Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Ciclos Limites de Sistemas Lineares por Partes

Jaime Rezende de Moraes

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2011

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS que é fonte essencial e caminho para conseguir alcançar todos os meus objetivos.

Aos meus pais, meu irmão e minha cunhada, que sempre deram apoio aos meus estudos.

Ao meu amigo Marcos Henrique que foi meu companheiro de estudos no curso de verão para o mestrado.

Aos meus amigos da república: Luis Gustavo, Leandro, Vinícius, João Vitor, Ulisses, Rafael e William que me acolheram na república e me proporcionaram grandes momentos de descontração.

Aos meus amigos da minha cidade que também me proporcionaram grandes momentos de descontração.

A minha namorada, pelo amor e incentivo durante todo o mestrado.

Aos meus amigos da pós-graduação, e outros do Ibilce pela companhia.

Aos meus professores de graduação e pós graduação que me passaram todo o conhecimento matemático para poder escrever minha dissertação. Em especial ao Prof^{o}. Dr. Paulo Ricardo da Silva, pela orientação, paciência e incentivo na elaboração desse trabalho.

A todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

A CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Consideramos dois casos principais de bifurcação de órbitas periódicas não hiperbólicas que dão origem a ciclos limite. Nosso estudo é feito para sistemas lineares por partes com três zonas em sua fórmula mais geral, que inclui situações sem simetria. Obtemos estimativas tanto para a amplitude como para o período do ciclo limite e apresentamos uma aplicação de interesse em engenharia: sistemas de controle.

Palavras chave: Ciclos limites, campo de vetores planares, sistemas lineares por partes.

Abstract

We consider two main cases of bifurcation of non hyperbolic periodic orbits that give rise to limit cycles. Our study is done concerning piecewise linear systems with three zones in the more general formula that includes situations without symmetry. We obtain estimates for both the amplitude and the period of limit cycles and we present applications of interest in engineering: control systems.

Key words: Limit cycles, planar vector field, piecewise linear systems.

Sumário

Introdução

O uso de aproximações lineares é cada vez mais usual no estudo de problemas da engenharia. Frente a isso, é cada vez mais importante a necessidade de recorrer a modelos não lineares para dar uma explicação rigorosa da complexidade dinâmica que apresentam os sistemas físicos na prática. Neste sentido, a análise de sistemas não lineares tem recebido forte impulso nas últimas décadas graças a consolidação da moderna teoria geométrica e de bifurcações de sistemas dinâmicos.

Quando os fenômenos que consideramos tem caráter local, as aproximações polinomiais aos sistemas não lineares frequentemente dão excelentes resultados. Todavia, para os fenômenos de caráter global, surgem algumas dificuldades. Os problemas são de maior dificuldade computacional. Quase sempre necessitamos recorrer ao uso combinado de técnicas analíticas e numéricas que permitam dar o salto do local ao global. As aproximações polinomiais das não linearidades presentes no modelo, frequentemente não são boas do ponto de vista global: em especial, quando consideramos sistemas que tem zonas de funcionamento claramente diferenciadas (por exemplo, sistemas eletrônicos com uma zona ativa e zonas de corte, sistemas de controle com saturação ou com limitações nos atuadores, etc).

Quando modelamos os problemas mediante sistemas lineares por partes conseguimos eliminar em parte as dificuldades antes mencionadas. Na análise destes sistemas a distinção entre os fenômenos locais e globais desaparecem e apesar das dificuldades computacionais não diminuírem apreciadamente, podemos compreender melhor a dinâmica global, que resulta da consideração conjunta de sistemas lineares (cuja dinâmica é perfeitamente conhecida). Além do mais, por meio de sistemas lineares por partes conseguimos explicar melhor certos fenômenos observados na prática que em geral não podem ser explicados com aproximações suaves.

Neste trabalho, nosso interesse é centrado em uma classe suficientemente geral de sistemas planos lineares por partes e na análise matemática dos fenômenos que explicam a aparição de ciclos limites. Nosso objetivo primordial é caracterizar a aparição dos ciclos limites que surgem de órbitas periódicas não hiperbólicas em dois casos principais: quando se trata de uma órbita periódica no infinito, ou seja, o equador da esfera de Poincaré, e a situação correspondente a existência de centros cuja configuração está limitada a uma das zonas lineares que definem a dinâmica global.

Vamos agora descrever brevemente a estrutura deste trabalho. Nos capítulos 1 e 2 são abordados pré-requisitos para o estudo proposto: fundamentos da teoria qualitativa e o estudo de sistemas lineares planares. No Capítulo 3 obtemos a fórmula canônica de Liénard para os sistemas lineares planares com três zonas, estudamos suas propriedades genéricas quanto aos equilíbrios e definimos algumas sub-famílias de certo interesse. No Capítulo 4, abordamos o estudo dos ciclos limites que podem surgir a partir da órbita periódica no infinito. Primeiramente, usamos a transformação de Bendixson, que é equivalente a de Poincaré, dada por $u = \dfrac{\sin\theta}{r} \quad , \quad v = -\dfrac{\cos\theta}{r}$, que leva o sistema que antes era definido no plano para o cilindro, assim a base do cilindro passa a ser o infinito correspondente ao equador da esfera de Poincaré. Estabelecemos condições para que tenhamos uma órbita periódica no infinito. Usamos a aplicação de Poincaré h para o estudo de hiperbolicidade da órbita periódica no infinito e fizemos os cálculos da primeira e segunda derivada de h. Vimos que surge uma bifurcação transcrítica a partir do ponto do infinito, fato fundamental para a demonstração do nosso primeiro teorema sobre bifurcação de ciclos limite a partir da órbita periódica no infinito. Particularizamos esse teorema a certas sub-famílias descritas no Capítulo 3. No Capítulo 5, analisamos o caso de bifurcação de órbita periódica não isolada (na parte finita). Surge um ciclo limite estável a partir de uma órbita periódica não hiperbólica na parte finita que ocupa a zona central (neste caso, o fenômeno não depende das 3 zonas de interesse e sim de 2 zonas que são as da esquerda e a central). Esta parte do estudo é um pouco mais trabalhosa, pois exige conhecer dois teoremas importantes para sistemas na forma de Liénard que são os teoremas de Coppel e Filippov e serão tratados no Apêndice A. No Capítulo 6 apresentamos uma aplicação em circuitos elétricos: sistemas de controle.

Para finalizar, vejamos o seguinte exemplo com caráter ilustrativo de um ciclo limite que bifurca de uma órbita periódica não hiperbólica na parte finita.

Considere o seguinte sistema linear por partes

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad x \leq -1, \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad x \geq -1.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Aplicando os resultados do Capítulo 5, vemos que este sistema possui um único ciclo limite estável que bifurca de uma órbita periódica não hiperbólica na parte finita. O retrato de fase do sistema é mostrado na Figura 1

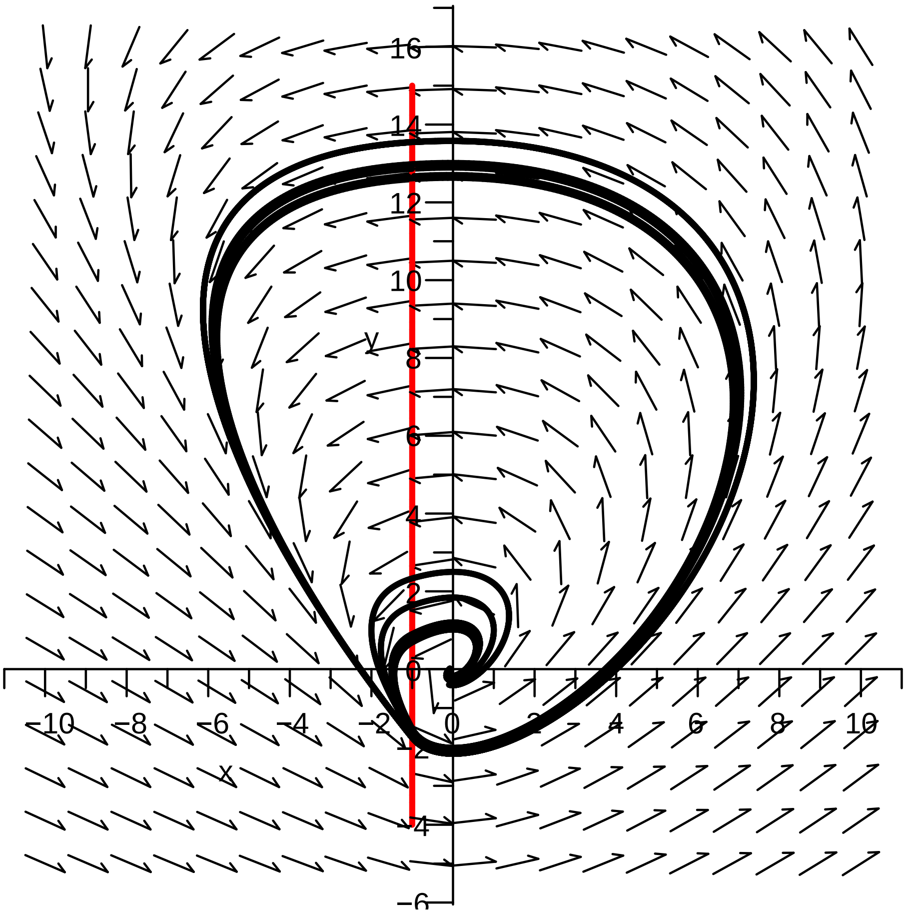

Figura 1: Retrato de fase do sistema (1) e sua respectiva fronteira $x = -1$. Observe a existência de um ciclo limite estável.

Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Qualitativa

Neste capítulo apresentamos alguns pré-requisitos relacionados a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias para nosso estudo de sistemas lineares por partes. Tal estudo teve [16] como referência.

1.1 Sistemas Dinâmicos

Definição 1.1.1. *Um espaço estado X, um conjunto de índices T e um operador ϕ^t definem um* ***sistema dinâmico*** *se*

$$\phi^0(x) = x, \quad \forall x \in X, \tag{1.1}$$

$$\phi^{t+s}(x) = \phi^s(\phi^t(x)) \quad \forall x \in X, \quad t, s \in T. \tag{1.2}$$

O conjunto de pontos $\{\phi^t(x), t \in T\}$ é chamado de trajetória ou órbita por x.

Observações.

- Pelas propriedades (1.1) e (1.2) $\{\phi^t : t \in T\}$ é um semi-grupo.
- Quando o sistema dinâmico for inversível (definido unicamente para $t < 0$ e também para $t > 0$), então temos a seguinte propriedade em consequência das equações (1.1) e (1.2)

$$\phi^t \phi^{-t} = id.$$

Definição 1.1.2. *Um sistema dinâmico que satisfaz* (1.1) *e* (1.2) *é dito suave de índice r, ou C^r, se as primeiras r derivadas de ϕ com respeito a x existem e são contínuas para todo $x \in X$.*

Definição 1.1.3. *Um* ***conjunto invariante*** *de um sistema dinâmico* (1.1) *e* (1.2) *é um subconjunto $A \subset X$ tal que se $x_0 \in A$, então $\phi^t(x_0) \in A$, para todo $t \in T$. Um conjunto invariante que é fechado e limitado é chamado de* ***atrator*** *se:*

1. *para toda vizinhança suficientemente pequena $U \subset X$ de A, existe uma vizinhança V de A tal que $\phi^t(x) \in U$, para todo $x \in V$ e para todo $t > 0$, e*

2. *para todo $x \in U$, $\quad \phi^t(x) \to A$, quando $t \to +\infty$.*

Definição 1.1.4. *O* ***domínio de atração*** *(ou bacia de atração) de um atrator A é o conjunto maximal U para o qual $x \in U$ implica $\phi^t(x) \to A$, quando $t \to +\infty$.*

Definição 1.1.5. *Um ponto p é um ponto $\omega-$ limite de uma trajetória $\phi^t(x_0)$ se existe uma sequência de tempos $t_1 < t_2 < \ldots$, com $t_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ tal que $\phi^{t_i}(x_0) \to p$ quando $t_i \to \infty$. Um ponto p é um ponto $\alpha-$ limite de uma trajetória $\phi^t(x_0)$ se existe uma sequência de tempos $t_1 > t_2 > \ldots$, com $t_i \to -\infty$ e $\phi^{t_i}(x_0) \to p$. O conjunto $\omega-$ $(\alpha-)$ limite de x_0 é o conjunto de todos possíveis pontos $\omega-(\alpha-)$ limite. O conjunto de todos pontos $\omega-$limite (ou pontos $\alpha-$limite), para todo $x_0 \in X$ é chamado conjunto $\omega-$limite (ou conjunto $\alpha-$ limite) do sistema. Tal conjunto é fechado e invariante.*

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias (fluxos)

Dado um sistema de equações diferenciais (E.D.O)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

em que D é um domínio, então $\{X, T, \phi^t\}$ define um sistema dinâmico se $X = D$ e $T = \mathbb{R}$ e colocamos $\phi^t(x) = \Phi(x,t)$ como sendo o operador solução ou **fluxo** que toma suas condições iniciais x e leva para suas soluções no tempo t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) = f(\Phi(x,t)) \quad , \quad \Phi(x,0) = x \tag{1.4}$$

Observações.

- Se f é de classe C^{r-1} para $r > 2$, então (1.4) implica que o fluxo é de classe C^r, ou seja, o sistema dinâmico é C^r, desde que f seja uma derivada de Φ.

- Note que não incluímos acima a possibilidade de o campo de vetores f depender explicitamente de t. Porém, tal sistema pode ser tratado no caso mais geral permitindo que o tempo seja adicionado ao estado dinâmico. Em muitos exemplos o tempo aparece periodicamente. Vamos olhar para o retrato de fase do cilindro.

Exemplo 1.2.1. *(Sistema periodicamente forçado).* Considere o sistema forçado

$$\ddot{\mu} + 2\zeta\dot{\mu} + K\mu = a\cos(\omega t)$$

Se $X = \mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$, com $x_3 = t \mod (2\pi/\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -Kx_1 - 2\zeta x_2 + a\cos(\omega x_3) \\ \dot{x_3} &= 1 \end{aligned}$$

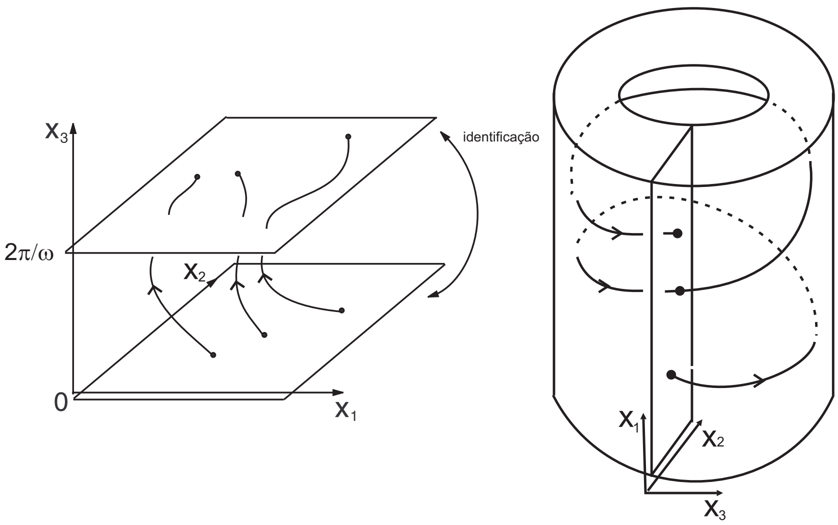

Figura 1.1: Referente ao Exemplo 1.2.1.

Vejamos alguns tipos de conjuntos invariantes representados por retrato de fase de fluxos.

a) Equilíbrio. O conjunto invariante mais simples de uma E.D.O é uma solução equilíbrio x^* no qual satisfaz $f(x^*) = 0$ e também pode ser chamada de **ponto estacionário** do fluxo desde que $\Phi(x^*, t) = \Phi(x^*, 0)$, para todo t.

b) Ciclos limites. Um tipo de invariante mais complexo é uma órbita periódica, no qual é determinada por uma condição inicial x_p e um período T. O período T é o menor tempo $T > 0$ para o qual tem-se $\Phi(x_p, T) = x_p$. Órbitas periódicas formam curvas fechadas no retrato de fase (topologicamente elas são circulares). Uma órbita periódica que é isolada, isto é, não existem outras órbitas periódicas em sua vizinhança é chamada de um **ciclo limite.**

c) Toro invariante. São conjuntos topologicamente equivalentes ao produto cartesiano de círculos, que são invariantes pelo fluxo.

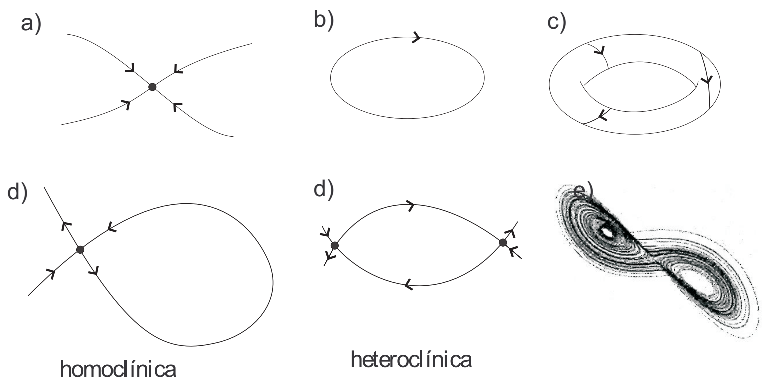

Figura 1.2: Tipos de conjuntos invariantes.

d) Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas. Outra classe importante de conjuntos invariantes é de órbitas conectadas, no qual tendem para outros conjuntos invariantes quando o tempo tende para $+\infty$ e $-\infty$. Por exemplo, consideremos órbitas que conectam equilíbrios. Uma **órbita homoclínica** é uma trajetória $x(t)$ que conecta um equilíbrio x^* nele mesmo: $x(t) \to x^*$ quando $t \to \pm\infty$. Uma **órbita heteroclínica** conecta dois equilíbrios diferentes x_1^* e x_2^* : $x(t) \to x_1^*$ quando $t \to -\infty$ e $x(t) \to x_2^*$ quando $t \to +\infty$.

e) Outros conjuntos invariantes. O seguinte exemplo de um sistema de E.D.O

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 f_1(x_1, x_2, x_3) \\
\dot{x_2} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\
\dot{x_3} &= f_3(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

para as funções suaves $f_i,\ i = 1, ..., 3$ tem como um conjunto invariante o plano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$. A dinâmica nesse plano invariante pode conter equilíbrios, órbitas periódicas e outros atratores.

1.3 Estabilidade Assintótica

Quando consideramos sistemas dinâmicos como aplicações físicas, interessamos em estudar comportamento estável. Para obtermos noções importantes de estabilidade em sistemas dinâmicos convém estudarmos estabilidade *assintótica*, ou estabilidade *Lyapunov* de um conjunto invariante. Ambos referem-se a estabilidade de conjuntos invariantes com respeito a pertubações de condições iniciais nos parâmetros fixados.

Para formalizar a definição de estabilidade Lyapunov, consideremos um sistema não linear genérico ao (1.3) e assumimos que este sistema tenha um ponto de equilíbrio, sem perda de generalidade assumimos que este ponto seja a origem, ou seja, $f(0) = 0$.

Definição 1.3.1. *O estado de equilíbrio na origem é chamado de* ***(Lyapunov) estável*** *se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|\Phi(x_0, t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Definição 1.3.2. *O estado de equilíbrio na origem é chamado de* ***assintoticamente estável*** *(no sentido de Lyapunov) se:*

1. *é estável;*

2. $\lim_{t \to \infty} \Phi(x_0, t) = 0.$

Dizemos que um ponto de equilíbrio é instável se não é estável de acordo com a Definição 1.3.1.

1.4 Equivalência e Conjugação

Na teoria de sistemas dinâmicos nosso objetivo é classificar dinâmicas qualitativamente. Estruturalmente, sistemas estáveis são aqueles para os quais todos sistemas "próximos" tem dinâmicas equivalentes. Assim procuramos uma noção precisa de *proximidade* e *equivalência.*

"Proximidade" se relaciona às possíveis pertubações do sistema, incluindo variações de parâmetros do sistema. Queremos chamar dois sistemas de "equivalentes" se seus espaços de fase tiverem a mesma dimensão e seus retratos de fase contiverem o mesmo número e tipo de conjuntos invariantes na mesma posição com relação ao outro.

Definição 1.4.1. *Dois sistemas dinâmicos* $\{X, T, \phi^t\}$ *e* $\{X, T, \psi^t\}$ *são* ***topologicamente equivalentes*** *se existe um homeomorfismo* h *que leva a órbita do primeiro sistema na órbita do segundo, preservando a orientação.*

Definição 1.4.2. *Dois fluxos* $\Phi(x, t)$ *e* $\psi(h(x), t)$ *que correspondem respectivamente as EDO's* $\dot{x} = f(x)$ *e* $\dot{y} = g(y)$ *são* ***topologicamente conjugados*** *se existe um homeomorfismo* h *tal que*

$$\Phi(x, t) = h^{-1}(\psi(h(x), t)). \tag{1.5}$$

Para equivalência topológica de fluxos, a conjugação não se aplica para cada tempo t. Desde que a aplicação $t \mapsto s(t)$ seja contínua, podemos escrever

$$\Phi(x, t) = h^{-1}(\psi(h(x), s(t))). \tag{1.6}$$

Note que as condições (1.5) e (1.6) são fortes para checar na prática, devido a exigência da expressão explícita do fluxo Φ. A condição mais restrita no qual é fácil de checar na prática, é quando duas EDO's são *diferenciavelmente conjugadas*, isto é, o homeomorfismo h em (1.5) é diferenciável, com inversa diferenciável (um difeomorfismo). Assim, podemos escrever

$$f(x) = \left(\frac{dh(x)}{dx}\right)^{-1} f(h(x)).$$

Definição 1.4.3. *Os autovalores de um equilíbrio* x^* *de uma EDO* $\dot{x} = f(x)$ *são os autovalores associados a matriz Jacobiana* $f_x(x^*)$. *Um equilíbrio é* ***hiperbólico*** *se nenhum dos autovalores estiverem sobre o eixo imaginário.*

Teorema 1.4.4 (**Fluxo Tubular**). *Seja p um ponto regular de um campo de vetores de classe C^r $X : \Delta \to \mathbb{R}^2$ com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$, e seja $f : A \to \Sigma$ uma seção transversal de X de classe C^r com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r, onde $\varepsilon > 0$ e B é um intervalo aberto centrado na origem tal que*

i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.

ii) *h é um a conjugação de classe C^r entre $X|_V$ e o campo de vetores constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^2$ definido por $Y = (1, 0)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [16] pág. 223.

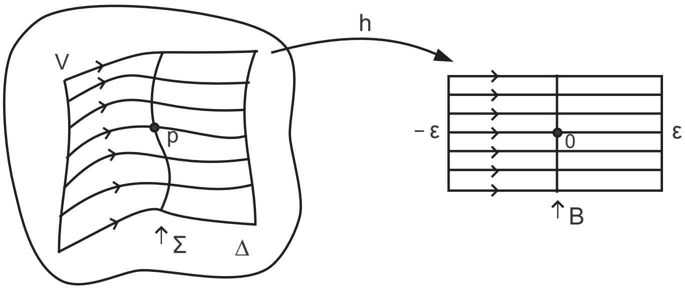

Figura 1.3: Referente ao Teorema do Fluxo Tubular.

Teorema 1.4.5 (**Hartman-Grobman**). *A dinâmica na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico é topologicamente equivalente a do sistema linearizado naquele ponto.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [16].

1.5 Órbitas Periódicas e Aplicação de Poincaré

Seja $\gamma = \{\Phi_p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo de vetores X de classe C^r definido em um subconjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Seja Σ uma seção transversal de X no ponto p. A continuidade do fluxo Φ garante que para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p, a trajetória $\Phi_q(t)$ permanece próxima de γ para t pertencente a um intervalo compacto. Vamos definir $f(q)$ como o primeiro ponto onde $\Phi_q(t)$ intercepta Σ. Seja Σ_0 o domínio da f. Claramente $p \in \Sigma_0$ e $f(p) = p$.

Definimos assim a *aplicação de Poincaré* $f : \Sigma_0 \to \Sigma$ tal que para cada ponto de Σ pertencente a uma órbita específica, a função o levará no primeiro ponto onde a órbita intercepta Σ. Suponhamos aqui que Σ_0 seja suficientemente pequeno, tal que f é definida para todos pontos de Σ_0.

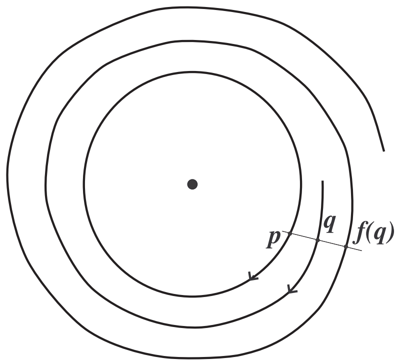

Figura 1.4: Aplicação de Poincaré.

Proposição 1.5.1. *Seja Φ um fluxo de classe C^r com $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$. Então a aplicação de Poincaré $f : \Sigma_0 \to \Sigma$ é um difeomorfismo de classe C^r na sua imagem.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [16] pág.227.

Proposição 1.5.2. *Existem três tipos de ciclos limites em $\mathbb{R}^2$:*

i) Estável, quando $\omega(q) = \gamma$ para todo $q \in V$.

ii) Instável, quando $\alpha(q) = \gamma$ para todo $q \in V$.

iii) Semi-estável, quando $\omega(q) = \gamma$ para todo $q \in V \cap Ext(\gamma)$ e $\alpha(q) = \gamma$ para todo $q \in V \cap Int(\gamma)$, ou reciprocamente.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [16] pág.228-229.

Temos que γ é um ciclo limite se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de f. Ainda,

i) γ é estável se, e somente se, $|f(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p;

ii) γ é instável se, e somente se, $|f(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p;

iii) γ é semi-estável se, e somente se, $|f(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap ext\,\gamma$ próximo de p e $|f(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap int\,\gamma$ próximo de p, ou o contrário.

No caso em que X é C^1, se $f'(x) < 1$, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que γ é estável. Por outro lado, γ é instável se $f'(x) > 1$.

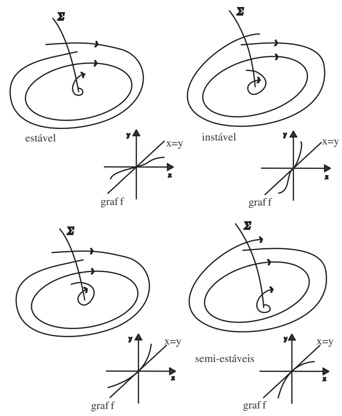

Figura 1.5: Tipos de ciclos limites.

Vamos agora enunciar o Teorema de Poincaré-Bendixson, para isso assumiremos que Δ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e X um campo de vetores de classe C^r,com $r \geq 1$. Também, em Δ, γ_p^+ denota uma semi-órbita positiva passando pelo ponto p.

Teorema 1.5.3 (Poincaré-Bendixson). *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X, definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contida em um compacto $K \subset \Delta$. Suponha que o campo de vetores X possua um número finito de singularidades em K. Então temos as seguintes alternativas:*

i) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

ii) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a esses pontos singulares em $\omega(p)$ quando $t \to \pm\infty$.

iii) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [16] pág. 248-252.

Capítulo 2

Sistemas Lineares

Vejamos neste capítulo o estudo dos sistemas lineares no plano: pontos de equilíbrio, formas canônicas, possíveis retratos de fase, etc. Para tal estudo foi usado [3] como referência.

2.1 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias no Plano

Um sistema de *Equações Diferenciais Ordinárias* no plano é um sistema da forma

$$x^{'} = f(x, y, t), \quad y^{'} = g(x, y, t)$$

onde f, g estão definidas em algum subconjunto $U \subset \mathbb{R}^3$.

Uma solução de um sistema como acima é uma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo

$$x^{'}(t) = f(x(t), y(t), t) \text{ e } y^{'}(t) = g(x(t), y(t), t).$$

Exemplo 2.1.1. $x^{'} = 2x + ty, \quad y^{'} = \sin(y) + tx^2$

O sistema acima define um *Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias no Plano.*

Definição 2.1.1. *Um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias no plano é dito AUTÔNOMO quando for do tipo*

$$x^{'} = f(x, y), \quad y^{'} = g(x, y), \tag{2.1}$$

onde f e g estão definidas em um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.1.2. $x^{'} = \sin(x) + 2y, \quad y^{'} = x^2 + y^3$ *é autônomo.*

Iremos estudar sistemas do tipo (2.1) com $f, g \in C^1$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Uma solução de (2.1) é uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo

$$x^{'}(t) = f(x(t), y(t)) \text{ e } y^{'}(t) = g(x(t), y(t)).$$

Observe que $(f(x, y), g(x, y))$ é o vetor velocidade da curva α em (x, y). De fato, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ temos que

$$(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) = (x^{'}(t), y^{'}(t)) = \alpha^{'}(t).$$

Assim, o par (f, g) define um campo de vetores.

Exemplo 2.1.3. $x^{'} = 2x, \quad y^{'} = -y$.

As soluções são curvas que apresentam traços como na Figura 2.1. Por exemplo, $\alpha(t) = (\exp(2t), \exp(-t))$ é uma solução que passa pelo ponto $(1, 1)$ quando $t = 0$. Note também que $\alpha(t) = (-\exp(2t), \exp(-t))$ é uma solução que passa por (-1,1) quando $t = 0$.

Definição 2.1.2. *Um PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI) é um sistema do tipo* (2.1) *acompanhado de uma condição inicial:* $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Observe que no exemplo temos que fixado um ponto do plano existe uma única curva que é solução do sistema e que passa por esse ponto. Dizemos que uma solução do PVI é uma "trajetória" ou "órbita" que no tempo t_0 passa por (x_0, y_0).

Facilmente, podemos ver que o traço da curva que passa por (x_0, y_0) no tempo t_0 é o mesmo que o da curva que passa por (x_0, y_0) em um tempo t_1. Dessa forma, vamos considerar somente PVI's com condição inicial

$$x(0) = 0\,,\; y(0) = 0.$$

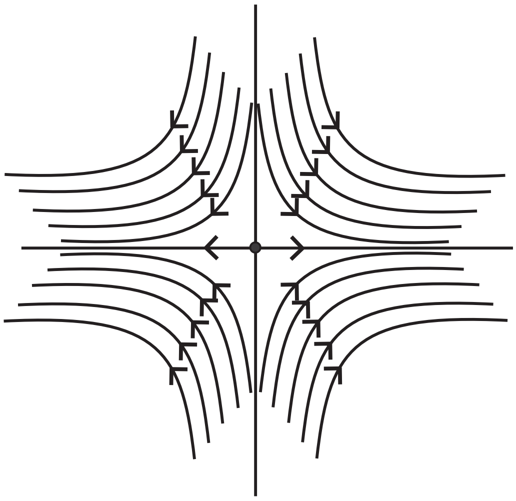

Figura 2.1: Retrato de fase referente ao Exemplo 2.1.3.

