

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Rodrigo Rafael Gomes

**As concepções de função de Frege e Russell:
um estudo de caso em Filosofia e História da Matemática**

Rio Claro, SP
Junho de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Rodrigo Rafael Gomes

**As concepções de função de Frege e Russell:
um estudo de caso em Filosofia e História da Matemática**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, do *campus* de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo

Rio Claro, SP
Junho de 2015

510.1
G632 Gomes, Rodrigo Rafael
 As concepções de função de Frege e Russell : um estudo
 de caso em Filosofia e História da Matemática / Rodrigo
 Rafael Gomes. - Rio Claro, 2015
 93 f. : il.

 Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
 Instituto de Geociências e Ciências Exatas
 Orientador: Irineu Bicudo

 1. Matemática - Filosofia. 2. Logicismo. 3. Conceito. 4.
 Classe. 5. Conjunto. 6. Significado. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Rodrigo Rafael Gomes

**As concepções de função de Frege e Russell:
um estudo de caso em Filosofia e História da Matemática**

Trabalho aprovado. Rio Claro, SP, 15 de maio de 2015:

Prof. Dr. Irineu Bicudo
Orientador

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
Convidado 1

Prof. Dr. Henrique Lazari
Convidado 2

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
Convidado 3

**Profa. Dra. Renata Cristina Geromel
Meneghetti**
Convidado 4

Rio Claro, SP
2015

Para Blandina, minha querida esposa.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Professor Dr. Irineu Bicudo pela orientação, pela confiança, pela paciência que teve comigo enquanto estive envolvido neste projeto e, principalmente, pelos ensinamentos.

Agradeço aos membros da banca examinadora da defesa, professores Dr. Carlos Roberto de Moraes, Dr. Henrique Lazari, Dr. Marcos Vieira Teixeira e professora Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti, pelas observações e sugestões.

Agradeço também às secretárias e aos funcionários do Departamento de Matemática e aos servidores da seção técnica de Pós-Graduação do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP de Rio Claro, que sempre me atenderam muito bem.

Não poderia deixar de agradecer, em qualquer situação que fosse, meus familiares: Maria Helena, minha mãe, e Patrícia, minha irmã. Mesmo distantes, jamais deixaram de me apoiar.

Agradeço, finalmente, à pessoa mais importante: Blandina, minha esposa. Não há palavras que possam exprimir a minha gratidão pelo seu companheirismo e pela imensa paciência que tem tido comigo.

Resumo

O presente trabalho exhibe um estudo de caso sobre o desenvolvimento conceitual e metodológico da Matemática, por meio do exame e comparação das concepções de função de Gottlob Frege e Bertrand Russell. Em particular, são discutidos: a extensão fregiana da ideia matemática de função, a noção russelliana de função proposicional, os seus pressupostos filosóficos e as suas implicações. O presente estudo baseia-se em análises dos livros que os dois autores publicaram sobre os fundamentos da Matemática, e também de alguns outros escritos de sua autoria, entre eles, manuscritos que foram publicados postumamente. Conclui-se a partir dessas análises que a concepção compreensiva de função de Frege e a função proposicional de Russell são generalizações de uma importante aquisição do pensamento matemático, qual seja, a ideia de função, e que a conceitografia e as teorias dos tipos e das descrições, por sua vez, constituem a exploração metódica daquilo que essas generalizações acarretam. Conclui-se, finalmente, que embora existam diferenças expressivas entre as concepções de função de Frege e Russell, um padrão de rigor associado a reflexões mais amplas sobre a natureza do significado emerge em meio às investigações que empreenderam sobre a noção de função: a função fregiana e a função proposicional são as entidades que participam de suas respectivas relações de significado e cuja natureza é precisada no âmbito dessas relações.

Palavras-chaves: Frege. Russell. função. função proposicional. significado.

Abstract

This work presents a case study about the conceptual and methodological development of Mathematics by the examination and comparison of function conceptions in the thinking of Gottlob Frege and Bertrand Russell. Particularly, we discuss the fregean extension of mathematical idea of function, the russellian notion of propositional function and their philosophical assumptions and implications. The basis for this study is a analysis of the authors' books on the foundations of Mathematics and some other authors' writings, included among these some posthumous publications. From this analysis we conclude that the comprehensive function concept of Frege and the Russell's propositional function are both generalizations of an important acquisition of mathematical thought, namely the idea of function, and that the conceptography, the type theory and the theory of descriptions, in turn, constitute the methodical exploration of what these generalizations imply. Finally, we conclude that, though there are expressives differences between the function conceptions of Frege and Russell, a pattern of rigour associated with more wide reflections on the nature of meaning emerges from their investigations of the concept of function: the fregean function and the propositional function are the entities that participate of their respective meaning relations and whose nature is explained by these relations.

Key-words: Frege. Russell. function. propositional function. meaning.

Lista de abreviaturas e siglas

CG	Conceitografia
FA	Os fundamentos da Aritmética
FC	Função e conceito
LFA	Leis fundamentais da Aritmética
LT	Laws of thought
MPD	My philosophical development
PM	Principia mathematica
PoM	The principles of mathematics
SSR	Sobre o sentido e a referência

Sumário

	Introdução	11
0.1	Breve histórico do desenvolvimento da noção de função	11
0.2	Frege, Russell e o conceito de função	15
0.3	Estrutura do trabalho	16
0.4	Convenções e terminologia	17
1	FREGE E A GENERALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE FUNÇÃO	19
1.1	Função e argumento, função e conceito	19
1.2	O despertar do interesse de Frege pela noção de função	26
1.3	O papel da distinção função/argumento e da extensão da ideia de função no desenvolvimento do sistema fregiano	29
2	RUSSELL E A NOÇÃO DE FUNÇÃO PROPOSICIONAL	39
2.1	Funções proposicionais	39
2.2	O “grande livro”	47
2.3	Principia Mathematica	56
2.4	A emergência da noção de função proposicional	60
2.5	O contato com Frege	68
3	FUNÇÕES PROPOSICIONAIS E CLASSES	76
3.1	A noção de par ordenado	76
3.2	Russell e a noção de classe	79
	Considerações finais	85
	Referências	87

Introdução

Neste trabalho, examino e comparo as concepções de função de dois importantes filósofos da Matemática: Gottlob Frege e Bertrand Russell. Mais lembrados como filósofos do que como matemáticos, muito de suas reflexões sobre os fundamentos dessa ciência costuma ser negligenciado nos livros de História da Matemática. Em particular, talvez porque a emergência e o desenvolvimento da noção de função estejam vinculados ao aparecimento e progresso da Análise Matemática, são raros os trabalhos históricos sobre essa noção a mencionar os seus nomes ¹. O fato é que tanto Frege quanto Russell, cada um a seu modo, tentaram fixar o significado do termo “função” e a realização dessa tarefa foi uma necessidade imposta pelos seus projetos fundamentadores. Frege assumiu a noção de função como fundamental ao mesmo tempo que propôs a sua extensão para além do âmbito da Aritmética. Russell trilhou um caminho diferente, fornecendo uma explicação dessa noção em termos de uma outra noção em sua teoria, qual seja, a de função proposicional. Meu propósito é discutir os desdobramentos metodológicos dessas escolhas e os pressupostos filosóficos que as influenciaram.

0.1 Breve histórico do desenvolvimento da noção de função

No século XIV, com o desenvolvimento da doutrina da “intensidade das formas” e de uma importante parte desta, a cinemática, a ideia de quantidades e grandezas que variam em função de outras quantidades e grandezas começou a tornar-se familiar e os rudimentos da representação gráfica das relações entre grandezas deram seus primeiros passos ². No final do século XVI e início do XVII, os avanços no simbolismo algébrico permitiram traduzir o estudo matemático das quantidades variáveis para a linguagem analítica e isso tornou possível exprimir uma dependência entre duas quantidades variáveis por meio de uma equação ³. Considerando que o passo decisivo no estudo matemático das quantidades variáveis foi dado na segunda metade do século XVII, com a invenção do cálculo infinitesimal, não é de se admirar que o termo “função” tenha sido cunhado

¹ Entre as exceções que conheço estão dois artigos de Linsky ([54] e [55]).

² Formas ou qualidades, no jargão do período, são grandezas, tais como temperatura, densidade, distância e velocidade, e podem possuir vários graus de intensidade. As intensidades das formas são consideradas em relação às extensões dessas formas (quantidade de matéria, tempo etc.). Nicola Oresme, o principal representante da doutrina da intensidade das formas na França, representava os graus de intensidade por segmentos perpendiculares (latitudes) erigidos sobre a linha dos segmentos que representavam as extensões das formas (longitudes) ([99]).

³ Youschkevitch (*ibid.*) aponta Descartes, em *La géométrie* (1637), como o primeiro a sugerir isso.

por Leibniz, um dos inventores da nova ferramenta matemática ⁴. Inicialmente usado num sentido estritamente geométrico ⁵, o termo foi objeto de discussão entre Leibniz e Johann Bernoulli na correspondência que mantiveram no período de 1694 a 1698 e progressivamente foi sendo utilizado para representar quantidades arbitrárias determinadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes. Coube a Bernoulli fornecer uma primeira definição explícita para o termo em um artigo que publicou em 1718 pela Academia das Ciências de Paris: “Denomina-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja a partir dessa grandeza variável e de constantes.” (*apud* Youschkevitch, [99], p. 60).

Três décadas depois, foi a vez do pupilo de Bernoulli, Leonhard Euler, no seu *Introdução à análise dos infinitos* (*Introductio in analysin infinitorum*), apresentar uma definição (esta, aliás, muito parecida com a do primeiro): “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo a partir da quantidade variável e de números ou quantidades constantes” ([20], v. 1, p. 3). Contudo, não se sabe se motivado pela polêmica envolvendo o problema da “corda vibrante” ⁶, em que esteve envolvido, Euler reformulou a sua definição alguns anos mais tarde. No prefácio ao seu *Lições de cálculo diferencial* (*Institutiones calculi differentialis*), publicado em 1755, consta o seguinte:

Aquelas quantidades que dependem de outras desse modo, qual seja, aquelas que sofrem uma mudança quando outras mudam, são chamadas funções dessas quantidades. Esta definição aplica-se um tanto largamente e inclui todas as maneiras em que uma quantidade pode ser determinada por outras. Por isso, se x designa a quantidade variável, todas as outras quantidades que de qualquer modo dependem de x ou são por ele determinadas são denominadas funções. ([21], p. vi)

Apesar da reformulação trazida no segundo livro de Euler, que não mais vincula o conceito de função a uma expressão analítica ⁷, a concepção desse conceito apresentada no primeiro livro foi a que prevaleceu durante todo o XVIII ([57]). Somente no final desse século

⁴ Isso se deu em 1673, no manuscrito *O método inverso das tangentes, ou sobre funções* (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*) ([99]).

⁵ Leibniz o empregava para se referir a diferentes segmentos conectados a uma curva dada (*ibid.*).

⁶ O problema teve origem no estudo das vibrações transversais de uma corda elástica, presa por dois pontos. Considerando o eixo das abscissas como o segmento determinado pelos dois pontos que prendem a corda, que esta coincida com o eixo das abscissas quando em repouso e que $y = y(x, t)$ seja o desvio vertical de um ponto de abscissa x da corda no instante t , a função y é solução da equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. A solução geral dessa equação, da forma $y = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$, em que φ e ψ são funções arbitrárias, foi obtida por d’Alembert em 1747. Euler, que também se interessou pelo problema, observou que as funções φ e ψ não tinham que ser dadas por uma única expressão analítica, ponto esse de desacordo entre ele e o matemático francês ([99] e [57]). A polêmica pode ter levado Euler a rever sua definição, dada originalmente em termos de uma expressão analítica.

⁷ Frege foi um crítico da concepção de função como uma expressão analítica, como será mostrado no próximo capítulo.

e início do seguinte é que a definição do segundo livro começou a atrair a atenção dos matemáticos. Entre os que a ela aderiram encontram-se Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchevsky e Dirichlet ([99]). O último, no seu manuscrito *Sobre a representação de funções completamente arbitrárias por meio de séries de senos e cossenos*⁸, de 1837, apresenta uma definição de função contínua nos seguintes termos:

Pensa-se em a e b como dois valores fixos e em x como uma quantidade variável que pode progressivamente assumir todos os valores que se encontram entre a e b . Agora, se a cada x corresponde um único e finito y de tal modo que, como x percorre continuamente o intervalo de a a b , $y = f(x)$ também gradualmente muda, então y é denominado uma função contínua de x nesse intervalo. Não é aqui necessário que y dependa de x de acordo com a mesma lei em todo o intervalo; de fato, nem mesmo é preciso pensar em uma dependência exprimível por operações matemáticas. (*apud* Bottazzini, [8], p. 197)

Seja na definição acima seja na de Euler, o conceito de função é identificado ao de uma variável que se relaciona a uma outra variável por meio de uma correspondência arbitrária⁹. Essa concepção “geral” de função de Dirichlet e Euler predominou ao longo de quase todo o século XIX e ainda no início do século XX¹⁰. Para dar um exemplo, no livro *As idéias fundamentais da mathematica*, publicado postumamente em 1929, Amoroso Costa usa o termo “função” com a mesma aceção que seus dois antecessores :

Uma variável y se diz *função (univalente)* de outra variável x , quando entre os domínios de x e de y existe uma correspondência tal que a cada valor de x corresponde um valor de y , e um único (sem que a cada valor de y corresponda necessariamente um único valor de x) ([15], p. 267, grifo do autor).

Embora a concepção de função de Dirichlet fosse ainda frequente nos textos matemáticos do início do século XX e algumas discussões ainda ocorressem entre os analistas sobre esse conceito¹¹, gradualmente a noção de correspondência (*mapping*) entre dois conjuntos arbitrários tornava-se dominante em Matemática e o conceito de função se identificava com essa noção ([61]). Monna (*ibid.*) considera a definição a seguir, fornecida por Nicolas Bourbaki no primeiro volume do seu *Éléments de mathématique* (1939), como o ápice desse processo:

⁸ No original: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen.*

⁹ Para Lützen ([57]) e Youschkevitch ([99]), as duas definições identificam a noção de função a de uma correspondência arbitrária entre as duas variáveis. Isso não me parece, todavia, correto. Dirichlet e Euler claramente se referem a uma variável dependente quando utilizam o termo “função”, não à relação entre as variáveis.

¹⁰ Como será evidenciado no segundo capítulo, Russell foi um adepto dessa concepção.

¹¹ Em especial entre os franceses Baire, Borel e Lebesgue, que acreditavam que a definição de uma função somente poderia ser aceita se uma houvesse uma regra que levasse à sua construção ([61]).

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não ser distintos. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é denominada uma *relação funcional em y se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F e um só, que está na relação considerada com x .*

Dá-se o nome de *função* à operação que desse modo associa a cada elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que está na dada relação com x ; é dito que y é o *valor* da função para o elemento x , e que a função é *determinada* pela relação funcional considerada. ([9], fascicule de résultats, § 2, grifos do autor)

O que Monna não menciona é que ainda no século XIX Dedekind apresentou uma concepção geral de correspondência entre conjuntos arbitrários no livro *O que são e para que servem os números (Was sind und was sollen die Zahlen)*, de 1888¹², que prenuncia de certo modo o estabelecido acima:

Por uma representação ψ de um sistema S entende-se uma lei que a cada elemento s determinado de S associa um objeto determinado, que se denomina a imagem de s e é designado por $\psi(s)$; dizemos também que $\psi(s)$ corresponde ao elemento s , que $\psi(s)$ surge ou é produzido a partir de s mediante a representação ψ , que s é levado em $\psi(s)$ pela representação ψ . ([17], p. 5)

Dedekind define um sistema (*System*)¹³ como sendo um agregado de objetos dois a dois distintos, “compreendidos por qualquer motivo sob um mesmo ponto de vista” (*ibid.*, p. 1). Por $\varphi(S)$, designa o sistema que consiste de todas as imagens $\varphi(s)$ de elementos de S . No caso de $\varphi(S)$ ser uma parte (*Teil*) de um sistema Z , então φ é, segundo ele, uma representação (*Abbildung*) de S em Z .

Uma vez que um sistema pode ser constituído por objetos de qualquer tipo, a concepção de aplicação de Dedekind, na forma de uma representação entre dois sistemas¹⁴, possui grande generalidade. Para Dieudonné ([18]), essa generalidade representa um avanço em relação às concepções de função anteriores:

Em vez de restringir-se, como nas concepções anteriores, às funções reais (ou complexas) de uma ou várias variáveis reais, Dedekind vai de uma vez até o fim da generalização: sendo dados dois conjuntos *quaisquer* E e F , uma aplicação de E em F é uma *lei* (“Gesetz”) que, a todo elemento x de E , faz corresponder um elemento *bem determinado* de F , o seu *valor* em x o qual exprime-se de modo geral por $f(x)$ [...] ([18], p. 145, grifos do autor)

¹² O livro só foi publicado em 1888, mas Dedekind afirma em seu prefácio que uma década antes de sua publicação já tinha em mãos um esboço contendo as suas ideias fundamentais.

¹³ Outros termos por ele adotados são *variedade (Mannigfaltigkeit)* e *totalidade (Gesamtheit)*.

¹⁴ Ferreirós ([22]) acredita que a ideia de uma função enquanto uma correspondência entre conjuntos quaisquer está presente no trabalho de Dedekind desde pelo menos a segunda metade da década de 1850.

Nota-se que, embora geral, a definição de função de Dedekind baseia-se no vago conceito de “lei”. Aparentemente, ele considerava a noção de representação entre dois sistemas como uma noção fundamental a partir da qual seu sistema seria erigido. A definição de Bourbaki citada por Monna também não constitui um modelo de rigor, pois está assentada na noção imprecisa de “operação”, mas deve ser levado em conta que foi extraída de um resumo informal dos resultados da parte principal do livro. No segundo capítulo de seu livro, Bourbaki define uma correspondência como sendo uma tripla $\langle G, A, B \rangle$, em que A e B são conjuntos arbitrários e G , um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, e define uma função como um caso particular de correspondência. A ideia de lei ou operação é assim reduzida a de conjunto, uma concepção que permaneceu dominante ao longo do século XX.

0.2 Frege, Russell e o conceito de função

Os autores acima (e muitos outros) parecem ignorar que no período entre a conclusão do livro de Dedekind e a publicação do de Bourbaki, importantes considerações foram feitas pelos “logicistas”, especialmente por Frege e Russell, a respeito do conceito de função. Essas considerações constituem valiosa fonte histórica de informações sobre o desenvolvimento conceitual e metodológico da Matemática.

O termo “logicismo” foi cunhado no final da década de 1920 por Carnap ([41]) e refere-se à tese de que a Matemática é um ramo da Lógica. Segundo o próprio Carnap ([14]), o lógico alemão Gottlob Frege (1848-1925) foi o primeiro a propor a subordinação da primeira área à segunda, em 1884, no livro *Os fundamentos da aritmética* (FA) ¹⁵. Em 1903, foi a vez de o filósofo inglês Bertrand Russell (1872-1970), no livro *The principles of mathematics*, sugerir o mesmo ¹⁶.

Para mostrar que as asserções da Matemática derivam de princípios puramente lógicos, requisito fundamental para o cumprimento do programa defendido em seus livros, tanto Frege como Russell desenvolveram um sistema notacional próprio para a escrita das proposições. O sistema de Frege, denominado *conceitografia* (*Begriffsschrift*) foi desenvolvido anos antes da publicação de FA, e o de Russell, inspirado em Peano, após a publicação de *The principles* e em parceria com o matemático Alfred North Whitehead (1861-1947) no livro *Principia mathematica*.

¹⁵ *Os fundamentos da aritmética, uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número* (*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*).

¹⁶ O livro de Frege, contudo, apresenta uma versão mais restrita do Logicismo do que o de Russell, na medida em que propõe que a tese logicista aplica-se a apenas uma parte da Matemática, qual seja, a Aritmética. A justificativa para isso é que Frege considerava as asserções da Geometria fatos acerca do espaço e não da razão, como supunha que as da Aritmética fossem.

Não obstante algumas divergências existentes entre as teorias lógicas que desenvolveram, a percepção da linguagem das funções como meio de expressão das proposições da Matemática foi o que em princípio motivou ambos, primeiro Frege e depois Russell, a discorrerem sobre o conceito de função. A preocupação conceitual que ambos manifestaram acerca dessa noção emergiu como uma consequência de seus projetos e com o objetivo de tornar mais rigorosa a terminologia utilizada pelos matemáticos de então. Em particular, as discussões que empreenderam em torno das noções de “classe” e “correspondência”, tentando fixar-lhes o significado em termos da noção de função (no caso de Russell, em termos da noção de função proposicional), são exemplares.

0.3 Estrutura do trabalho

Bottazzini defende, na introdução ao seu livro *The higher calculus* ([8]), que o rigor matemático é um conceito histórico e, portanto, em evolução. Por isso, o aspecto mais instrutivo quando se escreve sobre História da Matemática, segundo ele, não é tanto a apresentação das teorias e resultados históricos sob o prisma do rigor contemporâneo, mas a compreensão dos motivos e problemas que levaram às generalizações e mutações dessas teorias. Em consonância com esse princípio, evitarei ao longo deste trabalho emitir juízo sobre as suposições filosóficas dos autores discutidos ou mesmo analisar os resultados por eles obtidos à luz da Matemática e Lógica contemporâneas. Almejo, de fato, examinar como esses resultados emergem no contexto dessas suposições.

