



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Vitor Henrique Lopes Gusson

Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de
campos de vetores lineares por partes

São José do Rio Preto
2022

Vitor Henrique Lopes Gusson

Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de
campos de vetores lineares por partes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

G982t

Gusson, Vitor Henrique Lopes

Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de campos de vetores lineares por partes / Vitor Henrique Lopes Gusson. -- São José do Rio Preto, 2022

106 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Claudio Gomes Pessoa

1. Teoria de Chebyshev. 2. Teoria Qualitativa de EDOs. 3. Ciclos Limites. 4. Ciclicidade. 5. Campos de Vetores por Partes. I. Título.

Vitor Henrique Lopes Gusson

Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de
campos de vetores lineares por partes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
Orientador

Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto
Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP

Prof. Dr. Fabio Scalco Dias
Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá

São José do Rio Preto
15 de julho de 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que me permitiu chegar até aqui e concluir esta etapa.

À minha mãe, guerreira, que me apoiou durante este processo, encontrando força em meio a tantas tribulações.

À Raquel, minha companheira, por todo suporte, incentivo, carinho e cuidado.

Ao meu orientador, professor Claudio Gomes Pessoa, por esta orientação, dando contribuições valiosas e sendo atencioso e paciente com as minhas dúvidas e dificuldades.

Aos professores da minha graduação em Bauru, Tiago de Carvalho, por proporcionar minha primeira iniciação científica e me apresentar a teoria qualitativa, e Rubens de Figueiredo Camargo, por todos os ensinamentos, conselhos e convívio durante minha outra iniciação científica, em Cálculo Fracionário.

Aos amigos de Bariri-SP e aos que fiz durante o mestrado. Em especial, aos do grupo "Estou acompanhando", Enrico e Marcos, por tornarem este processo mais leve e engraçado, compartilhando os mesmos sentimentos a respeito da pós-graduação.

Aos membros da banca, pela disponibilidade.

A todos aqueles que me ajudaram no início do ano com minha questão de saúde.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria de Sistemas de Chebyshev clássica e atual, com acurácia, e sua potencial aplicação na Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias (TQEDO). Para isto, reunimos as principais definições e resultados acerca da Teoria de Chebyshev, transitando entre sistemas de Chebyshev estendidos, completos, completos estendidos, e estendidos com acurácia. Caracterizamos cada uma destas classes de sistemas de Chebyshev a partir do número máximo de zeros que uma combinação linear não trivial de suas funções possui. Um dos principais resultados sobre sistemas de Chebyshev com acurácia, encontrado na literatura, relaciona a existência de uma cota superior para o número máximo de zeros isolados de uma combinação linear de funções de um conjunto com os zeros dos Wronskianos das funções deste conjunto. Aqui, exibimos uma melhora nesta cota superior. Com a finalidade de mostrar uma aplicação da Teoria de Chebyshev na TQEDO, consideramos uma classe de sistemas lineares por partes, maior que a do artigo original, tendo um laço homoclínico formado por um ponto de sela e por um centro, limitado por um anel de órbitas periódicas, e estudamos, com auxílio de semi-aplicações de Poincaré, o número máximo de ciclos limites que bifurcam (isto é, a ciclicidade) deste anel por perturbações lineares. Por fim, aplicando os sistemas de Chebyshev com acurácia em um dos resultados de ciclicidade, mostramos como eles podem ser úteis para melhorar cotas do número máximo de ciclos limites.

Palavras-chave: Teoria de Chebyshev, Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, Ciclos Limites, Ciclicidade, Campos de Vetores por Partes.

ABSTRACT

We aim to present the classic and current, with accuracy, Chebyshev Systems Theory and to show one of its application possibilities in the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations (QTODE). For this, we collected the main definitions and results about Chebyshev Theory, moving on between extended, complete, extended complete, and extended Chebyshev systems with accuracy. We characterize each of these classes of Chebyshev systems from the maximum number of zeros that a non-trivial linear combination of its functions has. One of the main results about Chebyshev systems with accuracy, found at literature, relates the existence of an upper bound to the maximum number of isolated zeros of a linear combination of functions of a set to the simple zeros of the wronskians of the functions of this set. Here, we exhibit an improvement in this upper bound. In order to show an application of Chebyshev Theory in the QTODE, we consider a class of piecewise linear system, larger than the original article class, having a homoclinic loop formed by a saddle point and a center, limited by a annulus of periodic orbits, and with the aid of the Poincaré half-return maps, we study the maximum number of limit cycles that bifurcate (ciclicity) from this annulus by linear perturbations. Finally, applying the Chebyshev systems with accuracy to one of the results about ciclicity, we show how its can be useful for to improve the quotas for the maximum number of limit cycles.

Keywords: Chebyshev Theory, Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, Limit Cycles, Ciclicity, Piecewise Vector Fields.

Lista de Figuras

3.1	Regiões de Costura	58
3.2	Regiões de Deslize e Escape	58
3.3	Pontos de tangência do tipo dobra.	59
3.4	Ponto de tangência do tipo dobra-dobra visível-invisível.	60
3.5	Pontos de tangência do tipo dobra-dobra.	60
3.6	Exemplos de separatrizes e de conexão de separatrizes de uma sela.	64
3.7	Exemplos de laço homoclínico e de ciclo limite.	64
3.8	Representação da forma normal (3.6) com o conjunto de hipóteses Ha.	66
3.9	Representação da forma normal (3.17) com o conjunto de hipóteses Hb.	72
3.10	Representação da forma normal (3.20) com o conjunto de hipóteses Hc.	73
3.11	Gráfico de f_1 em azul e f'_1 em amarelo	85
A.1	Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré	98
A.2	Semi-aplicação de Poincaré	98
A.3	Construção da função deslocamento para sistemas suaves por partes	99
B.1	Órbitas e curvas de nível da função Hamiltoniana H do exemplo B.2	104
B.2	Órbitas e curvas de nível da função Hamiltoniana H do exemplo B.3	104

Sumário

1	Introdução	15
2	Teoria de Sistemas de Chebyshev	19
2.1	Sistemas de Chebyshev	19
2.2	Sistemas estendidos de Chebyshev	22
2.3	Sistemas completo e completo estendido de Chebyshev	27
2.4	Sistemas estendidos de Chebyshev com acurácia	35
3	Uma Aplicação da Teoria de Chebyshev	57
3.1	Sistemas suaves por partes	57
3.2	Ciclicidade de um sistema linear por partes	64
4	Aplicação da Teoria de Chebyshev com Acurácia	87
5	Conclusão	93
	Referências	95
A	Aplicações e Semi-Aplicações de Poincaré	97
A.1	Aplicação de Poincaré para sistemas suaves	97
A.2	Semi-Aplicação de Poincaré para sistemas suaves por partes	98
A.3	Expansão da semi-aplicação de Poincaré para sistemas lineares com divergente nulo	99
A.3.1	Expansão de ordem 1 da semi-aplicação de Poincaré	99
A.3.2	Expansão de ordem 2 da semi-aplicação de Poincaré	101
B	Sistemas Hamiltonianos	103

1 Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias tem sido aplicada com sucesso nas mais diversas áreas da ciência como, por exemplo, na modelagem de fenômenos naturais e problemas de ciências aplicadas tais como Física, Engenharia e Biologia. Esta última, recentemente, recebeu um maior destaque devido ao estudo de modelos matemáticos epidemiológicos. É possível modelar cenários de competições entre predadores e presas, conhecidos como sistemas do tipo Lotka-Volterra [24], comportamento e propagação de doenças [3], dentre outros. No entanto, diversos fenômenos e problemas que apresentam uma mudança repentina de comportamento em um determinado momento, não são bem modelados pelos chamados sistemas dinâmicos suaves, isto é, por um sistema de equações diferenciais ordinárias de classe C^1 . O problema está no fato de que a lei de formação de um certo sistema evolui baseada em um determinado comportamento. Logo, quando há esta troca repentina de comportamento, tal lei de formação não está mais de acordo com a evolução do sistema, gerando uma situação de não suavidade da equação diferencial utilizada. Para corrigir tal problema, deve-se fazer uso de um modelo matemático que contenha períodos de evolução suave, mas que apresente alguma interrupção em sua lei de formação. Um bom exemplo para o uso destas formulações de modelos matemáticos é exposta em [5]. Trata-se de um sistema de aquecimento doméstico programado para manter um ambiente aquecido em uma temperatura θ_0 . Quando tal temperatura é ultrapassada, o sistema de aquecimento é desligado e, assim, a temperatura passa a diminuir, de maneira natural e suave, até que atinja um valor abaixo de θ_0 . Quando isto acontece, o sistema de aquecimento é ligado novamente até que a temperatura suba para a marca de θ_0 e o processo se repete. Assim, o comportamento e evolução da temperatura é um quando o aquecedor está ligado e, outro, quando desligado, de forma que tal troca ocorre quando a temperatura $T(t) = \theta_0$ é cruzada. Desta forma, mostra-se necessário um modelo matemático que contenha a evolução do fenômeno para ambos comportamentos. Podemos citar, ainda, exemplos de modelagens em sistemas elétricos apresentando situações que envolvam interruptores [2], tendo um conversor de potência bidirecional com controle deslizante. Na biologia, temos modelos não suaves para o tratamento de doenças [1], em que a mudança de comportamento indica o início de um protocolo de tratamento específico. Modelos desta natureza são conhecidos por sistemas dinâmicos suaves por partes [5, 6, 11].

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias tem como primícia o estudo qualitativo das equações diferenciais, sejam elas suaves ou suaves por partes, através de técnicas de geometria e topologia sem explicitar suas soluções. Tal teoria é creditada à Henri Poincaré que, no final do século XIX, publicou o trabalho *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (ver [21]). Um dos problemas mais famosos da Teoria Qualitativa das EDOs é o 16º Problema de Hilbert, introduzido por David Hilbert,

em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM), em Paris. Na verdade, o interesse da Teoria Qualitativa das EDOs está na segunda parte deste problema, que consiste em determinar o número máximo de ciclos limites (i.e., uma órbita periódica isolada) que um campo de vetores polinomial planar de grau n pode ter, o qual ainda se encontra em aberto. Por sua complexidade, começou-se a buscar estimativas, cotas superiores e inferiores, para o número máximo de ciclos limites, considerando famílias particulares de campos de vetores polinomiais. Uma ferramenta que auxilia essa busca por cotas do número de ciclos limites é a Teoria de Sistemas de Chebyshev. Tal teoria teve início a partir de problemas de interpolação de funções, sendo utilizada, também, em problemas de valores de fronteira [10]. Porém, na teoria qualitativa de EDOs, os sistemas de Chebyshev são utilizados para obter cotas do número de zeros da chamada função deslocamento, a qual, em certos casos, pode ser expressa como uma combinação linear de funções. Os zeros da aplicação de deslocamento correspondem a ciclos limites do sistema de equações diferenciais.

Neste trabalho, apresentamos a teoria de sistemas de Chebyshev clássica e atual, com acurácia [17], exibindo seus principais resultados e, desta maneira, mostrando-a como uma ferramenta importante na busca por cotas para o número de ciclos limites de sistemas diferenciais. Como uma aplicação desta teoria, estudaremos o número de ciclos limites que bifurcam de um anel de órbitas periódicas, de um sistema linear por partes separados por uma reta de descontinuidade, por perturbações lineares [13].

O capítulo 2 é dedicado à teoria clássica e atual de sistemas de Chebyshev, cuja origem é atribuída à problemas de interpolação de funções. A definição de sistema de Chebyshev é derivada do problema de interpolação de Lagrange. Chamamos de *sistema de Chebyshev* (sistema T) a base $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de um espaço de funções de dimensão $n + 1$ definidas num intervalo $[a, b]$, tal que para quaisquer $n + 1$ pontos $t_j, j = 0, 1, \dots, n$, distintos neste intervalo, o determinante

$$D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

é diferente de zero. Ainda, mostramos uma caracterização de sistema T a partir do número de zeros distintos em $[a, b]$ de toda combinação linear não trivial de suas funções. Já a classe de *sistemas estendidos de Chebyshev* (sistema ET) é derivada de um problema de interpolação de Hermite, o qual é conhecido por interpolar, também, algumas das derivadas da função tomada. Chamamos de sistema ET , a base $\{g_0, \dots, g_n\}$ de um espaço de funções de dimensão $n + 1$ tal que para um ponto $t \in [a, b]$, temos o Wronskiano

$$W(g_0, g_1, \dots, g_n)(t) = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \cdots & g_n(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \cdots & g_n^{(1)}(t) \\ g_0^{(2)}(t) & g_1^{(2)}(t) & \cdots & g_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(n)}(t) & g_1^{(n)}(t) & \cdots & g_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

não nulo. Bem como o caso de sistema T , apresentamos uma equivalência de sistema ET a partir do número de zeros, contando suas multiplicidades, que uma combinação linear de suas funções possui.

Ainda no capítulo 2, definimos *sistema completo de Chebyshev* (sistema CT) e *sistema completo estendido de Chebyshev* (sistema ECT). Em resumo, um conjunto de funções $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$, as quais são suficientemente diferenciáveis, é um sistema CT se $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ for um sistema T , para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Da mesma forma, tal conjunto é um sistema ECT se $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ for sistema ET , para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Aqui, também caracterizamos tais sistemas a partir do número de zeros de uma combinação linear não trivial de suas funções. Se toda combinação linear dos subconjuntos $\{g_0, \dots, g_k\}$, para $k = 0, 1, \dots, n$, possuírem, no máximo, k zeros simples, então o conjunto $\{g_0, \dots, g_n\}$ é um sistema CT . Caso se tais combinações também possuírem, no máximo, k zeros, mas levando em conta, agora, as suas multiplicidades, então temos um sistema ECT . Além disso, é mostrado um resultado sobre como construir um conjunto de funções que seja um sistema ECT a partir de funções auxiliares que não se anulam no intervalo $[a, b]$ desejado. Ainda tratando de sistema ECT , apresentamos o resultado mais utilizado desta teoria clássica. Com ele, podemos caracterizar um sistema ECT , exigindo que os Wronskianos dos subconjuntos $\{g_0, \dots, g_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, sejam todos não nulos e, assim, usar o resultado conhecido sobre o número de zeros das combinações lineares de suas funções. Este é o principal resultado usado nas aplicações.

Com o interesse de utilizar, também, a teoria atual de Chebyshev, apresentamos a teoria de sistemas estendidos de Chebyshev com acurácia [17]. Tal teoria traz consigo alguns resultados sobre o número de zeros de combinações lineares de funções de um certo conjunto que possui algum de seus Wronskianos nulos, o que não acontece na teoria clássica. Exibiremos uma melhora no resultado que fornece uma cota superior do número de zeros de uma combinação linear de funções, quando comparado ao trabalho original [17], uma vez que obtivemos uma cota superior menor. Esta teoria de Chebyshev com acurácia será usada no capítulo 4 para melhorar um resultado sobre o número de ciclos limites de um sistema linear por partes, apresentado no capítulo 3.

No capítulo 3, introduzimos todas as principais definições e convenções acerca de sistemas suaves por partes e apresentamos o objeto de estudo dos capítulos 3 e 4: um sistema linear por partes separados por uma reta tendo um laço homoclínico formado por um ponto de sela e por um centro, o qual limita um anel de órbitas periódicas. Aqui, sob certas hipóteses, exibimos as formas normais deste sistema. Então, usando a teoria de Chebyshev para estudar o número de zeros da função deslocamento, definida a partir de semi-aplicações de Poincaré, obtemos o número máximo de ciclos limites que bifurcam do anel de órbitas periódicas do sistema por perturbações lineares.

Por fim, no capítulo 4, com o objetivo de apresentar uma aplicação da teoria de Chebyshev com acurácia, melhoramos os resultados sobre ciclos limites do capítulo 3. Isso mostra que a teoria de Chebyshev com acurácia pode aumentar as estimativas do número de ciclos limites, em situações em que é aplicável.

Ao final do trabalho, adicionamos dois apêndices, A e B, relacionados às técnicas utilizadas no capítulo 3. No apêndice A, definimos formalmente o que são aplicações e semi-aplicações de Poincaré, para um sistema linear por partes separados por uma reta (cujo divergente dos campos que o definem é nulo) e descrevemos o processo para obter suas expansões em ε . No apêndice B, exibimos o básico sobre sistemas Hamiltonianos e seu principal resultado, o qual afirma que as órbitas do sistema Hamiltoniano estão contidas nas curvas de nível da função Hamiltoniana associada.

2 Teoria de Sistemas de Chebyshev

A teoria de espaços de Chebyshev (ou “Tchebycheff”) teve início a partir de problemas de interpolação, com o intuito de aproximar, de maneira ótima, certas funções, em geral não suficientemente suaves, cuja aproximação por polinômios apresentava erros não satisfatoriamente pequenos [19]. Em outras palavras, em intervalos grandes, os polinômios não são flexíveis o bastante para fazer tais aproximações, embora apresentem uma boa estrutura, principalmente em relação ao controle de zeros que uma função polinomial pode ter. Uma maneira de contornar, ou melhorar ao menos um pouco, tal problema, seria subdividir o intervalo e usar polinômios em cada um deles, individualmente, mantendo a boa estrutura que polinômios possuem. Contudo, há um espaço de funções em que seus elementos possuem uma estrutura boa e propriedades desejáveis, quando relacionado à problemas de interpolação em pontos arbitrários de um certo intervalo. Tais espaços são conhecidos por espaços de Chebyshev e uma base para tal espaço é chamada de sistema de Chebyshev ou, simplesmente, sistema T.

Sistemas de Chebyshev são usados em vários ramos e aplicações da matemática, por exemplo, em análise numérica, na teoria de aproximações, em problemas de valores de fronteira e problemas envolvendo propriedades oscilatórias de zeros de soluções de equações diferenciais [10]. Na teoria qualitativa de equações diferenciais, os sistemas de Chebyshev são utilizados no estudo do número de ciclos limites de um campo vetorial planar. Em particular, na busca por cotas para o número de zeros de integrais abelianas e funções deslocamento, obtidas a partir de aplicações de Poincaré, [8, 15]. Sendo, este último, o interesse principal deste trabalho.

Neste capítulo, expomos as principais definições, consequências e resultados desta teoria. Usaremos, como referências básicas, os livros [10, 19].

2.1 Sistemas de Chebyshev

O método de interpolação é a maneira usual para aproximar funções, num certo intervalo, por outras mais simples e que coincidam em certos pontos. Os espaços de Chebyshev possuem a propriedade de que as interpolações de Lagrange e Hermite são sempre possíveis para uma escolha arbitrária de pontos e, ainda, que tal aproximação é a melhor possível [25].

Definição 2.1. Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $G \subset C[a, b]$ ($C[a, b]$ denota o espaço de funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$) um subespaço de dimensão $n+1$, $f \in C[a, b]$ e $n+1$ pontos $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$. O *problema de interpolação de Lagrange* é determinar uma função $g \in G$ tal que $g(t_j) = f(t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Note que, se $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ é uma base do subespaço G , então existem constantes

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que $g(t_j) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Portanto, o problema se resume em obter os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ de modo que $\sum_{i=0}^n a_i g_i(t_j) = f(t_j)$. Ou seja, resolver o seguinte sistema linear nas variáveis a_i 's,

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Sendo o determinante

$$D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

então o sistema (2.1) tem solução única se, e somente se, $D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0$.

Definição 2.2. Um espaço $G \subset C[a, b]$, de dimensão $n + 1$, é chamado *espaço de Chebyshev*¹ se existe uma base $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de G tal que $D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0$, $\forall a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$ em $[a, b]$. Tal base é denominada *sistema de Chebyshev* ou, simplesmente, *sistema T*.

Desta forma, o espaço G pode ser visto como o conjunto de combinações lineares dos elementos da base, isto é, $G = \text{span}(g_0, g_1, \dots, g_n) = \{g(t) : g(t) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(t), \forall t \in [a, b]\}$. Sendo assim, podemos dizer que um conjunto $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de funções contínuas, definidas num intervalo, é um *sistema T* se o determinante (2.2) é não nulo. Pois, neste caso, o conjunto $\{g_i\}_0^n$ é *LI* e, portanto, gera um espaço de dimensão $n + 1$. De fato, basta notar que se $0 = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, então para qualquer escolha de pontos $t_0, t_1, \dots, t_n$ distintos em $[a, b]$, temos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

cujo determinante é diferente de zero. Portanto, segue que os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ são todos nulos.

Como veremos adiante, os principais resultados da Teoria de Chebyshev, apresentados neste trabalho, concentram-se na caracterização dos sistemas de Chebyshev a partir da quantidade de zeros, contando ou não suas multiplicidades, que uma função pertencente ao espaço gerado por tal sistema possui. Sendo assim, na maioria dos casos, não estaremos interessados no espaço de Chebyshev, mas sim em sua base.

Em algumas referências, como em [10], a definição de espaço de Chebyshev, ou de sistema de Chebyshev, pede que o determinante (2.2) seja positivo, para qualquer escolha

¹Também chamado de *espaço de Haar* no início do desenvolvimento da teoria.

arbitrária de pontos. Esta definição é equivalente à dada acima. De fato, devido a continuidade das funções g_i , o determinante (2.2) não muda de sinal no intervalo $[a, b]$. Além disso, se $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ for um *sistema T*, então $\{-g_0, g_1, \dots, g_n\}$ também é. Assim, escolhendo um dos dois sistemas anteriores, obtemos o determinante (2.2) positivo.

Exemplo 2.3. Seja $\mathbb{P}_n = \{p \in C[a, b] : p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, a_i \in \mathbb{R}\}$ o espaço de polinômios de grau n definidos em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e gerado pela base $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Note que, para qualquer escolha de pontos $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$, temos

$$D \begin{pmatrix} 1, t, t^2, \dots, t^n \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{vmatrix},$$

que nada mais é que o determinante de uma matriz de Vandermonde. Logo,

$$D \begin{pmatrix} 1, t, t^2, \dots, t^n \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i) > 0.$$

Portanto, $\mathbb{P}_n$ é um espaço de Chebyshev de dimensão $n + 1$ e sua base é um sistema de Chebyshev, ou seja, um sistema T.

Teorema 2.4. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T se, e somente se, para toda função $f \in C[a, b]$ e todas as escolhas de pontos $t_0, t_1, \dots, t_n$ distintos em $[a, b]$, o problema de interpolação de Lagrange tem solução única no espaço gerado pelas funções $\{g_i\}_0^n$.*

Demonstração. Basta observar que, neste caso, o problema de interpolação de Lagrange é equivalente ao sistema (2.1), o qual tem solução única se, e somente se, o determinante (2.2) é diferente de zero. $\square$

O resultado mostrado a seguir, fornece uma interessante caracterização dos sistemas de Chebyshev. Muitas vezes, tal resultado é usado como definição para sistema T.

Teorema 2.5. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T se, e somente se, toda combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, isto é, com $\sum_{i=0}^n a_i^2 \neq 0$, tem no máximo n zeros distintos em $[a, b]$.*

Demonstração. Seja $\{g_i\}_0^n$ um sistema T em $[a, b]$, então para qualquer escolha de pontos $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$, temos que $D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0$. Suponha que exista uma combinação linear não trivial g com, pelo menos, $n + 1$ zeros. Então, para esta combinação linear, o sistema (2.3) tem solução não trivial, o que contradiz a hipótese. Portanto, g tem no máximo n zeros.

Reciprocamente, se toda combinação linear não trivial g tem no máximo n zeros, então o determinante (2.2) deve ser não nulo. De fato, se o determinante é nulo, então o sistema (2.3) admite solução não trivial, $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n)$. Ou seja, para estes coeficientes, a função g tem $n + 1$ zeros. O que contradiz a hipótese. $\square$

Observação 2.6. Como aplicação do teorema acima, podemos provar o Teorema Fundamental da Álgebra. Conforme vimos no Exemplo 2.3, $\mathbb{P}_n$ é um espaço de Chebyshev tal que sua base $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ é um sistema T. Logo, um polinômio $u(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ tem no máximo n zeros reais.

2.2 Sistemas estendidos de Chebyshev

Dada uma função diferenciável, a interpolação de Hermite é conhecida por interpolar não só valores da função em si, mas também algumas de suas derivadas. E isto, como veremos adiante, está relacionado a uma escolha de pontos, em um intervalo, que permite repetições, ao contrário da interpolação de Lagrange.

Assim como a interpolação de Lagrange é única e sempre possível em espaços gerados por sistemas de Chebyshev, é desejável que a interpolação de Hermite também tenha propriedades semelhantes. E para isto, será necessário definir um espaço diferente, a partir de um outro conjunto de funções que possuem características similares, o qual chamaremos de sistema estendido de Chebyshev. Além disto, uma vez que a interpolação de Lagrange é um caso particular de Hermite, quando não existem repetições de pontos, esta nova classe de sistemas representa uma extensão da apresentada anteriormente.

Definição 2.7. Sejam $G \subset C^n[a, b]$, f uma função de classe C^n definida no intervalo $[a, b]$ e pontos $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$. Para $j = 0, 1, \dots, n$, tomemos $d_j = \max\{q : t_j = \dots = t_{j-q}\}$, para $0 \leq q \leq j$. O problema de interpolação de Hermite consiste em determinar uma função $g \in G$ tal que $g^{(d_j)}(t_j) = f^{(d_j)}(t_j)$.

À primeira vista a Definição 2.7 parece um pouco confusa. Uma outra maneira equivalente de expressá-la é a seguinte. Dados os pontos $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$, existem pontos $s_0 < s_1 < \dots < s_p$, tais que $\{s_0, s_1, \dots, s_p\} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, s_r aparece m_r vezes em $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $r = 0, 1, \dots, p$, e $\sum_{r=0}^p m_r = n+1$. Daí, o problema de Hermite resume-se a determinar uma função $g \in G$ tal que $g^{(q)}(s_r) = f^{(q)}(s_r)$, para $q = 0, 1, \dots, m_r - 1$, e $r = 0, 1, \dots, p$.

Se $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ é base de G , então dado um elemento $g \in G$ escrevemos $g(t_j) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(t_j)$. Ou melhor, usando a notação acima, podemos escrever $g(s_r) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(s_r)$, para todo valor $s_r \in \{s_0, s_1, \dots, s_p\}$. Daí, o problema de interpolação de Hermite é equivalente a obter os coeficientes a_i 's tal que $\sum_{i=0}^n a_i g_i^{(q)}(s_r) = f^{(q)}(s_r)$. Ou seja, encontrar a solução do seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} g_0(s_0) & g_1(s_0) & \dots & g_n(s_0) \\ g_0^{(1)}(s_0) & g_1^{(1)}(s_0) & \dots & g_n^{(1)}(s_0) \\ g_0^{(2)}(s_0) & g_1^{(2)}(s_0) & \dots & g_n^{(2)}(s_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_0^{(m_0-1)}(s_0) & g_1^{(m_0-1)}(s_0) & \dots & g_n^{(m_0-1)}(s_0) \\ g_0(s_1) & g_1(s_1) & \dots & g_n(s_1) \\ g_0^{(1)}(s_1) & g_1^{(1)}(s_1) & \dots & g_n^{(1)}(s_1) \\ g_0^{(2)}(s_1) & g_1^{(2)}(s_1) & \dots & g_n^{(2)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_0^{(m_1-1)}(s_1) & g_1^{(m_1-1)}(s_1) & \dots & g_n^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(m_p-1)}(s_p) & g_1^{(m_p-1)}(s_p) & \dots & g_n^{(m_p-1)}(s_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_0) \\ f^{(1)}(s_0) \\ f^{(2)}(s_0) \\ \vdots \\ f^{(m_0-1)}(s_0) \\ f(s_1) \\ f^{(1)}(s_1) \\ f^{(2)}(s_1) \\ \vdots \\ f^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots \\ f^{(m_p-1)}(s_p) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

E, tal sistema, tem solução única se, e somente se,

$$D^* \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(s_0) & g_1(s_0) & \cdots & g_n(s_0) \\ g_0^{(1)}(s_0) & g_1^{(1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(1)}(s_0) \\ g_0^{(2)}(s_0) & g_1^{(2)}(s_0) & \cdots & g_n^{(2)}(s_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_0-1)}(s_0) & g_1^{(m_0-1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(m_0-1)}(s_0) \\ g_0(s_1) & g_1(s_1) & \cdots & g_n(s_1) \\ g_0^{(1)}(s_1) & g_1^{(1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(1)}(s_1) \\ g_0^{(2)}(s_1) & g_1^{(2)}(s_1) & \cdots & g_n^{(2)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_1-1)}(s_1) & g_1^{(m_1-1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(m_p-1)}(s_p) & g_1^{(m_p-1)}(s_p) & \cdots & g_n^{(m_p-1)}(s_p) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5)$$

Por exemplo, seja $\{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$, uma base de um espaço G . Considere pontos arbitrários tais que $a \leq t_0 = t_1 = t_2 < t_3 < t_4 < t_5 = t_6 \leq b$. Então, o problema de interpolação de Hermite tem, no espaço G , solução única se, e só se,

$$D^* \begin{pmatrix} g_0, \dots, g_6 \\ t_0, \dots, t_6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & g_2(t_0) & g_3(t_0) & g_4(t_0) & g_5(t_0) & g_6(t_0) \\ g_0^{(1)}(t_0) & g_1^{(1)}(t_0) & g_2^{(1)}(t_0) & g_3^{(1)}(t_0) & g_4^{(1)}(t_0) & g_5^{(1)}(t_0) & g_6^{(1)}(t_0) \\ g_0^{(2)}(t_0) & g_1^{(2)}(t_0) & g_2^{(2)}(t_0) & g_3^{(2)}(t_0) & g_4^{(2)}(t_0) & g_5^{(2)}(t_0) & g_6^{(2)}(t_0) \\ g_0(t_3) & g_1(t_3) & g_2(t_3) & g_3(t_3) & g_4(t_3) & g_5(t_3) & g_6(t_3) \\ g_0(t_4) & g_1(t_4) & g_2(t_4) & g_3(t_4) & g_4(t_4) & g_5(t_4) & g_6(t_4) \\ g_0(t_5) & g_1(t_5) & g_2(t_5) & g_3(t_5) & g_4(t_5) & g_5(t_5) & g_6(t_5) \\ g_0^{(1)}(t_5) & g_1^{(1)}(t_5) & g_2^{(1)}(t_5) & g_3^{(1)}(t_5) & g_4^{(1)}(t_5) & g_5^{(1)}(t_5) & g_6^{(1)}(t_5) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Note que, no caso em que os $n + 1$ pontos são iguais, isto é, $t = t_0 = t_1 = \dots = t_n$, o determinante em (2.5) nada mais é que o Wronskiano das funções $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$, o qual

denotamos por

$$W(g_0, g_1, \dots, g_n) = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \cdots & g_n(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \cdots & g_n^{(1)}(t) \\ g_0^{(2)}(t) & g_1^{(2)}(t) & \cdots & g_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(n)}(t) & g_1^{(n)}(t) & \cdots & g_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Definição 2.8. Um espaço $G \subset C^{m-1}[a, b]$, de dimensão $n+1$, é chamado *espaço estendido de Chebyshev de ordem m* se existe uma base $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de G com

$$D^* \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

$\forall a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$, tal que $m = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \{m_i\}$, em que m_i é o número de vezes que t_i aparece no conjunto $\{t_0, \dots, t_n\}$. Chama-se *sistema estendido de Chebyshev de ordem m* ou, simplesmente, *sistema ET de ordem m*, uma base de tal espaço. Se $m = n + 1$, ou seja, $t_0 = t_1 = \dots = t_n$, dizemos, apenas, que G é um *espaço estendido de Chebyshev*. E, neste caso, uma base qualquer deste espaço é chamada de *sistema estendido de Chebyshev* ou, simplesmente, *sistema ET*.

Desta forma, um conjunto $\{g_0, \dots, g_n\}$ de funções, de classe C^n , é um sistema ET se o Wronskiano (2.6) é diferente de zero.

Assim como para espaços de Chebyshev e sistemas T, também podemos caracterizar espaços estendidos de Chebyshev e sistemas ET a partir da unicidade de interpolação e zeros de uma dada combinação linear.

