

**“Representação Modal Alternativa de Linhas de Transmissão  
Trifásicas Simétricas não Idealmente Transpostas”**

**RODRIGO SERRA DALTIM**

**Orientador:** Prof. Dr. Sérgio Kurokawa

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia, UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica – Área de Conhecimento: Sistemas Elétricos de Potência.

**Ilha Solteira – SP  
outubro/2006**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP – Ilha Solteira

D152r Daltin, Rodrigo Serra  
Representação modal alternativa de linhas de transmissão trifásicas simétricas não idealmente transpostas / Rodrigo Serra Daltin. – Ilha Solteira : [s.n.], 2006  
83p. : il.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2006  
Orientador: Sérgio Kurokawa  
Bibliografia: p. 80-83  
1. Energia Elétrica – Distribuição – Alta tensão. 2. Energia Elétrica – Transmissão.  
3. Análise de transitório eletromagnético.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### **CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO:** Representação Modal Alternativa de Linhas de Transmissão Trifásicas Simétricas Não Idealmente Transpostas

**AUTOR:** RODRIGO SERRA DALTIM

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. SERGIO KUOKAWA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. SERGIO KUOKAWA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. LUIZ FERNANDO BOVOLATO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. AFONSO JOSÉ DO PRADO

Pesquisador Autônomo/São José do Rio Preto

Data da realização: 28 de setembro de 2006.

Presidente da Comissão Examinadora  
Prof. Dr. SERGIO KUOKAWA

*Dedico esse trabalho aos meus pais, Francisco Carlos Daltin e Suely Serra Daltin, aos meus avós maternos Antenor Serra (in memoriam) e Olinda Itália Serra e aos meus avós paternos José Maria Daltin (in memoriam) e Thomazia Fontes Daltin (in memoriam) e à Sr.<sup>ta</sup> Onicea Serra. Sou-lhes grato por seu apoio, carinho e dedicação extremados.*

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho se deve em muito a algumas pessoas e instituições, por diversas razões, e eu gostaria de agradecer especialmente:

- *Aos meus pais, Francisco Carlos Daltin e Suely Serra Daltin pela sólida formação dada até minha juventude, que me proporcionou a continuidade nos estudos até a chegada a esse mestrado.*
- *Ao meu orientador, Prof. Sérgio Kurowaka, alguém sempre disposto a oferecer estímulos e, principalmente, a percorrer novos caminhos, ouvindo com interesse e ânimo todos os meus questionamentos. Por ser um interlocutor paciente e generoso e pela coragem de ousar trabalhar com novos conceitos e novas idéias, correndo os riscos inerentes a tal atitude. Por sua amizade principalmente. Pela compreensão silenciosa nos momentos difíceis, permitindo que meu tempo interno fluísse, respeitosamente. Pela alegria de trabalharmos juntos.*
- *Ao amigo e Prof. Dalgerti Lelis Milanese por ter despertado meu interesse por questões filosóficas e pelas excelentes sugestões oferecidas durante o exame de qualificação, mesmo se algumas delas não puderam (ou souberam) ser aproveitadas devidamente.*
- *Aos Professores Afonso José do Prado e Luiz Fernando Bovolato, meus agradecimentos pela disposição para participar da banca, bem como por seus questionamentos e contribuições na etapa da defesa.*
- *A todos os docentes, funcionários e estagiários do Departamento de Engenharia Elétrica, e em especial ao Deoclécio Mitsuiti Kosaka, Maria Cristina de Sales e Luzinete Maria de Oliveira.*
- *Aos meus colegas de trabalho Mara Lopes, Andréa Protto, Alfredo Bonini, Célia Regina, Alessandra Bonato Altran, Carlos Alberto Febres Tapia, Flavio Faria, Ápio Carniello, Jorge Medeiros, Jaine Henrique Canossa, Fábio Yamanaka, Eduardo Caixeta Sedano, Denise Janini Charantola e ao casal de amigos Edilton Goulart e Giselly.*
- *À querida amiga Marinez Stringheta pela sua amizade, alegria e uma irmandade toda especial com que sempre partilhamos.*
- *Aos meus amigos Geovane, Roberta Stroppa, Ana Paula Righetto, Roberta Ferreira, Emerson Carvalho, Carolina Tucunduva, Gustavo Batalha e minhas primas Mirella e Graziella Cesaro.*
- *Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro dado à pesquisa.*

A todos agradeço profundamente e dedico o resultado do trabalho.

*Todo o sentimento que eleva o homem acima da natureza animal, anuncia a predominância do Espírito sobre a matéria e o aproxima da perfeição (Emmanuel).*

## RESUMO

Esta dissertação descreve um processo alternativo para decompor uma linha de transmissão trifásica, simétrica e não transposta nos seus modos exatos por meio da utilização de duas matrizes de transformação. A primeira é a matriz de Clarke que desacopla a linha em suas componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero. A componente  $\beta$  é um modo exato enquanto que as componentes  $\alpha$  e zero são acopladas. Em seguida, as componentes  $\alpha$  e zero são representadas por uma linha bifásica que pode ser decomposta em seus modos exatos por meio de uma matriz de transformação adequada, cujos elementos podem ser sintetizados, no domínio do tempo, por técnicas de aproximações por curvas. O método pretende unir as vantagens da matriz de transformação exata (que produz modos exatos) com as vantagens da matriz de Clarke, que é real, independente da frequência e facilmente representável em programas que realizam simulações de transitórios, como é o caso do EMTP. Assim, o método pode ser utilizado em situações em que o acoplamento entre as componentes  $\alpha$  e zero não possa ser desconsiderado. O processo foi utilizado para simular a energização de uma linha trifásica, sem transposição, com um plano de simetria vertical, 440 kV e comprimento de 500 km que foi representada no domínio modal por meio do método proposto e também por meio do uso da matriz de autovetores (como sendo a matriz de decomposição modal). O método é coerente, pois foram obtidos resultados semelhantes com os dois métodos de decomposição modal, enquanto que com o uso somente da matriz de Clarke, verificou-se certa diferença em relação aos valores esperados.

**Palavras-chave:** Transitórios eletromagnéticos, análise no domínio da frequência, análise no domínio do tempo, modos exatos, quase-modos.

## ABSTRACT

This dissertation describes an alternative procedure to decompose a non-transposed three-phase transmission line into exact modes, by using two transformation matrices. The first one is Clarke's matrix, which separates the line into quasi-modes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero. The  $\beta$  component is an exact mode while  $\alpha$  and zero are coupled. After that, the coupled components are represented by using a two-phase transmission line without a vertical symmetry plane that can be decomposed with a modal transformation matrix whose elements can be achieved, in time-domain, through standard curve-fitting techniques. The method intends to join the Clarke's matrix advantages which crucial aspect is being real, frequency-independent and easily represented in computational transient programs (EMTP) with eigenvector's matrix used in situations where the coupling between  $\alpha$  and zero components cannot be disconsidered. The process was used to energize a three-phase transmission line with a vertical symmetry plane, which nominal voltage is 440kV and its length, 500km. It was represented in the modal domain by considered method and, on the other hand, by using eigenvector's matrix (as being the decomposition matrix). In fact, the obtained results had shown that the method is coherent, because it is obtained similar results with the application of the two mentioned modal decomposition methods, whereas with the use of Clarke's matrix, a perceptible difference in relation to the expected values was verified.

**Keywords:** Electromagnetic transient, modal decomposition, frequency domain, time domain, transmission line, exact-modes.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
1.1	ASPECTOS GERAIS DO SISTEMA DE TRANSMISSÃO BRASILEIRO .....	10
1.2	MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO .....</b>	<b>19</b>
2.1	INTRODUÇÃO.....	19
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO MONOFÁSICA .....	19
2.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POLIFÁSICA .....	24
2.4	CONCLUSÕES.....	25
<b>3</b>	<b>SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO MONOFÁSICA NO DOMÍNIO DO TEMPO.....</b>	<b>26</b>
3.1	INTRODUÇÃO.....	26
3.2	SOLUÇÃO DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA LINHAS SEM PERDAS .....	27
3.3	SOLUÇÃO DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA LINHAS COM PERDAS .....	28
3.4	SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO POR MEIO DE INTEGRAIS DE CONVOLUÇÃO .....	31
3.5	CONCLUSÃO .....	34
<b>4</b>	<b>REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO MODAL.....</b>	<b>35</b>
4.1	INTRODUÇÃO.....	35
4.2	DECOMPOSIÇÃO MODAL DE LINHAS DE TRANSMISSÃO.....	36
4.2.1	<i>Matrizes de impedâncias e de admitâncias modais exatas.....</i>	<i>40</i>
4.2.2	<i>Relação entre as matrizes <math>[T_v]</math> e <math>[T_l]</math>.....</i>	<i>41</i>
4.2.3	<i>Relação entre as matrizes <math>[\lambda_m]</math>, <math>[Z_m]</math> e <math>[Y_m]</math>.....</i>	<i>43</i>
4.3	OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO MODAL UTILIZANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....	44
4.4	CONCLUSÃO .....	48
<b>5</b>	<b>REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS DE TRANSMISSÃO TRIFÁSICAS POR MEIO DO USO DE DUAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO .....</b>	<b>50</b>
5.1	INTRODUÇÃO.....	50
5.2	REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS .....	51
5.3	REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS QUE POSSUEM UM PLANO DE SIMETRIA VERTICAL... ..	52
5.4	DECOMPOSIÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS UTILIZANDO DUAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO ..	55
5.5	APLICAÇÃO DO MÉTODO DESENVOLVIDO .....	59
5.5.1	<i>Decomposição modal da linha utilizando a matriz de Clarke.....</i>	<i>62</i>
5.5.2	<i>Análise do acoplamento entre as componentes <math>\alpha</math> e zero .....</i>	<i>67</i>
5.5.3	<i>Decomposição modal da linha bifásica que representa os quase-modos <math>\alpha</math> e zero.....</i>	<i>68</i>
5.5.4	<i>Resposta em frequência da linha.....</i>	<i>70</i>
5.6	CONCLUSÃO .....	76
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>80</b>

## **1 INTRODUÇÃO**

### **1.1 ASPECTOS GERAIS DO SISTEMA DE TRANSMISSÃO BRASILEIRO**

A primeira linha de transmissão de que se tem registro no Brasil foi construída por volta de 1883, na cidade de Diamantina, Minas Gerais. Essa linha transportava energia gerada em uma usina hidroelétrica, constituída de duas rodas d'água e dois dínamos Gramme, a uma distância de 2 km, aproximadamente. A energia transmitida por meio dessa linha acionava bombas hidráulicas em uma mina de diamantes. Consta que era a linha mais longa do mundo, na época. Em 1901, com a entrada em serviço da central Hidroelétrica de Santana do Parnaíba, a então The San Paulo Tramway Light and Power Co. Ltd. construiu as primeiras linhas de seus sistemas de 40 kV. Em 1914, com a entrada em serviço da Usina Hidroelétrica de Utupararanga, a mesma empresa introduziu o padrão 88 kV. Esse padrão de tensão foi, em seguida, adotado pela Companhia Paulista de Estradas de Ferro, Estrada de Ferro Sorocabana e, por meio desta, pela USELPA, que futuramente viria a integrar o sistema CESP. Entre 1945 e 1947, construiu-se a primeira linha de 230 kV no Brasil, com um comprimento aproximado de 330 km. Essa linha, destinada a interligar os sistemas Rio Light e São Paulo Light, operava inicialmente em 170 kV, passando, em 1950, a operar com 230 kV. Foi também a primeira interligação de dois importantes sistemas realizada no Brasil. Vieram, a partir daí, em rápida sucessão, linhas de 230 kV do sistema da Cia. Hidroelétrica de São Francisco, 161 e 345 kV

da CEMIG e FURNAS, 460 kV da CESP, as linhas de 500 kV de FURNAS e 800 kV do sistema Itaipu (FUCHS, 1977).

Atualmente, de acordo com (ONS, 2006), a rede básica de transmissão compreende tensões entre 230 kV a 750 kV, atinge uma extensão de 80.022 km, engloba 815 circuitos de transmissão, contando com uma capacidade de transformação de 178.447 MVA, em 321 subestações distribuídas. A Figura 1.1 mostra um esquema do sistema de transmissão brasileiro (CTEEP, 2006).

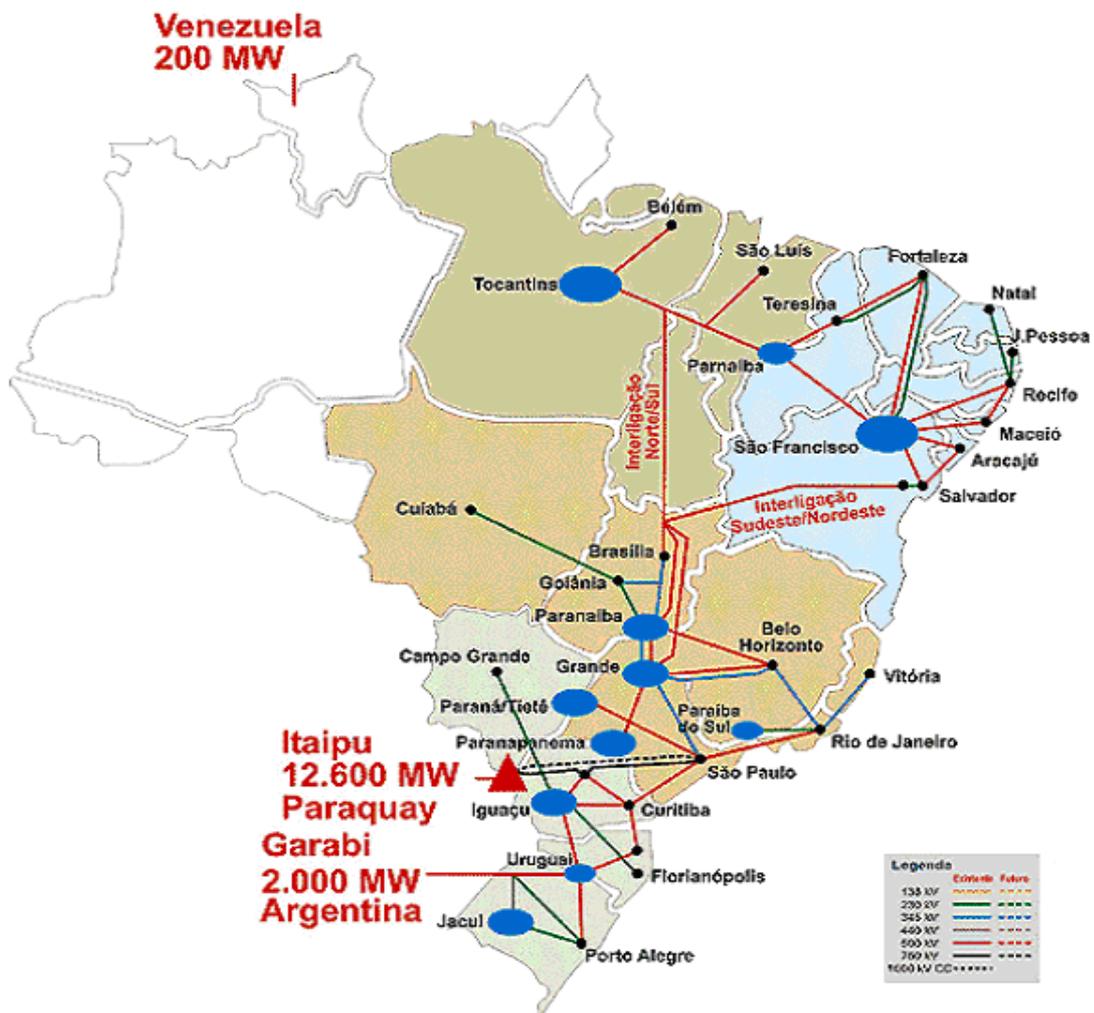


Figura 1.1 – Mapa do SIN – Sistema de Transmissão

O sistema elétrico brasileiro, esquematizado na Figura 1.1, apresenta como particularidade grandes extensões de linhas de transmissão e um parque produtor de geração pre-

dominantemente hidráulico. O mercado consumidor (47,2 milhões de unidades) concentra-se nas regiões Sul e Sudeste, as mais industrializadas. A região Norte é atendida de forma intensiva por pequenas centrais geradoras, a maioria termelétricas, movidas a óleo diesel (ONS, 2006).

Verifica-se que, no Brasil, grande parte das linhas que constituem o Sistema Interligado Nacional são linhas de 440 kV, 345 kV, 230 kV, 138 kV (circuito duplo) e 88 kV (circuito duplo) (CETEEP, 2006) cujas silhuetas são mostradas a seguir.

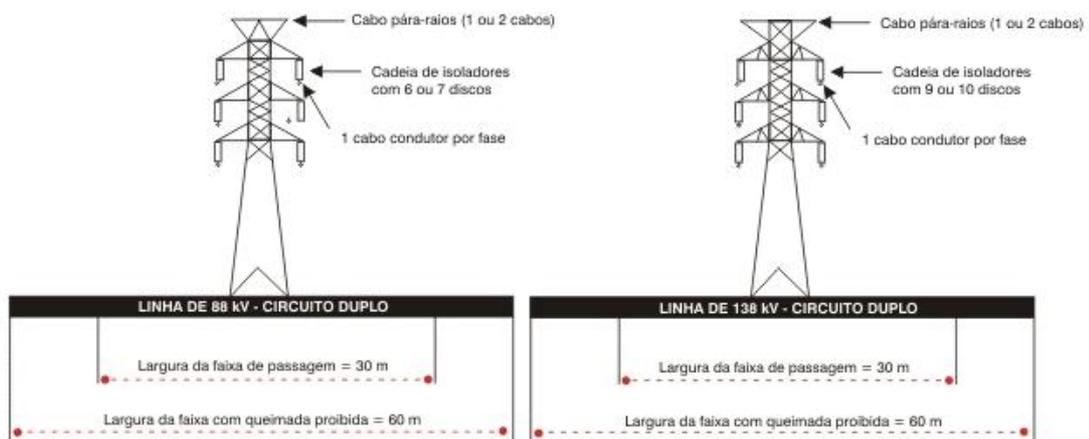


Figura 1.2 – Silhueta de uma linha de transmissão de circuito duplo a 88kV e 138kV.