A fim de discutir os fatos examinados, organizei a presente monografia em três capítulos. No primeiro, discuto as ideias de Frege sobre o tema das funções, no segundo, as de Russell. Decidi começar ambos os capítulos fazendo um resumo dessas ideias da maneira em que são apresentadas por seus autores no ápice dos seus projetos fundadores. O processo que levou à configuração de tais ideias foi muito demorado, de modo que uma apresentação detalhada de como avoluíram não caberia aqui. Sendo assim, fiz uma investigação sobre momentos específicos que considero importantes tendo em vista as finalidades aqui estabelecidas.

O primeiro capítulo chama-se *Frege e a generalização da noção de função*. Meu interesse, além de explicar como a doutrina fregeana de funções se estrutura a partir das reflexões de Frege sobre a questão do significado das expressões, é mostrar em que condições emergiu o seu interesse pelo assunto e o que o levou a conceber uma concepção mais geral de função. Também nesse capítulo discuto as consequências dessa concepção no âmbito do sistema lógico criado por ele, fazendo uma comparação desse sistema com o de Boole (para tanto, utilizo-me dos artigos que Frege escreveu em defesa de sua conceitografia).

No segundo capítulo, *Russell e a noção de função proposicional*, analiso a teoria de funções proposicionais de Russell. Início-o com uma exposição acerca da teoria dos tipos, onde, para tanto, baseio-me principalmente no conteúdo de *Principia*. Nas seções seguintes, mostro como a noção de função proposicional emergiu e transformou-se ao longo do trabalho que Russell realizou sobre os fundamentos da Matemática na primeira década do século passado e discuto as diferenças entre essa noção e a noção fregiana de função. Para fazer isso, analiso os rascunhos de *The principles*, o próprio livro e a correspondência que Russell manteve com Frege no período.

Originalmente, minha intenção era comparar as concepções de função de Frege e de Russell no terceiro capítulo, mas conforme o trabalho no segundo capítulo foi se desenvolvendo, percebi que não poderia discutir apropriadamente a natureza das funções proposicionais sem antes fazer essa comparação. Assim, no último capítulo, intitulado *Funções proposicionais e classes*, começo falando de um artigo de autoria de Norbert Wiener, onde avalio a definição de par ordenado deste autor e suas implicações. Num segundo momento, faço uma análise das ideias de Russell a respeito da conexão entre funções proposicionais e classes, onde novamente recorro à sua correspondência com Frege e onde também lanço mão de alguns escritos de Quine.

0.4 Convenções e terminologia

Até aqui usei os vocábulos “noção” e “conceito” como sinônimos, o que evitarei fazer nos próximos capítulos, haja vista que a palavra “conceito” possui uma acepção técnica no contexto dos trabalhos de Frege e Russell.

As palavras “classe” e “conjunto” não serão empregadas num sentido técnico, possuindo a mesma acepção ao longo do texto.

As aspas serão utilizadas para indicar os neologismos e para sublinhar o significado das palavras ou outras expressões, mas também para demarcar o escopo de uma expressão complexa ou muito longa – como, por exemplo, em “o filósofo que tomou cicuta”. A expressão refere-se ao filósofo ateniense mestre de Platão e, por esse motivo, quando for a ela me referir utilizarei a notação [o filósofo que tomou cicuta]. Assim, quando escrever [Sócrates], não estarei me referindo a uma pessoa mas à expressão que nomeia ou designa uma pessoa. A mesma espécie de notação usarei a fim de distinguir uma sentença da proposição ou enunciado que a sentença exprime¹⁷. Para designar letras, fórmulas ou expressões mais simples, escreverei simplesmente “a letra ...”, “o sinal ...” ou “a fórmula ...”.

¹⁷ Faço aqui uma distinção entre entidades linguísticas e não-linguísticas, portanto. De um lado ponho os nomes, as sentenças, as descrições e as expressões em geral, do outro as entidades designadas pelos nomes, as proposições e os demais objetos.

Algumas das citações correspondem a traduções dos fragmentos originais, sendo que todas essas traduções foram feitas por mim. As citações das fontes em inglês não foram traduzidas ¹⁸.

¹⁸ Os fragmentos das cartas que Russell remeteu a Frege, citados nos capítulos 2 e 3, foram traduzidos porque essas cartas foram redigidas em alemão.

1 Frege e a generalização da noção de função

Começarei este capítulo apresentando a doutrina de funções de Frege a partir de duas importantes distinções feitas por ele: função/argumento e sentido/referência. O seu interesse pela noção de função remonta à época em que começou a voltar a sua atenção para os fundamentos da Aritmética e, por conseguinte, antecede os momentos em que tais distinções lhe ocorreram. Farei uma análise daquele período na segunda seção e então mostrarei na seção seguinte como o interesse de Frege converteu-se em um instrumento de análise filosófica e, ao mesmo tempo, de unificação da Matemática e da Lógica.

1.1 Função e argumento, função e conceito

Em seu escrito *Função e conceito* (FC)¹, de 1891, Frege critica as definições, segundo ele comuns nos primórdios da Análise, que identificavam uma função com uma expressão analítica e que permitiam, por conseguinte, identificar expressões como $[2 \cdot x^3 + x]$ e $[2 \cdot 2^3 + 2]$, por exemplo, com funções de x e 2, respectivamente. O principal defeito desse tipo de identificação, diz em seu artigo, é a ausência da distinção entre o sinal e aquilo que é designado pelo sinal. Mas com essa distinção em vista, o objeto designado por $[2 \cdot 2^3 + 2]$ é o mesmo objeto designado por $[18]$ ou por $[3 \cdot 6]$, que é um número. De modo análogo, a expressão $[2 \cdot x^3 + x]$ *indica indefinidamente* (*unbestimmt deutet*) um número e nenhuma diferença essencial existe entre a utilização desta expressão e de uma variável qualquer, digamos, x .

A essência da função, defende Frege em seu artigo, é o que há de comum entre as expressões $[2 \cdot 1^3 + 1]$, $[2 \cdot 4^3 + 4]$ e $[2 \cdot 5^3 + 5]$, no caso, o que está presente em $[2 \cdot x^3 + x]$ para além do x ; algo que se poderia designar por $[2 \cdot ()^3 + ()]$. A letra x indica o *argumento* (*Argument*) e a expressão que resulta da supressão da letra, a *função* (*Funktion*). Esta, entende, deve reproduzir a natureza peculiar da expressão que a designa e, por isso, “o argumento não é parte da função, mas constitui juntamente com ela um todo completo” ([33], p. 128). Essa característica essencial da função denomina *insaturação* (*Ungesättigtkeit*).

A supressão das letras em uma expressão funcional não permite reconhecer, no entanto, se a função designada pela expressão é uma função de uma variável ou se é uma função de duas ou mais variáveis. Como saber, por exemplo, se $[()^2 + ()^3 + 1]$ designa uma função de um só argumento ou uma função de dois argumentos?

¹ *Funktion und Begriff*, no original.

A dificuldade levou Frege, a partir de seu livro *Leis Fundamentais da Aritmética* (LFA)², a utilizar uma notação que permitisse fazer essa distinção. Diferente das letras latinas x e y na expressão $[x^2 + y^3 + 1]$, cujo propósito é exprimir generalidade, as letras gregas ξ e ζ em $[\xi^2 + \zeta^3 + 1]$ têm o papel de indicar os lugares onde os sinais dos argumentos da função devem ser introduzidos e permitem, assim, distinguir uma função de duas variáveis como “ $\xi^2 + \zeta^3 + 1$ ” de uma função de uma variável como “ $\xi^2 + \xi^3 + 1$ ”. A repetição da letra ξ indica que ambos os lugares devem ser ocupados pelo mesmo argumento. No fragmento a seguir Frege explica a sua notação:

É possível tornar visível essa necessidade de complementação [da função] através de parênteses vazios, e.g., “*sen*()” ou “()² + 3 · ()”. Embora, de fato, isto seja o meio mais apropriado de defender-se da confusão que dessa maneira surge quando se encara o sinal de argumento como parte do sinal da função, esta designação provavelmente não encontrará nenhuma aceitação. É também possível utilizar uma letra para esse propósito. Escolhemos para isso “ ξ ”. Assim, “*sen* ξ ” e “ $\xi^2 + 3 \cdot \xi$ ” são símbolos de funções. É preciso, porém, que seja anotado que aqui “ ξ ” somente tem a tarefa de tornar reconhecível a posição onde o sinal complementar tem de ser inserido. ([34], p. 278-279)

Portanto, o papel da letra x em $[x^2 + 3x]$ é fundamentalmente diferente do de ξ em $[\xi^2 + 3\xi]$. No primeiro caso, a letra veicula generalidade: a expressão $[x^2 + 3x]$ indica não uma função ou um número determinado, mas muitos números, entre eles $1^2 + 3 \cdot 1$, $2^2 + 3 \cdot 2$ e $3^2 + 3 \cdot 3$. A letra ξ , por outro lado, indica onde os nomes dos números 1, 2, 3 e muitos outros devem ser inseridos na expressão $[\xi^2 + 3\xi]$. Naturalmente, a presença da letra ξ nesta expressão não significa que o argumento é uma parte da função, pois esta é insaturada: “Quando dizemos ‘a função $\Phi(\xi)$ ’, não podemos esquecer que o ‘ ξ ’ somente pertence ao nome da função enquanto torna a sua insaturação visível” (LFA, § 21).

Assim como preposições e conjunções nada designam, só adquirindo significado no contexto de uma frase, as letras gregas de Frege não designam o(s) argumento(s) da função, apenas atuam no contexto da expressão que designa a função, indicando onde os sinais dos argumentos devem ser introduzidos.

A expressão $[2^2 + 2^3 + 1]$ designa um valor da função, qual seja, o valor da função “ $\xi^2 + \xi^3 + 1$ ” para o argumento 2. $[\xi^2 + \xi^3 + 1]$ designa uma função, a expressão $[2^2 + 2^3 + 1]$, um objeto. A insaturação da função é o que a diferencia de um objeto, sendo que essa diferença reflete o fato de a expressão funcional, diferente de um nome ou descrição, conter “lugares vazios”.

² Mais precisamente, *Leis fundamentais da aritmética, derivadas conceitograficamente (Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet)*. O livro foi publicado em dois volumes: o primeiro em 1893 e o segundo dez anos depois.

Como veremos na próxima seção, no início de sua carreira acadêmica Frege percebeu que o âmbito da Aritmética precisava ser estendido a fim de ser possível explicar o caráter geral e abstrato dessa ciência. Extensão análoga, deu-se conta mais tarde, deveria ocorrer com os domínios dos argumentos e dos valores de uma função, até então restritos aos objetos da Aritmética, a fim de que seu projeto logicista fosse desenvolvido. Sob tal perspectiva, objetos como Londres e Brasília, por exemplo, podem ser pensados como valores da função designada por [a capital de ξ] para os argumentos Inglaterra e Brasil, respectivamente. A proposição “5 é maior do que 3”, por outro lado, não é o valor da função “ $\xi > 3$ ” para o argumento 5, como poder-se-ia supor à primeira vista, mas sim o *valor de verdade* (*Wahrheitswert*) dessa proposição, qual seja, o verdadeiro. Isso porque, segundo Frege, uma sentença designa não uma proposição, mas um valor de verdade.

Sendo um valor de verdade o objeto designado por uma sentença, qual a relação entre a proposição e a sentença? De acordo com Frege, em uma expressão cabe distinguir dois elementos e ela associados: o seu sentido (*Sinn*) e o seu referente (*Bedeutung*). Em particular, a proposição corresponde ao sentido e o valor de verdade, ao referente da sentença. De modo geral, o valor de uma função aplicada a um dado argumento corresponde ao referente da expressão que se obtém ao substituir a letra do argumento da expressão funcional pelo nome do argumento. Assim, $\frac{1}{2}$, o valor da função *sen* ξ para o argumento $\frac{\pi}{6}$, é o referente da expressão $\left[\text{sen } \frac{\pi}{6} \right]$, assim como o verdadeiro, o valor da função designada por $[\xi > 3]$ para o argumento 5, é o referente da sentença [5 é maior do que 3].

Na doutrina fregeana, um valor de verdade pode não apenas estar entre os possíveis valores de uma função como também estar entre os seus possíveis argumentos. Por exemplo, o designado pela sentença [Se $1^2 = 3$, então $2 + 3 = 5$], qual seja, o verdadeiro, pode ser pensando como o valor da função designada por [Se ξ , então ζ] aplicada ao falso como o ξ -argumento e ao verdadeiro como o ζ -argumento, uma vez que os referentes das sentenças [$1^2 = 3$] e [$2 + 3 = 5$] são respectivamente o falso e o verdadeiro. De modo análogo, o verdadeiro é o valor da função designada por [Não é o caso que ξ] aplicada ao referente da sentença [$1^2 = 3$].

Pode parecer estranho identificar o referente da sentença com o seu valor de verdade³, mas Frege argumenta no seu escrito *Sobre o sentido e a referência* (SSR)⁴, de 1892, que o referente da sentença deve ser o elemento que permanece inalterado quando um componente da sentença é substituído por um outro com o mesmo referente. Como o valor de verdade da sentença possui essa propriedade, conclui, este deve ser o referente da sentença. Por exemplo, a sentença [A estrela-d’alva é um corpo celeste iluminado pelo Sol] deve possuir o mesmo referente que a sentença [O planeta Vênus é um corpo celeste iluminado pelo Sol], pois as expressões [estrela-d’alva] e [planeta Vênus] possuem

³ A essa identificação, aliás, se opunha Russell.

⁴ Foi nesse artigo, no original *Über Sinn und Bedeutung*, que a distinção sentido/referência foi introduzida.

o mesmo referente. Como as sentenças são ambas verdadeiras, o referente de cada uma delas, no entendimento de Frege, deve ser o verdadeiro.

Mas alguém que não soubesse que a estrela-d'alva e o planeta Vênus são o mesmo objeto poderia afirmar, por exemplo, que a primeira sentença é falsa e a segunda, verdadeira. Afinal, uma estrela é uma fonte primária de luz, enquanto um planeta é uma fonte secundária, poder-se-ia pensar. Além disso, o nome composto [estrela-d'alva] poderia designar não um corpo celeste mas um objeto de outra categoria, um ser vivo inclusive. Frege atribui equívocos como esse ao fato de haver entre dois sinais distintos uma diferença no *modo de apresentação* (*Art des Gegebenseins*) daquilo que esses sinais designam. Por esse motivo, convém, além do objeto que a expressão designa, associar à expressão um segundo elemento, por meio do qual a expressão se conecta com o objeto designado. Esse elemento é o *sentido* (*Sinn*) da expressão. Assim, a pessoa que atribuísse valores de verdade (referentes) distintos às duas sentenças acima, fá-lo-ia porque para essa pessoa as duas sentenças exprimem proposições (sentidos) diferentes; isso porque os sentidos das expressões componentes [estrela-d'alva] e [planeta Vênus] são distintos. O sentido da sentença depende, portanto, do sentido de seus constituintes, como Frege deixa claro em uma carta a Philip E. B. Jourdain ⁵:

A sentença, no entanto, compõe-se de partes que de algum modo devem contribuir com a expressão do seu sentido. Essas partes devem de alguma maneira, portanto, ter sentido. Tome a sentença “O Etna é mais alto do que o Vesúvio”. Temos aqui o nome “Etna”, que ocorre também em outras sentenças, e.g., na sentença “O Etna está na Sicília”. A possibilidade de reconhecer sentenças que nunca ouvimos antes apóia-se evidentemente sobre isso, de modo que nós construímos o sentido da sentença a partir de suas partes, que correspondem às palavras. ([29], p. 127)

É claro que a mera identificação dos sentidos dos constituintes da sentença não é suficiente para a identificação do sentido da sentença toda. Não basta compreendermos os sentidos de [Etna] e de [() é mais alto do que o Vesúvio] para entendermos o sentido de [O Etna é mais alto do que o Vesúvio]. É preciso, além disso, entender como esses sentidos se conectam. Frege sugere em um dos seus últimos escritos, o artigo *Estrutura do pensamento* (*Gedankengefüge*), de 1923, que essa conexão se dá por um processo de saturação da parte insaturada da sentença pela parte saturada:

Se os pensamentos são vistos como compostos de partes simples e estas, por sua vez, correspondem a partes simples da sentença, torna-se compreensível que uma grande variedade de sentenças, às quais corresponde

⁵ Embora a carta não possua data, é provável que tenha sido escrita em 1914, haja vista que ela responde uma carta de Jourdain datada de janeiro daquele ano.

uma grande diversidade de pensamentos, possa ser construída a partir de umas poucas partes da sentença. A questão que se coloca agora é como se dá a construção do pensamento e como são juntadas as partes de tal maneira que o todo se torna algo mais do que as partes isoladas. [...] A coesão do todo é acarretada pelo fato de o pensamento saturar a parte insaturada ou, como se pode dizer também, completar a parte carente de complementação. E emerge a suspeita de que, em Lógica em geral, a circunstância de um todo sempre ocorre quando algo insaturado é saturado. ([35], p. 378)

Da passagem acima pode-se depreender que a parte insaturada da proposição (ou pensamento, como Frege diz) é uma função que tem como argumentos as partes saturadas da proposição e cujo valor para esses argumentos é a própria proposição. Nesse caso, a proposição “o Etna é mais alto do que o Vesúvio” seria o valor da função correspondente ao sentido da expressão [() é mais alto do que o Vesúvio] aplicada ao sentido de [Etna] como argumento. Apesar de Frege indicar que a parte insaturada da sentença possui, além de um referente, um sentido ⁶, em nenhum de seus escritos ele se utiliza do termo função ao se referir ao sentido dessa parte da sentença ⁷.

O modo pelo qual a sentença pode ser analisada em termos de uma parte insaturada e uma ou mais partes saturadas não é único, reconhece Frege em seus escritos ⁸. A sentença [O Etna é mais alto do que o Vesúvio], por exemplo, pode ser analisada em termos dos componentes [o Etna é mais alto do que ζ] e [Vesúvio] ou [ξ é mais alto do que ζ], [Etna] e [Vesúvio]. E não apenas a sentença admite análise, uma parte dela também o admite ([28]). A parte saturada da sentença [A capital do Brasil fica no Planalto Central], quando esta é analisada em termos de [a capital do Brasil] e [ξ fica no Planalto Central], como vimos, pode ser analisada em termos da parte insaturada [a capital de ξ] e a saturada [Brasil]. A parte insaturada [ξ fica no Planalto Central], por sua vez, também admite análise em termos de [ξ fica em ζ] e [Planalto Central] ⁹.

Em resumo, para Frege a estrutura da proposição reflete a estrutura da sentença que a exprime: “a sentença pode ser vista como um mapa do pensamento”, diz ([28], p. 275). A estrutura da sentença depende, é claro, do modo como a sentença é analisada, haja vista que o processo de análise, como vimos, pode ser feito de diferentes maneiras. Uma vez feita a análise da sentença e identificada a sua estrutura – esta inclui a própria sentença, as suas partes e uma relação peculiar (todo-parte) que há entre a primeira e as últimas –, a estrutura da proposição é revelada via correspondência entre as partes

⁶ Frege dá a entender em seu manuscrito *Digressões sobre o sentido e a referência* (*Ausführungen über Sinn und Bedeutung*), escrito entre 1892 e 1895, que expressões que designam funções devem ter um sentido.

⁷ Entre as observações feitas por Russell em sua cópia de LFA, há uma em que ele se interroga sobre o sentido da função “ $\xi^2 = 4$ ” ([53]). A observação diz respeito à segunda seção do livro, onde Frege afirma que os nomes expressam os seus sentidos e designam os seus referentes. O problema é que ele não diz em parte alguma qual deve ser o sentido dos nomes das funções.

⁸ Entre eles, CG e *A lógica calculatória de Boole e a conceitografia*.

⁹ Frege admite essa possibilidade em FC.

da sentença e os sentidos dessas partes. Essa correspondência – cuja existência, segundo Frege em uma carta a Russell ¹⁰, é um postulado lógico – constitui um isomorfismo entre as duas estruturas. Naturalmente, as estruturas de expressões complexas em geral e as estruturas dos sentidos dessas expressões são também isomorfas: os componentes [Brasil] e [a capital de ξ] estão para a expressão [a capital do Brasil] assim como os sentidos desses componentes estão para o sentido da última expressão.

A correspondência que há entre o nível das expressões e o nível dos sentidos não ocorre, contudo, entre o primeiro e o nível dos referentes. O referente de [Suécia] não é parte de Estocolmo, que é o referente de [a capital da Suécia], reconhece Frege ([28]). Assim, embora os referentes das partes da expressão complexa (sentença) atuem na determinação do referente da expressão (valor de verdade da sentença), a relação entre os primeiros e o último não é aquela que se verifica entre as partes de um todo (componentes da expressão complexa ou da sentença) e o todo (expressão complexa ou sentença).