Teorema 2.9. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}[a, b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é sistema ET de ordem m se, e só se, para qualquer função $f \in C^{m-1}[a, b]$ e qualquer escolha de pontos $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ em $[a, b]$, tal que $m = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \{m_i\}$ (onde m_i é o número de vezes que t_i aparece no conjunto $\{t_0, \dots, t_n\}$), a solução do problema de interpolação de Hermite é única no espaço gerado pelas funções $\{g_i\}_0^n$.*

Demonstração. Se $\{g_i\}_0^n$ é sistema ET de ordem m , então o determinante $D^*(g_0, \dots, g_n)$, dado por (2.5), é diferente de zero, para quaisquer $n + 1$ pontos em $[a, b]$ com no máximo m pontos iguais. E isto, como visto, implica que a solução do problema de interpolação de Hermite, no espaço gerado pelas funções $\{g_i\}_0^n$, para qualquer função $f \in C^{m-1}[a, b]$, é única.

Para provar a recíproca, usaremos indução sobre o maior número de pontos que se repetem, m . Se $m = 1$, isto é, se não há pontos iguais, então o problema de interpolação de Hermite reduz-se ao problema de interpolação de Lagrange. Assim, o determinante (2.5) resulta no determinante (2.2), diferente de zero. Portanto, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET de ordem 1.

Suponhamos que a afirmação é válida para $m = n$ ($n > 1$). Ou seja, dadas funções $g_0, \dots, g_n \in C^{m-1}[a, b]$, se a solução do problema de interpolação de Hermite é única, no

espaço gerado por $\{g_i\}_0^n$, para qualquer escolha de pontos $t_0 = t_1 = \dots = t_{n-1}$ e $t_n \neq t_0$ em $[a, b]$, então

$$D^* \begin{pmatrix} g_0, \dots, g_n \\ t_0, \dots, t_0, t_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

logo $\{g_i\}_0^n$ é sistema ET de ordem $m = n$.

Vamos provar a afirmação para $m = n + 1$. Sejam $g_0, \dots, g_n \in C^n[a, b]$ e $n + 1$ pontos $t = t_0 = \dots = t_n$ em $[a, b]$, queremos mostrar que

$$W(g_0, \dots, g_n)(t) = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \dots & g_n(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \dots & g_n^{(1)}(t) \\ g_0^{(2)}(t) & g_1^{(2)}(t) & \dots & g_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_0^{(n)}(t) & g_1^{(n)}(t) & \dots & g_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e consideremos, no lugar do último ponto $t = t_n$ repetido, o ponto $t + \varepsilon \in [a, b]$ (caso $t = b$, fazemos $t_n = t - \varepsilon$). Daí, seja

$$D_\varepsilon^* = D^* \begin{pmatrix} g_0, \dots, g_n \\ t, \dots, t, t + \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \dots & g_n(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \dots & g_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_0^{(n-1)}(t) & g_1^{(n-1)}(t) & \dots & g_n^{(n-1)}(t) \\ g_0(t + \varepsilon) & g_1(t + \varepsilon) & \dots & g_n(t + \varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Como temos n pontos iguais, de um total de $n + 1$, por hipótese de indução, segue que $D_\varepsilon^* \neq 0$.

Agora, vamos tomar aproximações das funções $g_i(t + \varepsilon)$ via expansão de Taylor. Ou seja, para cada $i = 0, 1, \dots, n$, existem $y_i(\varepsilon) \in [t, t + \varepsilon]$ (ou $[t - \varepsilon, t]$, caso $t = b$), de modo que

$$g_i(t + \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_i^{(j)}(t) \varepsilon^j}{j!} + \frac{g_i^{(n)}(y_i) \varepsilon^n}{n!}.$$

Multiplique cada linha j do determinante D_ε^* por $-\frac{\varepsilon^j}{j!}$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$, e some com a sua última linha, substituindo esta pela soma resultante. Disto, segue que $D_\varepsilon^* = \frac{\varepsilon^n}{n!} \tilde{D}_\varepsilon^*$,

donde

$$\tilde{D}_\varepsilon^* = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \cdots & g_n(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \cdots & g_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(n-1)}(t) & g_1^{(n-1)}(t) & \cdots & g_n^{(n-1)}(t) \\ g_0^{(n)}(y_0) & g_1^{(n)}(y_1) & \cdots & g_n^{(n)}(y_n) \end{vmatrix}.$$

Portanto, $\tilde{D}_\varepsilon^*$ é diferente de zero, já que $D_\varepsilon^* \neq 0$. Por fim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, teremos que $y_i(\varepsilon) \rightarrow t$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$, e daí,

$$\tilde{D}_\varepsilon^* \rightarrow W(g_0, \dots, g_n)(t),$$

isto é,

$$W(g_0, \dots, g_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Logo, temos um sistema ET de ordem $m = n + 1$, o que conclui a prova por indução. Assim, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET de ordem m . $\square$

Definição 2.10. Seja $f \in C^k[a, b]$. Dizemos que $t \in [a, b]$ é um *zero de multiplicidade k* se $f^{(q)}(t) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, k - 1$.

Teorema 2.11. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}[a, b]$, para $m = 1, 2, \dots, n + 1$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET de ordem m se, e somente se, toda combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$ tem no máximo n zeros, contando suas multiplicidades.*

Demonstração. De fato, se $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET de ordem m , então $G = \text{span}\{g_i\}_0^n$ é um espaço estendido de Chebyshev de ordem m , de dimensão $n + 1$. Agora, vamos supor que uma combinação linear não trivial tenha, pelo menos, $n + 1$ zeros contando suas multiplicidades. Isto é, existe uma função de classe C^{m-1} , $g^* \in G$, não trivial com zeros $s_0 < s_1 < \dots < s_p$, em $[a, b]$, de multiplicidades $m_0, m_1, \dots, m_p$, respectivamente, tal que $\sum_{r=0}^p m_r \geq n + 1$. Sendo G um espaço estendido de Chebyshev, todo problema de interpolação de Hermite deve ter solução única, conforme o teorema anterior. Daí, tomando $f \equiv 0$, consideremos o seguinte problema de Hermite: determinar uma função g , suficientemente diferenciável, de modo que $g^{(q)}(s_r) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, m_r - 1$, e $r = 0, 1, \dots, p$. Por construção, a função g^* é uma solução do problema. Contudo, note que $g^{**} \equiv 0$ também é solução. O que contradiz a unicidade de soluções. Portanto, qualquer combinação linear não trivial tem, no máximo, n zeros contando suas multiplicidades.

Para mostrar a recíproca, suponhamos que $\{g_i\}_0^n$ não seja um sistema ET de ordem m . Daí, $G = \text{span}\{g_i\}_0^n$ não é um espaço estendido de Chebyshev de ordem m e, pelo teorema anterior, existe um problema de interpolação de Hermite com pelo menos duas soluções em tal espaço. Ou seja, existem pontos $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ em $[a, b]$ tal que esse problema de interpolação de Hermite tem, pelo menos, duas soluções distintas, digamos g_1 e g_2 , em G . Daí, $g_1^{(q)}(t_j) = g_2^{(q)}(t_j) = f^{(q)}(t_j)$. Assim, tomando $g = g_2 - g_1 \in G$, segue que tal função tem, ao menos, os $n + 1$ zeros $t_0, t_1, \dots, t_n$, o que contradiz o fato de uma combinação linear não trivial ter, no máximo, n zeros contando suas multiplicidades. Portanto, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET de ordem m . $\square$

2.3 Sistemas completo e completo estendido de Chebyshev

Definição 2.12. Um espaço $G \subset C^n[a, b]$, de dimensão $n + 1$, é dito *espaço completo de Chebyshev* se existe uma base $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de G tal que para todo $k = 0, 1, \dots, n$, $\text{span}(g_0, g_1, \dots, g_k)$ é um espaço de Chebyshev. Além disso, se $\text{span}(g_0, g_1, \dots, g_k)$ for um espaço estendido de Chebyshev, então G é chamado *espaço completo estendido de Chebyshev*. Tal base é chamada de *sistema completo de Chebyshev* ou, apenas, *sistema CT* no primeiro caso e por *sistema completo estendido de Chebyshev*, ou *sistema ECT*, no segundo.

Desta maneira, podemos dizer que um conjunto $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$, de funções diferenciáveis o suficiente, é um sistema CT se $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ for um sistema T, para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Da mesma forma, tal conjunto é um sistema ECT se $\{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ for sistema ET, para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Os próximos dois resultados mostram que é possível, também, caracterizar sistemas CT e ECT a partir do número máximo de zeros, simples ou não, que combinações lineares não triviais, de funções diferenciáveis, podem ter.

Teorema 2.13. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Então $\{g_i\}_0^n$ é um sistema CT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, qualquer combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^k a_i g_i$, possui no máximo k zeros simples.*

Demonstração. A propriedade de $\{g_i\}_0^n$ ser um sistema CT é equivalente a $\{g_i\}_0^k$ ser um sistema T para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Logo, pelo Teorema 2.5, $\{g_i\}_0^k$ é sistema T se, e somente se, qualquer combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^k a_i g_i$ possui, no máximo, k zeros simples, para todo $k = 0, 1, \dots, n$. O que completa a demonstração. $\square$

Teorema 2.14. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$. Então $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, qualquer combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^k a_i g_i$, possui no máximo k zeros, contando suas multiplicidades.*

Demonstração. Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$. Note que, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se $\{g_i\}_0^k$ for um sistema ET, para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Assim, pelo Teorema 2.11, $\{g_i\}_0^k$ é um sistema ET se, e só se, qualquer combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^k a_i g_i$ possui, no máximo, k zeros, contando suas multiplicidades. Completando a prova do teorema. $\square$

O teorema a seguir traz uma caracterização comum dos sistemas ECT a partir de Wronskianos.

Teorema 2.15. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, e todo $t \in [a, b]$, temos $W_k(t) = W(g_0, g_1, \dots, g_k)(t) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $\{g_i\}_0^n$ um sistema ECT. Então, os Wronskianos

$$W_k(t) = W(g_0, \dots, g_k)(t)$$

são diferentes de zero, para qualquer $t \in [a, b]$ e todo $k = 0, 1, \dots, n$, pois $\{g_i\}_0^k$ é um sistema ET, para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Para provar a recíproca, procederemos por indução em k . Para $k = 0$, temos que $W(g_0)(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$, isto é, $W(g_0)(t) = g_0(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$. Então, g_0 não possui

zero no intervalo $[a, b]$. Daí, pelo Teorema 2.11, $\{g_0\}$ é um sistema ET. e, por só termos $k = 0$ neste caso, então $\{g_0\}$ é sistema ECT.

Suponhamos que a afirmação é válida para $k - 1$. Isto é, dado $\{g_i\}_0^{k-1}$ quaisquer, se para todo $m = 0, 1, \dots, k - 1$, temos $W_m(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$, então $\{g_i\}_0^{k-1}$ é sistema ECT. Isto significa que, para $m = 0, 1, \dots, k - 1$, cada $\{g_i\}_0^m$ é sistema ET.

Vamos provar que a afirmação é verdadeira para k . Primeiramente, estabelecemos a seguinte relação entre Wronskianos, com a hipótese de que $g_0(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$,

$$W(g_0, g_1, \dots, g_k) = g_0^{k+1} W\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \dots, \frac{g_k}{g_0}\right) = g_0^{k+1} W(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*) \quad (2.7)$$

em que $g_j^* = \left(\frac{g_j}{g_0}\right)'$, $j = 1, \dots, k$. Tal relação nos diz que é possível reduzir em um a ordem do Wronskiano de um conjunto de funções, sendo uma delas não nula. A primeira igualdade é obtida, primeiramente, colocando g_0 em evidência em todas as linhas da matriz do Wronskiano, isto é,

$$W(g_0, g_1, \dots, g_k) = g_0^{k+1} \det A,$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_1}{g_0} & \dots & \frac{g_k}{g_0} \\ \frac{g_0'}{g_0} & \frac{g_1'}{g_0} & \dots & \frac{g_k'}{g_0} \\ \frac{g_0''}{g_0} & \frac{g_1''}{g_0} & \dots & \frac{g_k''}{g_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{g_0^{(k)}}{g_0} & \frac{g_1^{(k)}}{g_0} & \dots & \frac{g_k^{(k)}}{g_0} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Depois, partindo da segunda linha, realizamos combinações lineares adequadas, de modo que a primeira coluna fique nula em todas as suas entradas, exceto a primeira, e as entradas das linhas subsequentes sejam dadas pela expressão da regra geral de Leibniz para derivação de quocientes

$$(g_j^*)^{(q)} = \left(\frac{g_j}{g_0}\right)^{(q)} = \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} g_j^{(q-i)} \left(\frac{1}{g_0}\right)^{(i)}, \quad (2.9)$$

$j, q = 1, \dots, k$. Para ilustrar esse último passo, faremos as combinações lineares necessárias para obter a segunda e terceira linha da matriz de $W\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \dots, \frac{g_k}{g_0}\right)$. Veja que, por (2.9), as entradas da segunda linha que queremos obter são dadas por

$$\begin{aligned} (g_j^*)' &= \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} g_j^{(1-i)} \left(\frac{1}{g_0}\right)^{(i)} = \binom{1}{0} \frac{g_j'}{g_0} + \binom{1}{1} g_j \left(\frac{1}{g_0}\right)' \\ &= \frac{g_j'}{g_0} + g_j \left(-\frac{g_0'}{g_0^2}\right) = \frac{g_j'}{g_0} + \frac{g_j}{g_0} \left(-\frac{g_0'}{g_0}\right). \end{aligned}$$

Assim, para obtermos tais entradas, multiplicamos as entradas da primeira linha de (2.8)

por $(-\frac{g'_0}{g_0})$ e somamos às entradas da segunda. Ou seja, temos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{g_1}{g_0} & \dots & \frac{g_k}{g_0} \\ 0 & \frac{g'_1}{g_0} + \frac{g_1}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right) & \dots & \frac{g'_k}{g_0} + \frac{g_k}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right) \\ \frac{g''_0}{g_0} & \frac{g''_1}{g_0} & \dots & \frac{g''_k}{g_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{g_0^{(k)}}{g_0} & \frac{g_1^{(k)}}{g_0} & \dots & \frac{g_k^{(k)}}{g_0} \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Agora, as entradas da terceira linha, pela fórmula (2.9), serão dados por

$$\begin{aligned} (g_j^*)'' &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} g_j^{(2-i)} \left(\frac{1}{g_0}\right)^{(i)} = \binom{2}{0} \frac{g''_j}{g_0} + \binom{2}{1} g'_j \left(\frac{1}{g_0}\right)' + \binom{2}{0} g_j \left(\frac{1}{g_0}\right)'' \\ &= \frac{g''_j}{g_0} + 2g'_j \left(-\frac{g'_0}{g_0^2}\right) + g_j \left(\frac{-g''_0 g_0^2 + 2(g'_0)^2 g_0}{g_0^4}\right) \\ &= \frac{g''_j}{g_0} + \frac{g_j}{g_0} \left(-\frac{g''_0}{g_0}\right) + \left(\frac{g'_j}{g_0} + \frac{g_j}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right)\right) \left(-2\frac{g'_0}{g_0}\right). \end{aligned}$$

Ou seja, para obtermos as entradas desta nova terceira linha, multiplicamos as entradas da primeira linha de (2.10) por $(-\frac{g''_0}{g_0})$, as entradas da segunda multiplicamos por $(-2\frac{g'_0}{g_0})$ e somamos tudo às entradas da terceira. Daí, obtemos que o determinante da matriz A é igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{g_1}{g_0} & \dots & \frac{g_k}{g_0} \\ 0 & \frac{g'_1}{g_0} + \frac{g_1}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right) & \dots & \frac{g'_k}{g_0} + \frac{g_k}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right) \\ 0 & \frac{g''_1}{g_0} + \frac{g_1}{g_0} \left(-\frac{g''_0}{g_0}\right) + \left(\frac{g'_1}{g_0} + \frac{g_1}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right)\right) \left(-2\frac{g'_0}{g_0}\right) & \dots & \frac{g''_k}{g_0} + \frac{g_k}{g_0} \left(-\frac{g''_0}{g_0}\right) + \left(\frac{g'_k}{g_0} + \frac{g_k}{g_0} \left(-\frac{g'_0}{g_0}\right)\right) \left(-2\frac{g'_0}{g_0}\right) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{g_0^{(k)}}{g_0} & \frac{g_1^{(k)}}{g_0} & \dots & \frac{g_k^{(k)}}{g_0} \end{vmatrix}.$$

Em suma, continuando o processo, teremos a primeira linha dada por

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \dots, \frac{g_k}{g_0}\right),$$

e as q -ésimas restantes, para $q = 1, 2, \dots, k$, dadas por

$$\left(0, (g_1^*)^{(q)}, (g_2^*)^{(q)}, \dots, (g_k^*)^{(q)}\right).$$

Isto é, o determinante da matriz A é dado por

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{g_1}{g_0} & \frac{g_2}{g_0} & \dots & \frac{g_k}{g_0} \\ 0 & \left(\frac{g_1}{g_0}\right)' & \left(\frac{g_2}{g_0}\right)' & \dots & \left(\frac{g_k}{g_0}\right)' \\ 0 & \left(\frac{g_1}{g_0}\right)'' & \left(\frac{g_2}{g_0}\right)'' & \dots & \left(\frac{g_k}{g_0}\right)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{(k)} & \left(\frac{g_2}{g_0}\right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{g_k}{g_0}\right)^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Assim, $W(g_0, g_1, \dots, g_k) = g_0^{k+1} \det A = g_0^{k+1} W\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \dots, \frac{g_k}{g_0}\right)$.

Para obter a segunda igualdade da relação (2.7), basta expandir o determinante da matriz resultante, usando a primeira coluna, e observar que a expressão decorrente é o Wronskiano $W(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*)$.

Com isso estabelecido, podemos voltar à prova do teorema. Tomando o conjunto $\{g_i\}_0^k$ tal que, para todo $m = 0, 1, \dots, k$ e todo $t \in [a, b]$ $W_m(t) \neq 0$, vamos provar que $\{g_i\}_0^m$ é um sistema ET, mostrando que uma combinação linear não trivial possui, no máximo, m zeros, contando suas multiplicidades. Na verdade, vamos provar apenas para $m = k$, já que os outros casos caem na hipótese de indução. Seja $g = \sum_0^k a_i g_i$ e admitindo $g_0 \neq 0$, temos

$$\left(\frac{g}{g_0}\right)' = \sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{g_i}{g_0}\right)' = \sum_{i=1}^k a_i g_i^*. \quad (2.11)$$

Como $W(g_0, \dots, g_k)(t) \neq 0$, para todo t , usando a relação (2.7), teremos que

$$W(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*)(t) \neq 0,$$

para todo $t \in [a, b]$. Assim, as k funções $\{g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*\}$ formam um sistema ET e, portanto, a combinação não trivial (2.11) possui, no máximo, $k-1$ zeros, levando em conta as suas multiplicidades. Desta maneira, $\frac{g}{g_0}$ possui, no máximo, k zeros. Por conseguinte, como $g_0 \neq 0$, segue que g tem, no máximo, k zeros contando suas multiplicidades. Logo, $\{g_i\}_0^k$ é um sistema ET.

Portanto, mostramos que para todo $k = 0, 1, \dots, n$, o conjunto $\{g_i\}_0^k$ é um sistema ET. Ou seja, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT. $\square$

O próximo resultado fornece-nos uma maneira de construir um sistema ECT a partir de um conjunto de funções não nulas em um intervalo e suficientemente diferenciáveis.

Teorema 2.16. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$ que satisfazem a condição $g_j^{(q)}(a) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, j-1$ e $j = 1, 2, \dots, n$. O conjunto $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, existirem funções auxiliares $w_i \in C^{n-i}[a, b]$, que nunca se anulam em $[a, b]$,*

de modo que podemos escrever as funções como

$$\begin{aligned}
 g_0(t) &= w_0(t), \\
 g_1(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1, \\
 g_2(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1, \\
 &\vdots \\
 g_n(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \cdots \int_a^{y_{n-1}} w_n(y_n) dy_n dy_{n-1} \cdots dy_2 dy_1.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Demonstração. Seja $\{g_i\}_0^n$ um conjunto de $n+1$ funções de classe C^n em $[a, b]$. Suponha que existam funções auxiliares $w_i \in C^{n-i}[a, b]$, que não se anulam em $[a, b]$, tal que as funções g_i 's satisfazem (2.12). Vamos provar que $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT, mostrando que $W_k(t) = W(g_0, \dots, g_k)(t) \neq 0$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, e todo $t \in [a, b]$. Para isto, vamos verificar a seguinte fórmula

$$W_m(t) = W(g_0, g_1, \dots, g_m) = w_0^{m+1} w_1^m \cdots w_{m-1}^2 w_m, \tag{2.13}$$

para $m = 0, 1, \dots, n$. Se $m = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos que a afirmação é válida para m funções. Ou seja, dadas m funções escritas como acima, então $W_{m-1}(t) = w_0^m w_1^{m-1} \cdots w_{m-2}^2 w_{m-1}$. Vamos provar que a afirmação é verdadeira para $m+1$ funções.

Consideremos $g_j^* = \left(\frac{g_j}{g_0}\right)'$, para $j = 1, 2, \dots, m$. Sendo $g_0(t) = w_0(t) \neq 0$, para todo t , temos que

$$\begin{aligned}
 g_1^* &= \left(\frac{g_1}{g_0}\right)' = w_1(t), \\
 g_2^* &= \left(\frac{g_2}{g_0}\right)' = w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) dy_2, \\
 g_3^* &= \left(\frac{g_3}{g_0}\right)' = w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) \int_a^{y_2} w_3(y_3) dy_3 dy_2, \\
 &\vdots \\
 g_m^* &= \left(\frac{g_m}{g_0}\right)' = w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) \int_a^{y_2} w_3(y_3) \cdots \int_a^{y_{m-1}} w_m(y_m) dy_m dy_{m-1} \cdots dy_2.
 \end{aligned}$$

Segue da relação (2.7) que $W_m = w_0^{m+1} W(g_1^*, \dots, g_m^*)$. Agora, como $\{g_j^*\}_1^m$ é um conjunto de m funções segue, pela hipótese de indução, que $W(g_1^*, \dots, g_m^*) = w_1^m w_2^{m-1} \cdots w_{m-1}^2 w_m$. Portanto, $W_m = w_0^{m+1} w_1^m w_2^{m-1} \cdots w_{m-1}^2 w_m$. Como todas as funções w_i não se anulam em $[a, b]$, então para todo $k = 0, 1, \dots, m$, e todo $t \in [a, b]$, temos

$$W_k(t) = w_0^{k+1} w_1^k w_2^{k-1} \cdots w_{k-1}^2 w_k \neq 0$$

e, assim, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT.

Para mostrar a recíproca, assumimos que $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT. Pelo Teorema 2.15, tal fato é equivalente à $W_k(t) \neq 0$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, e todo $t \in [a, b]$. Vamos provar que isto implica na existência de funções auxiliares $w_i \in C^{n-i}[a, b]$, que não se

anulam em $[a, b]$, de modo que as funções g_i possam ser escritas como em (2.12), para $i = 0, 1, \dots, n$.

Faremos a prova por indução em k . Se $k = 0$, então g_0 é um sistema ECT, em que $W(g_0)(t) \neq 0$. Então, definimos $g_0 = w_0(t)$ trivialmente. Suponhamos que a afirmação é válida para k funções. Novamente, considerando $g_j^* = (\frac{g_j}{g_0})'$, $j = 1, 2, \dots, k$, temos, pela relação (2.7), que $W(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*)(t) \neq 0$, para todo $j = 1, \dots, k$, e todo $t \in [a, b]$. Assim, segue que $\{g_j^*\}_1^n$ é um sistema ECT com k funções. Além disso, como $g_j^{(q)}(a) = 0$, obtemos também que $(g_j^*)^{(q)}(a) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, j-2$ e $j = 1, 2, \dots, k$. Então, pela hipótese de indução, existem funções $w_j \in C^{n-j}[a, b]$, para $j = 1, 2, \dots, k$, de modo que

$$\begin{aligned} g_1^* &= w_1(t) \\ g_2^* &= w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) dy_2 \\ g_3^* &= w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) \int_a^{y_2} w_3(y_3) dy_3 dy_2 \\ &\vdots \\ g_k^* &= w_1(t) \int_a^t w_2(y_2) \int_a^{y_2} w_3(y_3) \cdots \int_a^{y_{k-1}} w_k(y_k) dy_k dy_{k-1} \cdots dy_2. \end{aligned}$$

Agora, integrando, de a até t , ambos os lados de $g_j^* = (\frac{g_j}{g_0})'$, obtemos para $j = 1, 2, \dots, k$, que

$$\int_a^t g_j^*(y_1) dy_1 = \int_a^t \left(\frac{g_j}{g_0} \right)'(y_1) dy_1 = \frac{g_j(t)}{g_0(t)} - \frac{g_j(a)}{g_0(a)},$$

ou seja,

$$g_j(t) = g_0(t) \int_a^t g_j^*(y_1) dy_1 + \frac{g_j(a)}{g_0(a)} g_0(t),$$

com $g_j(a) = 0$. Por fim, basta tomar $g_0 = w_0(t)$ junto com as expressões obtidas para g_j acima e teremos

$$\begin{aligned} g_0(t) &= w_0(t) \\ g_1(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \\ g_2(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1 \\ &\vdots \\ g_k(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \cdots \int_a^{y_{k-1}} w_k(y_k) dy_k dy_{k-1} \cdots dy_2 dy_1. \end{aligned}$$

□

Observação 2.17. Note que, caso a hipótese $g_j^{(q)}(a) = 0$ não seja satisfeita, é possível construir, a partir de combinações lineares de $\{g_i\}_0^n$, um outro conjunto de funções $\{h_i\}_0^n$, de modo que $h_0 = g_0$, $h_1 = g_1 - \frac{g_1(a)}{g_0(a)} h_0$ e $h_j = g_j - \sum_{q=0}^{j-1} d_{qj}(a) h_q$, para $j = 2, 3, \dots, n$ com $d_{qj}(a)$ coeficientes reais que são dados por combinações das funções g_i 's e suas derivadas, o qual satisfaz as hipóteses necessárias e, ainda, preserva os Wronskianos. Mais detalhes desta construção são dados na próxima seção, nos comentários e considerações que antecedem o Teorema 2.21.

Até aqui, vimos que sistemas T, ET, CT e ECT, podem ser caracterizados pelo número máximo de zeros que uma combinação linear não trivial de suas funções pode ter. Na verdade, podemos dizer ainda que sempre existe um elemento do espaço gerado pelas funções do sistema tendo, exatamente, esse número máximo de zeros, os quais são isolados. Quando isto acontece, dizemos que a cota, isto é, o número máximo de zeros é realizável. A seguinte proposição comprova essa afirmação, uma vez que se $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T, ET, CT ou ECT, então suas funções são linearmente independentes. Mas, antes, estabelecemos o seguinte lema a ser usado na proposição, ambos encontrados em [14].

Lema 2.18. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Se tais funções são linearmente independentes, então existem pontos $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$, distintos, tais que os vetores*

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) \\ g_0(t_1) \\ \vdots \\ g_0(t_n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(t_0) \\ g_1(t_1) \\ \vdots \\ g_1(t_n) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} g_n(t_0) \\ g_n(t_1) \\ \vdots \\ g_n(t_n) \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes.

Demonstração. Faremos a prova por indução. Se $k = 0$ é imediato. Suponha que a afirmação é válida para $k - 1$. Isto é, existem pontos distintos $t_0, t_1, \dots, t_{k-1} \in [a, b]$ tais que os vetores

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) \\ g_0(t_1) \\ \vdots \\ g_0(t_{k-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(t_0) \\ g_1(t_1) \\ \vdots \\ g_1(t_{k-1}) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} g_{k-1}(t_0) \\ g_{k-1}(t_1) \\ \vdots \\ g_{k-1}(t_{k-1}) \end{pmatrix}$$

são LI. Agora suponha, por contradição, que a afirmação não é válida para k . Logo, para qualquer $t \in [a, b]$, existem $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t) \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_0(t) \begin{pmatrix} g_0(t_0) \\ g_0(t_1) \\ \vdots \\ g_0(t_{k-1}) \\ g_0(t) \end{pmatrix} + \alpha_1(t) \begin{pmatrix} g_1(t_0) \\ g_1(t_1) \\ \vdots \\ g_1(t_{k-1}) \\ g_1(t) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k(t) \begin{pmatrix} g_k(t_0) \\ g_k(t_1) \\ \vdots \\ g_k(t_{k-1}) \\ g_k(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Por hipótese de indução, segue que $\alpha_k(t) \neq 0$. Caso contrário, a hipótese seria falsa. Agora dividimos em dois casos:

1. Existe $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tal que $g_k(t_j) \neq 0$;
2. Para todo $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, temos $g_k(t_j) = 0$.

Para o caso 1, se existe tal $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, então

$$\alpha_0(t)g_0(t_j) + \alpha_1(t)g_1(t_j) + \dots + \alpha_k(t)g_k(t_j) = 0,$$

o que implica

$$\frac{\alpha_0(t)}{\alpha_k(t)}g_0(t_j) + \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_k(t)}g_1(t_j) + \dots + g_k(t_j) = 0,$$

contrariando que $g_0, g_1, \dots, g_k$ são LI. Para o caso 2, para todo $j = 1, \dots, k-1$, temos

$$\alpha_0(t)g_0(t_j) + \alpha_1(t)g_1(t_j) + \dots + \alpha_{k-1}(t)g_{k-1}(t_j) = 0.$$

Pela independência linear oriunda da hipótese de indução, segue que $\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_k(t)} = 0$ para todo $m = 0, 1, \dots, k-1$. Assim, $g_k(t) \equiv 0$, pois podemos escrever $g_m(t) = -\sum_{k=m+1}^k \frac{\alpha_m(t)}{\alpha_k(t)} g_k(t)$. E isto contraria a independência linear das funções $g_0, \dots, g_k$. Portanto, a afirmação é válida para k , completando a prova. $\square$

Proposição 2.19. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Se tais funções são linearmente independentes, então existem pontos distintos $t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in [a, b]$ e constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todas nulas, tais que*

$$g(t_j) = \sum_{k=0}^n \alpha_k g_k(t_j) = 0,$$

para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Demonstração. Pelo lema anterior, existem pontos distintos $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ tais que os vetores

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) \\ g_0(t_1) \\ \vdots \\ g_0(t_n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1(t_0) \\ g_1(t_1) \\ \vdots \\ g_1(t_n) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} g_n(t_0) \\ g_n(t_1) \\ \vdots \\ g_n(t_n) \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes. Logo,

$$D \begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, existe solução $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ não trivial de

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

com $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, existem $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_{n-1}) & g_1(t_{n-1}) & \cdots & g_n(t_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, t_j é um zero de $g = \sum_{k=0}^n \alpha_k g_k$, para $j = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

2.4 Sistemas estendidos de Chebyshev com acurácia

Como visto nas seções anteriores, sistemas de Chebyshev podem ser totalmente caracterizados a partir de determinantes não nulos, no caso o Wronskiano para sistemas ET e ECT. Vimos também que o fato de tais determinantes não se anularem num certo intervalo fornece outra caracterização via número de zeros, simples ou não, que uma combinação linear não trivial das funções do sistema pode ter. Tal caracterização, no caso de $\{g_i\}_0^n$ ser um sistema T, ET, CT ou ECT, nos diz que o número de zeros de um elemento do espaço gerado pelas $n + 1$ funções é no máximo n , sendo zeros isolados para os casos T e CT e considerando suas respectivas multiplicidades para os casos ET e ECT. Além disso, é sempre possível obter um elemento do espaço gerado que tem precisamente n zeros isolados, como mostra a Proposição 2.19. Quando o número máximo de zeros, de um conjunto qualquer de $n + 1$ funções, exceder n por um número natural $k \geq 1$, diremos que as funções formam um *sistema estendido de Chebyshev com acurácia k* .

Nesta seção, sendo $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ um conjunto ordenado qualquer de funções suficientemente diferenciáveis, veremos alguns resultados que proporcionam cotas superiores para o número de zeros de elementos do espaço gerado pelas $n + 1$ funções, quando alguns dos Wronskianos $W_k(t) = W(g_0, \dots, g_k)(t)$, $k = 0, \dots, n$, se anulam. Trataremos, também, da realização de todas as possíveis configurações de zeros de um sistema com acurácia k . Aqui, a principal referência é o artigo [17].