Verifica-se nas estruturas mostradas nas Figuras de 1.2 até 1.6 que estas possuem um plano de simetria vertical. Tal característica geométrica dessas estruturas possibilita que, em estudos de transitórios eletromagnéticos, a decomposição modal das linhas seja feita a partir do uso de matrizes reais e constantes, dentre as quais destaca-se a matriz de Clarke (TAVARES, 1999).

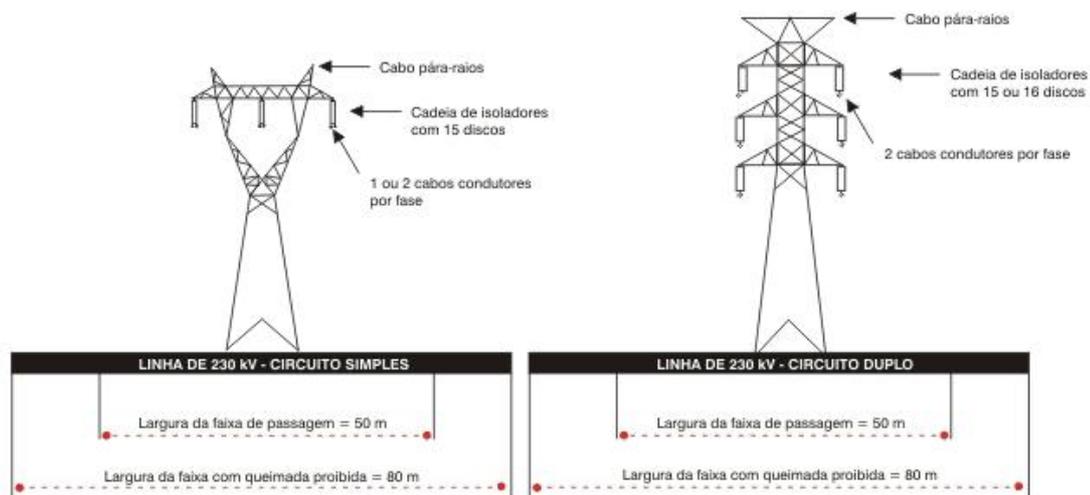


Figura 1.3 – Silhueta de uma linha de transmissão de circuito simples a 230kV e de circuito duplo a 230 kV.

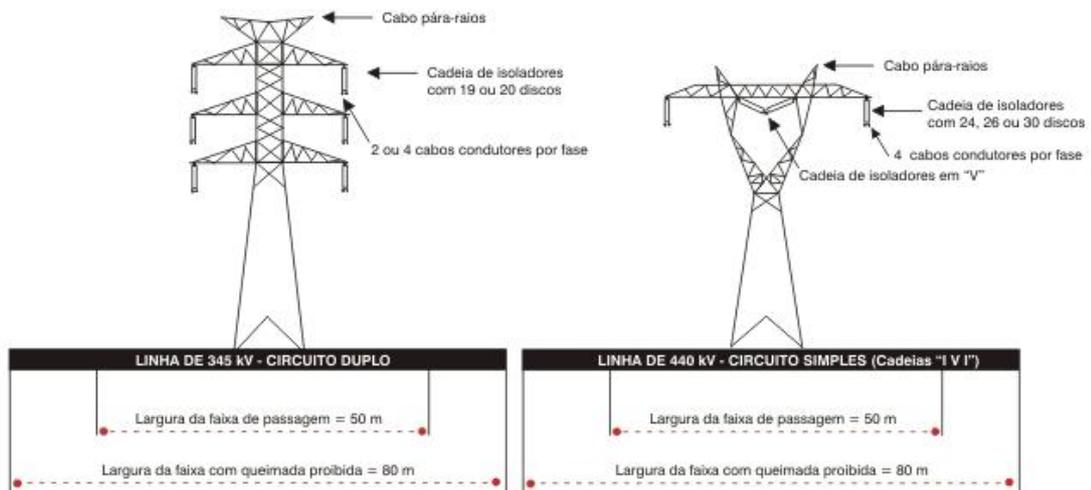


Figura 1.4 – Silhueta de uma linha de transmissão de circuito duplo a 345kV e de circuito simples a 440 kV.

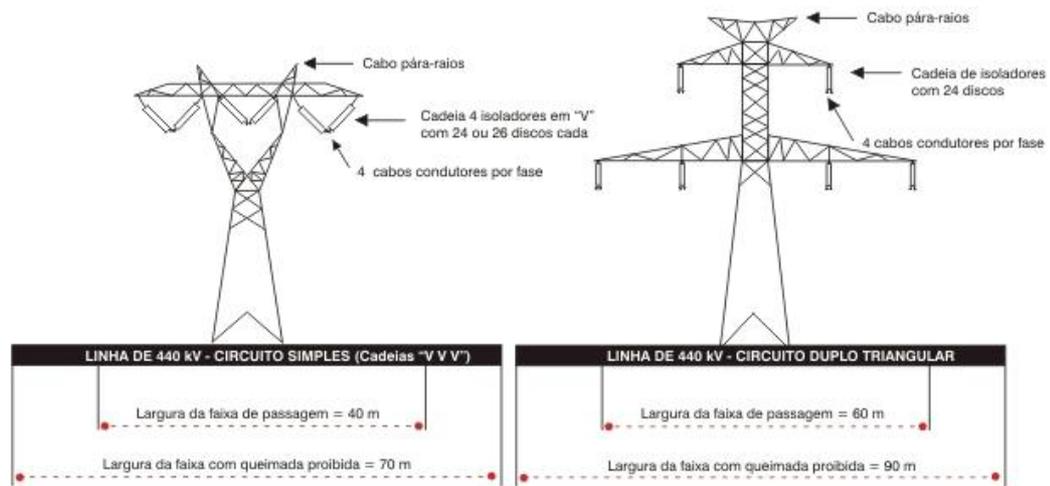


Figura 1.5 – Silhueta de uma linha de transmissão de circuito simples a 440kV e de circuito duplo triangular a 440 kV.

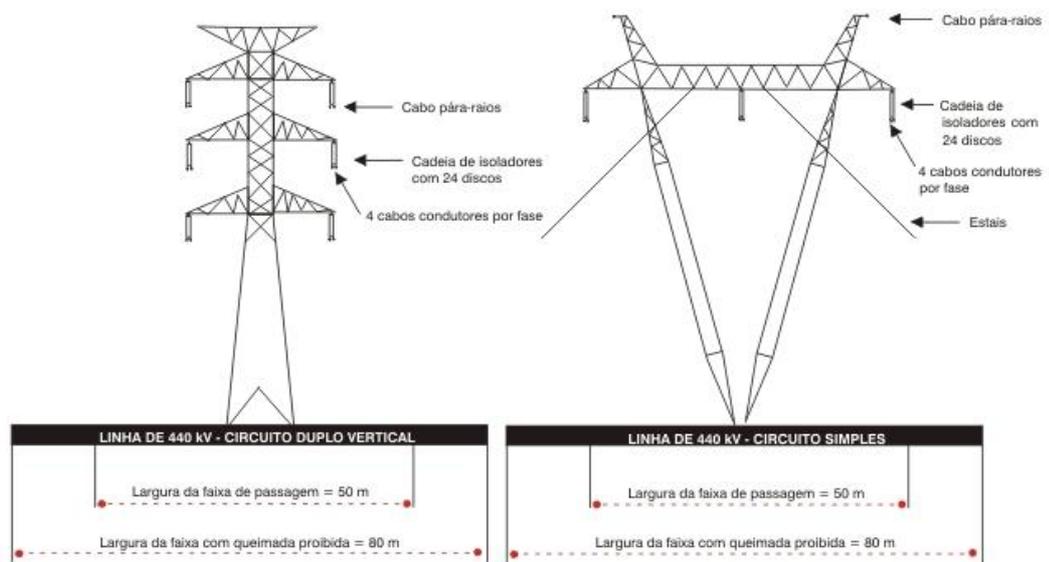


Figura 1.6 – Silhueta de uma linha de transmissão de circuito duplo vertical a 440kV e de circuito simples a 440 kV.

O uso de matrizes reais e constantes permite que uma linha trifásica (de circuito simples ou duplo) seja representada por meio de cascatas de circuitos  $\pi$  que podem ser im-

plementadas em *softwares* do tipo EMTP. Desse modo, o uso de tais matrizes permite a simulação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão diretamente no domínio do tempo (TAVARES, 1999).

O uso da matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação modal de linhas que possuem um plano de simetria vertical resulta em um erro que, em algumas situações, tais como análise de transitórios resultantes de operações de manobras e chaveamento, pode ser desconsiderado.

No entanto, o erro resultante da matriz de Clarke ainda hoje é motivo de discórdia entre diversos pesquisadores que atuam no desenvolvimento de modelos de linhas e na análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica. Até o presente momento ainda não existe um consenso entre esses pesquisadores.

Desse modo, sem entrar no mérito da validade ou não do uso de matrizes constantes como sendo matrizes de transformações modais, nesse trabalho, desenvolveu-se um método de decomposição modal que utiliza duas matrizes de transformações. Sendo a primeira matriz utilizada a matriz de Clarke. Em seguida utiliza-se uma matriz de transformação modal exata.

Percebe-se que após a primeira decomposição de uma linha trifásica de 440 kV, que é feita com a matriz de Clarke, a mesma pode ser representada por uma linha monofásica e por uma linha bifásica, sem plano de simetria vertical, sendo que não existe acoplamento entre estas duas linhas. Em seguida, pôde-se decompor a linha bifásica com o uso de uma matriz de transformação modal adequada (WEDEPHOL et al., 1996).

De maneira geral, pode-se dizer que a matriz de decomposição modal de uma linha trifásica de 440 kV possui 9 elementos complexos e variáveis em relação à frequência, que são de difícil implementação em programas do tipo EMTP. No entanto, quando se utiliza

o processo de representação modal proposto nesse trabalho, somente a linha bifásica passa a ter uma matriz de decomposição modal cujos elementos são variáveis em relação à frequência e esta matriz possui somente 4 elementos.

A redução da quantidade de elementos variáveis em relação à frequência provavelmente reduzirá o erro inerente ao modelo, pois quando um modelo de linha é inserido em um programa que realiza simulações diretamente no domínio do tempo, os elementos das matrizes de transformação modal devem ser aproximados por meio de funções racionais (SARTO, 2002) e esse processo de conversão frequência-tempo sempre resultará em um erro.

Desse modo, pode-se dizer que devido ao fato do método de representação modal proposto ser exato, o mesmo é mais eficiente que o método de decomposição que utiliza somente a matriz de Clarke e possui ainda a vantagem de que somente 4 elementos serão aproximados por meio de funções racionais. Provavelmente a redução do número de aproximações realizadas no modelo resultará na diminuição do erro.

## **1.2 MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO**

Devido às suas peculiaridades, as linhas de transmissão podem ser modeladas de diferentes formas, de acordo com a precisão e eficiência necessárias.

Na literatura, existem diversas representações para as linhas de transmissão. Quanto à técnica de simulação utilizada, os modelos podem ser classificados em dois grandes grupos que são os modelos descritos no domínio do tempo e os modelos descritos no domínio da frequência (FARIA et al., 2002).

Nos modelos do primeiro grupo, a solução é obtida diretamente em função do tempo sem o uso de transformadas inversas (de Fourier ou de Laplace), enquanto que, no segundo grupo, a solução é primeiramente obtida no domínio da frequência para em seguida ser convertida para o domínio do tempo por meio de transformadas inversas.

Os modelos escritos no domínio da frequência são limitados quanto à sua capacidade de representar corretamente alterações na configuração do sistema (tais como faltas e manobras) e apresentam dificuldades quanto à representação de elementos não lineares.

Os modelos de linhas de transmissão também podem ser classificados quanto à natureza de seus parâmetros em modelos a parâmetros constantes e modelos a parâmetros variáveis em relação à frequência. Os modelos a parâmetros constantes são de fácil utilização, mas não podem representar adequadamente a linha em toda a faixa de frequências nas quais estão presentes os fenômenos de natureza transitória. Na maior parte dos casos esses modelos aumentam a amplitude das harmônicas de ordem elevada, distorcendo as formas de onda e produzindo picos exagerados (FARIA et al., 2002).

Os modelos com parâmetros variáveis em relação à frequência são considerados mais precisos quando comparados aos modelos que consideram os parâmetros constantes. A variação está na dependência da frequência, podendo esta ser representada por meio da associação série e paralela de elementos R e L (TAVARES, 1999).

As linhas de transmissão polifásicas podem ainda ser representadas no domínio modal ou no domínio das fases (FARIA et al., 2002). Os modelos que representam linhas polifásicas no domínio modal fazem uso da técnica de transformação modal. Nesse caso, a partir do cálculo dos autovalores do produto matricial envolvendo as matrizes de impedâncias longitudinais e admitâncias transversais, pode-se representar uma linha polifásica com  $n$  fases por meio de  $n$  linhas monofásicas independentes e matematicamente equivalentes ao sistema polifásico original.

Na representação modal, todos os cálculos são realizados no sistema de  $n$  linhas monofásicas que representa o sistema original. Em seguida, utilizando uma matriz de transformação modal adequada, obtém-se os resultados para a linha polifásica. A vantagem da representação da linha por meio de seus modos é que no domínio modal o acoplamento entre as fases é eliminado, facilitando os cálculos das correntes e tensões. A Figura 1.7 mostra um diagrama de blocos onde se representa uma linha no domínio modal.

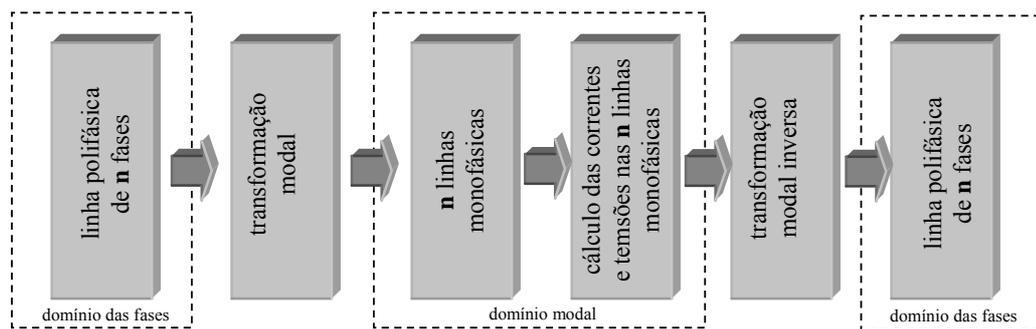


Figura 1.7 – Representação em diagrama de blocos de uma linha no domínio modal.

Quando a linha é representada no domínio das fases, todos os cálculos são realizados diretamente nas fases da linha, evitando a transição para o domínio modal (FARIA et al., 2002).

## **2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

As linhas de transmissão são caracterizadas por sua capacidade de conduzir energia eletromagnética. Uma análise rigorosa desse problema exigiria uma aplicação das equações de Maxwell nos problemas de campo. Entretanto, um exame das equações de Maxwell pode demonstrar que, em certas condições, pode-se usar uma aproximação muito mais simples, que será mostrada nesse capítulo.

### **2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO MONOFÁSICA**

Denomina-se linha de transmissão ao sistema constituído de dois condutores metálicos, retilíneos e completamente isolados. Em algumas situações um dos condutores pode ser substituído pelo solo.

A Figura 2.1 mostra uma representação de uma linha de transmissão monofásica, de comprimento  $d$ , onde o retorno da corrente se dá por meio do solo.

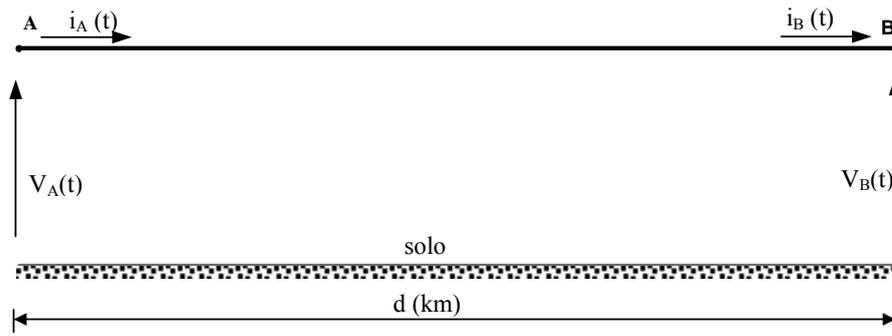


Figura 2.1 – Linha de transmissão monofásica de comprimento  $d$ .

Sabendo-se que os parâmetros elétricos longitudinais e transversais de uma linha de transmissão, do tipo mostrada na Figura 2.1, são uniformemente distribuídos ao longo do comprimento da mesma, pode-se representar um elemento infinitesimal desta linha conforme a Figura 2.2 (CHIPMAN, 1972); (GREENWOOD, 1977).

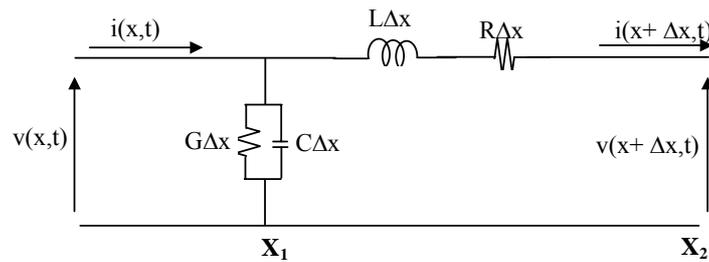


Figura 2.2 – Circuito equivalente para um elemento infinitesimal da linha.