A substituição da letra x em [Se x é homem, então x é mortal] pela letra grega ξ leva à formação da expressão funcional [Se ξ é homem, então ξ é mortal]. Esta expressão designa uma função e, por isso, tem um sentido ¹¹. A função designada possui uma propriedade peculiar, qual seja, o seu valor é o verdadeiro qualquer que seja o seu argumento. Por isso, ela pode ser o argumento de uma outra função: uma cujo valor seja o verdadeiro para argumentos que sejam funções com tal propriedade e o falso para quaisquer outras, por exemplo. Esta função é indicada por Frege pela notação $\ulcorner \phi(\alpha)$, onde ϕ indica o argumento. Assim, o valor de $\ulcorner \phi(\alpha)$ para o argumento “se ξ é homem, então ξ é mortal” é o verdadeiro e para o argumento “ ξ é homem”, o falso, ou seja, $\lrcorner \ulcorner$ (Se α é homem, então α é mortal)] designa o verdadeiro e $\lrcorner \ulcorner \alpha$ é homem], o falso. Por conseguinte, visto que não apenas objetos podem ser argumentos de funções, a distinção função/objeto não é congruente à distinção função/argumento na doutrina fregeana.

Algumas funções admitem somente valores de verdade entre seus possíveis valores. É o caso das funções designadas por $\lrcorner \xi > 3$] e por $\lrcorner \xi + 1 = \zeta$]. Entre tais funções, aquelas com um só argumento, como “ $\xi > 3$ ”, são denominadas *conceitos* (*Begriffe*) e aquelas com dois argumentos, como “ $\xi + 1 = \zeta$ ”, *relações* (*Beziehungen*) ¹². Quando o valor de um conceito para um dado argumento é o verdadeiro, entre o argumento e o conceito há uma relação lógica peculiar que Frege exprime dizendo que o primeiro *cai sob* (*fällt unter*) o segundo. Assim, 5 cai sob o conceito “ $\xi > 3$ ” e Sócrates, sob o conceito “ ξ é mortal”. Dessa relação deriva a relação de *subordinação* (*Unterordnung*) entre dois conceitos, que

¹⁰ A carta é de 28 de julho de 1902.

¹¹ Nem sempre uma expressão com sentido possui um referente. É o caso do nome [pégaso]. Mas a existência do referente implica a existência do sentido, uma vez que o último determina o primeiro.

¹² Frege, diferente dos lógicos e dos matemáticos de hoje em dia, que consideram a função um caso particular de relação, considera uma relação um caso especial de função.

se verifica sempre que os argumentos que caem sob o primeiro conceito também caem sob o segundo. O conceito “ ξ é homem”, por exemplo, está subordinado ao conceito “ ξ é mortal”, pois tudo o que é homem (cai sob o primeiro conceito) também é mortal (cai sob o segundo). Conforme o exemplo do parágrafo anterior, conceitos cujos argumentos são objetos podem ser argumentos de outro conceito. Assim, o conceito “se ξ é homem, então ξ é mortal” cai sob o conceito $\underline{\alpha} \phi(\alpha)$. Este é um conceito de segundo nível, porque seus argumentos são conceitos de primeiro nível – *i.e.*, seus argumentos são conceitos cujos argumentos são objetos.

Há uma outra relação lógica fundamental que dois conceitos podem apresentar. Se duas funções $\phi(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ são tais que, qualquer que seja o argumento ξ , o valor de verdade do conceito $\phi(\xi) = \varphi(\xi)$ é o verdadeiro, então a proposição “a função $\phi(\xi)$ possui o mesmo curso de valores (*Werthverlauf*) da função $\varphi(\xi)$ ” exprime que as duas funções possuem o mesmo valor para o mesmo argumento, qualquer que seja o argumento. As funções $\xi^2 - 4\xi$ e $\xi(\xi - 4)$, por exemplo, possuem o mesmo curso de valores, assim como os conceitos “ ξ é um número inteiro entre 1 e 3” e “ ξ é um número primo par”. Frege designa o curso de valores de uma função $\phi(\xi)$ por $\acute{\epsilon}\phi(\acute{\epsilon})$. Isso permite que a identidade dos cursos de valores de duas funções seja asserida por meio de uma equação: $\acute{\epsilon}(\acute{\epsilon}^2 - 4\acute{\epsilon}) = \acute{\epsilon}[\acute{\epsilon}(\acute{\epsilon} - 4)]$, no caso.

O curso de valor de um conceito é denominado sua *extensão* (*Umfang*). Por isso, pode-se dizer que os conceitos $\xi^2 = 4$ (raiz quadrada de quatro) e $3\xi^2 = 12$ (algo cujo triplo do quadrado é doze) possuem a mesma extensão. É através das extensões de conceitos que a noção de classe emerge na doutrina fregiana: dizer que um objeto pertence à extensão de um determinado conceito significa que esse objeto cai sob o dado conceito¹³. Cursos de valores de funções e, portanto, as extensões de conceitos, bem como os valores de verdade, não possuem, segundo Frege, o mesmo *status* ontológico que as funções: são objetos¹⁴.

Em junho de 1902, quando o segundo volume de LFA já se encontrava em processo de impressão, Frege recebeu uma carta de Russell, onde este o alertava para a existência de uma contradição envolvendo um dos postulados lógicos de sua teoria. O princípio em questão postula a coincidência das extensões dos conceitos sob os quais caem os mesmos objetos e pressupõe, por conseguinte, que um conceito sempre determina uma extensão. Uma consequência desse pressuposto é que não se pode determinar se a extensão do

¹³ A distinção fregiana entre um conceito e a sua extensão remete à oposição entre a compreensão e a extensão de uma ideia ([51]), elementos presentes na *Lógica de Port-Royal* (*Logique de Port-Royal*), livro publicado em 1662 por Antoine Arnaud e Pierre Nicole. A compreensão de uma ideia corresponde aos atributos que a ideia contém em si mesma e a sua extensão, aos objetos sobre os quais a ideia se aplica ([3]). Frege firma, portanto, uma tradicional distinção lógica em termos da noção mais geral de função.

¹⁴ Em FA, os números cardinais são identificados com extensões de conceitos; por esse motivo, também constituem objetos. Detalhes de como essa identificação é feita foram reproduzidos em minha dissertação de mestrado ([39]) e também podem ser consultados em ([24]).

conceito “ ξ não pertence a si mesmo” pertence ou não a essa extensão: se a extensão desse conceito pertence a si mesma, então cai sob o conceito “não pertencer a si mesmo”; se não pertence, então cai sob o conceito “pertencer a si mesmo”. Voltarei à descoberta dessa contradição no próximo capítulo.

1.2 O despertar do interesse de Frege pela noção de função

Grande parte de sua vida acadêmica Frege despendeu tentando mostrar que a Aritmética é uma extensão da Lógica. As primeiras ideias sobre isso certamente ocorreram-lhe em algum momento entre os anos de 1874, quando iniciou sua carreira acadêmica em Jena, e 1879, quando as apresentou no livro *Conceitografia, uma linguagem formular do pensamento puro modelada sobre a da aritmética* (CG)^{15 16}. Uma vez que o segundo volume de LFA, o último que escreveu sobre o assunto, foi publicado em 1903, conclui-se que o lógico alemão dedicou-se a essa tarefa durante quase três décadas¹⁷. Nesse período, além dos dois volumes de LFA, publicou também, em 1884, FA. Em CG, o primeiro livro, Frege apresenta um primeiro esboço de seu programa. A obra exhibe uma linguagem artificial por meio da qual as noções e as proposições da Aritmética são facilmente exprimíveis, além de mostrar como, a partir dessa linguagem, o conceito de “seguir em uma série” (ou sequência) e, por conseguinte, o princípio da indução finita podem ser estabelecidos em termos estritamente lógicos. Em FA, o mais filosófico dos três livros, onde são discutidas a noção de número e a natureza das leis da Aritmética, o projeto fregiano assume contornos mais precisos. O último livro, LFA, é onde a redução da Aritmética à Lógica delineada em FA é finalmente levada adiante usando a lógica simbólica de CG.

Para precisar o papel de cada um desses livros dentro do programa fregiano é necessário compreender, primeiramente, que significado tem para Frege a afirmação de que a Aritmética é uma parte da Lógica. Para ele, tal afirmação equivale à conjunção das duas seguintes: (i) as noções da aritmética são redutíveis a noções puramente lógicas e (ii) as proposições da aritmética são analíticas, não sintéticas como proposto por Kant. Conforme exposto na seção 3 de FA, a distinção analítico/sintético e *a priori/a posteriori* adotada por Frege não diz respeito ao conteúdo da proposição mas à sua demonstração.

¹⁵ *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, no original.

¹⁶ A preocupação com os fundamentos da Aritmética, conforme será exposto a seguir, já se evidencia na monografia que Frege escreveu como um dos pré-requisitos para a sua admissão pela Universidade de Jena. Após esse trabalho e antes do aparecimento de CG publicou algumas resenhas e um artigo sobre Geometria ([10]).

¹⁷ Nenhum trabalho em defesa da tese logicista Frege publicou após LFA, em razão, provavelmente, de não ter encontrado uma solução para uma contradição descoberta por Russell em seu sistema lógico. Após a publicação do livro, Frege dirigiu sua atenção para a Geometria e quando retornou, cerca de uma década depois, à discussão de questões sobre Lógica e Matemática no escrito *Logik in der Mathematik*, nenhuma menção ao logicismo ele fez ([43]). É provável que o abandono de seu projeto tenha ocorrido lentamente ao longo desses anos, de modo que talvez seja menos impreciso dizer que a ele tenha se dedicado por “ao menos” três décadas. Falarei sobre a descoberta de Russell mais à frente.

Uma vez determinadas as premissas a partir das quais a proposição é demonstrada ¹⁸, esta será *a posteriori* se entre tais premissas houver enunciados acerca de objetos particulares, *a priori* se tais premissas admitirem tão somente enunciados de caráter geral. Entre as proposições *a priori*, aquelas que tiverem entre suas premissas apenas leis lógicas gerais ou definições serão denominadas analíticas enquanto aquelas cujas premissas admitirem enunciados de um domínio científico particular serão denominadas sintéticas ([19]). A tese (i) é defendida em CG e em FA, livros nos quais as noções de sequência numérica e número são firmadas em termos, respectivamente, das noções de função e extensão de um conceito (*Begriff*), noções estas que Frege considera pertencentes à esfera da Lógica. A tese (ii), por outro lado, é estabelecida em LFA, livro onde o sistema lógico introduzido em CG é utilizado para conduzir as demonstrações.

Embora a tese (ii) tenha sido apresentada em FA, nota-se, uma década antes, no escrito *Métodos de cálculo baseados em uma extensão do conceito de quantidade* (*Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen*), a monografia que Frege escreveu e apresentou como condição parcial para a obtenção do posto de professor universitário (*Habilitationsschrift*), um primeiro passo na sua formulação. Nas primeiras páginas, argumenta ele que o objeto da Aritmética é o conceito de quantidade, cujo domínio, originalmente contido nas quantidades da Geometria Euclidiana, foi estendido com a introdução dos números complexos. Diz ele ainda:

Com a adição somos então compelidos a juntar as quantidades. Algo semelhante aplica-se a superfícies e sólidos. A introdução dos negativos na geometria fez uma ruptura nessa visão; os imaginários fizeram-na totalmente impossível. [...] Permaneceram apenas certas propriedades gerais da adição e esta emerge agora como característica essencial da [noção de] quantidade. Assim o conceito gradualmente libertou-se da intuição e fez-se independente. ([32], p. 50)

Uma vez que a Aritmética, diferente da Geometria, não possui um caráter intuitivo, consequência, consoante Frege, da natureza abstrata e compreensiva do seu objeto, o conceito de quantidade, suas proposições fundamentais também não podem derivar da intuição, conclui mais adiante. Por conseguinte, os postulados da Aritmética possuem caráter puramente geral, isto é, as proposições da Aritmética são, nos termos apresentados posteriormente em FA, *a priori*. O que resta é estabelecer se entre esses postulados há enunciados de um domínio científico específico. Com a formulação da tese (ii) em FA, Frege está assumindo que não, o que implica negar à Aritmética o *status* de “ciência autônoma” e reconhecê-la como uma parte da Lógica.

Embora a monografia apresente uma discussão sobre os fundamentos da Aritmética no seu início, essa discussão não é o seu objetivo:

¹⁸ Naturalmente, Frege presume que todas as verdades da Aritmética são demonstráveis.

Levar-nos-ia demasiado longe perscrutar como o conteúdo da Aritmética está contido nas propriedades da [noção de] quantidade que fixamos, e como se pode definir, a partir desse ponto de vista, tipos especiais de grandeza, tais como número e ângulo. A única conclusão que vai ser desenhada aqui é que a [noção de] quantidade pode ser atribuída a operações. [32], p. 51)

Segundo Frege, a aplicação iterada de uma operação (ou função) f sobre um objeto um número arbitrário de vezes também constitui uma operação. Todas as operações assim obtidas de f constituem o que denomina um domínio quantitativo. Esse domínio pode ainda ser expandido, como ilustra no exemplo seguinte:

Seja a operação original, *e.g.*, o deslocamento de um ponto em uma dada direção por uma determinada distância. Então pode-se considerar o deslocamento repetido ao longo da mesma distância como um único deslocamento e todos esses deslocamentos constituem um domínio quantitativo. É possível ainda expandir esse domínio à medida que se pergunta: qual deslocamento repetido n vezes resulta no deslocamento original? E qual deslocamento o cancela? Assim é possível também, em geral, procurar a operação cuja aplicação n vezes pode substituir a dada operação, e aquela que a anula. Pode-se ver facilmente que essas operações, e todas aquelas que têm ocasião de surgir a partir delas da maneira indicada, constituem um domínio quantitativo. (*ibid.*, p. 51-52)

Se uma função f é iterada n vezes, Frege atribui a essa função n vezes a quantidade de f . O seu objetivo ao longo do texto é, para alguns casos específicos, determinar qual a função cuja quantidade está em uma dada relação com a quantidade de uma dada função e a relação que há entre as quantidades de duas funções pertencentes ao mesmo domínio quantitativo. Observa ele que:

Pela grande extensão e dificuldade que teria tal teoria em sua maior generalidade e completeza, podemos aqui apenas sugerir alguns pontos que emergem imediatamente da noção e considerar os casos mais simples. As aplicações que desejamos produzir não têm até o momento o propósito de dar conta de problemas não resolvidos, antes devem principalmente chamar atenção para a conexão que a noção de quantidade de funções permite estabelecer entre diferentes áreas da Aritmética, em parte para identificar a classe de problemas em cuja solução uma teoria alcançada anteriormente poderia contribuir. (*ibid.*, p. 52)

Embora não seja precisamente indicado no texto como a sua teoria de quantidades de funções pode atuar na questão da fundamentação da Aritmética, Frege deixa claro na passagem acima que considera fundamental o papel assumido pela noção de função nessa questão. Sobre os desdobramentos dessa teoria ele não mais se pronunciou nos anos seguintes, mas a noção de função permaneceu desempenhando um papel central em suas ideias.

1.3 O papel da distinção função/argumento e da extensão da ideia de função no desenvolvimento do sistema fregiano

Frege pretendia mostrar que os teoremas da Aritmética derivam unicamente de enunciados lógicos. Por esse motivo, ele precisava empreender, do modo mais rigoroso possível, as demonstrações desses teoremas. A inadequação da linguagem, porém, colocou-se em seu caminho, e isso levou-o a desenvolver o seu sistema notacional ([28]). O termo “conceitografia” (ou *Begriffsschrift*, no original), nome do seu sistema simbólico e também título do livro em que este sistema é apresentado, tem origem, Frege afirma no prefácio do livro, no seu propósito de expressar somente aquilo que importa em uma cadeia de inferências, o que denomina *conteúdo conceitual* (*begrifflichen Inhalt*)¹⁹.

Conforme sugerido no prefácio de CG, o seu sistema notacional corresponde à realização parcial de uma *Characteristica Universalis*, linguagem simbólica que Leibniz idealizou com o propósito de representar de modo mais preciso e eficiente a estrutura do pensamento racional ([94]). A ideia leibniziana “era demasiada gigante para que a tentativa de realizá-la pudesse ir além das meras preliminares”, reconhece Frege ([36], p. xi). E um pouco mais à frente completa:

Quando uma tarefa parece ser irrealizável em sua total generalidade, deve ser restringida temporariamente; então talvez a sua realização progrida por meio de uma extensão gradual. Pode-se ver nos sinais aritméticos, geométricos e químicos realizações da ideia leibniziana para áreas específicas. A conceitografia aqui proposta incorpora a estas uma nova área, situada em uma posição central e que é adjacente a todas elas. (*ibid.*, p. xii)

Por conseguinte, com a sua notação, Frege acredita dar um passo adiante em relação às notações simbólicas de algumas ciências particulares como a Aritmética, a Geometria e a Química. No final de um parágrafo anterior ao trecho acima, ele assinala que o mais imediato ponto de contato entre a sua notação conceitual e a da Aritmética é o modo como as letras são usadas. Mais adiante, na primeira seção do livro, apresenta uma classificação dos símbolos matemáticos em duas categorias, quais sejam, a das letras que representam indefinidamente ou um número ou uma função (variáveis) e a dos sinais que possuem um significado particular (constantes), afirmando que estenderá a classificação – esta, segundo ele, nem sempre observada em Matemática – ao domínio do pensamento puro em geral. A partir daí, até a seção 12, apresenta as constantes do seu sistema lógico e explica como

¹⁹ Na seção 3 de CG, ele diz que por conteúdo conceitual designa a parte do conteúdo que é a mesma em duas proposições cujas consequências lógicas são as mesmas e fornece como exemplos de tais proposições “Em Plateias os gregos derrotaram os persas” e “Em Plateias os persas foram derrotados pelos gregos”. Embora deixe claro que o objetivo de seu simbolismo é exprimir o conteúdo conceitual de uma proposição, ele não é muito preciso sobre o que tal noção, de fato, significa, e não a utiliza em mais nenhum de seus escritos.

combiná-las com variáveis para exprimir as mais variadas proposições. As variáveis, que no domínio da Matemática representam números ou funções, passam a representar, em seu sistema, proposições, indivíduos em geral ou funções. Os sinais \neg , $|$, \vdash , \smile e \equiv são as suas constantes.

As fórmulas abaixo ilustram algumas combinações possíveis entre os símbolos acima:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c} b \\ \hline a \end{array} &
 \begin{array}{|c} a \\ \hline \vdash b \\ \hline a \end{array} &
 \begin{array}{|c} \smile f(a) \\ \hline a \\ \hline f(b) \end{array} &
 \begin{array}{|c} (d \equiv c) \\ \hline (c \equiv d) \end{array}
 \end{array}$$

Elas equivalem, em notação atual, às fórmulas $a \rightarrow b$, $a \rightarrow \neg(\neg b \rightarrow a)$, $\neg(f(b) \rightarrow \neg a) \rightarrow (\forall x)(f(x))$ e $(c = d) \rightarrow (d = c)$ ²⁰, respectivamente. Nota-se aqui que os sinais $|$ e \vdash correspondem, na devida ordem, aos conectivos \rightarrow e \neg , e o símbolo \smile , ao quantificador universal \forall . O sinal \neg , denominado *traço de conteúdo (Inhaltsstrich)*, é utilizado para indicar quando uma variável representa uma proposição ou quando uma combinação de sinais é uma fórmula, uma vez que Frege usa sem discriminação letras latinas minúsculas tanto como variáveis proposicionais como individuais. Outra peculiaridade da notação fregiana é o uso do sinal $|$, denominado *traço de condição (Bedingungsstrich)*, que conecta verticalmente, e não horizontalmente como o sinal \rightarrow , as fórmulas. Em CG, a teoria de funções de Frege ainda é incipiente e, por esse motivo, os conectivos e o sinal \smile ainda não designam funções, como proposto mais tarde no artigo FC²¹.

Em seu livro, Frege não se limita a expor o funcionamento de sua notação, dedicando apenas a primeira parte a essa tarefa. Nas duas partes restantes, apresenta algumas aplicações: na segunda parte, é mostrado como alguns teoremas lógicos podem ser derivados de uns poucos postulados formulados no seu simbolismo e, na terceira, como através deste simbolismo se exprimem algumas proposições da Aritmética.

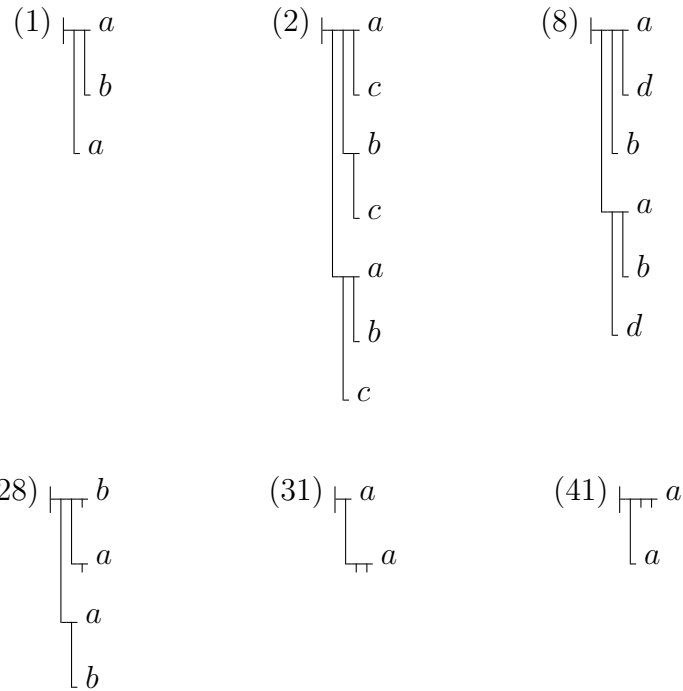
As seis proposições seguintes constituem os axiomas proposicionais de sua lógica:

²⁰ Em LFA, no lugar de \equiv , Frege passa a utilizar o sinal $=$.