Definição 2.1.3. *O retrato de fase do sistema* (2.1) *é a união de todos os traços das trajetórias deste sistema. Veja a figura do Exemplo 2.1.3.*

Definição 2.1.4. *Um singularidade do sistema* (2.1) *é um ponto que satisfaz*

$$f(x,y) = g(x,y) = 0.$$

Exemplo 2.1.4. $x^{'} = 2x, \quad y^{'} = -y$.

O sistema acima apresenta como soluções $\alpha(t) = (x_0e^{2t}, y_0e^{-t})$. A única singularidade do sistema é o ponto $(0,0)$.

Exemplo 2.1.5. $x^{'} = \alpha x, \quad y^{'} = \beta y$.

O sistema acima apresenta como soluções $\alpha(t) = (x_0e^{\alpha t}, y_0e^{\beta t})$.

i) $\alpha = 0, \beta > 0$ ou $\alpha = 0, \beta < 0$: Neste caso o eixo OX é composto de singularidades do sistema.

ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ ou $\alpha < 0, \beta = 0$: Neste caso o eixo OY é composto de singularidades do sistema.

iii) $\alpha = \beta > 0$ ou $\alpha > \beta > 0$: ou $0 < \alpha < \beta$ Neste caso a origem $(0,0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como FONTE e os seguintes são conhecidos como NÓS REPULSORES. Se $\alpha > \beta > 0$ as trajetórias (menos as que possuem traço contido no eixo OX), tangenciam o eixo OY e se $0 < \alpha < \beta$ as trajetórias (menos as que possuem traço contido no eixo OY) tangenciam o eixo OX.

iv) $\alpha = \beta < 0$ ou $\alpha < \beta < 0$: ou $\beta < \alpha < 0$ Neste caso a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como POÇO e os seguintes são conhecidos como NÓS ATRATORES. Se $\alpha < \beta < 0$ as trajetórias (menos as que possuem traço contido no eixo OX), tangenciam o eixo OY e se $\beta < \alpha < 0$ as trajetórias (menos as que possuem traço contido no eixo OY) tangenciam o eixo OX.

v) $\beta < 0 < \alpha$ ou $\alpha < 0 < \beta$: Neste caso a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. Este caso é conhecido como SELA. No primeiro, as trajetórias se aproximam do eixo OY quando o parâmetro t se aproxima de $-\infty$ e se aproximam do eixo OX quando o parâmetro t se aproxima de $+\infty$. No segundo, as trajetórias se aproximam do eixo OX quando o parâmetro t se aproxima de $-\infty$ e se aproximam do eixo OY quando o parâmetro t se aproxima de $+\infty$.

2.2 Sistemas de EDO'S Lineares no Plano

Um PVI envolvendo um sistema de edo's lineares no plano é um sistema da forma $x^{'} = ax + by, \quad y^{'} = cx + dy$ com $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Afim de simplificarmos a notação, vamos representar este sistema na forma vetorial:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}$$

$$X^{'} = AX \;,\; X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A.$$

As soluções de $p(\lambda) = 0$ podem ser: duas raízes reais e distintas: λ_1, λ_2; uma raíz real dupla: λ; ou um par complexo conjugado: $\alpha + i\beta\, , \alpha - i\beta$.

Definição 2.2.1. *Uma transformação linear em $\mathbb{R}^2$ é uma função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos considerar um sistema diferente

$$Y' = (T^{-1}AT)Y$$

para alguma transformação linear invertível T. Note que se $Y(t)$ é uma solução do novo sistema, então $X(t) = TY(t)$ é solução de $X' = AX$. De fato,

$$(TY(t))' = TY'(t) = T(T^{-1}AT)Y(t) = A(TY(t)).$$

Retomando, supondo que as soluções de $P(\lambda)$ sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ associados aos autovetores V_1 e V_2 respectivamente, colocamos T como sendo a matriz com colunas V_1 e V_2. Então $TE_j = V_j$ para $j = 1, 2$, onde E_j forma uma base canônica do $\mathbb{R}^2$. Assim, $T^{-1}V_j = E_j$. Então, temos

$$(T^{-1}AT)E_j = T^{-1}AV_j = T^{-1}(\lambda_j V_j) = \lambda_j T^{-1}V_j = \lambda_j E_j.$$

Portanto, a matriz $T^{-1}AT$ assume a forma canônica

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e o correspondente sistema é fácil de ser resolvido.

Agora, vamos supor que a solução de $P(\lambda)$ seja uma raiz real (autovalor) dupla λ. Se existe um par de autovetores linearmente independentes, claramente A será da forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

e assim o sistema $X' = AX$ é fácil de resolver. Suponhamos que V é um autovetor e que qualquer outro autovetor é um múltiplo de V. Seja W um vetor para o qual V e W sejam linearmente independentes. Assim,

$$AW = \mu V + \nu W, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Note que $\mu \neq 0$, por outro lado nos teríamos um segundo autovetor W linearmente independente com autovalor ν. Nós temos que $\nu = \lambda$. Se $\nu \neq \lambda$, temos

$$A\left(W + \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda}\right)V\right) = \nu\left(W + \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda}\right)\right).$$

Isso diz que ν é um segundo autovalor diferente de λ. Portanto temos que $\nu = \lambda$.

Finalmente, fazendo $U = (1/\nu)W$, então

$$AU = V + \frac{\lambda}{\mu}W = V + \lambda U.$$

Então, fazendo $TE_1 = V$, $TE_2 = U$, temos

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

como queríamos. Assim, $X' = AX$ está na forma canônica após a mudança de coordenadas.

Agora, suponhamos que as soluções de $P(\lambda)$ sejam um par complexo conjugado: $\alpha + i\beta\,, \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. Então nós podemos encontrar um autovetor complexo $V_1 + iV_2$ correspondente a $\alpha + i\beta$, onde V_1 e V_2 são vetores reais. Afirmamos que V_1 e V_2 são vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. Caso contrário, teríamos que $V_1 = cV_2$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Mas então

$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(c + i)V_2.$$

Assim,

$$A(V_1 + iV_2) = (c + i)AV_2.$$

Concluímos então que $AV_2 = (\alpha + i\beta)V_2$, o que é contradição pois o lado esquerdo da equação é um vetor real, enquanto o lado direito é um vetor complexo.

Considerando $V_1 + iV_2$ um auto vetor associado a $\alpha + i\beta$, temos

$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2).$$

Igualando as partes reais e imaginárias da equação, obtemos

$$AV_1 = \alpha V_1 - \beta V_2 \quad , \quad AV_2 = \beta V_1 + \alpha V_2.$$

Seja T a matriz que tem como colunas V_1 e V_2. Então $TE_j = V_j$ para $j = 1, 2$. Agora vamos considerar $T^{-1}AT$. Temos

$$(T^{-1}AT)E_1 = T^{-1}(\alpha V_1 - \beta V_2) = \alpha E_1 - \beta E_2$$

e analogamente,

$$(T^{-1}AT)E_2 = \beta E_1 + \alpha E_2.$$

Assim, a matriz $T^{-1}AT$ está na forma canônica

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Considerando o sistema (2.2), temos:

i) Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, então a solução de (2.2) é dada por $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t})$.

Para este caso já fizemos a análise no exemplo (2.1.5).

ii) Se $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, então a solução de (2.2) é dada por $(x(t), y(t)) = ((x_0 + y_0)e^{\lambda t}, y_0 e^{\lambda t})$.

Se $\lambda < 0$, a única singularidade é o ponto $(0, 0)$. Note que cada termo da solução tende para 0 quando $t \to \infty$. Assim todas soluções tendem para $(0, 0)$ quando $t \to \infty$. A singularidade $(0, 0)$ é chamada de NÓ IMPRÓPRIO ATRATOR.

Se $\lambda > 0$, a única singularidade é o ponto $(0, 0)$. Todas soluções se afastam do ponto $(0, 0)$. De fato, as soluções tendem para longe da origem em uma direção tangente ao autovetor $(1, 0)$. A singularidade $(0, 0)$ é chamada de NÓ IMPRÓPRIO REPULSOR.

iii) Seja $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ com $\alpha, \beta \neq 0$.

O polinômio característico em relação a matriz A é dado por $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$ e portanto os autovalores são $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Um autovetor associado a $\alpha + i\beta$ é determinado pela equação

$$(\alpha - (\alpha + i\beta))x + \beta y = 0.$$

Assim $(1, i)$ é um autovetor. Portanto, nós temos soluções complexas da forma

$$X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + ie^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Chamando de $X_{Re}(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix}$ e $X_{Im}(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}$ temos que são soluções reais do sistema $X^{'} = AX$. De fato,

$$X^{'}_{Re}(t) + iX^{'}_{Im} = X^{'}(t) = AX(t) = A(X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)) = AX_{Re}(t) + iAX_{Im}(t).$$

Assim, a solução geral é da forma

$$X(t) = x_0 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + y_0 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Outra forma de encontrar as soluções é utilizando coordenadas polares. Vamos começar fazendo a mudança de coordenadas $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.
As condições iniciais r_0, θ_0 serão dadas por $x_0 = r_0\cos\theta_0$ e $y_0 = r_0\sin\theta_0$.
Então, temos

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \Rightarrow x^{'} = r^{'}\cos\theta - r\theta^{'}\sin\theta \\ y &= r\sin\theta \Rightarrow y^{'} = r^{'}\sin\theta + r\theta^{'}\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Multiplicando a primeira linha por $(\cos\theta)$ e a segunda por $(\sin\theta)$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

$$x^{'}\cos\theta + y^{'}\sin\theta = r^{'}. \tag{2.4}$$

Multiplicando a primeira linha por $(-\sin\theta)$ e a segunda por $(\cos\theta)$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

$$-x^{'}\sin\theta + y^{'}\cos\theta = r\theta^{'}. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.3) em (2.4) e em (2.5) obtemos

$$\begin{cases} r^{'} = \alpha r \\ \theta^{'} = \beta. \end{cases}$$

A solução do sistema acima é dada por

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta &= \theta_0 + \beta t. \end{aligned}$$

Voltando para x, y temos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(x_0 \cos \beta t - y_0 \sin \beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t}(y_0 \cos \beta t + x_0 \sin \beta t). \end{aligned}$$

Sem o termo $e^{\alpha t}$ ($\alpha = 0$), estas soluções seriam círculos ou elipses centrados na origem. O termo $e^{\alpha t}$ converte as soluções em espirais.

Se $\alpha = 0$, a singularidade $(0, 0)$ é chamada de CENTRO.

Se $\alpha > 0$, a singularidade $(0, 0)$ é chamada de FOCO REPULSOR no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$. As espirais neste caso, se afastam da origem.

Se $\alpha < 0$, a singularidade $(0, 0)$ é chamada de FOCO ATRATOR no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$. As espirais neste caso, se aproximam da origem.

Capítulo 3

Sistemas Planares Lineares por Partes

3.1 Introdução

Os estudos nos capítulos 3, 4, 5 e 6 foram feitos a partir de um trabalho do matemático Enrique Ponce da Universidad de Sevilla - ES, que consta em [14]. O estudo no Apêndice A teve como referências [2], [7] e [17].

Neste capítulo faremos um estudo sobre sistemas lineares por partes. Já sabemos que os sistemas lineares não possuem ciclos limites, mas no caso de sistemas lineares por partes isto é possível.

Para melhor fixar as idéias, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.1. Considere o sistema linear por partes dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} (|-10x-10y+5.95| - |-10x-10y+3.95|).$$

Tal sistema possui 2 fronteiras dadas pelas equações $10x+10y = 4.95 \pm 1$. Denotaremos

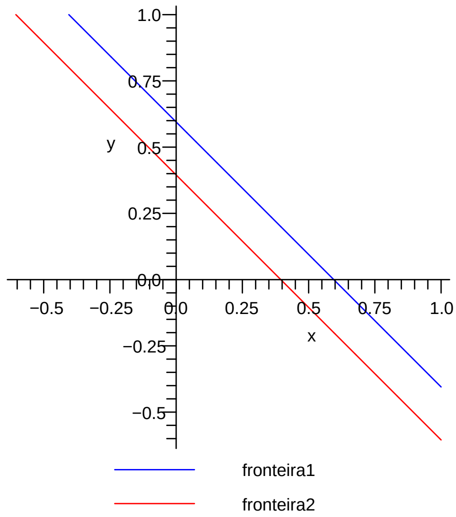

Figura 3.1: Fronteiras dadas pelas equações $10x + 10y = 4.95 \pm 1$.

por

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10x - 10y + 5.95 > 0 \text{ e } -10x - 10y + 3.95 > 0\},\\
B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10x - 10y + 5.95 > 0 \text{ e } -10x - 10y + 3.95 < 0\},\\
C &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10x - 10y + 5.95 < 0 \text{ e } -10x - 10y + 3.95 < 0\}.
\end{aligned}$$

Analisando os módulos, podemos dividir o sistema em três zonas: zona A, zona B e zona C, onde cada zona tem um sistema linear correspondente.

- O sistema na zona A é dado por

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x + y + 1$$

  cujo retrato de fase é um foco repulsor. Observe que neste caso o retrato de fase só ocupa a zona A.

- O sistema na zona B é dado por

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -11x - 9y + 4.95$$

  cujo retrato de fase é um nó atrator. Observe que neste caso o retrato de fase só ocupa a zona B.

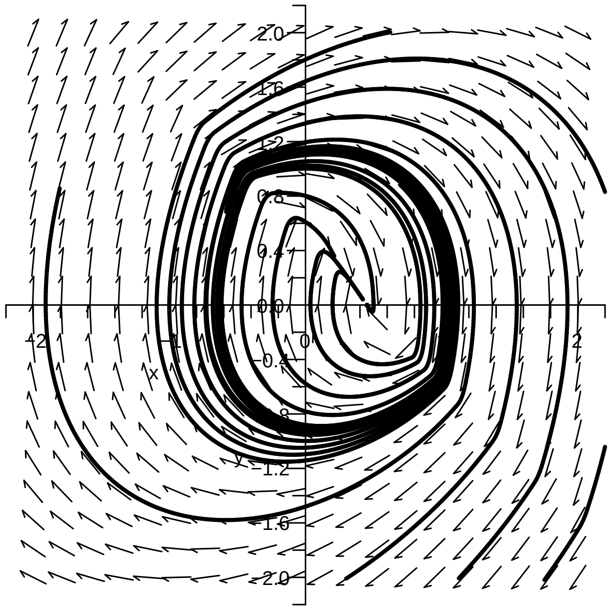

Figura 3.2: Retrato de fase referente ao Exemplo 3.1.1.

- O sistema na zona C é dado por

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x + y - 1$$

  cujo retrato de fase é um foco repulsor. Observe que neste caso o retrato de fase só ocupa a zona C.

Mais adiante, mostraremos que há um ciclo limite passando pelas três zonas.

3.2 Definições Preliminares

Definição 3.2.1. *Denotamos por P o conjunto de sistemas contínuos lineares por partes da forma*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} |x - \gamma_1| + \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} |x - \gamma_2|,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}, \gamma_1 < \gamma_2, \quad \alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 > 0, \quad i = 1, 2.$

Podemos fazer uma translação na variável x da seguinte forma

$$x \to x + \gamma, \quad \text{com} \quad \gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x-\gamma_1| \rightarrow \left|x+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}-\gamma_1\right| &= \left|x+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}\right| \\ |x-\gamma_2| \rightarrow \left|x+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}-\gamma_2\right| &= \left|x-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}\right|. \end{aligned}$$

Posteriormente, fazemos

$$x \rightarrow \delta x \Rightarrow |x \pm \delta| \rightarrow |\delta x \pm \delta| = \delta |x \pm 1| \quad , \quad \delta = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} > 0\,.$$

Assim, podemos estudar sem perda de generalidade, sistemas da forma (assumimos que todos os outros parâmetros tenham sido redefinidos de acordo com essa mudança de variável)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} |x+1| + \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} |x-1|. \tag{3.1}$$

Observamos que reduzimos os parâmetros dos sistemas pertencentes a P de 12 para 10. Além disso, o sistema (3.1) fica definido em 3 zonas, a saber: $x \leq -1$, $|x| \leq 1$, $x \geq 1$.

Lema 3.2.2. *Na classe P, uma condição necessária para a existência de ciclos limites é que $a_{12} \neq 0$.*

Demonstração. Já sabemos que os sistemas lineares não possuem ciclos limites. Assim, se existir um ciclo limite na classe P, ele deverá ocupar pelo menos duas zonas de diferente dinâmica linear.

No entanto, a órbita correspondente ao ciclo limite deve cruzar pelo menos duas vezes e em sentido contrário, alguma ou ambas as fronteiras verticais que separam as três zonas.

Se $a_{12} = 0$, então temos nas fronteiras

$$\begin{aligned} \dot{x}_{|x=-1} &= \alpha_{01} - a_{11} + 2\alpha_{21} \\ \dot{x}_{|x=1} &= \alpha_{01} - a_{11} + 2\alpha_{11} \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

Se as expressões são ambas não nulas, então a primeira coordenada do campo é constante em cada fronteira. Se alguma das expressões é nula, então a fronteira correspondente é invariante com relação ao fluxo do sistema. Em qualquer caso, é impossível cruzar uma fronteira em ambos os sentidos.

■

Observação. Se não houvesse a condição do Lema (3.2.2), então o sistema estaria desacoplado, ou seja, a dinâmica em x não dependeria da variável y.

Definição 3.2.3. *Chamaremos de P^* a subclasse de P dos sistemas que satisfazem a condição $a_{12} \neq 0$.*

Lema 3.2.4. *Se um sistema pertence a classe P^*, então podemos escrevê-lo na forma (Liénard)*

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + |u+1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \tilde{\alpha}_{12} \end{bmatrix} + |u-1| \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \tilde{\alpha}_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Como $a_{12} \neq 0$, podemos fazer a seguinte mudança de variável

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Daí temos,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

Substituindo (3.1) na equação acima, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + |x+1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} + |x-1| \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ a_{22}\alpha_{01} - a_{12}\alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-a_{12}}{-a_{12}} & 0 \\ \frac{-a_{22}}{a_{12}} & \frac{1}{-a_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ |u+1| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} + |u-1| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix},$$

fazendo

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11} + a_{22}, \\ d &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \tilde{\alpha}_{i2} &= a_{22}\alpha_{i1} - a_{12}\alpha_{i2}, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & \frac{-1}{a_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ |u+1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ a_{22}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} \end{bmatrix} + |u-1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ a_{22}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & -1 \\ a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + |u+1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \tilde{\alpha}_{12} \end{bmatrix} + |u-1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \tilde{\alpha}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \tilde{\alpha}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + |u+1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \tilde{\alpha}_{12} \end{bmatrix} + |u-1| \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \tilde{\alpha}_{22} \end{bmatrix}$$

■

Agora, devido ao Lema (3.2.4), podemos usar somente 8 parâmetros para descrever a família P^*. Adiante, omitiremos os "tills" na expressão (3.2).

Se introduzirmos as funções

$$\begin{aligned} \operatorname{sat}(u) &= \min\{|u|, 1\} \operatorname{sgn}(u) = \frac{1}{2}(|u+1| - |u-1|) \\ \operatorname{rec}(u) &= \max\{|u|, 1\} = \frac{1}{2}(|u+1| + |u-1|)\ , \end{aligned}$$

então teremos o seguinte

$\alpha_{1i}|u+1| + \alpha_{2i}|u-1| = (\alpha_{1i} + \alpha_{2i}) \operatorname{rec}(u) + (\alpha_{1i} - \alpha_{2i}) \operatorname{sat}(u), \quad i = 1, 2.$

Quando $(\alpha_{1i} + \alpha_{2i}) = 0,\ i = 1, 2$, temos um sistema equivalente a forma canônica do sistema de controle. Assim, fazendo em (3.2) $x_1 = v$ e $x_2 = -u$, temos

$$\begin{bmatrix} -\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{21} \\ \alpha_{12} - \alpha_{22} \end{bmatrix} \text{sat}(-x_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta x_2 - x_1 \\ -dx_2 + 0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{21} \\ \alpha_{12} - \alpha_{22} \end{bmatrix} \text{sat}(-x_2) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{02} \\ -\alpha_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dx_2 & 0x_1 \\ \beta x_2 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{12} - \alpha_{22} \\ \alpha_{21} - \alpha_{11} \end{bmatrix} \text{sat}(-x_2) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{02} \\ -\alpha_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -d \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{22} - \alpha_{12} \\ \alpha_{11} - \alpha_{21} \end{bmatrix} \text{sat}(x_2)$$

que é a forma canônica dita anteriormente.

Voltando a equação (3.2), temos que o sistema pode assumir a forma de Liénard sem simetria

$$\dot{u} = F(u) - v, \quad \dot{v} = g(u)$$

onde,

$$\begin{aligned} F(u) &= \alpha_{01} + \beta u + \alpha_{11}|u+1| + \alpha_{21}|u-1| \\ g(u) &= \alpha_{02} + du + \alpha_{12}|u+1| + \alpha_{22}|u-1| \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta u - v \\ du \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}|u+1| + \alpha_{21}|u-1| \\ \alpha_{12}|u+1| + \alpha_{22}|u-1| \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha_{01} + \beta u - v + \alpha_{11}|u+1| + \alpha_{21}|u-1| = F(u) - v \\ \dot{v} &= \alpha_{02} + du + \alpha_{12}|u+1| + \alpha_{22}|u-1| = g(u)\ . \end{aligned}$$

Observação. O número de zeros da função $g(u)$ determina o número de equilíbrios do sistema, pois se u_0 é um zero de $g(u)$, então o par (u_0, v_0) é um ponto de equilíbrio do sistema, onde $v_0 = F(u_0)$.

Definição 3.2.5. *Os sistemas lineares da classe P^* que determinam a dinâmica em cada zona são dados por*

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

para $u \leq -1$ (zona esquerda), com

$$\begin{aligned} a_L &= \alpha_{01} - \alpha_{11} + \alpha_{21} \qquad b_L = \alpha_{02} - \alpha_{12} + \alpha_{22} \\ \beta_L &= \beta - \alpha_{11} - \alpha_{21} \qquad d_L = d - \alpha_{12} - \alpha_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_M & -1 \\ d_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

para $|u| \leq 1$ (zona central), com

$$\begin{aligned} a_M &= \alpha_{01} + \alpha_{11} + \alpha_{21} \qquad b_M = \alpha_{02} + \alpha_{12} + \alpha_{22} \\ \beta_M &= \beta + \alpha_{11} - \alpha_{21} \qquad d_M = d + \alpha_{12} - \alpha_{22}, \end{aligned}$$

e por último,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

para $u \geq -1$ (zona direita), com

$$\begin{aligned} a_R &= \alpha_{01} + \alpha_{11} - \alpha_{21} \qquad b_R = \alpha_{02} + \alpha_{12} - \alpha_{22} \\ \beta_R &= \beta + \alpha_{11} + \alpha_{21} \qquad d_R = d + \alpha_{12} + \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Proposição 3.2.6. *Devido a continuidade do campo vetorial em cada umas das fronteiras* $u=-1$ *e* $u=1$*, temos*

$$\begin{aligned} a_L-\beta_L &= a_M-\beta_M, \\ b_L-d_L &= b_M-d_M, \\ a_M+\beta_M &= a_R+\beta_R, \\ b_M+d_M &= b_R+d_R. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Demonstração. Como o campo vetorial é contínuo em $u=-1$, temos que a equação (3.3) aplicada em $u=-1$ é igual a equação (3.4) aplicada em $u=-1$. Assim,

$$\begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_M & -1 \\ d_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_L - v \\ -d_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_M - v \\ -d_M \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a_L-\beta_L-v = a_M-\beta_M-v$$
$$b_L-d_L = b_M-d_M$$

e portanto, temos

$$\begin{aligned} a_L-\beta_L &= a_M-\beta_M \\ b_L-d_L &= b_M-d_M. \end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\begin{aligned} a_M+\beta_M &= a_R+\beta_R \\ b_M+d_M &= b_R+d_R. \end{aligned}$$

■

Das expressões (3.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
a_M &= \frac{a_L + a_R}{2} + \frac{\beta_R - \beta_L}{2},\\
b_M &= \frac{b_L + b_R}{2} + \frac{d_R - d_L}{2},\\
d_M &= \frac{d_L + d_R}{2} + \frac{b_R - b_L}{2},\\
\beta_M &= \frac{\beta_L + \beta_R}{2} + \frac{a_R - a_L}{2}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

3.3 Pontos de Equilíbrio de Sistemas Planares Lineares por Partes

Como nosso interesse é estudar mecanismos que possibilitam a aparição de ciclos limites, vamos primeiramente estudar algumas condições relacionadas aos equilíbrios do sistema (3.2).

Proposição 3.3.1. *Haverá um equilíbrio no interior da zona esquerda se, e somente se,*

$$\frac{-b_L}{d_L} < -1, \tag{3.8}$$

haverá um equilíbrio no interior da zona direita se, e somente se,

$$\frac{-b_R}{d_R} > 1 \tag{3.9}$$

e também haverá um equilíbrio no interior da zona central se, e somente se,

$$\left| \frac{-b_L + b_R - d_L + d_R}{b_L - b_R - d_L - d_R} \right| < 1. \tag{3.10}$$

Demonstração. Primeiramente vamos analisar na zona esquerda.

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_L + \beta_L u - v &= 0 \\ b_L + d_L u &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-b_L}{d_L} = u < -1 \Rightarrow \frac{-b_L}{d_L} < -1.$$

($\Leftarrow$) Observemos que o sistema está na forma de Liénard. Assim, se tomarmos $u_0 = \dfrac{-b_L}{d_L}$, temos que $u_0 < -1$ e $b_L + d_L u_0 = 0$, ou seja $g(u_0) = 0$. Como o número de zeros de $g(u)$ determina o número de equilíbrios do sistema (3.3), temos que existe um equilíbrio de tal sistema. Do mesmo modo, haverá um equilíbrio no interior da zona direita se, e somente se,

$$\frac{-b_R}{d_R} > 1,$$

também haverá um equilíbrio no interior da zona central se, e somente se,

$$\left| \frac{-b_L + b_R - d_L + d_R}{b_L - b_R - d_L - d_R} \right| < 1.$$

Neste último caso, basta ver que $\left| \dfrac{-b_L + b_R - d_L + d_R}{b_L - b_R - d_L - d_R} \right| = \left| \dfrac{b_M}{d_M} \right|$, usando as equações (3.7).

∎

Podemos observar que trocando as três desigualdades anteriores por igualdades, obtemos condições necessárias e suficientes para que os equilíbrios estejam em alguma das fronteiras verticais.

Definição 3.3.2. *Um equilíbrio do sistema* (3.1)*, do sistema* (3.2)*, ou de* (3.3)-(3.5) *é chamado de transitivo se sua abscissa é 1 ou -1. Caso contrário, chamaremos de equilíbrio não transitivo.*

Lema 3.3.3. *Todos os equilíbrios do sistema* (3.3)-(3.5) *são não transitivos se, e somente se,* $(b_L - d_L)(b_R + d_R) \neq 0$.

Demonstração. Afirmamos que se $(b_L - d_L)(b_R + d_R) = 0$, então teremos equilíbrios transitivos. De fato, suponhamos que $(b_R + d_R) = 0$. Se $d_R = 0$, então teremos que

$b_R = 0$. Com isso, para $u \geq 1$, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_R & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

onde segue que $\dot{u} = \dot{v} = 0$ se, e só se, $a_R + \beta_R u - v = 0$.

Assim, temos uma linha de equilíbrios.

Se $d_R \neq 0$, então $b_R = -d_R$. Assim, para $u = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ -d_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = a_R + \beta_R.$$

Portanto, teremos um equilíbrio dado por $(1, a_R + \beta_R)$ que é transitivo. De maneira análoga fazemos para $(b_L - d_L) = 0$.

Agora inversamente suponhamos que $(b_L - d_L)(b_R + d_R) \neq 0$ e tomamos a condição $(b_R + d_R) \neq 0$.

Se $d_R = 0$, então temos que $b_R \neq 0$. Assim, para $u \geq 1$, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_R & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_R = 0,$$

o que contraria a hipótese, logo não há equilíbrios para $u \geq 1$.

Se $d_R \neq 0$, então temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \neq u = -\frac{b_R}{d_R}$$

Portanto pode haver um equilíbrio na zona direita contanto que $u \neq 1$. O caso $b_L - d_L \neq 0$ é similar. Pela continuidade do campo não é necessário comprovar na zona central.

■

Notemos que da prova anterior, concluímos que existe uma linha de equilíbrios para $u \leq -1$ se, e somente se, $b_L = d_L = 0$. Analogamente, para $u \geq 1$ quando $b_R = d_R = 0$.

Corolário 3.3.4. *Existe uma linha de equilíbrios para $|u| \leq 1$ se, e somente se, há equilíbrios transitivos.*

Demonstração. De maneira análoga às outras zonas, haverá uma linha de equilíbrios na zona central se, e somente se, $b_M = d_M = 0$. Usando (3.6) temos que

$$b_M = d_M = 0 \Leftrightarrow b_L = d_L \Leftrightarrow -\frac{b_L}{d_L} = -1,$$

ou seja, haverá uma linha de equilíbrios na zona central se, e somente se, existe um equilíbrio na fronteira $u = -1$.

■

Consideremos em diante o caso genérico $d_L d_R \neq 0$ para não haver linhas de equilíbrio e assumiremos que não haja equilíbrios transitivos.