No circuito mostrado na Figura 2.2,  $R$  e  $L$  são, respectivamente, a resistência e a indutância longitudinais da linha, por unidade de comprimento e os elementos  $G$  e  $C$  são, respectivamente, a condutância e a capacitância transversais da linha por unidade de comprimento.

As equações de corrente e de tensão para o circuito da Figura 2.2 são:

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - G\Delta x v(x, t) - C\Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad 2.1$$

$$v(x + \Delta x, t) = v(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} - R\Delta x i(x + \Delta x, t) \quad 2.2$$

A corrente e a tensão, bem como suas respectivas derivadas parciais podem ser expandidas por séries de Taylor (SWOKOWSKI, 1995):

$$i(x + \Delta x, t) \approx i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \Delta x + \dots \quad 2.3$$

$$v(x + \Delta x, t) \approx v(x, t) + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Delta x + \dots \quad 2.4$$

$$\frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} \Delta x + \dots \quad 2.5$$

$$\frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} \Delta x + \dots \quad 2.6$$

Considerando-se apenas os dois primeiros termos, substituindo-se as séries nas equações 2.1 e 2.2, obtém-se:

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -C\Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} - G\Delta x v(x + \Delta x, t) + C\Delta x^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} + G\Delta x^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad 2.7$$

$$v(x + \Delta x, t) - v(x, t) =$$

$$-L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R\Delta x i(x, t) - L\Delta x^2 \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} - R\Delta x^2 \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad 2.8$$

A partir da definição de derivada, (SWOKOWSKI, 1995), obtêm-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad 2.9$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad 2.10$$

Logo:

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G v(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad 2.11$$

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = R i(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad 2.12$$

As equações 2.11 e 2.12 são as equações diferenciais de primeira ordem e descrevem o comportamento das correntes e tensões na linha monofásica no domínio do tempo.

No domínio da frequência, as equações 2.11 e 2.12, conforme (CHIPMAN, 1972) tornam-se:

$$-\frac{dI(x, \omega)}{dx} = Y(\omega) V(x, \omega) \quad 2.13$$

$$-\frac{dV(x, \omega)}{dx} = Z(\omega) I(x, \omega) \quad 2.14$$

onde:

$$Z(\omega) = R(\omega) + j\omega L \quad 2.15$$

$$Y(\omega) = G + j\omega C \quad 2.16$$

Nas expressões 2.13 e 2.14,  $I(x, \omega)$  e  $V(x, \omega)$  são, respectivamente, a corrente e a tensão em uma posição  $x$  da linha no domínio da frequência. Os termos  $Z(\omega)$  e  $Y(\omega)$  são, respectivamente, a impedância longitudinal e a admitância transversal da linha por unidade de comprimento.

Nas equações 2.15 e 2.16, o termo  $\omega$  corresponde à frequência angular. Os parâmetros  $R$ ,  $L$ ,  $Z$  e  $Y$  são variáveis em relação à frequência.

Derivando as equações 2.13 e 2.14 em relação a  $x$ , obtêm-se:

$$-\frac{d^2 I(x, \omega)}{dx^2} = Y(\omega) \frac{dV(x, \omega)}{dx} \quad 2.17$$

$$-\frac{d^2 V(x, \omega)}{dx^2} = Z(\omega) \frac{dI(x, \omega)}{dx} \quad 2.18$$

Substituindo-se as equações 2.14 e 2.13 nas equações 2.17 e 2.18, respectivamente, e fazendo-se as devidas manipulações, obtêm-se:

$$\frac{d^2 I(x, \omega)}{dx^2} = Y(\omega) Z(\omega) I(x, \omega) \quad 2.19$$

$$\frac{d^2 V(x, \omega)}{dx^2} = Z(\omega) Y(\omega) V(x, \omega) \quad 2.20$$

As equações 2.19 e 2.20 são as equações diferenciais de segunda ordem de uma linha de transmissão monofásica, escritas no domínio da frequência.

### 2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POLIFÁSICA

Para uma linha polifásica, no domínio da frequência a impedância longitudinal e a admitância transversal, por unidade de comprimento, podem ser escritas na forma:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.21$$

$$[Y(\omega)] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.22$$

Nas expressões 2.21 e 2.22, têm-se:

$$z_{ii}(\omega) = R_{ii}(\omega) + j\omega L_{ii}(\omega) \quad 2.23$$

$$z_{ij}(\omega) = R_{ij}(\omega) + j\omega L_{ij}(\omega) \quad 2.24$$

$$y_{ii}(\omega) = G_{ii} + j\omega C_{ii} \quad 2.25$$

$$y_{ij}(\omega) = G_{ij} + j\omega C_{ij} \quad 2.26$$

sendo:

$z_{ii}$  — impedância própria da fase  $i$ ;

$z_{ij}$  — impedância mútua entre as fases  $i$  e  $j$ ;

$y_{ii}$  — admitância da fase  $i$ ;

$y_{ij}$  — admitância entre as fases  $i$  e  $j$ .

Nas equações 2.19 e 2.20, as matrizes  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  são, respectivamente, as matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal da linha, por unidade de comprimento.

Desse modo, as equações 2.21 e 2.22 tornam-se:

$$\frac{d^2 [I(\omega)]}{dx^2} = [Y(\omega)][Z(\omega)][I(\omega)] \quad 2.27$$

$$\frac{d^2 [V(\omega)]}{dx^2} = [Z(\omega)][Y(\omega)][V(\omega)] \quad 2.28$$

Nas equações 2.27 e 2.28,  $[I(\omega)]$  e  $[V(\omega)]$  são, respectivamente, os vetores com as correntes e as tensões de fase da linha, escritas no domínio da frequência.

## 2.4 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, foram mostradas as equações diferenciais que representam uma linha de transmissão polifásica genérica cujos parâmetros são uniformemente distribuídos ao longo da linha. Foram mostradas as equações diferenciais da linha no domínio do tempo e no domínio da frequência.

### **3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO MONOFÁSICA NO DOMÍNIO DO TEMPO**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

A obtenção da solução das equações diferenciais de uma linha de transmissão monofásica diretamente no domínio do tempo é bastante complicada. Porém, pode ser facilmente obtida para o caso de linhas sem perdas, cujos parâmetros são invariáveis em relação à frequência.

Uma opção para se obter a solução das equações diferenciais da linha no domínio do tempo consiste em, inicialmente, escrever estas equações no domínio da frequência, obtendo-se, as soluções dessas equações no domínio da frequência. Em uma próxima etapa, utilizam-se as transformadas inversas de Laplace ou Fourier para se obter a resposta no domínio do tempo. No entanto, esse procedimento exige o uso de integrais de convoluções cujas soluções não são encontradas com facilidade.

Esse procedimento para a obtenção da resposta da linha no domínio do tempo permite que seja levado em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha. Porém, para se fazer a conversão do domínio da frequência para o domínio do tempo faz-se necessário o emprego de integrais de convolução, que não possuem uma solução analítica. Desse modo, a resposta da linha somente pode ser conseguida de forma numérica.

Convém destacar que existem outros modelos que permitem obter a resposta da linha diretamente no domínio do tempo, sem o uso de integrais de convolução. Nesses modelos, a linha é representada por meio de uma grande quantidade de circuitos  $\pi$  conectados em cascata e o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais pode ser sintetizado por meio da associação série e paralela de resistores e indutores.

### 3.2 SOLUÇÃO DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA LINHAS SEM PERDAS

Conforme mostrado no capítulo 2, uma linha de transmissão monofásica pode ser descrita pelas seguintes equações diferenciais:

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = R i(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad 3.1$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G v(x,t) + C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad 3.2$$

Para o caso de uma linha sem perdas,  $R$  e  $G$  são nulos. Desse modo, as equações 3.1 e 3.2 tornam-se:

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad 3.3$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad 3.4$$

A solução das equações diferenciais mostradas anteriormente são bem conhecidas (NAIDU, 1985).

Esse modelo não representa adequadamente uma linha real, pois não leva em consideração as perdas de energia, além da variação dos parâmetros em relação à frequência.

### 3.3 SOLUÇÃO DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA LINHAS COM PERDAS

Uma linha de transmissão, cujos parâmetros possam ser considerados independentes da frequência pode ser representada, de maneira aproximada e obedecendo a uma série de restrições, como sendo uma cascata de circuitos  $\pi$  (NELMS, 1989).

A Figura 3.1 mostra uma linha de transmissão monofásica representada por meio de uma cascata de  $n$  circuitos  $\pi$ .

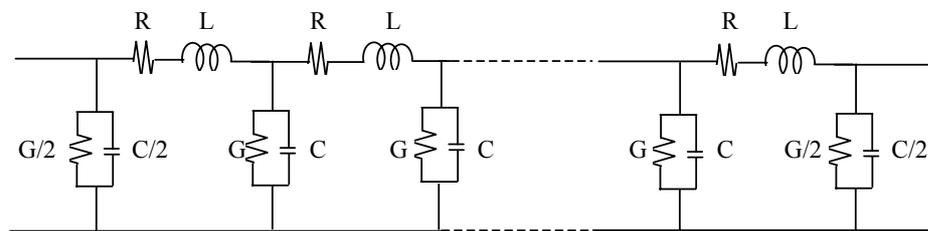


Figura 3.1 – Linha representada por meio de uma cascata de Circuitos  $\pi$ .

A Figura 3.1 mostra uma linha representada por meio de  $n$  circuitos  $\pi$  conectados em cascata.  $R$  e  $L$  são, respectivamente, a resistência e a indutância longitudinais da linha e os parâmetros  $G$  e  $C$  são, respectivamente, a condutância e a capacitância transversais. Esses parâmetros são escritos como sendo:

$$R = R' \frac{d}{n}; \quad L = L' \frac{d}{n} \quad 3.5$$

$$G = G' \frac{d}{n}; \quad C = C' \frac{d}{n} \quad 3.6$$

Em 3.5 e 3.6, os termos  $R'$ ,  $L'$ ,  $C'$  e  $G'$  são os parâmetros totais da linha, por unidade de comprimento e  $d$  é o comprimento da linha.

O efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais pode ser sintetizado por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores que substituirão a associação RL série em cada um dos circuitos  $\pi$  mostrados na Figura 3.1 (SARTO, 2002).

A Figura 3.2 mostra um circuito  $\pi$  de uma cascata que representa uma linha cuja influência da frequência é levada em consideração (TAVARES, 1999).

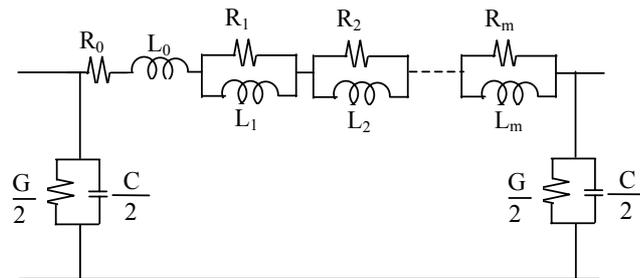


Figura 3.2 – Circuito  $\pi$  com o efeito da frequência.

Na Figura 3.2, as associações RL paralelas são tantas quantas forem necessárias para representar a variação dos parâmetros em cada década de frequência que será considerada.

A cascata de circuitos  $\pi$ , em que a influência da frequência sobre os parâmetros longitudinais é considerada, pode então ser implementada em programas do tipo EMTP que calculam as correntes e tensões ao longo da cascata. Esse modelo de linha geralmente é utilizado para simular transitórios oriundos de operações de manobras e chaveamento (TAVARES, 1999).

Uma linha que é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , conforme mostrado na Figura 3.1, pode ser descrita também por meio de variáveis de estado (NELMS et al. 1989); (MAMIS, 2002) e (MAMIS, 2003). No entanto, esse modelo somente foi utilizado pelos autores anteriormente mencionados para representar linhas de transmissão monofásicas em que a influência da frequência sobre os parâmetros possa ser desconsiderada.

Em um trabalho recente, (KUROKAWA et al., 2006a) inseriu a influência da frequência nas matrizes de estado que descrevem uma linha de transmissão monofásica. Desse modo, se uma cascata de  $n$  circuitos  $\pi$  do tipo mostrado na Figura 3.2 é utilizada para representar uma linha monofásica de comprimento  $d$  e se são utilizadas  $m$  associações paralela de resistores e indutores para sintetizar a influência da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha, (KUROKAWA et al., 2006a) mostra que esta linha pode ser descrita na forma de variáveis de estado, ou seja:

$$\dot{[X]} = [A] [X] + [B] u(t) \quad 3.7$$

Em 3.7,  $[X]$  é o vetor de estados,  $[A]$  é uma matriz quadrada e  $[B]$  é uma matriz coluna. A função  $u(t)$  é a entrada que será aplicada no sistema. O vetor  $[X]$  é denominado vetor de estado, enquanto que as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são denominadas matrizes de estado. O vetor  $\dot{[X]}$  é a derivada do vetor  $[X]$  em relação ao tempo.

(KUROKAWA et al., 2006a) mostra que, se forem adotadas como variáveis de estado as correntes em cada um dos indutores e as tensões sobre os capacitores da cascata de circuitos  $\pi$ , o vetor  $[X]$  possui  $n(m+2)$  elementos e a matriz  $[A]$  é uma matriz de ordem  $n(m+2)$ .

### 3.4 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO POR MEIO DE INTEGRAIS DE CONVOLUÇÃO

Considere uma linha de transmissão monofásica de comprimento  $d$ , conforme mostra a Figura 3.3.



Figura 3.3 – Linha de transmissão monofásica de comprimento  $d$ .

Na Figura 3.3,  $I_A(\omega)$  e  $I_B(\omega)$  são as correntes longitudinais da linha nos terminais A e B, respectivamente, enquanto que  $V_A(\omega)$  e  $V_B(\omega)$  são as tensões nesses terminais. As correntes  $I_A(\omega)$  e  $I_B(\omega)$  e as tensões  $V_A(\omega)$  e  $V_B(\omega)$  estão no domínio da frequência.

No capítulo 2 foi mostrado que as equações diferenciais que descrevem as correntes e tensões no domínio da frequência em uma linha monofásica são escritas como sendo:

$$-\frac{\partial I(x)}{\partial x} = Y(\omega) V(x, \omega) \quad 3.8$$

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = Z(\omega) I(x, \omega) \quad 3.9$$

Mostra-se que as soluções para as equações 3.8 e 3.9, quando aplicadas na linha da Figura 3.3, conforme (BUDNER, 1970) são:

$$V_A(\omega) = V_B(\omega) \cosh(\gamma d) - I_B(\omega) Z_c \sinh(\gamma d) \quad 3.10$$

$$I_A(\omega) = -I_B(\omega) \cosh(\gamma d) + \frac{V_B(\omega)}{Z_c} \sinh(\gamma d) \quad 3.11$$

Nas equações 3.10 e 3.11, os termos  $\gamma$  e  $Z_c$  são, respectivamente, a constante de propagação e a impedância característica da linha, escritos conforme (CHIPMAN, 1972):

$$\gamma(\omega) = \sqrt{Z(\omega)Y(\omega)} \quad 3.12$$

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{Z(\omega)}{Y(\omega)}} \quad 3.13$$

Nas equações 3.12 e 3.13,  $Z$  e  $Y$  são, respectivamente, a impedância longitudinal e a admitância transversal da linha por unidade de comprimento.

Das equações 3.10 e 3.11 obtêm-se:

$$I_A(\omega) = \frac{1}{Z_c} \coth(\gamma d) V_A - \frac{1}{Z_c \sinh(\gamma d)} V_B \quad 3.14$$

$$I_B(\omega) = \frac{1}{Z_c} \coth(\gamma d) V_B - \frac{1}{Z_c \sinh(\gamma d)} V_A \quad 3.15$$

As expressões 3.14 e 3.15 podem ser escritas de maneira simplificada como sendo:

$$V_A(\omega) = y_{AA}(\omega) V_A(\omega) + y_{AB}(\omega) V_B(\omega) \quad 3.16$$

$$V_B(\omega) = y_{BA}(\omega) V_A(\omega) + y_{BB}(\omega) V_B(\omega) \quad 3.17$$

Nas equações 3.16 e 3.17, os termos  $y_{AA}(\omega)$ ,  $y_{BB}(\omega)$ ,  $y_{AB}(\omega)$  e  $y_{BA}(\omega)$  são:

$$y_{AA}(\omega) = y_{BB}(\omega) = \frac{1}{Z_c} \coth(\gamma d) \quad 3.18$$

$$y_{AB}(\omega) = y_{BA}(\omega) = -\frac{1}{Z_c \sinh(\gamma d)} \quad 3.19$$

Para se obter as correntes e tensões nos terminais A e B da linha a partir das equações 3.10 e 3.11 é necessário o uso de integrais de convolução (KREYSZIG, 1992); (BUDNER, 1970).

Desse modo, utilizando o conceito de integrais de convolução, obtêm-se:

$$i_A(t) = \int_0^t y_{AA}(t-\lambda) V_A(\lambda) d\lambda + \int_0^t y_{AB}(t-\lambda) V_B(\lambda) d\lambda \quad 3.20$$

$$i_B(t) = \int_0^t y_{BA}(t-\lambda) V_A(\lambda) d\lambda + \int_0^t y_{BB}(t-\lambda) V_B(\lambda) d\lambda \quad 3.21$$

Nas equações 3.20 e 3.21 os termos  $y_{AA}(t-\lambda)$ ,  $y_{BB}(t-\lambda)$ ,  $y_{AB}(t-\lambda)$  e  $y_{BA}(t-\lambda)$  são respectivamente, as transformadas inversas de Laplace das funções  $y_{AA}(\omega)$ ,  $y_{BB}(\omega)$ ,  $y_{AB}(\omega)$  e  $y_{BA}(\omega)$  (SPIEGEL, 1971).

As funções  $V_A(\lambda)$  e  $V_B(\lambda)$  são as tensões no domínio do tempo nos terminais A e B da linha, respectivamente e são as transformadas inversas de Laplace de  $V_A(\omega)$  e  $V_B(\omega)$ .