Definição 2.20. Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^r[a, b]$, $r \geq n$. Diremos que o conjunto ordenado $\{g_i\}_0^n$ é um *sistema estendido de Chebyshev com acurácia k* se toda combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, possui no máximo $n + k$ zeros, contando suas multiplicidades, sendo $k \geq 1$ um inteiro positivo.

Consideremos, inicialmente, um conjunto de funções $w_i \in C^{n-i}[a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Usando (2.12), definimos as funções $g_0, g_1, \dots, g_n$. Segue da prova do Teorema 2.16 que a relação (2.13) é válida se w_0 não se anula em $[a, b]$. Ou seja, temos

$$W_k(t) = W(g_0, g_1, \dots, g_k)(t) = w_0^{k+1} w_1^k \dots w_{k-1}^2 w_k,$$

para $k = 0, 1, \dots, n$ e $t \in [a, b]$. Note que, caso nenhum dos Wronskianos $W_i(t)$ se anule, temos

$$\begin{aligned} w_0(t) &= W_0(t), \\ w_1(t) &= \frac{W_1(t)}{W_0^2(t)}, \\ w_k(t) &= \frac{W_{k-2}(t)W_k(t)}{W_{k-1}^2(t)}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

para $k \geq 2$.

Agora, introduzimos o seguinte operador *Divisão-Derivação*, que é, como o nome indica, uma operação em que se faz sucessivas divisões e derivações, dado por

$$D_i v = \partial_t \left(\frac{v}{w_i} \right), \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{2.15}$$

sendo $\partial_t(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$. Assim, para as funções $\{g_i\}_0^n$ definidas acima, teremos, por exemplo, que

$$D_0 g_0 = 0,$$

$$D_0 g_1 = w_1(t),$$

$$D_1 D_0 g_1 = 0,$$

$$D_1 D_0 g_2 = w_2(t),$$

$$D_2 D_1 D_0 g_2 = 0.$$

Ou seja, de maneira geral, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} D_i D_{i-1} \dots D_1 D_0 g_i &= 0, & i &= 0, 1, \dots, n, \\ D_{i-1} D_{i-2} \dots D_1 D_0 g_i &= w_i, & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora, dado um conjunto de funções $\{g_i\}_0^n$ de classe $C^n[a, b]$, linearmente independentes, sejam $w_0 = g_0$ e w_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dadas por (2.16), isto é,

$$\begin{aligned} w_0 &= g_0, \\ w_1 &= D_0 g_1, \\ w_2 &= D_1 D_0 g_2, \\ w_3 &= D_2 D_1 D_0 g_3, \\ &\vdots \\ w_n &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_0 g_n. \end{aligned}$$

Assumindo que w_i está bem definida e, portanto, de classe $C^{n-i}[a, b]$, para $i = 0, 1, \dots, n$, podemos verificar a validade das relações (2.13) e (2.14). De fato, podemos construir um conjunto de funções que satisfazem as equações integrais em (2.12) e que tenham os mesmos Wronskianos das funções g_i 's. Para isto, fazemos sucessivas integrações das expressões acima, de modo que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a função w_i é integrada i vezes em subintervalos de $[a, b]$, sendo que o limite inferior de integração é sempre o ponto a . Mais precisamente, para $i = 1$, temos

$$\int_a^t w_1(y_1) dy_1 = \int_a^t (D_0 g_1)(y_1) dy_1 = \int_a^t \partial_{y_1} \left(\frac{g_1(y_1)}{w_0(y_1)} \right) dy_1,$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^t w_1(y_1) dy_1 = \frac{g_1(t)}{w_0(t)} - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} = \frac{1}{w_0(t)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right). \quad (2.17)$$

Para $i = 2$, temos

$$\int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 = \int_a^{y_1} (D_1 D_0 g_2)(y_2) dy_2 = \int_a^{y_1} \partial_{y_2} \left(\frac{(D_0 g_2)(y_2)}{w_1(y_2)} \right) dy_2,$$

e novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 = \left(\frac{D_0 g_2}{w_1} \right)(y_1) - \left(\frac{D_0 g_2}{w_1} \right)(a).$$

Multiplicando a equação por $w_1(y_1)$, fazendo uma nova integração, e usando a definição da função w_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{w_1(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \right) \\
 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \right) \\
 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \left(\frac{(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t))}{w_0(t)} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Para $i = 3$, após três integrações e algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \int_a^{y_2} w_3(y_3) dy_3 dy_2 dy_1 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_3(t) - \frac{g_3(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_3)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(D_1 D_0 g_3)(a)}{(D_1 D_0 g_2)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1 \right) \\
 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_3(t) - \frac{g_3(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_3)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(D_1 D_0 g_3)(a)}{(D_1 D_0 g_2)(a)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \right).
 \end{aligned}$$

De modo geral, temos a equação (2.17) para $i = 1$ e

$$\begin{aligned}
 \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \cdots \int_a^{y_{i-1}} w_i(y_i) dy_i dy_{i-1} \cdots dy_1 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_i(t) - \frac{g_i(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_i)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \right. \\
 &\quad \left. - \cdots - \frac{(D_{i-2} D_{i-3} \cdots D_0 g_i)(a)}{(D_{i-2} D_{i-3} \cdots D_0 g_{i-1})(a)} w_0(t) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\int_a^t w_1(y_1) \cdots \int_a^{y_{i-2}} w_{i-1}(y_{i-1}) dy_{i-1} \cdots dy_2 dy_1 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{w_0(t)} \left(g_i(t) - \frac{g_i(a)}{g_0(a)} w_0(t) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{q=1}^{i-1} \left(\frac{D_{q-1} D_{q-2} \cdots D_0 g_i(a)}{D_{q-1} D_{q-2} \cdots D_0 g_q(a)} w_0(t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \cdots \int_a^{y_{q-1}} w_q(y_q) dy_q \cdots dy_1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots, n$, sendo $y_0 = t$. Isolando a função $g_i(t)$, na expressão acima, obtemos as equações integrais, dadas em (2.12), se $g_i^{(q)}(a) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, i-1$, e $i = 1, 2, \dots, n$. Caso contrário, usaremos a estratégia considerada na Observação 2.17. Isto é, definiremos um conjunto de funções $\{h_i\}_0^n \in C^n[a, b]$, tais que $h_i^{(q)}(a) = 0$, para $q = 0, 1, \dots, i-1$, e $i = 1, 2, \dots, n$. Começamos tomando $h_0 = g_0 = w_0$, $h_1 = g_1 - \frac{g_1(a)}{g_0(a)} h_0$ e h_i igual ao lado direito da última igualdade acima multiplicado por w_0 , para $i = 2, 3, \dots, n$. Ou seja,

temos, por exemplo, para $i = 0, 1, 2$ e 3 ,

$$h_0(t) = g_0(t),$$

$$h_1(t) = g_1(t) - \frac{g_1(a)}{g_0(a)} h_0(t),$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \\ &= g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \\ &= g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} h_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} h_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3(t) &= g_3(t) - \frac{g_3(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_3)(a)}{(D_0 g_1)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \\ &\quad - \frac{(D_1 D_0 g_3)(a)}{(D_1 D_0 g_2)(a)} w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1 \\ &= g_3(t) - \frac{g_3(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_3)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \\ &\quad - \frac{(D_1 D_0 g_3)(a)}{(D_1 D_0 g_2)(a)} \left(g_2(t) - \frac{g_2(a)}{g_0(a)} w_0(t) - \frac{(D_0 g_2)(a)}{(D_0 g_1)(a)} \left(g_1(t) - \frac{g_1(a)}{w_0(a)} w_0(t) \right) \right) \\ &= g_3(t) - \frac{g_3(a)}{g_0(a)} h_0(t) - \frac{(D_0 g_3)(a)}{(D_0 g_1)(a)} h_1(t) - \frac{(D_1 D_0 g_3)(a)}{(D_1 D_0 g_2)(a)} h_2(t). \end{aligned}$$

De maneira geral, obtemos as funções $h_0 = g_0$, $h_1 = g_1 - \frac{g_1(a)}{g_0(a)} h_0$ e $h_i = g_i - \sum_{q=0}^{i-1} d_{qi}(a) h_q$, para $i = 2, 3, \dots, n$, em que

$$d_{qi}(a) = \begin{cases} \frac{g_i(a)}{g_0(a)}, & \text{para } q = 0, \\ \frac{(D_{q-1} D_{q-2} \dots D_0 g_i)(a)}{(D_{q-1} D_{q-2} \dots D_0 g_q)(a)}, & \text{para } q = 1, \dots, i-1. \end{cases}$$

Agora, com tais funções definidas, a partir das construções feitas anteriormente, podemos concluir que

$$\begin{aligned} h_0(t) &= w_0(t) \\ h_1(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) dy_1 \\ h_2(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) dy_2 dy_1 \\ &\vdots \\ h_n(t) &= w_0(t) \int_a^t w_1(y_1) \int_a^{y_1} w_2(y_2) \dots \int_a^{y_{n-1}} w_n(y_n) dy_n dy_{n-1} \dots dy_2 dy_1. \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte relação

$$W(h_0, h_1, \dots, h_k)(t) = w_0^{k+1} w_1^k \dots w_{k-1}^2 w_k,$$

para $k = 0, 1, \dots, n$ e todo $t \in [a, b]$, provada no Teorema 2.16. Uma vez que o conjunto de funções $\{h_i\}_0^n$ foi construído a partir de combinações lineares de $\{g_i\}_0^n$, podemos concluir que

$$W_k(t) = W(g_0, g_1, \dots, g_k)(t) = W(h_0, h_1, \dots, h_k)(t) = w_0^{k+1} w_1^k \dots w_{k-1}^2 w_k,$$

para $k = 0, 1, \dots, n$ e todo $t \in [a, b]$, e consequentemente, se os Wronskianos $W_k(t)$ forem diferentes de zero, o conjunto de equações (2.14) permanece válido para todo $k = 0, 1, \dots, n$ e $t \in [a, b]$.

Até aqui, assumimos que as funções w_i não se anulam no intervalo $[a, b]$. Porém, se algumas destas possuírem zeros em $[a, b]$, os Wronskianos W_i também irão se anular em tais pontos. Nestes casos, o operador Divisão-Derivação, definido em (2.15), ainda pode ser usado considerando o surgimento de assíntotas verticais.

Teorema 2.21. *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n$ funções analíticas no intervalo $[a, b]$. Suponha que todos os v_i 's zeros do Wronskiano $W_i = W(g_0, \dots, g_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$, são simples. Então, o número de zeros isolados de toda combinação linear não trivial, $g = \sum_0^n a_i g_i$, é no máximo*

$$n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + v_{n-3} + \dots + v_1 + v_0 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}, \quad (2.18)$$

em que $\mu_r = \min(v_r, v_0 + \dots + v_{r-2})$, para cada $r = 2, 3, \dots, n-1$.

Este resultado é baseado nos trabalhos [16, 18], em que os autores fornecem duas cotas distintas para o número de zeros de $g = \sum_0^n a_i g_i$. Em [18], uma cota é obtida assumindo apenas a diferenciabilidade das funções g_i 's e depois, em [16], outra cota é obtida, assumindo analiticidade. Para a demonstração do teorema acima, que busca melhorar os resultados dos dois trabalhos mencionados, fazemos uma combinação das construções feitas em ambos, apresentadas a seguir.

Observamos, inicialmente, que todo elemento $g \in \text{span}(g_0, \dots, g_n)$ satisfaz, utilizando o operador definido em (2.15), a seguinte fórmula, conhecida por Fórmula de Frobenius, encontrada em [22],

$$\frac{W_{n-1}^2}{W_n W_{n-2}} \partial_t \frac{W_{n-2}^2}{W_{n-1} W_{n-3}} \partial_t \dots \partial_t \frac{W_1^2}{W_2 W_0} \partial_t \frac{W_0^2}{W_1} \partial_t \frac{1}{W_0} g = k, \quad (2.19)$$

com k uma constante. De fato, consideremos o seguinte operador

$$L = D_n D_{n-1} \dots D_1 D_0,$$

assim como definido em (2.16). Logo, temos $L(g_i) = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Assim, como o operador Divisão-Derivação, definido em (2.15), é linear, segue que, para uma combinação linear $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, $L(g) = 0$. Disto, basta ir aplicando os respectivos operadores Divisão-Derivação D_i , e usando as expressões para as w_i 's dadas por (2.14), até o último D_n , isto é, $i = n$. Ou seja, sendo $L(g) = 0$, podemos reescrevê-la como

$$\partial_t \left(\frac{W_{n-1}^2}{W_n W_{n-2}} \partial_t \frac{W_{n-2}^2}{W_{n-1} W_{n-3}} \partial_t \dots \partial_t \frac{W_1^2}{W_2 W_0} \partial_t \frac{W_0^2}{W_1} \partial_t \frac{1}{W_0} g \right) = 0.$$

E, integrando ambos os lados da expressão acima em relação à t , chegamos à relação (2.19).

Introduzindo o operador $\Delta_i = W_i^2 \partial_t (W_i)^{-1}$, isto é, $\Delta_i(\varphi) = W_i^2 \partial_t (\varphi/W_i)$, podemos transformar a equação (2.19) em

$$\Delta_{n-1} \frac{1}{W_{n-3}} \Delta_{n-2} \frac{1}{W_{n-4}} \Delta_{n-3} \dots \Delta_2 \frac{1}{W_0} \Delta_1 \Delta_0 g = kW_n W_{n-2}. \quad (2.20)$$

Podemos assumir $k \neq 0$, pois caso contrário a ordem da equação pode ser reduzida. Agora, podemos construir uma sequência de funções, tomando $F_0 = g$, $F_1 = \Delta_0 F_0$, $F_2 = \Delta_1 F_1$ e $F_j = \Delta_{j-1} (W_{j-3})^{-1} F_{j-1}$, para $j = 3, 4, \dots, n$. Logo, a equação (2.20) é escrita como $F_n = kW_n W_{n-2}$.

Note que, as funções F_0, F_1 e F_2 podem admitir apenas zeros, nos seus intervalos de definição, enquanto as funções F_j , para $j \geq 3$, podem possuir tanto zeros quanto pólos. Aqui, para funções reais, pólos são assíntotas verticais. Sendo v_i o número de zeros de cada Wronskiano W_i , então o número máximo de pólos que F_j , $j \geq 3$, pode ter é $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-3}$.

O artigo [18] traz, como os próprios autores se referem, uma modificação do Teorema de Rolle, dando uma estimativa para o número de zeros de uma função, a partir de sua aplicação em um operador diferencial, contando os zeros do Wronskiano associado e a quantidade de pólos. Mais precisamente, sendo $h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, exceto em uma quantidade finita p de pólos, então

$$N(h) \leq N(\Delta_i h) + v_i + p + 1, \quad (2.21)$$

em que $N(\cdot)$ indica a soma do número de zeros e pólos da função. Consideremos, por exemplo, h uma função suave num intervalo $[a, b]$, então $\frac{h}{W_i}$ é suave, exceto nos zeros v_i de W_i , os quais são os seus pólos. Assim, esta última possui $v_i + 1$ subintervalos de suavidade em $[a, b]$. Quando aplicado o operador diferencial derivada ∂_t , pelo Teorema de Rolle, pode-se diminuir o número de zeros, em cada subintervalo, em no máximo 1. Porém, ao multiplicar a função $\frac{h}{W_i}$ por W_i^2 , recupera-se a regularidade da função h .

Aplicando a desigualdade (2.21) às funções F_i e observando que

$$N(F_k) \leq N((W_{k-2})^{-1} F_k),$$

$k = 2, 3, \dots, n$, obtemos as seguintes estimativas de $N(\cdot)$ para as funções F_i ,

$$\begin{aligned} N(F_0) &\leq N(\Delta_0 F_0) + v_0 + 1, \\ N(F_1) &\leq N(\Delta_1 F_1) + v_1 + 1, \\ N(F_2) &\leq N(\Delta_2 (W_0)^{-1} F_2) + v_0 + v_2 + 1, \\ N(F_3) &\leq N(\Delta_3 (W_1)^{-1} F_3) + v_0 + v_1 + v_3 + 1, \\ &\vdots \\ N(F_{n-1}) &\leq N(\Delta_{n-1} (W_{n-3})^{-1} F_{n-1}) + v_0 + v_1 + \dots + v_{n-3} + v_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Lembrando que $\Delta_0 F_0 = F_1$, $\Delta_1 F_1 = F_2$ e $\Delta_{j-1} (W_{j-3})^{-1} F_{j-1} = F_j$, para $j \geq 3$, então

$$\begin{aligned} N(F_1) &\geq N(F_0) - v_0 - 1, \\ N(F_2) &\geq N(F_1) - v_1 - 1, \\ N(F_3) &\geq N(F_2) - v_2 - v_0 - 1, \\ N(F_j) &\geq N(F_{j-1}) - v_{j-1} - (v_0 + v_1 + \dots + v_{j-3}) - 1, \quad \text{para } j \geq 4. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sendo $F_n = kW_n W_{n-2}$, segue que $N(F_n) \leq v_n + v_{n-2}$. Como $F_0 = g \in \text{span}(g_0, \dots, g_n)$, somando todas essas desigualdades, é possível concluir que

$$N(g) \leq n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + 2v_{n-3} + 3v_{n-4} + \dots + (n-2)v_1 + (n-1)v_0. \quad (2.23)$$

Agora, em [16], assumindo a analiticidade das funções g_i , os autores obtiveram uma outra cota para o número de zeros de uma combinação linear não trivial. No trabalho, foi feito uso das chamadas desigualdades de *Rolle-Vorhoeve* (RV). Elas estabelecem que, dadas funções $f, h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas, exceto num número finito p de pólos, temos

$$\begin{aligned} N(f) &\leq N(\partial_t f) + 1, \\ |N(f) - N(h)| &\leq N(fh) \leq N(f) + N(h), \\ N(1/f) &= N(f). \end{aligned}$$

Sendo $N(F_0) \leq N(\frac{1}{W_0} F_0)$, pela primeira desigualdade de RV, temos

$$N(F_0) \leq N\left(\frac{1}{W_0} F_0\right) \leq N\left(\partial_t \left(\frac{1}{W_0} F_0\right)\right) + 1.$$

Daí, subtraindo $N(W_0^2)$ em ambos os lados, segue que

$$N(F_0) - N(W_0^2) \leq N\left(\partial_t \left(\frac{1}{W_0} F_0\right)\right) - N(W_0^2) + 1.$$

Pela segunda desigualdade de RV, e observando que $W_0^2 \partial_t \left(\frac{1}{W_0} F_0\right) = F_1$, obtemos

$$N\left(\partial_t \left(\frac{1}{W_0} F_0\right)\right) - N(W_0^2) \leq N\left(W_0^2 \partial_t \left(\frac{1}{W_0} F_0\right)\right) = N(F_1).$$

Desta forma, temos que

$$N(F_0) - N(W_0^2) \leq N(F_1) + 1,$$

ou seja,

$$N(F_1) \geq N(F_0) - 2v_0 - 1,$$

uma vez que $N(W_0^2) \leq N(W_0) + N(W_0)$. Da mesma forma, observando que $N(F_1) \leq N(\frac{1}{W_1} F_1)$ e $W_1^2 \partial_t \left(\frac{1}{W_1} F_1\right) = F_2$, e subtraindo $N(W_1^2)$ em ambos os lados como acima, obtemos

$$N(F_1) - N(W_1^2) \leq N(F_2) + 1,$$

isto é,

$$N(F_2) \geq N(F_1) - 2v_1 - 1.$$

Agora, para $j \geq 3$, sendo $N(F_{j-1}) \leq N(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1})$, então pela primeira desigualdade de RV, temos

$$N(F_{j-1}) \leq N\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1}\right) \leq N\left(\partial_t \left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1}\right)\right) + 1.$$

Subtraindo $N(W_{j-1}^2)$ em ambos os lados, segue que

$$N(F_{j-1}) - N(W_{j-1}^2) \leq N\left(\partial_t \left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1}\right)\right) - N(W_{j-1}^2) + 1.$$

Usando a segunda desigualdade de RV, como $W_{j-1}^2 \partial_t \left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1} \right) = F_j$, obtemos

$$N \left(\partial_t \left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1} \right) \right) - N(W_{j-1}^2) \leq N \left(W_{j-1}^2 \partial_t \left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}} F_{j-1} \right) \right) = N(F_j).$$

Logo,

$$N(F_{j-1}) - N(W_{j-1}^2) \leq N(F_j) + 1,$$

e, portanto,

$$N(F_j) \geq N(F_{j-1}) - 2v_{j-1} - 1,$$

já que $N(W_{j-1}^2) \leq N(W_{j-1}) + N(W_{j-1})$.

Desta maneira, obtemos as seguintes novas estimativas,

$$\begin{aligned} N(F_1) &\geq N(F_0) - 2v_0 - 1, \\ N(F_2) &\geq N(F_1) - 2v_1 - 1, \\ N(F_j) &\geq N(F_{j-1}) - 2v_{j-1} - 1, \quad \text{para } j \geq 3. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Assim, somando todas as estimativas acima, como $F_0 = g$ e $N(F_n) \leq v_n + v_{n-2}$, podemos concluir que

$$N(g) \leq n + 3v_{n-2} + 2(v_n + v_{n-1} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0). \tag{2.25}$$

Finalmente, temos as ferramentas e resultados necessários para provar o Teorema 2.21.

Demonstração Teorema 2.21. Sendo $\{g_i\}_0^n$ um conjunto de funções analíticas, então todas as construções feitas acima são válidas. Consideremos os dois grupos de estimativas, dados por (2.22) e (2.24). Tomando, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, a melhor estimativa de $N(F_k)$, isto é, a maior cota inferior entre os dois grupos, obtemos um novo conjunto de estimativas para $N(F_i)$, dado por

$$\begin{aligned} N(F_1) &\geq N(F_0) - v_0 - 1, \\ N(F_2) &\geq N(F_1) - v_1 - 1, \\ N(F_j) &\geq N(F_{j-1}) - v_{j-1} - \mu_{j-1} - 1, \quad \text{para } j = 3, 4, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.26}$$

em que $\mu_r = \min\{v_r, v_0 + v_1 + \cdots + v_{r-2}\}$, para $r = 2, 3, \dots, n-1$. Por fim, somando as desigualdades em (2.26), e como $N(F_n) \leq v_n + v_{n-2}$, obtemos a seguinte cota superior para o número de zeros isolados de uma combinação linear não trivial, $g = F_0$, das funções $\{g_i\}_0^n$,

$$N(g) \leq n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1}.$$

□

O próximo teorema irá apresentar um exemplo realizável em que a cota estabelecida no Teorema 2.21 é atingida, em um espaço gerado por um conjunto de polinômios, em que os dois últimos Wronskianos se anulam em certos pontos. Mas antes de apresentá-lo, estabelecemos algumas proposições, as quais compõem sua demonstração.

Proposição 2.22. *Dados n e ℓ inteiros não negativos, existem um conjunto ordenado de polinômios $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ tal que todos os Wronskianos não se anulam, exceto W_n , o qual tem ℓ zeros simples, e um elemento $v \in \text{span}(u_0, \dots, u_n)$ tendo, exatamente, $n + \ell$ zeros simples. Ou seja, $\{u_i\}_0^n$ é um sistema de Chebyshev com acurácia ℓ .*

Demonstração. Consideremos as funções

$$\begin{aligned} w_i(t) &= 1, \\ w_n(t) &= t^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha_k t^k, \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

A partir delas, iremos construir, via integrais (2.12), polinômios $u_0, u_1, \dots, u_n$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1(t) &= \int_0^t dy_1, \\ u_2(t) &= \int_0^t \int_0^{y_1} dy_2 dy_1, \\ &\vdots \\ u_{n-1}(t) &= \int_0^t \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_{n-2}} dy_{n-1} \cdots dy_1, \\ u_n(t) &= \int_0^t \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_{n-1}} \left(y_n^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha_k y_n^k \right) dy_n \cdots dy_1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \frac{t^j}{j!}, & \text{para } j = 0, 1, \dots, n-1, \\ u_n(t) &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{k!}{(n+k)!} \alpha_k t^{n+k}, & \text{com } \alpha_\ell = 1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Usando a equação (2.13), temos $W_i(t) = w_i(t)$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Agora, vamos tomar $v \in \text{span}(u_0, \dots, u_n)$, dado por

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u_j(t) + u_n(t) = \sum_{j=0}^{n+\ell} b_j t^j,$$

$$\text{sendo } b_j = \begin{cases} a_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{(j-n)!}{j!} \alpha_{j-n}, & j = n, n+1, \dots, n+\ell. \end{cases}$$

Para qualquer escolha de coeficientes b_j , a combinação linear v ainda será um polinômio de grau $n+\ell$. Sendo assim, v pode ter no máximo $n+\ell$ zeros simples. Sendo os b_j arbitrários, podemos tomá-los de modo que v tenha, precisamente, os $n+\ell$ zeros simples.

Pelo Teorema 2.21, o número máximo de zeros de um elemento de $\text{span}(u_0, \dots, u_n)$, considerando que apenas o último Wronskiano W_n possa admitir v_n zeros, é $n+v_n$. Sendo assim, se W_n tem $k < \ell$ zeros simples, então um elemento do gerado não pode ter mais que $n+k < n+\ell$ zeros, o que contradiz a afirmação de que v tem, exatamente, $n+\ell$ zeros simples. Ainda, W_n também não pode ter $k > \ell$ zeros, pois $W_n = w_n$ é um polinômio de grau ℓ . Portanto, segue que W_n tem exatamente ℓ zeros simples. $\square$

Proposição 2.23. *Dados n e k inteiros não negativos, existem um conjunto ordenado de polinômios $\{u_0, \dots, u_n\}$, tal que todos os Wronskianos não se anulam, exceto W_{n-1} , o qual tem k zeros simples, e um elemento $v \in \text{span}(u_0, \dots, u_n)$ tendo, exatamente, $n+k$ zeros simples.*

Demonstração. Consideremos, inicialmente, o conjunto ordenado de polinômios $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ como na proposição anterior. Isto é, polinômios obtidos a partir das funções

$$w_i(t) = 1, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$w_{n-1}(t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^i = \prod_{j=1}^k (t - \xi_j),$$

em que ξ_j são os zeros de $W_{n-1} = w_{n-1}$, garantidos pela Proposição 2.22. Logo,

$$u_i(t) = \frac{t^i}{i!}, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$u_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{i!}{(n+i)!} \alpha_i t^{n+i-1}, \quad \text{com } \alpha_k = 1.$$

Vamos adicionar ao conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ um polinômio u_n , de grau $n+k$, a fim de obter uma combinação linear, não trivial, de tais funções que tenha o número de zeros desejado. Para construir tal polinômio precisamos, primeiramente, de uma função auxiliar w_n , que será obtida a partir da equação (2.14). Como $W_i = w_i = 1$ para $i = 0, 1, \dots, n-2$, e $W_{n-1} = w_{n-1} = \prod_{j=1}^k (t - \xi_j)$, pela equação (2.14), temos $W_n = w_n W_{n-1}^2$. Daí, tomando $w_n(t) = 1 + \sum_{i=1}^k (t - \xi_i)^{-2}$, obtemos

$$W_n = \left(\prod_{j=1}^k (t - \xi_j)^2 \right) \left(1 + \sum_{i=1}^k (t - \xi_i)^{-2} \right) = \prod_{j=1}^k (t - \xi_j)^2 + \sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i}^k (t - \xi_j)^2, \quad (2.30)$$

o qual não se anula. Usando as integrais (2.12), obtemos $u_n(t)$. Isto é,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= w_0(t) \int_0^t w_1(y_1) \int_0^{y_1} w_2(y_2) \cdots \int_0^{y_{n-2}} w_{n-1}(y_{n-1}) \int_0^{y_{n-1}} w_n(y_n) dy_n \cdots dy_1 \\ &= \frac{(k+1)!}{(n+k)!} t^{n+k} + \left(\alpha_{k-1} k! - \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^{-1} k! \right) \frac{t^{n+k-1}}{(n+k-1)!} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\alpha_{j-1} - \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^{k-j} \right) \frac{j!}{(n+j-1)!} t^{n+j-1} \\ &\quad - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^k + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\alpha_i \xi_0^i + \sum_{j=1}^k \alpha_i (\xi_j^i + \xi_j^{i+1}) \right) \right] \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^k \sum_{q=0}^{i-1} \alpha_i \xi_j^q \frac{(i-q)!}{(n+i-q-1)!} t^{n+i-q-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

é um polinômio de grau $n+k$.

Agora, consideramos o conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ e tomemos $v_\varepsilon \in \text{span}(u_0, \dots, u_n)$ dado por

$$v_\varepsilon = v_0 - \varepsilon u_n, \quad (2.32)$$

sendo $\varepsilon > 0$ e $v_0 \in \text{span}(u_0, \dots, u_{n-1})$ um polinômio de grau $n+k-1$ que possui $n+k-1$ zeros simples, garantidos pela proposição anterior, de modo que o coeficiente que acompanha o termo de maior grau é igual a 1. Desta forma, quando fazemos $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que v_ε tem $n+k-1$ zeros simples, próximos aos zeros de v_0 , pois nas vizinhanças

de tais pontos, v_0 e v_ε possuem o mesmo sinal. Note que, como o coeficiente do termo de maior grau de u_{n-1} é positivo, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{n-1} = \infty.$$

Agora, como u_n é um polinômio de grau $n + k$, maior que o grau de v_0 , e o coeficiente que acompanha o seu termo de maior grau é positivo, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (-\varepsilon u_n) = -\infty.$$

Pela continuidade da função, deve-se ter mais um zero, sendo este simples devido ao grau de v_ε . Portanto, para $v = v_\varepsilon$, temos que v tem $n + k$ zeros simples. $\square$

Teorema 2.24. *Dados n, k e ℓ inteiros não negativos, existem um conjunto ordenado de polinômios $\{u_0, \dots, u_n\}$, tal que todos os Wronskianos não se anulam, exceto W_{n-1} e W_n , os quais têm k e ℓ zeros simples, respectivamente, e um elemento em $\text{span}(u_0, \dots, u_n)$ tendo, exatamente, $n + k + \ell$ zeros simples.*

A prova será feita a partir de uma perturbação do conjunto de polinômios obtido na Proposição 2.23, de modo que o último Wronskiano tenha, agora, ℓ zeros simples.

Demonstração. Consideremos $\{u_0, \dots, u_n\}$ o conjunto obtido da Proposição 2.23 e denotemos por W_n^0 o seu último Wronskiano dado pela equação (2.30). Observe que W_n^0 é um polinômio de grau $2k$ que não possui zeros reais. Assim, W_n^0 possui $2k$ zeros complexos.