Proposição 3.3.5. *Considerando a hipótese de que $d_L d_R (b_L - d_L)(b_R + d_R) \neq 0$, as seguintes afirmações são válidas para os sistemas* (3.3)-(3.5).

a) Se $d_L d_R > 0$, então o sistema possui pelo menos um equilíbrio.

b) Se $d_L d_R > 0$ e $(b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$, o sistema possui somente um equilíbrio. Tal equilíbrio pertence a zona esquerda quando $d_L(b_L - d_L) > 0$ ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) > 0$. Tal equilíbrio pertence a zona direita quando $d_L(b_L - d_L) < 0$ ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) < 0$.

c) Se $d_L d_R > 0$ e $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$, o sistema possui um equilíbrio na zona central. Além disso, haverá outros equilíbrios, um na zona esquerda e outro na zona direita se, e somente se, verifica-se a condição $d_L(b_L - d_L) > 0$ ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) < 0$.

d) Se $d_L d_R < 0$ e $(b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$, o sistema possui algum equilíbrio se, e somente se, verifica-se $d_L(b_L - d_L) > 0$ ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) < 0$. Neste caso o sistema possui dois equilíbrios, um na zona esquerda e outro na zona direita.

e) Se $d_L d_R < 0$ e $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$, o sistema possui dois equilíbrios. Um deles está na zona central. O outro estará na zona esquerda quando $d_L(b_L - d_L) > 0$ ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) > 0$ e estará na zona direita se $d_R(b_R + d_R) < 0$, ou equivalentemente $d_R(b_R + d_R) < 0$.

Demonstração. Primeiramente, observemos a partir de (3.8) que teremos um equilíbrio na zona esquerda se, e somente se, $d_L(b_L - d_L) > 0$, pois:

- Se $d_L > 0$, então
  $$-\frac{b_L}{d_L} < -1 \Leftrightarrow -b_L < -d_L \Leftrightarrow -b_L + d_L < 0 \Leftrightarrow b_L - d_L > 0 \Leftrightarrow d_L(b_L - d_L) > 0.$$

- Se $d_L < 0$, então
$-\dfrac{b_L}{d_L} < -1 \Leftrightarrow -b_L > -d_L \Leftrightarrow -b_L + d_L > 0 \Leftrightarrow b_L - d_L < 0 \Leftrightarrow d_L(b_L - d_L) > 0.$

Analogamente, teremos um equilíbrio na zona direita se, e somente se, $d_R(b_R+d_R) < 0$.

Agora, para a zona central, vamos reescrever (3.10) da seguinte forma

$$\left|\frac{b_L - d_L}{b_R + d_R} + 1\right| < \left|\frac{b_L - d_L}{b_R + d_R} - 1\right|$$

Trivialmente a desigualdade acima é equivalente a $\dfrac{b_L - d_L}{b_R + d_R} < 0$, que por sua vez é equivalente a $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$.

Assim, existe um equilíbrio na zona central se, e somente se, $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$.

Para o item a), se $d_L d_R > 0$, então suponhamos que não exista nenhum equilíbrio do sistema. Assim, suponhamos que $(b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$ (pois caso contrário haveria um equilíbrio na zona central). Com isso, temos que $d_L d_R (b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$, o que implica

$$d_L(b_L - d_L) > 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) > 0, \quad \text{ou} \quad d_L(b_L - d_L) < 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) < 0,$$

ou seja, existe um equilíbrio na zona esquerda ou na zona direita o que contraria nossa suposição.

Para o item b), observe por a) que se $d_L d_R > 0$ e $(b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$, então haverá um equilíbrio na zona esquerda ou na zona direita, mas não em ambos. Tal equilíbrio pertencerá a zona esquerda quando $d_L(b_L - d_L) > 0$ (ou $d_R(b_R + d_R) > 0$) ou a zona direita quando $d_L(b_L - d_L) < 0$ (ou $d_R(b_R + d_R) < 0$).

Para o item c), claramente o sistema possui um equilíbrio na zona central, pois $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$. Também teremos um equilíbrio na zona esquerda se, e somente se $d_L(b_L - d_L) > 0$. Agora

$$d_L(b_L - d_L) > 0 \Leftrightarrow d_L^2 d_R (b_L - d_L)^2 (b_R + d_R) < 0 \Leftrightarrow d_R(b_R + d_R) < 0.$$

Portanto teremos também um equilíbrio na zona direita.

Para o item d) observe que o sistema não possui equilíbrio na zona central, pois $(b_L - d_L)(b_R + d_R) > 0$. Agora, se $d_L d_R < 0$, então

$d_L d_R(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0 \Leftrightarrow d_L(b_L - d_L) d_R(b_R + d_R) < 0 \Leftrightarrow d_L(b_L - d_L) < 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) > 0, \quad \text{ou} \quad d_L(b_L - d_L) > 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) < 0.$

Portanto o sistema possui equilíbrio se, e somente se, $d_L(b_L - d_L) > 0$.

Para o item e), obviamente temos um equilíbrio na zona central, pois $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$. Agora como $d_L d_R < 0$, temos

$$d_L(b_L - d_L) d_R(b_R + d_R) > 0,$$

que é equivalente à

$d_L(b_L - d_L) > 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) > 0, \quad \text{ou} \quad d_L(b_L - d_L) < 0 \quad \text{e} \quad d_R(b_R + d_R) < 0.$

Portanto o outro equilíbrio estará na zona esquerda quando $d_L(b_L - d_L) > 0$ e estará na zona direita quando $d_R(b_R + d_R) < 0$.

$\blacksquare$

Exemplo 3.3.1. Considere o sistema suave por partes dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + |x+1| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + |x-1| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tal sistema pode ser divido em três zonas, onde cada uma delas é regida por um sistema linear. Usando as equações (3.7), podemos escrever explicitamente cada sistema correspondente as zonas esquerda ($x \leq -1$), central ($|x| < 1$) e direita ($x \geq 1$).

Assim, os sistemas correspondentes são dados por

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x \leq -1 \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad |x| \leq 1 \\
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x > 1.
\end{aligned}$$

Agora, $d_L d_R = -2. - 2 = 4 > 0$, o que implica pela proposição que o sistema linear por partes dado possui pelo menos um equilíbrio. De fato, analisando o sistema na zona central, temos um equilíbrio $(1/2, 5/2)$. Temos também que $(b_L - d_L)(b_R + d_R) = (1 - (-2))(1 + (-2)) = -3 < 0$, logo estamos de acordo com o item c) da proposição e como $d_L(b_L - d_L) = -2(1 - (-2)) = -6 < 0$, temos que não haverá equilíbrio na zona esquerda e na zona direita, o que é fácil de ver a partir dos três sistemas acima.

Agora vamos analisar o caso em que há mais de um equilíbrio e se são equilíbrios tipo sela, ou anti-sela (foco, nó, nó impróprio).

Proposição 3.3.6. *Considerando a hipótese de que $d_L d_R(b_L - d_L)(b_R + d_R) \neq 0$, então as seguintes afirmações são válidas para os sistemas* (3.3)-(3.5).

a) Se o sistema possui dois equilíbrios, então um deles é do tipo sela e o outro é do tipo anti-sela.

b) Se o sistema possui três equilíbrios e $d_L > 0$ (equivalentemente $d_R > 0$), então o equilíbrio da zona central é uma sela e os outros dois das zonas laterais são anti-sela.

c) Se o sistema possui três equilíbrios e $d_L < 0$ (equivalentemente $d_R < 0$), então o equilíbrio da zona central é anti-sela e os outros dois das zonas laterais são do tipo sela.

Demonstração. Claramente, teremos que estudar o determinante da matriz de cada sistema das zonas correspondentes. Para termos uma sela, obrigatoriamente o determinante (d_L para zona esquerda, d_R para zona direita e d_M para zona central) tem que ser negativo.

A afirmação do item a) corresponde as sentenças d) e e) da proposição anterior. Suponhamos que estamos no caso correspondente a d). Neste caso, temos que existem dois equilíbrios, um na zona esquerda e outro na zona direita e $d_L d_R < 0$. Assim, temos duas possibilidades: um equilíbrio tipo sela na zona esquerda e um equilíbrio tipo anti-sela na zona direita, ou o contrário. Em qualquer caso, teremos dois equilíbrios, um tipo sela e outro anti-sela.

Agora suponhamos que estamos no caso correspondente a sentença e) da proposição anterior. Suponhamos que $d_L(b_L - d_L) > 0$. Neste caso, temos um equilíbrio na zona central pois $(b_L - d_L)(b_R + d_R) < 0$ e um equilíbrio na zona esquerda, aparecendo duas possibilidades. Quando $d_L < 0$ teremos que o equilíbrio na zona esquerda é uma sela e além disso, $d_R > 0$, $b_L - d_L < 0$ e $b_R + d_R > 0$. Assim por (3.7), temos

$$2d_M = (b_R + d_R) - (b_L - d_L) \tag{3.11}$$

que é positivo. Assim, $d_M > 0$ o que implica que o equilíbrio central é anti-sela.

Se $d_L > 0$, então o equilíbrio da zona esquerda é anti-sela e além disso, temos que $d_R < 0$, $b_L - d_L > 0$ e $b_R + d_R < 0$. De (3.11), temos que $d_M < 0$. Portanto o equilíbrio da zona central é uma sela. O caso em que $d_L(b_L - d_L) < 0$ é análogo.

Para a afirmação do item b) como o sistema possui três equilíbrios, estamos no caso correspondente a sentença c) da proposição anterior. Se $d_L > 0$, então o equilíbrio na zona esquerda é anti-sela e além disso, $d_R > 0$, $(b_L - d_L) > 0$ e $(b_R + d_R) < 0$. Como $d_R > 0$, o equilíbrio na zona direita é anti-sela e usando (3.11), temos que $d_M < 0$, ou seja, o equilíbrio na zona central é uma sela.

Analogamente, para a afirmação do item c), se $d_L < 0$, então o equilíbrio na zona esquerda é uma sela e além disso, $d_R < 0$, $(b_L - d_L) < 0$ e $(b_R + d_R) > 0$. Como $d_R < 0$, o equilíbrio na zona direita é uma sela e usando (3.11), temos que $d_M > 0$, ou seja, o equilíbrio na zona central é do tipo anti-sela.

■

Definição 3.3.7. *Dizemos que o sistema* (3.3)-(3.5) *é quase simétrico se as dinâmicas lineares das zonas extremas se regem pelos mesmos parâmetros, ou seja,*

$$\beta_L = \beta_R = \beta, \quad d_L = d_R = d. \tag{3.12}$$

1. Neste caso, o número de parâmetros desconhecidos se reduz a 6, pois a partir das equações (3.7), chegamos a

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{a_L + a_R}{2} \quad , \quad d_M = d + \frac{b_R - b_L}{2} \\ b_M &= \frac{b_L + b_R}{2} \quad , \quad \beta_M = \beta + \frac{a_R - a_L}{2}. \end{aligned}$$

2. Podemos contar com a possibilidade de anular alguns dos parâmetros a_L, a_R ou a_M fazendo uma translação na variável v.

3. Podemos observar que nas definições anteriores introduzidas em (3.3)-(3.5) que se tivermos (3.12), então $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 0$, $i = 1, 2$, pois

$$\begin{aligned} \beta_L &= \beta - \alpha_{11} - \alpha_{21} \quad , \quad d_L = d - \alpha_{12} - \alpha_{22} \\ \beta_R &= \beta + \alpha_{11} + \alpha_{22} \quad , \quad d_L = d + \alpha_{12} + \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Assim, usando (3.12), teríamos

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0 \quad &, \quad \alpha_{12} - \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0 \quad &, \quad \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 0$, $i = 1, 2$.

4. Se para um sistema quase simétrico tivermos $a_M = b_M = 0$, então dizemos que o sistema é *simétrico*, pois pela observação 1, teremos

$$a_L = -a_R \quad , \quad b_L = -b_R.$$

Fazendo a mudança de variável $(u, v) \to (-u, -v)$, teremos que as equações dos sistemas são invariantes. Nosso problema agora possui apenas 4 parâmetros e não é compensatório realizar outra translação em v para eliminar mais algum parâmetro, pois romperia a simetria. Deste modo, cabe dar importância a seguinte definição.

Definição 3.3.8. *Chamaremos de P_1^* a uma subclasse de P^* que contém somente sistemas correspondentes a duas zonas, onde a zona central e a zona direita podem identificar-se, ou seja,*

$$a_M = a_R \quad , \quad b_M = b_R \quad , \quad \beta_M = \beta_R \quad , \quad d_M = d_R. \tag{3.13}$$

Com base na definição acima, os sistemas lineares que define a dinâmica para este caso são dados por

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \leq -1 \tag{3.14}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_M & -1 \\ d_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \geq -1 \tag{3.15}$$

com $a_L - \beta_L = a_M - \beta_M \quad , \quad b_L - d_L = b_M - d_M$ que equivale a $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ em (3.2).

Observações.

1. Notemos que para sistemas quase simétricos podemos aplicar somente os enunciados a) e c) da Proposição 3.3.5 (podem ter 1 ou 3 equilíbrios) e no caso de terem 3 equilíbrios, podemos aplicar os enunciados b) e c) da Proposição 3.3.6.

2. No caso de sistemas de duas zonas, que só podem ter 0, 1 ou 2 equilíbrios, podemos usar as hipóteses assumidas na Proposição 3.3.5, que se reduz por (3.15) a $d_L d_M (b_L - d_L) \neq 0$.

Proposição 3.3.9. *Para os sistemas de duas zonas* (3.14)-(3.15)*, com a condição* $d_L d_M (b_L - d_L) \neq 0$*, as seguintes afirmações são válidas.*

a) Se $d_L d_M > 0$*, o sistema possui somente um equilíbrio. O equilíbrio está na zona esquerda quando* $d_L(b_L - d_L) > 0$ *(equivalentemente* $d_M(b_M - d_M) > 0$*) e caso contrário na zona direita. Se* $d_L > 0$ *(equivalentemente* $d_M > 0$*) será do tipo anti-sela e caso contrário uma sela.*

b) Se $d_L d_M < 0$*, o sistema tem equilíbrios se, e somente se,* $d_L(b_L - d_L) > 0$ *(equivalentemente* $d_M(b_M - d_M) < 0$*) e neste caso, possui 2 equilíbrios (um em cada zona), dos quais um é uma sela e o outro é anti-sela.*

Demonstração. Observemos primeiramente que a condição necessária e suficiente para ter um equilíbrio na zona direita é $d_M(b_M - d_M) = d_M(b_L - d_L) < 0$, pois vimos anteriormente que existe um equilíbrio na zona central se, e somente se $-1 < -\dfrac{b_M}{d_M} < 1$ e na zona direita se e somente se $-\dfrac{b_R}{d_R}$. Como agora a dinâmica na zona direita é formada por essas duas zonas com as condições (3.13), temos que haverá um equilíbrio na zona direita se, e somente se, $-\dfrac{b_M}{d_M} > -1$.

Para o item a), se $d_L d_M > 0$, suponhamos que $d_L > 0$. Assim,

$$d_L(b_L - d_L) > 0 \Rightarrow b_L - d_L > 0 \Rightarrow b_L > d_L \Rightarrow -b_L < -d_L \Rightarrow -\frac{b_L}{d_L} < -1.$$

Portanto haverá um equilíbrio na zona esquerda que é anti-sela pois $d_L > 0$. Se $d_L < 0$, de maneira análoga teremos um equilíbrio tipo sela na zona esquerda. Também temos de maneira análoga que se $d_L(b_L - d_L) < 0$, então teremos um equilíbrio na zona direita que será anti-sela se $d_L > 0$ e sela se $d_L < 0$.

Para o item b) se $d_L d_M < 0$, suponha $d_L < 0$. Logo $d_M > 0$. Agora, $d_L(b_L - d_L) > 0 \Leftrightarrow^{(3.15)} b_L - d_L < 0$ e $b_M - d_M < 0 \Leftrightarrow b_L < d_L$ e $b_M < d_M \Leftrightarrow -\dfrac{b_L}{d_L} < -1$ e $-\dfrac{b_M}{d_M} > -1$.

Portanto teremos dois equilíbrios se, e somente se, $d_L(b_L - d_L) > 0$, um deles está na zona direita e o outro na zona esquerda. Analogamente, teremos o mesmo com $d_L > 0$. No caso em que $d_L < 0$ e $d_M > 0$, temos um equilíbrio tipo anti-sela na zona esquerda e um do tipo sela na zona direita, e teremos um equilíbrio tipo sela na zona esquerda e um tipo anti-sela na zona direita caso contrário.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Órbita Periódica no Infinito

Nesta capítulo, daremos condições para que o sistema (3.3)-(3.5) tenha órbita periódica no infinito, caracterizaremos sua possível perda de hiperbolicidade e daremos estimativas da amplitude e período do ciclo limite que eventualmente bifurca a partir de tal órbita periódica não hiperbólica.

4.1 A Transformação de Bendixson

Definição 4.1.1. *Chamaremos de transformação de Bendixson a seguinte mudança de variável*

$$u = \frac{\sin\theta}{r} \quad , \quad v = -\frac{\cos\theta}{r}. \tag{4.1}$$

Lema 4.1.2. *Para os sistemas* (3.3)-(3.5)*, o infinito é uma órbita periódica se, e somente se, as duas condições abaixo se verificam:*

$$\beta_L^2 - 4d_L < 0 \text{ e } \beta_R^2 - 4d_R < 0.$$

Demonstração. Pela transformação de Bendixson, temos o seguinte sistema

$$\dot{r} = -r^3(u\dot{u} + v\dot{v}), \quad \dot{\theta} = r^2(u\dot{v} - \dot{u}v),$$

Tal sistema leva o sistema (3.3)-(3.5) no sistema abaixo em $\mathbb{R}\times S^1$, definido por partes

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r[\beta_\Lambda \sin^2\theta + (1-d_\Lambda)\sin\theta\cos\theta + a_\Lambda r\sin\theta - b_\Lambda r\cos\theta], \\ \dot{\theta} &= d_\Lambda \sin^2\theta + \beta_\Lambda \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + a_\Lambda r\cos\theta + b_\Lambda r\sin\theta, \end{aligned} \tag{4.2}$$

para

$$D_\Lambda = \begin{cases} \{(r,\theta) : 0 \le r \le \sin\theta, \quad \theta\in[0,\pi]\} & , \quad \Lambda = R \\ \{(r,\theta) : r \ge |\sin\theta|, \quad \theta\in[0,2\pi]\} & , \quad \Lambda = M \\ \{(r,\theta) : 0 \le r \le -\sin\theta, \quad \theta\in[\pi,2\pi]\} & , \quad \Lambda = L \end{cases} \tag{4.3}$$

Temos obviamente que $r=0$ deixa o fluxo em $\mathbb{R}\times S^1$ invariante e

$$\dot{\theta}_{|r=0} = d_\Lambda \sin^2\theta + \beta_\Lambda \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta.$$

Contudo, teremos uma órbita periódica no infinito se, e somente se, a expressão acima tem sinal constante para $\theta \in [0,2\pi]$. Para $\Lambda = M$, teremos que considerar somente os pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, pois são os únicos pontos pertencentes a órbita periódica e ainda para os mesmos pontos $\dot{\theta} = 1$. Assim, uma condição necessária e suficiente para a existência de órbita periódica no infinito é que

$\dot{\theta}_{|r=0} = d_\Lambda \sin^2\theta + \beta_\Lambda \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta > 0$, para $\theta\in[0,\pi]$, $\quad \Lambda\in\{L,R\}$,
levando-se em conta que quando $\Lambda = L$, então $\theta\in[\pi,2\pi]$ e fazendo a translação $\theta\to\theta-\pi$ equivale a mudança $(\sin\theta,\cos\theta)\to(-\sin\theta,-\cos\theta)$.

Observemos que o primeiro membro da desigualdade anterior é uma forma quadrática em $(\sin\theta,\cos\theta)$, assim concluímos facilmente que devemos ter $\beta_\Lambda^2 - 4d_\Lambda < 0, \quad \Lambda\in\{L,R\}$.

■

Observações.

- O Lema anterior nos diz que existe uma órbita periódica no infinito se, e somente se, os retratos de fase nas zonas laterais são do tipo foco.
- As equações (4.2)-(4.3) juntamente com as condições (3.6) definem um sistema contínuo em $\mathbb{R}\times S^1$.
- A observação anterior juntamente com a existência de órbita periódica no infinito, garante que em torno de tal órbita podemos definir uma aplicação de Poincaré.

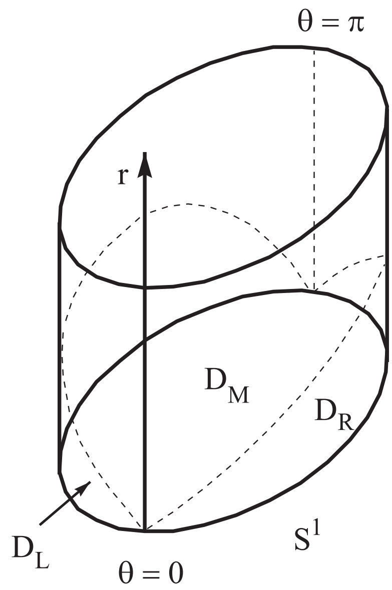

Figura 4.1: A transformação de Bendixson define um sistema equivalente em $\mathbb{R} \times S^1$.

Podemos usar resultados clássicos de diferenciabilidade com respeito as condições iniciais tal que se as condições do Lema (4.1.2) se verificam, então existe $\rho > 0$ tal que para cada $\xi \in [0, \rho)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, teremos garantido a existência de uma função $r(\theta, \xi)$, solução de (4.2)-(4.3) com $r(0, \xi) = \xi$.

4.2 A Aplicação de Primeiro Retorno

Definição 4.2.1. *Definimos a aplicação de Poincaré por*

$$\begin{array}{rcl} h : [0, \rho) & \to & \mathbb{R}^+ \\ \xi & \mapsto & r(2\pi, \xi), \end{array}$$

que é analítica em seu domínio, pois é composição de funções analíticas e satisfaz $h(0) = 0$. A órbita periódica no infinito é não hiperbólica quando $h'(0) = 1$.

- Com o objetivo de reduzir os cálculos, em vista das equações (4.2), as expressões se simplificam quando $d_\Lambda = 1$. Assumindo como válidas as condições do Lema (4.1.2), é imediato deduzir que d_L e d_R são positivos (em relação a d_M não podemos concluir nada).

- Podemos fazer uma mudança de variável apropriada tanto na variável u como no tempo, deixando inalterada a variável v e distinguir dois casos segundo o sinal de u para melhor usar a aplicação de Poincaré.

- Podemos decompor h em duas semi-aplicações da forma $h_L \circ h_R$,

$$\begin{aligned} h_L : [0,\rho) &\to \mathbb{R}^+ \\ \xi &\mapsto r(\pi,\xi) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h_R : [0,\rho) \to \mathbb{R}^+ \\ \xi \mapsto r(\pi,\xi)\,, \end{aligned}$$

onde agora $\tilde{r}(\theta,\eta)$ é solução de (4.2)-(4.3) tal que $\tilde{r}(\pi,\eta)=\eta$.

Faremos as seguintes mudanças no sistema (4.2)-(4.3).

Definição 4.2.2. *Para $u \le 0$, definimos (t indica variável temporal)*

$$u_L = \sqrt{d_L}\,u, \quad t_L = \sqrt{d_L}\,t.$$

Pela definição anterior, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\,u_L}{d\,t_L} &= \frac{du}{dt} = a_L + \frac{\beta_L}{\sqrt{d_L}}u_L - v \\ \frac{d\,v}{d\,t_L} &= \frac{1}{\sqrt{d_L}}.\frac{dv}{dt} = \frac{b_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{d_L}{\sqrt{d_L}}u = \frac{b_L}{\sqrt{d_L}} + u_L, \end{aligned}$$

para $u \le -1$. Para $-1 \le u \le 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\,u_L}{d\,t_L} &= \frac{du}{dt} = a_M + \frac{\beta_M}{\sqrt{d_L}}u_L - v \\ \frac{d\,v}{d\,t_L} &= \frac{b_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{d_M}{d_L}u_L. \end{aligned}$$

Definição 4.2.3. *Definimos* $b_{LL} = \dfrac{b_L}{\sqrt{d_L}}$, $b_{ML} = \dfrac{b_M}{\sqrt{d_L}}$, $\beta_{LL} = \dfrac{\beta_L}{\sqrt{d_L}}$, $\beta_{ML} = \dfrac{\beta_M}{\sqrt{d_L}}$, $d_{ML} = \dfrac{d_M}{d_L}$.

Pela definição anterior, obtemos os seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \dot{u_L} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L \\ b_{LL} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{LL} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{para } u_L \le -\sqrt{d_L} \le 0, \tag{4.4}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u_L} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_{LL} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{ML} & -1 \\ d_{ML} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{para} - \sqrt{d_L} \le u_L \le 0.$$

Analogamente, temos a seguinte definição.

Definição 4.2.4. *Para $u \geq 0$, definimos*

$$u_R = \sqrt{d_R}\,u, \quad t_R = \sqrt{d_R}\,t.$$

Do mesmo modo, definimos

Definição 4.2.5. *Sejam* $b_{RR} = \dfrac{b_R}{\sqrt{d_R}}$, $b_{MR} = \dfrac{b_M}{\sqrt{d_R}}$, $\beta_{RR} = \dfrac{\beta_R}{\sqrt{d_R}}$, $\beta_{MR} = \dfrac{\beta_M}{\sqrt{d_R}}$, $d_{MR} = \dfrac{d_M}{\sqrt{d_R}}$.

Obtemos os seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \dot{u_R} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R \\ b_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{RR} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{para } u_R \geq \sqrt{d_R} > 0, \tag{4.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u_R} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M \\ b_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{MR} & -1 \\ d_{MR} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{para } 0 \leq u_R \leq \sqrt{d_R}.$$

Utilizando novamente a transformação de Bendixson, podemos escrever o sistema (4.2)-(4.3) na seguinte forma equivalente do ponto de vista das semiaplicações h_L, h_R (e portanto de h):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r[\beta_{RR}\sin^2\theta + a_R r\sin\theta - b_{RR} r\cos\theta], \\ \dot{\theta} &= 1 + \beta_{RR}\sin\theta\cos\theta + a_R r\cos\theta + b_{RR} r\sin\theta, \end{aligned} \tag{4.6}$$

para o domínio $D_{RR} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sin\theta/\sqrt{d_R}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}$;

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r[\beta_{MR}\sin\theta + (1-d_{MR})\sin\theta\cos\theta + a_M r\sin\theta - b_{MR} r\cos\theta], \\ \dot{\theta} &= d_{MR}\sin^2\theta + \beta_{MR}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + a_M r\cos\theta + b_{MR} r\sin\theta, \end{aligned} \tag{4.7}$$

para o domínio $D_{MR} = \{(r,\theta) : r \geq \sin\theta/\sqrt{d_R}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}$;

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r[\beta_{ML}\sin\theta + (1-d_{ML})\sin\theta\cos\theta + a_M r\sin\theta - b_{ML} r\cos\theta], \\ \dot{\theta} &= d_{ML}\sin^2\theta + \beta_{ML}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + a_{ML} r\cos\theta + b_{ML} r\sin\theta, \end{aligned} \tag{4.8}$$

para o domínio $D_{ML} = \{(r,\theta) : r \geq -\sin\theta/\sqrt{d_L}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$; e por último

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r[\beta_{LL}\sin^2\theta + a_L r\sin\theta - b_{LL} r\cos\theta], \\ \dot{\theta} &= 1 + \beta_{LL}\sin\theta\cos\theta + a_L\cos\theta + b_{LL} r\sin\theta, \end{aligned} \tag{4.9}$$

para o domínio $D_{LL} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq -\sin\theta/\sqrt{d_L}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Agora estamos considerando 4 domínios distintos no lugar de 3, dados pelas equações (4.2)-(4.3) e temos uma descontinuidade na velocidade radial para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (basta compararmos os campos vetoriais D_{ML} e D_{MR}). Contudo essas equações permitem calcular as derivadas de h_L e h_R de uma só vez. De fato, se fizermos a mudança $\theta \to \theta - \pi$ em D_{ML} e D_{LL}, teremos que $(\sin\theta, \cos\theta) \to (-\sin\theta, -\cos\theta)$ e os sistemas a considerar são exatamente os mesmos que em D_{MR} e D_{RR} se trocarmos todos os subíndices R por L e trocarmos o sinal de a_M, a_L, b_{ML} e b_{LL}.

O próximo resultado nos dará uma ferramenta necessária para o cálculo das primeiras derivadas das aplicações h_L e h_R em torno de 0.

Proposição 4.2.6. *Seja um domínio $D = \{(r, \theta) \in [0, \rho) \times [\theta_1, \theta_2]\}$, dividido pelo gráfico de uma função de classe C^1, $\bar{\theta} : [0, \rho) \to [\theta_1, \theta_2]$ em dois subdomínios $D_1 = \{(r, \theta) : r \in [0, \rho),\ \theta \in [\theta_1, \bar{\theta}(r)]\}$ e $D_2 = \{(r, \theta) : r \in [0, \rho),\ \theta \in [\bar{\theta}(r), \theta_2]\}$.*

Suponhamos que em tais domínios teremos definido um sistema

$$\frac{dr}{d\theta} = S(r, \theta) = \begin{cases} S_1(r, \theta), & \text{para} \quad (r, \theta) \in D_1, \\ S_2(r, \theta), & \text{para} \quad (r, \theta) \in D_2 \setminus D_1. \end{cases} \tag{4.10}$$

de maneira que tanto $S_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ como $S_2 : D_2 \setminus D_1 \to \mathbb{R}$ sejam suficientemente diferenciáveis e o sistema goza de existência e unicidade de soluções em todo domínio D. Além disso, assumimos que:

a) $S(0, \theta) = 0$, para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, de maneira que para todo $\xi \in [0, \rho)$ existe uma única solução contínua $r(\theta, \xi)$ definida em $[\theta_1, \theta_2]$, para podermos definir a aplicação de Poincaré

$$\begin{aligned} h : [0, \rho) &\to \mathbb{R}^+ \\ \xi &\mapsto h(\xi) = r(\theta_2, \xi), \end{aligned}$$

com $h(0) = 0$.

b) Sobre o gráfico de $\bar{\theta}$ se verifica a condição de transversalidade $S_1(\xi, \bar{\theta}(\xi))\dfrac{d\bar{\theta}}{dr}(\xi) \neq 1$, para todo $\xi \in [0, \rho)$.