A obtenção das correntes e tensões nos terminais da linha por meio de integrais de convolução é um processo bastante complexo, pois as funções  $y_{AA}(t-\lambda)$ ,  $y_{BB}(t-\lambda)$ ,  $y_{AB}(t-\lambda)$  e  $y_{BA}(t-\lambda)$  dificilmente podem ser expressas na forma analítica.

### 3.5 CONCLUSÃO

Esse capítulo explorou a solução das equações diferenciais de uma linha de transmissão monofásica no domínio do tempo.

O caso mais simples é uma linha sem perdas cujos parâmetros sejam independentes da frequência sendo, provavelmente, a única situação em que as equações diferenciais possuem uma solução analítica simples.

Foram mostradas as soluções diretamente no domínio do tempo para linhas com perdas, considerando ou não a influência da frequência sobre seus parâmetros longitudinais.

Foi mostrado também o processo de obtenção da solução da linha no domínio do tempo por meio do uso de integrais de convolução.

## 4 REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO MODAL

### 4.1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais de segunda ordem que descrevem uma linha de transmissão polifásica são de difícil solução devido ao acoplamento entre as fases. Uma importante ferramenta de análise de sistemas polifásicos é a técnica que desacopla as fases dos mesmos. Desta maneira, um sistema que possui  $n$  fases acopladas pode ser representado por  $n$  sistemas monofásicos que são matematicamente idênticos ao sistema original.

Para um sistema polifásico genérico, a matriz com os autovetores do produto matricial  $[Z][Y]$  desacopla as fases da linha. Existem, para um único produto  $[Z][Y]$ , diversos conjuntos de autovetores que desacoplam a linha. A definição de um conjunto específico de autovetores é feita por meio da imposição de uma restrição adicional, a de que cada um dos autovetores do conjunto possua módulo unitário.

## 4.2 DECOMPOSIÇÃO MODAL DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

As equações diferenciais de primeira ordem para uma linha de transmissão com  $n$  fases são:

$$\frac{\partial [V(x, \omega)]}{\partial x} = -[Z(\omega)][I(x, \omega)] \quad 4.1$$

$$\frac{\partial [I(x, \omega)]}{\partial x} = -[Y(\omega)][V(x, \omega)] \quad 4.2$$

As equações diferenciais de segunda ordem para uma linha de transmissão com  $n$  fases, escritas no domínio da frequência são:

$$\frac{\partial^2 [V(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Z(\omega)][Y(\omega)][V(x, \omega)] \quad 4.3$$

$$\frac{\partial^2 [I(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Y(\omega)][Z(\omega)][I(x, \omega)] \quad 4.4$$

As matrizes  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  são, respectivamente, as matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal por unidade de comprimento da linha. Os vetores  $[V(x, \omega)]$  e  $[I(x, \omega)]$  são, respectivamente, os vetores com as tensões e correntes de fase.

Nas equações de 4.1 até 4.4, o termo  $\omega$  corresponde à frequência angular. As matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal por unidade de comprimento da linha, assim como os vetores de corrente e tensão, são variáveis em relação à frequência. Por questões de simplificação, o termo  $\omega$  será omitido dessas grandezas no restante desse capítulo.

A matriz  $[Z]$  leva em consideração o efeito do solo e o efeito pelicular (DOMMEL, 1996); (MARTI, 1983). Os vetores  $[V]$  e  $[I]$  são os vetores de tensões e correntes de fase, respectivamente.

As equações de 4.1 a 4.4 estão no domínio das fases e são de difícil resolução, uma vez que os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  são, de maneira genérica, distintos (as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  não são matrizes diagonais).

Tais produtos podem ser transformados em matrizes diagonais a partir da utilização de uma transformação de similaridade (CHEN, 1984). Nesse caso, os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  resultarão em matrizes diagonais cujos elementos são os autovalores dos produtos matriciais.

A matriz  $[\lambda_v]$ , que é a matriz com os autovalores de  $[Z][Y]$  é calculada por meio da seguinte relação:

$$[\lambda_v] = [T_v]^{-1} [Z][Y] [T_v] \quad 4.5$$

Os autovalores  $[\lambda_i]$  do produto matricial  $[Y][Z]$  são:

$$[\lambda_i] = [T_i]^{-1} [Y][Z] [T_i] \quad 4.6$$

Nas equações 4.5 e 4.6, as matrizes  $[T_v]$  e  $[T_i]$  são, respectivamente, as matrizes cujas colunas são os autovetores das matrizes  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ . As matrizes  $[T_v]$ ,  $[T_i]$ ,  $[\lambda_i]$  e  $[\lambda_v]$  são complexas e variáveis em relação à frequência.

Os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ , de maneira genérica são distintos e portanto, as matrizes  $[T_v]$  e  $[T_i]$  são diferentes.

No entanto, mesmo sendo  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  matrizes distintas, seus determinantes e conseqüentemente seus autovalores  $[\lambda_v]$  e  $[\lambda_i]$  são iguais:

$$[\lambda_v] = [\lambda_l] \quad 4.7$$

Denominando-se os autovalores dos produtos  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  de  $[\lambda_m]$ , obtêm-se:

$$[\lambda_m] = [\lambda_v] \quad 4.8$$

$$[\lambda_m] = [\lambda_l] \quad 4.9$$

Substituindo-se as equações 4.8 e 4.9 nas equações 4.5 e 4.6, respectivamente, têm-se:

$$[\lambda_m] = [T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] \quad 4.10$$

$$[\lambda_m] = [T_l]^{-1} [Y][Z][T_l] \quad 4.11$$

Fazendo-se a pré-multiplicação das equações 4.10 e 4.11 por  $[T_v]$  e  $[T_l]$ , respectivamente, obtêm-se:

$$[T_v][\lambda_m] = [Z][Y][T_v] \quad 4.12$$

$$[T_l][\lambda_m] = [Y][Z][T_l] \quad 4.13$$

Fazendo-se a pós-multiplicação das equações 4.12 e 4.13 por  $[T_v]^{-1}$  e  $[T_l]^{-1}$ , respectivamente, obtêm-se:

$$[Z][Y] = [T_v][\lambda_m][T_v]^{-1} \quad 4.14$$

$$[Y][Z] = [T_l][\lambda_m][T_l]^{-1} \quad 4.15$$

Substituindo-se as equações 4.14 e 4.15 nas equações 4.2 e 4.3, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 [V]}{\partial x^2} = [T_v][\lambda_m][T_v]^{-1} [V] \quad 4.16$$

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{I}]}{\partial x^2} = [\mathbf{T}_I] [\lambda_m] [\mathbf{T}_I]^{-1} [\mathbf{I}] \quad 4.17$$

Pré-multiplicando as equações 4.16 e 4.17 por  $[\mathbf{T}_V]^{-1}$  e  $[\mathbf{T}_I]^{-1}$ , respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{T}_V]^{-1} [\mathbf{V}]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [\mathbf{T}_V]^{-1} [\mathbf{V}] \quad 4.18$$

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{T}_I]^{-1} [\mathbf{I}]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [\mathbf{T}_I]^{-1} [\mathbf{I}] \quad 4.19$$

Nas equações 4.18 e 4.19, pode-se definir as correntes e tensões modais como sendo:

$$[\mathbf{V}_m] = [\mathbf{T}_V]^{-1} [\mathbf{V}] \quad 4.20$$

$$[\mathbf{I}_m] = [\mathbf{T}_I]^{-1} [\mathbf{I}] \quad 4.21$$

Manipulando-se as equações 4.20 e 4.21, obtêm-se:

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{T}_V] [\mathbf{V}_m] \quad 4.22$$

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{T}_I] [\mathbf{I}_m] \quad 4.23$$

Neste caso,  $[\mathbf{V}_m]$  e  $[\mathbf{I}_m]$  são os vetores com as tensões e as correntes modais da linha, respectivamente. Substituindo-se  $[\mathbf{V}]$  e  $[\mathbf{I}]$  das equações 4.22 e 4.23 nas equações 4.18 e 4.19, respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{V}_m]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [\mathbf{V}_m] \quad 4.24$$

$$\frac{\partial^2 [\mathbf{I}_m]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [\mathbf{I}_m] \quad 4.25$$

As expressões 4.24 e 4.25 são as equações diferenciais dos modos exatos da linha. Devido ao fato de  $[\lambda_m]$  ser uma matriz diagonal, as mesmas são idênticas às equações diferen-

ciais de  $n$  linhas monofásicas independentes, cujas possíveis técnicas de resolução já foram mostradas em capítulos anteriores.

#### 4.2.1 Matrizes de impedâncias e de admitâncias modais exatas

Substituindo-se os vetores  $[V]$  e  $[I]$  das equações 4.22 e 4.23 nas equações 4.1 e 4.2, têm-se:

$$\frac{\partial [T_V][V_m]}{\partial x} = -[Z][T_I][I_m] \quad 4.26$$

$$\frac{\partial [T_I][I_m]}{\partial x} = -[Y][T_V][V_m] \quad 4.27$$

Pré-multiplicando-se as equações 4.26 e 4.27 por  $[T_V]^{-1}$  e  $[T_I]^{-1}$ , respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial [V_m]}{\partial x} = -[T_V]^{-1}[Z][T_I][I_m] \quad 4.28$$

$$\frac{\partial [I_m]}{\partial x} = -[T_I]^{-1}[Y][T_V][V_m] \quad 4.29$$

As equações 4.28 e 4.29 podem ser escritas como sendo:

$$\frac{\partial [V_m]}{\partial x} = -[Z_m][I_m] \quad 4.30$$

$$\frac{\partial [I_m]}{\partial x} = -[Y_m][V_m] \quad 4.31$$

Nas equações 4.30 e 4.31,  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são respectivamente, as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais modais exatas da linha. Estas matrizes são escritas como sendo:

$$[Z_m] = [T_v]^{-1} [Z] [T_I] \quad 4.32$$

$$[Y_m] = [T_I]^{-1} [Y] [T_v] \quad 4.33$$

As matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são matrizes diagonais, como mostrados nos próximos itens.

#### 4.2.2 Relação entre as matrizes $[T_v]$ e $[T_I]$

Considerando-se a impedância mútua entre as fases  $i$  e  $j$  idêntica à impedância mútua entre as fases  $j$  e  $i$ , pode-se afirmar que:

$$[Z] = [Z]^T \quad 4.34$$

$$[Y] = [Y]^T \quad 4.35$$

Nas equações 4.34 e 4.35, as matrizes  $[Z]^T$  e  $[Y]^T$  são as matrizes transpostas de  $[Z]$  e  $[Y]$ , respectivamente. Substituindo as equações 4.34 e 4.35 na equação 4.10, obtém-se:

$$[\lambda_m] = [T_v]^{-1} [Z]^T [Y]^T [T_v] \quad 4.36$$

Utilizando-se propriedades matriciais, pode-se escrever:

$$[Z]^T [Y]^T = ([Y][Z])^T \quad 4.37$$

Substituindo-se a equação 4.37 na equação 4.36, fica:

$$[\lambda_m] = [T_V]^{-1} ([Y][Z])^T [T_V] \quad 4.38$$

Transpondo-se os dois lados da equação 4.11, obtém-se:

$$[\lambda_m]^T = ([T_I]^{-1} [Y][Z][T_I])^T \quad 4.39$$

Reagrupando-se o lado direito da equação 4.39:

$$[\lambda_m]^T = ([T_I]^{-1} [Y])^T ([Z][T_I])^T \quad 4.40$$

A equação 4.40 pode ser reescrita como sendo:

$$[\lambda_m]^T = ([Z][T_I])^T ([T_I]^{-1} [Y])^T \quad 4.41$$

Desenvolvendo-se o lado direito de 4.41 a partir do mesmo desenvolvimento feito na equação 4.40, obtém-se:

$$[\lambda_m]^T = (([T_I]^T [Z]^T) [Y]^T [T_I]^{-1})^T \quad 4.42$$

Considerando-se que  $[\lambda_m]$  é uma matriz diagonal, pode-se afirmar que:

$$[\lambda_m] = [\lambda_m]^T \quad 4.43$$

Com base na equação 4.43, pode-se afirmar que as equações 4.38 e 4.42 são idênticas. Portanto tem-se:

$$[T_I]^{-1} ([Y][Z])^T [T_V] = [T_I]^T [Z]^T [Y]^T ([T_I]^{-1})^T \quad 4.44$$

Desenvolvendo-se o termo  $([Y][Z])^T$  no lado esquerdo da equação 4.44:

$$[T_I]^{-1} [Z]^T [Y]^T [T_V] = [T_I]^T [Z]^T [Y]^T ([T_I]^{-1})^T \quad 4.45$$

Da expressão 4.45 pode-se concluir que:

$$[T_V]^{-1} = [T_I]^T \quad 4.46$$

A expressão 4.46 mostra que existe uma relação entre as matrizes  $[T_V]$  e  $[T_I]$ . Portanto, basta calcular uma das matrizes e, a partir de 4.46 obter a outra matriz.

### 4.2.3 Relação entre as matrizes $[\lambda_m]$ , $[Z_m]$ e $[Y_m]$

Fazendo-se o produto das equações 4.32 e 4.33:

$$[Z_m][Y_m] = [T_V]^{-1}[Z][T_I][T_I]^{-1}[Y][T_V] \quad 4.47$$

Desenvolvendo-se a equação 4.47:

$$[Z_m][Y_m] = [T_V]^{-1}[Z][Y][T_V] \quad 4.48$$

Comparando as equações 4.10 e 4.48, pode-se afirmar que a matriz  $[\lambda_m]$  pode ser escrita como sendo:

$$[\lambda_m] = [Z_m][Y_m] \quad 4.49$$

Fazendo-se o produto das equações 4.33 e 4.32:

$$[Y_m][Z_m] = [T_I]^{-1}[Y][T_V][T_V]^{-1}[Z][T_I] \quad 4.50$$

Desenvolvendo-se a equação 4.50:

$$[Y_m][Z_m] = [T_I]^{-1}[Y][Z][T_I] \quad 4.51$$

Comparando-se as equações 3.11 e 3.51:

$$[\lambda_m] = [Y_m][Z_m] \quad 4.52$$

As equações 4.49 e 4.52 mostram que os produtos  $[Z_m][Y_m]$  e  $[Y_m][Z_m]$  são idênticos. Portanto, as matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são matrizes diagonais.

Substituindo-se as equações 4.49 e 4.52 nas equações 4.24 e 4.25, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [V_m]}{\partial x^2} = [Z_m][Y_m][V_m] \quad 4.53$$

$$\frac{\partial^2 [I_m]}{\partial x^2} = [Y_m][Z_m][I_m] \quad 4.54$$

As equações 4.53 e 4.54 são as equações diferenciais modais da linha. Uma vez que as matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são diagonais, as equações 4.53 e 4.54 estão desacopladas e suas soluções são conhecidas (BUDNER, 1970).

### 4.3 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO MODAL UTILIZANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Uma maneira de se obter a matriz de transformação modal de uma linha de transmissão consiste em utilizar-se o método de Newton-Raphson que possibilita a obtenção de autovetores que não variam bruscamente em relação à frequência (WEDEPOHL et al., 1996):

Considere uma linha polifásica de  $n$  fases. Para esta linha, pode-se escrever conforme (WEDEPOHL et al., 1996):

$$[Z][Y][T_1] = [T_1][\lambda] \quad 4.55$$

A equação 4.55 pode ser escrita como sendo:

$$([S] - \lambda_{kk} [U]) T_{kk} = [0] \quad 4.56$$

Na equação 4.56, a matriz  $[S]$  corresponde ao produto matricial  $[Y][Z]$ ,  $T_{kk}$  é a  $k$ -ésima coluna da matriz  $[T_1]$ ,  $\lambda_{kk}$  é o autovalor associado ao autovetor  $T_{kk}$  e  $[U]$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . A equação 4.56 representa um sistema homogêneo com  $n$  equações e  $(n+1)$  incógnitas. Para que o sistema possua uma única solução deve-se definir mais uma outra equação. Uma condição muito utilizada é a que define que o módulo de qualquer um dos autovetores associado a um autovalor específico é unitário (WEDEPHOL, 1963). Desta forma, obtém-se um sistema de  $(n+1)$  equações com  $(n+1)$  incógnitas que pode ser resolvido, por exemplo, por meio do método de Newton-Raphson.

Para o caso específico de uma linha de  $n$  fases, as matrizes  $[S]$ ;  $[T_1]$  e  $[\lambda]$  são do tipo:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad 4.57$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad 4.58$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \quad 4.59$$

A matriz mostrada na equação 4.57 é conhecida, enquanto que as matrizes mostradas nas equações 4.58 e 4.59 devem ser determinadas para cada valor de frequência.