²¹ A partir deste escrito, as fórmulas:

$$\neg \xi \quad , \quad \begin{array}{|c} \zeta \\ \hline \xi \end{array} \quad , \quad \vdash \xi \quad \text{e} \quad \smile f(a)$$

Passam a designar funções. A primeira delas é uma função cujo valor é o verdadeiro sempre que o seu argumento é o verdadeiro e cujo valor é o falso para qualquer outro argumento. A segunda e a terceira função correspondem às funções designadas por [Se ξ , então ζ] e por [Não é o caso que ξ], respectivamente. A terceira função, como vimos na seção anterior, tem como argumento uma outra função (FC).



Seguí acima a numeração dada em CG. O símbolo \vdash , anteposto a cada expressão, indica que as fórmulas são tautologias. É fácil ver que, em notação atual, as seis fórmulas se exprimem do modo seguinte:

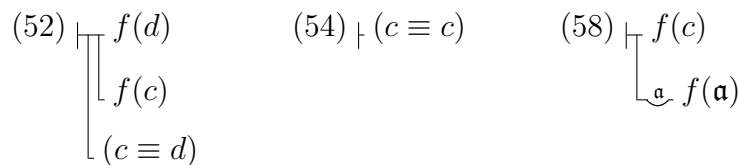
$$(1) a \rightarrow (b \rightarrow a) \qquad (2) (c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))$$

$$(8) (d \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a))$$

$$(28) (b \rightarrow a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b) \qquad (31) \neg(\neg a) \rightarrow a \qquad (41) a \rightarrow \neg(\neg a)$$

Para derivar outras tautologias a partir desses axiomas, Frege faz uso das regras de destacamento e substituição ²².

Para descrever o comportamento dos símbolos \smile e \equiv e a relação destes com as expressões de funções, Frege fornece mais três axiomas em CG:



²² Foi demonstrado por Łukasiewicz que o axioma (8) pode ser derivado dos axiomas (1) e (2) e que os três últimos axiomas podem ser substituídos pela tautologia $(\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow a)$ ([59]). Segundo o lógico polonês ([58]), o sistema lógico fregiano constitui a primeira versão axiomática do cálculo proposicional da história.

Que se exprimem atualmente como:

$$(52) (c = d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d)) \qquad (54) c = c$$

$$(58) (\forall x) (f(x)) \rightarrow f(c)$$

A despeito de suas valiosas contribuições para a Lógica, CG não foi, em princípio, bem acolhido. E mesmo as poucas críticas positivas que recebeu, como as de K. Lasswitz e de R. Hoppe, falharam em reconhecer os seus aspectos mais importantes ([10]). Entre as críticas negativas, convém destacar uma resenha publicada no mesmo ano que o livro, na qual o francês Paul Tannery expressa a sua dúvida quanto aos possíveis frutos da distinção função/argumento, e uma resenha publicada no ano seguinte, do lógico inglês John Venn, onde este afirma que o sistema fregiano é desajeitado e inconveniente ([11]).

Em resposta às resenhas negativas de seu livro, Frege escreveu, entre os anos de 1879 e 1882 – período denominado por Alcoforado ([2]) “fase defensiva” –, uma série de artigos com o propósito de explicar, de modo mais detalhado, o seu sistema notacional, suas aplicações e propósitos. São eles: *Aplicações da conceitografia* (1879), *A lógica calculatória de Boole e a conceitografia* (1880-1881), *A linguagem lógica formular de Boole e minha conceitografia* (1882), *Sobre a justificação científica de uma conceitografia* (1882) e *Sobre a finalidade da conceitografia* (1882-1883) ²³. Três desses artigos, a saber, o segundo, o terceiro e o quinto, foram motivados diretamente pelas críticas do lógico alemão E. Schröder, autor da resenha mais longa feita à época sobre a obra ²⁴.

Schröder, assim como os outros críticos, não percebeu o alcance da distinção função/argumento introduzida por Frege. A originalidade da análise da proposição em termos de função e argumento reside na possibilidade de distinguir, a partir dessa análise, a relação lógica que a proposição exprime. Enquanto a análise gramatical sugere que a relação entre o designado pelo sujeito e o designado pelo objeto gramatical na sentença [Sócrates é homem] é a mesma que na sentença [Os homens são mortais], a análise proposta por Frege mostra que não é bem assim. Na primeira sentença, o sujeito gramatical, [Sócrates], designa um indivíduo e o objeto gramatical, [homem], um conceito; na segunda sentença, tanto o sujeito, [os homens], como o objeto gramatical, [mortais], designam conceitos. Enquanto no primeiro caso se exprime que um objeto cai sob um conceito, no segundo se exprime que um conceito está subordinado a outro. O problema, assinala Frege em um manuscrito de 1897, é que:

²³ *Anwendungen der Begriffsschrift, Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift, Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift, Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift e Über den Zweck der Begriffsschrift.*

²⁴ Desses três artigos, os dois primeiros foram publicados postumamente

[...] nossos livros de Lógica ainda carregam algumas coisas – e.g., sujeito e predicado – que, a rigor, não pertencem à Lógica. Por isso, a familiaridade com um meio inteiramente diferente de expressão do pensamento, como temos na linguagem formular da aritmética ou em minha conceitografia, é também útil. ([27], p. 154)

Ciente da dificuldade imposta pela linguagem à realização de seu projeto, Frege desenvolveu o seu método de análise, criando, como resultado, a sua conceitografia. A importância dessa inovação é reconhecida pelo próprio Frege no prefácio de CG ao dizer que a mera invenção de sua notação conceitual fez a Lógica avançar. E completa:

Eu espero que os lógicos, caso não se deixem espantar pela primeira impressão de estranheza, não rejeitem as inovações que, por uma necessidade inerente ao próprio assunto, fui impelido a fazer. Estes desvios do tradicional encontram sua justificativa no fato de que a Lógica, até agora, sempre tem se afiliado à linguagem e à gramática. Particularmente, creio que a substituição dos conceitos de sujeito e predicado pelos de argumento e função manter-se-á afinal. ([36], p. xiii)

O caráter inovador de CG pode ser percebido quando comparado ao trabalho de um dos mais ilustres antecessores de Frege: George Boole. Segundo Beaney ([4]), o trabalho de Boole, tal como o de outros lógicos do século XIX, é marcado pela distinção entre dois cálculos lógicos: o silogístico e o proposicional. Com efeito, em seu *Laws of thought* (LT)²⁵ o lógico inglês apresenta as proposições divididas em duas grandes categorias: primárias e secundárias. As proposições do primeiro tipo exprimem relações entre classes de objetos, as do segundo, entre proposições. Pertencem à primeira categoria as proposições “Os homens são mortais” e “Toda raiz quadrada de 4 é uma raiz quarta de 16”, e à segunda a proposição “Se o Sol brilha, a Terra está aquecida”. A interpretação das proposições primárias no sistema booleano se faz pela interpretação em termos de classes do sujeito e do objeto gramatical das sentenças correspondentes. Assumindo, pois, que x e y sejam as classes dos homens e dos seres mortais, respectivamente, a proposição “os homens são mortais” se exprime como $x = vy$. A classe v , denominada classe indefinida, é uma espécie de operador que transforma a classe y em uma subclasse de y . Assim, vy designa a classe “alguns seres mortais”²⁶. A proposição secundária “se o Sol brilha, então a Terra está aquecida” se exprime do mesmo modo que as proposições anteriores no sistema de Boole, que associa as variáveis x e y às classes dos instantes de tempo em que as proposições “o Sol brilha” e “a Terra está aquecida”, respectivamente, são verdadeiras. Desse modo, ambas as categorias de proposições são interpretadas do mesmo modo na álgebra booleana. Consequentemente, o cálculo silogístico e o proposicional constituem diferentes interpretações da mesma álgebra, o que inviabiliza operar com os dois simultaneamente no sistema booleano ([4]).

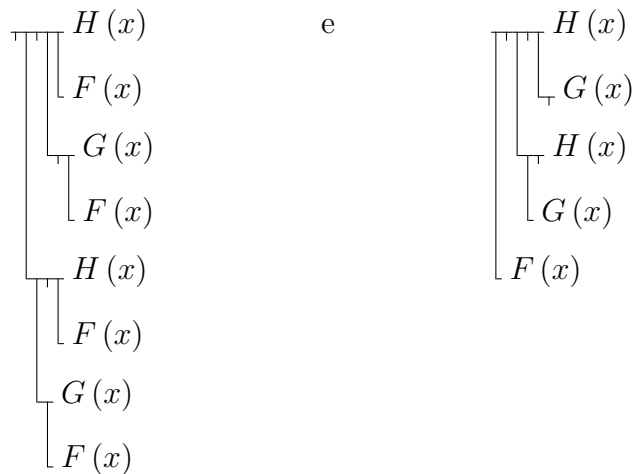
²⁵ *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, publicado em 1854.

²⁶ A intersecção de duas classes x e y é indicada pelo produto xy no sistema booleano.

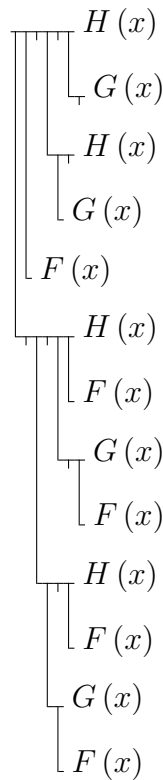
Porém, há proposições cujos conteúdos exprimem relações lógicas importantes entre proposições das duas categorias de Boole. Esse defeito do sistema booleano não escapou a Frege, como revela um dos artigos de sua fase defensiva: “Qualquer transição de um tipo de juízo para outro, que muitas vezes aparece no pensamento real, é cortada; pois não se pode usar símbolos idênticos com significado duplicado no mesmo contexto.” ([37], p. 100). Um exemplo de transição do tipo mencionado por Frege é a que ocorre entre as proposições “Ou os animais são racionais ou os animais são irracionais” e “Os animais são ou racionais ou irracionais”. Boole menciona essas duas proposições em LT, enfatizando que a primeira é uma proposição secundária e a segunda, primária, mas não diz nada sobre o fato de a primeira implicar logicamente a segunda ²⁷. O fato é que não se pode lidar com as duas proposições simultaneamente em seu sistema, pois as expressões que as representam envolvem classes de naturezas totalmente distintas. Admitindo que x , y e z são as classes dos animais, dos seres racionais e dos seres irracionais, respectivamente, as proposições “Os animais são racionais”, “Os animais são irracionais” e “Os animais são ou racionais ou irracionais” se expressam, respectivamente, como as equações $x = vy$, $x = vz$ e $x = v(y + z)$. Porém não há como conectar as equações $x = vy$ e $x = vz$. Se r e s designarem as classes dos instantes de tempo em que $x = vy$ e $x = vz$ são, na devida ordem, verdadeiras, então o sinal $+$ poderá ser empregado para conectar r e s , mas, nesse caso, a equação $x = v(y + z)$ nada possuirá em comum com a expressão $r + s$ ²⁸, e o vínculo entre as duas proposições acima se perderá. Frege, por sua vez, não necessita fazer a distinção de Boole, sendo capaz de lidar com ambas as proposições e sem que elas percam a conexão que há entre seus conteúdos. Associando as expressões $F(\xi)$, $G(\xi)$ e $H(\xi)$ às funções “ ξ é um animal”, “ ξ é um ser racional” e “ ξ é um ser irracional”, respectivamente, as proposições “Ou os animais são racionais ou os animais são irracionais” e “Os animais são ou racionais ou irracionais” admitem, respectivamente, as seguintes expressões em sua conceitografia:

²⁷ Porém, observa, corretamente, que a segunda não se reduz à primeira.

²⁸ A união de duas classes disjuntas x e y é indicada por Boole pela notação $x + y$. Por isso, $y + z$ designa a classe dos seres que são ou racionais ou irracionais e $r + s$, a classe dos instantes de tempo em que ou a proposição “os animais são racionais” ou a proposição “os animais são irracionais” é verdadeira.



E a conexão lógica entre as duas proposições é também exprimível:



Por isso, afirma Frege em um outro escrito de sua fase defensiva:

[...] eu evito uma tal separação em duas partes, das quais a primeira é dedicada à relação de conceitos (proposições primárias) e a outra, à relação de juízos, e faço um arranjo do todo. Em Boole, ambas as partes caminham em paralelo, de modo que uma é como um reflexo da outra, mas exatamente por isso elas não mantêm uma relação orgânica entre si. ([26], p. 15)

Naturalmente, subjacente a essa forma integrada de lidar com as duas partes do sistema booleano, há a distinção fregeana entre objetos e conceitos. Afinal, na proposição anterior

o que se exprime é que “todo objeto que está subordinado ao conceito ‘ ξ é um animal’ está ou subordinado ao conceito ‘ ξ é um ser racional’ ou subordinado ao conceito ‘ ξ é um ser irracional’ sempre que ou todo objeto que está subordinado ao conceito ‘ ξ é um animal’ está subordinado ao conceito ‘ ξ é um ser racional’ ou todo objeto que está subordinado ao conceito ‘ ξ é um animal’ está subordinado ao conceito ‘ ξ é um ser irracional’ ” . Por isso, a ausência de uma distinção similar em Boole é objeto de crítica por parte de Frege:

[...] acredito ter estabelecido de um modo apropriado e fácil uma relação orgânica entre ambas as partes de Boole. Sob esse ponto de vista também é feita justiça à diferença entre conceito e indivíduo, que é completamente obscurecida em Boole. A rigor, suas letras nunca significam indivíduos, ao contrário, sempre extensões de conceitos. Deve-se, pois, nesse caso, distinguir entre conceito e objeto, mesmo quando apenas um só objeto cai sob o conceito. O conceito “planeta cuja distância ao Sol está situada entre a de Vênus e a de Marte” é ainda algo diferente do objeto Terra, mesmo se apenas este cai sob aquele conceito. ([26], p. 19)

Aparentemente, Frege faz referência a um exemplo fornecido por Boole no início de LT. No terceiro capítulo do livro, o lógico inglês afirma que “o sol brilha” e “a Terra está aquecida” são exemplos de proposições primárias e que “Se o Sol brilha, a Terra está aquecida” é um exemplo de proposição secundária. Embora as duas primeiras proposições não sejam enunciados categóricos, tal como “Todo homem é mortal” e “Toda raiz quadrada de 4 é uma raiz quarta de 16” o são, Boole entende que elas devem pertencer à mesma classe a que pertencem, em seu sistema, as proposições da teoria silogística aristotélica. Isso porque, segundo ele, a proposição “o Sol brilha” equivale à proposição “o Sol é aquilo que brilha”, e esta expressa uma relação entre duas classes de coisas, nomeadamente, “o Sol” e “coisas que brilham”. Ele confunde o objeto, o Sol, com a classe cujo único elemento é esse objeto. No entanto, brilhar não é uma propriedade dessa classe, mas do objeto que é seu elemento. Ter um só elemento, por outro lado, é uma propriedade da classe dos objetos que são estrelas e em torno dos quais o planeta Terra orbita. O que se diz do objeto não se pode dizer da classe cujo elemento é o objeto, e reciprocamente. Esse é o ponto de Frege.

As diferenças entre o sistema lógico de Boole o seu, reconhece Frege, são reflexo de seus diferentes propósitos:

Avaliamos a linguagem formular de Boole inteiramente, assim reconhecemos que é um véu da Lógica abstrata em roupa de símbolos algébricos. Não é conveniente à expressão de um conteúdo e esse não é o seu propósito. Mas essa é precisamente a minha intenção. Eu desejo fundir os poucos símbolos que introduzo com os sinais já disponíveis em Matemática em uma única linguagem formular. ([37], p. 100)

Boole parece interessado nas semelhanças formais entre proposições primárias e secundárias, como dá a entender em LT: “the formal laws to which the operations of the mind are subject, are identical in expression in both cases. The mathematical processes which are founded on those laws are, therefore, identical also” ([7], p. 162). Por isso, ele sacrifica a expressão de um conteúdo em favor de uma notação algébrica que subsume os aspectos formais que o cálculo de classes tem em comum com o proposicional. Nesta notação, o que importa é a analogia entre o cálculo lógico e o aritmético. Frege, ao contrário, tem como prioridade a expressão de um conteúdo. Com esse objetivo em vista, os sinais algébricos não podem apresentar dentro de sua notação outro significado que não aquele que já possuem no interior das sentenças da Aritmética. “A analogia entre os métodos lógicos e aritméticos de cálculo, que é valiosa para Boole, pode apenas confundir se ambos são colocados juntos”, assinala Frege ([37], p. 100). Por conseguinte, o que ele se esforça para obter é, em primeira instância, uma linguagem universal para a Matemática, não meramente um cálculo lógico ([26]).

Recordemos neste ponto que Frege concebeu a sua notação como a realização parcial do plano leibniziano de uma linguagem que refletisse a estrutura do pensamento. Uma vez construída tal linguagem, Leibniz pensou, seria possível reduzir o raciocínio lógico a um procedimento mecânico, resultando, assim, na criação de um cálculo raciocinador ([94]). No entendimento de Frege, Boole – e também os seguidores deste – empreenderam apenas a segunda parte do projeto leibniziano. “Com certeza”, diz, “tem-se aqui as formas lógicas, embora não completamente; mas falta o conteúdo” ([38], p. 112).

Nota-se nos fragmentos anteriores o esforço de Frege em explicar porque sua conceitografia vai além da álgebra booleana e dos sistemas a esta similares e constitui, realmente, uma linguagem universal. Como disse anteriormente, os ensaios em que ele faz essas análises foram escritos em resposta, principalmente, a uma resenha que Schröder publicou sobre CG. Nesta, é sustentado que o sistema simbólico apresentado no livro não corresponde a uma tal linguagem:

[...] deve ser dito que a “Conceitografia” de Frege chama atenção em demasia em seu título – mais exatamente: que o título não corresponde, afinal, ao conteúdo [do livro]. Em vez de inclinar-se para o lado de uma “característica universal”, o presente trabalho – talvez, inconscientemente, o próprio autor – inclina-se decididamente para o lado do “cálculo raciocinador” de Leibniz [...] ([95], p. 82)

O motivo, explica Schröder em seu escrito, é que o sistema fregiano falha em construir os conceitos complexos a partir do menor número possível de conceitos fundamentais por meio de determinadas operações. Com essa justificativa, ele remete a Leibniz, para quem os conceitos podem ser analisados em termos de constituintes mais simples e, portanto,

obtidos por composição de outros conceitos. Nesse ponto, portanto, Schröder tem razão, pois no prefácio de CG Frege afirma que não teve intenção alguma de produzir uma similaridade entre a sua linguagem formular e a da aritmética pela percepção do conceito como soma de suas *notas características* (*Merkmale*).

Frege quer dizer em CG que não se utiliza dos sinais aritméticos para designar operações entre os conceitos, como Boole o faz. No sistema booleano, o conceito “animal racional ou irracional” é visto como uma combinação dos conceitos “animal”, “racional” e “irracional” através de dois operadores indicados pelos sinais de multiplicação e adição e é escrito como $x(y + z)$ (onde x , y e z representam, na devida ordem, os três conceitos). Frege, diferente de Boole, não começa com os conceitos e os põe juntos para formar uma proposição, pelo contrário, os primeiros é que são obtidos a partir da proposição, através do processo de análise. Enquanto Boole constrói a proposição “Bucéfalo é um animal racional ou irracional” combinando os três conceitos, Frege analisa a proposição como a expressão de uma relação entre um objeto e um conceito, no caso entre “Bucéfalo” e o conceito “ser um animal racional ou irracional”. Como a análise pode ser feita de diferentes maneiras, a mesma proposição pode ser vista como a expressão de duas relações: que o indivíduo “Bucéfalo” cai sob o conceito “ser um animal” e que o mesmo indivíduo cai sob o conceito “ser racional ou irracional”. Para traduzir a proposição em seu sistema expressando as duas relações, Frege não combina os conceitos e sim conecta as proposições que exprimem essas relações, mediante as constantes lógicas de sua conceitografia. Nesse sentido, ele diverge propositadamente de Leibniz:

Eu não começo pelos conceitos e os ponho juntos para formar o pensamento ou o juízo, ao contrário, eu extraio as partes do pensamento pela análise dos pensamentos. Por este meio, minha conceitografia distingue-se das criações similares de Leibniz e seus sucessores, apesar de, talvez, o nome não ter sido uma escolha feliz da minha parte. ([28], p. 273)

Porém, assim observa Sluga ([96]), há um outro aspecto em que Frege se aproxima de Leibniz, ao mesmo tempo em que se afasta de Schröder: o processo de construção da linguagem artificial, ao contrário do processo de manipulação dos seus elementos, isto é, ao contrário do cálculo propriamente dito, não é mecânico; ele demanda uma análise filosófica. Esta análise é o que permite que uma proposição formulada em uma linguagem natural seja vertida em um enunciado expresso em uma linguagem simbólica. Com a sua análise em termos de função e argumento e, ao mesmo tempo, com a subsunção das noções lógicas de conceito e relação sob uma concepção mais geral de função, Frege desenvolve um mecanismo de apreensão da estrutura da proposição e torna-se capaz de empreender essa tradução, que está ausente na lógica booleana e não é aventada por Schröder.

