $(0,1)$ satisfazem*

1. *Se $|\beta| \le 1$, então $\Delta^2 z_k < 0$. Portanto, os zeros da função hipergeométrica satisfazem a desigualdade*
$$x_k^2 > x_{k-1}x_{k+1}. \tag{3.76}$$

2. *Se $|\beta| > 1$, então $\Delta z_k > f(L,\alpha,\beta)$ onde*
$$f(L,\alpha,\beta) = 4\pi\sqrt{\frac{\beta^2-1}{[(L+\alpha)^2-(\beta^2-1)][(L-\alpha)^2-(\beta^2-1)]}}, \tag{3.77}$$
ou, em termos dos zeros da função hipergeométrica
$$\frac{x_{k+1}}{x_k} > e^{f(L,\alpha,\beta)}. \tag{3.78}$$

Em termos do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, e denotando seus zeros por $\tilde{x}_k$, obtemos (observe que $\tilde{x} = 1-2x$)

Corolário 3.3. *Sejam n, α e β satisfazendo (3.70). Então os zeros do polinômio de Jacobi satisfazem*

1. *Se $|\beta| \le 1$, então $(1-\tilde{x}_k)^2 > (1-\tilde{x}_{k-1})(1-\tilde{x}_{k+1})$*
2. *Se $|\beta| > 1$, então $\dfrac{1-\tilde{x}_k}{1-\tilde{x}_{k+1}} > e^{f(L,\alpha,\beta)}$.*

Se tomarmos a mudança $z(x) = -\log(1-x)$, obtemos resultados similares, mas com α trocado por β e vice-versa, bem como x por $1-x$, nas equações (3.76) e (3.78). Em termos dos zeros do polinômio de Jacobi, obtemos

Corolário 3.4. *Sejam n, α e β satisfazendo (3.70). Então os zeros do polinômio de Jacobi satisfazem*

1. *Se $|\alpha| \le 1$, então $(1+\tilde{x}_k)^2 > (1+\tilde{x}_{k-1})(1+\tilde{x}_{k+1})$*
2. *Se $|\alpha| > 1$, então $\dfrac{1+\tilde{x}_{k+1}}{1+\tilde{x}_k} > e^{f(L,\beta,\alpha)}$.*

Mudança $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1-x})$:

Consideremos a seguinte mudança $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1-x})$. aplicando a transformação de Liouville, a singularidade em $x=0$ desaparece em $\Omega(x)$, o qual tem a seguinte forma
$$\Omega(x) = \beta^2 - \alpha^2 - \frac{1}{4} + \left(L^2 - \frac{1}{4}\right)x - \frac{\beta^2 - 1/4}{1-x}. \tag{3.79}$$

Novamente, assumindo que as condições oscilatórias (3.70) é facil ver que $\Omega(x)$ tem as seguintes propriedades de momotonicidade:

1. Se $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, então $\Omega'(x) > 0$ em $(0,1)$;

2. Se $|\beta| \geq \frac{1}{2}$, então $\Omega(x)$ tem somente um máximo absoluto em $[0,1]$, o qual está localizado em
$$0 < x_e = 1 - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1/4}{L^2 - 1/4}} \leq 1,$$
onde
$$\Omega(x_e) = \left(\sqrt{L^2 - 1/4} - \sqrt{\beta^2 - 1/4}\ \right)^2 - \alpha^2 > 0.$$

Conseqüentemente, temos o seguinte:

Teorema 3.13. *Seja n, α e β satisfazendo (3.70) e seja $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1-x})$. Então os zeros da função hipergeométrica em $(0,1)$ satisfazem as seguintes desigualdades:*

1. *Se $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, então $\Delta^2 z_k < 0$, ou, em termos dos zeros x_k da função hipergeométrica,*
$$\frac{x_{k+1}x_{k-1}}{x_k^2} < \frac{h(x_{k+1})h(x_{k-1})}{h(x_k)^2} \tag{3.80}$$
com
$$h(x) \equiv (1 - \sqrt{1-x}\ )^2.$$

2. *Se $|\beta| \geq \frac{1}{2}$, então $\Delta z_k > p(L, \alpha, \beta)$ onde*
$$p(L,\alpha,\beta) = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\sqrt{L^2 - 1/4} - \sqrt{\beta^2 - 1/4}\ \right)^2 - \alpha^2}}.$$
Isto implica que
$$\frac{1 + \sqrt{1 - x_k}}{\sqrt{x_k}} \frac{\sqrt{x_{k+1}}}{1 + \sqrt{1 - x_{k+1}}} > e(p(L,\alpha,\beta)). \tag{3.81}$$

Similarmente como antes, se considerarmos a mudança de variável $z(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$, temos relações similares trocando α por β e vice-versa, como segue:

Corolário 3.5. *Seja n, α e β satisfazendo (3.70). Então os zeros da função hipergeométrica em $(0,1)$ satisfazem:*

1. *Se $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$, então*
$$\frac{(1 - x_{k+1})(1 - x_{k-1})}{(1 - x_k)^2} < \frac{g(x_{k+1})g(x_{k-1})}{g(x_k)^2}, \tag{3.82}$$
onde
$$g(x) \equiv (1 + \sqrt{x}\ )^2.$$

2. *Se* $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$, *então* $\Delta z_k > p(L, \beta, \alpha)$ *para* $z(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$. *Isto significa que*

$$\frac{\sqrt{1-x_k}}{1+\sqrt{x_k}} \frac{1+\sqrt{x_{k+1}}}{\sqrt{1-x_{k+1}}} > e(p(L, \beta, \alpha)). \tag{3.83}$$

Mudança $z(x) = \log(x/(1-x))$

Esta mudança elimina as singularidades em $x = 0$ e em $x = 1$ de $\Omega(x)$, o qual tem a seguinte forma

$$4\Omega(x) = -(L^2-1)x^2 + (L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1)x - \alpha^2. \tag{3.84}$$

Como podemos observar, $\Omega(x)$ é uma parábola com um máximo absoluto em

$$0 < x_e = \frac{1}{2} \frac{L^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 1}{L^2 - 1} < 1,$$

onde

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{16} \frac{(L^2 - 1 - (\alpha - \beta)^2)(L^2 - 1 - (\alpha + \beta)^2)}{L^2 - 1}.$$

Como conseqüentemente deste resultado, e observando as condições oscilatórias, temos:

$$\Delta z_k > f(\beta, \alpha, L) = f(\alpha, \beta, L),$$

onde f é definido em (3.77).

Em termos dos zeros da função hipergeométrica, temos o seguinte limite global:

Teorema 3.14. *Os zeros da função hipergeométrica em* $(0, 1)$ *satisfazem:*

$$\frac{1-x_k}{x_k} \frac{x_{k+1}}{1-x_{k+1}} > e(f(\alpha, \beta, L)) \tag{3.85}$$

para todos os valores dos parâmetros satisfazendo a condição oscilatória (3.70).

3.3 Forma Integral

3.3.1 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Demonstraremos agora, o resultado obtido por Elbert e Siafarikas [11], o qual extende o resultado dado por Ahmed, Muldoon e Spigler [1], que foi relatado na subseção 3.2.4.

Para este propósito, observe que podemos considerar o produto

$$\widetilde{f}_n(\lambda) x_{nk}(\lambda)$$

onde

$$\widetilde{f_n}(\lambda) = \frac{f_n(\lambda)}{4n+2} = \left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right]^{1/2}.$$

ao invés do produto $f_n(\lambda)x_{nk}(\lambda)$ dado no Teorema 3.8.

Agora, fazendo $\widetilde{t} = \widetilde{f_n}(\lambda)x$, em (3.39), a função $U(\widetilde{t}) = u(x)$ satisfaz à equação diferencial

$$\frac{d^2U(\widetilde{t})}{d\widetilde{t}^2} + \widetilde{F}(\widetilde{t};\lambda)U(\widetilde{t}) = 0,$$

com

$$\widetilde{F}(\widetilde{t};\lambda) = [\widetilde{f_n}(\lambda)]^{-2}F\left(\frac{\widetilde{t}}{\widetilde{f_n}(\lambda)};\lambda\right).$$

Substituindo $\widetilde{t}^2 = \tau$ e $\widetilde{f}_n^2(\lambda) = \varphi(\lambda) = \lambda + \dfrac{2n^2+1}{4n+2}$, temos

$$S(\tau;\varphi(\lambda),\lambda) = \widetilde{F}(\widetilde{t};\lambda) = \frac{(n+\lambda)^2}{\varphi(\lambda)-\tau} + \frac{\varphi(\lambda)(1/2+\lambda-\lambda^2)+\tau/4}{(\varphi(\lambda)-\tau)^2}.$$

Como $U(0)U'(0) = 0$, podemos aplicar a Fórmula de Richardson (2.12). Calculando a derivada $\dfrac{d}{d\lambda}S(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)$, obtemos:

$$(\varphi(\lambda)-\tau)^3\frac{d}{d\lambda}S(\lambda,\varphi(\lambda),\tau) = A\tau^2 + B\tau + C, \tag{3.86}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 2(n+\lambda), \\ B &= -(4n+2\lambda+1)\varphi(\lambda) + \lambda^2 - \lambda - 1 + (n+\lambda)^2, \\ C &= (2n+1)\varphi^2(\lambda) + [\lambda^2 - \lambda - 1/2 - (n+\lambda)^2]\varphi(\lambda). \end{aligned}$$