Para se obter o primeiro autovalor, e um correspondente conjunto de autovetores, a equação 4.56, torna-se:

$$([S] - \lambda_{11}[U])T_{11} = [0] \quad 4.60$$

Na equação 4.60,  $\lambda_{11}$  é o primeiro autovalor enquanto que  $T_{11}$  é a primeira coluna da matriz  $[T_1]$ , que corresponde a um autovetor de  $\lambda_{11}$ . Portanto, da equação 4.60, obtém-se:

$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{11} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ \vdots \\ T_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad 4.61$$

Desenvolvendo-se a equação 4.61, obtém-se:

$$(s_{11} - \lambda_{11}) T_{11} + s_{12} T_{21} + \dots + s_{1n} T_{n1} = 0 \quad 4.62a$$

$$s_{21} T_{11} + (s_{22} - \lambda_{11}) T_{21} + \dots + s_{2n} T_{n1} = 0 \quad 4.62b$$

$$\vdots$$

$$s_{n1} T_{11} + s_{n2} T_{21} + \dots + (s_{nn} - \lambda_{11}) T_{n1} = 0 \quad 4.62c$$

Utilizando-se a hipótese de que o módulo do autovetor deve ser unitário, tem-se:

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 + \dots + T_{n1}^2 - 1 = 0 \quad 4.63$$

O Jacobiano das equações 4.62 e 4.63 é escrito como sendo (SWOKOWSKI, 1995):

$$[J] = \begin{bmatrix} (s_{11} - \lambda_{11}) & s_{12} & \dots & s_{1n} & -T_{11} \\ s_{21} & (s_{22} - \lambda_{11}) & \dots & s_{2n} & -T_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & (s_{1n} - \lambda_{11}) & -T_{n1} \\ 2T_{11} & 2T_{21} & \dots & 2T_{n1} & 0 \end{bmatrix} \quad 4.64$$

Pode-se ainda escrever as equações de 4.62a até 4.62c e 4.63 como sendo um sistema cujo número de equações é igual ao número de incógnitas. Agrupando-as novamente, obtêm-se:

$$F_1 = (S_{11} - \lambda_{11}) T_{11} + S_{12} T_{21} + \dots \dots + S_{1n} T_{n1} \quad 4.65a$$

$$F_2 = S_{21} T_{11} + (S_{22} - \lambda_{11}) T_{21} + \dots \dots + S_{2n} T_{n1} \quad 4.65b$$

⋮

$$F_n = S_{n1} T_{11} + S_{n2} T_{21} + \dots \dots + (S_{nn} - \lambda_{11}) T_{n1} \quad 4.65c$$

$$F_{n+1} = T_{11}^2 + T_{21}^2 + \dots \dots + T_{n1}^2 - 1 \quad 4.65d$$

sendo:

$$[F]^T = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n \quad F_{n+1}] \quad 4.66$$

Define-se o vetor  $[x]$  como sendo:

$$[x] = [T_{11} \quad T_{21} \quad \dots \quad T_{n1} \quad \lambda_{11}] \quad 4.67$$

A solução para o vetor  $[x]$ , do sistema de equações definido por meio das equações 4.65a até 4.65d, é obtido por meio do método de Newton-Raphson. Desse modo, a enésima iteração do método de Newton-Raphson é escrita sob a forma (WEDEPOHL, 1996):

$$[x]^{(n)} = [x]^{(n-1)} - (J(F[x]^{(n-1)}))^{-1} [F([x]^{(n-1)})] \quad 4.68$$

Na equação 4.68,  $[x]^{(n)}$  é o vetor  $[x]$  na  $n$ -ésima iteração. Os termos  $(J[x]^{(n-1)})$  e  $[F[x]]^{(n-1)}$  são, respectivamente o Jacobiano de  $[F[x]]$  e  $[F[x]]$  calculados na iteração anterior. O método de Newton-Raphson geralmente converge rapidamente desde que os valores de  $x$  e  $J(x)^{-1}$  sejam conhecidos.

Admitindo-se um erro, o algoritmo de Newton-Raphson se repetirá até a convergência e o processo será encerrado quando o erro for menor do que o admitido, obtendo-se desta forma, o primeiro autovetor  $\lambda_{11}$  e a primeira coluna da matriz  $[T_1]$ . Isto é:  $T_{11}, T_{21} \dots T_{n1}$ . O procedimento mostrado deve ser repetido para determinar-se  $\lambda_{22}$  e a segunda coluna da matriz  $[T_1]$ , assim por diante.

Uma vez que os autovetores são obtidos, é possível determinar as matrizes de impedâncias e de admitâncias modais da linha a partir das equações 4.32, 4.33 e 4.46.

#### 4.4 CONCLUSÃO

Nesse capítulo, mostrou-se o processo de decomposição modal de linhas de transmissão. A representação modal de linhas permite que uma linha de transmissão de  $n$  fases seja decomposta em seus  $n$  modos de propagação.

A vantagem de se representar a linha por meio de seus modos de propagação está no fato de que cada um dos modos comporta-se como uma linha monofásica. Desse modo, uma linha polifásica de  $n$  fases pode ser representada como sendo  $n$  linhas monofásicas independentes, cujas equações de correntes e tensões são conhecidas e cujas soluções foram mostradas em capítulos anteriores.

A decomposição da linha em seus modos de propagação é feita por meio de uma transformação de similaridade, onde a matriz de transformação é uma matriz cujas colunas correspondem a um conjunto de autovetores do produto matricial  $[Z][Y]$ .

Uma vez que as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  da linha são variáveis em função da frequência, deve-se obter um conjunto de autovetores para cada frequência.

É desejável que os autovetores obtidos sejam funções que não variem abruptamente em função da frequência.

Geralmente os autovetores do produto  $[Z][Y]$  são obtidos por meio de métodos numéricos de solução de equações algébricas. Dentre os métodos numéricos existentes, optou-se pelo método de Newton-Raphson, pois o mesmo, de acordo com a literatura, permite a obtenção de autovetores que não variam bruscamente em função da frequência.

## **5 REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS DE TRANSMISSÃO TRIFÁSICAS POR MEIO DO USO DE DUAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

Nesse capítulo, será mostrado o desenvolvimento de um método de decomposição modal de linhas trifásicas não transpostas que possuem um plano de simetria vertical (KUROKAWA et al., 2006b); (KUROKAWA et al., 2006c); (KUROKAWA et al., 2007); (DAL-TIN et al., 2005); (DAL-TIN et al., 2006).

O método utiliza duas matrizes de transformação, sendo que a primeira é a matriz de Clarke que separa a linha em suas componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero. As componentes  $\alpha$  e zero são acopladas e são então representadas como uma linha bifásica sem plano de simetria vertical.

Esta linha bifásica é então decomposta em seus dois modos de propagação por meio de uma matriz de transformação modal adequada.

## 5.2 REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS

Conforme mostrado no capítulo anterior, sabe-se que uma linha trifásica pode ser representada, no domínio modal, como sendo três linhas monofásicas cujos modelos já foram estudados em capítulos anteriores. Desse modo, pode-se obter as correntes e tensões da linha no domínio modal e em seguida, converter estas grandezas novamente para o domínio das fases.

A Figura 5.1 mostra uma representação esquemática de uma linha trifásica, quando a mesma é representada no domínio modal.

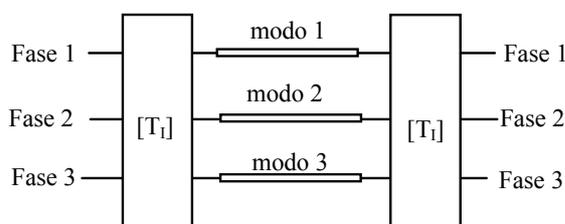


Figura 5.1 – Representação modal de uma linha trifásica

Na Figura 5.1, as grandezas de fase são convertidas para grandezas modais por meio da matriz de transformação modal  $[T_1]$ . Em seguida, realizam-se as simulações em cada modo da linha, levando-se em consideração que cada um desses modos comporta-se como uma linha monofásica sem nenhum acoplamento com os demais modos. Uma vez obtidas as correntes e tensões no domínio modal, pode-se converter tais grandezas para o domínio das fases. Cada um dos modos da linha se comporta como uma linha monofásica em que as correntes e tensões podem ser obtidas por algum dos métodos mostrados no capítulo 3.

A matriz de transformação modal é obtida pelo método de Newton-Raphson, mostrado no capítulo 4, e geralmente, os elementos desta matriz de transformação modal são grandezas que variam em função da frequência, sendo de difícil representação no domínio do tempo. Desse modo, a representação de linhas no domínio modal deve ser feita, de preferên-

cia, por meio de matrizes de transformação modais que sejam reais e invariáveis em relação à frequência. No entanto, na maioria dos casos não é possível obter matrizes com tais características.

### 5.3 REPRESENTAÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS QUE POSSUEM UM PLANO DE SIMETRIA VERTICAL

Considere uma linha de transmissão trifásica não idealmente transposta, mas que possua um plano de simetria vertical, conforme mostra a Figura 5.2.

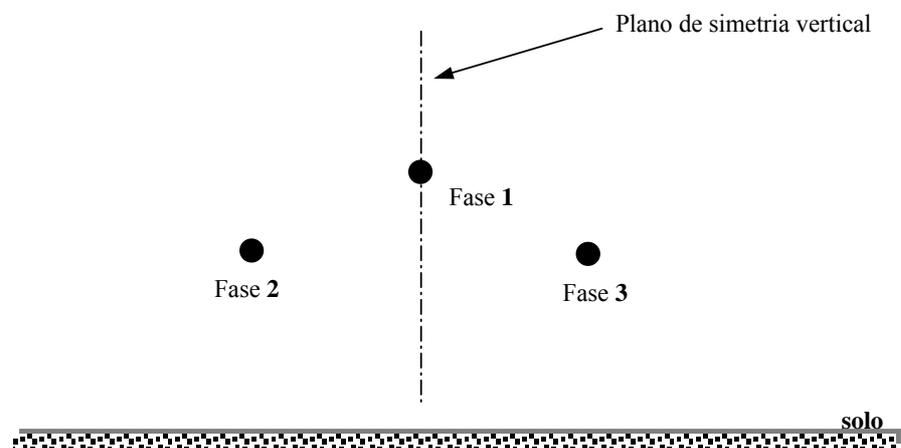


Figura 5.2 – Representação de uma linha trifásica não idealmente transposta

Devido ao fato de que a linha mostrada na Figura 5.2 possui um plano de simetria vertical, a matriz de impedância longitudinal  $[Z]$  da mesma pode ser escrita como sendo:

$$[Z] = \begin{bmatrix} A & D & D \\ D & B & F \\ D & F & B \end{bmatrix} \quad 5.1$$

A matriz  $[Y]$  da linha da Figura 5.2 possui a estrutura idêntica à da matriz  $[Z]$ .

De acordo com as equações 4.32 e 4.46, pode-se escrever as matriz de impedância longitudinal modal e de admitância transversal modal  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$ , respectivamente, da linha mostrada na Figura 5.2 como sendo:

$$[Z_m] = [T_1]^T [Z] [T_1] \quad 5.2$$

$$[Y_m] = [T_1]^{-1} [Y] [T_1]^{-T} \quad 5.3$$

Nas equações 5.2 e 5.3  $[T_1]^T$  corresponde à transposta da matriz  $[T_1]$  e  $[T_1]^{-T}$ , na expressão 5.3, é a inversa da matriz  $[T_1]^T$ . Os termos  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são, respectivamente, as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais da linha, escritas no domínio modal.

As matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são escritas como sendo:

$$[Z_m] = \begin{bmatrix} z_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & z_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & z_{m3} \end{bmatrix} \quad 5.4$$

$$[Y_m] = \begin{bmatrix} y_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & y_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & y_{m3} \end{bmatrix} \quad 5.5$$

Da equação 4.49, que a função de propagação  $[\lambda_m]$  dos modos da linha pode ser escrita como sendo:

$$[\lambda_m] = [Y_m][Z_m] = [Z_m][Y_m] \quad 5.6$$

Substituindo as equações 5.4 e 5.5 na equação 5.6, obtém-se:

$$[\lambda_m] = \begin{bmatrix} z_{m1} y_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & z_{m2} y_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & z_{m3} y_{m3} \end{bmatrix} \quad 5.7$$

A equação 5.7 pode ser escrita como sendo:

$$[\lambda_m] = \begin{bmatrix} \lambda_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{m3} \end{bmatrix} \quad 5.8$$

Os elementos da matriz  $[T_1]$  são complexos e variáveis em relação à frequência, o que dificulta a implementação dos mesmo em programas que realizam simulações diretamente no domínio do tempo. Para evitar o uso de matrizes de transformação variáveis em relação à frequência, substitui-se a matriz  $[T_1]$  pela matriz de Clarke cujos elementos são reais e constantes, sendo de fácil implementação em programas do tipo EMTP (TAVARES et al., 1999).

Substituindo nas equações 5.2 e 5.3, a matriz  $[T_1]$  pela matriz de Clarke, obtêm-se (TAVARES et al., 1999):

$$[Z_{\alpha\beta 0}] = [T_{\text{Clarke}}]^T [Z] [T_{\text{Clarke}}] \quad 5.9$$

$$[Y_{\alpha\beta 0}] = [T_{\text{Clarke}}]^{-1} [Y] [T_{\text{Clarke}}]^{-T} \quad 5.10$$

Sendo:

$$[T_{\text{Clarke}}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad 5.11$$

$$[Z_{\alpha\beta 0}] = \begin{bmatrix} z_{\alpha} & 0 & z_{\alpha 0} \\ 0 & z_{\beta} & 0 \\ z_{\alpha 0} & 0 & z_0 \end{bmatrix} \quad 5.12$$

$$[Y_{\alpha\beta 0}] = \begin{bmatrix} y_{\alpha} & 0 & y_{\alpha 0} \\ 0 & y_{\beta} & 0 \\ y_{\alpha 0} & 0 & y_0 \end{bmatrix} \quad 5.13$$

Em 5.12 e 5.13, a componente  $\beta$  não tem acoplamento com as demais componentes, sendo então um modo exato da linha. As componentes  $\alpha$  e zero, no entanto, são acopladas e são denominadas quase-modos da linha (TAVARES et al., 1999).

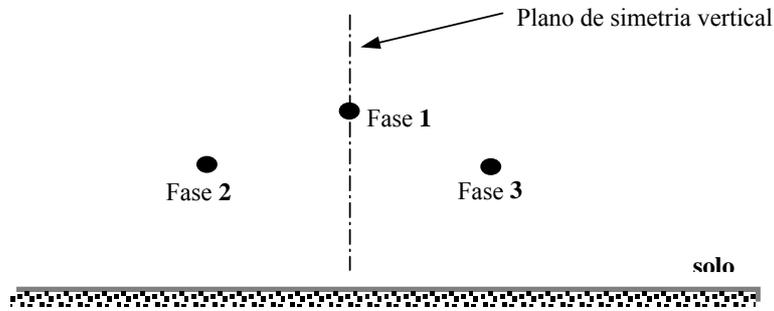
Os termos mútuos  $Z_{\alpha 0}$  e  $Y_{\alpha 0}$ , para a linha analisada nesse trabalho, são praticamente nulos para frequências inferiores a 10 kHz (conforme será mostrado no capítulo 6). A mesma afirmação não pode ser feita para frequências superiores a 10 kHz. Portanto, nesse trabalho, está sendo proposto a consideração desses elementos mesmo quando a matriz de Clarke é utilizada como matriz de transformação modal. Nesse caso, as componentes  $\alpha$  e zero serão representadas como sendo as fases de uma linha bifásica.

O próximo item mostra uma análise do procedimento proposto anteriormente.

#### **5.4 DECOMPOSIÇÃO MODAL DE LINHAS TRIFÁSICAS UTILIZANDO DUAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO**

Considere novamente uma linha trifásica, não idealmente transposta, mas que possui um plano de simetria vertical conforme mostra a Figura 5.3.

Figura 5.3 – Representação de uma linha trifásica não idealmente transposta



Se a matriz de Clarke for utilizada como a matriz de transformação modal da linha mostrada na Figura 5.3, obtêm-se de acordo com as equações 5.9 e 5.10, as seguintes matrizes de impedâncias e admitâncias:

$$[Z_{\alpha\beta 0}] = \begin{bmatrix} z_{\alpha} & 0 & z_{\alpha 0} \\ 0 & z_{\beta} & 0 \\ z_{\alpha 0} & 0 & z_0 \end{bmatrix} \quad 5.14$$

$$[Y_{\alpha\beta 0}] = \begin{bmatrix} y_{\alpha} & 0 & y_{\alpha 0} \\ 0 & y_{\beta} & 0 \\ y_{\alpha 0} & 0 & y_0 \end{bmatrix} \quad 5.15$$

A partir das matrizes de impedâncias e admitâncias mostradas nas equações 5.14 e 5.15, observa-se que a linha mostrada na Figura 5.3 pode ser representada como sendo uma linha monofásica, (que corresponde à componente  $\beta$ ) e uma linha bifásica, que corresponde às componentes  $\alpha$  e zero. Verifica-se também que a linha monofásica não possui acoplamento com a linha bifásica.

Considerando-se a representação proposta para a linha mostrada na Figura 5.3, pode-se obter as matrizes de impedância e de admitâncias da linha bifásica eliminando-se a componente  $\beta$  das equações 5.14 e 5.15. Desse modo obtém-se:

$$[Z_{\alpha 0}] = \begin{bmatrix} z_{\alpha} & z_{\alpha 0} \\ z_{\alpha 0} & z_0 \end{bmatrix} \quad 5.16$$

$$[Y_{\alpha 0}] = \begin{bmatrix} Y_{\alpha} & Y_{\alpha 0} \\ Y_{\alpha 0} & Y_0 \end{bmatrix} \quad 5.17$$

Observa-se que as equações 5.16 e 5.17 são as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais de uma linha bifásica sem um plano de simetria vertical, do tipo mostrado na Figura 5.4.

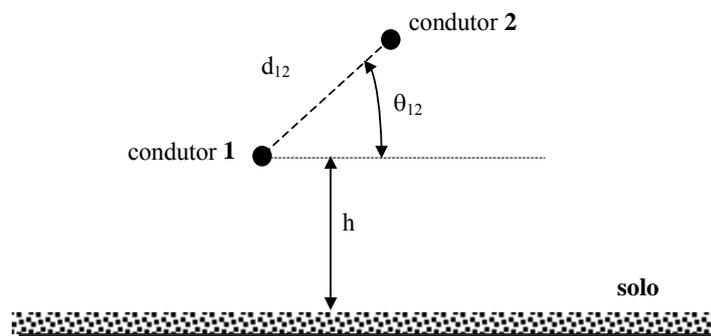


Figura 5.4 – Representação de uma bifásica sem plano de simetria vertical

Na Figura 5.4, os condutores 1 e 2 são as fases da linha bifásica que representam as componentes  $\alpha$  e zero. O acoplamento entre as componentes  $\alpha$  e zero é representado pelo acoplamento entre os condutores 1 e 2.

O condutor 1 encontra-se a uma altura genérica  $h$ . Na mesma figura,  $d_{12}$  é a distância genérica entre os condutores 1 e 2 e  $\theta_{12}$  pode assumir quaisquer valores desde que  $\theta_{12} \neq 0$  e  $\theta_{12} \neq \pi$ .