Sejam $\varepsilon^* > 0$ pequeno e $u(t)$ um polinômio. Afirmamos que o último Wronskiano W_n do conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n + \varepsilon^* u\}$, o qual é uma perturbação de $\{u_0, \dots, u_n\}$, é dado por

$$W_n(t) = W_n^0 + \varepsilon^* (u^{(n)} w_{n-1} - u^{(n-1)} w'_{n-1}), \quad (2.33)$$

em que $w_{n-1}(t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^i = \prod_{j=1}^k (t - \xi_j)$. Verifica-se isto usando que $w_i = W_i = 1$, para $i = 0, 1, \dots, n-2$, junto às equações (2.13) e (2.16). De fato, tomando u_n , e indicando por $u_n^{(i)}$ a derivada de ordem i em relação à t , temos que

$$\begin{aligned} w_n^0 &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 D_0 (u_n) = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 \partial_t \left(\frac{u_n}{w_0} \right) \\ &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 (u'_n) = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2 \partial_t \left(\frac{u'_n}{w_1} \right) \\ &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2 (u''_n) = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_3 \partial_t \left(\frac{u''_n}{w_2} \right) \\ &= \dots = D_{n-1} (u_n^{(n-1)}) = \partial_t \left(\frac{u_n^{(n-1)}}{w_{n-1}} \right) \\ &= \frac{u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1}}{w_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Da equação (2.13), temos $W_n^0 = w_{n-1}^2 w_n^0$, portanto,

$$W_n^0 = u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1}.$$

Logo, considerando $u_n + \varepsilon^* u$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 w_n &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 D_0 (u_n + \varepsilon^* u) = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 \partial_t \left(\frac{u_n + \varepsilon^* u}{w_0} \right) \\
 &= D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 (u'_n + \varepsilon^* u') = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2 \partial_t \left(\frac{u'_n + \varepsilon^* u'}{w_1} \right) \\
 &= \dots = D_{n-1} \left(u_n^{(n-1)} + \varepsilon^* u^{(n-1)} \right) = \partial_t \left(\frac{u_n^{(n-1)} + \varepsilon^* u^{(n-1)}}{w_{n-1}} \right) \\
 &= \frac{u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1} + \varepsilon^* (u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1})}{w_{n-1}^2} \\
 &= \frac{W_n^0 + \varepsilon^* (u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1})}{w_{n-1}^2}.
 \end{aligned}$$

E, consequentemente,

$$W_n(t) = W_n^0 + \varepsilon^* (u_n^{(n)} w_{n-1} - u_n^{(n-1)} w'_{n-1}).$$

Agora, seja $v_\varepsilon(t) = v_0 - \varepsilon u_n$ o polinômio dado na prova da proposição anterior, com v_0 um polinômio de grau $n + k - 1$, gerado por $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ e u_n um polinômio de grau $n + k$. Sendo $\varepsilon_1^* > 0$, consideremos o conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1}\}$ e tomemos o elemento $v_{\varepsilon_1^*}^1$, em seu espaço gerado, dado por $v_{\varepsilon_1^*}^1 = v_\varepsilon + \varepsilon \varepsilon_1^* t^{n+k+1} = v_0 - \varepsilon(u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1})$. Assim, $v_{\varepsilon_1^*}^1$ tem $n + k$ zeros simples próximos aos de v_ε quando $\varepsilon_1^* \rightarrow 0$. Além disso, como o coeficiente que acompanha o termo de maior grau de v_ε é negativo e o de t^{n+k+1} positivo, então $v_{\varepsilon_1^*}^1$, que é dominado pelo termo de maior grau, deve ter mais um zero simples, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_\varepsilon = -\infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\varepsilon_1^*}^1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (v_\varepsilon + \varepsilon \varepsilon_1^* t^{n+k+1}) = \infty.$$

Portanto, $v_{\varepsilon_1^*}^1$ tem $n + k + 1$ zeros simples.

Note que, pelo Teorema 2.21, o número de zeros simples que um elemento do espaço gerado pelo conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1}\}$ pode ter, não ultrapassa $n + k + v_n$, sendo v_n o número de zeros simples que o último Wronskiano W_n possui. Vamos mostrar que W_n só tem um zero real simples, isto é, $v_n = 1$. Ou seja, vamos mostrar que $v_{\varepsilon_1^*}^1$ atinge a cota dada pelo teorema.

De fato, considerando o conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1}\}$, temos que seu último Wronskiano, procedendo como antes para W_n^0 , é dado por

$$W_n^1 = W_n^0 + \varepsilon_1^* (\tilde{u}_1^{(n)} w_{n-1} - \tilde{u}_1^{(n-1)} w'_{n-1}), \quad (2.34)$$

com $\tilde{u}_1 = -t^{n+k+1}$ e $w_{n-1} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^i$. Como

$$\tilde{u}_1^{(n-s)} = -\frac{(n+k+1)!}{(k+1+s)!} t^{k+1+s}, \text{ para } s = 0, 1,$$

então

$$\begin{aligned}
W_n^1 &= W_n^0 + \varepsilon_1^* \left(\tilde{u}_1^{(n)} w_{n-1} - \tilde{u}_1^{(n-1)} w'_{n-1} \right) \\
&= W_n^0 + \varepsilon_1^* \left(-\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} t^{k+1} \left(t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^i \right) + \frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} t^{k+2} \left(kt^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} i\alpha_i t^{i-1} \right) \right) \\
&= W_n^0 + \varepsilon_1^* \left(-\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} \left(t^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^{k+i+1} \right) + \frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} \left(kt^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} i\alpha_i t^{k+i+1} \right) \right) \\
&= W_n^0 + \varepsilon_1^* \left(-\frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} (k+2) \left(t^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^{k+i+1} \right) + \frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} \left(kt^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} i\alpha_i t^{k+i+1} \right) \right).
\end{aligned}$$

Ou, mais precisamente,

$$W_n^1 = W_n^0 + \varepsilon_1^* \left(-2 \frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} t^{2k+1} + P_1(t) \right), \quad (2.35)$$

sendo

$$P_1(t) = \frac{(n+k+1)!}{(k+2)!} \left(-(k+2) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i t^{k+i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} i\alpha_i t^{k+i+1} \right)$$

um polinômio de grau menor que $2k+1$.

Assim, como o coeficiente do termo de maior grau de W_n^0 é igual a 1 (pois, $W_n^0(t) = t^{2k} + \dots$), temos que, para $\varepsilon_1^* \rightarrow 0$, W_n^1 tem $2k$ zeros complexos, contando as suas multiplicidades, próximos aos $2k$ zeros complexos de W_n^0 , e mais um zero simples real obtido por ser dominado por um termo de grau $2k+1$, com coeficiente negativo. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_n^0 = \infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_n^1 = -\infty.$$

Ou seja, W_n^1 tem $2k+1$ zeros, mas somente um deles é zero simples real. Logo, $v_n = 1$.

Repetindo os argumentos usados para construir o conjunto $\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1}\}$ com um elemento, gerado por ele, atingindo a cota de $n+k+1$ número de zeros simples, podemos construir, para $i = 2, 3, \dots, \ell$, os conjuntos

$$\{u_0, \dots, u_{n-1}, u_n - \varepsilon_1^* t^{n+k+1} + \varepsilon_2^* t^{n+k+2} - \dots + (-1)^i \varepsilon_i^* t^{n+k+i}\}$$

e os seus respectivos elementos gerados

$$v_{\varepsilon_i}^i = v_{\varepsilon_{i-1}}^{i-1} - (-1)^i \varepsilon_i \varepsilon_i^* t^{n+k+i},$$

tendo exatamente $n+k+i$ zeros reais simples. $\square$

Definição 2.25. Chama-se *configuração de $m \leq n$ zeros, de uma função u , um ponto $(p_1, p_2, \dots, p_m, z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}_+^m$ tal que $\sum_{i=1}^m z_i = n$, em que cada p_i é um zero de u de multiplicidade z_i , $i = 1, \dots, m$.*

Teorema 2.26. *Seja $\{g_0, \dots, g_n\}$ um conjunto ordenado de funções de classe C^∞ , definidas em (a, b) , tal que existe $\xi \in (a, b)$ com $W_{n-1}(\xi) \neq 0$.*

1. *Se $W_n(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $\text{span}(g_0, \dots, g_n)$ com essa configuração.*

2. Se $W_n(\xi) = 0$ e $W'_n(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n+1$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $\text{span}(g_0, \dots, g_n)$ com essa configuração.

A ideia para provar as afirmações 1 e 2 do teorema acima é, primeiramente, considerar um elemento do gerado por $\{g_0, \dots, g_n\}$ tendo um zero com multiplicidade máxima. E, depois, perturbar tal elemento dentro do espaço gerado, a fim de obter todas as configurações de zeros desejadas.

Demonstração. Inicialmente, sendo $W_{n-1}(\xi) \neq 0$, vamos provar que existe um único $f_0(t) \in \text{span}(g_0, \dots, g_n)$ dado por $f_0(t) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(t)$, com $a_n = 1$, tal que ξ é um zero de f_0 de multiplicidade n , isto é, satisfaz $f_0(\xi) = 0$ e $f_0^{(i)}(\xi) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

De fato, podemos escrever estas igualdades como um sistema linear nas variáveis a_i 's, para $i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\begin{cases} a_0 g_0(\xi) + a_1 g_1(\xi) + \dots + a_{n-1} g_{n-1}(\xi) + g_n(\xi) = 0 \\ a_0 g'_0(\xi) + a_1 g'_1(\xi) + \dots + a_{n-1} g'_{n-1}(\xi) + g'_n(\xi) = 0 \\ \vdots \\ a_0 g_0^{(n-1)}(\xi) + a_1 g_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_{n-1} g_{n-1}^{(n-1)}(\xi) + g_n^{(n-1)}(\xi) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

o qual possui solução única se o determinante da matriz A dos coeficientes é não nulo. Contudo, veja que tal matriz é dada por

$$A = \begin{pmatrix} g_0(\xi) & g_1(\xi) & \dots & g_{n-1}(\xi) \\ g'_0(\xi) & g'_1(\xi) & \dots & g'_{n-1}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(n-1)}(\xi) & g_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & g_{n-1}^{(n-1)}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det A = W_{n-1}(\xi) \neq 0$. Portanto, temos uma única solução $(a_0, \dots, a_{n-1})$ para o sistema. Pela regra de Cramer, para sistemas com n equações e n variáveis, temos que os coeficientes a_i 's são dados por

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, -g_n, g_{i+1}, \dots, g_{n-1})(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} \\ &= (-1)^{n-i} \frac{W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Observe que, quando $i = 0$, temos um abuso de notação, uma vez que temos no numerador do coeficiente a_0 o Wronskiano com a função g_{-1} . Contudo, neste caso, vamos adotar que o primeiro elemento a compor o Wronskiano é a função $-g_n$ e, assim, o restante dos índices ficam corretos. Agora, pelo Teorema de Laplace para o

cálculo de determinantes, obtemos

$$W_n(\xi) = \begin{vmatrix} g_0(\xi) & \cdots & g_n(\xi) \\ g'_0(\xi) & \cdots & g'_n(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(n-1)}(\xi) & \cdots & g_n^{(n-1)}(\xi) \\ g_0^{(n)}(\xi) & \cdots & g_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} g_i^{(n)} W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)(\xi).$$

Usando a fórmula da diferencial da função determinante, veja [12, p.257], e procedendo como acima, temos

$$W'_n(\xi) = \begin{vmatrix} g_0(\xi) & \cdots & g_n(\xi) \\ g'_0(\xi) & \cdots & g'_n(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(n-1)}(\xi) & \cdots & g_n^{(n-1)}(\xi) \\ g_0^{(n+1)}(\xi) & \cdots & g_n^{(n+1)}(\xi) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} g_i^{(n+1)} W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)(\xi).$$

Como $f_0(t) = \sum_{i=0}^n a_i g_i(t)$, com $a_n = 1$, temos

$$f_0^{(n+q)}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i^{(n+q)}(\xi) + g_n^{(n+q)}(\xi),$$

com $q \in \{0, 1\}$. Usando os coeficientes a_i 's obtidos em (2.37), segue que

$$\begin{aligned} f_0^{(n+q)}(\xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \frac{W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} g_i^{(n+q)}(\xi) + g_n^{(n+q)}(\xi) \\ &= \frac{1}{W_{n-1}(\xi)} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} g_i^{(n+q)}(\xi) W_{n-1}(g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)(\xi) \\ &= \frac{W_n^{(q)}(\xi)}{W_{n-1}(\xi)}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

com $W_n^{(0)} = W_n$ e $q \in \{0, 1\}$.

Agora, vamos provar o item 1. Sejam $q = 0$ e $W_n(\xi) \neq 0$. Escrevendo f_0 em série de Taylor em torno de $t = \xi$, devido às considerações feitas acima, obtemos

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{f_0^{(i)}(\xi)}{i!} (t - \xi)^i + O_{n+1}(t - \xi) = \frac{f_0^{(n)}(\xi)}{n!} (t - \xi)^n + O_{n+1}(t - \xi) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{W_n(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} (t - \xi)^n + O_{n+1}(t - \xi). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Seja $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, consideramos a seguinte perturbação de f_0

$$f_\varepsilon = f(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + \varepsilon_i) g_i(t) + g_n(t), \quad (2.40)$$

em que $f_\varepsilon(t) \in \text{span}(g_0, \dots, g_n)$. Daí,

$$\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(\xi, 0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i^{(n)}(t) + g_n^{(n)}(t) = f_0^{(n)}(\xi) = \frac{W_n(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} \neq 0, \quad (2.41)$$

e n é o menor inteiro positivo tal que $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(\xi, 0) \neq 0$.

O Teorema de Preparação de Malgrange [4] afirma que se $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ é tal que $g^{(i)}(t_0, x_0) = 0$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$ e $g^{(n)}(t_0, x_0) \neq 0$, então existem funções $h(t, x)$ e $P(t, x) = (t - t_0)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)(t - t_0)^i$, de classe C^∞ , sendo $h(t_0, x_0) \neq 0$ e $a_i(x_0) = 0$, de modo que numa vizinhança de (t_0, x_0) podemos escrever

$$g(t, x) = h(t, x) \left((t - t_0)^n + a_{n-1}(x)(t - t_0)^{n-1} + \dots + a_1(x)(t - t_0) + a_0(x) \right).$$

Desta forma, como $f(t, \varepsilon)$ é uma função que satisfaz as hipóteses acima, então existem funções $h(t, \varepsilon)$ e $P_\varepsilon(t) = P(t, \varepsilon)$, de modo que numa vizinhança de $(\xi, 0)$ temos

$$f(t, \varepsilon) = h(t, \varepsilon) P_\varepsilon(t) = h(t, \varepsilon) \left((t - \xi)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i(\varepsilon)(t - \xi)^i \right), \quad (2.42)$$

em que $h(\xi, 0) \neq 0$ e $\delta_i(0) = 0$.

Definindo a aplicação $\Delta(\varepsilon) = (\delta_0(\varepsilon), \dots, \delta_{n-1}(\varepsilon))$, como $\Delta(0) = 0$, concluiremos a prova da primeira parte do teorema, mostrando que $\Delta(\varepsilon)$ é invertível numa vizinhança V de $\varepsilon = 0$. Pois, teremos liberdade para escolher os parâmetros δ_i 's na vizinhança $\Delta(V)$ da origem e, desta forma, obteremos todas as configurações de $m \leq n$ zeros do polinômio $P_\varepsilon(t)$ e, conseqüentemente, da função $f(t, \varepsilon)$. Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa, basta verificar que $\det(J(\Delta(0))) \neq 0$, sendo $J(\Delta(0))$ a matriz jacobiana de $\Delta(\varepsilon)$ aplicada em $\varepsilon = 0$.

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} &= \delta_0(\varepsilon) + \delta_1(\varepsilon)(t - \xi) + \delta_2(\varepsilon)(t - \xi)^2 + \dots + (t - \xi)^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) &= \delta_1(\varepsilon) + 2\delta_2(\varepsilon)(t - \xi) + \dots + n(t - \xi)^{n-1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) &= 2\delta_2(\varepsilon) + 3.2\delta_3(\varepsilon)(t - \xi) + \dots + n(n-1)(t - \xi)^{n-2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) &= (n-1)!\delta_{n-1}(\varepsilon) + n!(t - \xi), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\delta_0(\varepsilon) &= \frac{f(\xi, \varepsilon)}{h(\xi, \varepsilon)}, \\ \delta_1(\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) \Big|_{t=\xi}, \\ \delta_2(\varepsilon) &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) \Big|_{t=\xi}, \\ &\vdots \\ \delta_{n-1}(\varepsilon) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) \Big|_{t=\xi}.\end{aligned}$$

Mais precisamente, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, temos

$$\delta_i(\varepsilon) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\frac{f(t, \varepsilon)}{h(t, \varepsilon)} \right) \Big|_{t=\xi} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} (g(t, \varepsilon) f(t, \varepsilon)) \Big|_{t=\xi}, \quad (2.43)$$

com $g(t, \varepsilon) = 1/h(t, \varepsilon)$.

Sejam $\nabla \delta_i \in \mathbb{R}^n$ o gradiente de δ_i e $\pi_k \nabla \delta_i(0)$ a $(k+1)$ -ésima entrada de $\nabla \delta_i(0)$. Assim, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, temos

$$\begin{aligned}\pi_k \nabla \delta_i(0) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \delta_i(0) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \left(\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} (g(t, \varepsilon) f(t, \varepsilon)) \Big|_{t=\xi} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (g(t, \varepsilon) f(t, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \Big|_{t=\xi} \\ &= \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(f(t, 0) \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k}(t, 0) \right) \Big|_{t=\xi} + \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(g(t, 0) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}(t, 0) \right) \Big|_{t=\xi} \right) \\ &= \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(g(t, 0) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}(t, 0) \right) \Big|_{t=\xi} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} (g(t, 0) u_k(t)) \Big|_{t=\xi},\end{aligned} \quad (2.44)$$

com $k = 0, 1, \dots, n-1$ e $u_k(t) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}(t, 0)$. Consequentemente, usando a regra de Leibniz para derivação do produto de funções, obtemos

$$\begin{aligned}\pi_k \nabla \delta_0(0) &= g(\xi, 0) u_k(\xi) = c_0 u_k(\xi) \\ \pi_k \nabla \delta_i(0) &= \frac{1}{i!} \left(c_0 u_k^{(i)}(\xi) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i}{\ell} c_{i-\ell} u_k^{(\ell)}(\xi) \right)\end{aligned} \quad (2.45)$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$, com $c_0 = g(\xi, 0) \neq 0$ e $c_{i-\ell} = \frac{\partial^{i-\ell}}{\partial t^{i-\ell}} g(t, 0) \Big|_{t=\xi}$.

Agora, vamos provar que para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, existe $\alpha^i = (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{i-1}^i) \in \mathbb{R}^i$ de modo que

$$\pi_k \nabla \delta_i(0) = \frac{1}{i!} \left(c_0 u_k^{(i)}(\xi) + \sum_{s=0}^{i-1} \alpha_s^i \pi_k \nabla \delta_s(0) \right). \quad (2.46)$$

Igualando as equações (2.45) e (2.46) e substituindo a primeira na segunda, segue que

$$\begin{aligned}c_0 u_k^{(i)}(\xi) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i}{\ell} c_{i-\ell} u_k^{(\ell)}(\xi) &= c_0 u_k^{(i)}(\xi) \\ &\quad + \sum_{s=0}^{i-1} \alpha_s^i \frac{1}{s!} \left(c_0 u_k^{(s)}(\xi) + \sum_{\ell=0}^{s-1} \binom{s}{\ell} c_{s-\ell} u_k^{(\ell)}(\xi) \right).\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de $u_k^{(\ell)}$, chegamos a

$$\sum_{s=\ell}^{i-1} \frac{1}{s!} \binom{s}{\ell} c_{s-\ell} \alpha_s^i = \binom{i}{\ell} c_{i-\ell}, \text{ para } \ell = 0, 1, \dots, i-1. \quad (2.47)$$

Ou seja, o vetor α^i é solução de um sistema linear $C^i \alpha^i = b^i$, em que C^i é uma matriz triangular, de ordem $i \times i$, dada por

$$C^i = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} c_0 & \binom{1}{0} c_1 & \frac{1}{2!} \binom{2}{0} c_2 & \cdots & \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{0} c_{i-1} \\ 0 & \binom{1}{1} c_0 & \frac{1}{2!} \binom{2}{1} c_1 & \cdots & \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{1} c_{i-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} \binom{2}{2} c_0 & \cdots & \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{2} c_{i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{i-1} c_0 \end{pmatrix}$$

e

$$b^i = \left(\binom{i}{0} c_i, \binom{i}{1} c_{i-1}, \dots, \binom{i}{i-1} c_1 \right) \in \mathbb{R}^i.$$

Sendo C^i uma matriz triangular, então seu determinante é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal, isto é,

$$\det C^i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} c_0^n. \quad (2.48)$$

Como $c_0 = g(\xi, 0) \neq 0$, então $\det C^i \neq 0$ e, portanto, o sistema $C^i \alpha^i = b^i$ tem solução única dada por α^i , a qual satisfaz a equação (2.46).

Por fim, notemos que

$$(\pi_k \nabla \delta_0(0), \dots, \pi_k \nabla \delta_{n-1}(0))$$

é a $(k+1)$ -ésima coluna de $J(\Delta(0))$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Logo,

$$\det(J(\Delta(0))) = \begin{vmatrix} \pi_0 \nabla \delta_0(0) & \pi_1 \nabla \delta_0(0) & \cdots & \pi_{n-1} \nabla \delta_0(0) \\ \pi_0 \nabla \delta_1(0) & \pi_1 \nabla \delta_1(0) & \cdots & \pi_{n-1} \nabla \delta_1(0) \\ \pi_0 \nabla \delta_2(0) & \pi_1 \nabla \delta_2(0) & \cdots & \pi_{n-1} \nabla \delta_2(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0 \nabla \delta_{n-1}(0) & \pi_1 \nabla \delta_{n-1}(0) & \cdots & \pi_{n-1} \nabla \delta_{n-1}(0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 u_0(\xi) & \dots & c_0 u_{n-1}(\xi) \\ c_0 u'_0(\xi) + \alpha_0^1 c_0 u_0(\xi) & \dots & c_0 u'_{n-1}(\xi) + \alpha_0^1 c_0 u_{n-1}(\xi) \\ \frac{1}{2!} \left(c_0 u''_0(\xi) + \sum_{s=0}^1 \alpha_s^i \pi_0 \nabla \delta_s(0) \right) & \dots & \frac{1}{2!} \left(c_0 u''_{n-1}(\xi) + \sum_{s=0}^1 \alpha_s^i \pi_{n-1} \nabla \delta_s(0) \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} \left(c_0 u_0^{(n-1)}(\xi) + \sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s^i \pi_0 \nabla \delta_s(0) \right) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \left(c_0 u_{n-1}^{(n-1)}(\xi) + \sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s^i \pi_{n-1} \nabla \delta_s(0) \right) \end{vmatrix}.$$

Observe que, fixada uma coluna $(k+1)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, cada entrada $\pi_k \nabla \delta_i(0)$, a partir de $i = 1$, isto é, a partir da 2ª linha, é soma de $\frac{1}{i} c_0 u_k^{(i)}$ com uma combinação linear das respectivas entradas antecessoras de sua coluna. Daí, para cada entrada $\pi_k \nabla \delta_i(0)$, é possível fazer combinações lineares das linhas da matriz a fim de subtrair da entrada a parcela $\frac{1}{i!} \sum_{s=0}^{i-1} \alpha_s^i \pi_k \nabla \delta_s(0)$, e obter

$$\det(J(\Delta(0))) = \begin{vmatrix} c_0 u_0(\xi) & c_0 u_1(\xi) & \dots & c_0 u_{n-1}(\xi) \\ c_0 u'_0(\xi) & c_0 u'_1(\xi) & \dots & c_0 u'_{n-1}(\xi) \\ \frac{1}{2!} c_0 u''_0(\xi) & \frac{1}{2!} c_0 u''_1(\xi) & \dots & \frac{1}{2!} c_0 u''_{n-1}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} c_0 u_0^{(n-1)}(\xi) & \frac{1}{(n-1)!} c_0 u_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} c_0 u_{n-1}^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix}. \quad (2.49)$$

Portanto, como $c_0 = g(\xi, 0) \neq 0$, temos

$$\det(J(\Delta(0))) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} (g(\xi, 0))^n W_{n-1}(\xi) \neq 0,$$

como desejado.

Agora, vamos provar o item 2 do teorema. Consideremos $q = 1$ na equação (2.38), $W_n(\xi) = 0$ e $W'_n(\xi) \neq 0$. Logo, $f_0^{(n)}(\xi) = 0$. Assim, a série de Taylor da função f_0 em $t = \xi$ é escrita como

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f_0^{(i)}(\xi)}{i!} (t - \xi)^i + O_{n+2}(t - \xi) = \frac{f_0^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (t - \xi)^{n+1} + O_{n+2}(t - \xi) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{W'_n(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} (t - \xi)^{n+1} + O_{n+2}(t - \xi). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sejam $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e consideremos uma outra perturbação da função f_0 , ainda em $\text{span}(g_0, \dots, g_n)$, dada por

$$\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon}) = f_\varepsilon(t + \varepsilon_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + \varepsilon_i) g_i(t + \varepsilon_n) + g_n(t + \varepsilon_n), \quad (2.51)$$

em que f_ε é dada em (2.40). Daí,

$$\frac{\partial^{n+1} \tilde{f}}{\partial t^{n+1}}(\xi, 0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i^{(n+1)}(\xi) + g_n^{(n+1)}(\xi) = f_0^{(n+1)}(\xi) = \frac{W'_n(\xi)}{W_{n-1}(\xi)} \neq 0. \quad (2.52)$$

Usando, novamente, o Teorema de Preparação de Malgrange, existem funções $\tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon})$ e $\tilde{P}_{\tilde{\varepsilon}}$ definidas numa vizinhança de $(\xi, 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$, tal que podemos escrever a perturbação $\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon})$ como

$$\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon}) = \tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon}) \tilde{P}_{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon}) \left((t - \xi)^{n+1} + \sum_{i=0}^n \lambda_i(\tilde{\varepsilon})(t - \xi)^i \right), \quad (2.53)$$

com $\tilde{h}(\xi, 0) \neq 0$ e $\lambda_i(0) = 0$.

Como no item anterior, concluiremos a demonstração do item 2 mostrando que a aplicação definida por $\tilde{\Delta}(\tilde{\varepsilon}) = (\lambda_0(\tilde{\varepsilon}), \dots, \lambda_n(\tilde{\varepsilon}))$ é invertível numa vizinhança de $\tilde{\varepsilon} = 0$, uma vez que $\tilde{\Delta}(0) = 0$, ou seja, vamos mostrar que $\det(J(\tilde{\Delta}(0))) \neq 0$. Assim, os parâmetros λ_i 's poderão ser tomados de tal modo a obter todas as configurações de $m \leq n + 1$ zeros do polinômio de grau $n + 1$, $\tilde{P}_{\tilde{\varepsilon}}(t)$. E, desta forma, obter todas as configurações de zeros da função $\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon})$.

Sendo

$$\frac{\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon})}{\tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon})} = \lambda_0(\tilde{\varepsilon}) + \lambda_1(\tilde{\varepsilon})(t - \xi) + \lambda_2(\tilde{\varepsilon})(t - \xi)^2 + \dots + \lambda_n(\tilde{\varepsilon})(t - \xi)^n + (t - \xi)^{n+1},$$

obtemos

$$\lambda_i(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\frac{\tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon})}{\tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon})} \right) \Big|_{t=\xi} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} (\tilde{g}(t, \tilde{\varepsilon}) \tilde{f}(t, \tilde{\varepsilon})) \Big|_{t=\xi}, \quad (2.54)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, com $\tilde{g}(t, \tilde{\varepsilon}) = 1/\tilde{h}(t, \tilde{\varepsilon})$.

Sejam $\nabla \lambda_i(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ o gradiente de λ_i , em relação a ε_k e $\pi_k \nabla \lambda_i(0)$ a $(k + 1)$ -ésima entrada de $\nabla \lambda_i(0)$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Da equação (2.54) e do fato que $\tilde{f}(t, 0) = f_0(t)$, obtemos que cada entradas $\pi_k \nabla \lambda_i(0)$, para $i = 0, 1, \dots, n$, é dada por

$$\pi_k \nabla \lambda_i(0) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \lambda_i(0) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\tilde{g}(t, 0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon_k}(t, 0) \right) \Big|_{t=\xi}. \quad (2.55)$$

Seja $u_k = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon_k}(t, 0)$. Veja que, para $k = 0, 1, \dots, n - 1$, como no item anterior, temos que

$$\begin{aligned} \pi_k \nabla \lambda_0(0) &= \tilde{g}(\xi, 0) u_k(\xi) = \tilde{c}_0 u_k(\xi) \\ \pi_k \nabla \lambda_i(0) &= \frac{1}{i!} \left(\tilde{c}_0 u_k^{(i)}(\xi) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i}{\ell} \tilde{c}_{i-\ell} u_k^{(\ell)}(\xi) \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, com $\tilde{c}_0 = \tilde{g}(\xi, 0) \neq 0$. E, da mesma maneira, deve existir $\tilde{\alpha}^i = (\tilde{\alpha}_0^i, \dots, \tilde{\alpha}_{i-1}^i) \in \mathbb{R}^i$ solução de um sistema linear $\tilde{C}^i \tilde{\alpha}^i = \tilde{b}^i$, com $\det \tilde{C}^i = \tilde{c}_0^i \neq 0$, que satisfaz

$$\pi_k \nabla \lambda_i(0) = \frac{1}{i!} \left(\tilde{c}_0 u_k^{(i)}(\xi) + \sum_{s=0}^{i-1} \tilde{\alpha}_s^i \pi_k \nabla \lambda_s(0) \right). \quad (2.57)$$

Para $k = n$, pela (2.55), temos

$$\pi_n \nabla \lambda_i(0) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\tilde{g}(t, 0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon_n}(t, 0) \right) \Big|_{t=\xi} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} (\tilde{g}(t, 0) f'_0(t)) \Big|_{t=\xi},$$

pois pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon_n}(t, \tilde{\varepsilon}) \Big|_{\tilde{\varepsilon}=0} &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} (a_j + \varepsilon_j) \frac{\partial}{\partial t} u_j(t + \varepsilon_n) + \frac{\partial}{\partial t} u_n(t + \varepsilon_n) \right) \Big|_{\tilde{\varepsilon}=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + \varepsilon_j) u'_j(t) + u'_n(t) = f'_0(t). \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\pi_n \nabla \lambda_i(0) = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{n!} \tilde{c}_0 f_0^{(n+1)}(\xi), & \text{para } i = n. \end{cases} \quad (2.58)$$

Desta forma, pela equação acima e pela igualdade das equações (2.56) e (2.57), junto à observação de que

$$(\pi_k \nabla \lambda_0(0), \dots, \pi_k \nabla \lambda_n(0))$$

é a $(k+1)$ -ésima coluna de $J(\tilde{\Delta}(0))$, podemos concluir, assim como no item 1, que

$$\begin{aligned} \det(J(\tilde{\Delta}(0))) &= \prod_{j=0}^n \frac{1}{j!} \tilde{c}_0^{n+1} f_0^{(n+1)}(\xi) W_{n-1}(\xi) = \prod_{j=0}^n \frac{1}{j!} \tilde{g}(\xi, 0)^{n+1} \frac{W'_n(\xi)}{W_{n-}(\xi)} W_{n-1}(\xi) \\ &= \prod_{j=0}^n \frac{1}{j!} \tilde{g}(\xi, 0)^{n+1} W'_n(\xi) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\Delta}(\tilde{\varepsilon})$ é invertível em uma vizinhança de $\tilde{\varepsilon} = 0$. O que completa a demonstração do item 2 e do teorema. $\square$

Como consequência dos teoremas desta seção, estabelecemos o seguinte resultado.

Corolário 2.27. *Seja $\{u_0, \dots, u_n\}$ um conjunto ordenado de funções de classe C^∞ , definidas em $[a, b]$. Se todos os Wronskianos não se anulam, exceto $W_n(t)$, com exatamente um zero simples em (a, b) , então o número máximo de zeros de um elemento qualquer de $\text{span}(u_0, \dots, u_n)$ é $n+1$. Ainda, para toda configuração de $m \leq n+1$ zeros, existe um elemento em $\text{span}(u_0, \dots, u_n)$ que a realiza.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 2.21 e 2.26. $\square$

3 Uma Aplicação da Teoria de Chebyshev

Aqui, com o intuito de aplicar alguns dos resultados apresentados sobre sistemas de Chebyshev, iremos estudar, sob algumas hipóteses, o número de ciclos limites que bifurcam por perturbações lineares de um sistema linear por partes descontínuo com duas zonas separadas por uma reta, apresentado no artigo [13].

Na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, o estudo do número de ciclos limites que uma certa classe de sistemas pode apresentar é um tópico recorrente e importante para uma maior compreensão da dinâmica de tais sistemas. E, uma das principais ferramentas para o estudo de órbitas periódicas é a chamada aplicação de Poincaré, também conhecida como aplicação de primeiro retorno, em que, a grosso modo, para cada eventual ponto fixo associamos a existência de um único ciclo limite. Uma vez que determinar este número de pontos fixos, na maioria dos casos, não é uma tarefa fácil, faremos uso dos resultados da Teoria de Chebyshev para, ao menos, encontrarmos certas estimativas para o número de ciclos limites.