2 Russell e a noção de função proposicional

A noção de função proposicional foi introduzida por Russell no seu livro *The principles of mathematics* (PoM), cuja primeira edição foi publicada em 1903. Uma das noções fundamentais da teoria lógica discutida no livro, a noção passou a receber uma atenção cada vez maior de Russell nos anos seguintes, enquanto este trabalhava no seu próximo livro, *Principia mathematica* (PM). Início o presente capítulo com uma exposição da teoria das funções proposicionais tal como esta se apresenta no segundo livro, portanto, numa fase mais madura do trabalho de Russell sobre os fundamentos da Matemática. Nas seções seguintes, avalio como esta teoria evoluiu, discutindo as circunstâncias que resultaram no aparecimento da noção de função proposicional, e a comparo com a teoria fregiana de funções.

2.1 Funções proposicionais

Russell, independente de Frege, também propôs um método para analisar as proposições em termos de função e argumento. Contudo, a despeito da terminologia comum proveniente da Matemática e de algumas outras eventuais similaridades, os seus métodos divergem consideravelmente. Uma primeira diferença reside na relação que a proposição mantém com a função e com o(s) argumento(s) oriundos do processo de análise nos dois casos. Para Frege, o valor da função aplicada a esse(s) argumento(s) é o valor de verdade da proposição analisada, enquanto, para Russell, é a própria proposição:

By a “propositional function” we mean something which contains a variable x , and expresses a *proposition* as soon as a value is assigned to x . That is to say, it differs from a proposition solely by the fact that it is ambiguous: it contains a variable of which the value is unassigned. It agrees with the ordinary functions of mathematics in the fact of containing an unassigned variable: where it differs is in the fact that the values of the function are propositions. (PM, v. 1, p. 41, grifo do autor)

Por esse motivo, Russell denomina tais funções proposicionais. E, assim como Frege, distingue a função proposicional de um valor indefinido da função. Para tanto, utiliza a notação $\phi\hat{x}$ para um e a notação ϕx para o outro:

It is necessary practically to distinguish the function itself from an undetermined value of the function. We may regard the function itself as that which ambiguously denotes, while an undetermined value of the

function is that which is ambiguously denoted. If the undetermined value is written " ϕx " we will write the function itself " $\phi \hat{x}$ " (Any other letter may be used in place of x). Thus we should say " ϕx is a proposition", but " $\phi \hat{x}$ is a propositional function". (PM, v. 1, p. 42) ¹

A expressão ϕx atua, assim, como uma espécie de variável que representa uma classe de proposições; estas, por sua vez, são valores da função proposicional designada por $\phi \hat{x}$. As proposições "Aristóteles é sábio" e "Bucéfalo é sábio" são casos particulares da proposição " x é sábio" e são, por isso, valores da função proposicional " \hat{x} é sábio" aplicada aos argumentos "Aristóteles" e "Bucéfalo", respectivamente. Quando um objeto assume o lugar de x em ϕx e a proposição assim obtida é verdadeira, entre esse objeto e a função proposicional $\phi \hat{x}$ há uma relação que Russell expressa dizendo que o objeto *satisfaz* $\phi \hat{x}$. Por isso, "Aristóteles" satisfaz a função proposicional " \hat{x} é sábio" e "Bucéfalo" não a satisfaz. Os objetos que satisfazem uma função proposicional $\phi \hat{x}$, diz Russell, determinam uma classe, que é denotada por \hat{z} (ϕz). Funções proposicionais satisfeitas pelos mesmos objetos são por ele denominadas *coextensivas*.

Toda função proposicional $\phi \hat{x}$ possui, em adição à classe dos objetos que a satisfazem, um *domínio de significação* (*range of significance*) ², isto é, uma classe constituída pelos seus possíveis argumentos (objetos que a tornam uma proposição, independente de ser verdadeira ou falsa). Com relação aos objetos do domínio de significação, é claro, há três possibilidades: (i) todos satisfazem a função proposicional $\phi \hat{x}$, (ii) alguns a satisfazem ou (iii) nenhum a satisfaz. Essas situações são indicadas por Russell por meio das expressões $(x) . \phi x$, $(\exists x) . \phi x$ e $(x) . \sim \phi x$, respectivamente, que designam proposições. O símbolo (x) , naturalmente, corresponde ao nosso $(\forall x)$. Seguindo Peano, Russell denomina o x que ocorre nessas expressões *variável aparente* e o x que ocorre na expressão ϕx , *variável real*, o que corresponde, respectivamente, às expressões variável ligada e variável livre que usamos hoje em dia.

As expressões $\sim p$, $p \vee q$, $p . q$, $p \supset q$ e $p \equiv q$ designam valores indeterminados de funções proposicionais que têm como argumentos proposições ³, sendo que as três últimas delas correspondem, na devida ordem, às expressões $p \wedge q$, $p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$, empregadas atualmente.

Funções proposicionais cujos argumentos são outras funções proposicionais também podem ocorrer. Nesse caso, Russell usa a notação $f(\hat{\phi \hat{x}})$ para indicar a função proposicional

¹ Por isso, a expressão $\phi \hat{x}$ tem um papel análogo àquele que a expressão $\phi(\xi)$ possui na doutrina fregiana.

² O termo é utilizado por Russell em seu artigo *Mathematical Logic based on theory of types*.

³ Estas funções proposicionais são chamadas por Russell de funções de proposições e são introduzidas logo no início do primeiro volume de *Principia*, antes da parte em que é feita a distinção entre a função proposicional e o valor indeterminado da função. Com essa distinção em vista, a função proposicional relacionada ao valor indeterminado de $p \supset q$, por exemplo, seria indicada por $\hat{p} \supset \hat{q}$. Ao longo do livro, a distinção nem sempre é obedecida.

que tem como argumento $\phi\hat{x}$ e a notação $f(\phi\hat{x})$ para indicar o seu valor indeterminado. Para exprimir que a função proposicional $f(\phi\hat{x})$ é satisfeita por todos os seus possíveis argumentos, Russell usa a notação $(\phi).f(\phi\hat{x})$ e para expressar que é satisfeita por alguns de seus possíveis argumentos, $(\exists\phi).f(\phi\hat{x})$.

Uma função proposicional não pode estar no seu próprio domínio de significação. Isso ocorre por causa de um postulado que Russell assume em sua teoria, qual seja, o *princípio do círculo vicioso* (*vicious-circle principle*), que estabelece que nenhuma totalidade pode conter membros que pressuponham essa totalidade⁴. Se, por um lado, uma característica essencial das funções proposicionais, segundo Russell, é que estas *denotam ambigualmente* (*ambiguously denotes*) os seus muitos valores e, por esse motivo, os pressupõem – “uma função [proposicional] não está bem definida a menos que todos os seus valores já o estejam” (PM, v. 1, p. 41) –, por outro lado, para apreender uma função proposicional é preciso reconhecer uma proposição como valor dessa função para um dado argumento. Por exemplo, chegamos à função proposicional “ \hat{x} é sábio” porque analisamos a proposição “Sócrates é sábio” em termos dessa função e do argumento Sócrates. Sendo assim, a função proposicional também pressupõe a totalidade de seus possíveis argumentos e, por conseguinte, devido ao princípio do círculo vicioso, não pode ser um membro dessa totalidade. Pelo mesmo motivo, uma função proposicional não pode pertencer ao domínio de significação de uma outra função proposicional que tenha o mesmo domínio de significação que ela.

Além de proposições e funções proposicionais, Russell admite também a existência de indivíduos. Estes, diz, são os constituintes genuínos de proposições e funções proposicionais, uma vez que “não desaparecem sob análise” (*ibid.*, p. 53-54). Dentre as três categorias de entidades, somente os últimos constituem uma totalidade legítima. Porque se Δ fosse a classe de todas as proposições, esta teria como membro a proposição “toda proposição é ou verdadeira ou falsa”, que alude a Δ . De modo análogo, se houvesse a totalidade das funções proposicionais, essa totalidade teria como membro a função proposicional que é satisfeita por todas as funções proposicionais, e somente por estas, o que viola o princípio do círculo vicioso.

O fato de a coleção de todos os indivíduos constituir uma totalidade sugere a possibilidade da existência da coleção das funções proposicionais cujos domínios de significação coincidem com essa totalidade. Mas o princípio do círculo vicioso a ela opõe-se. Com efeito, se Γ é uma classe de funções proposicionais cujos domínios de significação coincidem

⁴ O postulado impede o aparecimento da contradição, que Russell encontrou para extensões de conceitos, na teoria de funções proposicionais. Pois se uma função proposicional pudesse ser um membro de seu domínio de significação, ela teria que ser ou não satisfeita por si mesma. Desse modo, poder-se-ia considerar a função proposicional satisfeita por todas as funções proposicionais que não são satisfeitas por si mesmas e esta função teria que ser ou não satisfeita por si mesma. Seria satisfeita por si mesma caso fosse uma função proposicional que não é satisfeita por si mesma, não seria satisfeita por si mesma caso não fosse uma função proposicional que não é satisfeita por si mesma.

com a totalidade dos indivíduos, $f(\hat{\phi}\hat{x})$ é uma função proposicional que determina a classe Γ e a é um indivíduo, então a proposição “ a pertence ao domínio de significação das funções proposicionais da classe Γ ” equivale à proposição “toda função proposicional $\phi\hat{x}$ que pertence à classe Γ é ou não é satisfeita por a ” e esta, por sua vez, tem o mesmo significado que “qualquer que seja a função proposicional $\phi\hat{x}$, se $\phi\hat{x}$ satisfaz $f(\hat{\phi}\hat{x})$, então a satisfaz $\phi\hat{x}$ ou satisfaz $\sim\phi\hat{x}$ ”. Usando a notação de *Principia*, a última equivale à proposição $(\phi) \cdot \{f(\phi\hat{x}) \cdot \supset: \phi a \vee \sim\phi a\}$ ⁵, valor de uma função proposicional aplicada ao argumento a , cujo domínio de significação coincide com a totalidade de indivíduos e que pressupõe a função que determina a classe Γ . Por causa do princípio do círculo vicioso, a classe Γ não pode conter aquela função e, sendo assim, a ela não pertencem todas as funções proposicionais de indivíduos.

Para contornar o problema, Russell organiza as funções proposicionais em ordens, numa hierarquia que leva em conta as variáveis aparentes dos valores indeterminados dessas funções. Ele denomina matrizes de primeira ordem as funções proposicionais de uma ou mais variáveis cujos são argumentos são indivíduos e cujos valores indeterminados não contêm variáveis aparentes. A partir das matrizes de primeira ordem, ele constrói novas funções proposicionais “acrescentando” quantificadores⁶ aos valores indeterminados das matrizes. Assim, se $\psi(x, y)$ e $\chi(x, y, z)$ são valores indeterminados de matrizes de primeira ordem, $(y) \cdot \psi(x, y)$, $(\exists y) \cdot \psi(x, y)$ e $(y) : (\exists z) \cdot \chi(x, y, z)$ são os valores indeterminados de novas funções obtidas das primeiras por meio do acréscimo de quantificadores⁷. Essas funções, cujas variáveis reais ou aparentes representam apenas indivíduos, são denominadas funções proposicionais de primeira ordem e são indicadas pela notação $\phi!\hat{x}$. São casos particulares de funções de primeira ordem “ \hat{x} é sábio”, “ \hat{x} é filho de \hat{y} ” e $(\exists y)(\hat{x}$ é filho de $\hat{y})$ (note que a primeira e a segunda são matrizes). As funções proposicionais de uma ou mais variáveis cujos argumentos são funções de primeira ordem e as funções proposicionais de mais do que uma variável que possuem variáveis representando tanto funções de primeira ordem como indivíduos, desde que seus valores indeterminados não apresentem variáveis aparentes, são denominadas matrizes de segunda ordem. A partir das matrizes de segunda ordem, outras funções proposicionais são obtidas acrescentando-se quantificadores aos seus valores indeterminados. Assumindo que $f(\phi!\hat{x})$, $g(\phi!\hat{x}, \psi!\hat{x})$ e $F(\phi!\hat{x}, y)$ são valores indeterminados de matrizes de segunda ordem, obtém-se as funções proposicionais $(\phi) \cdot g(\phi!\hat{x}, \psi!\hat{x})$, $(y) \cdot F(\phi!\hat{x}, y)$ e $(\phi) \cdot F(\phi!\hat{x}, y)$. Estas funções, cujas variáveis reais ou aparentes representam apenas funções proposicionais de primeira ordem ou que representam,

⁵ Em notação atual, $(\forall\phi)(f(\phi) \rightarrow (\phi a \vee \neg\phi a))$. Em lugar dos parênteses, Russell usa os dois pontos após o condicional para assinalar que o seu alcance compreende toda a expressão “ $\phi a \vee \sim\phi a$ ”, e não apenas a fórmula imediatamente à sua direita.

⁶ A palavra “quantificador” não é utilizada por Russell.

⁷ Os dois pontos à direita do quantificador (y) na expressão $(y) : (\exists z) \cdot \chi(x, y, z)$, indica que o alcance deste vai além da expressão imediatamente à sua direita, isto é, que ele se refere à expressão $(\exists z) \cdot \chi(x, y, z)$.

além destas, indivíduos, são denominadas funções proposicionais de segunda ordem. A função (ϕ) (se $\phi!\hat{x}$ é satisfeita por um sábio, então \hat{x} satisfaz $\phi\hat{x}$) é um exemplo de função proposicional de segunda ordem (desde que se assuma, é claro, que as entidades sábias são indivíduos). As matrizes de terceira ordem correspondem a funções proposicionais de uma ou mais variáveis cujos argumentos são funções de segunda ordem e a funções proposicionais de mais do que uma variável que possuem ao menos uma variável representando funções de segunda ordem, desde que os valores indeterminados de tais funções proposicionais não apresentem variáveis aparentes. A partir das matrizes de terceira ordem são construídas as funções de terceira ordem e o procedimento prossegue segundo o mesmo padrão.

Em resumo, as funções proposicionais de primeira ordem são aquelas cujas variáveis, reais ou aparentes, representam apenas indivíduos, e as funções proposicionais de ordem $n + 1$ são aquelas que possuem ao menos uma variável que representa uma função de ordem n e em que cada uma das demais variáveis representa ou um indivíduo ou uma função de primeira ordem ou uma função de segunda ordem ou ... ou uma função de ordem n .

A classificação acima, em que as funções proposicionais organizam-se em coleções de ordens cada vez maiores, é denominada *hierarquia dos tipos* (*hierarchy of types*). As funções proposicionais cujos argumentos são indivíduos (funções de nível 1) classificam-se em funções de primeira ordem, segunda ordem, terceira ordem e assim por diante. A função proposicional cujo valor indeterminado é $(\phi) \cdot \{f(\phi!\hat{x}) \cdot \supset: \phi!x \vee \sim \phi!x\}$, que pelo princípio do círculo vicioso não pertence à classe Γ apresentada anteriormente, constitui uma função proposicional de segunda ordem cujo domínio de significação é constituído por indivíduos. De modo geral, as funções proposicionais de um determinado nível $n > 0$ classificam-se em funções de ordem n , ordem $n + 1$ e assim sucessivamente. Entre as funções proposicionais de ordem n há ainda as *funções predicativas* de ordem n . As funções de primeira ordem são todas predicativas e uma função proposicional de ordem $n > 1$ é denominada predicativa de ordem n quando a função de maior ordem entre os seus possíveis argumentos possui ordem $n - 1$.

Entre as proposições também há uma hierarquia, que começa com as proposições elementares e que prossegue com as proposições de primeira ordem, de segunda ordem e assim sucessivamente. As proposições elementares são aquelas que não contêm funções proposicionais nem variáveis aparentes, por exemplo, “Sócrates é mortal” e “Sócrates é homem e Platão é sábio”. As proposições de primeira ordem não são elementares, não contêm funções proposicionais e as únicas variáveis aparentes que possuem representam apenas indivíduos. É exemplo de proposição de primeira ordem (x) (se x é homem, então x é sábio) e $(x)(\exists y)(x \text{ é filho de } y)$. As proposições de segunda ordem são aquelas que possuem, ao menos, uma variável aparente que representa uma função de primeira ordem, por exemplo:

(ϕ) (se $\phi!\hat{x}$ é satisfeita por um sábio, então Sócrates satisfaz $\phi!\hat{x}$)

e

$(\phi) (\exists x)$ (se $\phi!x$ é satisfeita por um sábio, então x satisfaz $\phi!x$).

Mais geralmente, se uma proposição possui ao menos uma variável aparente que representa uma função proposicional de ordem $n \geq 1$, então essa função tem ordem $n + 1$.

A impossibilidade de uma coleção que contenha todas as funções proposicionais de indivíduos inviabiliza importantes partes da Matemática, pois muitas são as proposições matemáticas que fazem referência a tal coleção. Uma delas é o princípio da indução finita, que pode ser assim enunciado: “todas as propriedades que pertencem a zero e ao sucessor de todo número que possui essas propriedades pertencem a todo número natural”. Um objeto ter uma determinada propriedade corresponde, para Russell, a esse objeto satisfazer uma determinada função proposicional. Por isso, o princípio acima pode ser reescrito como “qualquer que seja a função proposicional ϕx , se zero satisfaz ϕx e o sucessor de todo número que satisfaz ϕx também satisfaz ϕx , então todo número natural satisfaz ϕx ”. Mas este enunciado não é válido no âmbito de uma teoria que tem o princípio do círculo vicioso entre os seus postulados, haja vista que a sua formulação pressupõe a totalidade de funções proposicionais de indivíduos. Uma proposição que diga respeito a todas essas funções não tem significado, mas uma que contenha todas as funções proposicionais de primeira ordem, todas as de segunda ordem, todas as de terceira ordem e assim por diante, sim. O problema está na expressão “e assim por diante”, que carece, ela própria, de um significado preciso. Para contornar essa dificuldade, Russell introduz o por ele denominado *axioma da redutibilidade* (*axiom of reducibility*), que postula a existência, para qualquer função proposicional, de uma função predicativa coextensiva com ela. Com o axioma da redutibilidade, o princípio da indução pode ser traduzido para “qualquer que seja a função predicativa $\phi!x$, se zero satisfaz $\phi!x$ e o sucessor de todo número que satisfaz $\phi!x$ também satisfaz $\phi!x$, então todo número natural satisfaz $\phi!x$ ”. Assumindo que o princípio é válido para toda função predicativa, o axioma garante a sua validade para funções de qualquer ordem. De fato, se ψx é uma função proposicional satisfeita por zero e pelo sucessor de todo número que a satisfaz, então, pelo axioma da redutibilidade, existe uma função predicativa $\varphi!x$ também satisfeita por zero e pelo sucessor de todo número que satisfaz $\varphi!x$. Por conseguinte, pelo princípio da indução, conclui-se que todo número natural satisfaz $\varphi!x$. Como $\varphi!x$ é coextensiva com ψx , segue que todo número natural satisfaz a função proposicional ψx .

Vimos no capítulo anterior que as funções usuais da Matemática são, para Frege, casos particulares da noção mais geral de função, que compreende, além daquelas, conceitos e relações. Russell, ao contrário, considera que uma tal noção geral de função não existe. Em sua doutrina, expressões como [função seno] ou [função sucessor] nada designam e sentenças que contêm expressões como [o seno de $\frac{\pi}{3}$] ou [o sucessor de 2] exprimem

proposições que devem ser explicadas sem a necessidade de supor que estas expressões designam valores de entidades denominadas funções.

Nesse ponto, mais uma vez, as opiniões de Frege e Russell divergem substancialmente e são reflexo de suas teorias do significado. Para o primeiro, as proposições expressas pelas sentenças $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ é maior do que } \frac{1}{2} \right]$ (A) e $\left[\text{o seno de } \frac{\pi}{3} \text{ é maior do que } \frac{1}{2} \right]$ (B) são diferentes porque os sinais $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ e $\left[\text{o seno de } \frac{\pi}{3} \right]$ possuem sentidos distintos. Ambos os sinais possuem o mesmo referente, que é o argumento, nos dois casos, da função “ ξ é maior do que $\frac{1}{2}$ ”. Por isso, as duas proposições têm o mesmo valor de verdade. Para Russell, o elemento intermediário que há na doutrina fregiana entre o sinal e aquilo que o sinal designa não existe ⁸. As expressões que designam um objeto determinado, por ele denominadas nomes próprios, opõe-se àquelas que nada designam, por ele chamadas símbolos incompletos. As expressões $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ e $[\text{Sócrates}]$ são exemplos de nomes próprios; $\left[\text{o seno de } \frac{\pi}{3} \right]$ e $[\text{o filósofo que tomou cicuta}]$, denominadas descrições, de símbolos incompletos. De acordo com Russell, o *significado* (*meaning*) ⁹ de um nome próprio é aquilo que esse nome designa; as descrições não possuem um significado em isolamento, mas apenas no contexto de uma sentença. No seu entendimento, nomes próprios designam objetos específicos e, por isso, não necessitam ser constituintes de uma sentença para que tenham significado.