Considerando-se que  $[T_{\alpha 0}]$  seja uma matriz cujas colunas são os autovetores do produto  $[Z_{\alpha 0}][Y_{\alpha 0}]$ , as matrizes de impedância longitudinal  $[Z']$  e de admitância transversal  $[Y']$ , no domínio modal, da linha mostrada na Figura 5.4 são escritas como sendo:

$$[Z'] = [T_{\alpha 0}]^T [Z_{\alpha 0}] [T_{\alpha 0}] \quad 5.18$$

$$[Y'] = [T_{\alpha 0}]^{-1} [Y_{\alpha 0}] [T_{\alpha 0}]^{-T} \quad 5.19$$

As matrizes  $[Z']$  e  $[Y']$  obtidas em 5.18 e 5.19 são matrizes diagonais que podem ser escritas na forma:

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_a & 0 \\ 0 & z_b \end{bmatrix} \quad 5.20$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} y_a & 0 \\ 0 & y_b \end{bmatrix} \quad 5.21$$

Portanto, se as componentes  $\alpha$  e  $\beta$  da linha mostrada na Figura 5.4 forem representadas como sendo uma linha bifásica, a linha trifásica pode ser desacoplada em seus modos exatos a partir do uso de duas matrizes de transformação. A primeira matriz é a matriz de Clarke que separa a linha nas componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero e a segunda matriz é uma matriz que desacopla as componentes  $\alpha$  e zero. A Figura 5.5 mostra uma representação esquemática do processo de decomposição modal utilizando duas matrizes de transformação.

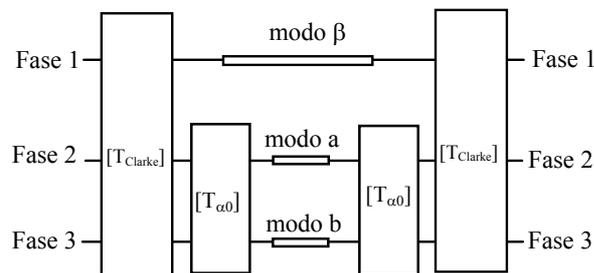


Figura 5.5 – Representação modal utilizando duas matrizes de transformação

Na Figura 5.5,  $[T_{\alpha 0}]$  é a matriz que decompõe a linha bifásica que representa os quase-modos  $\alpha$  e zero nos seus modos exatos. Esta matriz será obtida com a utilização do método de Newton-Raphson, que foi mostrado no capítulo 4.

Observa-se que o uso de duas matrizes para decompor a linha em seus modos exatos reduz a dimensão da matriz que diagonaliza o produto matricial  $[Z][Y]$ . Esta matriz de desacoplamento geralmente é constituída de elementos variáveis em relação à frequência que são de difícil representação no domínio do tempo. Para o caso da linha trifásica a sua matriz de decomposição modal geralmente possui 9 elementos variáveis em relação à frequência, enquanto que utilizando o método proposto pode-se separar a linha em seus modos exatos utilizando a matriz de Clarke, que é real e de fácil implementação no domínio do tempo, e uma outra matriz variável com a frequência mas que é de ordem 2.

Observa-se então que o método proposto reduz a quantidade de elementos variáveis em relação à frequência que devem ser representados no domínio do tempo.

## **5.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DESENVOLVIDO**

Para verificar se o método proposto é coerente, o mesmo foi aplicado em uma linha trifásica de 440 kV, cuja silhueta é mostrada na Figura 5.6.

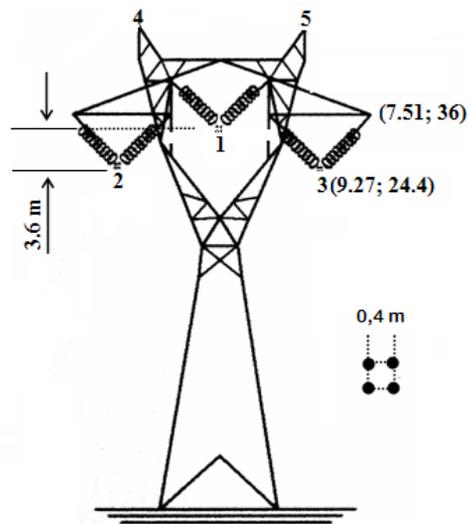


Figura 5.6 –Silhueta da linha de transmissão trifásica 440 kV.

Na linha mostrada na Figura 5.6, cada uma das fases é constituída de condutores múltiplos cujos subcondutores são do tipo Grosbeak. A linha possui dois cabos pára-raios do tipo EHSW-3/8". Considerou-se a resistividade do solo igual a  $1000 \Omega.m$ .

Os parâmetros longitudinais e transversais da linha foram calculados por (KUROKAWA et al., 2003) levando em consideração os efeitos do solo e pelicular (PORTELA; TAVARES, 2002); (DOMMEL, 1986); (MARTI, 1983).

Considerou-se também que os cabos pára-raios foram rebatidos nas fases da linha (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1998b). Desse modo, a linha mostrada na Figura 5.6 pode ser representada conforme mostra a Figura 5.7.

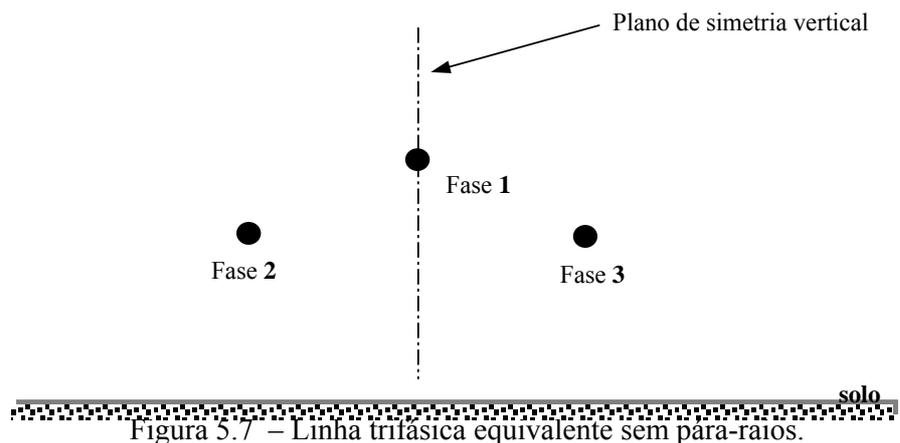


Figura 5.7 – Linha trifásica equivalente sem para-raios.

A linha mostrada na Figura 5.7 será separada em seus modos exatos a partir do uso de uma matriz de transformação modal exata de ordem 3. A decomposição também será feita por meio do procedimento que está sendo proposto. Também serão mostrados os resultados de simulações da linha mostrada na Figura 5.6 utilizando os métodos de decomposição modal mencionados anteriormente. As simulações serão desenvolvidas no domínio da frequência.

### 5.5.1 Decomposição modal da linha utilizando a matriz de Clarke

Inicialmente a linha foi decomposta em seus modos exatos por meio do uso de uma matriz de decomposição modal de ordem 3 (que doravante será denominada *matriz clássica*), obtida a partir do método de Newton-Raphson mostrado no capítulo 3, e também por meio do uso da matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação modal.

As Figuras de 5.8 até 5.15 mostram as resistências e reatâncias modais da linha, para cada um dos modos, obtidas a partir da matriz clássica (modos exatos) e também a partir da matriz de Clarke.

A Figuras de 5.8 até 5.9 e 5.10 até 5.11 mostram, respectivamente, a resistência e reatância longitudinais do modo 1, obtidas a partir da matriz clássica e também a partir da matriz de Clarke.

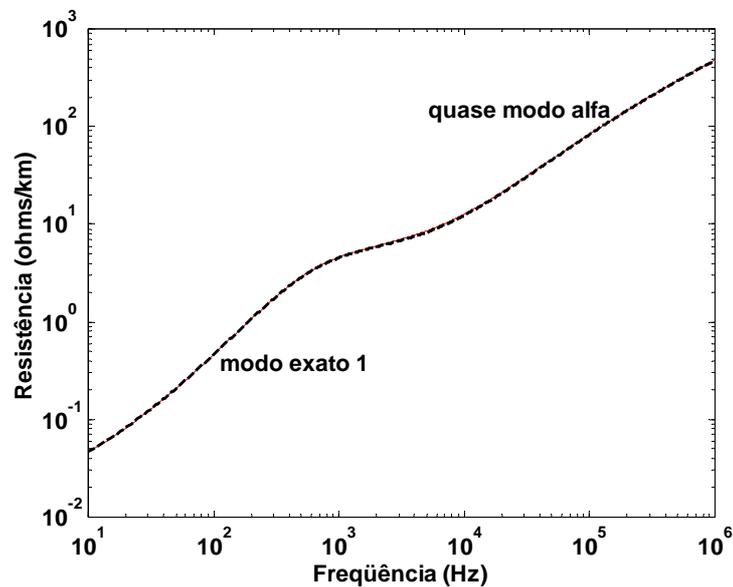


Figura 5.8 – Resistência longitudinal do modo 1, utilizando a matriz clássica (modo exato 1) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo alfa)

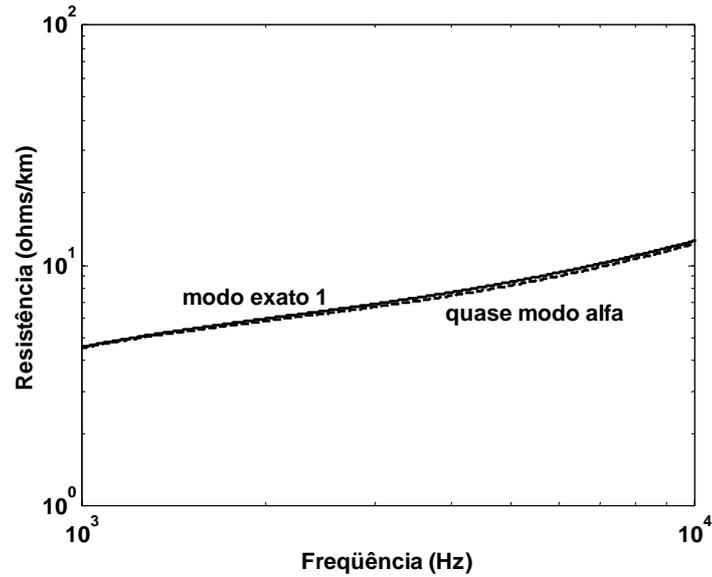


Figura 5.9 – Detalhamento, enfatizando a faixa de freqüências em que fica evidente a pequena diferença existente entre o modo 1 e a componente alfa.

Nas Figuras 5.8 e 5.10 nota-se a existência de uma pequena diferença entre o modo 1 e a componente  $\alpha$ , o que se torna mais evidente em determinada faixa de freqüência, conforme pode ser visto nas Figuras 5.9 e 5.11.

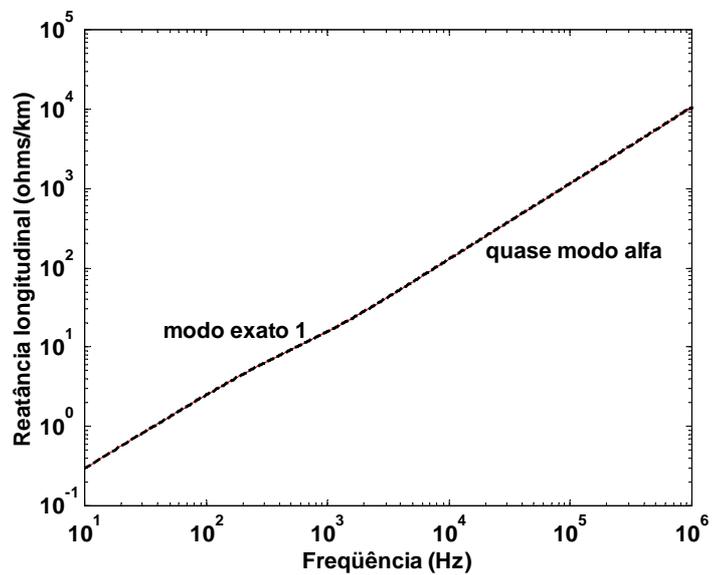


Figura 5.10 – Reatância longitudinal do modo 1, utilizando a matriz clássica (modo exato 1) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo alfa).

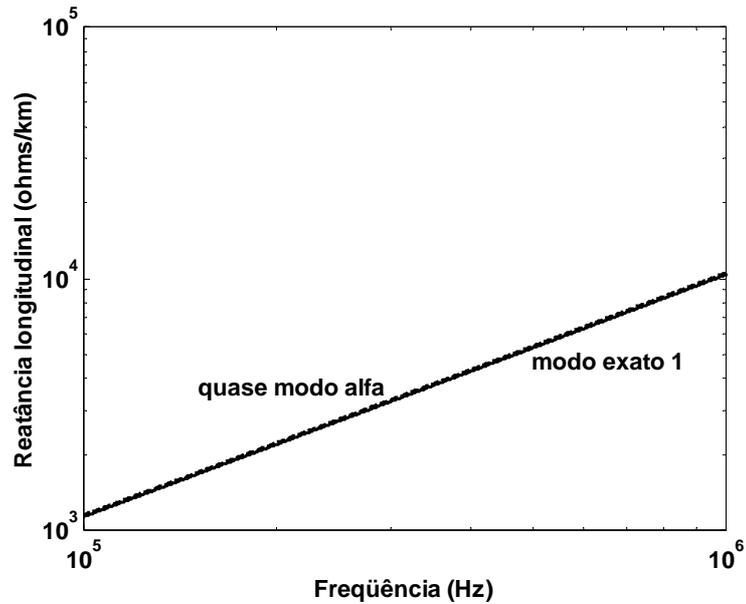


Figura 5.11 – Detalhamento, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a pequena diferença existente entre o modo 1 e a componente alfa.

As Figuras 5.12 e 5.13 mostram, respectivamente, a resistência e reatância longitudinais do modo 2, obtidas a partir da matriz clássica e também a partir da matriz de Clarke.

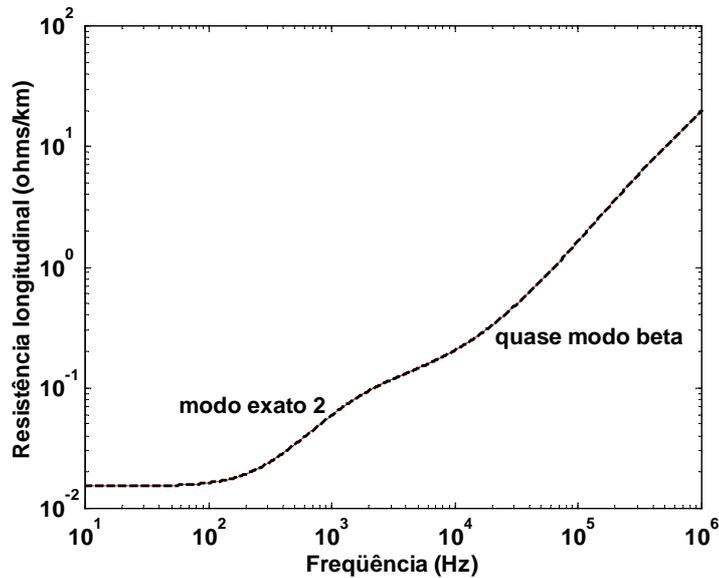


Figura 5.12 – Resistência longitudinal do modo 2, utilizando a matriz clássica (modo exato 2) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo beta).

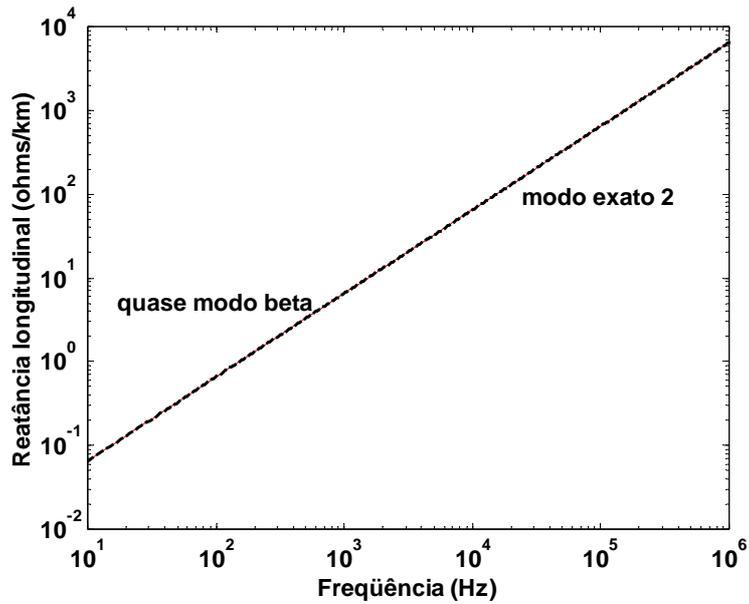


Figura 5.13 – Reatância longitudinal do modo 2, utilizando a matriz clássica (modo exato 2) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo beta).

A Figuras 5.14 e 5.15 mostram, respectivamente, a resistência e reatância longitudinais do modo 3, obtidas a partir da matriz clássica e também a partir da matriz de Clarke.