Pela definição de $\varphi(\lambda)$ temos $C = 0$. Seja $\tau_0 = -B/A$. Então, $\tau_0 \geq \varphi(\lambda)$ se $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e $0 < \tau_0 < \varphi(\lambda)$ se $\lambda > \frac{3}{2}$. Daí,

$$\frac{dS(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda}\begin{cases} < 0 & \text{para} \quad 0 < \tau < \varphi(\lambda), \text{ se } \lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \\ < 0 & \text{para} \quad 0 < \tau < \tau_0, \text{ se } \lambda > \frac{3}{2}, \\ > 0 & \text{para} \quad \tau_0 < \tau < \varphi(\lambda), \text{ se } \lambda > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{3.87}$$

Seja $\xi(\lambda) = \widetilde{f_n}(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ um zero positivo de $U(\lambda,t) = 0$. Assim, por (2.12), o sinal de $d\xi^{(\lambda)}/d\lambda$ é determinado pela integral

$$\Phi(\xi) = -\int_0^{\xi}\frac{dS(\widetilde{t}^2;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda}U^2(t;\lambda)dt, \quad 0 < \xi < \widetilde{f_n}(\lambda). \tag{3.88}$$

De (3.87), esta integral é sempre positiva se $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ pois o integrando é negativo. Observemos que esta integral também é positiva para $\lambda > \frac{3}{2}$. Por (3.87), a função $\Phi(\xi)$ cresce com ξ para $0 < \xi < \sqrt{\tau_0}$ e $\Phi(\xi)$ alcança seu máximo quando $\xi = \sqrt{\tau_0}$. Então, $\varphi(\xi)$ é decrescente no intervalo $(\sqrt{\tau_0}, \varphi(\lambda))$. Logo, para $\xi = \varphi(\lambda)$, $\varphi(\xi) = 0$. Temos, então, o seguinte resultado:

Lema 3.15. *A função $\Phi(\xi)$ definida em (3.88) é positiva para $0 < \xi < \varphi(\lambda)$ e $\Phi(0) = \Phi(\varphi(\lambda)) = 0$.*

Vamos mostrar, agora, o seguinte resultado:

Lema 3.16. *Para $\lambda > \dfrac{3}{2}$,*

$$\int_0^{\widetilde{f}_n(\lambda)} \frac{dS(\widetilde{t}^2;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} U^2(\widetilde{t};\lambda)\,dt$$

$$= \widetilde{f}_n^{-3}(\lambda)\int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2}{(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(P_n^{(\lambda)}(x)\right)^2 dx = 0. \tag{3.89}$$

Demonstração:

Sejam $I_v = I_v(n,\lambda)$ definidas por:

$$I_\nu = I_\nu(n,\lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}}\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2 dx, \quad \lambda > \nu - \frac{1}{2}, \quad \nu = 0,1,2. \tag{3.90}$$

Particularmente, I_0 é bem conhecida pois é $\left\langle P_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}\right\rangle$, isto é,

$$I_0(n,\lambda) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}\pi, \qquad \lambda > -\frac{1}{2},\ n = 0,1,\dots\ . \tag{3.91}$$

A fórmula para I_1 é menos familiar:

$$I_1(n,\lambda) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(\lambda-\frac{1}{2})[\Gamma(\lambda)]^2}\pi, \qquad \lambda > \frac{1}{2},\ n = 0,1,\dots. \tag{3.92}$$

De fato, para $v = 1,2$ e $\lambda > v - \dfrac{1}{2}$, temos, por (3.90),

$$\begin{aligned}
(2\lambda-2v+1)(I_v - I_{v-1}) &= (2\lambda-2v+1)\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}}x^2\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2 dx \\
&= -\int_{-1}^1 \left[(1-x^2)^{\lambda-v+\frac{1}{2}}\right]' x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2 dx \\
&= \left[-(1-x^2)^{\lambda-v+\frac{1}{2}}\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2\right]_{-1}^1 \\
&\quad + \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-v+\frac{1}{2}}\left[\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2 + 2xP_n^{(\lambda)}(x)\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]'\right] dx \\
&= I_{v-1} + 2\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-v+\frac{1}{2}}x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]' P_n^{(\lambda)}(x)dx.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Para $v = 1$, a última integral pode ser facilmente determinada. Como $x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]' = nP_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i}x^i$, onde $c_{n,i}$ são constantes, temos, pela relação de ortogonalidade, que esta última integral é dada por

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]' P_n^{(\lambda)}(x)dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(nP_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i}x^i\right) P_n^{(\lambda)}(x)dx$$

$$= n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]^2 dx = nI_0.$$

Assim, por (3.93), temos

$$(2\lambda - 1)I_1 = 2(n+\lambda)I_0, \quad \text{para} \quad \lambda > \frac{1}{2}. \tag{3.94}$$

Logo, por (3.91) e pela equação acima, obtemos (3.92).