A seguir, trazemos as principais definições e convenções sobre a teoria de sistemas de equações diferenciais suaves por partes, retiradas de [9].

3.1 Sistemas suaves por partes

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e f um germe de função suave de modo que 0 é valor regular, ou seja, $\nabla f(p) \neq (0, 0)$, para todo ponto $p \in f^{-1}(0)$. Sendo assim, $f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $\mathbb{R}^2$, a qual denotaremos por Σ e que pode ser chamada de *variedade de descontinuidade*. Desta maneira, Σ separa o aberto U em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U : f(x, y) > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{(x, y) \in U : f(x, y) < 0\}.$$

Definição 3.1. Um *Campo de Vetores Planar Suave por Partes* é um campo de vetores $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ X^-(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que X^+ e X^- são campos de vetores suaves.

Observação 3.2. Uma vez que iremos trabalhar com campos lineares, vamos considerar $U = \mathbb{R}^2$. Podemos denotar o campo vetorial por $Z = (X^+, X^-)$, para indicar suas componentes.

Com o intuito de definir o fluxo, isto é, a solução do campo vetorial (3.1) que passa por um ponto $p \in U$ qualquer, vamos estabelecer o conceito de trajetória local. Para isso, iremos distinguir se p é um ponto em Σ^+ , Σ^- ou Σ . Se p é um ponto em Σ^+ ou Σ^- , a trajetória será dada pela solução do campo X^+ ou X^- , respectivamente. Para pontos em Σ , é necessário separar a variedade de descontinuidade em regiões.

Definição 3.3. A derivada de Lie em relação à um campo vetorial X em um ponto p é dada por $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$. Ainda, por uma relação de recorrência, temos $X^i f(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} f(p) \rangle$.

Definição 3.4. Considere o campo (3.1), então definimos em Σ as seguintes regiões:

1. *Região de Costura:* $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p))(X^- f(p)) > 0\}$,
2. *Região de Deslize:* $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p)) < 0 \text{ e } (X^- f(p)) > 0\}$,
3. *Região de Escape:* $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p)) > 0 \text{ e } (X^- f(p)) < 0\}$,

representadas pelas Figuras 3.1 e 3.2.

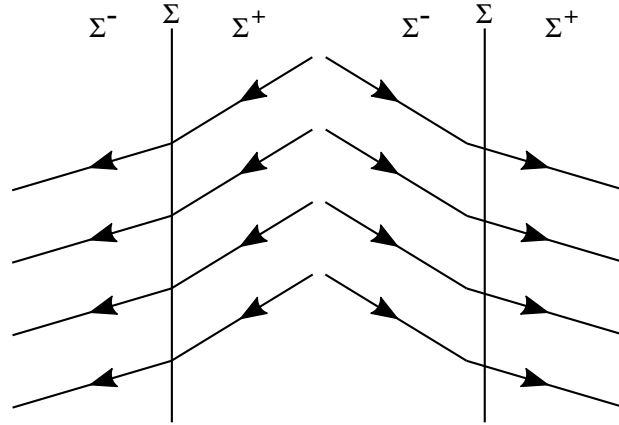


Figura 3.1: Regiões de Costura

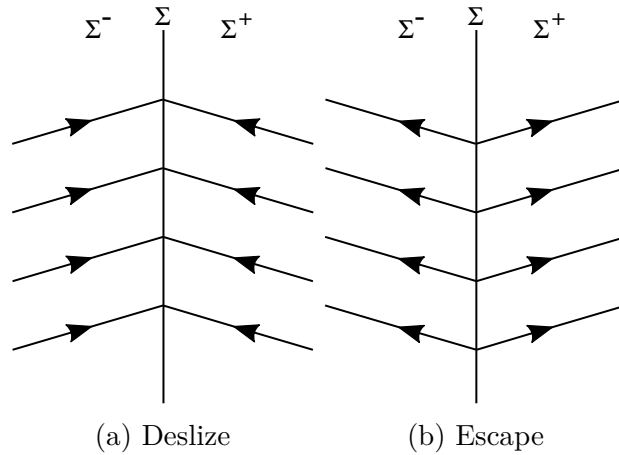


Figura 3.2: Regiões de Deslize e Escape

Sendo θ o ângulo entre $X(p)$ e $\nabla f(p)$, o sinal de $Xf(p)$ é determinado por esse ângulo, pois $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla f(p)\| \cos \theta$. Assim, a definição acima exclui os

pontos em que $X^+f(p)$ ou $X^-f(p)$ sejam iguais à zero, chamados de *pontos de tangência*. Tais pontos pertencem, então, às fronteiras (topológicas) das regiões definidas acima, denotadas por $\partial\Sigma^{c,s,e}$. Ou seja, são pontos nos quais X^+ ou X^- é tangente à variedade Σ . Ainda, pontos de tangência incluem os pontos críticos do campo (3.1), isto é, pontos $q \in U$ tais que $Z(q) = 0$. Podemos distinguir, também, essas tangências usando alguns parâmetros. Como, por exemplo, a ordem de contato das órbitas dos campos $X^\pm$ com Σ .

Definição 3.5. Um campo de vetores suave X possui uma *dobra* ou *tangência quadrática* com Σ em p se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$.

Sendo $Z = (X^+, X^-)$, se p é um ponto de dobra para ambos os campos X^+ e X^- , dizemos que p é um ponto *dobra-dobra* para o campo Z .

Definição 3.6. Um campo de vetores suave X possui uma *cúspide* ou *tangência cúbica* com Σ em p se $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$.

Definição 3.7. Seja $p \in \Sigma$ um ponto de tangência para (3.1). Se existe uma órbita γ de X^+ (X^- , respectivamente) passando por p após um tempo finito T de modo que:

- se γ permanece em Σ^+ (Σ^- , respect.) para $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, então a tangência é chamada de *tangência visível de X^+* (X^- , respect.),
- se γ permanece em Σ^- (Σ^+ , respect.) para $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, então a tangência é chamada de *tangência invisível de X^+* (X^- , respect.).

No caso dobra-dobra, podemos classificar cada uma individualmente. Por exemplo, temos o caso de dobra-dobra visível-invisível, quando são distintas, representada pela Figura 3.4, e podemos ter os casos em que, para ambos os campos, a dobra tem a mesma natureza, visível ou invisível, representado pela Figura 3.5.

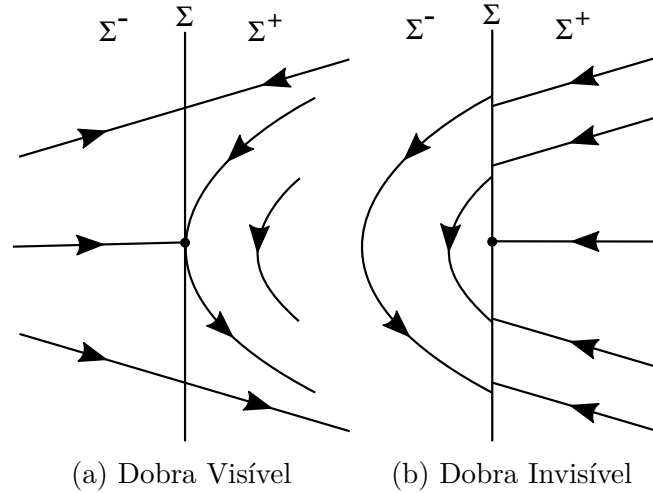


Figura 3.3: Pontos de tangência do tipo dobra.

Definição 3.8. Seja $p \in \Sigma$ um ponto de tangência para (3.1). Se p é ponto de tangência invisível para X^+ e X^- , ao mesmo tempo, então p é dito *tangência singular*. Caso contrário, p é *tangência regular*.

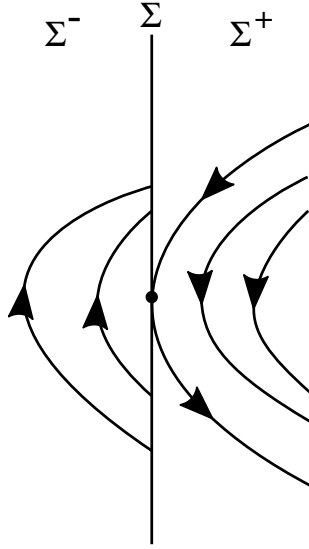


Figura 3.4: Ponto de tangência do tipo dobra-dobra visível-invisível.

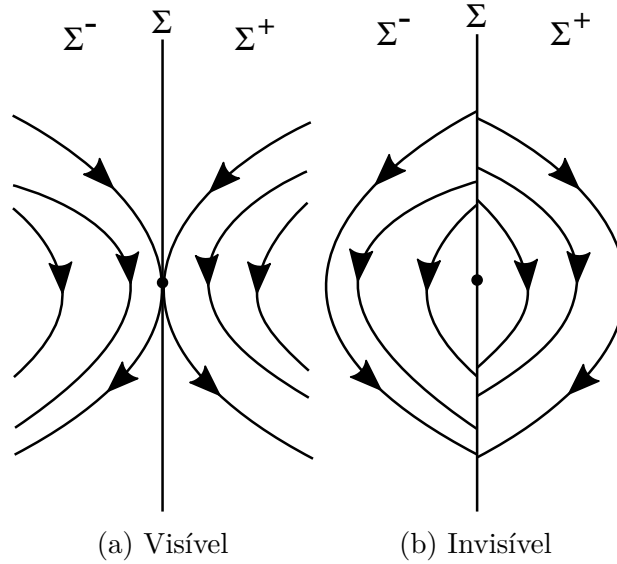


Figura 3.5: Pontos de tangência do tipo dobra-dobra.

Se $p \in \Sigma^c$, então os campos vetoriais X^+ e X^- apontam para a mesma direção. Logo, para a trajetória do campo suave por partes, nesses pontos, é suficiente justapor as trajetórias de cada componente, X^+ e X^- , que passa pelo ponto p . Para pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, os campos X^+ e X^- apontam em direções opostas, o que torna inviável justapor as trajetórias de cada campo passando por p . Assim, iremos considerar um outro campo vetorial que atua sobre $\Sigma^s \cup \Sigma^e$, de modo que a trajetória do campo (3.1), nas regiões de deslize e escape, será dada pela trajetória deste outro.

Definição 3.9. Seja $Z = (X^+, X^-)$ um campo vetorial suave por partes com regiões de deslize ou costura. Chama-se *campo deslizante* o campo $Z^s : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$Z^s(p) = \frac{1}{X^-f(p) - X^+f(p)} \left(X^-f(p)X^+(p) - X^+f(p)X^-(p) \right).$$

E, chama-se *campo de escape*, o campo $Z^e : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $Z^e(p) = -(-Z)^s(p)$, pois se $p \in \Sigma^s$ para o campo Z , então $p \in \Sigma^e$ para o campo $-Z$.

Lembrando que se X é um campo vetorial suave autônomo definido em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, então o fluxo $\varphi_X(t, p)$ deve satisfazer:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p, \end{cases}$$

para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 3.10. A *trajetória local* de um campo de vetores suave por partes $Z = (X^+, X^-)$, como em (3.1), que passa por um ponto p é dada por uma das seguintes possibilidades:

- Se $p \in \Sigma^+$ ou $p \in \Sigma^-$ com $X^+(p), X^-(p) \neq 0$, então a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{X^+}(t, p)$ ou $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{X^-}(t, p)$, respectivamente, para $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.
- Se $p \in \Sigma^c$, então dividimos em dois casos, assumindo a origem do tempo em p :
 1. Se $X^+f(p), X^-f(p) > 0$, então a trajetória é dada por

$$\varphi_Z = \begin{cases} \varphi_{X^+}(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_{X^-}(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

2. Se $X^+f(p), X^-f(p) < 0$, então a trajetória é dada por

$$\varphi_Z = \begin{cases} \varphi_{X^+}(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}, \\ \varphi_{X^-}(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}. \end{cases}$$

- Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$, então a trajetória é $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$, para $t \in I$ e Z^s o campo deslizando.
- Se $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ de modo que as definições de trajetórias para pontos de Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e, ainda, coincidem, então a trajetória é esta estendida. É o caso de pontos de tangência regulares.
- Se p não se enquadra em nenhum dos itens anteriores, então definimos a trajetória por $\varphi_Z(t, p) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. É o caso dos pontos de tangência singulares, pontos críticos dos campos X^+ e X^- , e pontos críticos do campo deslizando Z^s em $\partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$.

Como consequência, podemos definir órbita.

Definição 3.11. Chamamos de *órbita local* de um ponto $p \in U$, o conjunto dado por $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I\}$.

Com esta definição de trajetória, garantimos a unicidade de soluções do campo (3.1) e, ainda, que o espaço de fase pode ser decomposto como a união disjunta de todas as órbitas. Mantendo, desta forma, o usual em campos de vetores suaves.

Definição 3.12. Dado um campo de vetores suave por partes $Z = (X^+, X^-)$, como em (3.1), suas *singularidades* podem ser:

- $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X^+(p) = 0$ ou $X^-(p) = 0$, isto é, p é um *ponto de equilíbrio* de X^+ ou X^- .
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$. Neste caso, p é dito *pseudo-equilíbrio*.
- Pontos de tangência singular ou regular, isto é, $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que $X^+f(p) = 0$ ou $X^-f(p) = 0$.

Todo ponto que não se enquadra em algum dos casos acima é chamado de *ponto regular*.

Pela definição acima, em campos de vetores suaves por partes, ao contrário do caso suave, podem ocorrer casos de singularidades em que $\gamma(p) \neq \{p\}$. Isso nos leva a uma classificação das singularidades de um campo suave por partes. Classificamos em:

- *Singularidades distinguidas*: pontos p tais que $\gamma(p) = \{p\}$.
- *Singularidades não-distinguidas*: pontos $p \in \Sigma$ que são tangências regulares. Ainda, mesmo que não sejam pontos regulares, suas órbitas são homeomorfas à $\mathbb{R}$, localmente.

Definição 3.13. Uma *singularidade distinguida* é um ponto p tal que $\gamma(p) = \{p\}$ e pode ser:

- um ponto de equilíbrio de X^+ ou X^- , para $p \in \Sigma^\pm$,
- um pseudo-equilíbrio para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$,
- um ponto de tangência singular, para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$.

Note que, dado o campo (3.1), uma vez que os campos componentes X^+ e X^- do campo Z estão definidos em abertos de $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, eles podem possuir pontos de equilíbrios que estão fora da sua região de definição. Desta maneira, um ponto de equilíbrio deste tipo não seria visível ao olhar o retrato de fase do campo suave por partes.

Definição 3.14. Seja p um ponto de equilíbrio de X^+ (X^- , respectivamente). Se $p \in \overline{\Sigma^+}$ ($\overline{\Sigma^-}$, respectivamente), então p é dito *ponto de equilíbrio real*. Se $p \in \Sigma^-$ (Σ^+ , respectivamente), então p é dito *ponto de equilíbrio virtual*.

Observação 3.15. Outros objetos invariantes, como órbitas periódicas e variedades estáveis/instáveis, dos campos X^+ e X^- que não estão em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, também podem ser chamados de virtuais.

Definição 3.16. Seja a trajetória $\varphi_Z(t, q)$ do campo (3.1) e $p \in \Sigma$. Então, p é *ponto de partida* de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $T < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T^+} \varphi_Z(t, q) = p$. Analogamente, p é *ponto de chegada* de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $T > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T^-} \varphi_Z(t, q) = p$.

Por isto e pela definição de trajetória na região de costura, segue que $p \in \Sigma^c$ é ponto de partida de todo ponto da *semi-órbita positiva* $\gamma^+ = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap \{t \geq 0\}\}$ e ponto de chegada de todo ponto da *semi-órbita negativa* $\gamma^- = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap \{t \leq 0\}\}$. Desta forma, a órbita que passa por $p \in \Sigma^c$ é dada por $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \{p\}$.

Até agora, as definições de trajetórias e órbitas que passam por um ponto p foram conceitos locais. Por isto, vamos definir o conceito de órbitas maximais.

Definição 3.17. Uma *órbita regular maximal* do campo $Z = (X^+, X^-)$ é uma curva suave por partes γ tal que:

- $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ são uma união de órbitas dos campos suaves X^+ e X^- , respectivamente,
- $\gamma \cap \Sigma$ consiste apenas de pontos de costura e pontos de tangências regulares de $\partial\Sigma^c$,
- γ é maximal com respeito a tais condições.

Ainda, uma *órbita deslizante maximal* ou *órbita singular* de Z é uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^+} \cup \overline{\Sigma^-}$ que é órbita maximal do campo deslizante Z^s .

Observação 3.18. Perceba que uma órbita regular não deve atingir as regiões de deslize ou de escape.

Nosso objetivo, agora, é generalizar os conceitos de separatrizes e órbitas periódicas para os campos suaves por partes.

Definição 3.19. Uma *separatriz instável* pode ser:

- uma órbita regular que é a variedade invariante instável de um ponto de sela $p \in \overline{\Sigma^+}$ de X^+ ou $p \in \overline{\Sigma^-}$ de X^- , dada por

$$W^u(p) = \{q \in U : \varphi_Z(t, q) \text{ é bem definido em } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p\}.$$

- uma órbita regular que tem uma singularidade distinguida $p \in \Sigma$ como ponto de partida. Denotamos tal separatriz por $W_{\pm}^u(p)$, em que o $\pm$ indica que a órbita está contida em $\Sigma^{\pm}$.

De maneira totalmente análoga, podemos definir as *separatrizes estáveis* $W^s(p)$ e $W_{\pm}^s(p)$.

Definição 3.20. Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, então a chamamos de *conexão de separatrizes*.

Definição 3.21. Se p é um ponto de sela de X^+ em $\overline{\Sigma^+}$ ou de X^- em $\overline{\Sigma^-}$, dizemos que $\Gamma(p)$ é um *laço homoclínico de costura* se é uma conexão de separatrizes, tal que p é ponto de chegada e partida de todo $q \in \Gamma(p)$ e, além disso, $\Gamma(p) \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$ com $\Gamma(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$.

Definição 3.22. Uma *órbita periódica regular* é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e satisfaz $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$. Aqui, T é dito *período* se for o menor tempo positivo para o qual a condição acima ocorre.

Definição 3.23. Dada γ uma órbita periódica regular, dizemos que γ é *órbita periódica de costura* se $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$. Se $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, então γ é dita *órbita periódica padrão*.

Definição 3.24. Seja γ uma órbita periódica regular que passa por p , dizemos que γ é um *ciclo limite* se existe uma vizinhança V de γ de modo que $\gamma(q)$ não é órbita periódica regular, para todo $q \in V$ e $q \neq p$. Se γ é órbita periódica de costura, então dizemos *ciclo limite de costura*.

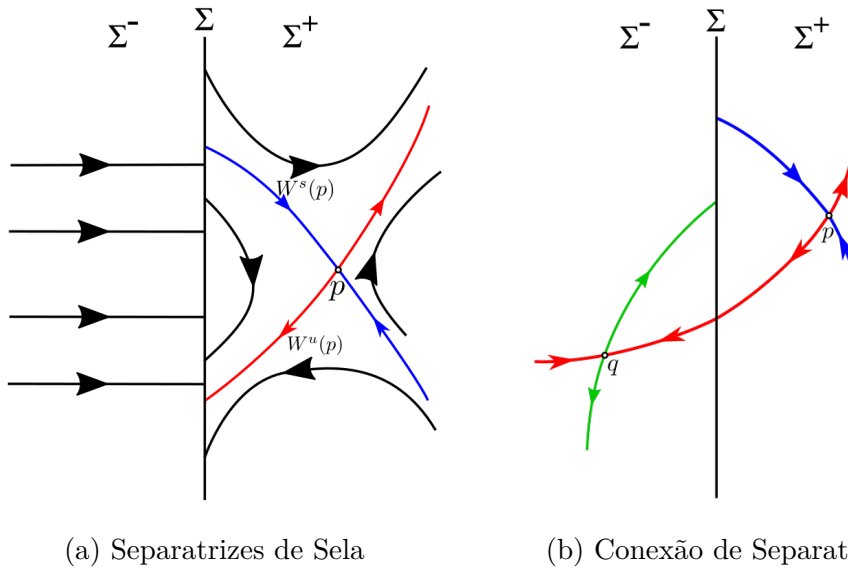


Figura 3.6: Exemplos de separatrizes e de conexão de separatrizes de uma sela.

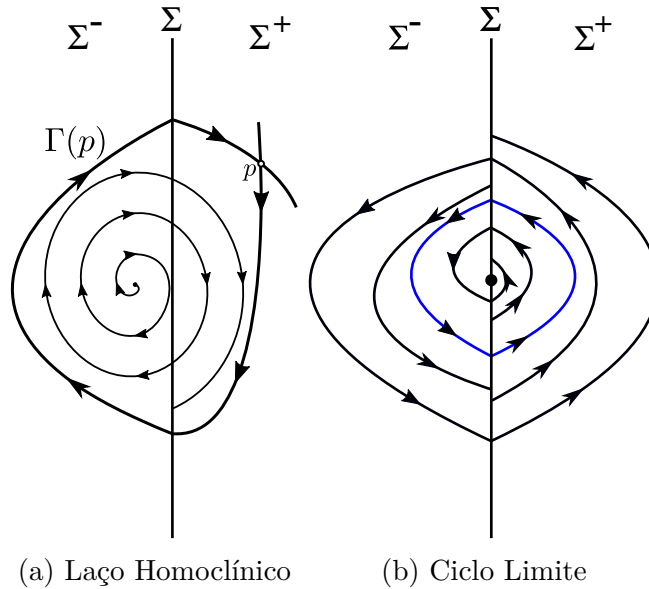


Figura 3.7: Exemplos de laço homoclínico e de ciclo limite.

3.2 Ciclicidade de um sistema linear por partes

Consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} M^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^+, & \text{se } x > 0, \\ M^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^-, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

um sistema linear por partes descontínuo com duas zonas separadas pela reta $\Sigma = \{x = 0\}$, em que M^+ e M^- são matrizes reais quadradas de ordem 2, $(x, y)^T, u^+$ e $u^- \in \mathbb{R}^2$. Denotaremos por $\dot{x}$ a derivada de x em relação ao tempo t , isto é, à variável independente. Chamaremos de sistema à direita (à esquerda, respectivamente) o sistema (3.2) restrito à

$\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ ($\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$, respectivamente).

Agora, vamos considerar três conjuntos de hipóteses para o sistema (3.2), Ha , Hb e Hc , dadas por

$$Ha = \{Hak : k = 1, 2, 3\}, \quad (3.3)$$

em que

Ha1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Ha2 o sistema à esquerda tem um centro p na região Σ^- ;

Ha3 p é, também, um centro para o sistema (3.2) de modo que seu anel periódico, formado por todas as órbitas periódicas ao redor de p , é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

$$Hb = \{Hbk : k = 1, 2, 3\}, \quad (3.4)$$

tal que

Hb1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Hb2 o sistema à esquerda tem um centro p em Σ ;

Hb3 p é, também, um centro para o sistema (3.2) de modo que seu anel periódico é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

$$Hc = \{Hck : k = 1, 2, 3\}, \quad (3.5)$$

com

Hc1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Hc2 o sistema à esquerda tem um centro virtual p em Σ^+ ;

Hc3 existe um ponto dobra-dobra para o sistema (3.2), o qual é um centro e tal que seu anel periódico é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

Definição 3.25. Chamamos de Σ -*preservação* uma mudança afim de variáveis, no plano, que preserva a reta Σ .

Os resultados a seguir estabelecem, para cada um dos conjuntos de hipóteses acima, uma forma normal para o sistema (3.2), isto é, uma maneira simplificada de escrever o sistema (3.2) com um número reduzido de parâmetros.

Proposição 3.26. *O sistema linear por partes descontínuo (3.2), satisfazendo o conjunto de hipóteses Ha , após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma normal*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

com $a, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

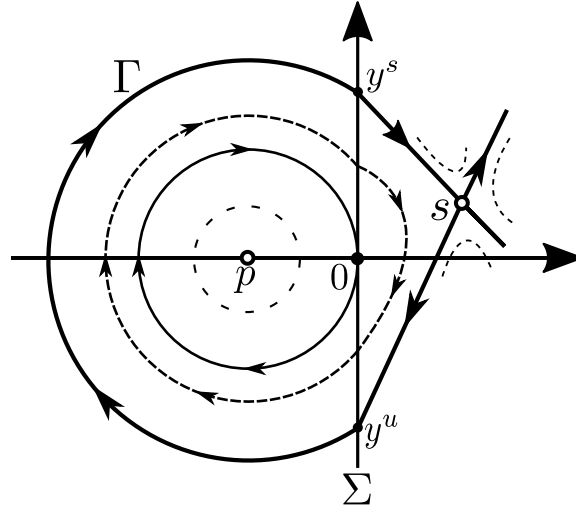


Figura 3.8: Representação da forma normal (3.6) com o conjunto de hipóteses Ha .

Demonstração. Consideremos, inicialmente, o sistema à esquerda de (3.2), isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = M^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^-, \quad (3.7)$$

com $u^- = (u_1^-, u_2^-)^T$. Pela hipótese $Ha2$, temos que o ponto singular p do sistema acima é um centro. Da teoria de sistemas lineares no plano, a matriz M^- deve ter traço nulo e determinante positivo. Logo, podemos assumir

$$M^- = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & -m_1 \end{pmatrix},$$

com $m_1^2 + m_2m_3 < 0$. Assim, o ponto singular é

$$p = (-d, e) = \left(-\frac{m_1u_1^- + m_2u_2^-}{m_1^2 + m_2m_3}, -\frac{m_3u_1^- - m_1u_2^-}{m_1^2 + m_2m_3} \right),$$

com $d > 0$, pois $p \in \Sigma^-$.

Agora, realizando uma primeira mudança de variáveis, dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m_1 d}{m_2} - e \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

a qual é uma Σ -preservação, podemos transladar o ponto singular para $p_1 = (-d, \frac{m_1}{m_2}d)$ e o sistema (3.7) torna-se

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = M^- \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m_1 u_1^-}{m_2} + u_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

De fato, derivando as novas variáveis, x_1 e y_1 , em relação à t , temos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Substituindo (3.7) na equação acima, obtemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^- \\ u_2^- \end{pmatrix}.$$

Agora, como $x = x_1$ e $y = e - \frac{m_1 d}{m_2}$, substituindo estas igualdades no sistema acima, obtemos o sistema (3.9).

Agora, realizando outra Σ -preservação, dada por

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}} \begin{pmatrix} \sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3} & 0 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

e procedendo da mesma maneira como indicado acima, chegamos ao sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3} \\ -\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m_1 u_1^- + m_2 u_2^-}{\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Por último, introduzimos uma nova variável independente τ , através de $\tau = \sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3} t$. Pela regra da cadeia, derivando as variáveis x_2 e y_2 em relação à τ , as quais serão denotadas por x'_2 e y'_2 , respectivamente, temos

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \frac{dt}{d\tau} \\ \dot{y}_2 \frac{dt}{d\tau} \end{pmatrix},$$

em que $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}}$. Desta maneira, conclui-se que o sistema à esquerda pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m_1 u_1^- + m_2 u_2^-}{m_1^2 + m_2 m_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + d \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com ponto singular $(-d, 0)$ sendo um centro, com $d > 0$.

Agora, seja o sistema à direita de (3.2), dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = M^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^+, \quad (3.12)$$

com $u^+ = (u_1^+, u_2^+)^T$, iremos repetir as mesmas mudanças de variáveis e reparametrização de tempo. Da hipótese *Ha2*, o ponto singular s do sistema acima é um ponto de sela. Logo, o determinante da matriz M^+ deve ser negativo. Assim, podemos assumir

$$M^+ = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

de tal modo que $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} < 0$. Desta maneira, o ponto singular

$$s = \left(-\frac{m_{12}u_2^+ - m_{22}u_1^+}{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}, -\frac{m_{21}u_1^+ - m_{11}u_2^+}{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}} \right)$$

é um ponto de sela, com $-(m_{12}u_2^+ - m_{22}u_1^+) > 0$.

Pela primeira Σ -preservação realizada, isto é, a mudança (3.8), obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^+ - \frac{m_{12}u_1^-}{m_2} \\ u_2^+ - \frac{m_{22}u_1^-}{m_2} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

com ponto singular $s_1 = \left(-\frac{m_{12}u_2^+ - m_{22}u_1^+}{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}, -\frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})u_1^- + (m_{21}u_1^+ - m_{11}u_2^+)m_2}{m_2(m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22})} \right)$.

Após a segunda Σ -preservação, dada por (3.10), o sistema acima é reescrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} - \frac{m_{12}m_1}{m_2} & \frac{m_{12}\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}}{m_2} \\ \frac{(m_{21}m_2 - m_{22}m_1 + m_{11}m_1 - \frac{m_{12}m_1^2}{m_2})}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} & m_{22} + \frac{m_{12}m_1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^+ - \frac{m_{12}u_1^-}{m_2} \\ \frac{(m_2u_2^+ + m_1u_1^+ - m_{22}u_1^- - \frac{m_{12}m_1u_1^-}{m_2})}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Desta forma, fazendo uma reparametrização no tempo, dada por $\tau = \sqrt{-m_1^2 - m_2m_3} t$, segue, pela regra da cadeia, que o sistema com as derivadas em relação à τ , indicadas por

x'_2 e y'_2 , é dado por

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{11} - \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} & \frac{m_{12}}{m_2} \\ -\left(\frac{m_{21}m_2 - m_{22}m_1 + m_{11}m_1 - \frac{m_{12}m_1^2}{m_2}}{m_1^2 + m_2m_3}\right) & \frac{m_{22} + \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \frac{u_1^+ - \frac{m_{12}u_1^-}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} \\ -\left(\frac{m_2u_2^+ + m_1u_1^+ - m_{22}u_1^- - \frac{m_{12}m_1u_1^-}{m_2}}{m_1^2 + m_2m_3}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Note que o termo constante do sistema acima pode ser decomposto como

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ \bar{c} \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{11} - \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} & \frac{m_{12}}{m_2} \\ -\left(\frac{m_{21}m_2 - m_{22}m_1 + m_{11}m_1 - \frac{m_{12}m_1^2}{m_2}}{m_1^2 + m_2m_3}\right) & \frac{m_{22} + \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -c \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_{22}u_1^+ - m_{12}u_2^+}{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}} \\ \frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})u_1^- + (m_{21}u_1^+ - m_{11}u_2^+)m_2 + (m_{12}u_2^+ - m_{22}u_1^+)m_1}{(m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22})\sqrt{-m_1^2 - m_2m_3}} \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que o sistema (3.15) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 - c \\ y'_2 + \bar{c} \end{pmatrix}$$

com ponto singular $s = (c, -\bar{c})$ sendo um ponto de sela com $c > 0$, pois $s \in \Sigma^+$.

Portanto, concluímos que o sistema (3.2), com hipóteses Ha , pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

com

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da hipótese $Ha1$, o ponto $s = (c, -\bar{c})$ é um ponto de sela para o sistema à direita de (3.16). Logo, a matriz A^+ tem dois autovalores reais, não nulos, e de sinais distintos, ou seja, a matriz possui determinante negativo. Isto é, temos que

$$\bar{a}\bar{b} - ab < 0 \Rightarrow ab > \bar{a}\bar{b}.$$

Denotando as separatrizes da sela s , isto é, as variedades estável e instável, por $W^s(s)$ e $W^u(s)$, respectivamente, vamos tomar $y^{u,s}$ como sendo os pontos de intersecção dos conjuntos estável e instável com a reta $\Sigma = \{x = 0\}$. Ou seja, $y^{u,s} = \Sigma \cap W^{u,s}(s)$. Pela hipótese, $Ha3$, existe um laço homoclínico Γ definido a partir dos conjuntos estável e instável da sela, isto é, $\Gamma = W^u(s) \cup W^s(s)$ e $\{y^{u,s}\} \subset \Gamma$.

Vejamos, agora, que o fato do ponto $p = (-d, 0)$ ser um centro para o sistema à esquerda induz uma simetria no sistema (3.16) no seguinte sentido: a solução do sistema (3.16) que começa em $\Sigma = \{x = 0\}$, digamos para $y > 0$, deve retornar à Σ em $-y$, para tempo negativo. O mesmo deve acontecer para tempo positivo para qualquer y entre y^u e y^s , já que temos um anel de órbitas periódicas limitado pelo laço homoclínico Γ . Portanto, temos que $y^u = -y^s$.