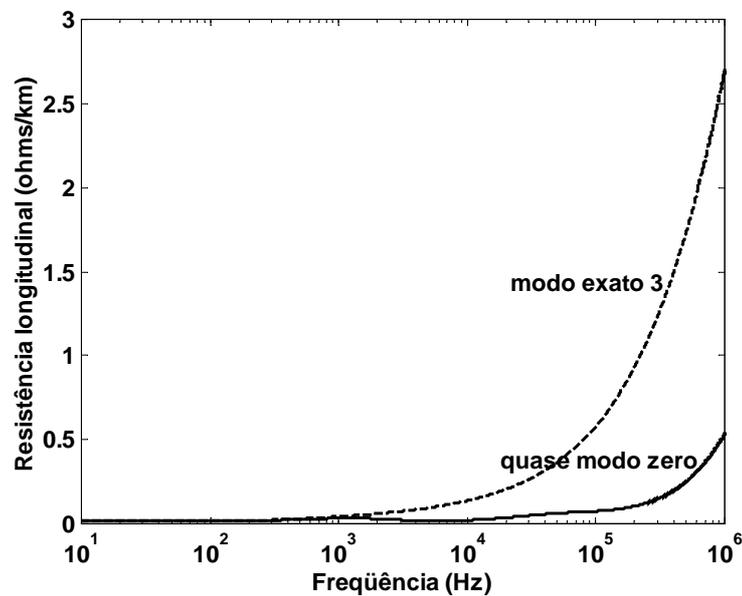


Figura 5.14 – Resistência longitudinal do modo 3, utilizando a matriz clássica (modo exato 3) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo zero).

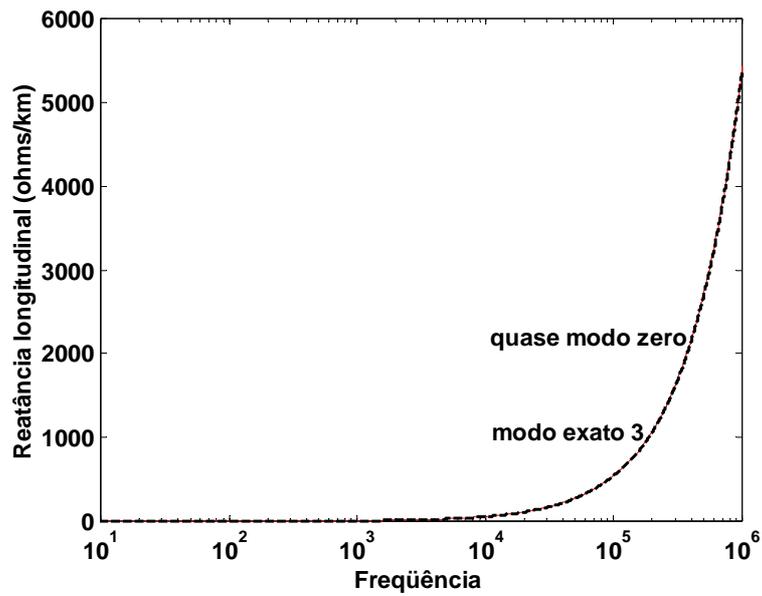


Figura 5.15 – Reatância longitudinal do modo 3, utilizando a matriz clássica (modo exato 3) e utilizando a matriz de Clarke (quase-modo zero).

Mostrou-se que existe uma pequena diferença entre o modo 1 e a componente  $\alpha$ .

Conclui-se ainda que o modo  $\beta$  é exato.

A componente zero possui grande diferença em relação ao modo exato 3. Esta situação se evidencia na Figura 5.15.

### 5.5.2 Análise do acoplamento entre as componentes $\alpha$ e zero

A Figuras 5.16 e 5.17 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento do acoplamento entre as componentes modais  $\alpha$  e zero ( $Z_{\alpha 0}$ ).

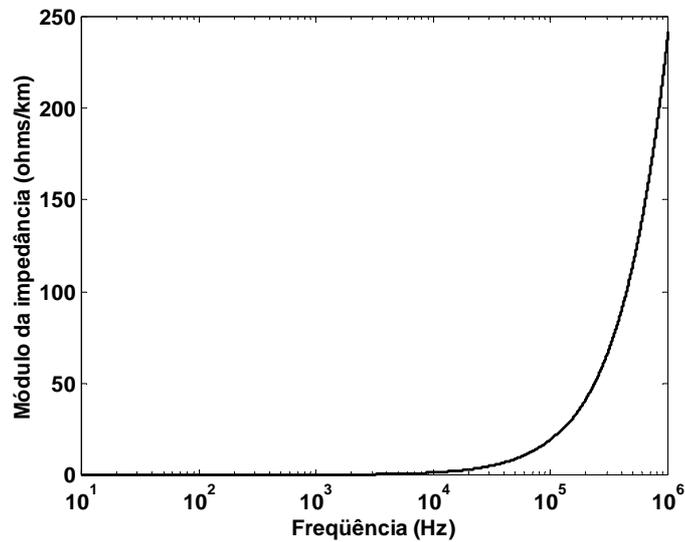


Figura 5.16 – Acoplamento entre as componentes  $\alpha$  e zero ( $Z_{\alpha 0}$ ).

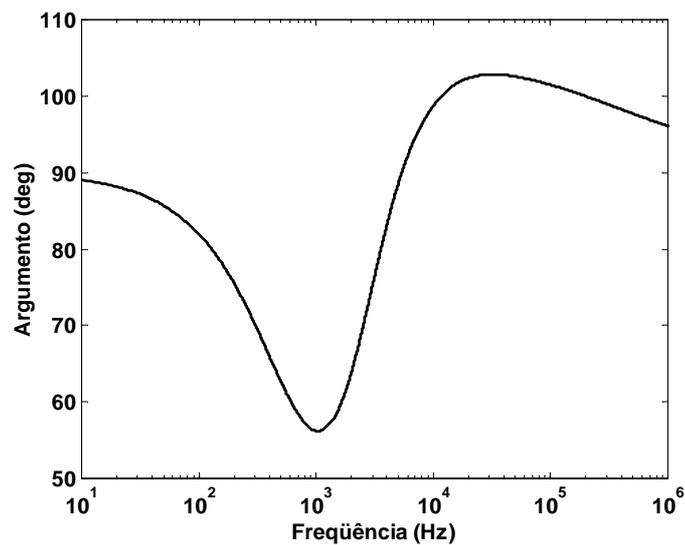


Figura 5.17– Argumento do acoplamento entre as componentes  $\alpha$  e zero ( $Z_{\alpha 0}$ ).

A figura 5.16 mostra que para baixas frequências (até 10 kHz), o acoplamento é praticamente nulo e a partir dessa faixa de frequência, observa-se um crescimento praticamente exponencial dessa impedância.

### 5.5.3 Decomposição modal da linha bifásica que representa os quase-modos $\alpha$ e zero

A linha bifásica, mostrada na Figura 5.4, foi decomposta em seus modos exatos por meio de uma matriz de transformação modal adequada. Esta matriz de transformação foi obtida por meio do método de Newton-Raphson mostrado no capítulo 4.

A Figura 5.18 mostra a componente real do conjunto de autovetores utilizados para desacoplar a linha bifásica que representa os quase-modos  $\alpha$  e zero, enquanto a Figura 5.19 mostra a componente imaginária desses autovetores.

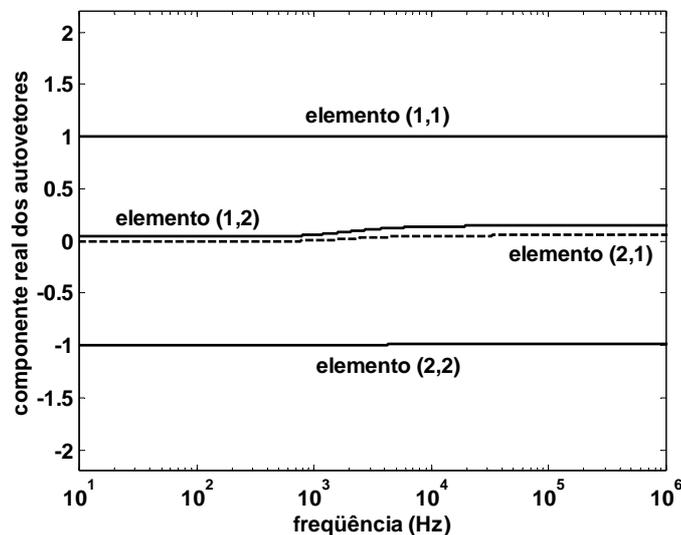


Figura 5.18 – Componente real dos autovetores que desacoplam a linha bifásica que representa os quase-modos  $\alpha$  e zero.

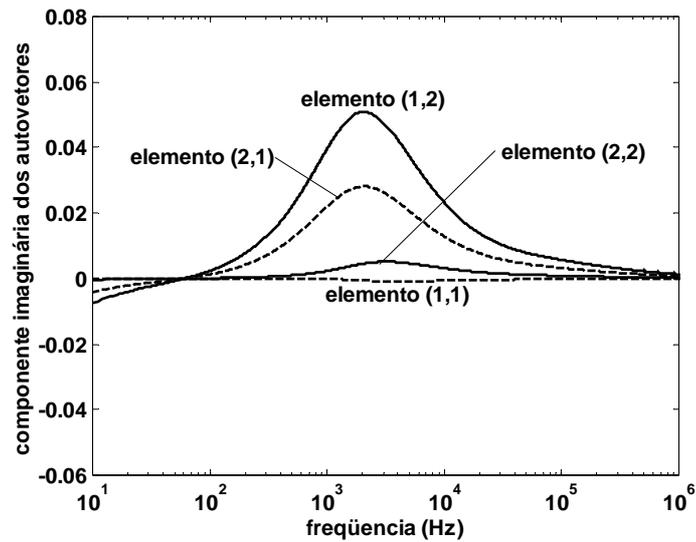


Figura 5.19 – componente imaginária dos autovetores que desacoplam a linha bifásica que representa os quase-modos  $\alpha$  e zero.

Para os autovetores, a parte real é praticamente constante, enquanto as componentes imaginárias são relativamente pequenas. Observa-se que a maior variação das componentes imaginárias ocorrem entre 100 Hz e 100 kHz.

#### 5.5.4 Resposta em frequência da linha

Para verificar a validade do processo de decomposição proposto, foi feita a resposta em frequência da linha mostrada na figura 5.4, considerando cada um dos modos representados por suas equações de correntes e tensões no domínio da frequência (BUDNER, 1970).

A linha foi decomposta em seus modos exatos por meio do processo proposto nesse trabalho. Os resultados obtidos foram então comparados com os resultados obtidos em uma outra situação em que a linha foi decomposta em seus modos exatos por meio de uma matriz de transformação modal de ordem 3, conforme mostrada na Figura 5.1. Esse método será doravante denominado método clássico de decomposição modal.

Considerou-se uma situação em que o terminal emissor de uma das fases da linha é energizada com um degrau de tensão de 1 p.u., enquanto que o emissor das fases restantes estão aterrados, conforme mostra a Figura 5.20.

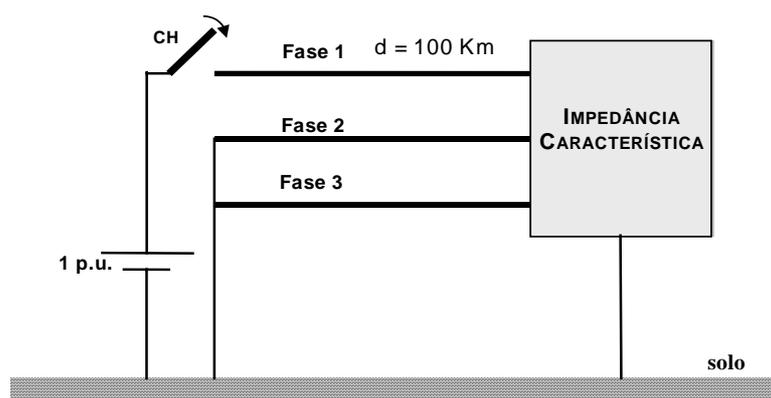


Figura 5.20 – Diagrama de energização da linha.

Esta situação da linha, mostrada na Figura 5.7, foi escolhida devido ao fato de a mesma ser utilizada em dois artigos consultados (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1998a) e (GUSTAVSEN; SEMLYEN, 1998b).

Para evitar reflexões das correntes e tensões nos terminais da linha, e conseqüentemente, uma dificuldade de visualização das mesmas, optou-se pela conexão de uma carga de valor idêntico ao da impedância característica da linha no receptor da mesma. Desse modo, evita-se a reflexão das ondas de correntes e tensões nos terminais da linha (MINEGISHI, 1994). Em seguida, conforme (BUDNER, 1970), cada modo foi representado por meio de suas equações hiperbólicas.

A Figura 5.21 mostra a corrente no início da fase 1 da linha, considerando a linha decomposta em seus modos exatos por meio do método proposto, por meio do método clássico de decomposição modal e a partir do uso da matriz de Clarke.

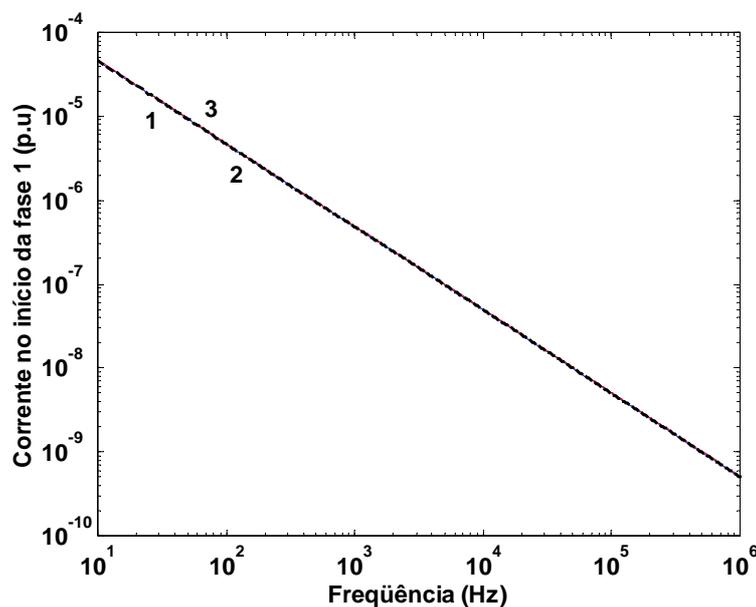


Figura 5.20 – Corrente no início da fase 1 da linha, obtida pelo método clássico (curva 1), pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

A Figura 5.21 mostra com detalhamento a corrente no início da fase 1 da linha, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a diferença existente entre as curvas obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

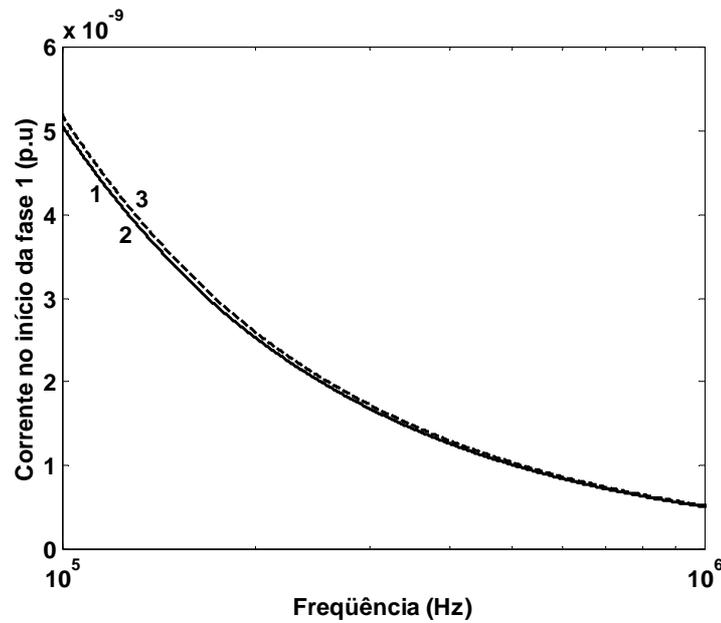


Figura 5.21 – Detalhamento, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a diferença existente entre as curvas obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

A Figura 5.22 mostra a corrente no início da fase 2 da linha, considerando a linha decomposta em seus modos exatos por meio do método proposto, por meio do método clássico de decomposição modal e a partir do uso da matriz de Clarke.

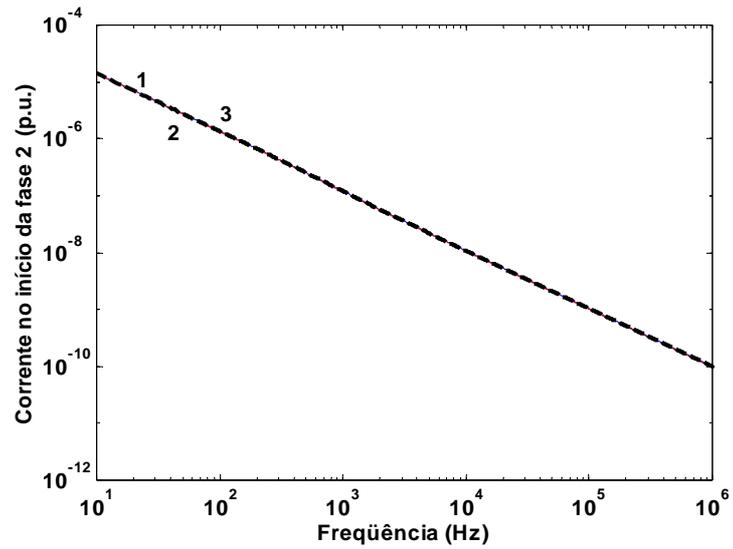


Figura 5.22 – Corrente no início da fase 2 da linha, obtida pelo método clássico (curva 1), pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

A Figura 5.23 mostra com detalhamento a corrente no início da fase 2 da linha, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a diferença existente entre as curvas obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

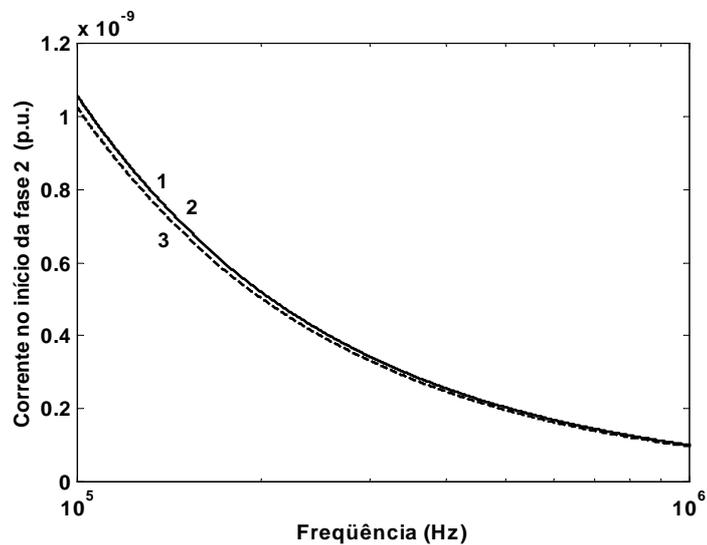


Figura 5.23 – Detalhamento, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a diferença existente entre as curvas obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

A Figura 5.24 mostra a tensão terminal da fase 1 da linha, considerando a linha decomposta em seus modos exatos por meio do método proposto, por meio do método clássico de decomposição modal e a partir do uso da matriz de Clarke.