“Socrates”, for example, stands for a certain man, and therefore has a meaning by itself, without the need of any context. If we supply a context, as in “Socrates is mortal”, these words express a fact of which Socrates himself is a constituent: there is a certain object, namely Socrates, which does have the property of mortality, and this object is a constituent of the complex fact which we assert when we say “Socrates is mortal”. (PM, v. 1, p. 69)

Com as descrições, essa análise falha, reconhece Russell. Segundo ele, não se pode considerar, por exemplo, que a proposição “o quadrado redondo não existe” negue a existência de um certo objeto denominado “o quadrado redondo”, pois assumir que um objeto existe e depois negar a sua existência é contraditório. E completa:

Whenever the grammatical subject of a proposition can be supposed not to exist without rendering the proposition meaningless, it is plain that the grammatical subject is not a proper name, i.e. not a name directly representing some object. Thus in all such cases, the proposition must be capable of being so analysed that what was the grammatical subject shall have disappeared. Thus when we say “the round square does not

⁸ Exceto, como será mostrado, entre as expressões de funções proposicionais e as proposições

⁹ Em *On denoting*, artigo de 1905 em que introduz a sua teoria das descrições, Russell denomina aquilo que é designado pelo sinal sua *denotação* (*denotation*).

exist”, we may, as a first attempt at such analysis, substitute “it is false that there is an object x which is both round and square”. (PM, v. 1, p. 69)

Assim, o que a proposição expressa por uma sentença cujo sujeito gramatical é uma descrição de fato exprime é que uma determinada função proposicional possui uma certa propriedade. O que a proposição “o quadrado redondo não existe” exprime, realmente, é que a função proposicional “ \hat{x} é quadrado e redondo” não é satisfeita por objeto algum. Por conseguinte, enquanto a sentença (A) exprime que um determinado número possui a propriedade de ser maior do que $\frac{1}{2}$ (ou que esse número satisfaz a função proposicional “ \hat{x} é maior do que $\frac{1}{2}$ ”), a sentença (B) revela que a função proposicional “ \hat{x} é o seno de $\frac{\pi}{3}$ ” é satisfeita por um único objeto que também satisfaz a função proposicional “ \hat{x} é maior do que $\frac{1}{2}$ ”.

A longo de *Principia*, Russell exhibe uma notação própria para lidar com as descrições: se $\phi\hat{x}$ é uma função proposicional, a descrição [o x que satisfaz $\phi\hat{x}$] é por ele indicada por $(\iota x)(\phi x)$. Se $f\{(\iota x)(\phi x)\}$ é uma sentença cujo sujeito é essa descrição, ela pode ser reescrita como $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : fc$ ¹⁰, que exprime a existência de um único objeto c satisfazendo $\phi\hat{x}$ que satisfaz $f\hat{x}$. Pondo no lugar de ϕx a expressão $\left[x = \text{sen } \frac{\pi}{3}\right]$ na última sentença, obtem-se a forma equivalente de (B): $\left[(\exists c) : x = \text{sen } \frac{\pi}{3} . \equiv_x . x = c : c > \frac{1}{2}\right]$. Substituindo $\left[\frac{\pi}{3}\right]$ pela letra y , a última se converte na expressão do valor indeterminado de uma função proposicional na variável y . É em tais contextos que os sinais das funções usuais em Matemática, como $[\text{sen } y]$, ocorrem na doutrina russelliana. Como o uso desses sinais está conectado a contextos em que há a presença de descrições, Russell os denomina *funções descritivas*. Equações envolvendo funções descritivas, como $x = \text{sen } y$, são valores indeterminados de funções proposicionais de duas variáveis, isto é, de relações. Mas apenas as relações um para muitos – *i.e.*, aquelas cujos referidos possuem um único referente¹¹ – dão origem a descrições. Russell, diferente do que se faz hoje em dia, associa o argumento da função ao referido da relação, assim $x = f(y)$ se, somente se, xRy .

Os sinais para classes e relações também constituem símbolos incompletos. Se α é um símbolo de uma classe, então existe uma função proposicional, digamos $\phi\hat{x}$, tal que $\alpha = \hat{x}(\phi x)$. Uma vez que o sinal $\hat{x}(\phi x)$ é um símbolo incompleto, como toda descrição ele deve ser eliminado da sentença em que ocorre. Para tanto, Russell se utiliza mais uma vez do axioma da redutibilidade: se $f\{\hat{z}(\phi z)\}$ é uma sentença que contém o sinal da

¹⁰ Em notação atual: $(\exists c)((\forall x)(\phi x \leftrightarrow x = c) \wedge fc)$. A expressão $\phi x . \equiv_x . x$ é uma abreviatura para $(x) . (\phi x . \equiv . x = c)$ e os dois pontos entre c e fc é um indicativo de que o escopo esquerdo da conjunção é a fórmula $\phi x . \equiv_x . x = c$ e não somente a fórmula $x = c$ imediatamente à esquerda do conectivo.

¹¹ Os objetos que mantêm uma relação R com alguma entidade são denominados referentes de R ; assim, x é um referente de uma relação R quando existe algum y tal que x está relacionado com y segundo R . Já as entidades com que algum objeto mantém uma relação R são os referidos de R , ou seja, y é um referido de uma relação R quando existe algum x tal que x está relacionado com y segundo R . Russell usa os termos *referent* e *relata* para referente e referido, respectivamente.

classe determinada pela função proposicional $\phi\hat{z}$, então essa sentença deve ser reduzida à forma $(\exists\psi) : \phi x . \equiv_x . \psi!x : f \{\psi!\hat{z}\}$, que exprime a existência de uma função predicativa coextensiva com $\phi\hat{z}$ que satisfaz a função proposicional $f(\hat{\phi}\hat{x})$. Por exemplo, a sentença “ a é um indivíduo membro da classe determinada por $\phi\hat{x}$ ”, notação $a \in \hat{x}(\phi x)$, exprime o mesmo que “ a satisfaz a função proposicional $\phi\hat{x}$ ”, que equivale a “existe uma função predicativa $\psi!\hat{x}$ coextensiva com $\phi\hat{x}$ que é também satisfeita pelo indivíduo a ”. Em símbolos: $(\exists\psi) : \phi x . \equiv_x . \psi!x : \psi!a$. Por outro lado, “ α é uma parte da classe $\hat{x}(\phi x)$ ”, notação $\alpha \subset \hat{x}(\phi x)$, significa o mesmo que “ $(\exists\psi) : \phi x . \equiv_x . \psi!x : x \in \alpha . \supset_x . \psi!x$ ”.

O mesmo se aplica aos sinais de relações, porque se R é o sinal de uma relação binária, há uma função proposicional de duas variáveis $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$ tal que $R = \hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)$. Então, se $f\{\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)\}$ é uma sentença que contém o sinal da relação, deve ser reescrita como uma sentença que expresse a existência de uma função predicativa de duas variáveis $\psi!(\hat{x}, \hat{y})$ coextensiva com $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$ que satisfaz a função proposicional $f(\hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y}))$, i.e.: $(\exists\psi) : \varphi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi!(x, y) : f\{\psi!(\hat{x}, \hat{y})\}$.

A sentença “ R está contida em uma relação $\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)$ ”, por exemplo, equivale a “ $(\exists\psi) : \varphi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi!(x, y) : xRy . \supset_{x,y} . x\{\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)\}y$ ”.

2.2 O “grande livro”

Concluído em maio de 1902 e publicado um ano depois, *The principles* é um livro de mais de quinhentas páginas sobre os fundamentos da Matemática, dividido em sete partes que tratam dos seguintes assuntos: (i) *The Indefinables of Mathematics*, (ii) *Number*, (iii) *Quantity*, (iv) *Order*, (v) *Infinity and Continuity*, (vi) *Space*, (vii) *Matter and Motion*. A primeira dessas partes ocupa-se das noções fundamentais da Matemática¹², enquanto a segunda lida com a noção de número. Na parte três são discutidas as noções de quantidade, magnitude e medida¹³; na parte quatro, as de ordem e progressão¹⁴. A quinta parte dedica-se, essencialmente, ao estudo dos números reais e do infinito. As duas últimas

¹² Entre elas, as noções de classe e função proposicional.

¹³ Duas quantidades iguais possuem, de acordo com Russell, a mesma magnitude (PoM, § 151). A medida de magnitudes é o método pelo qual uma correspondência biunívoca é estabelecida entre todas ou algumas magnitudes de um certo tipo e todos ou alguns números de uma certa categoria (PoM, § 164). Por exemplo, um ângulo plano é uma quantidade e a sua amplitude, uma magnitude (visto que ângulos congruentes possuem a mesma amplitude). O que é medido, portanto, é a amplitude do ângulo e não o ângulo. A medida da amplitude do ângulo, por sua vez, é estabelecida a partir de uma bijeção entre as amplitudes possíveis de um ângulo plano e um intervalo de números reais.

¹⁴ Nessa parte, Russell objetiva tornar preciso a noção de ordem e, por conseguinte, a de seqüência, através da teoria de relações. “The importance of order, from a purely mathematical standpoint, has been immeasurably increased by many modern developments. Dedekind, Cantor, and Peano have shown how to base all Arithmetic and Analysis upon series of a certain kind – *i. e.* upon those properties of finite numbers in virtue of which they form what I shall call a *progression*.”, escreveu (PoM, § 187, grifo do autor).

partes referem-se, na devida ordem, à Geometria e à Dinâmica – esta vista como uma parte da Matemática. Além disso, o livro ainda apresenta dois apêndices: (A) *The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege* e (B) *The Doctrines of Types*. O primeiro consiste de uma discussão a respeito do trabalho de Frege e o segundo, de uma apresentação da primeira versão da teoria dos tipos.

A estrutura de *The principles* está intimamente relacionada aos estudos que seu autor vinha conduzindo ao longo dos anos que antecederam a sua publicação. Russell expõe no prefácio de seu livro – datado de dezembro de 1902 – que seis anos antes havia iniciado uma investigação em filosofia da Dinâmica que o levava a reexaminar os princípios da Geometria, portanto à filosofia da continuidade e do infinito e por conseguinte à Lógica Simbólica. Tal sequência de investigações fazia parte de um projeto maior relatado em sua autobiografia:

During this time my intellectual ambitions were taking shape. I resolved not to adopt a profession, but to devote myself to writing. I remember a cold, bright day in early spring when I walked by myself in the Tiergarten, and made projects of future work. I thought that I would write one series of books on the philosophy of the sciences from pure mathematics to physiology, and another series of books on social questions. I hoped that the two series might ultimately meet in a synthesis at once scientific and practical. [...] The moment was an important and formative one as regards my purposes. ([77], p. 184-185) ¹⁵

Em um pequeno texto escrito em 1896 sob o título *Note on the logic of the sciences* ¹⁶, Russell explica o seu projeto:

Every science works with a certain limited number of fundamental ideas, which number is smaller than that of all fundamental ideas. [...] What we have to do, therefore, in a logic of the sciences, is to construct, with the appropriate set of ideas, a world containing no contradictions but those which unavoidably result from the incompleteness of these ideas. Within any science, all contradictions not thus unavoidable are logically condemnable [...] We have, therefore, first to arrange the postulates of the science so as to have the minimum of contradictions; then to supply, to these postulates or ideas, such supplement as will abolish the special contradictions of the science in question, and thus pass out side to a new science, which may then be similarly treated. ([80], p. 5)

Nessa passagem vemos que pretendia fazer uma transição de uma ciência para outra, formando uma cadeia onde cada nível conteria contradições que seriam eliminadas no nível

¹⁵ O período aludido nessa passagem corresponde ao primeiro trimestre de 1895, quando Russell e sua esposa na época, Alys, estiveram em Berlim. Tiergarten, o local referido, é um parque situado na cidade alemã. Durante a Segunda Grande Guerra, esse parque foi substancialmente destruído, sendo restaurado a partir da década de 1950 ([1]).

¹⁶ O texto não foi publicado à época; ele é parte de um caderno de anotações que Russell manteve na década de 1890 ([80]).

seguinte ([65]). Fica claro que ele via a noção de número como a mais fundamental; o primeiro nível da cadeia seria, portanto, a Aritmética. A partir da ciência do número ele então passaria para a Geometria e a partir daí, para a Física, conforme indicado em seu manuscrito:

Thus e. g. Number, the fundamental notion of Arithmetic, involves something numerable. Hence Geometry, since space is the only directly measurable element in sensation. Geometry, again, involves something which can be located, and something which can move – for a position, by definition, cannot move. Hence matter and Physics. ([80], p. 5)

Na Física, Russell transitaria da Cinemática para a Dinâmica e, posteriormente, desta para a Psicologia, partindo, finalmente, da última para a Metafísica, onde mais nenhuma contradição seria encontrada ([65]). A impossibilidade de uma obra que abrangesse todos esses assuntos deve ter se revelado mais tarde, pois o último nível daquela cadeia discutido em *The principles* é o da Física. A seu respeito registrou:

The final outcome, as regards the philosophy of Dynamics, is perhaps rather slender; the reason of this is, that almost all the problems of Dynamics appear to me empirical, and therefore outside the scope of such a work as the present. Many very interesting questions have had to be omitted [...] as not relevant to my purpose [...] ([92], p. xvii)

Alguns anos de trabalho foram consumidos e muitos rascunhos foram feitos até que o livro ficasse pronto. Os três primeiros esboços de *The principles* foram elaborados entre 1898 e 1899. O texto *An analysis of mathematical reasoning* – dividido em quatro partes: (i) *The Manifold*, (ii) *Number*, (iii) *Quantity* e (iv) *The Infinitesimal Calculus* – foi o primeiro, em 1898. A próxima tentativa na direção de *The principles* consistiu em *An inquiry into the mathematical categories*, do mesmo ano. Embora os manuscritos desse texto tenham se perdido, sabe-se que ele devia ser constituído de nove partes ([62]): (i) *Identity and Diversity*, (ii) *Number*, (iii) *Whole and Part*, (iv) *Quantity*, (v) *Order*, (vi) *Extensive Continuity*, (vii) *Things*, (viii) *Matter and Causality* e (ix) *Space and Time*. O terceiro esboço, sob o título *The fundamental ideas and axioms of mathematics*, surgiu no ano seguinte; ele contém, salvo a primeira, as mesmas partes que o segundo ¹⁷.

Mais cinco esboços conhecidos do livro, todos intitulados *The principles of mathematics*, foram compostos entre 1899 e o ano de sua publicação. O primeiro desses rascunhos, elaborado entre setembro de 1899 e junho de 1900, contém sete partes ([62]):

¹⁷ Enquanto trabalhava nesse texto, em julho de 1899, Russell reportou seu progresso a seu amigo G. E. Moore: “I [...] am now re-writing my big book. I find Order and Series a most fruitful and important topic, which philosophers have almost entirely neglected.” (*apud* Moore, [62], p. 5).

(i) *Number*, (ii) *Whole and Part*, (iii) *Quantity*, (iv) *Order*, (v) *Continuity and Infinity*, (vi) *Space and Time* e (vii) *Matter and Motion*¹⁸. O trabalho foi temporariamente interrompido porque em julho de 1900 Russell foi (acompanhado de Whitehead) ao Congresso Internacional de Filosofia, em Paris. Lá ele encontrou Peano, que lhe forneceu cópias de seus trabalhos. Por meio destes Russell aprendeu a lógica simbólica do matemático italiano, que a partir de então passou a exercer forte influência sobre seu próprio trabalho¹⁹. A respeito desse encontro ele escreveu:

The Congress was a turning point in my intellectual life, because I there met Peano. I already knew him by name and had seen some of his work, but had not taken the trouble to master his notation. In discussions at the Congress I observed that he was always more precise than anyone else, and that he invariably got the better of any argument upon which he embarked. As the days went by, I decided that this must be owing to his mathematical logic. I therefore got him to give me all his works, and as soon as the Congress was over I retired to Fernhurst to study quietly every word written by him and his disciples. It became clear to me that his notation afforded an instrument of logical analysis such as I had been seeking for years, and that by studying him I was acquiring a new and powerful technique for the work that I had long wanted to do. ([77], p. 217-218)²⁰

A maior parte do que eventualmente publicou em *The principles* Russell escreveu logo após o congresso, ainda no mesmo ano ([77]). Após deixar o projeto de lado por alguns meses, retornou a ele em maio do ano seguinte, reescrevendo a primeira parte do livro ([63]). No novo texto ele reenumerou as partes escritas em 1900 e acrescentou uma nova parte primeira – esta sob o título *The Variable* e dividida nos capítulos: (i) *The Definition of Pure Mathematics*, (ii) *Terms and Concepts*, (iii) *Classes and Relations*, (iv) *Conjunction and Disjunction*, (v) *The Variable*, (vi) *Implication*, (vii) *Peano’s Symbolic Logic* e (viii) *Summary of Part I*. Dos esboços feitos até então, esse é o primeiro a conter a sua tese logicista. No primeiro parágrafo do capítulo primeiro está registrado:

Pure Mathematics is the class of all propositions of the form “*a* implies *b*” where *a* and *b* are propositions each containing at least one variable, and containing no constants except logical constants or such as can be defined in terms of logical constants. ([84], p. 185)

¹⁸ A primeira parte desse texto (*Number*) passaria, mais tarde, a ser a segunda de *The principles* e a segunda parte (*Whole and Part*) tornar-se-ia um dos capítulos da segunda parte.

¹⁹ Não apenas noções técnicas Russell aprendeu com Peano: lendo uma resenha de *Grundgesetze der Arithmetik* publicada pelo italiano em 1895, o lógico inglês tornou-se ciente da existência de Frege ([49]).

²⁰ Fernhurst é uma vila do distrito de Chichester, condado de West Sussex, sudeste da Inglaterra, onde Russell possuía um chalé que usava para trabalhar.

Ao dizer que as proposições da Matemática não contêm nenhuma outra constante que não as da Lógica, ou aquelas que podem ser definidas a partir delas, Russell está admitindo que as noções da primeira ciência reduzem-se, na verdade, às da segunda. Mas essa não é a única conexão que percebeu existir entre essas proposições, nem a sua primeira afirmação do logicismo. Em um artigo escrito em janeiro do mesmo ano, *Recent work on the principles of mathematics*, Russell afirma que as proposições da Matemática resumem-se a consequências de postulados lógicos:

All pure mathematics – Arithmetic, Analysis and Geometry – is built up by combinations of the primitive ideas of logic, and its propositions are deduced from the general axioms of logic, such as the syllogism and the other rules of inference. ([86], p. 367)

Uma questão interessante emerge nesse ponto: o que levou Russell a conectar as duas áreas? Antes do trecho acima, ainda no mesmo parágrafo, ele diz que a Lógica se distingue pelo fato de ser possível colocar as suas proposições em uma forma na qual elas se aplicam a coisas de qualquer tipo. Portanto, em sua opinião, a característica que distingue as proposições da Lógica das proposições das outras áreas é a sua generalidade. Mas qual deve ser a forma de uma proposição que diz respeito a toda e qualquer coisa? Uma forma que contenha variáveis ²¹, naturalmente. O silogismo “se algum A é B e todo B é C , então algum A é C ”, *e.g.*, corresponde a uma proposição verdadeira independente de A , B e C corresponderem respectivamente a *mamífero*, *morcego* e *animal voador* ou a *semi-grupo*, *grupo* e *monóide*. Essa generalidade é uma consequência da presença das variáveis A , B e C . Conforme expresso no fragmento reproduzido a seguir, proveniente do seu artigo, Russell deu-se conta que as proposições da Matemática possuem uma universalidade peculiar às da Lógica:

Pure mathematics consists entirely of assertions to the effect that, if such and such a proposition is true of anything, then such and such proposition is true of that thing. It is essential not to discuss whether the first proposition is really true, and not to mention what the anything is, of which it is supposed to be true. Both these points would belong to applied mathematics. [...] If our hypothesis is about anything, and not about some one or more particular things, then our deductions constitute mathematics. Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true. (*ibid.*, p. 366)

Essa característica, reconheceu, resulta da possibilidade de as proposições da Matemática, assim como as da Lógica, serem expressas por formas que contenham letras atuando como

²¹ Uma das grandes invenções de Aristóteles, diz Łukasiewicz ([60]), foi justamente a introdução das variáveis em Lógica.

variáveis. A proposição “todo triângulo isósceles possui dois ângulos internos congruentes” é um exemplo disso, pois pode ser reformulada para “qualquer que seja x , se x é um triângulo isósceles, então x possui dois ângulos internos congruentes”. Não é estranho que a percepção desse fato tenha ocorrido após o seu encontro com Peano. Em seu livro *My philosophical development* (MPD), Russell comenta que um dos dois grandes avanços técnicos que aprendeu com Peano foi a distinção entre proposições da forma “Sócrates é Mortal” e da forma “Todos os gregos são mortais”²². A última, tal como o exemplo anterior, pode ser substituída por uma forma equivalente contendo uma variável. Se G e M designam as classes dos gregos e dos mortais, respectivamente, ela pode ser expressa pela seguinte notação, desenvolvida por Peano: $x \in G \supset_x x \in M$ ²³. Talvez por isso Russell afirme em seu esboço que as proposições da Matemática são implicações em que o antecedente e o conseqüente contêm, além de constantes lógicas ou constantes definidas em termos puramente lógicos, ao menos uma variável: ele enxergou, através da linguagem simbólica do italiano, que esse é um padrão inerente a tais proposições. Como veremos mais adiante, ele notou também que sentenças como [se algum A é B e todo B é C , então algum A é C] não designam uma proposição, mas indicam muitas.