Então, introduzindo as funções

$$E(\xi,\theta_1,\theta) = \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\partial S}{\partial r}(r(\phi,\xi),\phi)d\,\phi\right),$$
$$D(\xi,\theta) = E(\xi,\theta_1,\theta)\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(r(\theta,\xi),\theta),$$

se tem

$$h^{'}(\xi) = \frac{1 - S_2(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}^{'}(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}^{'}(h_1(\xi))}.E(\xi,\theta_1,\theta_2) \tag{4.11}$$

e consequentemente

$$h^{'}(0) = E(0,\theta_1,\theta_2) \tag{4.12}$$

Se além disso o campo vetorial é contínuo em D, a derivada da segunda ordem de h é dada por

$$\begin{aligned} h^{''}(\xi) &= E(\xi,\theta_1,\theta_2)\int_{\theta_1}^{\theta_2} D(\xi,\theta)d\,\theta + \\ &+ E(\xi,\theta_1,\theta_2)\frac{E(\xi,\theta_1,\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}^{'}(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}^{'}(h_1(\xi))} \times \\ &\times \left(\frac{\partial\,S_1}{\partial\,r}(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi))) - \frac{\partial\,S_2}{\partial\,r}(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi))\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

e portanto

$$\begin{aligned} h^{''}(0) &= E(0,\theta_1,\theta_2)\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} D(0,\theta)d\,\theta + \right. \\ &+ \left. E(0,\theta_1,\bar{\theta}(0))\bar{T}^{'}(0)\left(\frac{\partial\,S_1}{\partial\,r}(0,\bar{\theta}(0)) - \frac{\partial\,S_2}{\partial\,r}(0,\bar{\theta}(0))\right)\right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

Demonstração. Usando as hipóteses, podemos assumir a existência de uma função $\theta_* : [0,\rho) \to [\theta_1,\theta_2]$ que define o ângulo de corte das órbitas com a curva $\bar{\theta}([0,\rho))$, onde

$$\theta_*(\xi) = \bar{\theta}(r(\theta_*(\xi),\xi))$$

e θ_* é pelo menos de classe C^1. Também, podemos definir uma aplicação de Poincaré intermediária da forma

$$\xi \mapsto h_1(\xi) = r(\bar{\theta}(\xi),\xi)),$$

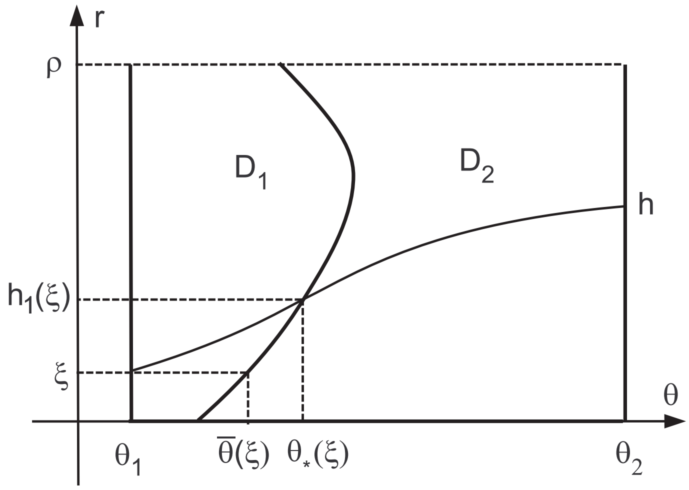

Figura 4.2: Situação considerada na Proposição 4.2.6.

veja figura 4.2. Agora consideremos o sistema $\dfrac{d\,r}{d\,\theta} = S_1(r,\theta)$, com $\theta_1 \le \theta \le \bar{\theta}(r)$ e sua solução $r_1(\theta,\xi)$ satisfazendo $r_1(0,\xi) = \xi$. Tendo em vista que $\theta_* = \bar{\theta}(h_1(\xi))$, então deduzimos que

$$\theta_*'(\xi) = \bar{\theta}'(h_1(\xi)).h_1'(\xi) \tag{4.15}$$

Também temos que

$$h_1'(\xi) = \frac{\partial r_1}{\partial\theta}(\theta_*(\xi),\xi).\theta_*'(\xi) + \frac{\partial r_1}{\partial\xi}(\theta_*(\xi),\xi). \tag{4.16}$$

Substituindo a expressão (4.15) em (4.16) chegamos a

$$h_1(\xi) = \frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial\xi}(\theta_*(\xi),\xi)}{1 - \dfrac{\partial r_1}{\partial\theta}(\theta_*(\xi),\xi).\bar{\theta}'(h_1(\xi))}. \tag{4.17}$$

Como $r_1(\theta,\xi)$ é solução de $S_1(r,\theta)$, temos que

$$\frac{dr_1}{d\theta}(\theta_*(\xi),\xi) = S_1(r_1(\theta_*(\xi),\xi),\theta_*(\xi)) = S_1(h_1(\xi),\theta_*(\xi)).$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial r_1}{\partial\xi}(\theta,\xi)\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{dr_1}{d\theta}(\theta,\xi)\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}S_1(r_1(\theta,\xi),\theta) = \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)\frac{\partial r_1}{\partial\xi}(\theta,\xi),$$

e como para todo ξ,

$$\frac{\partial r_1}{\partial\xi}(0,\xi) = 1,$$

chegamos a seguinte fórmula conhecida

$$\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta,\xi) = \exp\left(\int_0^{\theta} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\phi,\xi),\phi)d\phi\right). \tag{4.18}$$

Assim, podemos escrever

$$h_1(\xi) = \frac{\exp\left(\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta\right)}{1 - S_1(h_1(\xi),\theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}, \tag{4.19}$$

onde o denominador não se anula devido a hipótese de transversalidade.

Agora, consideremos o sistema $\dfrac{dr}{d\theta} = S_2(r,\theta)$, para $\bar{\theta}(r) \leq \theta \leq \theta_2$ e sua solução $r_2(\theta,\eta)$, satisfazendo $r_2(\bar{\theta}(\eta),\eta) = \eta$. Como $r_2(\theta,\eta)$ é solução de $S_2(r,\eta)$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta}(\bar{\theta}(\eta),\eta) = S_2(\eta,\bar{\theta}(\eta))$$

Derivando $r_2(\bar{\theta}(\eta),\eta) = \eta$ em ambos os lados da igualdade com respeito a η e usando a expressão acima, obtemos

$$\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\bar{\theta}(\eta),\eta) = 1 - S_2(\eta,\bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta).$$

Do mesmo modo que obtemos (4.18), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,\eta)\right) &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{dr_2}{d\theta}(\theta,\eta)\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}S_2(r_2(\theta,\eta),\theta) = \\
&= \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta,\eta),\theta)\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,\eta), \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Se definirmos $h_2(\eta) = r_2(\theta_2,\eta)$ e integrarmos entre $\bar{\theta}(\eta)$ e θ_2, temos

$$h_2'(\eta) = \Big(1 - S_2(\eta,\bar{\theta}(\eta))\bar{\theta}'(\eta)\Big)\exp\left(\int_{\bar{\theta}(\eta)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta,\eta),\theta)d\theta\right)$$

Agora temos que $h(\xi) = h_2(h_1(\xi))$ e identificando $\eta = h_1(\xi)$, $\theta_*(\xi) = \bar{\theta}(\eta)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
h'(\xi) &= h_2'(h_1(\xi)).h_1'(\xi) = \frac{1 - S_2(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1 - S_1(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \times \\
&\times \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta,h_1(\xi)),\theta)d\theta\right)
\end{aligned}$$

e acabamos de provar (4.11).

Agora como $h_1(0) = 0$, $S(0,\theta) = 0$ e $r(\theta,0) = 0$ para $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, temos

$$\begin{aligned} h'(0) &= = \frac{1 - S_2(h_1(0), \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))}{1 - S_1(h_1(0), \bar{\theta}(h_1(0)))\bar{\theta}'(h_1(0))} \times \\ &\times \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(0)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,0),\theta)d\theta + \int_{\theta_*(0)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta,h_1(0)),\theta)d\theta\right) = \\ &= E(0,\theta_1,\theta_2), \end{aligned}$$

e assim, obtemos (4.12).

Ao supor que o campo $S(r,\theta)$ é contínuo, isto é, $S_1(r,\bar{\theta}(r)) = S_2(r,\bar{\theta}(r))$, para todo $0 \leq r < \rho$, teremos

$$h'(\xi) = \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta + \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta,h_1(\xi)),\theta)d\theta\right).$$

Derivando a expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= h'(\xi)\exp\left[\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)} \frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2}(r_1(\theta,\xi),\theta)\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta,\xi)d\theta + \right.\\ &+ \int_{\theta_*(\xi)}^{\theta_2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2}(r_2(\theta,h_1(\xi)),\theta)\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,h_1(\xi))h_1'(\xi)d\theta + \\ &+ \left.\theta_*'(\xi) \times \left(\frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta_*(\xi),\xi),\theta_*(\xi)) - \frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\theta_*(\xi),h_1(\xi)),\theta_*(\xi))\right)\right]. \end{aligned}$$

Podemos notar que a expressão anterior pode ser escrita em forma mais compacta mediante integrais que são divididas em intervalos adequados. Usando

$$r(\theta,\xi) = \begin{cases} r_1(\theta,\xi), & \text{para} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_*(\xi) \\ r_2(\theta,\xi), & \text{para} \quad \theta_*(\xi) \leq \theta \leq \theta_2, \end{cases}$$

temos que $h'(\xi) = E(\xi,\theta_1,T_2)$. Observemos que

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta,\xi), & \text{para} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_*(\xi) \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,h_1(\xi)).h_1(\xi), & \text{para} \quad \theta_*(\xi) \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases} \tag{4.21}$$

De (4.17) e (4.19), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi),\xi)}{1-\dfrac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi),\xi)\bar{\theta}'(h_1(\xi))} &= \frac{\exp\left(\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)}\frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta\right)}{1-\dfrac{\partial r_1}{\partial \theta}(\theta_*(\xi),\xi)\bar{\theta}'(h_1(\xi))} \Rightarrow \\
\frac{\partial r_1}{\partial \xi}(\theta_*(\xi),\xi) &= \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)}\frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta,\xi) &= \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{\partial S_1}{\partial r}(r(\theta,\xi),\theta)d\theta\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta,\xi) &= E(\xi,\theta_1,\theta), \text{ para } \quad \theta_1\le\theta\le\theta_*(\xi). \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Integrando (4.20) de $\theta_*(\xi)$ a θ, temos (lembre-se que $n = h_1(\xi)$)

$$\frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,h_1(\xi)) = (1-S_2(h_1(\xi),\theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi)))\times\exp\left(\int_{\bar{\theta}(\xi)}^{\theta}\frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\phi,h_1(\xi)),\phi)d\phi\right)$$

Por (4.19) e (4.21) e a continuidade do campo vetorial, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta,\xi) &= \frac{\partial r_2}{\partial \eta}(\theta,h_1(\xi)).h_1'(\xi) = (1-S_2(h_1(\xi),\theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi)))\times \\
&\times \exp\left(\int_{\bar{\theta}(\xi)}^{\theta}\frac{\partial S_2}{\partial r}(r_2(\phi,h_1(\xi)),\phi)d\phi\right)\times\frac{\exp\left(\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_*(\xi)}\frac{\partial S_1}{\partial r}(r_1(\theta,\xi),\theta)d\theta\right)}{(1-S_2(h_1(\xi),\theta_*(\xi))\bar{\theta}'(h_1(\xi)))} = \\
&= \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{\partial S}{\partial r}(r(\phi,\xi),\phi)d\,\phi\right), \text{ para } \quad \theta_*(\xi)\le\theta\le\theta_2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}(\theta,\xi) = E(\xi,\theta_1,\theta), \quad \theta_*(\xi)\le\theta\le\theta_2. \qquad (4.23)$$

Usando (4.15), (4.19), (4.21), (4.22) e (4.23), concluímos que

$$\begin{aligned}
h''(\xi) &= E(\xi,\theta_1,\theta_2)\int_{\theta_1}^{\theta_2}D(\xi,\theta)d\,\theta + \\
&+ E(\xi,\theta_1,\theta_2)\frac{E(\xi,\theta_1,\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}{1-S_1(h_1(\xi),\bar{\theta}(h_1(\xi)))\bar{\theta}'(h_1(\xi))}\times \\
&\times \left(\frac{\partial\, S_1}{\partial\, r}(h_1(\xi),\theta_*(\xi)) - \frac{\partial\, S_2}{\partial\, r}(h_1(\xi),\theta_*(\xi))\right).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos (4.13) e para obter (4.14) basta tomar $\xi = 0$ em (4.13).

■

Para aplicarmos a proposição anterior em nosso problema, precisamos primeiramente conhecer o valor de certas integrais definidas que aparecerão várias vezes. Assim, vejamos os seguintes resultados.

Lema 4.2.7. *Para* $|p| < 1$*, temos*

$$\int_0^\pi \frac{2\sin^2\theta\, d\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{4.24}$$

Demonstração. Para $p = 0$, o Lema é trivial. Suponhamos que $p \neq 0$. Aplicando a Fórmula 3.613.1 de [8] com $n = 0$, temos que

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{1+p\cos\phi} = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Agora fazendo $\theta = 2\phi$, temos para a segunda igualdade que

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Com respeito a primeira igualdade, basta observar que

$$\frac{2\sin^2\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta} + \frac{1}{1+2p\sin\theta\cos\theta},$$

e que a integral do primeiro termo é nula, pois tem como primitiva
$-(1/2p)\log(1+2p\sin\theta\cos\theta)$.

■

Proposição 4.2.8. *Para* $|p| < 1$*, temos*

$$\Gamma_C(p) = \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\, e^{-\int_0^\theta \frac{2p\sin^2\phi d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}} d\theta = 0, \tag{4.25}$$

$$\Gamma_S(p) = \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\, e^{-\int_0^\theta \frac{2p\sin^2\phi d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}} d\theta = 1 + e^{-\frac{\pi p}{\sqrt{1-p^2}}}. \tag{4.26}$$

Demonstração. Se usarmos a identidade

$$\int_0^\theta \frac{-2p\sin^2\phi\, d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi} d\theta = \frac{1}{2}\log(1+2p\sin\theta\cos\theta) - \int_0^\theta \frac{p}{1+2p\sin\phi\cos\phi}\, d\phi$$

(ver dem. do Lema anterior) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)=\Gamma_C(p)+i\Gamma_S(p) &= \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\; e^{-\int_0^\theta \frac{2p\sin^2\phi d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}d\theta} + \\
&+ \; i\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\; e^{-\int_0^\theta \frac{2p\sin^2\phi d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}d\theta} = \\
&= \int_0^\pi \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\; e^{-\int_0^\theta \frac{2p\sin^2\phi d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}d\theta} = \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{i\theta}}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^2}\; e^{\frac{1}{2}\log(1+2p\sin\theta\cos\theta)-\int_0^\theta \frac{pd\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}d\theta} = \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{i\theta}}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^{3/2}}\; e^{-\int_0^\theta \frac{pd\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}d\theta}.
\end{aligned}$$

Para $p=0$, temos obviamente que

$$\Gamma(0)=\int_0^\pi e^{i\theta}d\theta = 2i.$$

Assim, $\Gamma_C(0)=0$ e $\Gamma_S(0)=2$. Agora, suponhamos que $p\neq 0$ e definimos a seguinte função

$$v(\theta,p)=\exp\left(-\int_o^\theta \frac{p\; d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}\right). \tag{4.27}$$

Temos que

$$v'(\theta,p)=-\frac{p}{1+2p\sin\theta\cos\theta}v(\theta,p).$$

Observemos assim que para $p\neq 0$

$$\Gamma(p)=-\frac{1}{p}\int_0^\pi \frac{e^{i\theta}}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^{1/2}}v'(\theta,p)\,d\theta$$

Usando um processo de integração por partes com $u=\dfrac{e^{i\theta}}{(1+2p\sin\theta\cos\theta)^{1/2}}$ e $dv = v'(\theta,p)\,d\theta$, temos que

$$\Gamma(p)=-\frac{1}{p}\left[uv|_0^\pi - \int_0^\pi v\,du\right].$$

Assim,

$$\Gamma(p)=\frac{1+v(\pi,p)}{p}+i\,\Gamma_C(p)-\overline{\Gamma(p)}.$$

Agora, igualando as partes imaginárias, temos

$$\Gamma_S(p)=\frac{1}{p}\,\Gamma_C(p)+\Gamma_S(p),$$

garantindo que $\Gamma_C(p)=0$.

Igualando as partes reais, temos

$$\Gamma_C(p) = \frac{1+v(\pi,p)}{p} - \frac{\Gamma_S(p)}{p} - \Gamma_C(p).$$

Como $\Gamma_C(p) = 0$, temos

$$\Gamma_S(p) = 1 + v(\pi,p) = 1 + \exp\left(-\int_0^\theta \frac{p\,d\phi}{1+2p\sin\phi\cos\phi}\right) = 1 + e^{-\frac{\pi p}{\sqrt{1-p^2}}}.$$

■

Agora, pelas proposições 4.2.6 e 4.2.8, temos condições de calcular as derivadas das semi-aplicações h_L e h_R, o que é o objetivo da seguinte proposição.

Proposição 4.2.9. *Assumindo que* $|\beta_{\Lambda\Lambda}| < 2$*, para* $\Lambda \in \{L, R\}$*, temos que*

$$h_\Lambda'(0) = \exp\left(-\frac{\pi\beta_{\Lambda\Lambda}}{\sqrt{4-\beta_{\Lambda\Lambda}^2}}\right), \tag{4.28}$$

$$h_\Lambda''(0) = \pm 2(a_\Lambda - b_{\Lambda\Lambda}\,\beta_{\Lambda\Lambda})h_\Lambda'(0)(1+h_\Lambda'(0)), \tag{4.29}$$

onde a segunda expressão deve tomar-se $+$ *e* $-$*, para* $\Lambda = L$ *e* $\Lambda = R$*, respectivamente.*

Demonstração. Para demonstrar, trabalharemos com h_R e usaremos a observação referente a Definição 4.2.5 para concluir para h_L.

Relembrando (4.6) e (4.7), temos que

$$\frac{dr}{d\theta} = S_{RR}(r,\theta) = -r\frac{\beta_{RR}\sin^2\theta + r(a_R\sin\theta - b_{RR}\cos\theta)}{1+\beta_{RR}\sin\theta\cos\theta + r(a_R\cos\theta + b_{RR}\sin\theta)}$$

para o domínio D_{RR}, e

$$\frac{dr}{d\theta} = S_{MR}(r,\theta) = -r\frac{\beta_{MR}\sin^2\theta + (1-d_{MR})\sin\theta\cos\theta + r(a_M\sin\theta - b_{MR}\cos\theta)}{d_{MR}\sin^2\theta + \beta_{MR}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + r(a_M\cos\theta + b_{MR}\sin\theta)}$$

para o domínio D_{MR}, dando origem a um sistema suave por partes e Lipschitziano para $|\beta_{RR}| < 2$.

Iremos usar como ferramenta principal a Proposição 4.2.6. Para aplicá-la, vamos decompor a aplicação de Poincaré h_R nas duas que se segue:

$$\begin{aligned} \xi &\mapsto h_{R,1}(\xi) = r(\pi/2,\xi), \text{ para } \xi \in [0,\rho) \text{ com } \rho << 1, \\ \eta &\mapsto h_{R,2}(\xi) = r(\pi,\xi), \text{para } \xi \text{ tal que } \eta = \mathrm{r}(\pi/2,\xi), \end{aligned}$$

$\eta \in [0, r(\pi/2, \rho))$, onde $r(\theta, \xi)$ é a solução, satisfazendo $r(0, \xi) = \xi$.

Observemos que $h_{R,1}$ se aplica ao intervalo $[0, \rho)$ da geratriz $\{\theta = 0\}$ até a geratriz $\{\theta = \pi/2\}$. Analogamente, $h_{R,2}$ se aplica ao intervalo $[0, r(\pi/2, \rho))$ da geratriz $\{\theta = \pi/2\}$ até a geratriz $\{\theta = \pi\}$. Também temos que $h_{R,1}(0) = 0$ e $h_{R,2}(0) = 0$, pois $r(\theta, 0) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Vemos que $h_{R,1}$ faz uso do fluxo somente para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, onde $S(r, \theta)$ é suave por partes e coincide com $S_{MR}(r, \theta)$, para $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}(r) = \sin^{-1}(r\sqrt{d_R})$ e com S_{RR} para $\bar{\theta}(r) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Para comprovar a condição de transversalidade para $S_{MR}(r, \theta)$, observemos que $\bar{\theta}'(0) = \sqrt{d_R}$ e $S_{MR}(0, 0) = 0$, já que $\bar{\theta}'(r) = \frac{\sqrt{d_R}}{\sqrt{1 - r^2 d_R}}$. Se $S_{MR}(\xi, \bar{\theta}(\xi)).\frac{d\bar{\theta}}{dr}(\xi) = 1$, para algum $\xi \in [0, \rho)$, então teríamos que $S_{MR}(\xi, \bar{\theta}(\xi)) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2 d_R}}{\sqrt{d_R}}$ e assim, $S_{MR}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{d_R}}$, o que é absurdo!

Usando (4.12), temos que

$$h'_{R,1}(0) = E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right),$$

onde,

$$E(0, 0, \theta) = \exp\left(\int_0^\theta \frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0, \phi)\, d\phi\right), \tag{4.30}$$

já que o valor da derivada parcial de S_{MR} não contribui ao valor da integral, pois

$$\int_0^\theta \frac{\partial S}{\partial r}(0, \phi)\, d\phi = \int_0^{\bar{\theta}(0)=0} \frac{\partial S_{MR}}{\partial r}(0, \phi)\, d\phi + \int_{\bar{\theta}(0)=0}^\theta \frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0, \phi)\, d\phi = \int_0^\theta \frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0, \phi)\, d\phi.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0, \theta) &= -\frac{\beta_{RR} \sin^2\theta}{1 + \beta_{RR}\sin\theta\cos\theta} && (4.31)\\
\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0, \theta) &= -2\frac{(a_R - b_{RR}\beta_{RR})\sin\theta - b_{RR}\cos\theta}{(1 + \beta_{RR}\sin\theta\cos\theta)^2} && (4.32)\\
\frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0, 0) &= \frac{\partial S_{MR}}{\partial r}(0, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $D(0, \theta) = E(0, 0, \theta)\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0, \theta)$ e portanto,

$$h''_{R,1}(0) = E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}(0, \theta)E(0, 0, \theta)\, d\theta = E\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0, \theta)E(0, 0, \theta)\, d\theta.$$

Agora, se aplicarmos a Proposição 4.2.6 a $h_{R,2}$, todos os cálculos são similares, considerando $\bar{\theta}(r) = \pi - \sin^{-1}(r\sqrt{d_R})$, $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = \pi$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} h'_{R,2}(0) &= E\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)\\ D(0,\theta) &= E\left(0,\frac{\pi}{2},\theta\right)\frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0,\theta)\\ h''_{R,2}(0) &= E\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,\frac{\pi}{2},\theta\right)\,d\theta \end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{aligned} h'_R(0) &= h'_{R,2}(0).h'_{R,1}(0)\\ h''_R(0) &= h''_{R,2}(0).h'_{R,1}(0)^2 + h'_{R,2}(0).h''_{R,1}(0) \end{aligned}$$

e que $E\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right).E\left(0,\frac{\pi}{2},\theta\right) = E\left(0,0,\theta\right)$, temos

$$\begin{aligned} h'_R(0) &= E\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right).E\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right) = E\left(0,0,\pi\right) \qquad (4.33)\\ h''_R(0) &= E\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,\frac{\pi}{2},\theta\right)\,d\theta.E\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right)^2 +\\ &+ E\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)E\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,0,\theta\right)\,d\theta =\\ &= E\left(0,0,\pi\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,\frac{\pi}{2},\theta\right)E\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right)\,d\theta +\\ &+ E\left(0,0,\pi\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,0,\theta\right)\,d\theta =\\ &= E\left(0,0,\pi\right)\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 S_{RR}}{\partial r^2}(0,\theta)E\left(0,0,\theta\right)\,d\theta. \qquad (4.34) \end{aligned}$$

Para calcular $E\left(0,0,\pi\right)$, usaremos (4.30), (4.31) e o Lema 4.24, com $p = \beta_{RR}/2$ e assim, temos

$$\begin{aligned} E\left(0,0,\pi\right) &= \exp\left(\int_0^{\pi}\frac{\partial S_{RR}}{\partial r}(0,\theta)\,d\theta\right) = \exp\left(\int_0^{\pi} -\frac{\beta_{RR}\sin^2\theta}{1+\beta_{RR}\sin\theta\cos\theta}\,d\theta\right) =\\ &= \exp\left(\int_0^{\pi} -\frac{2p\sin^2\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta}\,d\theta\right) = \exp\left(-p\int_0^{\pi}\frac{2\sin^2\theta}{1+2p\sin\theta\cos\theta}\,d\theta\right) =\\ &= \exp\left(\frac{-p\,\pi}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \exp\left(\frac{-\pi\beta_{RR}}{\sqrt{4-\beta_{RR}^2}}\right). \qquad (4.35) \end{aligned}$$

Assim, $h'(0) = \exp\left(\dfrac{-\pi\beta_{RR}}{\sqrt{4-\beta_{RR}^2}}\right)$ e a expressão (4.28) é provada.

Agora, usando (4.30) e (4.32) em (4.34), obtemos

$$h_R''(0) = -2E\,(0,0,\pi)\int_0^{\pi} \frac{(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})\sin\theta - b_{RR}\cos\theta}{(1+\beta_{RR}\sin\theta\cos\theta)^2}\exp\left(\int_0^{\theta}\frac{-\beta_{RR}\sin^2\phi\,d\phi}{1+\beta_{RR}\sin\phi\cos\phi}\right)d\theta,$$

e usando a proposição 4.2.8, com $p = \beta_{RR}/2$, temos

$$\begin{aligned} h_R''(0) &= -2E\,(0,0,\pi)\left[(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{(1+\beta_{RR}\sin\theta\cos\theta)^2}\;e^{-\int_0^{\theta}\frac{B_{RR}\sin^2\phi d\phi}{1+\beta_{RR}\sin\phi\cos\phi}}d\theta\;-\right. \\ &- \left. b_{RR}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{(1+\beta_{RR}\sin\theta\cos\theta)^2}\;e^{-\int_0^{\theta}\frac{B_{RR}\sin^2\phi d\phi}{1+\beta_{RR}\sin\phi\cos\phi}}d\theta\right] = \\ &= -2E\,(0,0,\pi)\,(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})\left[1+\exp\left(\frac{-\pi\,\beta_{RR}}{\sqrt{4-\beta_{RR}^2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora, usando (4.33) e (4.35), temos

$$h_R''(0) = -2(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})h_R'(0)(1+h_R'(0)),$$

e assim acabamos de provar (4.29).

■

A proposição que se segue é consequência imediata da proposição anterior.

Para abreviar a notação, vamos introduzir os seguintes parâmetros

$$\omega_\Lambda = \frac{1}{2}\sqrt{4d_\Lambda - \beta_\Lambda^2} \quad , \quad \gamma_\Lambda = \frac{\beta_{\Lambda\Lambda}}{\sqrt{4-\beta_{\Lambda\Lambda}^2}} = \frac{\beta_\Lambda}{\sqrt{4d_\Lambda - \beta_\Lambda^2}} = \frac{\beta_\Lambda}{2\omega_\Lambda},$$

para $\Lambda \in \{L, R\}$.

Proposição 4.2.10. *Assumindo para os sistemas* (3.3)-(3.5) *a existência de órbita periódica no ponto do infinito, uma vez transladado tal ponto a origem, mediante a transformação de Bendixson, a aplicação de Poincaré que pode-se definir em torno da origem verifica:*

$$\begin{aligned} h'(0) &= e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)} \\ h''(0) &= 2h'(0)\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(h'(0)+e^{-\pi\gamma_R}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{-\pi\gamma_R})\right]. \end{aligned}$$

Demonstração. Como $h = h_L \circ h_R$, temos que

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= h_L'(h_R(\xi)).h_R'(\xi) \\ h''(\xi) &= h_L''(h_R(\xi)).h_R'(\xi)^2 + h_L'(h_R(\xi)).h_R''(\xi), \end{aligned}$$

e como $h_R(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} h^{'}(0) &= h_L^{'}(0).h_R^{'}(0) \\ h^{''}(\xi) &= h_L^{''}(0).h_R^{'}(0)^2 + h_L^{'}(0).h_R^{''}(0). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.2.9, temos

$$\begin{aligned} h^{'}(0) &= \exp\left(\frac{-\pi\,\beta_{LL}}{\sqrt{4-\beta_{LL}^2}}\right).\exp\left(\frac{-\pi\,\beta_{RR}}{\sqrt{4-\beta_{RR}^2}}\right) = e^{-\pi\gamma_L}e^{-\pi\gamma_R} = e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)}, \\ h^{''}(0) &= 2(a_L - b_{LL}\,\beta_{LL}).e^{-\pi\gamma_L}(1+e^{-\pi\gamma_L}).e^{-2\pi\gamma_R} + \\ &+ e^{-\pi\gamma_L}\left[-2(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})e^{-\pi\gamma_R}(1+e^{-\pi\gamma_R})\right] = \\ &= 2h^{'}(0)(a_L - b_{LL}\,\beta_{LL}).e^{-\pi\gamma_R}(1+e^{-\pi\gamma_L}) - 2h^{'}(0)(a_R - b_{RR}\,\beta_{RR}).(1+e^{-\pi\gamma_R}) = \\ &= 2h^{'}(0)\left[(a_L - b_{LL}\,\beta_{LL})(h^{'}(0)+e^{-\pi\gamma_R}) - (a_R - b_{RR}\,\beta_{RR})(1+e^{-\pi\gamma_R})\right] = \\ &= 2h^{'}(0)\left[\left(a_L - \frac{b_L}{\sqrt{d_L}}.\frac{\beta_L}{\sqrt{d_L}}\right)(h^{'}(0)+e^{-\pi\gamma_R}) - \left(a_R - \frac{b_R}{\sqrt{d_R}}.\frac{\beta_R}{\sqrt{d_R}}\right)(1+e^{-\pi\gamma_R})\right] = \\ &= 2h^{'}(0)\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(h'(0)+e^{-\pi\gamma_R}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{-\pi\gamma_R})\right] \end{aligned}$$

■

4.3 Os Ciclos no Infinito

Como consequência da proposição anterior, temos que uma órbita periódica no ponto do infinito é não hiperbólica quando $\gamma_L + \gamma_R = 0$. Vemos que tal igualdade acima depende apenas das partes real e imaginária dos autovalores associados a cada zona extrema. Na situação da proposição anterior, se $h^{'}(0) = 1$, então teremos que

$$h^{''}(0) = 2(1+e^{-\pi\gamma_R})\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} - a_R + \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right),$$

e assim,

$$\operatorname{sign} h^{''}(0) = \operatorname{sign}\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} - a_R + \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right).$$

Podemos ver que a expressão anterior tem sinal definido desde que as ordenadas dos equilíbrios (reais ou imaginárias) das zonas extremas não se coincidam, pois os pontos de equilíbrios nas zonas extremas são da forma

$$\left(\frac{-b_\Lambda}{d_\Lambda}, a_\Lambda - \frac{b_\Lambda\beta_\Lambda}{d_\Lambda}\right), \quad \Lambda \in \{L, R\}.$$

A igualdade $\gamma_L + \gamma_R = 0$, equivale as duas condições $\beta_L\beta_R \leq 0$, $\dfrac{\beta_L^2}{d_L} = \dfrac{\beta_R^2}{d_R}$. Pela definição de γ_Λ, observemos que devido a função $x/\sqrt{4-x^2}$ ser ímpar e estritamente crescente em $(-2,2)$, podemos tomar como parâmetro de estabilidade da órbita periódica no infinito (no lugar de $\gamma_L + \gamma_R$) a variável

$$\alpha = \frac{\beta_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{\beta_R}{\sqrt{d_R}}\,,$$

de maneira que para $\alpha < 0$ (que corresponde a $\gamma_L + \gamma_R < 0$ e portanto a $h'(0) > 1$) a órbita periódica no infinito é instável, não hiperbólica para $\alpha = 0$ (que corresponde a $\gamma_L + \gamma_R = 0$ e portanto a $h'(0) = 1$), e estável para $\alpha > 0$ (que corresponde a $\gamma_L + \gamma_R > 0$ e portanto a $h'(0) < 1$). De fato, temos:

$$\beta_{LL} + \beta_{RR} > 0 \Rightarrow \beta_{LL} > -\beta_{RR} \Rightarrow \gamma_L > -\gamma_R \Rightarrow \gamma_L + \gamma_R > 0;$$

$$\beta_{LL} + \beta_{RR} < 0 \Rightarrow -\beta_{LL} > \beta_{RR} \Rightarrow -\gamma_L > \gamma_R \Rightarrow \gamma_L + \gamma_R < 0;$$

$$\beta_{LL} + \beta_{RR} = 0 \Rightarrow \gamma_L + \gamma_R = 0.$$

Vamos assumir em primeiro momento que o novo parâmetro

$$\nu = \left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} - a_R + \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)$$

é não nulo.