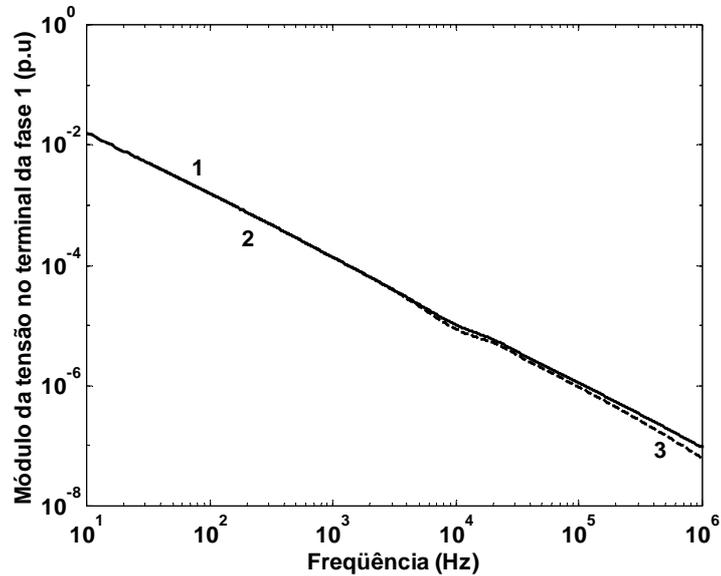


Figura 5.24 – Tensão terminal da fase 1 da linha, obtida pelo método clássico (curva 1), pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

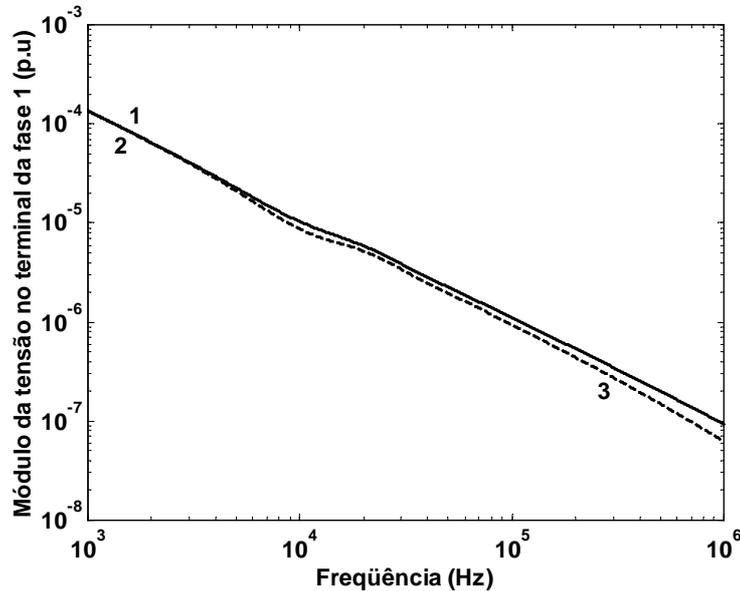


Figura 5.25 – Detalhamento, enfatizando a faixa de frequências em que fica evidente a diferença existente entre as curva obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

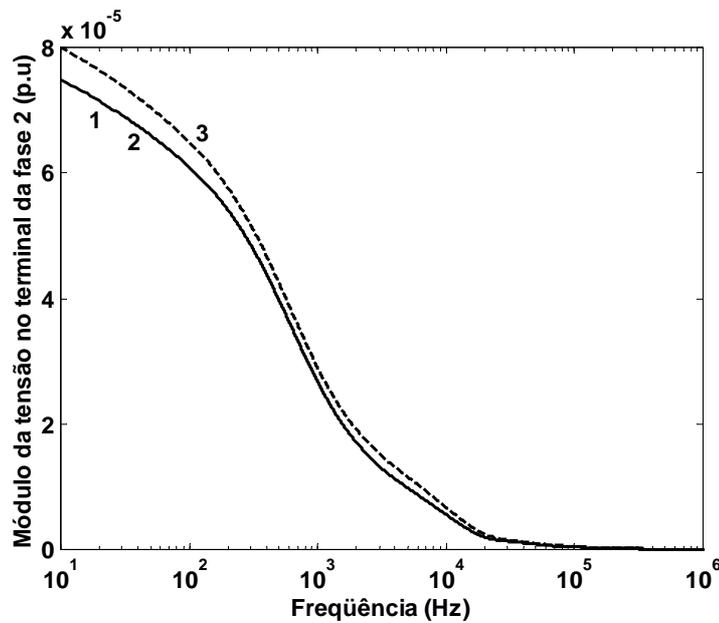


Figura 5.26 – Tensão terminal da fase 2 da linha, obtida pelo método clássico (curva 1), pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

A figura 5.26 expressa a tensão terminal da fase 2 da linha, obtida pelo método clássico (curva 1), pelo método proposto (curva 2) e utilizando a matriz de Clarke (curva 3).

Nesta figura, fica claramente explícita a diferença entre as curvas obtidas pelo método clássico (curva 1) ou pelo método proposto (curva 2) e pelo uso da matriz de Clarke (curva 3).

A simulação da resposta em frequência da Linha de transmissão utilizando o método de decomposição modal proposto e o método clássico são idênticos. Tal fato demonstra que o método proposto é coerente e pode ser utilizado para decompor a linha da figura 5.6 nos seus modos exatos.

## 5.6 CONCLUSÃO

Quando a matriz de Clarke não pode ser considerada como sendo a matriz de transformação modal de uma linha trifásica não transposta que possui um plano de simetria vertical, pode-se fazer uso de duas matrizes de transformação para obter os modos exatos da linha. Inicialmente a matriz de Clarke é utilizada para a obtenção das componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero. As componentes  $\alpha$  e zero, que possuem um acoplamento mútuo, são então considerados como sendo uma linha bifásica sem plano de simetria vertical. Esta linha então é decomposta em seus modos exatos por meio de uma matriz de transformação modal adequada.

Os resultados da simulação da energização da linha, no domínio modal, utilizando o procedimento proposto e o método clássico, que consiste em desacoplar a linha trifásica a partir do uso dos autovetores da mesma, apresentaram o mesmo resultado mostrando, portanto, que o método proposto é eficiente. No entanto, as vantagens desse método de decomposição modal, em relação ao método clássico de decomposição modal, necessita de uma avaliação mais profunda.

## 6 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi mostrado um processo alternativo de decomposição modal de linhas trifásicas não idealmente transpostas e que possuam um plano de simetria vertical.

No capítulo 1 é feito um breve relato da evolução do sistema de transmissão brasileiro.

No capítulo 2 são mostradas as equações diferenciais que representam uma linha de transmissão polifásica genérica cujos parâmetros são uniformemente distribuídos ao longo da linha. Foram mostradas as equações diferenciais da linha no domínio do tempo e no domínio da frequência.

No capítulo 3 foram mostradas as soluções das equações diferenciais de uma linha de transmissão monofásica no domínio do tempo. O caso mais simples é para uma linha sem perdas cujos parâmetros sejam independentes da frequência sendo esse, provavelmente, a única situação em que as equações diferenciais possuem uma solução analítica simples. São mostradas também as soluções, diretamente no domínio do tempo, para linhas com perdas, considerando ou não o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha. Foi mostrado também o processo de obtenção da solução da linha no domínio do tempo por meio do uso de integrais de convolução.

No capítulo 4 mostrou-se o processo de decomposição modal de linhas de transmissão. A representação modal de linhas permite que uma linha de transmissão de  $n$  fa-

ses seja decomposta em seus  $n$  modos de propagação. A vantagem de se representar a linha por meio de seus modos de propagação está no fato de que cada um dos modos se comporta como se fosse uma linha monofásica. Desse modo, uma linha polifásica de  $n$  fases pode ser representada como sendo  $n$  linhas monofásicas independentes cujas equações de correntes e tensões são conhecidas e já foram mostradas em capítulos anteriores. A decomposição da linha em seus modos de propagação é feita por meio de uma transformação de similaridade, onde a matriz de transformação é uma matriz cujas colunas correspondem a um conjunto de autovetores do produto matricial  $[Z][Y]$ . Uma vez que as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  da linha são variáveis em função da frequência, deve-se obter um conjunto de autovetores para cada frequência. É desejável que os autovetores obtidos sejam funções que não variem abruptamente em função da frequência, pois funções desse tipo são relativamente mais simples de serem implementadas no domínio do tempo. Geralmente os autovetores do produto  $[Z][Y]$  são obtidos por meio de métodos numéricos de solução de equações algébricas. Dentre os métodos numéricos existentes, optou-se pelo método de Newton-Raphson, pois o mesmo de acordo com a literatura, permite a obtenção de autovetores que não variam bruscamente em função da frequência.

No capítulo 5, mostra-se que quando a matriz de Clarke não pode ser considerada como sendo a matriz de transformação modal de uma linha trifásica não transposta que possui um plano de simetria vertical, pode-se fazer uso de duas matrizes de transformação para obter-se os modos exatos da linha. Inicialmente, a matriz de Clarke é utilizada para a obtenção das componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero. As componentes  $\alpha$  e zero, que possuem um acoplamento mútuo, são então considerados como sendo uma linha bifásica sem plano de simetria vertical. Essa linha então é decomposta em seus modos exatos por meio de uma matriz de transformação modal adequada. Os resultados da simulação da energização da linha, no domínio modal, utilizando-se do procedimento proposto e do método clássico (que consiste em se desacoplar a linha trifásica a partir do uso dos autovetores da mesma) apresentaram o mesmo resultado

mostrando, portanto, que o método proposto é coerente.

Para trabalhos futuros sugere-se que o desempenho do método seja avaliado no domínio da frequência, uma vez que nesse trabalho verificou-se a resposta da linha no domínio da frequência. Também se sugere a aplicação do método em linhas com silhuetas distintas da linha que foi utilizada nesse trabalho. Pode-se também fazer uma análise do uso de outras matrizes reais e constantes diferentes da matriz de Clarke.

## REFERÊNCIAS

ANEEL, **Agência Nacional de Energia Elétrica**. Disponível em <<http://www.aneel.gov.br>>. Acesso em 9 jul. 2006.

BUDNER, A., **Introduction of frequency-dependent line parameters into an electromagnetic transients program**, IEEE Trans. Power App. And Systems, vol. PAS-89, nº 1, pp. 88-97, jan. 1970.

CHEN, C. T., **Linear system theory and design**. New York, USA: Holt, Rinehart and Winston, 1984.

CHIPMAN, Robert A., **Teoria e problemas de linhas de transmissão**. Ed. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1972.

CTEEP., **Companhia de Transmissão de Energia Elétrica Paulista**. Disponível em <[http://www.cteep.com.br/setor\\_sistemas\\_intro.shtml](http://www.cteep.com.br/setor_sistemas_intro.shtml)> Acesso em 19 jul. 2006.

DALTIN, R. S. ; KUROKAWA, S. ; PRADO, A. J. ; PISSOLATO, J., **Uma representação modal alternativa de linhas de transmissão trifásicas simétricas não idealmente transpostas**. Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE 2006), 2006, Campina Grande - PB. Anais do Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, 2006.

DALTIN, R.S. ; KUROKAWA, S. ; PRADO, A.J. ; BOVOLATO, L.F. ; PISSOLATO J., **Representação de linhas de transmissão no domínio modal por meio de duas matrizes de transformação: aplicação em linhas não transpostas com plano de simetria vertical**. Sixth Latin-american Congress on Electricity Generation and Transmission, 2005, Mar del Plata.

DOMMEL, H.W., **EMTP - theory book**, Vancouver, 1986.

FARIA, A.B. WASHINGTON, L.A.; ANTÔNIO, C.S., **Modelos de linhas de transmissão no domínio das fases: estado da arte**, XIV – Congresso Brasileiro de Automática, Natal - RN, pp. 801-806, set. 2002.

FUCHS, R.D., **Transmissão de energia elétrica**. Vol. 1, Ed. LTC/EFEL, 1977.

GREENWOOD, A., **Electrical transients in power systems, 1977** , Ed. John Wiley & Sons, Inc., 1977.

GUSTAVSEN B.; SEMLYEN A., **Combined phase and modal domain calculation of transmission line transients based on vector fitting**, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, nº 2, pp. 596-604, april 1998. Discussion of the paper.

GUSTAVSEN B.; SEMLYEN A., **Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition**, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, nº 2, pp. 605-612, april 1998.

KREYSZIG, I.E., **Advanced engineering mathematics**, 7<sup>th</sup> edit. Wiley, 1992.

KUROKAWA S.; YAMANAKA; F.N.R, PRADO A.J.; PISSOLATO, J., **Representação de linhas de transmissão por meio de variáveis de estado considerando o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais**, XVI Congresso Brasileiro de Automática, 2006 (artigo aceito para ser apresentado no evento).

KUROKAWA, S. ; DALTIM, R. S. ; PRADO, A. J. ; PISSOLATO FILHO, J. ; BOVOLATO, L. F., **Modal representation of three-phase lines applying two transformation matrices: evaluation of its eigenvectors**. 2006 IEEE/PES General Meeting, 2006, Montreal.

KUROKAWA, S., **Parâmetros longitudinais e transversais de linhas de transmissão calculados a partir das correntes e tensões de fase**, 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

KUROKAWA, S.; DALTIM, R. S. ; PISSOLATO, J. ; PRADO, A.J., **An alternative procedure to decrease the dimension of the frequency dependent modal transformation matrices: application in three-phase transmission lines with a vertical symmetry plane**. 2006 IEEE/PES Transmission & Distribution Latin America, 2006, Caracas.

KUROKAWA, S.; DALTIM, R. S.; PRADO, A. J. ; PISSOLATO, J., **An Alternative Modal Representation of a Symmetrical Non-transposed Three-Phase Transmission Line**. IEEE Transactions on Power Systems, 2007.

MAMIS, M.S., **Computation of electromagnetic transients on transmission lines with nonlinear components**, IEE. Proc. General Transmission and Distribution, vol. 150 , nº 2, pp 200-203, 2003.

MAMIS, M.S., NACAROGLU, A., **Transient voltage and current distributions on transmission lines**, IEE. Proc. General Transmission and Distribution., vol.149, nº 6, pp 705-712, 2003.

- MARTI, J.R., **Accurate modeling of frequency-dependent transmission line in electromagnetic transient simulations**, *IEEE Trans. Power App. and Systems*, vol. PAS-101, nº 1, pp. 147-155, jan.1982.
- MARTI, L. **Low-order approximation of transmission line parameters for frequency-dependent models**, *IEEE Trans. Power App. and Systems*, vol. PAS-102, nº 11, pp. 3582-3589, nov.1983.
- MINEGISHI, S.; ECHIGO, H.; SATO, R. **A method for measuring transients caused by interrupting current using a transmission line terminated in its characteristic impedance**, *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 36, nº 3, pp 244-247, 1994.
- NAIDU, S.R. **Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência**, Ed. Grafset, Campina Grande, 1985.
- NELMS, R.M.; SHEBLE, G.B.; NEWTON, S. R.; GRIGSBY, L.L. **Using a personal computer to teach power system transients**, *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 4, nº 3, pp 1293-1297, 1989.
- NGUYEN, T. T.; CHAN H. Y. **Evaluation of modal transformation matrices for overhead transmission lines and underground cables by optimization method**, *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 17, nº 1, pp. 200-209, jan. 2002.
- ONS. **Operador Nacional do Sistema Elétrico**. Disponível em <<http://www.ons.org.br>>. Acesso em 7 jul. 2006.
- PORTELA, C.; TAVARES, M. C. **Modeling, simulation and optimization of transmission lines. Applicability and limitations of some used procedures**, *IEEE PES Transmission and Distribution 2002*, São Paulo, Brazil, 2002.
- PRADO, A. J.; KUROKAWA, S.; BOVOLATO, L.F.;PISSOLATO, J. **Transformação modal única aplicada na análise de linhas trifásicas simples não simétricas – modelamento e simulações**, XV Congresso Brasileiro de Automática, 2004.
- SARTO, M. S.; SCARLATTI A.; HOLLOWAY, C. L. **On the use of fitting models for the timedomain analysis on problems with frequencydependent parameters**, *Proceedings of the IEEE Int. Symp. On Electromagnetic Compatibility*, vol. 1, pp 588-593, 2002.
- SPIEGEL, M. R. **Transformadas de Laplace**. São Paulo, Ed. McGraw-Hill, 1971.
- SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Ed. Makron do Brasil, São Paulo, Vol. 2, 1995.
- TAVARES, M. C.; PISSOLATO, J.; PORTELA, M. C. **Quasi-modes multiphase transmission line model**, *Electric Power Systems Research*, nº 49, pp. 159-167, 1999.
- WEDEPHOL, L. M. **Application of matrix methods to the solution of traveling-wave phenomena in polyphase systems**, *Proc. IEE*, vol. 110, nº 12, pp. 2200-2212, dec. 1963.

WEDEPHOL, L. M.; NGUYEN H. V.; IRWIN, G. D. **Frequency-dependent transformation matrices for untransposed transmission lines using Newton-Raphson method**, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 11, n<sup>o</sup> 3, pp. 1538-1546, aug. 1996.