Segundo Moore ([63]), o esboço de 1901 contém também a primeira menção ao paradoxo de Russell. Além dos avanços técnicos mencionados anteriormente, diz Moore, Russell derivou de Peano o princípio da compreensão, que postula a existência, para cada predicado, de uma classe dos objetos que possuem esse predicado: “Propositions of the subject-predicate type always imply and are implied by other propositions of the type which asserts that an individual belongs to a class”, afirma Russell em seu manuscrito ([84], p. 191-192). Uma outra categoria de proposições igualmente simples, assim o assevera, é aquela à qual pertencem as proposições que asserem uma relação entre dois termos. Por isso, axiomas que relacionam classes e relações são importantes:

For the general theory of relations, especially in its mathematical developments, certain axioms relating classes and relations are of great importance. It is to be held that to have a given relation to a given term is a predicate, so that all terms having this relation to this term form a class. It is to be held further that to have a given relation at all is a predicate, so that all referents with respect to a given relation form a class. ([84], p. 194)

O axioma acima postula que ser o referente de uma dada relação é um predicado; o princípio da compreensão garante, por conseguinte, a existência da classe dos referentes

²² O outro foi a distinção entre uma classe com um único membro e esse membro. Ambos os avanços, reconhece Russell, foram feitos anteriormente a Peano por Frege ([78]).

²³ Russell não usa notação simbólica em *The principles*, apenas em *Principia*. Neste ora emprega a notação de Peano ora adota a forma modificada $(x) : x \in G . \supset . x \in M$.

da dada relação, isto é, a existência do seu *domínio*. Mas esse axioma requer alguma limitação, como Russell observa no parágrafo seguinte ao do fragmento anterior:

The axiom that all referents with respect to a given relation form a class seems, however, to require some limitation, and that for the following reason. We saw that some predicates can be predicated of themselves. Consider now those (and they are the vast majority) of which this is not the case. These are the referents (and also the relata) in a certain complex relation, namely the combination de non-predicability with identity. But there is no predicate which attaches to all of them and to no other terms. For this predicate will either be predicable or not predicable of itself. If it is predicable of itself, it is one of those referents by relation to which it was defined, and therefore, in virtue of their definition, it is not predicable of itself. Conversely, if it is not predicable of itself, then again it is one of the said referents, of all of which (by hipoteses) it is predicable, and therefore again it is predicable of itself. This is a contradiction, which shows that all the referents considered have no common predicate, and therefore do not form a class. ([84], p. 195)

Seja R a relação existente entre os predicados que não são predicados de si mesmos. “Ser humano” é um exemplo de predicado desse tipo, pois ele se aplica a Sócrates e a Platão, mas não a si mesmo. Quando é dito que R é uma combinação de não-predicação com identidade, significa que, dados p e q , p relaciona-se com q se, e somente se, p não é predicado de q e $p = q$. Denotando por P o predicado que se aplica aos elementos do domínio de R , e somente a eles, há duas possibilidades: P aplica-se ou não a si mesmo ou, de modo equivalente, P é ou não predicado de si mesmo. Se o primeiro caso ocorre, então P deve ser um elemento do domínio de R , pois só aos membros desta classe P se aplica. Logo, pela definição de R , P não é predicado de si mesmo. Se o segundo caso ocorre, então P não pode ser um elemento do domínio de R , pois a ele P não se aplica, e assim, novamente pela definição de R , P pertence à categoria dos predicados que são predicados de si mesmos. Em ambos os casos obtemos uma contradição e por esse motivo Russell rejeita a existência de um predicado partilhado pelos referentes da relação R .

Russell relata que foi levado à contradição ²⁴ ao considerar a prova de Cantor de que não existe um maior número cardinal ²⁵:

I thought, in my innocence, that the number of all the things there are in the world must be the greatest possible number, and I applied his

²⁴ Russell não foi o único a chegar ao paradoxo. Há evidências que apontam para a possibilidade de que Zermelo o tenha encontrado ao mesmo tempo que ou ainda antes dele ([72]).

²⁵ Dois conjuntos A e B possuem o mesmo número cardinal ou a mesma cardinalidade, notação $\overline{A} = \overline{B}$, quando existe uma bijeção de A em B . O Teorema de Cantor estabelece que, para qualquer conjunto X , $\overline{X} < \overline{\mathcal{P}(X)}$, onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X (dizer que $\overline{A} < \overline{B}$ significa que existe uma bijeção de A em uma parte própria de B , mas não de A em B). Como consequência do teorema, para todo número cardinal α , existe um número cardinal β tal que $\alpha < \beta$.

proof to this number to see what would happen. This process led me to the consideration of a very peculiar class. [...] it seemed to me that a class sometimes is, and sometimes is not, a member of itself. The class of teaspoons, for example, is not another teaspoon, but the things that are class of things that are not teaspoons, is one of the things that are not teaspoons. There seemed to be instances which are not negative: for example, the class of all classes is a class. The application of Cantor's argument led me to consider the class that are not members of themselves [...] ([78], p. 58).

A classe das classes que não são membros de si mesmas deve ser ou não um membro de si mesma. Se for um membro de si mesma, então possui a propriedade de não ser membro de si mesma. Se não for um membro de si mesma, então não possui a propriedade de não ser membro de si mesma, isto é, é membro de si mesma. Tal como na versão descrita em termos de predicados, obtém-se uma contradição.

Embora o paradoxo só tenha sido percebido em 1901, Russell teve contato com o trabalho de Cantor ainda antes de iniciar *The principles*, em 1896, ao fazer uma resenha para a revista *Mind* do livro *Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine*²⁶, do filósofo francês Arthur Hannequin ([40]). A avaliação do livro foi positiva, mas não das ideias de Cantor:

[...] the attempts of Cantor to extend the conception of pure number so as to cover continua – which Hannequin, following Kerry, subjects to a criticism both sound and conclusive so far as it goes – seem to me, ingenious as they are, to be open to even severer strictures. For Cantor's second class of numbers, by which he hopes to exhaust continua, begins with the first number large than any of the first class; but as the first class (the ordinary natural numbers) has no upper limit, it is hard to see how the second class is ever to begin. Cantor's attempts, indeed, seem to have proved, more conclusively than ever, that no legitimate extension of number can suffice for the adequate treatment of continua. ([82], p. 37)

Pelo visto, Russell não entendeu as definições de Cantor. A segunda classe de números (*second class of numbers*) consiste de uma classe de números ordinais. Dois conjuntos A e B totalmente ordenados possuem o mesmo tipo ordinal, notação $\bar{A} = \bar{B}$, quando são isomorfos. Dizemos que uma relação de ordem R sobre um conjunto X é total ou linear quando dois elementos quaisquer de X são comparáveis mediante a relação, isto é, quando xRy ou yRx quaisquer que sejam $x, y \in X$; neste caso, diz-se que o conjunto X é totalmente ou linearmente ordenado por R . Se dois conjuntos A e B são totalmente ordenados pelas relações de ordem R e S , respectivamente, eles são isomorfos quando há uma bijeção f de A em B e quando, quaisquer que sejam $x, y \in A$, xRy se, e somente se, $f(x)Sf(y)$. Cantor chamava essa relação entre os dois conjuntos de *similaridade*

²⁶ Trata-se de um livro sobre o atomismo que contém uma discussão sobre a concepção de Cantor do *continuum* ([65]).

(*Aehnlichkeit*). Os números ordinais foram então introduzidos por ele como sendo os tipos ordinais de conjuntos bem-ordenados ([12]). Um conjunto X é bem-ordenado pela relação R quando R é uma relação de ordem total sobre X e todo subconjunto não-vazio de X possui um menor elemento por R . Os ordinais finitos são os números ordinais dos conjuntos bem-ordenados finitos e a primeira classe (*first class*) que Russell menciona acima corresponde à classe dos ordinais finitos. Em teoria dos conjuntos (Zermelo-Fraenkel), define-se o sucessor X^+ de um conjunto X como sendo união $X \cup \{X\}$ e identifica-se os números naturais $0, 1, 2, 3, \dots$ com os conjuntos $\emptyset, \emptyset^+, (\emptyset^+)^+, ((\emptyset^+)^+)^+, \dots$ ²⁷, que são bem-ordenados pela relação \in de pertinência. Os ordinais finitos são, então, identificados com os números naturais. A classe formada por esses números (cuja existência nessa teoria é um consectário do axioma do infinito) é também um conjunto bem-ordenado pela mesma relação (a rigor, sobre cada conjunto X é definida uma relação de pertinência \in_X própria). A partir do número ordinal dessa classe, denotado por ω por Cantor, forma-se uma nova classe de ordinais $\omega, \omega^+, (\omega^+)^+, ((\omega^+)^+)^+, \dots$, a que Russell se refere acima como segunda classe de números. Esta classe “começa” com o número ordinal da primeira classe.

A opinião de Russell a respeito de Cantor modificou-se mais tarde, sendo os resultados obtidos por este em teoria dos conjuntos largamente utilizados em *The principles*, conforme reconhecido no prefácio da obra. No livro *Portraits from memory*, Russell afirma que o trabalho dos matemáticos alemães sobre os princípios da matemática à época era muito melhor do que qualquer outro sobre o assunto alhures ([75]). Destaca entre eles Weierstrass, Dedekind e, principalmente, Cantor. Sobre este, escreveu ele:

He developed the theory of infinite numbers in epoch-making work which showed amazing genius. The work was very difficult and for a long time I did not fully understand it. I copied it, almost word for word, into a notebook because I found that this slow mode of progression made it more intelligible. While I was doing so I thought his work fallacious, but nevertheless persisted. When I had finished, I discovered that the fallacies had been mine and not his. ([75], p. 21)

Não se sabe exatamente quando o penúltimo rascunho de *The principles* – o quarto sob o título *The principles of mathematics* – foi composto. Ele consiste de uma tabela de conteúdos na qual a primeira parte do livro apresenta-se com o mesmo título da versão definitiva e com onze capítulos: i) *The Definition of Pure Mathematics*, (ii) *Terms and Concepts*, (iii) *Propositions and Assertion*, (iv) *Implication*, (v) *Propositions of Given Form*, (vi) *The Variable*, (vii) *Conjunction, Disjunction and Negation*, (viii) *Classes: Extension*

²⁷ Ou, de modo equivalente, com os conjuntos $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim por diante.

and Intension, (ix) *Relations*, (x) *Definition* e (xi) *Peano's Symbolic Logic* ([64]). O último esboço de *The principles* foi elaborado em abril de 1902. Ele também possui uma tabela de conteúdos para a primeira parte do livro, mas contém, além disso, um plano de alterações para cada um dos seus capítulos. Nesse último rascunho a primeira parte traz o título *The Variable* novamente ²⁸ e apresenta os seguintes capítulos: (i) *The Definition of Pure Mathematics*, (ii) *Symbolic Logic*, (iii) *Implication and Formal Implication*, (iv) *Proper Names, Adjectives and Verbs*, (v) *Denoting*, (vi) *Classes*, (vii) *Assertions*, (viii) *The Variable*, (ix) *Relations* e (x) *The Contradiction* ([64]).

O livro foi finalmente concluído no dia 23 de maio. Ao longo dos meses que se seguiram, no entanto, Russell fez mais algumas modificações no texto, incluindo os dois apêndices possivelmente ainda no mesmo ano ([62]). Na primeira quinzena de maio de 1903, ele foi publicado. Sua audiência consistiu principalmente em filósofos e matemáticos interessados nos assuntos uns dos outros, especialmente em teoria dos conjuntos, tendo ele recebido resenhas de Hausdorff, Couturat, Peirce, do americano E. B. Wilson e do lógico londrino A. T. Shearman, que o descreveu como “o mais importante livro sobre Lógica desde *Laws of thought*, de George Boole” (*apud* Guinness, [41], p. 330).

2.3 Principia Mathematica

A intenção de Russell em escrever algo em colaboração com Whitehead surgiu antes do término de *The principles*. Em uma carta destinada a Couturat, de outubro de 1901, ele relata que pretendia elaborar com o amigo um livro sobre lógica de relações e que precisaria de ao menos dois anos para completá-lo ([65]). O livro em questão tornou-se o clássico *Principia mathematica* (PM) e levou muito mais tempo do que o previsto para sua conclusão.

Os três volumes de *Principia* juntos totalizam quase duas mil páginas. Trata-se, portanto, de uma obra manumental sobre os fundamentos da Matemática. O livro está dividido em uma introdução e mais seis partes intituladas (i) *Mathematical Logic*, (ii) *Prolegomena to Cardinal Arithmetic*, (iii) *Cardinal Arithmetic*, (iv) *Relation-Arithmetic*, (v) *Series* e (vi) *Quantity*. A introdução é dividida em três capítulos que trazem, na devida ordem, esclarecimentos sobre conceitos utilizados no livro e sobre a notação empregada, uma exposição (mais detalhada do que a feita em *The principles*) acerca da teoria dos tipos e, por último, uma apresentação dos chamados símbolos incompletos (descrições, classes e relações). As seis partes de *Principia*, por sua vez, são divididas em seções (ao todo são vinte e sete) que apresentam definições e deduções relacionadas a tópicos específicos.

²⁸ Essas sucessivas mudanças de títulos – primeiro *The Variable*, depois *The Indefinables of Mathematics*, em seguida *The Variables* novamente e finalmente *The Indefinables of Mathematics* mais uma vez – mostram quão indeciso Russell estava na sua escolha ([64]).

Na primeira parte, são deduzidas as propriedades de proposições, funções proposicionais, classes e relações. Na segunda, as definições e deduções se referem a classes unitárias, pares ordenados, classes de partes (*class of sub-classes of a given class*), algumas categorias de relações (*one-many*, *many-one* e *one-one*) e à indução matemática. Na terceira parte são deduzidas as propriedades lógicas dos números cardinais ²⁹ e da aritmética cardinal ³⁰; na quarta são introduzidos os números-relações (*relation-numbers*) e as propriedades das operações entre tais números são inferidas ³¹. A quinta parte lida essencialmente com a noção de ordem linear ³² e apresenta um estudo sobre convergência de funções. Na sexta parte são estudados os números inteiros, racionais e reais.

O objetivo principal do livro, disseram Russell e Whitehead ([78], p. 57) décadas após a sua publicação, é o mesmo de *The principles*: mostrar que toda a Matemática Pura segue de premissas puramente lógicas e utiliza somente conceitos definíveis em termos lógicos. O objetivo revelado no prefácio do próprio livro é uma condição necessária para o primeiro: o tratamento matemático dos princípios da matemática. Tal tratamento, segundo os autores, surge da conjunção de dois diferentes estudos. A formalização e sistematização dos axiomas da Análise e da Geometria e os trabalhos desenvolvidos por Cantor e outros em teoria dos conjuntos (*theory of aggregates*) constituem um desses

²⁹ Em *Principia*, o número cardinal α de um conjunto A é definido como sendo a classe dos conjuntos B para os quais existe uma bijeção de B em A . No seu jargão, dois conjuntos B e A são similares, notação $B sm A$, quando há uma bijeção de um no outro. A relação sm é o que hoje denominamos relação de equivalência, e assim o número cardinal do conjunto A corresponde à classe de equivalência módulo relação de similaridade determinada por A . Convém observar que Cantor chegou a uma definição parecida com a de Russell em 1884 ([16]).

³⁰ Entre os números cardinais, conforme mostrou Cantor ([12]), podem ser definidas certas operações binárias, dando origem a uma aritmética de cardinais. Se α e β são os números cardinais dos conjuntos A e B disjuntos, a soma $\alpha + \beta$, por exemplo, corresponde ao número cardinal da união dos dois conjuntos. Outras operações, como multiplicação e potenciação também podem ser facilmente estabelecidas. Para essa aritmética cardinal não são válidas, em geral, as propriedades da aritmética usual. Por exemplo, os conjuntos dos números pares e ímpares são disjuntos e as suas cardinalidades coincidem com a cardinalidade do conjunto dos números naturais, denotada por \aleph_0 ; donde $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

³¹ A noção de número-relação – assunto discutido por Russell também em *The principles* – é uma generalização da noção de tipo ordinal de Cantor, sendo aplicável a qualquer relação e não apenas a relações de ordem. De modo análogo à noção de número cardinal, Russell define (por abstração) o número-relação de uma relação R como sendo a classe das relações que são “ordinalmente” similares (*ordinally similars*) a R (PM, parte IV, § A). Duas relações (binárias) R e S sobre os conjuntos X e Y , respectivamente, são “ordinalmente” similares, notação $R smor S$, quando há uma bijeção f entre X e Y tal que xRy se, e somente se, $f(x)Sf(y)$, para quaisquer $x, y \in X$. Tal relação é de equivalência; por conseguinte, o número-relação de S corresponde à classe de equivalência módulo $smor$ determinada por S . Operações entre esses números são então estabelecidas em *Principia*, dando origem a uma aritmética chamada por Russell de *relation-arithmetic*. Por exemplo, se X e Y são conjuntos disjuntos, a soma dos números-relações de duas relações R e S sobre, respectivamente, X e Y , corresponde ao número-relação da soma ordinal de R e S . A soma ordinal dessas duas relações, por sua vez, é a relação Q constituída pelos pares (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$ ou xRy ou xSy . Essa aritmética foi mais tarde estudada por Tarski, que veio a denominá-la álgebra ordinal ([97]).

³² O interesse principal de Russell é no que ele chama de relação serial ou série, que nada mais é do que uma relação de ordem linear estrita. Já observei anteriormente o que vem a ser uma relação de ordem linear. Uma relação de ordem estrita R sobre um conjunto X – que Russell denomina relação contida em diversidade – é aquela em que xRy implica $x \neq y$, quaisquer que sejam $x, y \in X$.

estudos; os desenvolvimentos técnicos obtidos em lógica simbólica por Peano e seus seguidores compõem o outro ([73]). Este objetivo, digamos secundário, já estava presente no projeto filosófico de Russell antes da conclusão de *The principles*, conforme atestado em sua autobiografia: “At the end of the Lent Term [of 1901], Alys and I went back to Ferhurst, where I set to work to write out the logical deduction of mathematics which afterwards became Principia Mathematica” ([77], p. 221). O desejo de Russell naquele momento era de que *Principia* se tornasse o segundo volume de *The principles*, como assim expresso no prefácio do primeiro:

The present work was originally intended by us to be comprised in a second volume of The Principles of Mathematics. With that object in view, the writing of it was begun in 1900. But as we advanced, it became increasingly evident that the subject is a very much larger one than we had supposed; moreover on many fundamental questions which had been left obscure and doubtful in the former work, we have now arrived at what we believe to be satisfactory solutions. It therefore became necessary to make our book independent of The Principles of Mathematics. ([73], v. 1, p. v)

A ideia de um segundo volume para *The principles* ocorreu a Russell após seu encontro com Peano, o que evidencia a influência deste não apenas nas questões discutidas nesse livro mas também no formato de exposição das questões mais técnicas. Afinal, empolgado como ficou com a notação do italiano ³³, o lógico inglês não a deixaria de adaptar para seus próprios fins. O contato posterior com Frege também foi inspirador nessa matéria e o devido agradecimento lhe foi conferido no prefácio de *Principia*: “In the matter of notation, we have as far as possible followed Peano, supplementing his notation, when necessary, by that of Frege or by that of Schröder.” ([73], p. viii). ³⁴

As questões que permaneceram sem uma resposta em *The principles*, como assinalado na citação anterior, e que acabaram motivando a composição de uma obra independente, são retomadas alguns parágrafos adiante (ainda no prefácio de *Principia*):

A very large part of the labour involved in writing the present work has been expended on the contradictions and paradoxes which have infected logic and the theory of aggregates. We have examined a great number of hypotheses for dealing with these contradictions; many such hypotheses have been advanced by others, and about as many have been invented by ourselves. Sometimes it has cost us several months' work to convince ourselves that a hypothesis was untenable. In the course of such a prolonged study, we have been led, as was to be expected, to modify our views from time to time; but it gradually became evident to us that some form of the doctrine of types must be adopted if the contradictions were to be avoided. ([73], v. 1, p. v)

³³ Veja citação na página 50.

³⁴ Evidentemente, algumas das ideias introduzidas em *Principia* exigiram a criação de uma notação própria, como observado por Russell e Whitehead no mesmo parágrafo.

Ao falar de contradições (no plural) e não de uma contradição (no singular), Russell mostra que sua preocupação não era apenas voltada ao paradoxo cuja descoberta comunicou a Frege. Outras contradições em teoria dos conjuntos eram conhecidas em seu tempo³⁵ e ele queria evitá-las em seu sistema. “I could not get on without solving the contradictions”, relata ele em sua autobiografia ao comentar sobre o período em que trabalhava em *Principia* ([77]). Sendo assim, era preciso desenvolver uma teoria que oferecesse uma solução ao problema. Cerca de dois anos antes da impressão do primeiro volume do livro, num artigo publicado no *American Journal of Mathematics*³⁶, Russell apresentou uma lista de sete contradições, todas elas, segundo ele, envolvendo auto-referência e capazes de serem resolvidas pela sua teoria dos tipos³⁷. A primeira versão desta teoria foi apresentada ainda em *The principles*, em um dos seus apêndices (B); porém Russell não ficou satisfeito com ela ([78]). As tentativas sem sucesso na busca por uma solução para os paradoxos nos dois anos seguintes à publicação de *The principles*³⁸ levaram-no em 1905 a abandonar a teoria dos tipos³⁹. O retorno a ela ocorreu no ano seguinte e dois anos mais tarde apresentou uma nova versão dela no seu artigo⁴⁰. Esta versão, que descrevi no início deste capítulo, veio a ser conhecida mais tarde por teoria ramificada dos tipos. Pensando haver resolvido definitivamente o problema da auto-referência por meio da teoria dos tipos, Russell passou a trabalhar exaustivamente no livro até a sua conclusão ([77]).