Em função destes parâmetros, poderemos caracterizar as bifurcações de ciclos limites associadas a perda de hiperbolicidade da órbita periódica no ponto do infinito. Vamos recordar primeiro um resultado relacionado a bifurcação transcrítica.

Lema 4.3.1. *Consideremos para $\delta > 0$ e suficientemente pequeno uma família a um parâmetro de aplicações $\xi \to h_\mu(\xi)$ de classe C^2, onde $|\mu| < \delta$, $\xi \in \mathbb{R}$ tal que possui um ponto fixo em $\xi = 0$, isto é, $h_\mu(0) = 0$, para todo $|\mu| < \delta$. Suponhamos que para $\mu = 0$ este ponto fixo é não hiperbólico, ou seja, $h_0'(0) = 1$.*

Se verificam-se as duas condições

$$\left.\frac{d}{d\mu}h_\mu'(0)\right|_{\mu=0} \neq 0, \quad h_0''(0) \neq 0,$$

então teremos uma bifurcação transcrítica em $\xi = 0$ para $\mu = 0$.

Em outras palavras, além do mais, do ponto fixo $\xi = 0$ podemos garantir que existe uma curva $\xi(\mu)$ de pontos fixos no plano (μ, ξ) que passa pela origem e que existe em ambos os lados de $\mu = 0$. A inclinação de tal curva na origem é dada por

$$\frac{d\xi}{d\mu}(0) = -\frac{\frac{d}{d\mu}h_\mu'(0)|_{\mu=0}}{h_0''(0)}.$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [18] pág 362-366.

Agora vamos enunciar nosso primeiro teorema sobre bifurcação de ciclos limite para os sistemas (3.3)-(3.5). Não iremos especificar quem é o parâmetro de bifurcação μ, embora se subentende que é um dos quatro $(\beta_L, \beta_R, d_L, d_R)$ pela definição do parâmetro α. A única condição que faremos é que, se elegemos um d_Λ com $\Lambda \in \{L, R\}$, o correspondente valor de β_Λ deve ser não nulo (caso contrário o parâmetro α não sofreria alteração ao variar d_Λ).

Teorema 4.3.2. *Consideremos os sistemas* (3.3)-(3.5) *com as condições* $4d_L - \beta_L^2 > 0$, $4d_R - \beta_R^2 > 0$, *e tal que* $\nu \neq 0$ *para* $\alpha = 0$. *As seguintes afirmações são válidas.*

a) Quando $\alpha = 0$, um ciclo limite (e só um) bifurca a partir da órbita periódica do ponto do infinito.

b) Se $\nu < 0$ para $\alpha = 0$, então dado $\varepsilon > 0$ e suficientemente pequeno, o ciclo limite que bifurca existe para $\alpha \in (-\varepsilon, 0)$ e é estável, e não existe quando $\alpha \in (0, \varepsilon)$.

c) Se $\nu > 0$ para $\alpha = 0$, então dado $\varepsilon > 0$ e suficientemente pequeno, o ciclo limite que bifurca existe para $\alpha \in (0, \varepsilon)$ e é instável, e não existe quando $\alpha \in (-\varepsilon, 0)$.

d) Em primeira aproximação, o ciclo limite que bifurca intercepta o eixo v nos pontos

$$v_- = -\frac{\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1 + e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1 + e^{\pi\gamma_R})}{e^{\pi\gamma_R}(e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)} - 1)},$$

e

$$v_+ = \frac{e^{-\pi\gamma_L}}{e^{\pi\gamma_R}(e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)} - 1)} \frac{\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1 + e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1 + e^{\pi\gamma_R})\right]^2}{\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1 + e^{-\pi\gamma_L})e^{-\pi\gamma_L} - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1 + e^{-\pi\gamma_R})e^{\pi\gamma_R}}.$$

e) O período do ciclo limite é, em primeira aproximação

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\pi}{\omega_L}+\frac{\pi}{\omega_R}+\frac{e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1}{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1+e^{-\pi\gamma_L})-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{\pi\gamma_R})\right]^2}\times\\
&\times \left\{\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1+e^{-\pi\gamma_L})\left[\left(\frac{b_L}{d_L}(1+e^{-\pi\gamma_L})-\frac{b_R}{d_R}(1+e^{\pi\gamma_R})\right)\right]-\right.\\
&- \left.\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{\pi\gamma_R})\left[\left(\frac{b_L}{d_L}(1+e^{-\pi\gamma_L})\,e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-\frac{b_R}{d_R}(1+e^{\pi\gamma_R})\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Aplicaremos primeiramente o Lema 4.3.1, exigindo como parâmetro de bifurcação um dos β_Λ ou um dos determinantes d_Λ, com $\Lambda \in \{L, R\}$. Sabemos que a aplicação de Poincaré é não hiperbólica para $\alpha = 0$ e suponhamos que tal condição se verifica para um certo valor crítico ($\beta_\Lambda = \beta_\Lambda^*$ ou $d_\Lambda = d_\Lambda^*$). Temos primeiramente que

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\beta_\Lambda}h'(0)\right|_{\beta_\Lambda=\beta_\Lambda^*} &= \frac{d}{d\beta_\Lambda}\left[\exp\left(-\pi\sum_{J=L,R}\frac{\beta_J}{\sqrt{4d_J-\beta_J^2}}\right)\right]_{\beta_\Lambda=\beta_\Lambda^*} =\\
&= \left[\exp\left(-\pi\sum_{J=L,R}\frac{\beta_J}{\sqrt{4d_J-\beta_J^2}}\right)\times -\pi\frac{4d_\Lambda+\beta_\Lambda^2}{(4d_\Lambda-\beta_\Lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\beta_\Lambda=\beta_\Lambda^*} < 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente se elegemos um d_Λ como parâmetro de bifurcação, obtemos

$$
\left.\frac{d}{dd_\Lambda}h'(0)\right|_{d_\Lambda=d_\Lambda^*} = \frac{2\pi\beta_\Lambda}{(4d_\Lambda^*-\beta_\Lambda^2)} \neq 0,
$$

já que antes de enunciar o teorema, vimos que o correspondente β_Λ deve ser não nulo.

Já vimos anteriormente que, para o valor crítico do parâmetro eleito, o sinal de $h''(0)$ coincide com o sinal de ν. Por hipótese, este parâmetro é não nulo e do Lema 4.3.1 deduzimos a existência de uma bifurcação transcrítica para h. Pela aplicação do Lema 4.3.1, vemos que a inclinação da curva de pontos fixos no correspondente plano de parâmetros (ξ como o eixo das ordenadas, β_Λ ou d_Λ como o eixo das abscissas) tem sinal igual ao de ν se for eleito β_Λ, e sinal contrário ao do produto $\beta_\Lambda\nu$ se for eleito d_Λ. Obviamente, faz sentido para nosso problema os valores positivos de ξ (ver def. de h) e, da curva de pontos fixos que se descreve no Lema 4.3.1, só aqueles pontos com $\xi > 0$ representam ciclo limite para o sistema. Suponhamos agora, $\nu < 0$. Se tivermos eleito β_Λ como parâmetro de bifurcação, deduzimos a existência de ciclo limite só para $\beta_\Lambda < \beta_\Lambda^*$ e como α é crescente com β_Λ, a desigualdade anterior equivale a $\alpha < 0$.

Se tomarmos d_Λ como parâmetro, haverá dois casos segundo o sinal de β_Λ. Para fixar as idéias, assumimos que $\beta_\Lambda > 0$. Assim, o ciclo limite só existiria para $d_\Lambda > d_\Lambda^*$.

Como α é decrescente com d_Λ, novamente concluímos que o ciclo limite só existe para valores negativos de α. Raciocinando igual para $\beta_\Lambda < 0$ neste último caso e repetindo todo o argumento para $\nu > 0$, deduzimos as afirmações b) e c), exceto a estabilidade do ciclo limite.

Consideremos agora o desenvolvimento de Taylor da aplicação h em torno de $\xi = 0$

$$h(\xi) = h(0) + h^{'}(0)\xi + \frac{h^{''}(0)}{2}\xi^2 + O(\xi^3)$$

que equivale a

$$h(\xi) - \xi = (h^{'}(0) - 1)\xi + \frac{1}{2}h^{''}(0)\xi^2 + O(\xi^3).$$

Agora, fazendo $(h(\xi) - \xi) = 0$, teremos duas raízes $\xi = 0$ e uma outra $\xi^+ > 0$ que satisfaz

$$h^{'}(0) - 1 + \frac{1}{2}h^{''}(0)\xi^+ \approx 0,$$

para ξ^+ suficientemente pequeno. Assim, temos

$$\xi^+ \approx 2\frac{1 - h^{'}(0)}{h^{''}(0)}. \tag{4.36}$$

Consequentemente, temos também que

$$h^{'}(\xi^+) \approx h^{'}(0) + h^{''}(0)\xi \approx h^{'}(0) + h^{''}(0).\frac{2(1 - h^{'}(0))}{h^{''}(0)} = 2 - h^{'}(0) = 2 - \exp\left(-\pi \sum_{J=L,R} \frac{\beta_J}{\sqrt{4d_J - \beta_J^2}}\right).$$

Se usarmos novamente as propriedades elementares da função $x/\sqrt{4 - x^2}$, deduzimos que para $\alpha < 0$ o expoente da expressão anterior é positivo e portanto, $h^{'}(\xi^+) < 1$ (suponhamos que $|\beta|$ seja suficientemente pequeno). Temos assim que o ciclo limite que bifurca é estável. De fato temos:

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\beta_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{\beta_R}{\sqrt{d_R}} < 0 \Rightarrow \beta_{LL} < -\beta_{RR} \Rightarrow \gamma_L - \gamma_R \Rightarrow \gamma_L + \gamma_R < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad -\pi \sum_{J=L,R} \frac{\beta_J}{\sqrt{4d_J - \beta_J^2}} > 0. \end{aligned}$$

Analogamente, deduzimos que para $\alpha > 0$ e pequeno, o ciclo limite que existe nas condições do enunciado c) é instável.

Para encontrar v_- usaremos as equações (4.1), (4.36) e as proposições 4.2.9 e 4.2.10, com $\theta = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
v_- &= -\left.\frac{\cos\theta}{r}\right|_{\theta=0} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\xi^+} = \frac{-1}{2\frac{1-h'(0)}{h''(0)}} = \\
&= \frac{-2h_L'(0)h_R'(0)\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h_R'(0)(1+h_L'(0)) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h_R'(0))\right]}{2(1-e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)})} = \\
&= \frac{-e^{\pi\gamma_R}}{e^{\pi\gamma_R}}.e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)}.\frac{\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)e^{-\pi\gamma_R}(1+e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{-\pi\gamma_R})\right]}{(1-e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)})} = \\
&= \frac{\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1+e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{\pi\gamma_R})}{e^{\pi\gamma_R}(e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1)}.
\end{aligned}$$

Agora para encontrar v_+, podemos usar a equação (4.1), com $\theta = \pi$, a aplicação h_R e as proposições 4.2.9 e 4.2.10. Temos que

$$\begin{aligned}
h_R(\xi^+) &\approx h_R'(0)\xi^+ + \frac{1}{2}h_R''(0)(\xi^+)^2 \approx 2\left[h_R'(0)\frac{1-h'(0)}{h''(0)} + h_R''\frac{(1-h'(0))^2}{h''(0)^2}\right] = \\
&= 2\frac{1-h'(0)}{h''(0)^2}\left[h_R'(0)h''(0) + h_R''(0)(1-h'(0))\right] = \\
&= 2\frac{1-h'(0)}{h''(0)^2}\left[h_R'(0)\left(h_L''(0)h_R'(0)^2 + h_L'(0)h_R''(0)\right) + h_R''(0)(1-h_L'(0)h_R'(0))\right] = \\
&= 2\frac{1-h'(0)}{h''(0)^2}\left[h_R'(0)^3h_L''(0) + h_R'(0)h_L'(0)h_R''(0) + h_R''(0) - h_R''(0)h_L'(0)h_R'(0)\right] = \\
&= 2\frac{1-h'(0)}{h''(0)^2}(h_R(0)^3h_L''(0) + h_R''(0)).
\end{aligned}$$

Agora usando a proposição 4.2.9, temos

$$\begin{aligned}
h_R(\xi^+) &\approx 2\frac{1-h^{'}(0)}{h^{''}(0)^2}\left[h^{'}_R(0)^3.2(a_L-b_{LL}\beta_{LL})h^{'}_L(0)(1+h^{'}_L(0))-\right.\\
&- \left.2(a_R-b_{RR}\beta_{RR})h^{'}_R(0)(1+h^{'}_R(0))\right] =\\
&= 2.\frac{2h^{'}_R(0)(1-h^{'}(0))}{h^{''}(0)^2}\left[(a_L-b_{LL}\beta_{LL})h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\right.\\
&- \left.(a_R-b_{RR}\beta_{RR})h^{'}_R(0)(1+h^{'}_R(0))\right] =\\
&= 4(1-h^{'}_L(0)h^{'}_R(0))h^{'}_R(0)\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\right.\\
&- \left.\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right].
\end{aligned}$$

Da proposição 4.2.10, também se chega a

$$h^{''}(0)=2h^{'}_Lh^{'}_R(0)\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_R(0)(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right].$$

Assim, $v_+=\dfrac{-\cos\theta}{h_R(\xi^+)}$, $\theta=\pi$, ou seja,
$v_+=-\dfrac{1}{h_R(\xi^+)}=$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\frac{(1-h^{'}_L(0)h^{'}_R(0))h^{'}_R(0)}{h^{''}(0)^2}\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]} =\\
&= -\frac{h^{''}(0)^2}{4(1-h^{'}_L(0)h_R(0))h^{'}_R(0)}\times\\
&\times \frac{1}{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]} =\\
&= \frac{4h^{'}_L(0)^2h^{'}_R(0)^2}{4(1-h^{'}_L(0)h_R(0))h^{'}_R(0)}\times\\
&\times \frac{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_R(0)(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]^2}{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]} =\\
&= \frac{h^{'}_L(0)^2h^{'}_R(0)}{1-h^{'}_L(0)h_R(0)}\times\\
&\times \frac{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_R(0)(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]^2}{\left[\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)h^{'}_L(0)h^{'}_R(0)^2(1+h^{'}_L(0))-\left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+h^{'}_R(0))\right]}.
\end{aligned}$$

Agora, usando as proposições 4.2.9 e 4.2.10 e a definição de γ_Λ, temos

$$\frac{h_L'(0)^2 h_R'(0)}{1-h_L'(0)h_R(0)} = \frac{h'(0)}{1-h'(0)}h_L'(0) = \frac{e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)}}{1-e^{-\pi(\gamma_L+\gamma_R)}}.h_L'(0) = \frac{h_L'(0)}{e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1} = \frac{e^{-\pi\gamma_L}}{e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1}.$$

Assim, acabamos de concluir as afirmações do item d).

Para encontrar a aproximação do período do ciclo limite dita no item e), vamos raciocinar da seguinte forma. Vamos em primeira aproximação integrar o ângulo em intervalos de tamanho π em cada zona extrema. Usando as equações (4.6), (4.9) e já trabalhando em ambos os casos no intervalo $[0,\pi]$, temos

$$\frac{dt_\Lambda}{d\theta} = \frac{1}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta \mp r(a_\Lambda\cos\theta+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta)} = \frac{1}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta}\frac{1}{1\mp r\frac{a_\Lambda\cos\theta+b_{\Lambda\Lambda}\sin\theta}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta}},$$

que podemos aproximar por

$$\frac{dt_\Lambda}{d\theta} \approx \frac{1}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta} \pm r\frac{a_\Lambda\cos\theta+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta}{(1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta)^2},$$

onde a última expressão deve tomar-se $+$ ou $-$ para $\Lambda = L$ ou $\Lambda = R$, respectivamente. Ainda das equações (4.6), (4.9) aproximamos o raio por

$$r(\theta) \approx r_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^\theta \frac{-\beta_{RR}\sin^2\phi\, d\phi}{1+\beta_{RR}\sin\phi\cos\phi}\right),$$

onde exigimos que $r_\Lambda^0 = \dfrac{-1}{v_-}$ para $\Lambda = R$ e $r_\Lambda^0 = \dfrac{1}{v_+}$ para $\Lambda = L$. Se integrarmos agora $\frac{dt_\Lambda}{d\theta}$ em $[0,\pi]$, obtemos aproximações para os semi-períodos P_Λ, dadas por

$$P_\Lambda = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta} \pm r_\Lambda^0 \int_0^\pi \frac{a_\Lambda\cos\theta+b_{\Lambda\Lambda}\sin\theta}{(1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\theta\cos\theta)^2} e^{-\int_0^\theta \frac{\beta_{\Lambda\Lambda}\sin^2\phi\, d\phi}{1+\beta_{\Lambda\Lambda}\sin\phi}} d\theta$$

Agora, usando o Lema 4.24 e a Proposição 4.2.8, temos

$$P_\Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{4-\beta_{\Lambda\Lambda}^2}} \pm r_\Lambda^0 b_{\Lambda\Lambda}\left(1+e^{\frac{-\pi\beta_{\Lambda\Lambda}}{\sqrt{4-\beta_{\Lambda\Lambda}^2}}}\right),$$

para $\Lambda = L, R$.

Voltando a usar os parâmetros originais e desfazendo a mudança de variável feita no tempo (que equivale a dividir as expressões por $\sqrt{d_\Lambda}$), temos

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{\pi}{\omega_R} + \frac{1}{v_-}.\frac{b_R}{\sqrt{d_R}}(1+e^{-\pi\gamma_R}) = \\ &= \frac{\pi}{\omega_R} - \frac{b_R}{d_R}\frac{e^{\pi\gamma_R}(1+e^{-\pi\gamma_R})(e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1)}{\left(a_L-\frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1+e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R-\frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{\pi\gamma_R})}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{\pi}{\omega_L} + \frac{b_L}{d_L}(1+e^{-\pi\gamma_L})(e^{\pi(\gamma_L+\gamma_R)}-1)\times \\ &\times \quad \frac{\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)e^{-\pi\gamma_L}(1+e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)e^{\pi\gamma_R}(1+e^{\pi\gamma_R})}{\left[\left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L}\right)(1+e^{-\pi\gamma_L}) - \left(a_R - \frac{b_R\beta_R}{d_R}\right)(1+e^{\pi\gamma_R})\right]^2}. \end{aligned}$$

Fazendo $P = P_L + P_R$ se conclui finalmente a afirmação do item e).

■

Agora, podemos aplicar o resultado geral anterior, dos sistemas (3.3)-(3.5), a subfamílias mais interessantes, como os sistemas quase-simétricos, os simétricos e os sistemas com duas zonas.

Em todos os casos, poderemos além do mais, obter informações quando $\nu = 0$ na situação de não hiperbolicidade de órbita periódica no ponto do infinito.

4.3.1 Ciclos Limites de Sistemas Quase-Simétricos

Teorema 4.3.3. *Para os sistemas quase-simétricos*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \leq -1, \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{a_L+a_R}{2} \\ \\ \dfrac{a_L+a_R}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta + \dfrac{a_R-a_L}{2} & -1 \\ \\ d + \dfrac{a_R-a_L}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad |u| \leq 1, \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_R \\ b_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \geq 1, \end{aligned}$$

com a condição $4d - \beta^2 > 0$, as seguintes afirmações são válidas quando se elege β como parâmetro de bifurcação.

a) Se $\nu = a_L - a_R \neq 0$, então quando $\beta = 0$ um ciclo limite (e só um) bifurca a partir da órbita periódica do ponto do infinito.

b) Se $\nu < 0$ e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então o ciclo limite que bifurca existe para $\beta \in (-\varepsilon, 0)$ e é estável, e não existe quando $\beta \in (0, \varepsilon)$.

c) Se $\nu > 0$ e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então o ciclo limite que bifurca existe para $\beta \in (0, \varepsilon)$ e é instável, e não existe quando $\beta \in (-\varepsilon, 0)$.

d) Em primeira aproximação, o ciclo limite que bifurca intercepta o eixo v nos pontos

$$v_- = -\frac{(a_L d - b_L\beta)(1 + e^{-\pi\gamma}) - (a_R d - b_R\beta)(1 + e^{\pi\gamma})}{d\, e^{\pi\gamma}(e^{2\pi\gamma} - 1)},$$

e

$$v_+ = \frac{e^{-\pi\gamma}}{d\,(e^{2\pi\gamma} - 1)} \frac{\left[(a_L d - b_L\beta)(1 + e^{-\pi\gamma}) - (a_R d - b_R\beta)(1 + e^{\pi\gamma})\right]^2}{(a_L d - b_L\beta)(1 + e^{-\pi\gamma})e^{-\pi\gamma} - (a_R d - b_R\beta)(1 + e^{\pi\gamma})e^{\pi\gamma}},$$

onde $\gamma = \dfrac{\beta}{2\omega}$ *e* $\omega = \sqrt{d - \beta^2/4}$.

e) O período do ciclo limite é, em primeira aproximação

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{\omega} + \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{\left[(a_L d - b_L\beta)\,(1 + e^{-\pi\gamma}) - (a_R d - b_R\beta)\,(1 + e^{\pi\gamma})\right]^2} \times \\ &\times \left\{(a_L d - b_L\beta)\,(1 + e^{-\pi\gamma})\left[b_L(1 + e^{-\pi\gamma}) - b_R(1 + e^{\pi\gamma})\right] - \right. \\ &- \left. (a_R d - b_R\beta)\,(1 + e^{\pi\gamma})\left[b_L(1 + e^{-\pi\gamma})e^{2\pi\gamma} - b_R(1 + e^{\pi\gamma})\right]\right\}. \end{aligned}$$

f) Se $\nu = 0$, então para $\beta = 0$ não bifurca nenhum ciclo limite a partir da órbita periódica no ponto do infinito.

Demonstração. Tendo em conta que $\beta = \beta_L = \beta_R$ e $d = d_L = d_R$, então temos que $\alpha = \dfrac{2\beta}{\sqrt{d}}$. Assim,

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = 0, \quad \alpha > 0 \Leftrightarrow \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha < 0 \Leftrightarrow \beta < 0.$$

Portanto, as afirmacões do teorema, exceto a última, são consequências imediatas do Teorema 4.3.2. Para a afirmação f), basta observar que se $\nu = a_L - a_R = 0$, então o traço β é comum nas três zonas e pelo critério de Bendixson-Dulac (adequadamente adaptado para sistemas contínuos lineares por partes, como é feito na Proposição 3 de [12]), não pode haver ciclo limite algum.

■

Agora, no caso de sistemas simétricos, o próximo teorema ganha um benefício de que as semi-aplicações h_L e h_R são idênticas (veja a observação referente a Definição 4.2.5). Como consequência, as aproximações do ponto fixo são melhores se em vez de usar a composição de tais aplicações, usarmos qualquer uma delas.

4.3.2 Ciclos Limites de Sistemas Simétricos

Teorema 4.3.4. *Para os sistemas simétricos*

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \leq -1,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - a & -1 \\ d - b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad |u| \leq 1,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \geq 1,$$

com a condição $4d - \beta^2 > 0$, as seguintes afirmações são válidas quando se elege β como parâmetro de bifurcação.

a) Se $a \neq 0$, então quando $\alpha = 0$ um ciclo limite (e só um) bifurca a partir da órbita periódica do ponto do infinito.

b) Se $a < 0$ e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então o ciclo limite que bifurca existe para $\beta \in (-\varepsilon, 0)$ e é estável, e não existe quando $\beta \in (0, \varepsilon)$.

c) Se $a > 0$ e tomando$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então o ciclo limite que bifurca existe para $\beta \in (0, \varepsilon)$ e é instável, e não existe quando $\beta \in (-\varepsilon, 0)$.

d) Em primeira aproximação, o ciclo limite que bifurca intercepta o eixo v nos pontos

$$v_{\pm} = \pm \frac{(ad - b\beta)(1 + e^{-\pi\gamma})}{d\,(e^{\pi\gamma} - 1)},$$

onde $\gamma = \dfrac{\beta}{2\omega}$ e $\omega = \sqrt{d - \beta^2/4}$.

e) O período do ciclo limite é, em primeira aproximação

$$P = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2b(e^{\pi\gamma} - 1)}{ad - b\beta}$$

f) Se $a = 0$, então para $\beta = 0$ não bifurca nenhum ciclo limite a partir da órbita periódica no ponto do infinito.

Demonstração. Tendo em conta que $a = a_L = -a_R$ e $b = b_L = -b_R$, temos que $\nu = 2a$. Assim,

$$\nu \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, \quad \nu = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad \nu > 0 \Leftrightarrow a > 0 \quad \text{e} \quad \nu < 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

Portanto, as três primeiras afirmações e a última são consequências imediatas do Teorema 4.3.3.

Para a aproximação dos pontos de corte com o eixo v do ciclo limite(que é simétrico com respeito a origem), voltaremos a usar as expressões da prova do Teorema 4.3.2, trocando h por h_R (também pode-se trocar por h_L). Assim,

$$\xi^+ \approx 2\frac{1-h_R'(0)}{h_R''(0)} = \frac{1-e^{-\pi\gamma}}{\left(a-\frac{b\beta}{d}\right)e^{-\pi\gamma}(1+e^{-\pi\gamma})},$$

e concluímos a afirmação do item d).

Analogamente, para a aproximação do período, basta multiplicar por 2 o semi-período P_R, tomando r_Λ^0 da expressão anterior e temos assim,

$$P_R = \frac{\pi}{\omega} + \frac{b}{d}\frac{(1+e^{-\pi\gamma})(1-e^{-\pi\gamma})}{\left(a-\frac{b\beta}{d}\right)e^{-\pi\gamma}(1+e^{-\pi\gamma})} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{b(e^{\pi\gamma}-1)}{ad-b\beta}$$

e obtemos a afirmação correspondente ao item e).

■

Finalmente, daremos um resultado similar para os sistemas com só duas zonas. Considerando tal caso, podemos reescrever os dois parâmetros essenciais para a bifurcação da seguinte forma

$$\alpha = \frac{\beta_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{\beta_M}{\sqrt{d_M}}, \quad \nu = \left(a_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} - a_M + \frac{b_M\beta_M}{d_M}\right)$$

tendo em conta que agora com base na Definição 3.3.8 que $a_M = a_M + \beta_M - \beta_L$ e $b_M = b_L + d_M - d_L$. Assumimos aqui para simplificar que algum dos traços (β_L ou β_M) que aparecem na definição de α representa o parâmetro de bifurcação.

4.3.3 Ciclos Limites de Sistemas com Duas Zonas

Teorema 4.3.5. *Para os sistemas com duas zonas*

$$\begin{bmatrix} \dot u \\ \dot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \le -1,$$

$$\begin{bmatrix} \dot u \\ \dot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L+\beta_M-\beta_L \\ b_L+d_M-d_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_M & -1 \\ d_M & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \ge -1,$$

com as condições $4d_L - \beta_L^2 > 0$ e $4d_M - \beta_M^2 > 0$ são válidas todas as afirmações do Teorema 4.3.2, trocando todos os subíndices R por M.

Além do mais, assumindo que algum dos dois traços atua como parâmetro de bifurcação, se para $\alpha = 0$, se tem $\nu = 0$, então não bifurca nenhum ciclo limite a partir da órbita periódica do ponto do infinito.

Demonstração. Obviamente, o Teorema 4.3.2 é válido para este sistema para o caso particular correspondente a $a_R = a_M$, $b_R = b_M$, $d_R = d_M$ e $\beta_R = \beta_M$, e portanto basta provarmos a afirmação adicional. Das relações anteriores ao enunciado do teorema, temos que

$$\begin{aligned} v &= a_M - \beta_M + \beta_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} - a_M + \frac{(b_L - d_L + d_M)}{d_M}\beta_M = \\ &= -\beta_M + \beta_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} + \frac{(b_L - d_L)}{d_M}\beta_M + \beta_M = \\ &= \beta_L - \frac{b_L\beta_L}{d_L} + \frac{(b_L - d_L)}{d_M}\beta_M = (b_L - d_L)\left(\frac{\beta_M}{d_M} - \frac{\beta_L}{d_L}\right) \end{aligned}$$

e assim, surgem duas possibilidades para que esta expressão seja nula. Para facilitar, fazemos as translações $u + 1 \to u$, $v - a_L + \beta_L \to v$ e chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_L - d_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \leq 0, \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_L - d_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_M & -1 \\ d_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

Se supormos primeiramente que $b_L - d_L = 0$, o sistema equivalente seria homogêneo e consequentemente todas as órbitas seriam homotéticas. Assim, não pode existir ciclo limite, já que se existisse uma órbita periódica, a origem (que seria o único ponto de equilíbrio) estaria rodeada de uma infinidade de órbitas do mesmo tipo.