Ao calcularmos as soluções do sistema à direita, com condições iniciais nas variedades estável e instável, podemos encontrar os pontos y^u e y^s ao impor que a primeira coordenada da curva solução seja igual a zero, o que é equivalente a fazer a intersecção com Σ , obtendo os tempos de voo das órbitas até Σ e, depois, substituir na solução. Fazendo isso, obtemos

$$y^s = \frac{2bc}{-\bar{a} + \bar{b} + \sqrt{4ab + (\bar{a} - \bar{b})^2}} - \bar{c},$$

$$y^u = -\frac{2bc}{\bar{a} - \bar{b} + \sqrt{4ab + (\bar{a} - \bar{b})^2}} - \bar{c},$$

de modo que a condição $y^u = -y^s$ é equivalente a

$$\bar{b} = \frac{\bar{a}c - 2a\bar{c}}{c}.$$

Tendo o sistema à esquerda um ponto de centro em $(-d, 0)$, segue, ainda, que a origem é um ponto de tangência. E, pela hipótese $Ha3$, a origem deve ser um ponto dobra-dobra, o qual se verifica se, e somente se,

$$\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}.$$

De fato, calculando as derivadas de $\text{Lie } X^+ f(p)$ e $X^- f(p)$, para $p \in \Sigma = \{x = 0\}$,

considerando $f^{-1}(0) = \Sigma$, em que $f(x, y) = x$ e 0 é valor regular, obtemos

$$X^- f(p) \Big|_{x=0} = \langle X^-, \nabla f \rangle = \langle (y, -d), (1, 0) \rangle = y,$$

$$\begin{aligned} X^+ f(p) \Big|_{x=0} &= \langle X^+, \nabla f \rangle = \langle (-\bar{a}c + a(y + \bar{c}), -bc + \bar{b}(y + \bar{c})), (1, 0) \rangle \\ &= -\bar{a}c + a(y + \bar{c}), \end{aligned}$$

$$X^{2-} f(p) \Big|_{x=0} = \langle X^-, \nabla X^- f(p) \rangle = \langle (y, -d), (0, 1) \rangle = -d,$$

$$\begin{aligned} X^{2+} f(p) \Big|_{x=0} &= \langle X^+, \nabla X^+ f(p) \rangle = \langle (-\bar{a}c + a(y + \bar{c}), -bc + \bar{b}(y + \bar{c})), (0, a) \rangle \\ &= -abc + a\bar{b}(y + \bar{c}), \end{aligned}$$

$$X^- f(p) X^+ f(p) \Big|_{x=0} = ay^2 - \bar{a}cy + a\bar{c}.$$

Daí, o ponto $(0, 0)$ é ponto de tangência para X^- e para X^+ se, e só se $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$.

Além disso, os pontos em Σ , entre y^u e y^s , são pontos de costura se, e só se,

$$a > 0.$$

Assim, substituindo $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ na expressão de $\bar{b}$ acima, obtemos que $\bar{b} = -\bar{a}$.

Portanto, o sistema (3.16) possui um centro com anel de órbitas periódicas limitado por um laço homoclínico Γ se, e só se, $a, c > 0$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$. $\square$

Proposição 3.27. *O sistema linear por partes descontínuo (3.2), satisfazendo o conjunto de hipóteses Hb , após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma normal*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

em que

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

com $d = 0$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

Demonstração. Pela hipótese $Hb2$, $p = (0, e) \in \Sigma$ é um centro para o sistema à esquerda de (3.2)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = M^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^-,$$

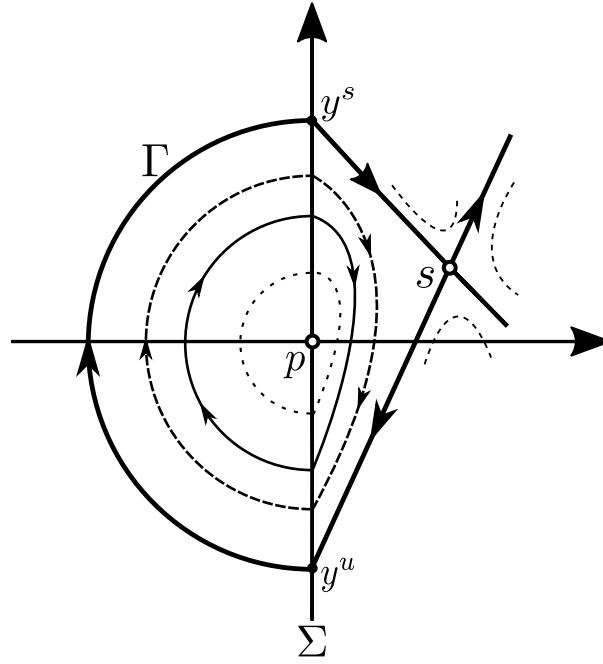


Figura 3.9: Representação da forma normal (3.17) com o conjunto de hipóteses Hb .

com $u^- = (u_1^-, u_2^-)^T$ e

$$M^- = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & -m_1 \end{pmatrix},$$

em que $m_1^2 + m_2 m_3 < 0$. Isto implica que $u_2^- = -\frac{m_1 u_1^-}{m_2}$ e $e = -\frac{m_3 u_1^- - m_1 u_2^-}{m_1^2 + m_2 m_3}$. Agora, realizando a Σ -preservação dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

transladamos o ponto singular para a origem e o sistema é escrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = M^- \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

A partir de agora, seguimos os mesmos passos da demonstração da Proposição 3.26. Fazendo a Σ -preservação dada por (3.10) e a reparametrização no tempo, junto à observação de que o sistema à direita se dará também como antes, concluímos que o sistema (3.2), com hipóteses Hb , pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

com

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O resto das verificações segue igual à proposição anterior. $\square$

Proposição 3.28. *O sistema linear por partes descontínuo (3.2), satisfazendo o conjunto de hipóteses Hc , após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma normal*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

em que

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \text{ e } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

com $d < 0$, $a, c > 0$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

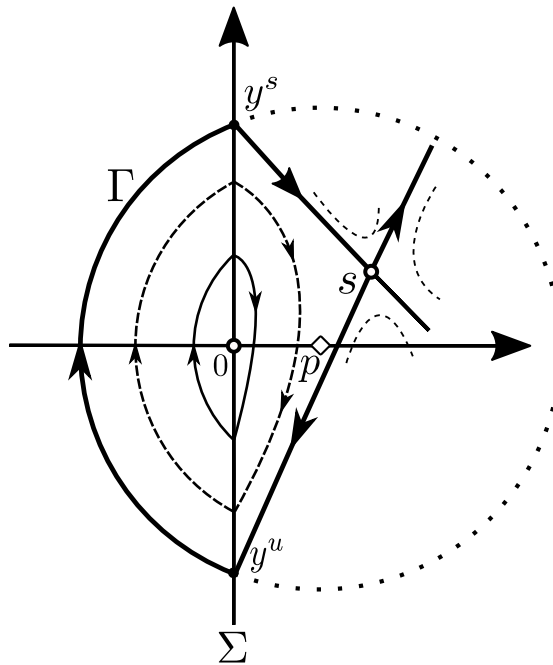


Figura 3.10: Representação da forma normal (3.20) com o conjunto de hipóteses Hc .

Demonstração. A demonstração segue exatamente como na Proposição 3.26, assumindo $d < 0$. $\square$

Consideremos, agora, a seguinte perturbação das formas normais do sistema (3.2), obtidas nas proposições acima, dentro da classe de sistemas lineares descontínuos por partes com duas zonas separadas por $\Sigma = \{x = 0\}$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix} + \varepsilon \left(B^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^+ \right), & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \left(B^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^- \right), & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

com $\varepsilon \neq 0$ um parâmetro real suficientemente pequeno,

$$B^\pm = \begin{pmatrix} b_1^\pm & b_2^\pm \\ b_3^\pm & b_4^\pm \end{pmatrix} \text{ e } v^\pm = \begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix}.$$

Denotamos, ainda, por N o número máximo de ciclos limites do sistema perturbado (3.21) acima, que podem bifurcar, para ε suficientemente pequeno, a partir das soluções periódicas (no interior do laço homoclínico) dos sistemas não perturbados, isto é, das formas normais apresentadas nas proposições anteriores, com seus respectivos conjuntos de hipóteses.

Teorema 3.29. *Considere o sistema (3.6), sob as hipóteses H_a e da Proposição 3.26, então $N = 2$ para pontos próximos de 0. Além disso, podemos encontrar parâmetros $b_i^\pm$, para $i = 1, 2, 3, 4$ e $v_j^\pm$, para $j = 1, 2$, de modo que o sistema (3.21), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, para pontos próximos de 0, exatamente 0, 1 ou 2 ciclos limites*

Demonstração. Denote por

$$\varphi^\pm(t, x, y, \varepsilon) = (\varphi_1^\pm(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^\pm(t, x, y, \varepsilon)),$$

as soluções do sistema (3.21), para $x > 0$ e $x < 0$, tais que $\varphi^\pm(0, x, y, \varepsilon) = (x, y)$. Agora, faremos uso das semi-aplicações de Poincaré, as quais construiremos a seguir, através dos tempos de retorno, positivo e negativo, que uma órbita com condição inicial na variedade Σ leva para retornar à Σ .

Consideremos $y > 0$ e $t^+(y, \varepsilon)$ o menor tempo positivo para que $\varphi_1^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = 0$. Da mesma forma, seja $t^-(y, \varepsilon)$ o maior tempo negativo tal que $\varphi_1^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = 0$. Desta forma, como os pontos estão na variedade Σ , e possuem a mesma condição inicial, teremos um ciclo limite passando por y se, e só se, ocorrer

$$\varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon),$$

isto é, se as órbitas intersectam-se no mesmo ponto. E, estudar essa igualdade, é equivalente a analisar o número de zeros da função

$$f(y, \varepsilon) = \varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) - \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon), \quad (3.22)$$

que pode ser chamada de função deslocamento.

Com o auxílio de um software de cálculo simbólico, por exemplo Mathematica ou Maple, podemos encontrar as soluções para o sistema (3.21) com condição inicial em $(0, y)$ para $y > 0$. As soluções para $x < 0$ e $x > 0$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi^-(t, x, y, \varepsilon) = & (\varphi_1^-(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^-(t, x, y, \varepsilon)) \\ = & \left(-d + d \cos(t) + y \sin(t) + \frac{1}{2} \varepsilon \left(-2b_3^- d + 2v_2^- + (b_1^- + b_4^-) dt - 2v_2^- \right. \right. \\ & + b_2^- ty + b_3^- (2d - ty) \Big) \cos(t) + \left(-d(b_1^- + b_4^- + b_2^- t - b_3^- t) + 2v_1^- + (b_2^- \right. \\ & + b_3^- + (b_1^- + b_4^-) t) y \Big) \sin(t) \Big), y \cos(t) - d \sin(t) + \frac{1}{2} \varepsilon \left(2b_1^- d - 2v_1^- \right. \\ & + \left(-2b_1^- d + (-b_2^- + b_3^-) dt + 2v_1^- + (b_1^- + b_4^-) ty \right) \cos(t) + \left(d(b_2^- - b_3^- \right. \\ & \left. \left. - (b_1^- + b_4^-) t) + 2v_2^- + (-b_1^- + b_4^- - b_2^- t + b_3^- t) y \right) \sin(t) \right) \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^+(t, x, y, \varepsilon) &= (\varphi_1^+(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^+(t, x, y, \varepsilon)) \\
&= \left(\frac{1}{4a(\bar{a}^2 + ab)^{3/2}} e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} \left(-2\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - 2a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + 4a\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} \right. \right. \\
&\quad + 4a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} - 2a\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t - 2a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t \\
&\quad + 2a^2 \bar{a}^2 (-1 + e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})y + 2a^3 b (-1 + e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})y \Big) + \frac{e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}}{4a(\bar{a}^2 + ab)^{3/2}} \varepsilon \left(-a\bar{a}^2 b_1^+ c - a^2 b b_1^+ c - a\bar{a}^2 b_4^+ c \right. \\
&\quad - a^2 b b_4^+ c - 2\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_2^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 + a^2 \bar{a} b b_1^+ ct - a\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_1^+ ct - a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_1^+ ct + a\bar{a} b b_2^+ ct \\
&\quad - a^2 \bar{a} b b_4^+ ct - a\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ ct - a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ ct - a\bar{a}^2 b b_2^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} - a^2 b^2 b_2^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t \\
&\quad - a^2 \bar{a}^2 b_3^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t - a^3 b b_3^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t - a\bar{a}^3 (b_1^+ - b_4^+) c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t \\
&\quad - a\bar{a}^2 b_1^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) - a\bar{a}^2 b_4^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) \\
&\quad - a^2 b b_4^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 - \bar{a}t + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) - a^2 b b_1^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \bar{a}t + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) \\
&\quad + 2a\bar{a} \sqrt{\bar{a}^2 + ab} (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 (b_1^+ c - b_4^+ c + v_1^+) + 2a^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 (b_3^+ c + v_2^+) \\
&\quad + a^2 \bar{a}^2 b_1^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + a^3 b b_1^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + a^2 \bar{a}^2 b_4^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty \\
&\quad + a^3 b b_4^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + a^3 b_3^+ (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t))y \\
&\quad + a^2 \bar{a} (b_1^+ - b_4^+) (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t))y + 2a\bar{a} (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}) (v_1^+ + b_2^+ y) * \\
&\quad \left. - a^2 b \left(-2(-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})v_1^+ - b_2^+ (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t))y \right) \right), \\
&\quad \frac{1}{4a(\bar{a}^2 + ab)^{3/2}} e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} \left(2\bar{a}^3 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + 2a\bar{a}b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - 4\bar{a}^3 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} \right. \\
&\quad - 4a\bar{a}b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} + 2\bar{a}^3 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} + 2a\bar{a}b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} - 2\bar{a}^4 c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}) \\
&\quad - 4a\bar{a}^2 bc (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}) - 2a^2 b^2 c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}) + 2a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}y + 2a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab}e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}y \\
&\quad \left. - 2a\bar{a}^3 (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})y - 2a^2 \bar{a}b (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})y + 2a\bar{a}^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} (1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})y \right) \\
&\quad \frac{e^{-\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}}{4a(\bar{a}^2 + ab)^{3/2}} \varepsilon \left(2\bar{a}^3 b_4^+ c + 2a\bar{a} b b_4^+ c - 2\bar{a}b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_2^+ c (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 - \bar{a}^3 b b_2^+ ct - a\bar{a}^3 b_3^+ ct \right. \\
&\quad + 2\bar{a}^3 \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ ct + 2a\bar{a}b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ ct + \bar{a}^3 b b_2^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} + a\bar{a}^3 b_3^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} \\
&\quad - a\bar{a}^2 b b_1^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t - a^2 b^2 b_1^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t + a\bar{a} b^2 b_2^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t \\
&\quad + a^2 \bar{a} b b_3^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t - 2\bar{a}^4 b_4^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t - 3a\bar{a}^2 b b_4^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t \\
&\quad - a^2 b^2 b_4^+ c (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})t + 2\bar{a}^3 b_4^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) + 2a\bar{a} b b_4^+ ce^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t) \\
&\quad - a\bar{a}^2 b_3^+ c (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t)) - a^2 b b_3^+ c (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t)) \\
&\quad - \bar{a}^2 c \left(-2\sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 + b b_2^+ (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t)) \right) \\
&\quad + ab \left(2\sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_1^+ c (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 - b b_2^+ c (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t)) \right) \\
&\quad + 2\sqrt{\bar{a}^2 + ab} (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 v_1^+ \Big) + 2a\bar{a}^2 (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})v_2^+ + 2a^2 b (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})v_2^+ \\
&\quad - 2a\bar{a} \sqrt{\bar{a}^2 + ab} (-1 + e^{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})^2 (b_3^+ c + v_2^+) + a^2 b b_1^+ y - a^2 b b_4^+ y + a^2 b b_4^+ e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}y + a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_1^+ ty \\
&\quad + a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ ty + a^2 b \sqrt{\bar{a}^2 + ab} b_4^+ e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t}ty + a\bar{a}^2 b b_2^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty \\
&\quad + a^2 b^2 b_2^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + a^2 \bar{a}^2 b_3^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + a^3 b b_3^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty \\
&\quad - 2a\bar{a}^3 b_4^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty - 2a^2 \bar{a} b b_4^+ (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty + 2a\bar{a}^2 b_4^+ \sqrt{\bar{a}^2 + ab} (-1 + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t})ty \\
&\quad + a^2 b b_1^+ e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t)y - a\bar{a} b_2^+ (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t))y \\
&\quad \left. - a^2 \bar{a} b_3^+ (1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t + e^{2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}t} (-1 + \sqrt{\bar{a}^2 + ab}t))y \right) \Big).
\end{aligned}$$

(3.23)

Agora, calculando os tempos $t^-(y, \varepsilon) < 0$ e $t^+(y, \varepsilon) > 0$ para os quais as soluções φ^- e φ^+ acima apresentam a primeira coordenada nula, obtemos, respectivamente, os tempos

$$t^-(y, \varepsilon) = -\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) - \frac{1}{4y(d^2 + y^2)} \varepsilon \left(3(b_1^- + b_4^-)d^3\pi + d(4b_1^- + 4b_4^- \right. \\ \left. + 3(-b_2^- + b_3^-)\pi) - 8v_1^-)y + (-4b_2^-d + 4b_3^-d + 3(b_1^- + b_4^-)d\pi - 8v_2^-)y^2 \right. \\ \left. + 3(-b_2^- + b_3^-)\pi y^3 + 2((b_1^- + b_4^-)d + (-b_2^- + b_3^-)y)(d^2 + y^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right),$$

e

$$t^+(y, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - ay} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{(\bar{a}^2 + ab)(\bar{a}^2c^2 + a(bc^2 - ay^2))} (\bar{a}^2c(b_1^+c \right. \\ \left. + b_4^+c + 2v_1^+) + a\bar{a}(b_1^+c - b_4^+c + 2v_1^+)y + a(a(b_3^+c + 2v_2^+)y + bc(b_1^+c + b_4^+c \right. \\ \left. + 2v_1^+ + b_2^+y)) \right) - \frac{1}{2a(\bar{a}^2 + ab)^{3/2}y} ((\bar{a}^2(b_1^+ + b_4^+)c + a\bar{a}(b_1^+ - b_4^+)y + a(ab_3^+y \\ \left. + b(b_1^+c + b_4^+c + b_2^+y))) \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - ay} \right) \right). \quad (3.24)$$

Ao substituirmos t^+ em φ_2^+ e t^- em φ_2^- na função deslocamento (3.22), podemos expandir tal função em série de Taylor, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1 e obter $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_1(y) = k_1 g_1(y) + k_2 g_2(y) + k_3 g_3(y), \quad (3.25)$$

com

$$k_1 = -\frac{a(b_1^- + b_4^-)d + (b_1^+ + b_4^+)c - 2av_1^- + 2v_1^+}{a}, \\ k_2 = -\frac{b_1^- + b_4^-}{4}, \\ k_3 = \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}},$$

e

$$g_1(y) = 1, \\ g_2(y) = \frac{d^2 + y^2}{y} \left(3\pi + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right), \\ g_3(y) = \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2}{y} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - ay} \right). \quad (3.26)$$

Vamos, agora, mostrar que o conjunto $G_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ forma um sistema ECT para pontos positivos próximos de $y = 0$. De fato, calculando os Wronskianos das funções,

obtemos

$$W_0(y) = W(g_1)(y) = 1,$$

$$W_1(y) = W(g_1, g_2)(y) = \frac{-3d^2\pi - 4dy + 3\pi y^2 + 2(-d^2 + y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)}{y^2},$$

$$\begin{aligned} W_2(y) = W(g_1, g_2, g_3)(y) = & \frac{-2}{y^5(d^2 + y^2)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2} \left(c^2(d^2 + y^2) \left(3d^2\pi + 4dy \right. \right. \\ & - 3\pi y^2 + 2(d^2 - y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \Big) \left(-2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{5}{2}} c^3 y + 2a^3(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}} cy^3 \right. \\ & + (\bar{a}^2 + ab)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right) \Big) \\ & + d^2((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2)^2 \left(3d^2\pi + 4dy + 3\pi y^2 + 2(d^2 + y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right) \\ & \cdot \left(2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y - (\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 + ay^2)) \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right) \right) \Big). \end{aligned}$$

Note que os Wronskianos W_1 e W_2 não são definidos em $y = 0$. De fato, os numeradores de W_1 e W_2 apresentam o termo $\arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)$ e os denominadores possuem $y = 0$ como zero de multiplicidade 2 e 5, respectivamente. Portanto, não podemos realizar a expansão de Taylor destes Wronskianos em $y = 0$. Para contornar tais problemas vamos multiplicar W_1 por y^2 e W_2 por y^5 e, daí, expandir tais funções. Depois, dividimos as expansões resultantes pelos fatores respectivos que foram multiplicados. Uma vez que estamos considerando pontos $y > 0$ para as funções, não há problema em obter uma expansão que tenha termos com y no denominador. Ainda, para resolver o problema com o termo $\arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)$, realizamos, na verdade, uma expansão em um ponto $\beta > 0$ e depois tomamos o limite para $\beta \rightarrow 0^+$. Assim, o termo mencionado é substituído por $\arctg\left(\frac{d^2 - \beta^2}{2d\beta}\right)$, cujo limite para $\beta \rightarrow 0$ é igual à $\frac{\pi}{2}$. Procedendo como mencionado, obtemos as expansões dos Wronskianos dadas por

$$W_0(y) = 1,$$

$$W_1(y) = 4\pi - \frac{4\pi d^2}{y^2} + O(y^3),$$

$$W_2(y) = \frac{32a^3 d^2 \pi}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y^2} + O(y^4).$$

Temos que W_1 se anula somente em $y = d$. Logo, para pontos positivos próximos de 0, os Wronskianos estão bem definidos e não se anulam. Portanto, próximo de 0, G_1 forma um sistema ECT. Desta maneira, então, toda combinação linear não trivial dos elementos de G_1 possui, no máximo, 2 zeros, contando suas multiplicidades. Ainda, pela Proposição 2.19, tal cota é realizável, isto é, é possível encontrar elementos do espaço gerado por G_1 tendo, exatamente, 0, 1 e 2 zeros simples, para pontos $y > 0$ próximos de 0.

Vamos supor que y^* seja um zero simples de (3.25). Se definirmos

$$F(y, \varepsilon) = f_1(y) + O(\varepsilon)$$

de modo que $\varepsilon F(y, \varepsilon) = f(y, \varepsilon)$, então temos que tal função $F(y, \varepsilon)$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Aplicação Implícita numa vizinhança de $(y^*, 0)$, ou seja,

$$F(y^*, 0) = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial}{\partial y} F(y, \varepsilon) \right|_{(y^*, 0)} \neq 0.$$

Desta maneira, existe uma única função $\xi(\varepsilon)$ tal que

$$F(\xi(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \text{ e } \xi(0) = y^*.$$

Portanto, pela expressão da função deslocamento (3.22), para cada zero simples de (3.25), existe um único ciclo limite de (3.21). E, este fato, junto à Proposição 2.19, finaliza a demonstração do teorema. □

Para o próximo teorema, faremos uso do seguinte lema.

Lema 3.30. *Considere o sistema (3.17), sob as hipóteses Hb e da Proposição 3.27. Se $b_1^+ = -b_4^+, b_1^- = -b_4^-$ e $v_1^+ = av_1^-$, então o sistema (3.21) não admite ciclos limites.*

Demonstração. Substituindo os parâmetros no sistema (3.21) e denotando por

$$\varphi^\pm(t, x, y, \varepsilon) = (\varphi_1^\pm(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^\pm(t, x, y, \varepsilon)),$$

as suas soluções, para $x > 0$ e $x < 0$, tais que $\varphi^\pm(0, x, y, \varepsilon) = (x, y)$, podemos encontrar os tempos de retorno, positivo e negativo, necessários para definirmos as semi-aplicações de Poincaré, de modo que uma órbita com condição inicial $(0, y) \in \Sigma$, $y > 0$, retorne para Σ . Ou seja, tempos $t^+(y, \varepsilon) > 0$ e $t^-(y, \varepsilon) < 0$, tais que $\varphi_1^\pm(t^\pm(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = 0$. Assim, teremos um ciclo limite passando por y se, e só se, ocorrer

$$\varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon),$$

ou seja, devemos analisar o número de zeros da função deslocamento

$$f(y, \varepsilon) = \varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) - \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon). \quad (3.27)$$

Expandindo as soluções do sistema (3.21), até ordem 2 em ε , obtemos as expansões, também de ordem 2 em ε , dos tempos de retorno

$$\begin{aligned}
t^+(y, \varepsilon) = & \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{(\bar{a}^2 + ab)((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2)} \right. \\
& \cdot \left(2a(\bar{a}^2 + ab)cv_1^- + a(bb_2^+c + ab_3^+c - 2\bar{a}b_4^+c + 2a\bar{a}v_1^- + 2av_2^+)y \right) \\
& - \frac{1}{2(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}}} (bb_2^+ + ab_3^+ - 2b_4^+) \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) \Bigg) \\
& + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \left(2 \left(-8(\bar{a}^2 + ab)^2c^2v_1^-(\bar{a}^2b_2^+c - a^2\bar{a}v_1^- + a(bb_2^+c - av_2^+)) \right. \right. \\
& + a(\bar{a}^2 + ab)c \left(-3b^2(b_2^+)^2c^2 - 8\bar{a}^3b_2^+cv_1^- + 2b((-ab_2^+b_3^+ + \bar{a}b_2^+(b_4^+)^2)c^2 \right. \\
& - 4a(\bar{a}b_2^+ + ab_4^+)cv_1^- + 4a^3(v_1^-)^2) + 4\bar{a}^2(b_2^+b_3^+c^2 - 2(b_4^+c - av_1^-)(b_4^+c + 2av_1^-)) \\
& + 4a\bar{a}(3b_3^+b_4^+c^2 + 4av_1^-v_2^+) + a^2(-3(b_3^+)^2c^2 + 8(v_2^+)^2) \Bigg) y + 8a^2(\bar{a}^2 + ab)v_1^-(\bar{a}^2b_2^+c \\
& + a\bar{a}(-2b_4^+c + av_1^-) + a(2bb_2^+c + a(b_3^+c + v_2^+)))y^2 + a^3 \left(5b^2(b_2^+)^2c + 8\bar{a}^3b_2^+v_1^- \right. \\
& - 4\bar{a}^2(b_2^+b_3^+c + 2b_4^+(-2b_4^+c + av_1^-)) + a^2b_3^+(5b_3^+c + 8v_2^+) + 4a\bar{a}(-5b_3^+b_4^+c \\
& + 2ab_3^+v_1^- - 4b_4^+v_2^+) + 2b(-10\bar{a}b_2^+b_4^+c - 2a(b_4^+)^2c + 4a^2b_4^+v_1^- + ab_2^+(3b_3^+c \\
& + 8\bar{a}v_1^- + 4v_2^+)) \Bigg) y^3 \Bigg) \frac{1}{(\bar{a}^2 + ab)^2((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2)} \\
& + \frac{1}{(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{5}{2}}} \left(3b^2(b_2^+)^2 - 4\bar{a}^2b_2^+b_3^+ + 2abb_2^+b_3^+ + 3a^2(b_3^+)^2 - 12\bar{a}(bb_2^+ + ab_3^+)b_4^+ \right. \\
& \left. + 4(2\bar{a}^2 - ab)(b_4^+)^2 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) \Bigg) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e

$$\begin{aligned}
t^-(y, \varepsilon) = & -\pi + \varepsilon \left(\frac{b_2^- - b_3^-}{2} \pi + \frac{2v_2^-}{y} \right) - \frac{1}{8y^2} \varepsilon^2 \left(16v_1^-(v_2^- + b_4^-y) + y(16b_2^-v_2^- - 16b_3^-v_2^- \right. \\
& \left. + 3(b_2^-)^2\pi y - 2b_2^-b_3^-\pi y + 3(b_3^-)^2\pi y + 4(b_4^-)^2\pi y \right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, substituindo t^+ e t^- na função deslocamento (3.27) e expandindo-a em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 2, temos

$$f(y, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{2v_1^-(b_2^+ - ab_2^-)}{a} + O(\varepsilon^3). \tag{3.30}$$

Vamos supor que existe um ramo $\bar{y}_\varepsilon$ de soluções de $f(y, \varepsilon) = 0$, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, de modo que para algum $\bar{y} \in (0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a})$, temos $\bar{y}_\varepsilon \rightarrow \bar{y}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por (3.30), isto implica que $v_1^- = 0$ ou $b_2^+ = ab_2^-$. Porém, para qualquer um dos casos, obteremos que $f(y, \varepsilon) \equiv 0$, configurando, assim, um ponto de centro para o sistema (3.21). De fato, podemos verificar isto fazendo uso de funções Hamiltonianas para os sistemas à direita e à esquerda. A vantagem do uso de funções Hamiltonianas é que as curvas soluções do sistema de equações diferenciais estão contidas nas curvas de nível

da função Hamiltoniana associada. Assim, não é necessário buscar os tempos de retorno para construir as semi-aplicações de Poincaré, sendo suficiente buscarmos os pontos em Σ que estão nas mesmas curvas de nível destas funções Hamiltonianas. Para os detalhes sobre sistemas Hamiltonianos, ver Apêndice.

Vamos considerar o caso $b_2^+ = ab_2^-$. Não é complicado ver que os sistemas à direita e à esquerda de Σ , dados por (3.21), para as hipóteses e condições aqui consideradas, são sistemas Hamiltonianos, cujas funções Hamiltonianas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} H^+(x, y, \varepsilon) &= x^2 \left(\frac{-b - b_3^+}{2} \varepsilon \right) + \frac{a}{2} (1 + b_2^-) y^2 + \left(\frac{\bar{a}^2 c}{a} + bc - v_2^+ \varepsilon \right) x \\ &\quad + (\bar{a} - b_4^+ \varepsilon) xy + av_1^- \varepsilon y, \\ H^-(x, y, \varepsilon) &= \left(\frac{1 - b_3^-}{2} \varepsilon \right) x^2 + \left(\frac{1 + b_2^-}{2} \varepsilon \right) y^2 - v_2^- \varepsilon x - b_4^- \varepsilon xy + v_1^- \varepsilon y. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considerando o ponto $(0, h)$, com $h > 0$, a curva de nível da função Hamiltoniana H^+ que passa por este ponto é $H^+(x, y, \varepsilon) = H^+(0, h, \varepsilon) = \frac{a}{2} h(h + (b_2^- h + 2v_1^-) \varepsilon)$. Agora, resolvendo a equação $H^+(0, y, \varepsilon) = H^+(0, h, \varepsilon)$ temos duas soluções da forma $(0, y)$ com $y = -h - \frac{2v_1^- \varepsilon}{1 + b_2^- \varepsilon}$ e $y = h$, as quais correspondem a interseção desta curva de nível com

Σ . Agora, considere a curva de nível $H^-(x, y, \varepsilon) = H^-\left(0, -h - \frac{2v_1^- \varepsilon}{1 + b_2^- \varepsilon}, \varepsilon\right) = \frac{a}{2} h(h + (b_2^- h + 2v_1^-) \varepsilon)$. Resolvendo a equação $H^-(0, y, \varepsilon) = H^-\left(0, -h - \frac{2v_1^- \varepsilon}{1 + b_2^- \varepsilon}, \varepsilon\right)$, temos que esta curva intercepta Σ nos pontos da forma $(0, y)$, com $y = h$ e $y = -h - \frac{2v_1^- \varepsilon}{1 + b_2^- \varepsilon}$. Isso mostra que dado um ponto $(0, y)$, em Σ , a função deslocamento, dada pela equação (3.27), é identicamente nula.