Finalmente, o caso $\nu = 2$ ainda não aparece nos livros sobre integrais definidas. Por (1.56), temos, para $y = P_n^{(\lambda)}(x)$,

$$(1-x^2)\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]'' - (2\lambda+1)x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]' + n(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Multiplicando esta identidade por $(1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}}P_n^{(\lambda)}(x)$ e integrando no intervalo $[-1,1]$, obtemos $(2\lambda+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}}x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right]' P_n^{(\lambda)}(x)dx$

$$= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}x\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right] P_n^{(\lambda)}(x)dx + n(n+2\lambda)I_1,$$

onde a integral do lado direito é nula devido à ortogonalidade. Assim, de (3.93),

$$2\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)I_2 = \left[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1\right]I_1. \tag{3.95}$$

Logo, de (3.92), obtemos

$$I_2(n,\lambda) = \frac{\pi 2^{-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,[\Gamma(\lambda)]^2}\,\frac{(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1}{(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{3}{2})}, \qquad \lambda > \frac{3}{2},\ n = 0,1,\ldots. \tag{3.96}$$

Agora estamos aptos a demonstrar o Lema. Usando os valores de A e B dados em (3.86), temos que

$$\begin{aligned} A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2 &= \varphi(\lambda)\left[2(n+\lambda)(1-x^2)^2 - (2\lambda-1)(1-x^2)\right] \\ &+ \left[2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right) - \left[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1\right](1-x^2).\right] \end{aligned}$$

Por (3.90), a integral em (3.89) é dada por
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4+Bx^2}{(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(P_n^{(\lambda)}(x)\right)^2 dx$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(x)\left[2(n+\lambda)I_0 - (2\lambda-1)I_1\right] \\ &+ \left[2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)I_2 - \left[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1\right]I_1\right]. \end{aligned}$$

Mas, por (3.94) e (3.95) temos que esta integral é nula. Assim, chegamos ao resultado desejado.

■

Assim, demonstramos o resultado para todo λ, isto é, provamos o seguinte Teorema:

Teorema 3.17. *Sejam $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq [n/2]$. Então, a função*

$$\widetilde{f}_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$$

com

$$\widetilde{f}_n(\lambda) = \left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right]^{1/2}$$

é uma função crescente de λ para $\lambda > -1/2$.

Por (1.65) temos, para os polinômios ultrasféricos, que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right]^{1/2} x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}.$$

Combinando este limite com a monotonicidade estabelecida no teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.6. *Para os zeros positivos $x_{n,k}(\lambda)$ do polinômio ultrasférico $P_n(\lambda)(x)$, tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\left[\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}\right]^{1/2} x_{n,k}(\lambda) < h_{n,k} \qquad \textit{para} \;\; \lambda > -\frac{1}{2}, \;\; k = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}].$$

Referências Bibliográficas

[1] Ahmed, S., Muldoon, M. E., and Spigler, R. Inequalities and numerical bound for zeros of ultraspherical polynomials. *SIAM J. Math. Anal. 17* (1986), 1000–1007.

[2] Andrews, G., Askey, R., and Roy, R. *Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and Applications*. Cambridge Universty Press, 1999.

[3] Deaño, A., Gil, A., and Segura, J. New inequalities from classical Sturm Theorems. *J. Approx. Theory 131* (2004), 208–230.

[4] Dimitrov, D. K. On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory 85* (1996), 88–97.

[5] Dimitrov, D. K., and Rodrigues, R. O. On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory 116* (2002), 224–239.

[6] Elbert, A., and Laforgia, A. Monotonicity results on the zeros of generalized Laguerre polynomials. *J. Approx. Theory 51* (1987), 168–174.

[7] Elbert, A., and Laforgia, A. Upper bounds for the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory 61* (1990), 88–97.

[8] Elbert, A., and Laforgia, A. Asymptotic formulas for ultraspherical polynomials $\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)$ and their zeros for large values of λ. *Proc. Amer. Math. Soc. 114* (1992), 371–377.

[9] Elbert, A., Laforgia, A., and Rodonó, L. G. On the zeros of Jacobi polynomials. *Acta. Mathematica Hungarica 64* (1994), 351–359.

[10] Elbert, A., and Muldoon, M. E. On the derivative with respect to a parameter of a zero of a Sturm-Liouville function. *SIAM J. Math. Anal. 25* (1994), 354–364.

[11] Elbert, A., and Siafarikas, P. D. Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory 97* (1999), 31–39.

[12] Hille, E. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[13] Horn, R. A., and Johnson, C. R. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985.

[14] Spigler, R. On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter. *Canad. Math. Bull. 27* (1984), 472–477.

[15] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 23. Amer. Math. Soc., 1975.