Cabe assim, analisar o caso em que $b_L - d_L \neq 0$ e teremos que $\dfrac{\beta_M}{d_M} - \dfrac{\beta_L}{d_L} = 0$, quando $\alpha = 0$. Pela definição de α, é obrigatório que para o valor crítico de bifurcação se tenha $\beta_L = \beta_M = 0$. Contudo, se um dos traços é o parâmetro de bifurcação, ao variar seu valor, não pode existir ciclo limite algum, pois o outro traço é nulo e novamente o critério de Bendixson-Dulac exclui essa possibilidade.

■

Capítulo 5

Órbitas Periódicas não Isoladas

Neste capítulo estabeleceremos a existência de uma órbita periódica não hiperbólica , desta vez na parte finita do retrato de fase. Tal órbita será de fácil localização. Considerando os sistemas (3.3)-(3.5) vamos nos restringir a um equilíbrio não transitivo na zona central do tipo topológico foco. Se tomarmos $\beta_M = 0$, tal equilíbrio será um centro, com uma infinidade de órbitas periódicas não hiperbólicas que formam uma família limitada pela fronteira mais próxima ao equilíbrio da zona central. Ao variar pouco β_M fazendo positivo por exemplo, o equilíbrio se converte em um foco instável, e como veremos, a órbita periódica mais externa que se tem quando $\beta_M = 0$ dá lugar a um ciclo limite estável, com certas condições adicionais.

5.1 Cálculos Preliminares

Primeiramente precisamos da condição de equilíbrio isolado não transitivo na zona central, que é obviamente,

$$\left|\frac{b_M}{d_M}\right| < 1.$$

Suponhamos também que o equilíbrio é do tipo foco, ou seja, $4d_M - \beta_M^2 > 0$ (o que implica que $d_M > 0$) e que está situado mais próximo a fronteira $u = -1$ do que a fronteira $u = 1$, ou seja,

$$0 < \frac{b_M}{d_M} < 1.$$

O caso contrário pode-se tratar igualmente. O caso em que $b_M = 0$ implica que o equilíbrio estará situado no eixo v e não iremos tratá-lo em nosso estudo. Portanto, vamos nos limitar a situação em que $b_M \neq 0$.

Podemos assumir então que $0 < b_M < d_M$ e pelas equações (3.7) concluímos que

$$b_L - d_L < 0, \quad b_R + d_R > 0, \quad b_R + d_R > d_L - b_L.$$

Para facilitar os cálculos, faremos uma transformação nas variáveis de tal modo que deixe inalterada a fronteira $u = -1$ e leve o equilíbrio da zona central a origem. Assim:

Definição 5.1.1. *Redefinimos as variáveis temporal e dependentes por*

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_M}{d_M - b_M}(u + \frac{b_M}{d_M}), \\ y &= \frac{\sqrt{d_M}}{d_M - b_M}(v - a_M + \frac{\beta_M b_M}{d_M}), \\ \tau &= \sqrt{d_M}t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, teremos para zona central

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{d_M}}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{d_M}}{d_M - b_M}\frac{du}{dt} = \frac{\beta_M}{\sqrt{d_M}}x - y \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{d_M}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{d_M - b_M}\frac{dv}{dt} = x, \end{aligned}$$

que vem agora definido por

$$-1 \leq x \leq x^*_{MR},$$

onde

$$x^*_{MR} = \frac{d_M + b_M}{d_M - b_M} > 1.$$

Para zona esquerda, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\sqrt{d_M}}{d_M - b_M}\left[a_L + \beta_L\left(\frac{d_M - b_M}{d_M}x - \frac{b_M}{d_M}\right) - \right. \\ &- \left.\left(\frac{d_M - b_M}{\sqrt{d_M}}y + a_M - \frac{\beta_M b_M}{d_M}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{d_M}}{d_M - b_M}\left(a_L - \beta_L\frac{b_M}{d_M} - a_M + \frac{\beta_M b_M}{d_M}\right) + \frac{\beta_M}{\sqrt{d_M}}x - y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{d_M - b_M}\left[b_L + d_L\left(\frac{d_M - b_M}{d_M}x - \frac{b_M}{d_M}\right)\right] \\ &= \frac{1}{d_M - b_M}\left(b_L - b_M\frac{d_L}{d_M}\right) + \frac{d_L}{d_M}x. \end{aligned}$$

Usando agora as condições de continuidade $a_L = \beta_L + a_M - \beta_M$ e $b_L = d_L + b_M - d_M$, temos que

$$a_L - \beta_L \frac{b_M}{d_M} - a_M + \frac{\beta_M b_M}{d_M} = (\beta_L - \beta_M)\frac{d_M - b_M}{d_M}$$

$$b_L - b_M \frac{d_L}{d_M} = d_L + b_M - b_M \frac{d_L}{d_M} - d_M = (d_L - d_M)\frac{d_M - b_M}{d_M}$$

e enfim, o sistema da zona esquerda é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\beta_L}{\sqrt{d_M}} - \frac{\beta_M}{\sqrt{d_M}} + \frac{\beta_L}{\sqrt{d_M}} x - y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{d_L}{d_M} - 1 + \frac{d_L}{d_M} x. \end{aligned}$$

- Aqui, não iremos escrever as equações correspondentes a zona direita ($x > x^*_{MR}$), pois o fenômeno que acontecerá não depende da dinâmica em tal zona.

- Afim de abreviar a notação, vamos introduzir os seguintes parâmetros:

$$\beta = \frac{\beta_L}{\sqrt{d_M}}, \quad T = \frac{\beta_M}{\sqrt{d_M}}, \quad d = \frac{d_L}{d_M}. \tag{5.2}$$

  Assim, estudaremos os seguintes sistemas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - T \\ d - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad x \leq -1, \tag{5.3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq x^*_{MR}. \tag{5.4}$$

  Agora, assumiremos algumas hipóteses referente aos parâmetros da zona esquerda. Assumiremos que $\beta_L < 0$, $d_L > 0$, de maneira que $d_L(b_L - d_L) < 0$ e pela Proposição 3.3.5, não existem equilíbrios em tal zona. Teremos posteriormente que $\beta < 0$, $d > 0$.

- Se o traço T for negativo, o sinal constante dos dois traços impede que haja ciclos limites totalmente contidos nas duas zonas de interesse.

- Se $T = 0$, então existirá um conjunto infinito de órbitas periódicas estáveis (não assintoticamente estáveis) que terminará na órbita de raio igual a um.

- Se $T > 0$ e suficientemente pequeno, a estrutura anterior desaparece, e a origem torna-se um foco instável e como veremos, surgirá um ciclo limite estável a partir da órbita periódica mais externa da configuração tipo centro (que existia quando $T = 0$).

5.2 Os Ciclos Limites

Em sequência, vamos dar passos para justificar o fenômeno descrito e encontraremos estimativas da amplitude e período do ciclo limite que bifurca. Primeiramente podemos notar que o sistema anterior pode ser escrito por meio da translação $x+1 \to x, \quad y+T \to y$, na forma equivalente

$$\dot{x} = f(x) - y \quad \dot{y} = g(x) - 1,$$

onde,

$$f(x) = \begin{cases} \beta x, & \text{se } x \leq 0, \\ Tx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 + x^*_{MR}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} dx, & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 + x^*_{MR}. \end{cases}$$

Se estendermos a validez destas equações a todo o plano, poderemos aplicar o seguinte resultado.

Teorema 5.2.1. *Para o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T(x) - y, \\ \dot{y} &= D(x) - \alpha, \end{aligned} \tag{5.5}$$

com

$$T(x) = \begin{cases} T_L x, & se\ x \leq 0, \\ T_R x, & se\ x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} D_L x, & se\ x \leq 0, \\ D_R x, & se\ x \geq 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

onde $D_L, D_R > 0$, são válidas as seguintes afirmações.

a) Se $\alpha = 0$, o sistema não possui ciclos limites.

b) Quando $\alpha > 0$, $T_L < 0$ e $T_R > 0$, então temos

b_1) Uma condição necessária para a existência de ciclos limites é que

$$\frac{T_L^2}{D_L} > \frac{T_R^2}{D_R}.$$

b_2) a condição anterior, junto com a condição

$$\frac{T_R^2}{D_R} < 4,$$

garante a existência de uma solução periódica única, que constitui um ciclo limite hiperbólico e estável.

A demonstração desse teorema baseia-se nos teoremas de Filippov e Coppel e será tratada no Apêndice A.

- Para aplicarmos o Teorema anterior na situação que encontramos, devemos tomar $\alpha = 1$, $D_L = d$, $D_R = 1$, $T_L = \beta$, $T_R = T$ e como já dito, para extensão de todo plano do sistema (5.3)-(5.4), com as condições $\beta < 0$, $d > 0$ e $T > 0$ suficientemente pequeno, podemos garantir a existência de um ciclo limite estável e único.

- Se o valor máximo das abscissas dos pontos de tal ciclo limite não supera x_{MR}^*, então a solução periódica correspondente usa somente as equações (5.3)-(5.4) e portanto, tal ciclo também é solução periódica (não necessariamente a única) do sistema (3.3)-(3.5) (com as hipóteses realizadas até o momento).

5.2.1 Amplitude e Período dos Ciclos Limites

No que se segue, iremos trabalhar com o sistema (5.3)-(5.4) junto com as hipóteses já mencionadas. Seja $(-1, y_0)$ o ponto correspondente a solução periódica com $y_0 \leq -T$ e seja $(-1, y_1)$ o outro ponto na mesma vertical com $y_1 \geq T$ (ver figura 5.1).

Por propriedade de fluxo, para certos valores de tempo $\tau_1 \leq 2\pi$, $\tau_2 \geq 0$, temos

$$\exp\left(\begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tau_1\right)\begin{bmatrix} -1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}\tau_2\right)\begin{bmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_1 - \frac{\beta}{d} + T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_0 - \frac{\beta}{d} + T \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Estas equações constituem um sistema de quatro equações escalares com cinco incógnitas $(T, \tau_1, y_0, \tau_2, y_1)$. Obviamente $(T, \tau_1, y_0, \tau_2, y_1) = (0, 2\pi, 0, 0, 0)$ é solução trivial do sistema que corresponde à órbita periódica mais externa da configuração de centro linear que

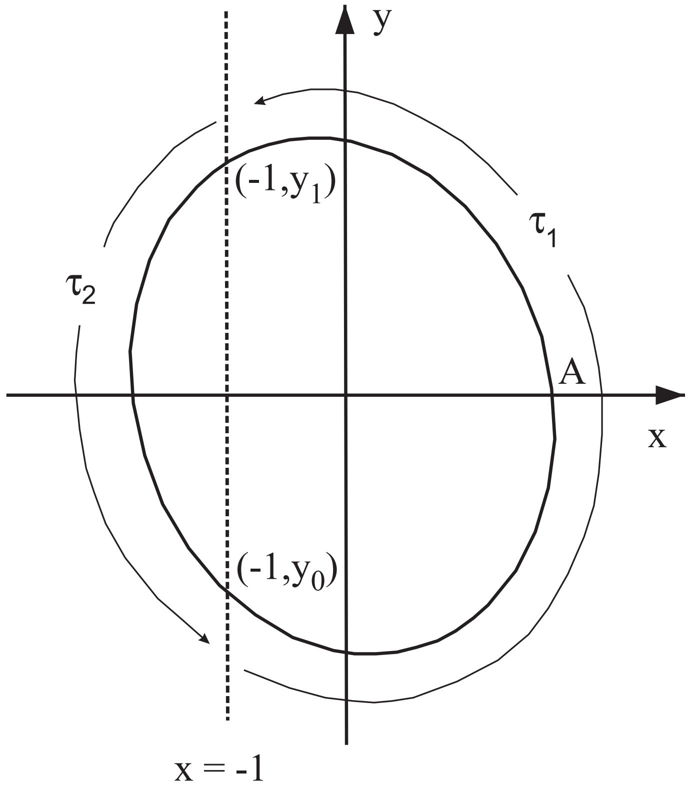

Figura 5.1: Referente as equações (5.7)-(5.8).

existe para $T = 0$. Deverá surgir a partir desta solução, um ramo de soluções com $T > 0$, $\tau_1 < 2\pi/\omega$, $\tau_2 > 0$, $y_1 > y_0$, onde $y_0 \leq -T < 0$ e $\omega = \sqrt{1 - T^2/4}$, que corresponde ao ciclo limite dito pelo Teorema 5.2.1.

Podemos observar, que existe outro ramo de soluções para as equações (5.7)-(5.8) definida para todo $y \in \mathbb{R}$ dada por $(T, \tau_1, y_0, \tau_2, y_1) = (0, 2\pi, y, 0, y)$. Este ramo não se corresponde como autênticas soluções periódicas do sistema (5.3)-(5.4), pois diz que podemos formar órbitas fechadas usando somente trajetórias de (5.7) que invadiriam a zona esquerda do sistema (como se a equação (5.7) fosse válida para $x \leq -1$). Diremos que se trata de um ramo falso do sistema (5.3)-(5.4) e como também passa pelo ponto $(0, 2\pi, 0, 0, 0)$, este ponto tem característica de ponto de *ramificação* para tal sistema. Veremos mais adiante que não podemos usar o Teorema da Função Implícita na sua forma habitual para análise local e teremos que recorrer ao seguinte resultado.

Lema 5.2.2. *Se definirmos a função* $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, *onde*

$$\begin{bmatrix} F_1(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) \\ F_2(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tau_1\right)\begin{bmatrix} -1 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -y_1 \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

$$\begin{bmatrix} F_3(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) \\ F_4(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix}\tau_2\right)\begin{bmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_1 - \frac{\beta}{d} + T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{d} \\ -y_0 + \frac{\beta}{d} - T \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

então a equação

$$F(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) = 0 \tag{5.11}$$

define implicitamente numa vizinhança $\mathcal{N}$ *do ponto* $(0,2\pi,0,0,0)$ *três funções analíticas* $\varphi_i : \mathcal{N}_0 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, *numa vizinhança apropriada* $\mathcal{N}_0$ *do ponto* $(\tau_2,y_0) = (0,0)$ *e tal que todas as soluções de* (5.11) *estão (e só elas) entre as soluções da equação escalar*

$$F^*(\tau_2,y_0) = F_3(\varphi_1(\tau_2,y_0),\varphi_2(\tau_2,y_0),\varphi_3(\tau_2,y_0),\tau_2,y_0) = 0. \tag{5.12}$$

Demonstração. Calculando a matriz jacobiana de F em $z = (0,2\pi,0,0,0)$, obtemos

$$\left[\frac{D(F_1,F_2,F_3,F_4)}{D(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0)}\right]_z = \begin{bmatrix} -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

o que comprova que o determinante

$$\left|\frac{D(F_1,F_2,F_4)}{D(T,\tau_1,y_1)}\right|_z \neq 0.$$

Agora, seja $\widetilde{F} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(T,\tau_1,y_1,\tau_2,y_0) \to (F_1,F_2,F_4)$. Pelo Teorema da Função Implícita existem $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^5$ e $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{R}^2$, com $(0,2\pi,0,0,0) \in \mathcal{N}$ e $(0,0) \in \mathcal{N}_0$ e $(T,\tau_1,y_1) = \varphi(\tau_2,y_0) = (\varphi_1(\tau_2,y_0),\varphi_2(\tau_2,y_0),\varphi_3(\tau_2,y_0))$, com $\varphi : \mathcal{N}_0 \to \mathbb{R}^3$, satisfazendo

$$\widetilde{F}(\varphi_1(\tau_2,y_0),\varphi_2(\tau_2,y_0),\varphi_3(\tau_2,y_0),\tau_2,y_0) = 0.$$

Assim, as soluções de (5.11) estão entre as soluções de (5.12).

■

- Podemos notar que não se pode aplicar o Teorema da Função Implícita para a equação (5.12), pois todos os elementos da terceira fileira da matriz jacobiana F são nulos.

- Como $(T, \tau_1, y_1, \tau_2, y_0) = (0, 2\pi, y, 0, y)$ é solução de (5.11), para todo $y \in \mathbb{R}$, logo é solução de (5.12) para y suficientemente pequeno, e assim, teremos que $\varphi_1(0, y) = 0$, $\varphi_2(0, y) = 2\pi$, $\varphi_3(0, y) = y$ para todo y suficientemente pequeno.

O Lema seguinte garante a existência de somente dois ramos de soluções para equação (5.12) e dá informações sobre suas parametrizações.

Lema 5.2.3. *A equação* (5.12) *tem dois ramos de soluções* Γ_1 *e* Γ_2 *em* $\mathcal{N}_0$ *que se cortam em* $(0, 0)$ *tal que*

$$F^*(\tau_2, y_0) = 0 \ \textit{em} \ \mathcal{N}_0 \ \textit{se, e somente se,} \ (\tau_2, y_0) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Um destes ramos é

$$\Gamma_2 = \{(y_0, \tau_2) \in \mathcal{N}_0 \ : \ \tau_2 = 0\},$$

enquanto o outro pode ser localmente descrita pelo gráfico de uma função analítica em 0. *Mais precisamente, teremos*

$$\Gamma_1 = \{(y_0, \tau_2) \in \mathcal{N}_0 \ : \ y_0 = \Psi(\tau_2), \ \Psi \ \textit{analítica em} \ 0, \ \textit{com} \ \Psi(0) = 0, \ \Psi'(0) = -\frac{1}{2}\}.$$

Demonstração. Observemos primeiramente, que a função F^* é analítica em $(0, 0)$, pois é composição de funções analíticas. Ao satisfazer $F^*(0, y_0) = 0$, para todo y_0, obtemos

$$F^*(\tau_2, y_0) = \tau_2 f(\tau_2, y_0),$$

com f também analítica em $(0, 0)$. Assim, a existência do ramo Γ_2 é obtida da decomposição anterior de F^*. Como $F^*_{\tau_2} = 0$, temos que $f(0, 0) = 0$. Calculando as derivadas de segunda ordem de F^* em $(0, 0)$, obtemos

$$F^*_{\tau_2, y_0}(0, 0) = -1, \quad F^*_{\tau_2, \tau_2}(0, 0) = -1,$$

o que implica que

$$f_{y_0}(0, 0) = -1, \quad f_{\tau_2}(0, 0) = -\frac{1}{2},$$

respectivamente. Assim, a conclusão se dá aplicando novamente o Teorema da Função Implícita para f com $y_0 = \Psi(\tau_2)$.

■

Observemos que os lemas 5.2.2 e 5.2.3 nos permitem obter séries de Taylor em τ_2 para expressar as variáveis T, τ_1, y_0, y_1 para a solução da equação (5.11).

Agora, vamos dar outro resultado técnico para inverter certas séries de potências (ver Cap. 2 de [1]).

Lema 5.2.4. *Seja $\eta = \xi^m \rho(\xi)$ para m ímpar, onde ρ é uma função analítica em 0 tal que $\rho(0) = \rho_0 \neq 0$. Então, existe uma função real χ analítica em 0, com $\chi(0) \neq 0$ e tal que $\xi = \eta^{\frac{1}{m}} \chi(\eta^{\frac{1}{m}})$.*

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $\xi = \zeta\omega$, onde $\zeta = \eta^{\frac{1}{m}}$, obtemos a seguinte igualdade

$$\eta = \eta\omega^m \rho(\zeta\omega),$$

e após simplificar, chegamos a equação

$$H(\zeta, \omega) = \omega^m \rho(\zeta\omega) - 1 = 0.$$

Agora, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita em torno do ponto $(\zeta, \omega) = (0, \rho_0^{-\frac{1}{m}})$, pois

$$\begin{aligned} H_\omega(0, \rho_0^{-\frac{1}{m}}) &= \left[(m\omega^{m-1}\rho(\zeta\omega) + \omega^m \rho'(\zeta\omega)\zeta)\right]_{(0, \rho_0^{-\frac{1}{m}})} = \\ &= m\rho_0^{-\frac{m-1}{m}} \rho_0 = m\rho_0^{\frac{1}{m}} \neq 0, \end{aligned}$$

e assim, o resultado se obtém fazendo $\omega = \chi(\zeta)$.

■

Agora, podemos enunciar o resultado principal desse capítulo, onde a variável T fará o papel do parâmetro de bifurcação.

Teorema 5.2.5. *Se assumimos para o sistema*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta - T \\ d - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad x \leq -1, \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{para} \quad x \geq -1, \end{aligned}$$

que $\beta < 0$, $d > 0$, $|T| < 2$, *as seguintes afirmações são válidas.*

(a) O sistema tem um único equilíbrio na origem.

(b) Se $T < 0$, *a origem será um equilíbrio globalmente estável.*

(c) Quando $T = 0$, *o sistema tem uma configuração de centro linear restringida a zona* $x \geq -1$. *Esta configuração da lugar para* $0 < T < \min\{2, -\beta/\sqrt{d}\}$ *a um único ciclo limite estável. A amplitude* A *(medida como o máximo valor de* x*) e o período da solução periódica correspondente são funções analíticas em 0 da variável* $T^{\frac{1}{3}}$, *ou seja,*

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(T^{\frac{1}{3}}\right)^n, \\ P &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(T^{\frac{1}{3}}\right)^n, \end{aligned}$$

para $T > 0$ *e pequeno. Além disso, os primeiros coeficientes das series de potências em* $T^{\frac{1}{3}}$ *anteriores são:*

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{8\beta^{\frac{2}{3}}}, \quad a_3 = 0, \\ a_4 &= \frac{(12\pi^4)^{\frac{1}{3}}(75 + 24d + 28\beta^2)}{480\beta^{\frac{4}{3}}}, \quad a_5 = \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{12\beta^{\frac{5}{3}}}, \\ a_6 &= \frac{\pi^2(14175 + 1260\beta^2 + 22680d - 3456d\beta^2 - 1944d^2 - 536\beta^4)}{100800\beta^2}, \\ a_7 &= \frac{(12\pi^4)^{\frac{1}{3}}(57 - 26\beta^2 + 42d)}{360\beta^{\frac{7}{3}}}, \\ p_0 &= 2\pi, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{\pi(d-1)}{\beta}, \quad p_4 = 0, \\ p_5 &= -\frac{(12^2\pi^5)^{\frac{1}{3}}[(d-1)^2 + \beta^2]}{10\beta^{\frac{5}{3}}}, \quad p_6 = \frac{\pi[4(d-1) - 3\beta^2]}{4\beta^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7 &= \frac{(12\pi^7)^{\frac{1}{3}}(-15 + 63d - 14\beta^2 - 81d^2 + 31d\beta^2 + \beta^4 + d^2\beta^2 + 33d^3)}{210\beta^{\frac{7}{3}}}, \\ p_8 &= -\frac{(12^2\pi^5)^{\frac{1}{3}}[7(d-1)^2 + \beta^2(1 - 6d)]}{60\beta^{\frac{8}{3}}}. \end{aligned}$$

Demonstração. As afirmações (a) e (b) são imediatas. Iremos nos centrar na afirmação (c). Facilmente, vemos que para $T = 0$, a configuração de centro é atrativa.

Para $0 < T < \min\{2, -\beta/\sqrt{d}\}$, basta aplicarmos o Teorema 5.2.1 para garantir a existência e unicidade do ciclo limite em questão. Agora, a aplicação dos Lemas 5.2.2 e 5.2.3 nos permite escrever em séries de potências na variável τ_2 as variáveis T, τ_1, y_0 e y_1 que verificam as equações (5.7)-(5.8). Usando um programa de cálculo simbólico, como por exemplo Maple V, se obtém:

$$\begin{aligned} T = & -\frac{\beta}{12\pi}\tau_2^3 + \frac{15\beta - 12d\beta + \beta^3}{720\pi}\tau_2^5 - \frac{\beta}{144\pi^2}\tau_2^6 - \\ & - \frac{315\beta - 462d\beta + 153d^2\beta - 14\beta^3 - 36d\beta^3 + 2\beta^5}{60480\pi}\tau_2^7 + \\ & + \frac{33\beta - 27d\beta - 4\beta^3}{8640\pi^2}\tau_2^8 + O(\tau_2^9), \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \; 2\pi - \tau_2 + \frac{1}{12}(1-d)\tau_2^3 + \frac{-9 + 15d + 6d^2 + 5\beta^2 + d\beta^2}{720}\tau_2^5 - \frac{\beta^2}{192\pi}\tau_2^6 + \\ & + \frac{135 - 315d + 231d^2 - 51d^3 - 210\beta^2 + 112d\beta^2 - 20d^2\beta^2}{60480}\tau_2^7 + \\ & + \frac{-14\beta^4 - 2d\beta^4}{60480}\tau_2^7 + \frac{25\beta^2 - 12d\beta^2 + \beta^4}{5760\pi}\tau_2^8 + O(\tau_2^9), \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} y_0 = & -\frac{\tau_2}{2} - \frac{\beta}{12}\tau_2^2 + \frac{2\beta - \pi d}{24\pi}\tau_2^3 - \frac{7d\beta - \beta^3}{720}\tau_2^4 - \\ & - \frac{6\pi d^2 + 30\beta - 24d\beta - \pi d\beta^2 + 2\beta^3}{1440\pi}\tau_2^5 + \\ & + \frac{210\beta - 31\pi^2 d^2\beta + 11\pi^2 d\beta^3 - \pi^2\beta^5}{30240\pi^2}\tau_2^6 + \frac{-51\pi d^3 + 630\beta - 924d\beta}{120960\pi}\tau_2^7 + \\ & + \frac{306d^2\beta + 20\pi d^2\beta^2 - 28\beta^3 - 72d\beta^3 - 2\pi d\beta^4 + 4\beta^5}{120960\pi}\tau_2^7 - \frac{13860\beta}{3628800\pi^2}\tau_2^8 + \\ & + \frac{11340d\beta - 381\pi^2 d^3\beta - 1680\beta^3 + 226\pi^2 d^2\beta^3 - 45\pi^2 d\beta^5 + 3\pi^2\beta^7}{3628800\pi^2}\tau_2^8 + \\ & + O(\tau_2^9). \end{aligned} \tag{5.15}$$

O cálculo para y_1 não é mostrado, já que não será útil para o cálculo da amplitude e período.

Agora, a partir da equação (5.13) e usando o Lema 5.2.4 com $m = 3$, podemos garantir a existência de uma função real χ analítica em 0 com $\chi(0) \neq 0$ tal que $\tau_2 = T^{\frac{1}{3}}\chi(T^{\frac{1}{3}})$.

Outro processo de cálculo simbólico, invertendo a série (5.13) nos dá

$$\begin{aligned}\tau_2 = & - (\frac{12\pi}{\beta})^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{15}\frac{12d-\beta^2-15}{\beta}T - \frac{1}{3}(\frac{12\pi}{\beta^4})^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}} + \\ & + \frac{12^{\frac{2}{3}}}{18900}(-1737d^2+3150d+132d\beta^2+2\beta^4-1050\beta^2-1575)(\frac{\pi}{\beta})^{\frac{5}{3}}T^{\frac{5}{3}} + \\ & + \frac{\pi}{15}\frac{9d-7\beta^2-12}{\beta^2}T^2 + O(T^{\frac{7}{3}}). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Assim, para obtermos o período, basta fazer $P = \tau_1 + \tau_2$. Para encontrarmos a amplitude A, é preciso conhecer antes o valor de τ^* que corresponde ao máximo valor de x. Este valor é obtido da solução correspondente a equação (5.4), impondo que se

$$x(\tau^*) = \mathbf{e}_1^\mathbf{T} \exp\left(\begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tau^*\right)\begin{bmatrix} -1 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

se há de verificar $\dot{x}(\tau^*) = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} T & -1 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tau^*\right)\begin{bmatrix} -1 \\ y_0 \end{bmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo essa expressão e isolando τ^*, se obtém

$$\tau^* = \frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{2\omega(T+y_0)}{2-T(T+y_0)}\right),$$

de maneira que $\pi/2 < \omega\tau^* < \pi$, com $\omega = \sqrt{1-T^2/4}$. Substituindo esta expressão em

$$x(\tau^*) = \exp\left(\frac{T}{2}\tau^*\right)\left[-\cos\omega\tau^* - \left(\frac{T}{2\omega} + \frac{2y_0}{2\omega}\right)\sin\omega\tau^*\right],$$

chegaremos após alguns cálculos que

$$A = x(\tau^*) = \sqrt{1-T(y_0+T)+(y_0+T)^2} \times \exp\left[\frac{T}{\sqrt{4-T^2}}\tan^{-1}\left(\frac{(y_0+T)\sqrt{4-T^2}}{2-T(y_0+T)}\right)\right].$$

Substituindo na expressão acima a equação (5.15) primeiro e depois a expressão (5.16) em torno do ponto (T, y_0), se obtém a expressão para amplitude em potências de $T^{\frac{1}{3}}$.

■

Agora, é imediato transladar esse resultado aos sistemas da forma (3.3)-(3.5), julgando β_M como o parâmetro de bifurcação.

Teorema 5.2.6. *Suponhamos para o sistema* (3.3)-(3.5) *que* $d_L > 0$, $\beta_L < 0$, *junto com* $0 < b_M < d_M$ *e* $4d_M - \beta_M^2 > 0$. *Então, o equilíbrio da zona central, estável para* $\beta_M < 0$ *passa a ser um centro quando* $\beta_M = 0$. *Da órbita mais externa deste centro surge um ciclo limite estável para* $\beta_M > 0$ *e suficientemente pequeno, cuja amplitude (medida com o valor máximo de u) e período são dados por*

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\sqrt{d_M}} + \frac{\pi(d_L - d_M)}{d_M^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right) - \frac{12^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{5}{3}}((d_L - d_M)^2 + \beta_L^2 d_M)}{10 d_M^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{5}{3}} + \\
&+ \frac{\pi[4(d_L - d_M) - 3\beta_L^2]}{4d_M^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^2 + \frac{12^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{7}{3}}}{210 d_M^{\frac{7}{2}}}(-14d_M^2\beta_L^2 - 15d_M^3)\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{7}{3}} + \\
&+ \frac{12^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{7}{3}}}{210 d_M^{\frac{7}{2}}}(33d_L^3 + 31\beta_L^2 d_L d_M - 81 d_L^2 d_M + 63 d_L d_M^2 + \beta_L^4 d_M + \beta_L^2 d_L^2)\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{7}{3}} + \\
&- \frac{12^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{5}{3}}[7(d_L - d_M)^2 - 6\beta_L^2 d_L + \beta_L^2 d_M]}{60 d_M^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{8}{3}} + O(\beta_M^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d_M - 2b_M}{d_M} + \frac{12^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}(d_L - d_M)}{8d_M}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{2}{3}} + \\
&+ \frac{12^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{4}{3}}(d_L - d_M)(75d_M + 24d_L + 28d_L^2)}{480 d_M^2}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{4}{3}} + \\
&+ \frac{12^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}(d_L - d_M)}{12 d_M}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{5}{3}} + \frac{\pi^2(d_M - b_M)}{100800 d_M}\left(14175 + 1260\frac{\beta_L^2}{d_M}\right)\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^2 + \\
&+ \frac{\pi^2(d_M - b_M)}{100800 d_M}\left(22680\frac{d_L}{d_M} - 536\frac{\beta_L^4}{d_M^2} - 3456\frac{\beta_L^2 d_L}{d_M} - 1944\frac{d_L^2}{d_M^2}\right)\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^2 + \\
&+ \frac{12^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{4}{3}}(d_L - d_M)(57d_M + 42d_L - 26\beta_L^2)}{360 d_M^2}\left(\frac{\beta_M}{\beta_L}\right)^{\frac{7}{3}} + O(\beta_M^{\frac{8}{3}}).
\end{aligned}$$

Demonstração. Basta desfazermos as mudanças introduzidas até chegar a formulação das equações (5.3)-(5.4), ou seja, substituímos nos resultados do Teorema 5.2.5 as expressões

$$A_u = \frac{d_M - b_M}{d_M}A_x - \frac{b_M}{d_M}, \quad P_t = \frac{P_\tau}{\sqrt{d_M}}$$

e expressamos β, d e T, como em (5.2), em função dos parâmetros originais.