Agora, seja $v_1^- = 0$. As funções Hamiltonianas associadas aos sistemas à direita e à esquerda de (3.21) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} H^+(x, y, \varepsilon) &= \left(\frac{-b - b_3^+}{2} \varepsilon \right) x^2 + \frac{a}{2} (1 + b_2^-) y^2 + \left(\frac{\bar{a}^2 c}{a} + bc - v_2^+ \varepsilon \right) x + (\bar{a} - b_4^+ \varepsilon) xy, \\ H^-(x, y, \varepsilon) &= \left(\frac{1 - b_3^-}{2} \varepsilon \right) x^2 + \left(\frac{1 + b_2^-}{2} \varepsilon \right) y^2 - v_2^- \varepsilon x - b_4^- \varepsilon xy. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sendo o ponto $(0, h)$, com $h > 0$, a curva de nível de H^+ que passa por este ponto é dada por $H^+(x, y, \varepsilon) = H^+(0, h, \varepsilon) = \frac{1}{2} h^2 (a + b_2^+ \varepsilon)$. Buscando os pontos $(0, y)$ em Σ que estão nesta curva de nível, isto é, resolvendo a equação $H^+(0, y, \varepsilon) = H^+(0, h, \varepsilon)$, obtemos duas soluções da forma $(0, y)$, com $y = h$ e $y = -h$. Agora, vamos considerar a curva de nível que passa por $(0, -h)$, dada por $H^-(x, y, \varepsilon) = H^-(0, -h, \varepsilon) = \frac{1}{2} h^2 (1 + b_2^- \varepsilon)$. Novamente, buscando os pontos $(0, y)$ em Σ que estão na curva de nível, resolvendo $H^-(0, y, \varepsilon) = H^-(0, -h, \varepsilon)$, obtemos pontos $(0, y)$, com $y = h$ e $y = -h$. Logo, como no outro caso, a função deslocamento (3.27) é identicamente nula. Portanto, neste o sistema (3.21) não possui ciclos limites. $\square$

Teorema 3.31. *Considere o sistema (3.17), sob as hipóteses Hb e da Proposição 3.27, então $N = 2$. Além disso, podemos encontrar parâmetros $b_i^\pm$, para $i = 1, 2, 3, 4$ e $v_i^\pm$, para*

$j = 1, 2$, de modo que o sistema (3.21), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, exatamente, 0, 1 ou 2 ciclos limites.

Demonstração. Denote por

$$\varphi^\pm(t, x, y, \varepsilon) = (\varphi_1^\pm(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^\pm(t, x, y, \varepsilon)),$$

as soluções do sistema (3.21), para $x > 0$ e $x < 0$, tais que $\varphi^\pm(0, x, y, \varepsilon) = (x, y)$. Agora, assim como na demonstração do teorema anterior, faremos uso das semi-aplicações de Poincaré, as quais são obtidas através dos tempos de retorno, positivo $t^+(y, \varepsilon)$ e negativo $t^-(y, \varepsilon)$, que uma órbita com condição inicial na variedade Σ leva para retornar à Σ . Da mesma forma, teremos um ciclo limite passando por y se, e só se, ocorrer

$$\varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon),$$

ou equivalentemente, quando y for um zero da função deslocamento

$$f(y, \varepsilon) = \varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) - \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon). \quad (3.33)$$

Vale observar, que como o sistema à direita não se alterou, a solução e tempo de retorno, respectivos, também não se alteraram. Logo, basta encontrarmos o tempo negativo $t^-(y, \varepsilon)$, para a solução do sistema à esquerda. Novamente, usando um software de cálculo simbólico, podemos encontrar a solução para o sistema à esquerda de (3.21) com condição inicial em $(0, y)$ para $y > 0$. A solução para $x < 0$ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi^-(t, 0, y, \varepsilon) = & \left(y \sin(t) + \frac{1}{2} \varepsilon (2v_2^- + (-2v_2^- + (b_2^- - b_3^-)ty) \cos(t) + (2v_1^- + (b_2^- + b_3^- \right. \\ & + (b_1^- + b_4^-)t)y) \sin(t)), y \cos(t) + \frac{1}{2} \varepsilon (-2v_1^- + (2v_1^- + (b_1^- + b_4^-)ty) \cos(t) \\ & \left. + (2v_2^- + (-b_1^- + b_4^- - b_2^-t + b_3^-t)y) \sin(t)) \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

cujo tempo de retorno, negativo, é

$$t^-(y, \varepsilon) = -\pi + \varepsilon \left(\frac{b_2^- - b_3^-}{2} \pi + \frac{2v_2^-}{y} \right). \quad (3.35)$$

Ao substituírmos t^+ em φ_2^+ , dados no teorema anterior, e t^- em φ_2^- na função deslocamento (3.33) e expandindo tal função em série de Taylor, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1, obtemos $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_2(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_2(y) = k_1 g_1(y) + k_2 g_2(y) + k_3 g_3(y), \quad (3.36)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{(b_1^+ + b_4^+)c - 2av_1^- + 2v_1^+}{a}, \\ k_2 &= -\frac{b_1^- + b_4^-}{2}, \\ k_3 &= \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2\sqrt{a^2 + ab}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g_1(y) &= 1, \\
g_2(y) &= y, \\
g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c - a^2y^2}{y} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para finalizar a demonstração do teorema, vamos mostrar que $G_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$ formam um sistema ECT. De fato, temos

$$\begin{aligned}
W_1(y) &= W(g_1)(y) = 1, \\
W_2(y) &= W(g_1, g_2)(y) = 1, \\
W_3(y) &= W(g_1, g_2, g_3)(y) \\
&= \frac{2c^2 \left(2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}}cy - (\bar{a}^2 + ab)((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2) \ln \left(\frac{\sqrt{a\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{a\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) \right)}{-(\bar{a}^2 + ab)c^2y^3 + a^2y^5}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Notemos, primeiramente, que a função $\ln$ acima é definida para todo ponto y no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$. Logo, W_3 está definido para todo $y \in \left(-\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$. Porém, como estamos considerando $y > 0$, vamos tomar $I = \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$, como intervalo de definição dos Wronskianos. Agora, escrevendo o Wronskiano $W_3(y)$ como

$$W_3(y) = \frac{2(\bar{a} + ab)c^2}{((\bar{a}^2 + ab)c^2y^3 - a^2y^5)} P(y), \tag{3.39}$$

em que $P(y) = -2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc}y + ((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2) \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right)$, temos

$$P'(y) = -2a^2y \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right).$$

Note que, $P(0) = 0$ e $P'(y) < 0$ para qualquer $y \in I$. Assim, temos, também, $P(y) < 0$ para $y \in I$. Por fim, a função racional que multiplica $P(y)$ em (3.39) também está bem definida, e é diferente de zero no intervalo I . Desta forma, W_3 é um produto de duas funções que não se anulam neste intervalo e, consequentemente, $W_3 \neq 0$ em I . Portanto, o conjunto G_2 forma um sistema ECT em $I = \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$.

Como (3.36) só é identicamente nula nas condições do lema anterior, para este caso o sistema não apresenta ciclos limites. Assim, assumindo que (3.36) não é identicamente nula, temos, portanto, que seus zeros indicam ciclos limites para o sistema. Sendo G_2 um sistema ECT, então toda combinação não trivial de seus elementos possui, no máximo, 2 zeros simples. Além disso, é possível encontrar elementos do espaço gerado por G_2 tendo 0, 1 e 2 zeros simples. Daí, novamente pelo Teorema da Aplicação Implícita, concluímos a demonstração. $\square$

Teorema 3.32. *Considere o sistema (3.20), sob as hipóteses Hc e da Proposição 3.28, então $N = 2$. Além disso, podemos encontrar parâmetros $b_i^\pm$, para $i = 1, 2, 3, 4$ e $v_j^\pm$, para $j = 1, 2$, de modo que o sistema (3.21), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, exatamente, 0, 1 ou 2 ciclos limites.*

Demonstração. Novamente, denotando por

$$\varphi^\pm(t, x, y, \varepsilon) = (\varphi_1^\pm(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^\pm(t, x, y, \varepsilon)),$$

as soluções do sistema (3.21), para $x > 0$ e $x < 0$, tais que $\varphi^\pm(0, x, y, \varepsilon) = (x, y)$, vamos construir, a partir dos tempos de retorno e das órbitas com condição inicial em Σ , a função deslocamento

$$f(y, \varepsilon) = \varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) - \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon), \quad (3.40)$$

a qual determina um ciclo limite passando por $(0, y)$ se, e só se, y for um de seus zeros. Via software de cálculo simbólico, encontramos a solução para $x < 0$ com condição inicial em $(0, y)$, dada por

$$\begin{aligned} \varphi^-(t, 0, y, \varepsilon) = & \left(-d + d \cos(t) + y \sin(t) + \frac{1}{2}\varepsilon \left(-2b_3^- d + 2v_2^- + (b_1^- + b_4^-)dt - 2v_2^- \right. \right. \\ & + b_2^- ty + b_3^-(2d - ty)) \cos(t) + (-d(b_1^- + b_4^- + b_2^- t - b_3^- t) + 2v_1^- + (b_2^- + b_3^- \\ & + (b_1^- + b_4^-)t)y) \sin(t) \Big), y \cos(t) - d \sin(t) + \frac{1}{2}\varepsilon \left(2b_1^- d - 2v_1^- + (-2b_1^- d \right. \\ & + (-b_2^- + b_3^-)dt + 2v_1^- + (b_1^- + b_4^-)ty) \cos(t) + (d(b_2^- - b_3^- - (b_1^- + b_4^-)t) \\ & \left. \left. + 2v_2^- + (-b_1^- + b_4^- - b_2^- t + b_3^- t)y) \sin(t) \right) \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

com tempo de retorno negativo

$$\begin{aligned} t^-(y, \varepsilon) = & -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) - \frac{1}{4y(d^2 + y^2)}\varepsilon \left((b_1^- + b_4^-)d^3\pi + d(d(4b_1^- + 4b_4^- \right. \\ & + (-b_2^- + b_3^-)\pi) - 8v_1^-)y + (-4b_2^- d + 4b_3^- d + (b_1^- + b_4^-)d\pi - 8v_2^-)y^2 \\ & \left. + (-b_2^- + b_3^-)\pi y^3 + 2((b_1^- + b_4^-)d + (-b_2^- + b_3^-)y)(d^2 + y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right). \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo o tempo de retorno t^- na solução φ_2^- , junto com φ_2^+ e t^+ , dadas, respectivamente, por (3.23) e (3.28), obtidas no primeiro teorema, podemos escrever a função deslocamento (3.40), expandida em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1, como $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_3(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_3(y) = k_1 g_1(y) + k_2 g_2(y) + k_3 g_3(y), \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{a(b_1^- - b_4^-)d + (b_1^+ + b_4^+)c - 2v_1^+}{a}, \\ k_2 &= \frac{b_1^- + b_4^-}{4}, \\ k_3 &= \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_1(y) &= 1, \\ g_2(y) &= \frac{d^2 + y^2}{y} \left(\pi + 2 \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right), \\ g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2}{y} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Calculando os Wronskianos, temos

$$W_0(y) = W(g_1)(y) = 1,$$

$$W_1(y) = W(g_1, g_2)(y) = \frac{-d^2\pi - 4dy + \pi y^2 + 2(-d^2 + y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)}{y^2},$$

$$\begin{aligned} W_2(y) = W(g_1, g_2, g_3)(y) = & \frac{-2}{y^5(d^2 + y^2)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2} \left(c^2(d^2 + y^2) \left(d^2\pi + 4dy \right. \right. \\ & \left. \left. - \pi y^2 + 2(d^2 - y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right) \left(-2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{5}{2}} c^3 y + 2a^3(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}} c y^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\bar{a}^2 + ab)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right) \right) \right. \\ & \left. + d^2((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2)^2 \left(d^2\pi + 4dy + \pi y^2 + 2(d^2 + y^2) \arctg\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right) \right. \\ & \left. \cdot \left(2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y - (\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 + ay^2)) \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Uma vez que tais expressões são um tanto complexas para uma análise direta, junto ao fato de que não estão definidas em $y = 0$, podemos proceder conforme feito na demonstração do Teorema 3.29, isto é, expandir as funções W_1 e W_2 , multiplicadas, respectivamente, por y^2 e y^5 , em um ponto $\beta > 0$ e, depois, tomar o limite quando $\beta \rightarrow 0$ e, por fim, dividir as expressões pelas respectivas potências de y que foram multiplicadas. Assim, obtemos as tais expansões em série de potências de y

$$W_0(y) = 1,$$

$$W_1(y) = -\frac{16}{3d}y + O(y^4),$$

$$W_2(y) = \frac{512a^3((\bar{a}^2 + ab)c^2 + a^2d^2)}{45(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}}c^3d^3}y^3 + O(y^9),$$

os quais não se anulam em pontos próximos de 0 e nem no intervalo de definição $I = (0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a})$ dos Wronskianos acima e das funções g_1, g_2 e g_3 . Portanto, o conjunto $G_3 = \{g_1, g_2, g_3\}$ forma um sistema ECT. Assim, toda combinação linear não trivial de seus elementos possui, no máximo, 2 zeros simples. E, ainda, existem coeficientes para os quais obtemos elementos, do espaço gerado por G_3 , tendo, exatamente, 0, 1 e 2 zeros simples. Por fim, pelo Teorema da Função Implícita, aplicado na função deslocamento (3.40), finalizamos a demonstração. $\square$

A seguir, vamos apresentar um corolário do Teorema 3.29 que mostra, sob certos valores dos parâmetros, um caso com 3 ciclos limites. Ou seja, temos 3 zeros simples da função deslocamento (3.22).

Corolário 3.33. *Nas hipóteses do Teorema 3.29, vamos assumir que $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{4}$, $b_1^+ = \frac{11712}{5}$, $b_1^- = -13312$, $v_1^+ = 4496$ e $\bar{a} = b_2^\pm = b_4^\pm = b_2^\pm = v_1^- = v_2^\pm = 0$. Então, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3.6) possui, ao menos, três ciclos limites passando numa ε -vizinhança dos pontos $(0, y_i)$, em que y_i , $i = 1, 2, 3$, são as soluções da*

equação

$$\begin{aligned} \frac{16}{5y} \left(-5312y + 195(\pi + 16\pi y^2) + 130(1 + 16y^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - 16y}{8y} \right) \right. \\ \left. + 183(1 - 4y^2) \ln \left(\frac{1 + 2y}{1 - 2y} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

para $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Além disso, uma aproximação numérica com 4 casas decimais dos zeros y_i , $i = 1, 2, 3$, é dada por $y_1 = 0.3116$, $y_2 = 0.4389$ e $y_3 = 0.4924$.

Demonstração. Considere a função f_1 dada em (3.25), que compõe a função deslocamento (3.22). Temos que cada um de seus zeros está associado a um único ciclo limite. Assim, substituindo em f_1 os valores dados na hipótese, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(y) = \frac{16}{5y} \left(-5312y + 195(\pi + 16\pi y^2) + 130(1 + 16y^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - 16y}{8y} \right) \right. \\ \left. + 183(1 - 4y^2) \ln \left(\frac{1 + 2y}{1 - 2y} \right) \right). \end{aligned}$$

Agora, notemos que o intervalo de definição de f_1 é $(0, 1/2)$, a qual é também contínua neste intervalo. Podemos ver, ainda, que

$$\begin{aligned} f_1(0.1) &= 11928.8234 > 0, \\ f_1(0.4) &= -72.6529 < 0, \\ f_1(0.45) &= 18.8402 > 0, \\ f_1(0.499) &= -53.0769 < 0. \end{aligned}$$

Logo, pelas trocas de sinais e pela continuidade da função f_1 , temos, pelo menos, três zeros distintos $y_i \in (0, 1/2)$, $i = 1, 2, 3$, tal que $y_1 \in (0.1, 0.4)$, $y_2 \in (0.4, 0.45)$ e $y_3 \in (0.45, 0.499)$. Uma vez que, pela prova do Teorema 3.29, os zeros da função deslocamento f são determinados pela função f_1 para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, então também segue que $f(0.1, \varepsilon) > 0$, $f(0.4, \varepsilon) < 0$, $f(0.45, \varepsilon) > 0$ e $f(0.499, \varepsilon) < 0$, o que indica que f apresenta, ao menos, três zeros distintos.

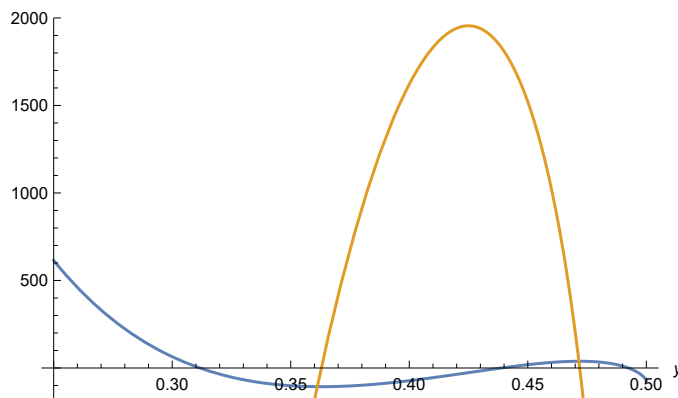


Figura 3.11: Gráfico de f_1 em azul e f_1' em amarelo

Para concluir que tais zeros correspondem a ciclos limites, vamos verificar, numericamente, que todos são zeros simples. A figura 3.11 exibe os gráficos de $f_1(y)$, em azul, e $f'_1(y)$ em amarelo. Note que as funções não possuem zeros em comum, caracterizando os zeros de f_1 , consequentemente de f , como sendo zeros simples. Portanto, temos a ocorrência de 3 ciclos limites. $\square$

4 Aplicação da Teoria de Chebyshev com Acurácia

Neste capítulo, faremos uso da teoria de Chebyshev com acurácia, desenvolvida na Seção 2.4, para melhorar o resultado obtido no Teorema 3.29. Neste teorema, o sistema (3.21) tem, exatamente, 2 ciclos limites para pontos próximos de $y = 0$. Aqui, mostraremos que este número máximo de ciclos limites é, exatamente, 2 ou 3, porém considerando todo o intervalo de definição das funções.

Seja $G_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ o conjunto de funções obtidas no Teorema 3.29, dadas por

$$\begin{aligned} g_1(y) &= 1, \\ g_2(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2}{y} \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right), \\ g_3(y) &= \frac{d^2 + y^2}{y} \left(3\pi + 2 \arctg \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

com $a, c, d, \sqrt{\bar{a}^2 + ab} > 0$. Seguindo a notação da seção anterior, indicaremos por $N(G_1)$ o número máximo de zeros de um elemento do espaço gerado por G_1 . O nosso objetivo é mostrar que $N(G_1) = 2$ ou 3 , dependendo dos valores dos parâmetros. Para simplificar a notação, vamos considerar as seguintes funções definidas no intervalo $(0, \alpha)$,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1^\alpha(t) &= \frac{\alpha^2 - t^2}{t} \ln \left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t} \right), \\ u_2(t) &= \frac{t^2 + 1}{t} \left(3\pi - 2 \arctg \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note que $\alpha = \frac{c\sqrt{\bar{a}^2 + ab}}{ad} > 0$ e como os conjuntos G_1 e $\mathcal{F}(\alpha) = \{u_0, u_1^\alpha, u_2\}$ estão relacionados pelas igualdades $u_0(t) = g_1(y)$, $u_1^\alpha(t) = \frac{1}{a^2d} g_2(dt)$ e $u_2(t) = \frac{1}{d} g_3(dt)$, temos $N(G_1) = N(\mathcal{F}(\alpha))$. Primeiramente, veremos que $N(\mathcal{F}(\alpha)) \leq 3$. Para realizar isto, vamos estender o espaço gerado por $\mathcal{F}(\alpha)$ no espaço gerado por $\mathcal{F}^*(\alpha) = \{u_0, u_2^*, u_3, u_1^\alpha\}$, cujas

funções são dadas por

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1^\alpha(t) &= \frac{\alpha^2 - t^2}{t} \ln \left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t} \right), \\ u_2^*(t) &= \frac{t^2 + 1}{t} \operatorname{arctg} \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right), \\ u_3(t) &= \frac{t^2 + 1}{t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

e mostrar que tal conjunto de funções forma um sistema ECT. Note que o espaço gerado por $\mathcal{F}(\alpha)$ está contido no espaço gerado por $\mathcal{F}^*(\alpha)$.

Proposição 4.1. *O conjunto ordenado $\mathcal{F}^*(\alpha) = \{u_0, u_2^*, u_3, u_1^\alpha\}$ é um sistema ECT no intervalo $(0, \alpha)$. Portanto, $N(\mathcal{F}^*(\alpha)) = 3$.*

Demonstração. Calculando os Wronskianos, obtemos

$$\begin{aligned} W_0(t) &= 1, \\ W_1(t) &= W(u_0, u_2^*)(t) = -\frac{2}{t} \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2t} \operatorname{arctg} \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) \right), \\ W_2(t) &= W(u_0, u_2^*, u_3)(t) = -\frac{8}{t^2 + t^4}, \\ W_3(t) &= W(u_0, u_2^*, u_3, u_1^\alpha)(t) = -\frac{16(1 + \alpha^2) \left(-2t\alpha(t^2 + \alpha^2) + (t^2 - \alpha^2)^2 \ln \left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t} \right) \right)}{t^4(1 + t^2)^2(t^2 - \alpha^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observe que $W_0 > 0, W_1 \neq 0$ (pois, $\theta \operatorname{arctg}(\theta) > 0$, para $\theta \neq 0$) e $W_2 < 0$, no intervalo $(0, \alpha)$. Para W_3 , vamos escrevê-lo como um produto de duas expressões $P(t)$ e $Q(t)$, a saber

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{16(1 + \alpha^2)}{t^4(1 + t^2)^2}, \\ Q(t) &= \frac{2\alpha t(t^2 + \alpha^2)}{(t^2 - \alpha^2)^2} - \ln \left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t} \right). \end{aligned}$$

Temos que $P(t) > 0$, para todo $t \in (0, \alpha)$. Ainda, sendo

$$Q'(t) = -\frac{16\alpha^3 t^2}{(t^2 - \alpha^2)^3},$$

temos $Q'(t) > 0$, para todo $t \in (0, \alpha)$. Como $Q(0) = 0$, segue que $Q(t) > 0$ no intervalo $(0, \alpha)$ e, assim, $W_3(t) = P(t) \cdot Q(t) > 0$, para todo $t \in (0, \alpha)$. Logo, $\mathcal{F}^*(\alpha)$ é um sistema ECT e, desta forma, $N(\mathcal{F}^*(\alpha)) = 3$. $\square$

Da proposição acima, concluímos que $N(G_1) = N(\mathcal{F}(\alpha)) \leq 3$.

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{F}(\alpha) = \{u_0, u_1^\alpha, u_2\}$ o conjunto ordenado dado pelas funções (4.2). Então,*

$$N(\mathcal{F}(\alpha)) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 < \alpha \leq \alpha^*, \\ 3, & \text{se } \alpha > \alpha^*, \end{cases}$$

em que α^* é a solução positiva de $4\alpha - 3\pi(-1 + \alpha^2) + 2(-1 + \alpha^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{-1 + \alpha^2}{2\alpha} \right) = 0$.

Demonstração. Os Wronskianos das funções do conjunto $\mathcal{F}(\alpha)$ são dados por

$$\begin{aligned} W_0(t) &= W(u_0)(t) = 1, \\ W_1(t) &= W(u_0, u_1^\alpha)(t) = \frac{2\alpha t - (t^2 + \alpha^2) \ln\left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha}\right)}{t^2} = \frac{t^2 + \alpha^2}{t^2} P(t), \\ W_2(t) &= W(u_0, u_1^\alpha, u_2)(t) = \frac{Q(t)}{t^3}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{2\alpha t}{t^2 + \alpha^2} - \ln\left(\frac{t + \alpha}{-t + \alpha}\right), \\ Q(t) &= \frac{1}{(1 + t^2)(t^2 - \alpha^2)} \left(4\alpha t(-3\pi(1 + t^2)(-1 + \alpha^2) + 4t(1 + \alpha^2)) \right. \\ &\quad + 8t(1 + t^2)\alpha(-1 + \alpha^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) - 2(t^2 - \alpha^2) \left(-4t(-1 + \alpha^2) \right. \\ &\quad \left. \left. + 3\pi(1 + t^2)(1 + \alpha^2) - 2(1 + t^2)(1 + \alpha^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) \right) \ln\left(\frac{t + \alpha}{-t + \alpha}\right) \right). \end{aligned}$$

Note que $P(0) = 0$ e $P'(t) = \frac{8\alpha^3 t^2}{(t^2 - \alpha^2)(t^2 + \alpha^2)^2} < 0$, em todo o intervalo $(0, \alpha)$. Assim, $P(t)$ não se anula em $(0, \alpha)$. Portanto, $W_0(t)$ e $W_1(t)$ são diferentes de zero no intervalo $(0, \alpha)$. Agora, analisaremos o Wronskiano $W_2(t)$, isto é, analisaremos a função $Q(t)$ no intervalo $(0, \alpha)$. Para isto, vamos nos concentrar no comportamento de $Q(t)$ próximo aos pontos de fronteira de $(0, \alpha)$ e nas propriedades de monotonicidade no intervalo todo. Desejamos expandir a função $Q(t)$, em série de potências, próxima de 0 e de α . Contudo a função $Q(t)$ não está definida em ambos os pontos. Daí, é necessário contornar tal problema. Em $t = 0$, a estratégia para calcular a expansão de $Q(t)$ é expandi-la em um ponto $\varepsilon > 0$ e depois tomar o limite para $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Desta forma, a função $\operatorname{arctg}\left(\frac{-1+t^2}{2t}\right)$, que gera o problema da não definição de Q em 0, é substituída por $\operatorname{arctg}\left(\frac{-1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)$, com $\varepsilon > 0$, cujo limite para $\varepsilon \rightarrow 0$ é igual à $-\frac{\pi}{2}$. Feito isso, obtemos a expansão de $Q(t)$ em torno de $t = 0$, dada por

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{32\pi}{\alpha}t + \frac{32\pi(\alpha^2 - 2)}{3\alpha^3}t^3 + \frac{32\pi(2\alpha^2 - 3)}{5\alpha^5}t^5 \\ &\quad - \frac{512(1 + \alpha^2)}{45\alpha^3}t^6 + O(t^7). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em $t = \alpha$, o problema está na parcela $\frac{1}{t^2 - \alpha^2} \ln\left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha}\right)$, a qual não está definida neste ponto. Desta forma, o que fazemos é, primeiramente, usar a propriedade de $\ln$ do quociente, isto é, $\ln\left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha}\right) = \ln(t + \alpha) - \ln(-t + \alpha)$ e aplicar a distributiva com relação à essa

diferença. Assim, agrupando os termos que são multiplicados por $\ln(-t + \alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} Q(t) = & \frac{2}{1+t^2} \left(-4t(-1+\alpha^2) + 3\pi(1+t^2)(1+\alpha^2) \right. \\ & \left. - 2(1+t^2)(1+\alpha^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{-1+t^2}{2t} \right) \right) \ln(-t+\alpha) \\ & + \frac{1}{(1+t^2)(t^2-\alpha^2)} \left(4\alpha t(-3\pi(1+t^2)(-1+\alpha^2) + 4t(1+\alpha^2)) \right. \\ & + 8\alpha t(1+t^2)(-1+\alpha^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{-1+t^2}{2t} \right) - 2(t^2-\alpha^2) \left(-4t(-1+\alpha^2) \right. \\ & \left. \left. + 3\pi(1+t^2)(1+\alpha^2) - 2(1+t^2)(1+\alpha^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{-1+t^2}{2t} \right) \right) \ln(t+\alpha) \right). \end{aligned}$$

Agora, a ideia é expandir a função Q em partes. Primeiro, expandimos em $t = \alpha$, até ordem 1, a expressão que multiplica $\ln(-t + \alpha)$, tomando o termo constante e multiplicamos por $\ln(-t + \alpha)$. Depois, visto que a segunda parcela da expressão de Q , acima, ainda não está definida em $t = \alpha$, multiplicamos tal expressão por $(t - \alpha)$ e a expandimos. Logo após, dividimos o resultado por $(t - \alpha)$. Por fim, somamos as duas expressões resultantes e obtemos, de fato, a expansão da função Q em torno de α , dada por

$$Q(t) = \frac{\alpha(-1+\alpha^2)}{\alpha-t} L_1(\alpha) + (\alpha^2+1) \ln(-t+\alpha) L_2(\alpha) + O(1), \quad (4.6)$$

em que

$$L_1(\alpha) = 6\pi - \frac{8\alpha}{-1+\alpha^2} - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{-1+\alpha^2}{2\alpha} \right) \quad (4.7)$$

e

$$L_2(\alpha) = 6\pi - \frac{8\alpha(-1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2} - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{-1+\alpha^2}{2\alpha} \right). \quad (4.8)$$

Vamos denotar, por simplicidade, $A(t) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{-1+t^2}{2t} \right)$ e $L(t) = \ln \left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha} \right)$. Temos, assim, que a derivada de $Q(t)$ é dada por $Q_1(t) = Q'(t) = q_0(t) + q_1(t)A(t) + q_2(t)L(t)$, em que q_0, q_1 e q_2 são funções racionais, com

$$\begin{aligned} q_0(t) &= \frac{8\alpha \left(-4t^5 + (3\pi(-1+t^2)(1+t^2)^2 - 4(t+t^5))\alpha^2 - 4t\alpha^4 \right)}{(1+t^2)^2(t^2-\alpha^2)^2}, \\ q_1(t) &= \frac{16\alpha^3(-1+t^2)}{(t^2-\alpha^2)^2}, \\ q_2(t) &= \frac{16(t^2+\alpha^2)}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Dividindo $Q_1(t)$ por $q_2(t)$ e derivando, obtemos $Q_2(t) = (Q_1(t)/q_2(t))' = \tilde{q}_0(t) + \tilde{q}_1(t)A(t)$, com $\tilde{q}_0$ e $\tilde{q}_1$ funções racionais, sendo

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0(t) &= - \frac{\alpha^3 t(1+\alpha^2) \left(3\pi(1+t^2)(t^4-\alpha^2+3t^2(-1+\alpha^2)) - 4t(t^4+\alpha^2+3t^2(1+\alpha^2)) \right)}{(t^2-\alpha^2)^3(t^2+\alpha^2)^2}, \\ \tilde{q}_1(t) &= \frac{2\alpha^3 t(1+t^2)(1+\alpha^2)(t^4-\alpha^2+3t^2(-1+\alpha^2))}{(t^2-\alpha^2)^3(t^2+\alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Derivando $Q_2(t)/\tilde{q}_1(t)$, obtemos

$$Q_3(t) = (Q_2(t)/\tilde{q}_1(t))' = -\frac{32(t^2 + \alpha^2)(t^4 + \alpha^2)}{(1 + t^2)^2(t^4 - \alpha^2 + 3t^2(-1 + \alpha^2))^2}. \quad (4.9)$$

Note que a função $t \mapsto (t^4 - \alpha^2 + 3t^2(-1 + \alpha^2))$ é negativa para $\alpha \leq 1$ e, para $\alpha > 1$, possui um único zero t^* em $(1, \alpha)$. De fato, como os zeros da função são

$$t = \pm \frac{\sqrt{3 - 3\alpha^2 \pm \sqrt{9 - 14\alpha^2 + 9\alpha^4}}}{\sqrt{2}},$$

temos que $t^* = \frac{\sqrt{3 - 3\alpha^2 + \sqrt{9 - 14\alpha^2 + 9\alpha^4}}}{\sqrt{2}}$. Desta maneira, para $\alpha > 1$, em t^* , a função $Q_3(t)$ tem uma assíntota e $\tilde{q}_1$ tem um zero. Sendo $\alpha \leq 1$, temos que as funções Q_3 , q_2 e $\tilde{q}_1$ no intervalo $(0, \alpha)$ são, respectivamente, negativa, positiva e positiva. Ainda, os limites de Q_1/q_2 e $Q_2/\tilde{q}_1$, quando $t \rightarrow 0^+$ são, respectivamente, $-\frac{2\pi}{\alpha^3}$ e -2π . Pelo procedimento de divisão e derivação, feito acima, vamos verificar que a função Q é decrescente e negativa. Com efeito, como Q_3 é negativa e é a derivada da função $Q_2/\tilde{q}_1$, segue que $Q_2/\tilde{q}_1$ é uma função decrescente, a qual possui limite negativo, para $t \rightarrow 0^+$. Assim, $Q_2/\tilde{q}_1$ é uma função negativa e como $\tilde{q}_1$ é positiva, segue que Q_2 é uma função negativa. Da mesma forma, como Q_2 é a derivada da função Q_1/q_2 , temos que Q_1/q_2 é uma função decrescente, cujo limite, para $t \rightarrow 0^+$, é negativo. Desta maneira, segue que Q_1/q_2 é uma função negativa. Uma vez que q_2 é positiva, então Q_1 deve ser uma função negativa. Por fim, como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q(t) = 0$ e a derivada de Q , Q_1 , é negativa, concluímos que Q é uma função decrescente e negativa.