■

Podemos observar neste último Teorema que não podemos garantir que o ciclo limite que bifurca seja o único ciclo limite do sistema, pois não levamos em conta a influência da dinâmica na zona direita.

É importante destacar que a bifurcação analisada pode ser qualificada como abrupta, pois para uma variação tão pequena como queremos do parâmetro de bifurcação, o ciclo limite que bifurca surge com um tamanho apreciável.

Capítulo 6

Aplicações em Circuitos Elétricos

Iremos analisar algumas consequências dos resultados do Capítulo 4 para o estudo dos sistemas não lineares de controle de segunda ordem com realimentação. Em especial, analisaremos os sistemas que são estáveis em circuitos fechados e não estáveis em circuitos abertos e que não apresentem simetria (caso mais frequente na prática).

6.1 Sistemas de Controle com Saturação

As equações nas variáveis de estado do sistema, na forma canônica de controle são as seguintes:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sat}(-k_2 x_1 - k_1 x_2 + k_r r). \tag{6.1}$$

A instabilidade no circuito aberto e a estabilidade no fechado são traduzidas pelas seguintes condições $a_1 < 0$, $a_2 > 0$,$k_2 + a_2 > 0$, $k_1 + a_1 > 0$. Consequentemente temos $k_1 > 0$. Para escrever o sistema na forma da família P, introduzimos a mudança $x = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + k_r r$, $y = x_1$, de maneira que

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -k_2 \left(-\frac{x + k_2 y - k_r r}{k_1} \right) - k_1 \left[-a_2 y - a_1 \left(-\frac{x + k_2 y - k_r r}{k_1} \right) + \operatorname{sat}(x) \right] = \\
&= \frac{k_2}{k_1}(x + k_2 y - k_r r) + k_1 a_2 y - a_1 (x + k_2 - k_r r) - k_1 \operatorname{sat}(x), \\
\dot{y} &= -\frac{x + k_2 y - k_r r}{k_1},
\end{aligned}$$

que também pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(\frac{k_2}{k_1} - a_1\right) x + \left(\frac{k_2^2}{k_1} + k_1 a_2 - a_1 k_2\right) y - k_1 \operatorname{sat}(x) + \left(a_1 - \frac{k_2}{k_1}\right) k_r r, \\
\dot{y} &= -\frac{x}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} y + \frac{k_r r}{k_1}.
\end{aligned}$$

A parte linear é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1} - a_1 - k_1 & \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 a_2 - a_1 k_2 \\ -\frac{1}{k_1} & -\frac{k_2}{k_1} \end{bmatrix}.$$

Podemos ver facilmente que, com nossas hipóteses,

$$a_{12} = \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 a_2 - a_1 k_2 > \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 a_2 + a_1 a_2 = \frac{k_2^2}{k_1} + a_2(k_1 + a_1) > 0,$$

e portanto, o sistema está na classe P^*. Também, vemos que o traço é $\beta_M = -(k_1 + a_1) < 0$, enquanto que para o determinante tem-se $d_M = k_2 + a_2 > 0$

Agora passamos para forma de Liénard, utilizando a mudança do Lema 3.2.4, ou seja,

$$\begin{aligned}
u &= x, \\
v &= -\frac{k_2}{k_1} x - \left(\frac{k_2^2}{k_1} + k_1 a_2 - a_1 k_2\right) y,
\end{aligned}$$

e depois de algumas operações elementares, temos que

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -a_1 u - v - k_1 \operatorname{sat}(u) + \left(a_1 - \frac{k_2}{k_1}\right) k_r r, \\
\dot{v} &= a_2 u + k_2 \operatorname{sat}(u) - a_2 k_r r.
\end{aligned}$$

Assim temos um sistema na forma (3.3)-(3.5) com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
a_L &= \left(a_1 - \frac{k_2}{k_1}\right) k_r r + k_1,\ b_L = -a_2 k_r r - k_2,\ \beta = \beta_L = \beta_R = -a_1, \\
a_R &= \left(a_1 - \frac{k_2}{k_1}\right) k_r r = k_1,\ b_R = -a_2 k_r r + k_2,\ d = d_L = d_R = a_2.
\end{aligned}$$

Como podemos ver trata-se de um sistema quase-simétrico, que estudamos por meio do Teorema 4.3.3. Identificando os correspondentes parâmetros de bifurcação, temos que $\nu = 2k_1 > 0$, assim poderíamos usar o item c) do Teorema se $4d - \beta^2 = 4a_2 - a_1^2 > 0$ e $\beta = -a_1$.

Fixando todos os parâmetros do sistema exceto a_1, temos segundo o enunciado c) do Teorema 4.3.3, que quando a_1 passa por zero e se faz negativo, um ciclo limite instável bifurca da órbita periódica do ponto do infinito.

Se tomarmos, por exemplo $a_1 = -a_2 = -1$, $k_1 = k_2 = 10$, $k_r = 11$ e $r = 0,45$, obtemos para o sistema (6.1), o retrato de fase dado pela figura 3.2 referente ao Exemplo 3.1.1.

Apêndice A

Transformações de Filippov e Extensão de um Resultado de Coppel

Neste apêndice teremos alguns resultados sobre ciclos limites para sistemas de Liénard, tais como os teoremas de Filippov e Coppel.

A.1 Teorema de Filippov

Para um sistema de Liénard da forma

$$\dot{x} = F(x) - y, \quad \dot{y} = g(x), \tag{A.1}$$

onde $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$, com F, g contínuas e $xg(x) > 0$, para $x \neq 0$ (o qual indica que a origem é o único equilíbrio), podemos definir a função

$$G(s) = \int_0^s g(x)dx,$$

de maneira que $G(0) = 0$ e $G(s) > 0$ para todo $s \neq 0$. Seja

$$x_L(z) < 0 < x_R(z)$$

as duas soluções da equação

$$G(x) = z > 0.$$

Então, o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dx_L}\frac{dx_L}{dt} = g(x_L(z))[F(x_L(z)) - y], \\ \frac{dy}{dt} &= g(x_L(z)) \qquad\qquad (z > 0) \end{aligned} \tag{A.2}$$

que é equivalente a equação

$$\frac{dz}{dy} = F_L(z) - y, \quad \text{onde} \quad F_L(z) = F(x_L(z)), \quad z > 0, \tag{A.3}$$

reproduz as órbitas do sistema original para $x < 0$. Analogamente, a equação

$$\frac{dz}{dy} = F_R(z) - y, \quad \text{onde} \quad F_R(z) = F(x_R(z)), \quad z > 0, \tag{A.4}$$

reproduz as órbitas do sistema original para $x > 0$. Comparando as duas equações (A.3)-(A.4), se conclui (ver págs. 111-112) o seguinte resultado.

Proposição A.1.1. *Nas condições anteriores, uma condição necessária para a existência de ciclos limites é que exista $z^* > 0$ tal que*

$$F_L(z^*) = F_R(z^*), \tag{A.5}$$

ou, equivalentemente, que o sistema

$$\begin{aligned} F(s_L) &= F(s_R) \\ G(s_L) &= G(s_R) \end{aligned} \tag{A.6}$$

tenha pelo menos uma solução (s_L, s_R) com $s_L < 0 < s_R$.

Agora, vamos enunciar o teorema de Filippov.

Teorema A.1.2 (Filippov, 1952)**.** *Seja um sistema* (A.1)*. Suponhamos que*

1. *$f(x)$, $g(x)$ são contínuas, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $G(\pm\infty) = +\infty$;*

2. *após a transformação de Filippov para o sistema equivalente* (A.3)-(A.4)*, existem $\delta > 0$ e $0 < a < \sqrt{8}$ tal que*

$$F_L(z) \leq (\neq) F_R(z), \quad F_L(z) < a\sqrt{z}, \quad F_R(z) > -a\sqrt{z}, \quad \text{para} \quad 0 < z < \delta; \tag{A.7}$$

3. *existem* $z_0 > \delta$ *e* $0 < a < \sqrt{8}$ *tal que*

$$\int_0^{z_0} (F_L(z) - F_R(z))dz > 0, \tag{A.8}$$

e

$$F_L(z) \geq F_R(z), \quad F_L(z) > -a\sqrt{z}, \quad F_R(z) < a\sqrt{z}, \quad \text{para} \quad z > z_0, \tag{A.9}$$

então o sistema possui pelo menos uma órbita fechada.

Vamos conhecer alguns lemas antes de provar o teorema.

Lema A.1.3. *Suponhamos que as funções do lado direito do sistema* (A.1) *satisfazem:*

1. $f(x), g(x) \in C^0$ *(para* $|x| < \infty$*),*

2. $xg(x) > 0$*, para* $x \neq 0$*.*

Então em todo plano de fase (x, y)*, o sistema* (A.1) *tem a propriedade de existência de uma única solução para o problema de valor inicial.*

Demonstração. Nós iremos usar a transformação de Filippov. Vimos anteriormente que o sistema (A.1) é equivalente ao sistema (A.3)-(A.4). Quando $x \neq 0$, o lado direito das equações (A.3)-(A.4) é continuamente diferenciável com respeito a z, i.e.

$$\frac{dF_L(z)}{dz} = \frac{dF_L(z)}{dx}.\frac{dx}{dz} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

é contínua. No eixo y, o lado direito da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - F(x)}$$

é continuamente diferenciável com respeito a y, exceto na origem. Consequentemente, o sistema (A.1) tem uma única solução no plano de fase (x, y).

■

Observemos que o sistema (A.1) tem uma única solução em cada ponto do plano (x, y) exceto na origem.

Lema A.1.4. *Suponhamos que as funções no lado direito das equações* (A.1) *satisfazem:*

1. *$g(x), F(x) \in C^0$ (para $|x| < \infty$).*

2. *$xg(x) > 0$, para $x \neq 0$.*

Então começando de qualquer ponto $C(x, F(x))$, $x \neq 0$, a semi-órbita positiva e negativa do sistema (A.1) *deve interceptar o eixo y ou tender para a origem O.*

Demonstração. Nós iremos provar somente o caso em que na região $G = \{x > 0,\ y < F(x)\}$, todas as semi-órbitas positivas L_C^+ ou tem tendem para origem ou interceptam a parte negativa do eixo y. Por outro lado, quando t cresce, a solução $(x(t), y(t))$ de (A.1) é monotonicamente decrescente na região G. Se L_C^+ é limitada, então L_C^+ deve ter único ponto limite D no qual deve ser um ponto crítico. Se $D \neq \{0\}$, então nós temos uma contradição, pois não há outro ponto crítico em G. Se L_C^+ não é limitada, então L_C^+ deve ter uma assíntota perpendicular $x = a \geq 0$. Entretanto, como $x \to a$, $|y| \to +\infty$, nós temos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-g(x)}{y - F(x)}$ tende para zero e isso é novamente uma contradição. Isso prova que na região G, L_C^+ ou tende para a origem ou intercepta a parte negativa do eixo y. Similarmente, nós podemos provar que na região $\{x > 0,\ y > F(x)\}$, L_C^- ou tende para origem ou intercepta a parte positiva do eixo y. A prova também é análoga para $x < 0$. Isto prova o lema.

■

Lema A.1.5. *Suponhamos que as funções do lado direito do sistema* (A.1) *satisfazem:*

1. *$F(x), g(x) \in C^0$ (para $|x| < \infty$);*

2. *$xg(x) > 0$, para $x \neq 0$;*

3.
$$\begin{cases} \overline{\lim}_{x \to +\infty} F(x) = +\infty, \\ \underline{\lim}_{x \to -\infty} F(x) = -\infty \end{cases} \tag{A.10}$$

   ou

$$\int_0^{\pm\infty} g(\xi) d\xi = G(\pm\infty) = +\infty. \tag{A.11}$$

$$F(x) > k_1, \quad \text{para } x > 0, \quad F(x) < k_2, \quad \text{para } x < 0, \tag{A.12}$$

então uma semi-órbita L_p^+ *de* (A.1) *começando de qualquer ponto* $P(0, y_p)$, $y_p \neq 0$, *deve interceptar a curva* $y = F(x)$.

Demonstração. Nós iremos provar somente o caso para $y_p > 0$. Da hipótese (2), nós encontramos que y é monotonicamente decrescente em y ao longo de L_p^+. Se (A.10) da hipótese (3) for válido, então $y_p < \overline{\lim}_{x\to+\infty} F(x)$ implicará que L_p^+ deverá interceptar a curva $y = F(x)$. Se (A.11) e (A.12) na hipótese (3) for válido, e $y_p > \overline{\lim}_{x\to+\infty} F(x)$, nós provaremos a afirmação desse teorema por contradição. Suponha que L_p^+ não intercepta a curva $y = F(x)$, i.é., sempre permanece acima da curva $y = F(x)$. Então, ao longo de L_p^+, nós temos

$$
\begin{aligned}
0 < y - F(x) < y_P - F(x) < y_p - k_1,\\
\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - F(x)} < \frac{-g(x)}{y_p - k_1}\\
k_1 - y_p < y - y_p < \int_0^x \frac{-g(x)}{y_p - k_1} dx\\
= \frac{-1}{y_p - k_1} G(x) \to +\infty, \quad \text{quando } x \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Isso gera uma contradição. Assim, L_p^+ deve interceptar a curva $y = F(x)$. O caso em que $y_p < 0$ é análogo.

■

Teorema A.1.6 (A. V. Dragilev)**.** *Considere a equação*

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{A.13}$$

ou o sistema equivalente

$$\frac{dy}{dt} = -g(x), \quad \frac{dx}{dt} = y - F(x). \tag{A.14}$$

Suponhamos que

1. $F(x)$ *e* $g(x)$ *satisfazem a condição de Lipschitz para* $|x| < A$, A *suficientemente grande;*

2. $xg(x) > 0$ *para* $x \neq 0$, $G(\pm\infty) = +\infty$, *onde* $G(x) = \int_0^x g(x)dx$*;*

3. *$F(x) < 0$ para $0 < x < x_1$, $F(x) > 0$ para $x_2 < x < 0$;*

4. *$\exists M > \max(x_1, |x_2|)$, $k_2 < k_1$, tal que $F(x) \geq k_1$ para $x > M$, $F(x) \leq k_2$ para $x > -M$.*

Então (A.14) *tem pelo menos uma órbita fechada.*

Demonstração. Da hipótese (1), (A.14) tem uma única solução para o problema de valor inicial em $|x| < A$. Vamos assumir que $k_1 > 0$. No caso $k_2 < k_1 \leq 0$, fazemos $x^{'} = -x$, $y^{'} = -y$, assim a forma do sistema (A.14) é invariante e as hipóteses (1)-(3) ainda são satisfeitas. Com relação a k_1, k_2 temos que $-k_2 > -k_1 \geq 0$.

1. Vamos construir primeiramente L_1. Seja $\lambda(x,y) = y^2/2 + G(x)$, assim $\lambda(x,y) = C > 0$ é uma família de curvas fechadas no plano (x,y) em torno do único ponto crítico O de (A.14).
$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(A.14)} = y\dot{y} + g(x)\dot{x}$$
$$= y(-g(x)) + g(x)(y - F(x))$$
$$-g(x)F(x) \geq 0, \quad \text{para}\,|x| \ll 1.$$
Assim, para C_1 suficientemente pequeno, ao longo da curva fechada
$$L_1 : \lambda(x,y) = C_1, \quad \left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(A.14)} \geq 0;$$
e L_1 pode ser a fronteira.

2. Agora, construiremos L_2. Suponhamos que $|F(x)| < \varepsilon$ para $|x| \leq M$. Assim, para d suficientemente grande, temos
$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) > a = d - \varepsilon > 0, \quad \text{se}\,|x| \leq M,\, y > d;$$
$$0 \leq -g(x) = \frac{dy}{dt} < b, \quad \text{se} - M < x < 0;$$
$$-b < -g(x) = \frac{dy}{dt} < 0, \quad \text{se}\,0 < x < M.$$

Assim,

$$0 < \frac{dy}{dx} < \frac{b}{a} \qquad \text{se} \quad -M < x < 0,\ y > d;$$
$$\frac{-b}{a} < \frac{dy}{dx} < 0 \qquad \text{se} \quad 0 < x < M,\ y > d.$$

Escolhemos um ponto U na linha $x = -M$ tal que $y_U > 2d$. Veja figura A.1. Para d suficientemente grande, b/a pode ser arbitrariamente pequeno. Consequentemente, $\bar{f}(U', I^+)$ deve interceptar a parte positiva do eixo y em P, e a linha $x = M$ em Q. Além disso, a coordenada y ao longo do segmento de órbita $\widehat{UPQ}$, denotada por $y_{\widehat{UPQ}}$ deve satisfazer $y_{\widehat{UPQ}} > d$, e $|y_Q - y_U|$ pode ser arbitrariamente pequeno. Pelo

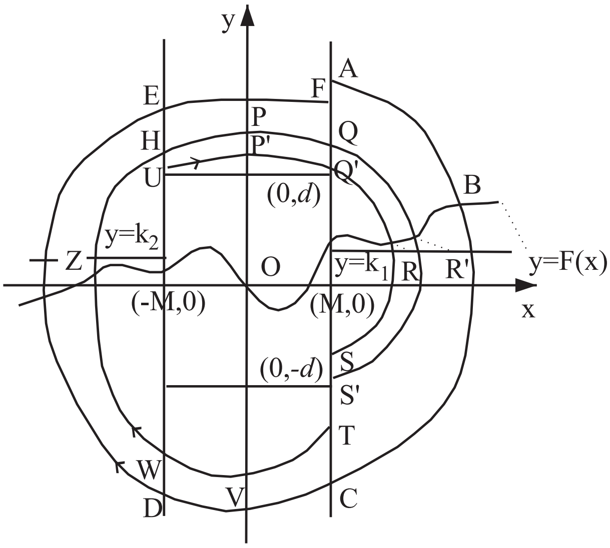

Figura A.1: Referente ao Teorema A.1.6.

Lema A.1.5, continuando no sentido positivo, $\bar{f}(U, I^+)$ interceptará $y = F(x)$ em um ponto, digamos, R. Pelo Lema A.1.4, prosseguindo na sentido positivo, $\bar{f}(U, I^+)$ deverá interceptar $x = M$ em algum ponto S.

Escolhemos outro ponto T na linha $x = M$, tal que $y_T < \min(-2d, y_S)$. Como no argumento acima, vemos que para d suficientemente grande, $\bar{f}(U, I^+)$ deve interceptar a parte negativa do eixo y em um ponto V e a linha $x = -M$ em um ponto W. Ainda, ao longo do segmento de órbita $\widehat{TVW}$, a coordenada y satisfaz $y_{\widehat{TVW}} < -d$, e $|y_T - y_W|$ pode ser arbitrariamente pequeno. Pelo Lema A.1.5, prosseguindo no sentido positivo, $\bar{f}(T, I^+)$ deverá interceptar $y = F(x)$ em Z, a linha $x = -M$ em H, com $y_H > 0$.

Sejam $\widehat{UPQRS}$ e $\widehat{TVWZH}$ denotando respectivamente os arcos de órbitas conectando U, P, Q, R, S e T, V, W, Z, H. Se $y_H \leq y_U$, seja

$$L_2 = \widehat{UPQRS} \cup \overline{ST} \cup \widehat{TVWZH} \cup \overline{HU}.$$

Se $dx/dt < 0$ em $\overline{ST}$ e $dx/dt > 0$ em $\overline{HU}$, a curva fechada simples L_2 pode ser usada como uma outra fronteira. O teorema é provado para esse caso.

Se $y_H > y_U$, continuemos a órbita no sentido positivo até $\bar{f}(T, I^+)$ interceptar a parte positiva do eixo y, a linha $x = M$, a curva $y = F(x)$, e a linha $x = M$ novamente, respectivamente nos pontos P', Q', R' e S'. Vamos provar que para d suficientemente grande, devemos ter $y_{S'} > y_T$.

Seja

$$\bar{\lambda}(x, y) = \frac{1}{2}(y - k_2)^2 + G(x).$$

Agora, vamos examinar o comportamento de $\bar{\lambda}(x, y)$ ao longo do arco de órbita $\widehat{TVWHQ'S'}$.

$$\left.\frac{d\bar{\lambda}}{dy}\right|_{(A.14)} = F(x) - k_2,$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{Q'} - \bar{\lambda}_{S'} &= \int_{y_{S'}}^{y_{Q'}} (F(x) - k_2)dy \\ &> (k_1 - k_2)(y_{Q'} - y_{S'}) > 0. \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\bar{\lambda}_{W'} - \bar{\lambda}_{H'} = \int_{y_{W'}}^{y_{H'}} (k_2 - F(x))dy \geq 0.$$

$$\left.\frac{d\bar{\lambda}}{dy}\right|_{(A.14)} = \frac{g(x)[k_2 - F(x)]}{y - F(x)}.$$

Se $|x| < M$, então para d suficientemente grande, $|d\bar{\lambda}/dx|$ pode ser arbitrariamente pequeno e consequentemente $|\bar{\lambda}_T - \bar{\lambda}_W|$ e $|\bar{\lambda}_H - \bar{\lambda}_{Q'}|$ também pode ser suficientemente pequeno. Assim, temos

$$\bar{\lambda}_T - \bar{\lambda}_S > \frac{1}{2}(k_1 - k_2)(y_{Q'} - y_{S'}) > 0.$$

Isso prova que para d suficientemente grande, temos $y_{S'} > y_T$.

Fazendo

$$L_2 = TVW\widehat{ZHP'}Q'R'S' \cup \overline{S'T},$$

L_2 pode ser usado como a outra fronteira. Isto completa a prova do teorema.

■

Lema A.1.7. *Considere a equação*

$$\frac{dz}{dy} = F(z) - y. \tag{A.16}$$

Suponhamos que $F(z)$ é contínua, $F(0) = 0$, e $F(z) < a\sqrt{z}$ (ou $F(z) > -a\sqrt{z}$) para $0 < z < \delta$, onde $a < \sqrt{8}$. Então a curva solução de (A.16) *passando por $B(F(z), z)$ deve interceptar o eixo y nos pontos A e C com $y_A \geq 0$, $y_C < 0$ (ou $y_A > 0$, $y_C \leq 0$), onde $z > 0$ é arbitrário.*

Demonstração. Nós iremos provar o caso descrito fora do parênteses. Veja figura A.2.

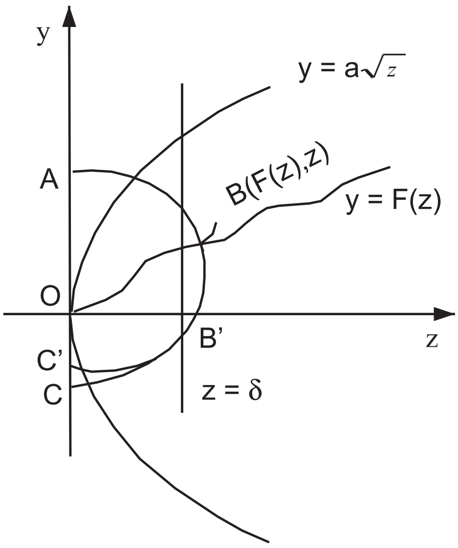

Figura A.2: Referente ao Lema A.1.7.

Do Lema A.1.4, nós encontramos que uma órbita solução passando por B deve interceptar as partes positiva e negativa do eixo y em A e C respectivamente, com $y_A \geq 0$, $y_C \leq 0$. Nós apenas queremos mostrar que, abaixo as hipóteses do lema, nós temos $y_C < 0$.

Considere a seguinte equação

$$\frac{dz}{dy} = a\sqrt{z} - y. \tag{A.17}$$

Fazendo $z = u^2$, (A.17) é transformada em $2udu/dy = au - y$, ou

$$\frac{du}{dt} = au - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2u. \tag{A.18}$$

A equação característica é

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a\lambda + 2 = 0,$$

onde os autovalores são $\lambda_1\,,\, \lambda_2 = (a \pm \sqrt{a^2-8})/2$.

Se o número positivo $a < \sqrt{8}$, então $\lambda_1\,,\, \lambda_2$ são raízes complexas e o ponto crítico O de (A.18) é um foco. Assim, a órbita solução de (A.18) passando por B deve interceptar as partes positiva e negativa do eixo y em A' e C' respectivamente, com $y_{A'} > 0$, $y_{C'} < 0$. Consequentemente, o sistema (A.17) também tem a mesma propriedade. Agora, nós compararemos o campo de vetores correspondente a (A.16) e (A.17).

Se $z_B > \delta$, a órbita solução de (A.16) passando por B deve interceptar a linha $z = \delta$ em um ponto B' com $y_{B'} < F(\delta)$. Se $F(z) < a\sqrt{z}$, quando $0 \leq z \leq \delta$, nós temos que

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(A.16)} < \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(A.17)}, \quad \text{para } 0 \leq z \leq \delta.$$

Pelo princípio da comparação, concluímos que $y_C \leq y_{C'} < 0$. A prova para o caso descrito dentro do parênteses é similar.

■

Note que quando $a \geq \sqrt{8}$, os autovalores $\lambda_1\,,\, \lambda_2$ de (A.18) são números reais com o mesmo sinal e o ponto crítico O de (A.18) é um nó. Toda órbita tenderá para o ponto crítico O, e assim $y_{C'} = 0$. Como mostra a figura A.3, neste caso é possível que $0 = y_C \leq y_{C'}$. Por simplicidade, a figura não tem a transformação $z = u^2$ em consideração. $\bar{f}(B', I)_{(A.16)}$ e $\bar{f}(B', I)_{(A.17)}$ respectivamente denota as órbitas solução das equações (A.16) e (A.17) passando pelo ponto B'.

Disso, nós vemos que as condições do lema acima são em certo sentido, a melhor possível para assegurar que $y_C < 0$.

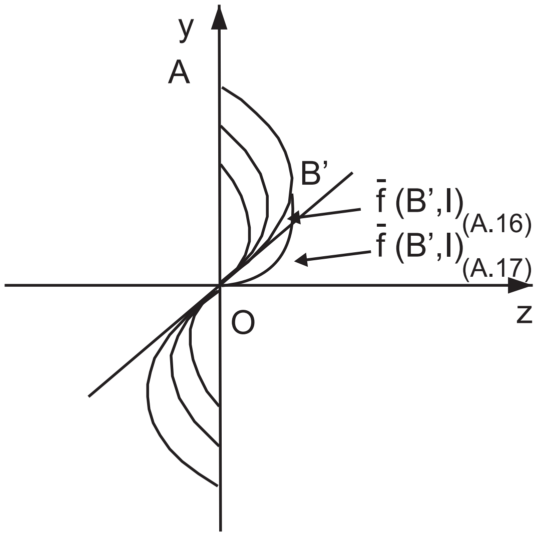

Figura A.3: Referente ao Lema A.1.7.

Lema A.1.8. *Considere a equação* (A.16)*. Suponhamos que $F(z)$ é contínua, $F(0) = 0$ e $F(z) < a\sqrt{z}$ (ou $F(z) > -a\sqrt{z}$) se $z > z_0$, onde $a < \sqrt{8}$. Então a curva solução $\bar{f}(K, I^+)$ (ou $\bar{f}(M, I^-)$) começando de qualquer ponto $K(y_k, 0)$, $y_k < 0$ (ou de $M(y_M, 0)$, $y_M > 0$) deve interceptar o eixo y em R, $y_R \geq 0$ (ou em N, $y_N \leq 0$).*

Demonstração. Nós provaremos somente o caso descrito fora do parênteses. Se $\bar{f}(K, I^+)$ não intercepta $z = z_0$, deve interceptar a curva $y = F(z)$ e então a parte positiva do eixo y no ponto R, com $y_R \geq 0$.

Se $\bar{f}(K, I^+)$ intercepta a linha $z = z_0$ no ponto P, então a órbita solução $\bar{f}(P, I)|_{(\mathrm{A.17})}$ da equação (A.17) deve interceptar $z = z_0$ novamente em um ponto P', onde P' está acima da curva $y = F(z)$. Isto é devido ao fato de que quando (z, y) está abaixo de $y = F(z)$, temos que $dz/dy|_{(\mathrm{A.17})} > 0$.

Além disso, quando $z > z_0$, temos

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(\mathrm{A.17})} > \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(\mathrm{A.16})};$$

assim, $\bar{f}(P, I)|_{(\mathrm{A.16})}$ deve ficar a esquerda de $\overline{PP'}$ e não pode interceptar $\overline{PP'}$. Consequentemente, $\bar{f}(P, I)|_{(\mathrm{A.16})}$ deve interceptar $z = z_0$ no ponto Q, com $y_Q > F(z_0)$. Ainda, $dz/dy|_{(\mathrm{A.16})} < 0$ quando $y > F(z)$; assim $\bar{f}(P, I)|_{(\mathrm{A.16})}$ de interceptar a parte positiva do eixo y no ponto R, com $y_R \geq 0$. Isto prova o lema.

∎

Demonstração do Teorema (A.1.2)**.**

1. Construção da fronteira L_1. Da hipótese (2), os pressupostos dentro e fora do parênteses no Lema A.1.7 são satisfeitos para as equações (A.3) e (A.4) respectivamente. Escolhemos $0 < z < \delta$, e pontos $B(F_L(z), z)$, $E(F_R(z), z)$. O Lema A.1.7 implica que as curvas solução $\bar{f}(B, I)|_{(A.3)}$ e $\bar{f}(E, I)|_{(A.4)}$ interceptarão o eixo y em A, C e F, D respectivamente, com $y_A \geq 0$, $y_C < 0$ e $y_F > 0$, $y_D \leq 0$. Consideramos as equações

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{F_L(z) - y}, \tag{A.19}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{F_R(z) - y}. \tag{A.20}$$

Da hipótese (2), temos $F_R(z) - y \geq F_L(z) - y$ e $F_R(z) - y \neq F_L(z) - y$ para $0 \leq z \leq \delta$. Assim, em $\widehat{EF}$, temos

$$0 > \left.\frac{dy}{dz}\right|_{(A.19)} \geq \left.\frac{dy}{dz}\right|_{(A.20)},$$

e o arco $\widehat{BA}$ fica totalmente abaixo do arco $\widehat{EF}$, com $y_A < y_F$. Similarmente, temos que $y_C < y_D$. Agora, nós transformaremos essas curvas na metade do plano (z, y) para o plano (x, y), onde $\widehat{FG}$ e $\widehat{CH}$ são respectivamente arcos de órbitas passando pelos pontos F e C, e $\overline{GB'}$, $\overline{HE'}$ são paralelos ao eixo y. Como mostra a figura A.4, nós fazemos $L_1 = \widehat{E'FG} \cup \widehat{GB'} \cup \widehat{B'CH} \cup \widehat{HE'}$. Se $\frac{dx}{dt} > 0$ em $\overline{GB'}$ e $\frac{dx}{dt} < 0$ em $\overline{HE'}$, a curva L_1 pode ser a fronteira.

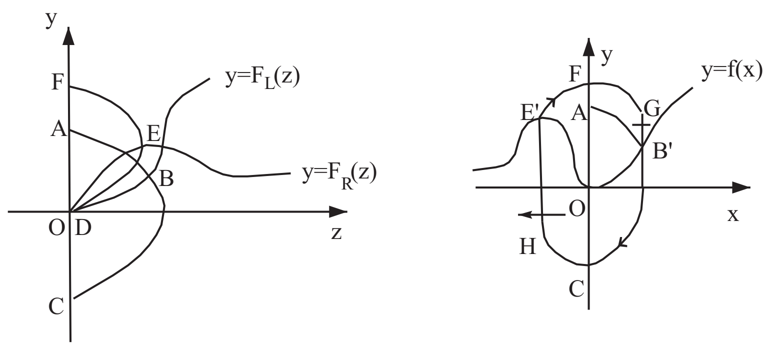

Figura A.4: Referente ao Teorema A.1.2.

2. Construção de outra fronteira L_2. A hipótese (3) implica que o Lema A.1.8 pode ser aplicado para as equações (A.3) e (A.4). A equação (A.4) satisfaz condições descritas fora do parênteses no Lema A.1.8, enquanto a equação (A.3) satisfaz as condições dentro do parênteses. Escolha um ponto $K(y_K, 0)$, com $y_K < 0$, assim a órbita $\bar{f}(K, I)|_{(\mathrm{A.4})}$ interceptará o eixo y em um ponto R com $y_R \geq 0$. Se a equação (A.4) também satisfaz condições descritas dentro do parênteses no Lema A.1.7, temos que $y_R > 0$. Seja $\lim\limits_{y_K \to -\infty} y_R = y_M$, e agora consideremos as diferentes possibilidades.

   Suponhamos que $y_M < +\infty$. Dos Lemas A.1.7 e A.1.8 temos que $\bar{f}(M, I)|_{(\mathrm{A.3})}$ intercepta o eixo y em um ponto N com $y_N < 0$. Os Lemas A.1.7 e A.1.8 ainda implicam que $\bar{f}(N, I)|_{(\mathrm{A.4})}$ intercepta o eixo y em P com $y_P > 0$. Claramente temos que $y_P < y_M$. Considerando o plano (x, y) como na figura A.5, definimos $L_2 = \widehat{MNP} \cup \overline{PM}$. Assim, $\dfrac{dx}{dt} > 0$ em $\overline{PM}$, e L_2 é uma outra fronteira.

   Para o caso em que $y_M = +\infty$, primeiro provaremos um lema. Suponhamos que $y_L(z), y_R(z)$ são respectivamente soluções de (A.3) e (A.4) satisfazendo a condição inicial $y_L(0) = y_R(0) = y_0$. No Teorema A.1.6, temos que para qualquer $z_0 > 0$ fixado e $\varepsilon > 0$ arbitrário e suficientemente pequeno, existe um $d > 0$ suficientemente grande tal que se $|y_0| > d$, então

$$|y_i(z_1) - y_i(z_2)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 \leq z_1,\ z_2 \leq z_0,\ i = L, R. \tag{A.21}$$

   Assim, se $|y_0| \to +\infty$, temos

$$\frac{y_0^2}{(F_L(z) - y_L(z))(F_R(z) - y_R(z))} \to 1 \quad \text{uniformemente, para} \quad 0 \leq z \leq z_0.$$

Lema A.1.9. *Sejam $y_L(z)$ e $y_R(z)$ respectivamente soluções de* (A.3) *e* (A.4)*, satisfazendo as condições iniciais $y_L(0) = y_R(0) = y_0$. Então existe $d > 0$ tal que $|y_0| > d$ implica que $y_L(z_0) < y_R(z_0)$.*

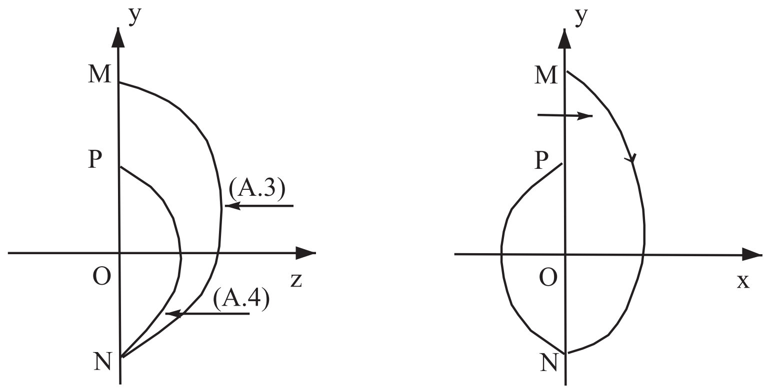

Figura A.5: Referente ao Teorema A.1.2.

Demonstração. Se $y_1(0) = y_2(0)$, obtemos de (A.19) e (A.20) que

$$\begin{aligned} y_0^2(y_R(z_0) - y_L(z_0)) &= \int_0^{z_0} (y_R(z) - y_L(z)) \frac{y_0^2 dz}{(F_L(z) - y_L(z))(F_R(z) - y_R(z))} \\ &+ \int_0^{z_0} (F_L(z) - F_R(z)) dz \\ &+ \int_0^{z_0} (F_L(z) - F_R(z)) \left[\frac{y_0^2}{(F_L(z) - y_L(z))(F_R(z) - y_R(z))} - 1 \right] dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Quando $|y_0| \to +\infty$, $I_1 \to 0$. Assim, $I_3 \to 0$, se $(F_L(z) - y_R(z))$ for limitado para $0 \leq z \leq z_0$. A hipótese (3) do Teorema implica que $I_2 > 0$. Assim, para $|y_0|$ suficientemente grande, devemos ter $y_R(z_0) > y_L(z_0)$.

$\blacksquare$

Agora construiremos outra fronteira L_2 para o caso em que $y_M = +\infty$. Escolha $K(y_0, 0)$, com $y_0 < 0$. A órbita $\bar{f}(K, I^+)|_{(A.4)}$ intercepta o eixo y em $R(y_L, 0)$, $y_L > 0$. Sejam $y_L(z), \bar{y}_L(z)$ soluções de (A.3) e $y_R(z), \bar{y}_R(z)$ soluções de (A.4), satisfazendo $y_L(0) = y_R(0) = y_0$, $\bar{y}_L(0) = \bar{y}_R(0) = y_1$. Do Lema A.1.9, temos que $y_L(z_0) < y_R(z_0)$, $\bar{y}_L(z_0) < \bar{y}_R(z_0)$ se $|y_0|$ é suficientemente grande. Como mostra a figura A.6, o ponto $S(\bar{y}_L(z_0), z_0)$ está abaixo do ponto $D(\bar{y}_R(z_0), z_0)$, e o ponto $V(y_L(z_0), z_0)$ está abaixo de $U(y_R(z_0), z_0)$.

Da hipótese (3) do teorema, temos que $F_R(z) \leq F_L(z)$ se $z > z_0$. Comparando as equações (A.3) e (A.4), concluímos que o arco de órbita $\widehat{SQ}$ de (A.3) deve ficar inteiramente do lado esquerdo do arco de órbita $\widehat{DU}$ de (A.4) e não pode interceptá-lo. Considerando o plano (x, y), colocamos $L_2 = V'K\widehat{U'D'}RS'Q' \cup \overline{Q'V'}$. Se $dx/dt < 0$ em

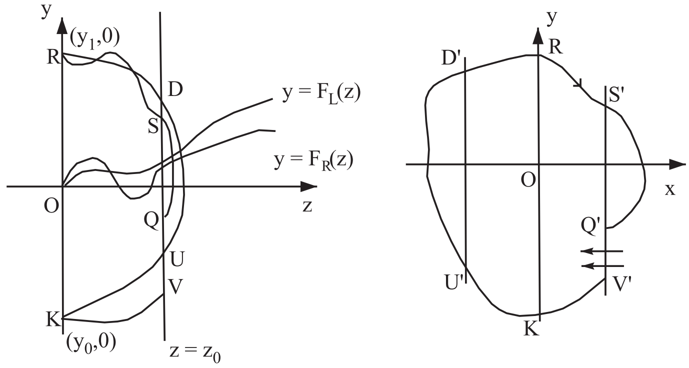

Figura A.6: Referente ao Teorema A.1.2.

$\overline{Q'V'}$, L_2 pode ser usada como uma outra fronteira. Assim construímos as fronteiras interior e exterior L_1, L_2 de uma região anular e o teorema é provado.

■

A.2 Teorema de Coppel

Teorema A.2.1 (Coppel, 1988). *Seja um sistema* (A.1)*, para o qual se assume existência e unicidade de soluções. Se f e g são continuamente diferenciáveis em um intervalo* (a, b)*, onde $a < 0 < b$, tal que*

(c1) $g(x) \gtrless 0$, para $x \gtrless 0$,

(c2) $f(x) \gtrless 0$, para $x \gtrless x_0$ com $x_0 < 0$,

(c3) o sistema de equações

$$\begin{aligned} F(x_1) &= F(x_2), \\ \frac{f(x_1)}{g(x_1)} &= \frac{f(x_2)}{g(x_2)}, \end{aligned} \tag{A.22}$$

tem no máximo uma solução (ξ_1, ξ_2) com $a < \xi_1 < x_0$ e $0 < \xi_2 < b$,

(c4) Se $F(\xi_0) = 0$ para um valor $\xi_0 < x_0$, então

$$\frac{f(x)F(x)}{g(x)} \quad \text{é decrescente para} \quad a < x < \xi_0,$$

então o sistema possui no máximo uma órbita periódica, se ela existe, tem expoente característico negativo.

Demonstração. Evidentemente, vamos assumir que o sistema (A.1) tem uma órbita periódica γ. Ela deve ficar em torno da origem, se a mesma for apenas um ponto crítico. Sejam A e B pontos de γ para os quais x assume seus valores mínimo e máximo. Assim,

$$x_A < 0,\, y_A = F(x_A) \quad \text{e} \quad x_B > 0,\, y_B = F(x_B).$$

Além disso, A e B são pontos nos quais γ intercepta a curva ω, definida pela equação $y = F(x)$. Pois, se $x \neq 0$, então

$$\frac{dx}{dy} = [F(x) - y]/g(x)$$

e portanto, quando $\dfrac{dx}{dy} = 0$

$$d^2x/dy^2 = -1/g(x),$$

que tem o sinal oposto de x.

Assim, γ intercepta alguma linha $x = \bar{x}$, com $x_A < \bar{x} < x_B$ em exatamente dois pontos, se nesta linha $x' \gtrless 0$ para $y \gtrless F(x)$. Em particular γ intercepta o eixo y em exatamente dois pontos M e N, onde $y_M < 0 < y_N$. Além disso, M e N são pontos em γ para os quais y assume valores máximo e mínimo. A curva γ é descrita pela equação $y = y_1(x)$ no menor arco AMB e pela equação $y = y_2(x)$ no maior arco BNA.

Se $y_B \leq y_A$ seja C o ponto na curva ω para o qual $x_C < 0$, $y_C = y_B$ e se $y_B \geq y_A$ seja D o ponto na curva ω para o qual $x_D > 0$, $y_D = y_A$.

Vamos denotar por $x_1(p)$ a função inversa de $F(x)$ no intervalo $a < x \leq x_0$ e por $x_2(p)$ a função inversa de $F(x)$ no intervalo $x_0 \leq x < b$. Assim a solução de (A.1) pode ser dada pelas equações

$$dy/dp = \lambda_i(p)/(p - y), \tag{A.23}$$

onde $\lambda_i = g[x_i(p)]/f[x_i(p)]$ e $i = 1$ ou 2 de acordo com $x < x_0$ ou $x > x_0$. Colocamos $p_0 = F(x_0) < 0$. Para $p > p_0$ e $p - p_0$ pequeno temos $\lambda_1(p) > 0 > \lambda_2(p)$ e

$$y_1(x_1(p)) > y_1(x_0) > y_1(x_2(p)).$$

Se $\lambda_1(p) \geq \lambda_2(p)$ para $p_0 \leq p \leq \min(y_A, y_B)$ então, pela teoria das inequações diferenciais,

$$y_1(x_1(p)) > y_1(x_2(p)) \quad \text{para } p_0 < p \leq \min(y_A, y_B).$$

Mostraremos que isso é impossível. Se $y_B \leq y_A$ então tomando $p = y_B$ obtemos $y_1(x_C) > y_B = y_C$. Portanto, γ intercepta a curva ω para algum x tal que $x_C < x < 0$, o que é uma contradição. Similarmente se $y_B \geq y_A$ então $y_1(x_D) > y_A = y_D$, o que também é uma contradição. Logo existe um $\hat{p}$ tal que $\lambda_1(\hat{p}) = \lambda_2(\hat{p})$. Concluímos que as equações (A.22) realmente tem uma solução (ξ_1, ξ_2), tal que $a < \xi_1 < x_0$ e $0 < \xi_2 < b$. Além do mais, se esta solução for única, devemos ter

$$\begin{aligned} \lambda_1(p) > \lambda_2(p), &\quad \text{para} \qquad p_0 \leq p < \eta, \\ 0 < \lambda_1(p) < \lambda_2(p), &\quad \text{para} \qquad p > \eta, \end{aligned} \tag{A.24}$$

onde $F(\xi_1) = F(\xi_2) = \eta > 0$. Além disso, $\eta < \min(y_A, y_B)$ e

$$y_1(x_1(p)) > y_1(x_2(p)) \quad \text{para } p_0 < p \leq \eta.$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$y_2(x_1(p)) > y_2(x_2(p)) \quad \text{para } p_0 < p \leq \eta.$$

Evidentemente existe uma único ξ_0 com $\xi_1 < \xi_0 < x_0$, tal que $F(\xi_0) = 0$.

Mostraremos agora que $y_A > y_B$. Assumimos o contrário ($y_A \leq y_B$) e seja $\bar{\gamma}$ a curva solução de (A.1) passando pelo ponto D. Então $\bar{\gamma}$ deve interceptar o eixo y nos pontos S e T, onde $y_M \leq y_S < 0$ e $0 < y_T \leq y_N$. Além disso, $\bar{\gamma}$ é dada pela equação $y = \bar{y}_1(x)$ no arco SD e pela equação $y = \bar{y}_2(x)$ no arco DT. Se $\bar{y}_1(x_2(p))$ for uma solução da equação diferencial (A.23) para $i = 2$ e

$$\bar{y}_1(x_2(y_D)) = y_D = y_A = y_1(x_1(y_A))$$

teremos de (A.24) pela teoria das inequações diferenciais que $y_1(x_1(p)) > \bar{y}_1(x_2(p))$ para $\eta \leq p < y_A$. Ou seja,

$$y_1(x_1(p)) > y_1(x_2(p)) \quad \text{para } \eta \leq p < y_A.$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$y_2(x_1(p)) > y_2(x_2(p)) \quad \text{para } \eta \leq p < y_A.$$

Por outro lado, se Δ é o interior de γ, então

$$\int\int_{\Delta} f(x)dxdy = \int_{\gamma}[F(x) - y]dy - g(x)dx = 0$$

Se denotarmos por Δ_+ e Δ_- as partes de Δ para o lado direito e esquerdo da linha $x = x_0$, temos

$$\begin{aligned} \int\int_{\Delta} f(x)dxdy &= \int_{x_0}^{x_B}[y_2(x) - y_1(x)]f(x)dx \\ &= \int_{P_0}^{y_B}[y_2(x_2(p)) - y_1(x_2(p))]dp \end{aligned}$$

e similarmente

$$\int\int_{\Delta} f(x)dxdy = -\int_{P_0}^{y_A}[y_2(x_1(p)) - y_1(x_1(p))]dp.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{P_0}^{y_A}[y_2(x_2(p)) - y_2(x_1(p))]dp \\ &+ \int_{P_0}^{y_A}[y_1(x_1(p)) - y_1(x_2(p))]dp \\ &+ \int_{y_A}^{y_B}[y_2(x_2(p)) - y_1(x_2(p))]dp. \end{aligned}$$

Se os primeiros dois termos da direita forem positivos e o terceiro não negativo, teremos uma contradição.

Assim $y_A > y_B$. Seja $\tilde{\gamma}$ a solução de (A.1) passando pelo ponto C. Então $\tilde{y}$ intercepta o eixo y nos pontos K e L, onde $y_M < y_K < 0$ e $0 < y_L < y_n$. A curva $\tilde{y}$ é dada pela equação $y = \tilde{y}_1(x)$ no arco CK e pela equação $y = \tilde{y}_2(x)$ no arco LC. Se $\tilde{y}_1(x_0) > y_1(x_0)$ segue de (A.24) pela teoria das inequações diferenciais que

$$\tilde{y}_1(x_1(p)) > y_1(x_2(p)) \quad \text{para } p_0 \leq p \leq \eta.$$

Similarmente, se

$$\tilde{y}_1(x_1(y_B)) = y_C = y_B = y_1(x_2(y_B))$$

temos que

$$\tilde{y}_1(x_1(p)) > y_1(x_2(p)) \quad \text{para } \eta \leq p < y_B.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que

$$\tilde{y}_2(x_1(p)) > y_2(x_2(p)) \quad \text{para } p_0 \leq p \leq y_B.$$

Considere agora o expoente característico

$$h = \int_{\gamma} f(x)dt,$$

onde a integral de linha é dada no senti-horário. Para provar o teorema é suficiente mostrar que $h < 0$. Pois assim, γ é um ciclo limite estável, e dois ciclos limites adjacentes não podem ambos serem estáveis.

Seja γ interceptando a linha $x = \xi_0$ nos pontos M_0 e N_0, abaixo e acima do eixo x (veja figura A.7). Mostremos que primeiramente

$$J_1 = \int_{\gamma:NN_0} f(x)dt < 0.$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\xi_0}^{0} f(x)[y_2(x) - F(x)]^{-1}dx \\ &= \int_{P_0}^{0} [y_2(x_2(p)) - p]^{-1}dp - \int_{P_0}^{0} [y_2(x_1(p)) - p]^{-1}dp. \end{aligned}$$

Se $y_2(x)$ for uma função crescente para x no arco NN_0 e se $x_2(p) > x_1(p)$, teremos que $J_1 < 0$. Similarmente podemos mostrar que

$$J_2 = \int_{\gamma:M_0M} f(x)dt < 0.$$

Mostraremos agora que

$$I = \int_{\gamma:MBN} f(x)dt + \int_{\gamma:L_0CK_0} f(x)dt < 0.$$

Seja γ interceptando a linha $x = \xi_2$ nos pontos M_2 e N_2, abaixo e acima do eixo x, e seja $\tilde{\gamma}$ interceptando a linha $x = \xi_1$ nos pontos K_1 e L_1, abaixo e acima do eixo x. Então

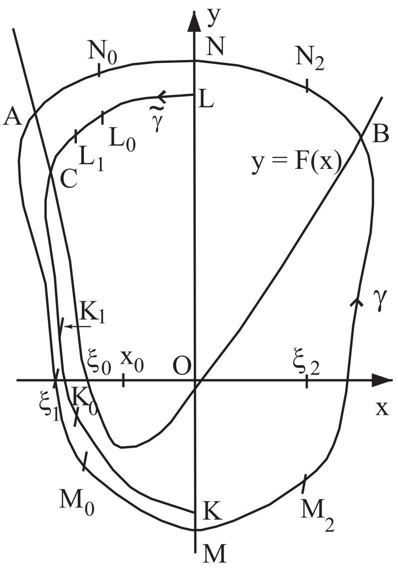

Figura A.7: Referente ao Teorema A.2.1.

do mesmo modo podemos escrever

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma:N_2N} f(x)dt + \int_{\gamma:L_0L_1} f(x)dt \\ &= \int_0^{\eta} [y_2(x_2(p)) - p]^{-1} dp - \int_0^{\eta} [\tilde{y}_2(x_1(p)) - p]^{-1} dp \\ &= \int_0^{\eta} \frac{\tilde{y}_2(x_1(p)) - y_2(x_2(p))}{[y_2(x_2(p)) - p][\tilde{y}_2(x_1(p)) - p]} dp \\ &< 0. \end{aligned}$$

Similarmente temos que

$$I_2 = \int_{\gamma:MM_2} f(x)dt + \int_{\gamma:K_1K_0} f(x)dt < 0.$$

Novamente

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\gamma:BN_2} f(x)dt + \int_{\gamma:L_1C} f(x)dt \\ &= \lim_{\rho \to y_B} \int_0^{\eta} \frac{\tilde{y}_2(x_1(p)) - y_2(x_2(p))}{[y_2(x_2(p)) - p][\tilde{y}_2(x_1(p)) - p]} dp \\ &< 0. \end{aligned}$$

e similarmente

$$I_4 = \int_{\gamma:M_2B} f(x)dt + \int_{\gamma:CK_1} f(x)dt.$$

Assim, segue que

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < 0.$$

Agora

$$\begin{aligned} h &= \int_\gamma f(x)dt \\ &= I + J_1 + J_2 + \int_{\gamma:N_0M_0} f(x)dt - \int_{\gamma:L_0K_0} f(x)dt. \end{aligned}$$

Assim, para completar a prova é suficiente mostrar que

$$J_3 = \int_{\gamma:N_0A} f(x)dt - \int_{\gamma:L_0C} f(x)dt < 0$$

e

$$J_4 = \int_{\gamma:AM_0} f(x)dt - \int_{\gamma:CK_0} f(x)dt < 0.$$

Vamos usar agora a hipótese $(c4)$. Temos

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{y_A} \frac{dp}{p - y_2(x_1(p))} - \int_0^{y_B} \frac{dp}{p - \tilde{y}_2(x_1(p))} \\ &= \int_0^{y_A} \frac{dp}{p - y_2(x_1(p))} - \int_0^{y_A} \frac{dp}{p - \hat{y}_2(p)}, \end{aligned}$$

onde $\hat{y}_2(p) = \mu\tilde{y}_2(x_1(\mu^{-1}p))$ e $\mu = y_A/y_B > 1$. Assim, $\hat{y}_2(p)$ é uma solução da equação diferencial

$$dy/dp = \mu\lambda_1(\mu^{-1}p)(p - y)$$

e portanto da inequação diferencial

$$dy/dp < \lambda_1(p)(p - y),$$

levando em consideração que $(c4)$ implica que $\lambda_1(p)/p$ é uma função decrescente em p, para $p > 0$. Além disso,

$$\hat{y}_2(p) = y_A = y_2(x_1(p)) \quad \text{para } p = y_A,$$

e comparando os valores de d^2p/dy^2 em $y = y_A$, temos que

$$y_A < y_2(x_1(p)) < \hat{y}_2(p) \quad \text{para } p < y_A \text{ e } y_A - p \text{ pequeno.}$$

Assim, $y_2(x_1(p)) < \hat{y}_2(p)$ para $0 < p < y_A$, pela teoria das inequações diferenciais, e assim, $J_3 < 0$. Similarmente podemos mostrar que $J_4 < 0$. Isto completa a prova do teorema. Podemos notar que a hipótese $(c4)$ é satisfeita se $f(x)/g(x)$ é uma função decrescente para $a < x < x_0$.

■

Podemos adaptar o teorema anterior, afim de aplicá-lo na demonstração do Teorema 5.2.1, da seguinte forma.

Teorema A.2.2. *Seja um sistema* (A.1)*, para o qual se assume existência e unicidade de soluções. Se F' e g são continuamente diferenciáveis (exceto talvez em um ponto $x_0 < 0$) e se cumprem as quatro condições seguintes*

(c1) $xg(x) > 0$, para $x \neq 0$,

(c2) $F'(x)(x - x_0) > 0$, para $x \neq 0$ com $x_0 < 0$,

(c3) o sistema de equações

$$\begin{aligned} F(x_1) &= F(x_2), \\ \frac{F'(x_1)}{g(x_1)} &= \frac{F'(x_2)}{g(x_2)}, \end{aligned}$$

tem no máximo uma solução (ξ_1, ξ_2) com $\xi_1 < x_0 < 0 < \xi_2$,

(c4) Se $F(\xi_0) = 0$ para um valor $\xi_0 < x_0$, então

$$\frac{F'(x)F(x)}{g(x)} \quad \text{é decrescente para} \quad x < \xi_0,$$

então o sistema possui no máximo uma órbita periódica, se ela existe, tem expoente característico negativo.

A.3 Demonstração do Teorema 5.2.1

Partindo do sistema na forma (5.5)-(5.6), com as hipóteses iniciais e supondo que $\alpha > 0$, o sistema possui só um equilíbrio $(x_e, y_e) = (\alpha/d_R, \alpha T_R/D_R)$. Se fizermos uma translação para levar o equilíbrio na origem, teremos um sistema da forma (A.1) com

$$F(x) = \begin{cases} T_L x + \dfrac{\alpha}{D_R}(T_L - T_R), & \text{se } x \leq -x_e, \\ T_R x, & \text{se } x > -x_e, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} D_L x + \alpha(\dfrac{D_L}{D_R} - 1), & \text{se } x \leq -x_e, \\ D_R x, & \text{se } x > -x_e, \end{cases}$$

de maneira que

$$G(s) = \begin{cases} D_L \dfrac{s^2}{2} + \alpha(\dfrac{D_L}{D_R} - 1)(s + \dfrac{\alpha}{2D_R}), & \text{se } s \leq -x_e, \\ D_R \dfrac{s^2}{2}, & \text{se } s > -x_e. \end{cases}$$

Se definirmo agora $z_e = \alpha^2/(2D_R)$, obtemos

$$F_L(z) = \begin{cases} -T_R \sqrt{\dfrac{2z}{D_R}}, & \text{se } z \leq z_e, \\ -T_L \sqrt{\dfrac{2z}{D_L} - \dfrac{\alpha^2}{D_L}(\dfrac{1}{D_R} - \dfrac{1}{D_L})} + \alpha(\dfrac{T_L}{D_L} - \dfrac{T_R}{D_R}), & \text{se } z > z_e, \end{cases}$$

e

$$F_R(z) = T_R \sqrt{\frac{2z}{D_R}} \text{ para todo } z > 0.$$

Quando $\alpha = 0$, o sistema é homogêneo e se tivermos alguma órbita periódica, existiriam infinitas formando um centro global. Assim, provamos o item a) do teorema. Considerando o item b), para provarmos o item b_1), basta negarmos a tese do mesmo e chegarmos numa contradição mediante a Proposição A.1.1. Se usarmos a condição do item b_2), teremos que todas as hipóteses do Teorema A.1.2 são satisfeitas, e portanto, garantimos a existência de uma órbita periódica.

A unicidade e hiperbolicidade da órbita periódica são consequências do Teorema A.2.2, tendo em conta que devemos tomar $x_0 = -x_e$ e $\xi_0 = -\dfrac{\alpha}{D_R}\left(1 - \dfrac{T_R}{T_L}\right)$.

∎

Referências Bibliográficas

[1] Chow, S.-N., Hale, J.K. [1982], **Methods of bifurcacion theory**, Springer, New York.

[2] Coppel, W.A., **Some quadratic systems with at most one limit cycle**, Dynamics Reported **2**, John Willey & Sons, 1988, pp 61-68.

[3] Devaney, R.L., Hirsch, M. and Smale, S., **Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos**, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

[4] Doering, C.I. and Lopes, A.O. , **Equações Diferenciais Ordinárias**, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[5] Dumortier, F., Panazzolo, D. and Roussarie, R., **More limit cycles than expected in Lienard equations**, Proc. Amer. Math. Soc. 135 , 1895-1904, 2007.

[6] Dumortier, F. and Roussarie, R., **Canard cycles and center manifolds**, Memoirs Amer. Mat. Soc. 121, 1996.

[7] Freire, E., Ponce, E. & Torres, F. [1998] **Transformaciones de Filippov en sistemas lineales a trozos**, Actas XV CEDYA-V CMA **1**, 273-278, Serv. de Publicaciones de la Universidad de Vigo.

[8] Gradshtein, I.S. & Ryzhik,I.M.[1980], **Table of integrals, series and products**, Acad. Press, New York.

[9] Hirsch, M. and Smale, S., **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**, Academic Press, New York, 1974.

[10] Lima, E.L., **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$, E. Blücher, 1970.

[11] Lins Neto, A., **Funções de uma Variável Complexa**, Projeto Euclides CNPq, 1996.

[12] Llibre, J. & Sotomayor, J. [1996], **Phase portrait of planar control systems**, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **27**, 1177-1197.

[13] Perko, L., **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer, New York, 2000.

[14] Ponce, E., Javier, R., **Bifurcaciones de órbitas periódicas no hiperbólicas en sistemas planos continuos y lineales a trozos**, Departamento Matemática Aplicada II, E.S. Ingenieros, Noviembre, 1998.

[15] Scardua, B.C.A., **Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias**, 22° Colóquio Brasileiro de Matemática – IMPA, Rio de Janeiro, 1999.

[16] Sotomayor, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[17] Zhang, Z.-F., Ding, T.-R. , Huang W.-Z and Dong, Z.-X., **Qualitative theory of differential equations**, Translations of Math. Mon. **101**, AMS, Providence, 1992.

[18] Wiggins S. [1990] **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**, Text Applied Math. Vol 2, Springer-Verlag.

Índice Remissivo