Agora, considerando $\alpha > 1$, temos $Q_3 < 0$ com uma assíntota em t^* , $q_2 > 0$, $\tilde{q}_1 > 0$ em $(0, t^*)$ e $\tilde{q}_1 < 0$ em (t^*, α) . Temos, também, que os limites de Q_1 , Q_1/q_2 e $Q_2/\tilde{q}_1$, para $t \rightarrow 0^+$, são $-\frac{32}{\alpha}$, $-\frac{2\pi}{\alpha^3}$ e -2π , respectivamente. Ainda, $\lim_{t \rightarrow \alpha} Q_2(t)/\tilde{q}_1(t) = -L_1(\alpha)/4$. Note que $L_1(\alpha)$ tem um único zero em α^* , além de ser negativa para $\alpha < \alpha^*$ e positiva para $\alpha > \alpha^*$. De fato, temos que a função $L_1(\alpha)$ é crescente, pois $L_1'(\alpha) = \frac{32\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2(1 + \alpha^2)} > 0$.

Daí, como $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} L_1(\alpha) = -\infty$ e $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} L_1(\alpha) = 4\pi$, temos a existência de um único zero α^* , uma vez que $L_1(\alpha)$ é contínua para $\alpha > 1$. Desta forma, repetindo o argumento do procedimento de divisão e derivação, podemos concluir que Q é uma função decrescente e negativa para $\alpha \leq \alpha^*$. De fato, seja $\alpha \leq \alpha^*$. Vamos dividir o estudo nos intervalos $(0, t^*)$ e (t^*, α) . Primeiramente, vamos considerar o intervalo $(0, t^*)$. Como $Q_3 < 0$, então $Q_2/\tilde{q}_1$ é uma função decrescente. Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_2/\tilde{q}_1 < 0$ e $\tilde{q}_1 > 0$, então $Q_2 < 0$. Isso implica que Q_1/q_2 é uma função decrescente e como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$, temos que Q_1/q_2 é uma função negativa em $(0, t^*)$ e, ainda, por $q_2 > 0$, segue que $Q_1 < 0$. Daí, Q é uma função decrescente e por $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q = 0$, temos que $Q < 0$. Portanto, Q é uma função decrescente e negativa. Agora, consideremos o intervalo (t^*, α) . Sendo $Q_3 < 0$, então $Q_2/\tilde{q}_1$ é uma função decrescente. Como $\lim_{t \rightarrow (t^*)^+} Q_2/\tilde{q}_1 = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_2/\tilde{q}_1 = -L_1(\alpha)/4 > 0$, segue que $Q_2/\tilde{q}_1 > 0$. Daí, sendo $\tilde{q}_1 < 0$, segue que $Q_2 < 0$. Assim, Q_1/q_2 é uma função decrescente e, por possuir tal propriedade em todo o intervalo $(0, \alpha)$, junto ao fato de que $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$ e $q_2 > 0$, então $Q_1 < 0$. Daqui, podemos concluir como no caso anterior, considerando que Q é decrescente em todo intervalo $(0, \alpha)$, que Q é uma função decrescente e negativa.

Agora, seja $\alpha > \alpha^*$. Vamos provar que a função Q , além de possuir um único zero simples, é unimodal (isto é, há apenas um ponto de máximo/mínimo local) e decrescente próximo à origem. Com efeito, temos que $L_1(\alpha) > 0$ para $\alpha > \alpha^*$. Note, primeiramente, que no intervalo $(0, t^*)$, o processo segue análogo ao já apresentado. Isto é, em $(0, t^*)$ temos que Q_1/q_2 é uma função decrescente e negativa e, como $q_2 > 0$, segue que $Q_1 < 0$ e, portanto, Q é uma função decrescente e negativa. Agora, em (t^*, α) , como $Q_3 < 0$, temos que $Q_2/\tilde{q}_1$ é uma função decrescente. Ainda, como $\alpha^* > 1$, temos que $\lim_{t \rightarrow (t^*)^+} Q_2/\tilde{q}_1 = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_2/\tilde{q}_1 = -L_1(\alpha)/4 < 0$. Desta forma, como $Q_2/\tilde{q}_1$ é contínua em (t^*, α) , existe um único $z \in (t^*, \alpha)$ tal que $Q_2/\tilde{q}_1(z) = 0$ com $Q_2/\tilde{q}_1 > 0$ em (t^*, z) e $Q_2/\tilde{q}_1 < 0$ em (z, α) . Consequentemente, como $\tilde{q}_1 < 0$, temos $Q_2 < 0$ em (t^*, z) e $Q_2 > 0$ em (z, α) . Assim, segue que $Q_2(z) = 0$ e como Q_2 é a derivada de Q_1/q_2 , então z é ponto crítico da função Q_1/q_2 . Logo, em (t^*, z) , a função Q_1/q_2 é decrescente e em (z, α) , crescente. Temos, portanto, que z é ponto de mínimo de Q_1/q_2 . Uma vez que a função Q_1/q_2 é contínua em t^* e, também, decrescente em $(0, t^*)$, podemos concluir que Q_1/q_2 é, na verdade, decrescente no intervalo $(0, z)$. Ainda, Q_1/q_2 é negativa em $(0, z)$, pois $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$. Temos, também, que $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_1/q_2$ possui o mesmo sinal que $L_1(\alpha)$, logo o limite é positivo. Desta maneira, existe $w \in (z, \alpha)$ tal que $Q_1/q_2(w) = 0$, com Q_1/q_2 negativa em (z, w) e positiva em (w, α) . Além disso, tal zero é único pelas propriedades de monotonicidade obtidas sobre Q_1/q_2 . Uma vez que $q_2 > 0$ sempre, então $Q_1(w) = 0$. A função Q tem um ponto de mínimo em w , pois $Q_1 < 0$ em $(0, w)$ e $Q_1 > 0$ em (w, α) .

Agora, considerando a expansão de $Q(t)$ numa vizinhança de $t = 0$, dada por (4.5), podemos ver que Q é negativa, pois o coeficiente que acompanha o termo de ordem 1, o qual domina a expressão para valores pequenos, é negativo. Além disso, pela expressão (4.6) de Q em uma vizinhança de $t = \alpha$, obtemos que $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} (\alpha - t)Q(t) = \alpha(-1 + \alpha^2)L_1(\alpha)$. Daí, como $L_1(\alpha) > 0$ quando $\alpha > \alpha^*$, então segue que $Q(t)$ é positiva para pontos próximos de α . Logo, deve existir $\tau \in (0, \alpha)$ tal que $Q(\tau) = 0$. Ainda, tal zero é único, pelo sinal de Q_1 , e simples por não ser um zero de Q_1 , o qual possui um único zero w , que configura o ponto de mínimo de Q .

Portanto, mostramos que $Q(t)$ é uma função decrescente e negativa para $\alpha < \alpha^*$ e unimodal com um zero simples para $\alpha \geq \alpha^*$. Desta forma, pelo Teorema 2.26 e Proposição 4.1, concluímos que $N(\mathcal{F}(\alpha)) = 3$, se $\alpha > \alpha^*$. Ainda, pelos Teoremas 2.15 e 2.21, obtemos $N(\mathcal{F}(\alpha)) = 2$, se $0 < \alpha \leq \alpha^*$. $\square$

5 Conclusão

Neste trabalho, reunimos os principais resultados sobre a teoria de Chebyshev clássica e atual, com acurácia, dando destaque às definições e demonstrações. Além disso, apresentamos uma aplicação direta desta teoria em um sistema linear por partes separados por uma reta, exibindo, ainda, as técnicas e ferramentas utilizadas, como as semi-aplicações de Poincaré.

No capítulo 2, sobre a teoria de sistemas Chebyshev, ressaltamos uma melhora no Teorema 2.21, comparado ao artigo [17], uma vez que a cota aqui obtida é uma cota superior menor que a cota original do artigo.

Já no capítulo 3, destacamos que a classe de sistemas lineares por partes consideradas nesta dissertação é mais abrangente que a classe de sistemas lineares usada no artigo [13]. Isto deve-se ao fato de que não encontramos justificativa para o parâmetro $\bar{a}$ ser nulo, como exibido no artigo, mesmo realizando simulações computacionais. Aqui, consideramos que $\bar{a}$ pode ser diferente de zero durante todo o texto, o que permite que a classe de sistemas seja maior. Embora a classe considerada seja maior, obtivemos os mesmos resultados sobre o número máximo de ciclos limites que bifurcam do anel de órbitas periódicas sob uma perturbação linear, usando tanto a teoria clássica de Chebyshev quanto a atual, de Chebyshev com acurácia.

Referências

- [1] T. Carvalho, R. Cristiano, D. S. Rodrigues, and D. J. Tonon. Global analysis of the dynamics of a piecewise linear vector field model for prostate cancer treatment. *J. Dyn. Control Syst.*, 28(2):375–398, 2022.
- [2] R. Cristiano, D. J. Pagano, L. Benadero, and E. Ponce. Bifurcation analysis of a dc–dc bidirectional power converter operating with constant power loads. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(04):1630010, 2016.
- [3] L. G. De Pillis and A. Radunskaya. The dynamics of an optimally controlled tumor model: A case study. *Mathematical and Computer Modelling*, 37(11):1221–1244, 2003.
- [4] N. Dencker. Preparation theorems for systems. In *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint Jean de Monts, 1990)*, pages Exp. No. IX, 10. École Polytech., Palaiseau, 1990.
- [5] M. Di Bernardo, A. Champneys, C. Budd, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer London, 2008.
- [6] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, volume 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian.
- [7] L. F. Gonçalves. *Campos de vetores suaves por partes: Aspectos teóricos e aplicações*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2020.
- [8] M. Grau, F. Mañosas, and J. Villadelprat. A Chebyshev criterion for abelian integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(1):109–129, 2011.
- [9] M. Guardia, T. M. Seara, and M. A. Teixeira. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations*, 250(4):1967–2023, 2011.
- [10] S. Karlin and W. J. Studden. *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XV. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.
- [11] R. I. Leine and H. Nijmeijer. *Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems*, volume 18 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

-
- [12] E. L. Lima. *Curso de análise. Vol. 2. Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.
 - [13] J. Llibre, D. D. Novaes, and M. A. Teixeira. Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 25(11):1550144, 11, 2015.
 - [14] J. Llibre and G. Świrszcz. On the limit cycles of polynomial vector fields. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 18(2):203–214, 2011.
 - [15] F. Mañosas and J. Villadelprat. Bounding the number of zeros of certain Abelian integrals. *J. Differential Equations*, 251(6):1656–1669, 2011.
 - [16] D. Nadler and S. Yakovenko. Oscillation and boundary curvature of holomorphic curves in $\mathbf{C}^n$. *Math. Res. Lett.*, 5(1-2):137–148, 1998.
 - [17] D. D. Novaes and J. Torregrosa. On extended Chebyshev systems with positive accuracy. *J. Math. Anal. Appl.*, 448(1):171–186, 2017.
 - [18] D. Novikov and S. Yakovenko. Integral curvatures, oscillation and rotation of spatial curves around affine subspaces. *J. Dynam. Control Systems*, 2(2):157–191, 1996.
 - [19] G. Nürnberger. *Approximation by spline functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
 - [20] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2001.
 - [21] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i). *J. Math. Pures Appl.*, 7:375–422, 1881.
 - [22] G. Pólya. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 24(4):312–324, 1922.
 - [23] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
 - [24] Y. Takeuchi. *Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.
 - [25] A. F. Timan. *Theory of approximation of functions of a real variable*. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1963. Translated from the Russian by J. Berry, English translation edited and editorial preface by J. Cossar.

A Aplicações e Semi-Aplicações de Poincaré

Neste apêndice, mostramos uma definição mais formal sobre as aplicações e semi-aplicações de Poincaré e como obtê-las a partir de expansões do sistema perturbado. Primeiro, definimos a clássica aplicação de Poincaré, ou aplicação de primeiro retorno, para sistemas suaves. E, logo após, exibimos sua extensão para sistemas por partes. Mais detalhes podem ser encontrados em [7, 20, 23].

A.1 Aplicação de Poincaré para sistemas suaves

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{A.1}$$

definido num aberto $I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Seja $\varphi(t, p)$, o fluxo do sistema acima que passa por um ponto $p \in U$. Vamos supor que em $p_0 \in U$, o sistema possui uma órbita periódica γ . Agora, supomos que $\Sigma \subset U$ é uma subvariedade de dimensão 1 que contém o ponto p_0 , a qual é transversal ao fluxo $\varphi(t, p_0)$. Neste caso, Σ é denominada *seção de Poincaré* ou *seção transversal*. Pela continuidade do fluxo, para todo ponto $p \in \Sigma$, próximo de p_0 , a órbita $\varphi(t, p)$ permanece próxima à γ . Desta forma, como γ é uma órbita periódica, a trajetória $\varphi(t, p)$ deve, também, retornar em um ponto $\pi(p) = \varphi(t(p), p)$ em Σ , após um tempo $t(p) > 0$. Desta forma, a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto \varphi(t(p), p) \end{aligned} \tag{A.2}$$

é chamada de *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de primeiro retorno*.

Caso a interseção de Σ com a órbita periódica γ , que passa por $p_0 \in \Sigma$, seja dada em dois pontos, isto é, no próprio ponto p_0 e em um outro ponto $q_0 \in \Sigma$, podemos definir a chamada *aplicação de meio retorno de Poincaré* ou *semi-aplicação de Poincaré*. Para isto, basta repetir o argumento usado no caso anterior, porém usando o tempo $t(p)$ que a órbita $\varphi(t, p)$ leva para atingir Σ próximo ao ponto q_0 . Veja as figuras A.1 e A.2 para ilustração.

Ao estudar órbitas periódicas, o uso de aplicações de retorno é comum e se mostra uma ferramenta útil. A fim de buscar órbitas periódicas e ciclos limites de um determinado sistema de equações diferenciais, restringimos-nos a buscar pontos fixos da aplicação de retorno, isto é, pontos $p \in \Sigma$ tal que $\pi(p) = p$. Muitas vezes, é mais prático analisar os zeros da chamada *função deslocamento* dada por

$$\delta(p) = \pi(p) - p. \tag{A.3}$$

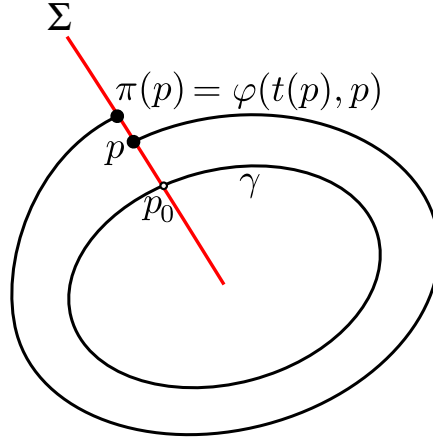


Figura A.1: Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré

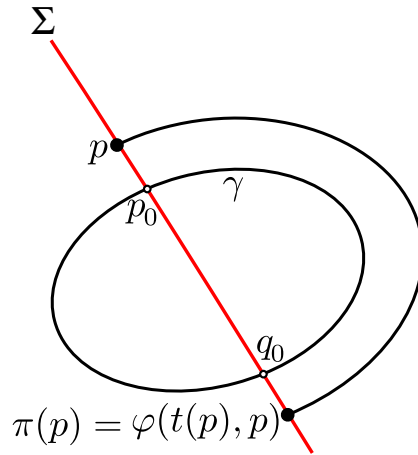


Figura A.2: Semi-aplicação de Poincaré

A.2 Semi-Aplicação de Poincaré para sistemas suas por partes

Aqui, seguimos a mesma ideia do caso contínuo, considerando a variedade de descontinuidade Σ como sendo a seção de Poincaré.

Vamos considerar um campo por partes $Z = (X^+, X^-)$, separados pela variedade Σ . Seja $p \in \Sigma$. Chamamos de *tempo de retorno* ou *tempo de voo* da órbita de X^+ (X^- , respectivamente), o tempo positivo $t^+(p)$ (negativo $t^-(p)$, respectivamente) que a órbita de X^+ (X^- , respec.), passando por $p \in \Sigma$, leva para retornar para Σ pela primeira vez (como no caso da aplicação de meio retorno para sistemas contínuos). Desta maneira, definimos as *semi-aplicações de Poincaré* ou *aplicações de meio retorno* associadas aos campos X^+ e X^- , respectivamente, por $\pi^+(p) = \varphi^+(t^+(p), p)$ e $\pi^-(p) = \varphi^-(t^-(p), p)$.

Aqui, também com a finalidade de estudar ciclos limites de um determinado sistema de equações diferenciais por partes, podemos nos restringir à busca de zeros da função deslocamento dada por

$$f(p) = \pi^+(p) - \pi^-(p) = \varphi^+(t^+(p), p) - \varphi^-(t^-(p), p). \quad (\text{A.4})$$

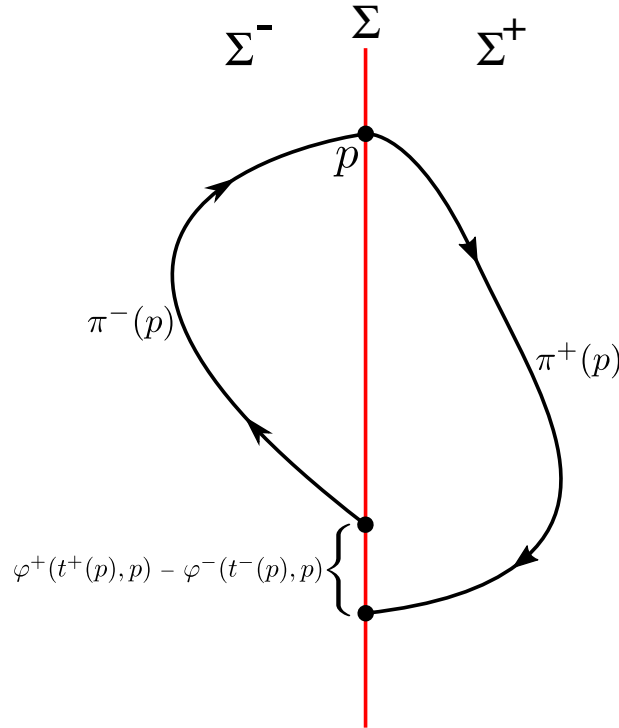


Figura A.3: Construção da função deslocamento para sistemas suaves por partes

A.3 Expansão da semi-aplicação de Poincaré para sistemas lineares com divergente nulo

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x), \quad (\text{A.5})$$

em que X_0 e X_1 são campos vetoriais lineares no plano e com $\text{div}(X_0) = 0$. Observe que o sistema (A.5) é uma perturbação do sistema $(\text{A.5})|_{\varepsilon=0}$, o qual será chamado de sistema não perturbado. Aqui, mostraremos como obter a expansão da semi-aplicação de Poincaré, associada ao sistema (A.5), até ordem 2 em ε . Para tal, é necessário a obtenção das expansões de ordem 1 e 2 em ε das soluções do campo perturbado e dos tempos de voo dessas soluções para pontos na variedade $\Sigma = \{x = 0\}$, cujos cálculos elucidamos a seguir.

Denotemos por $\varphi_0(t)$ a solução do campo não perturbado. Assim, a expansão de Taylor da solução do sistema (A.5) é dada por $\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3)$. Nas seções a seguir, obtemos expressões explícitas para $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$.

A.3.1 Expansão de ordem 1 da semi-aplicação de Poincaré

Seja $\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2)$ a solução do sistema (A.5), com condição inicial $\varphi(0, \varepsilon) = (0, y_0)$, $y_0 > 0$, em que $\varphi_0(t)$ é a solução do campo não perturbado e $\varphi_1(t)$ será determinada.

Sendo $\varphi(t, \varepsilon)$ solução de (A.5), então

$$\varphi'(t, \varepsilon) = X_0(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon X_1(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2)).$$

Como $\varphi'(t, \varepsilon) = \varphi'_0(t) + \varepsilon\varphi'_1(t) + O(\varepsilon^2)$, segue que

$$\varphi'_0(t) + \varepsilon\varphi'_1(t) + O(\varepsilon^2) = X_0(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon X_1(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2)).$$

Daí, pela linearidade dos campos X_0 e X_1 , temos que

$$\varphi'_0(t) + \varepsilon\varphi'_1(t) + O(\varepsilon^2) = X_0(\varphi_0(t)) + \varepsilon(X_0(\varphi_1(t)) + X_1(\varphi_0(t))) + O(\varepsilon^2),$$

de modo que ao igualar os coeficientes em ε , obtemos os seguintes PVI's

$$\begin{aligned}\varphi'_0(t) &= X_0(\varphi_0(t)), \quad \varphi_0(0) = (0, y_0), \\ \varphi'_1(t) &= X_0(\varphi_1(t)) + X_1(\varphi_0(t)), \quad \varphi_1(0) = (0, 0).\end{aligned}$$

Uma vez que a primeira equação diferencial acima representa o campo de vetores linear não perturbado de (A.5), temos que $\varphi_0(t)$ é, de fato, a sua solução. Assim, para determinar $\varphi_1(t)$, consideramos a segunda equação diferencial acima, substituindo $\varphi_0(t)$, obtida anteriormente, e a resolvemos com a condição inicial $\varphi_1(0) = (0, 0)$. Desta forma, obtemos a expansão de ordem 1 em ε da solução $\varphi(t, \varepsilon)$ do campo perturbado (A.5), dada por

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.6})$$

Agora, vamos nos concentrar em como obter a expansão do tempo de retorno, ou tempo de voo, t_p , da solução do campo perturbado do ponto $(0, y_0)$ ao ponto $(0, \varphi(t_p, y_0))$, ambos em Σ , tal que $\varphi(t_p, y_0)$ é a semi-aplicação de Poincaré associada ao campo $X_0 + \varepsilon X_1$. Vamos denotar tal expansão por $t_p = t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + O(\varepsilon^2)$.

Primeiramente, como $\text{div}(X_0) = 0$, podemos calcular o tempo de retorno da solução do campo não perturbado. Para isto, tomamos a sua solução $\varphi_0(t) = (\varphi_{01}(t), \varphi_{02}(t))$ e resolvemos a equação $\varphi_{01}(t) = 0$, em $t \in \mathbb{R}$. Vamos denotar por t_{p_0} esta solução.

Vamos considerar, agora, a expansão de ordem 1 em ε da solução do campo perturbado, apresentada anteriormente em (A.6), dada por

$$\varphi(t, \varepsilon) = (\varphi^1(t, \varepsilon), \varphi^2(t, \varepsilon)).$$

Para obter t_{p_1} , expandimos até ordem 1 em ε , o lado esquerdo da equação

$$\varphi^1(t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1}, \varepsilon) = 0.$$

Daí, igualando à zero o coeficiente que acompanha ε e resolvendo em t_{p_1} , obtemos a expansão

$$t_p = t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + O(\varepsilon^2).$$

Por fim, a expansão de ordem 1 em ε da semi-aplicação de Poincaré, associada ao campo em questão, é obtida pela expansão de $\varphi^2(t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + O(\varepsilon^2), \varepsilon)$.

Vale, também, ressaltar que para campos de vetores por partes, como em (3.21), repetimos o mesmo processo em ambos os campos para, assim, obtermos as expansões das soluções dos campos à direita e à esquerda.

Este processo de obtenção da expansão de ordem 1 em ε da semi-aplicação de Poincaré foi utilizado em todos os resultados apresentados neste trabalho, exceto no Lema 3.30, em que foi necessário uma expansão de ordem 2 da solução do campo perturbado. Tal processo para obtenção da expansão de ordem 2 é análogo ao caso de ordem 1. Mostramos o processo a seguir.

A.3.2 Expansão de ordem 2 da semi-aplicação de Poincaré

Seja $\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3)$ uma solução do campo $\dot{x} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x)$, com condição inicial $\varphi(0, \varepsilon) = (0, y_0)$, $y_0 > 0$. Então,

$$\varphi(t, \varepsilon) = X_0\left(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3)\right) + \varepsilon X_1\left(\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3)\right).$$

Uma vez que $\varphi'(t, \varepsilon) = \varphi'_0(t) + \varepsilon\varphi'_1(t) + \varepsilon^2\varphi'_2(t) + O(\varepsilon^3)$ segue, pela linearidade dos campos, que

$$\begin{aligned} \varphi'_0(t) + \varepsilon\varphi'_1(t) + \varepsilon^2\varphi'_2(t) + O(\varepsilon^3) = & X_0(\varphi_0(t)) + \varepsilon\left(X_0(\varphi_1(t)) + X_1(\varphi_0(t))\right) \\ & + \varepsilon^2\left(X_0(\varphi_2(t)) + X_1(\varphi_1(t))\right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Daí, igualando os coeficientes em ε , obtemos os seguintes PVI's,

$$\begin{aligned} \varphi'_0(t) &= X_0(\varphi_0(t)), \quad \varphi_0(0) = (0, y_0), \\ \varphi'_1(t) &= X_0(\varphi_1(t)) + X_1(\varphi_0(t)), \quad \varphi_1(0) = (0, 0), \\ \varphi'_2(t) &= X_0(\varphi_2(t)) + X_1(\varphi_1(t)), \quad \varphi_2(0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Note que φ_0 e φ_1 são obtidas como na seção anterior. Para determinar $\varphi_2(t)$, basta resolver a terceira equação diferencial acima, com condição inicial $\varphi_2(0) = (0, 0)$, substituindo φ_0 e φ_1 , já obtidas. Desta forma, obtemos a expansão de ordem 2 em ε da solução do campo perturbado, dada por

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.7})$$

Denote por $t_p = t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + \varepsilon^2 t_{p_2} + O(\varepsilon^3)$ a expansão até ordem 2 do tempo de retorno. As expressões de t_{p_0} e t_{p_1} podem ser obtidas, também, como na seção anterior. Consideremos a expansão até ordem 2 em ε da solução (A.7) do campo não perturbado, dada por

$$\varphi(t, \varepsilon) = \left(\varphi^1(t, \varepsilon), \varphi^2(t, \varepsilon)\right).$$

Para obter t_{p_2} , expandimos até ordem 2 em ε o lado esquerdo da equação

$$\varphi^1(t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + \varepsilon^2 t_{p_2} + O(\varepsilon^3), \varepsilon) = 0.$$

Daí, igualando à zero o coeficiente que acompanha ε^2 e resolvendo em t_{p_2} , obtemos a expressão de t_p desejada, isto é, a expansão

$$t_p = t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + \varepsilon^2 t_{p_2} + O(\varepsilon^3).$$

Desta maneira, portanto, a expansão de ordem 2 em ε da semi-aplicação de Poincaré, associada ao campo $X_0 + \varepsilon X_1$, é dada pela expansão de ordem 2 de $\varphi^2(t_{p_0} + \varepsilon t_{p_1} + \varepsilon^2 t_{p_2} + O(\varepsilon^3), \varepsilon)$.

Como estamos lidando com campos por partes, pela forma como definimos a função deslocamento (A.4), devemos nos atentar ao sinal do tempo de retorno dos campos, pois um deles deve ser tomado positivo e o outro negativo. No nosso caso, no sistema (3.21), tomamos o tempo negativo t_{p_0} para o campo à esquerda e o tempo positivo para o campo à direita.

B Sistemas Hamiltonianos

Vamos definir sistema Hamiltoniano e a função Hamiltoniana associada, cuja a principal propriedade é a de ser constante ao longo das trajetórias do sistema diferencial. Em outras palavras, podemos afirmar que as curvas soluções do sistema de equações diferenciais estão contidas nos conjuntos de nível da função Hamiltoniana. O resultado mencionado abaixo, bem como a definição a seguir, podem ser encontrados em [20].

Definição B.1. Considere $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Um sistema da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\end{aligned}\tag{B.1}$$

é chamado de *sistema Hamiltoniano* e a função H é dita *função Hamiltoniana*.

Exemplo B.2. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + x.\end{aligned}$$

Temos que tal sistema é Hamiltoniano. De fato, tomando $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, temos $\frac{\partial H}{\partial y} = y$ e $\frac{\partial H}{\partial x} = x^3 - x$. Portanto, o sistema é Hamiltoniano com função Hamiltoniana dada por H . As curvas de nível da função H estão representadas na figura B.1

Exemplo B.3. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x).\end{aligned}$$

Este sistema descreve o movimento de um pêndulo simples. Note que tal sistema é Hamiltoniano com função Hamiltoniana dada por $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x)$. As curvas de nível da função h estão representadas na figura B.2

Proposição B.4. Considere o sistema Hamiltoniano (B.1). Então, suas soluções estão contidas nas curvas de nível da Hamiltoniana $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ associada.

Demonstração. Seja $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ a solução do sistema Hamiltoniano (B.1). Logo, temos

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_1(t)) \\ \dot{\varphi}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_2(t)).\end{aligned}$$

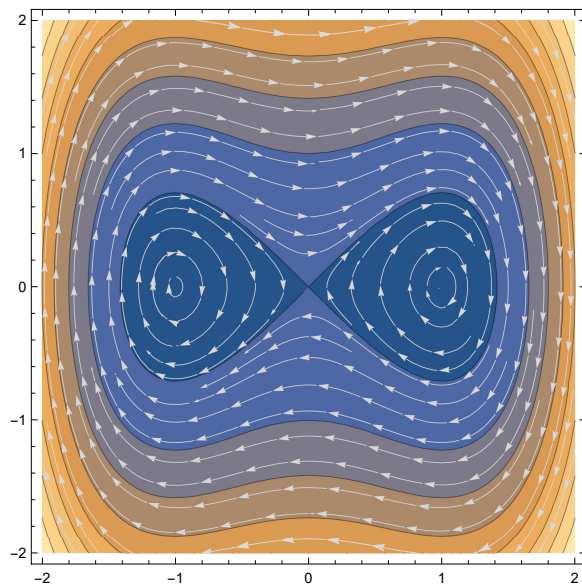


Figura B.1: Órbitas e curvas de nível da função Hamiltoniana H do exemplo B.2

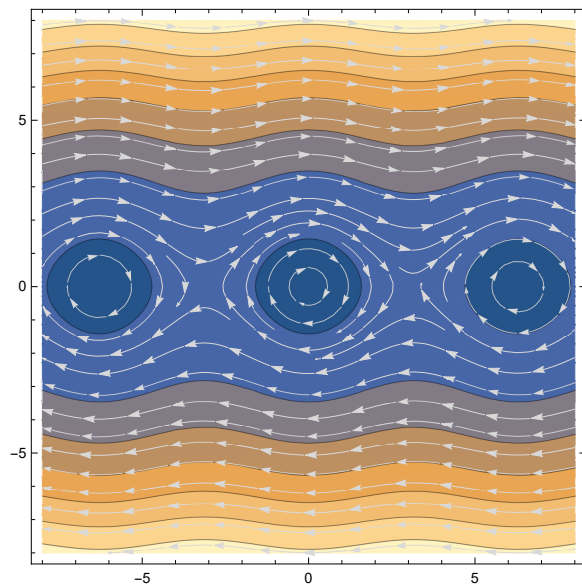


Figura B.2: Órbitas e curvas de nível da função Hamiltoniana H do exemplo B.3

Agora, basta mostrar que a variação da função H ao longo da solução φ é nula, isto é, vamos mostrar que $\frac{dH}{dt}(\varphi(t)) = 0$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(\varphi(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \dot{\varphi}_1(t) + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{\varphi}_2(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, H é constante ao longo das soluções do sistema. □