Na Inglaterra, *Principia* ganhou resenhas de Jourdan e Hardy. O primeiro satirizou muitas das questões tratadas por Russell e Whitehead, como aquelas relativas aos paradoxos e às descrições definidas; o segundo ressaltou que “a matemática é a ciência das funções proposicionais e que a teoria dos símbolos incompletos é um dos triunfos dos autores” (*apud* Guinness, [41], p. 415-416). Nos Estados Unidos, uma das melhores resenhas do primeiro volume do livro foram as vinte e cinco páginas escritas por J. B. Shaw no *Bulletin of the American Mathematical Society*, onde este observou que *Principia* “examina as regras do grande jogo matemático, mas não joga o jogo nem empreende ensinar sua estratégia” (*apud* Guinness, *ibid.*, p. 424).

Uma segunda edição de *Principia* foi publicada (também em três volumes) entre os anos de 1925 e 1927. Nesta, o conteúdo da primeira edição foi mantido, algumas correções foram feitas e foram adicionados uma nova introdução, três apêndices e uma lista de

³⁵ Os paradoxos do maior número ordinal de Burali-Forti e do maior número cardinal de Cantor, por exemplo, foram descobertos na década de 1890 ([42]).

³⁶ Sob o título *Mathematical logic as based on the theory of types*.

³⁷ Essa lista contém o paradoxo de Russell e o de Burali-Forti.

³⁸ Russell afirma em sua autobiografia que os verões de 1903 e 1904 foram períodos de completa estagnação intelectual ([77], p. 228).

³⁹ Nesse ano, segundo Quine ([68]), o lógico inglês apresentou três novas teorias para superar as dificuldades: (i) a teoria zigue-zague, (ii) a teoria da limitação do tamanho e (iii) uma teoria sem classes. A análise dessas teorias tomaria muito tempo, por isso ela não será feita aqui.

⁴⁰ Sobre o seu retorno à teoria dos tipos, Russell escreveu em sua autobiografia ([77], p. 229): “In 1906 I [re]discovered the Theory of Types. After this it only remains to write the book out.”

definições ([56]). Uma das mais importantes modificações trazidas no novo texto é o abandono do axioma da redutibilidade no desenvolvimento dedutivo da Matemática, o que reflete a insatisfação de Russell com esse postulado ⁴¹. A nova edição recebeu resenhas de Ramsey, Carnap, Church, C. I. Lewis, C. H. Langford e outros. Nenhum dos autores dessas revisões notou, no entanto, que a prova do princípio da indução sem o axioma da redutibilidade, conteúdo do apêndice B, não é possível ([56]). Isso só foi percebido por Gödel em 1944. Alguns anos mais tarde, Russell manifestou seu desapontamento pelo fato de *Principia* ter sido visto apenas de um ponto de vista filosófico, uma vez que, segundo ele, as pessoas se interessaram mais pelos paradoxos e pela questão da redução da Matemática à Lógica do que pelas técnicas matemáticas desenvolvidas ao longo do livro ([78]) ⁴².

2.4 A emergência da noção de função proposicional

The principles é o primeiro dos escritos publicados por Russell a apresentar o termo “função proposicional”. Em nenhum dos rascunhos conhecidos do livro, contudo, a expressão é utilizada; ela aparece apenas na sua versão final. Nesta, a organização da primeira parte do último rascunho foi mantida, exceto pela denominação do capítulo viii, que passou de *Assertions* para *Propositional Functions* ⁴³. Na opinião de Moore ([64]), Russell foi lento em encontrar a noção de função proposicional. A semente da ideia de tal noção, contudo, já aparece no terceiro esboço de *The principles* que compôs:

[...] it must always be remembered that the appearance of having one proposition $f(x)$ satisfied by a number of values of x is fallacious: the proposition $f(x)$ is a conjunction of just as many propositions as there are terms in the class of terms such that $f(x)$ is true. ([84], p. 206)

Esse trecho foi alterado no livro: no lugar de “the proposition $f(x)$ is a conjunction of just as many propositions as there are terms in the class of terms such that $f(x)$ is true” permaneceu: “ $f(x)$ is not a proposition at all, but a propositional function” (PoM, § 33). A modificação do texto mostra não só a introdução de um nome para uma noção apreendida mas também a percepção por parte de Russell da ambiguidade em se usar

⁴¹ O problema com esse axioma é que ele é uma proposição existencial e, por isso, não tem o caráter de universalidade que se espera que um postulado lógico tenha.

⁴² Em MPD, Russell aponta a noção de *relation-arithmetic*, presente no segundo volume, como a mais importante contribuição de *Principia*. Também naquele livro, é descrita uma situação particularmente embaraçosa, que ocorreu enquanto ele lecionava na Universidade da Califórnia e que envolveu o filósofo Hans Reichenbach. Este contou-lhe que havia inventado uma extensão da indução matemática por ele chamada indução transfinita. Para sua decepção, Russell replicou-lhe que esse assunto já havia sido completamente tratado no terceiro volume de *Principia*.

⁴³ De fato, compare [85] e [92].

o termo “proposição” para aquilo que é designado não por uma sentença, mas sim por uma fórmula. Ele estava ciente à época da elaboração do rascunho aludido que o termo, geralmente empregado pelos matemáticos ao se referirem a enunciados contendo variáveis, não era apropriado:

[...] what Peano and mathematicians generally call one proposition containing a variable is really the disjunction or conjunction (according to circumstances) of a certain class of propositions defined by some constancy of form. ([84], p. 205)

Russell é um pouco vago nesses escritos quanto ao *status* ontológico das proposições, ora referindo-se a elas como se fossem expressões, ora como se fossem entidades extralinguísticas. Uma proposição, diz, “unless it happens to be linguistic, does not itself contain words: it contains the entities indicated by words” (PoM, § 51). Assim, é como se entre as proposições estivessem as sentenças e também os fatos que estas exprimem. As sentenças são as proposições que contêm as palavras; os fatos que as sentenças exprimem (as proposições que não são entidades linguísticas no seu entendimento), por sua vez, contêm as entidades que são designadas pelas palavras. A despeito da confusão existente em sua terminologia, ele considera as proposições os legítimos portadores da verdade:

A proposition, we may say, is anything that is true or that is false. An expression such as “ x is a man” is therefore not a proposition, for it is neither true nor false. If we give to x any constant value whatever, the expression becomes a proposition: it is thus as it were a schematic form standing for any one of a whole class of propositions. (PoM, § 13)

Sendo assim, não se pode considerar “ x é um homem” uma proposição – seja ela uma entidade linguística (sentença) ou não. A presença da variável em seu interior impede que “ x é um homem” possa ser classificado em verdadeiro ou falso e essa é uma característica que, segundo Russell, deve pertencer às proposições e somente a elas. Por conseguinte, [x é um homem] é algo ou é expressão de algo que não é uma proposição; esse algo é o que chama de função proposicional ⁴⁴.

Beaney ([5]) aponta como o provável momento de nascimento da noção de função proposicional a primeira semana de maio de 1902. Para tanto, ele se baseia em Blackwell ([6]), que, a partir da análise da correspondência mantida por Russell na época, conclui que foi nesse período que os primeiros capítulos de *The principles* foram finalizados. Como a expressão “função proposicional” aparece já no segundo capítulo de *The principles*, Beaney

⁴⁴ Nesse momento Russell ainda não distinguia a função proposicional do seu valor indeterminado. Como veremos, a distinção foi um processo que ocorreu após a publicação de *The Principles*, enquanto trabalhava no seu segundo livro.

deduz que a noção a que tal expressão se refere surgiu naquela semana. Os fragmentos do terceiro rascunho de *The principles* sugerem, todavia, que o aparecimento da noção de função proposicional pode ter ocorrido antes disso e que, por conseguinte, no período aludido por Beaney Russell tenha apenas encontrado, finalmente, um nome para a sua descoberta. Outra possibilidade, ainda, é que a expressão “função proposicional” tenha ocorrido a Russell mais tarde. Em 18 de junho – menos de um mês após enviar o texto final para a publicação –, Russell começou a receber as provas do livro e a fazer revisões no texto, um processo que se estendeu aos meses seguintes ([6]). Antes disso, em 16 de junho, ele escrevera a Frege, comunicando-lhe o paradoxo que descobrira, o que comprova que já estava ciente do conteúdo do trabalho do lógico alemão. Seria possível que, influenciado pelo jargão fregiano, Russell tenha inserido a expressão em seu texto no período em que o revisava? É uma possibilidade remota, haja vista que a expressão é muito utilizada ao longo do texto e, por isso, dificilmente teria sido nele inserida de modo coerente ao longo de um processo de revisão. Além disso, o termo “proposicional” está obviamente relacionado ao fato de ser a proposição o valor de uma função para um dado argumento, algo que, como sabemos, não acontece na teoria fregiana ⁴⁵.

Se a terminologia empregada por Russell não se origina em Frege, uma alternativa a ser avaliada é se a noção em si de função proposicional foi neste inspirada. Os diferentes motivos que conduziram à noção fregiana de função e à noção de função proposicional rechaçam essa possibilidade. Como vimos no capítulo anterior, a primeira surge com o propósito de viabilizar a apreensão do conteúdo lógico de uma sentença – uma alternativa à tradicional análise gramatical sujeito-predicado. A segunda, por outro lado, emerge com o propósito de tornar exequível a distinção entre uma sentença genuína (ou proposição) e uma expressão esquemática (ou o que esta expressão designa) ([5]), distinção que há, *e.g.*, entre [Sócrates é homem] e [x é homem] (ou entre as entidades que estas expressões designam).

É importante notar que a função proposicional não está, diferente da noção fregiana de função, diretamente vinculada ao processo de análise da proposição. Russell considera o seu processo de análise muito parecido com o de Frege, mas afirma no apêndice A de *The principles* que a divisão fregiana da proposição em argumento e função corresponde à sua divisão em sujeito e asserção – não à sua distinção entre argumento e função proposicional, portanto. Algumas proposições, sustenta Russell ao longo de seu livro, podem ser divididas – umas de um único modo, outras de vários modos – em uma entidade, o *sujeito*, e alguma coisa que é dita sobre essa entidade, uma *asserção*; as entidades (ou *termos*, no seu jargão) que são indicadas por nomes próprios são o que ele denomina *coisas* (*things*), enquanto as que são indicadas por outras palavras são o que ele chama de *conceitos* (*concepts*) (PoM,

⁴⁵ Para Frege, como já discutido, é o valor de verdade da proposição que é o valor da função, caso em que esta é denominada *conceito*.

§ 48). A noção fregiana de objeto (*Gegenstand*), assinala Russell no suplemento de seu livro, corresponde exatamente à sua noção de coisa (*thing*), enquanto a noção fregiana de conceito é muito próxima da sua noção de asserção, não sendo precisamente a mesma coisa (PoM, § 480). As proposições que admitem um única forma de análise são aquelas em que um predicado é asserido de uma só entidade e que Russell denomina proposições sujeito-predicado (*ibid.*, § 57). “Sócrates é humano” é um exemplo de proposição desse tipo. Modos exclusivos de análise não se aplicam a proposições que exprimem relações entre dois ou mais termos. Assim, “*A* é maior do que *B*” pode ser analisada em termos do sujeito “*A*” e da asserção “é maior do que *B*” ou do sujeito “*B*” e da asserção “*A* é maior do que” (*ibid.*, § 48). Também o sujeito e a asserção não são os constituintes últimos desse tipo de proposição:

Consider, for example, the proposition “*A* differs from *B*”. The constituents of this proposition, if we analyse it, appear to be only *A*, difference, *B*. Yet these constituents, thus placed side by side, do not reconstitute the proposition. The difference which occurs in the proposition actually relates *A* and *B*, whereas the difference after analysis is a notion which has no connection with *A* and *B*. (PoM, § 54)

Assim, conforme o exemplo, os constituintes últimos de “*A* difere de *B*” são “*A*”, “diferença” e “*B*”. Mas esses constituintes, quando postos lado a lado, não reconstituem a proposição. A proposição possui, assim, uma unidade e não se resume à soma de suas partes: “A proposition, in fact, is essentially a unity, and when analysis has destroyed the unity, no enumeration of constituents will restore the proposition”, diz Russell (*op. cit.*). Somente quando a relação de fato relaciona o referente ao referido a proposição reaparece. E o mesmo se aplica ao sujeito e à asserção enquanto constituintes da proposição conforme evidencia algumas seções adiante:

A subject and an assertion, if simply juxtaposed, do not, it is true, constitute a proposition; but as soon as the assertion is actually asserted of the subject, the proposition reappears. The assertion is everything that remains of the proposition when the subject is omitted [...]. (PoM, § 81)

Por isso, nem toda proposição admite análise, como assinala Russell no apêndice de seu livro: “Frege does not restrict this method of analysis as I do in Chapter 7”. No capítulo referido, Russell põe a seguinte questão: “Can every proposition be regarded as an assertion concerning any term occurring in it, or are limitations necessary as to the form of the proposition and the way in which the term enters into it?” (*op. cit.*).

Russell responde no parágrafo seguinte, dizendo que em certas proposições a análise em termos de sujeito e asserção é legítima e ilustra com o exemplo “Sócrates é homem”,

onde claramente se pode distinguir Sócrates e algo que é asserido sobre ele. A mesma coisa, completa, pode ser asserida de Platão ou Aristóteles e, por conseguinte, pode-se considerar uma classe de proposições em que uma mesma asserção é feita, classe em que um típico membro é representado pela função proposicional “ x é homem”. Na seção seguinte, porém, Russell fornece um exemplo em que tal avaliação não se repete: a proposição “Sócrates é homem implica Sócrates é mortal”. Reproduzo abaixo a sua análise:

An assertion was to be obtained from a proposition by simply omitting one of the terms occurring in the proposition. But when we omit Socrates, we obtain “... is a man implies ... is a mortal”. In this formula it is essential that, in restoring the proposition, the same term should be substituted in the two places where dots indicate the necessity of a term. It does not matter what term we choose, but it must be identical in both places. Of this requisite, however, no trace whatever appears in the would-be assertion, and no trace can appear, since all mention of the term to be inserted is necessarily omitted. When an x is inserted to stand for the variable, the identity of the term to be inserted is indicated by the repetition of the letter x ; but in the assertional form no such method is available. (PoM, § 82)

Assim, o resíduo que se obtém a partir da omissão de Sócrates na proposição “Sócrates é homem implica Sócrates é mortal”, representado pela expressão [... é homem implica ... é mortal], contém dois “lugares vagos”, que devem ser preenchidos pelo mesmo termo. A asserção em si, contudo, não apresenta nenhum traço desse requisito. Nesse ponto, a função proposicional emerge, porque a identidade dos termos a serem inseridos nesses lugares a fim de que a proposição possa ser reconstituída só pode ser indicada pela repetição da letra x , mas com isso não se tem a expressão de uma asserção e sim a de uma função proposicional. Como dissemos no início da presente seção, o capítulo vii de *The principles* chamar-se-ia *Assertions* em princípio, mas passou a chamar-se *Propositional functions*. A alteração no título reflete, sem dúvida, a mudança de foco de um tema para outro por parte de Russell ([5]). De modo geral, ao longo do capítulo o seu interesse consiste no exame da relação entre a noção de função proposicional e o processo de análise da proposição. Este processo, seja dito de passagem, parece ser o objeto da discussão original dessa parte do livro, conforme o indica a sua denominação anterior.

Retornando à discussão do exemplo, embora a proposição expresse um fato sobre Sócrates, fato que também é verdadeiro sobre Platão e sobre o número 2, não existe associada à proposição, pelo motivo assinalado, uma mesma asserção de Sócrates, de Platão e do número 2. Por isso, não resta outro elemento comum associado às proposições “Sócrates é homem implica Sócrates é mortal”, “Platão é homem implica Platão é mortal”, “O número 2 é homem implica o número 2 é mortal” e similares que não uma mesma função proposicional, qual seja, “ x é homem implica x é mortal”:

[...] it seems very hard to deny that the proposition in question tells us a fact about Socrates, and that the same fact is true about Plato or a plum-pudding or the number 2. It is certainly undeniable that “Plato is a man implies Plato is a mortal” is, in some sense or other, the same function of Plato as our previous proposition is of Socrates. The natural interpretation of this statement would be that the one proposition has to Plato the same relation as the other has to Socrates. But this requires that we should regard the propositional function in question as definable by means of its relation to the variable. Such a view, however, requires a propositional function more complicated than the one we are considering. If we represent “ x is a man implies x is a mortal” by ϕx , the view in question maintains that ϕx is the term having to x the relation R , where R is some definite relation. The formal statement of this view is as follows: For all values of x and y , “ y is identical with ϕx ” is equivalent to “ y has the relation R to x ”. It is evident that this will not do as an explanation, since it has far greater complexity than what it was to explain. It would seem to follow that propositions may have a certain constancy of form, expressed in the fact that they are instances of a given propositional function, without its being possible to analyse the propositions into a constant and a variable factor. Such a view is curious and difficult: constancy of form, in all other cases, is reducible to constancy of relations, but the constancy involved here is presupposed in the notion of constancy of relation, and cannot therefore be explained in the usual way. (PoM, § 82)

A função proposicional em questão não pode ser definida como uma relação R entre “Sócrates é homem implica Sócrates é mortal” e Sócrates, “Platão é homem implica Platão é mortal” e Platão etc. visto que essa relação pressupõe a função proposicional “ y mantém a relação R com x ”. Essas proposições possuem uma constância de forma, o que significa que estão conectadas, de algum modo, a uma mesma função proposicional, mas esta não pode ser definida como uma relação porque a noção de relação pressupõe a de função proposicional. Além disso, as proposições “ ‘Sócrates é homem implica Sócrates é mortal’ mantém uma relação R com ‘Sócrates’ ”, “ ‘Platão é homem implica Platão é mortal’ mantém uma relação R com ‘Platão’ ”, “ ‘Bucéfalo é homem implica Bucéfalo é mortal’ mantém uma relação R com ‘Bucéfalo’ ” e outras também possuem uma constância de forma, pois estão vinculadas a uma mesma função proposicional de duas variáveis.

A variável é parte da função proposicional, porque se assim não fosse a proposição decompor-se-ia em um constituinte variável e um constante, o que não é possível tendo em vista o exemplo dado. E uma vez que não se pode explicar as funções proposicionais em termos da noção de asserção, elas devem ser admitidas como fundamentais (*as ultimate data*), observa Russell na seção seguinte (§ 83). Conclui o capítulo explicando que o ϕ em ϕx não é uma entidade separada e distinguida de ϕx :

[...] it lives in the propositions of the form ϕx , and cannot survive analysis. I am highly doubtful whether such a view does not lead to a contradiction, but it appears to be forced upon us, and it has the merit of enabling us to avoid a contradiction arising from the opposite

view. If ϕ were a distinguishable entity, there would be a proposition asserting ϕ of itself, which we may denote by $\phi(\phi)$; there would also be a proposition not- $\phi(\phi)$, denying $\phi(\phi)$. In this proposition we may regard ϕ as variable; we thus obtain a propositional function. The question arises: Can the assertion in this propositional function be asserted of itself? The assertion is non-assertibility of self, hence if it can be asserted of itself, it cannot, and if it cannot, it can. This contradiction is avoided by the recognition that the functional part of a propositional function is not an independent entity. (PoM, § 85)

Se ϕ fosse uma entidade distinguível em ϕx , pensa Russell, seria uma asserção. Logo $\sim \phi(\phi)$ seria uma função proposicional, digamos, $\psi(\phi)$, satisfeita pelas asserções ϕ que não podem ser asseridas de si mesmas. A omissão da variável ϕ em $\sim \phi(\phi)$ nos levaria, assim, à asserção ψ ⁴⁶. É fácil ver a partir daí que ψ pode ser asserida de si mesma se, e somente se, satisfaz a função proposicional $\sim \phi(\phi)$, isto é, se, e somente se, não pode ser asserida de si mesma.

Como vemos, embora o método de Russell guarde algumas semelhanças com o de Frege, diferenças sutis emergem entre eles. Percebe-se, na verdade, que Russell contempla dois métodos de análise em seu livro: um compreende a identificação dos constituintes últimos da proposição, o outro, o reconhecimento da proposição como valor de uma função proposicional ([52])⁴⁷. O próprio Russell reconhece isso em um manuscrito seu, posterior a *The principles*: “What we want to be clear about is the twofold method of analysis of a proposition, i.e., first taking the proposition as it stands and analysing it, second taking the proposition as a special case of a type of propositions” ([90], p. 118).

Outra diferença, não menos importante, entre as concepções de função de Frege e Russell, e que já mencionei, diz respeito ao modo como cada um percebe as funções ordinárias da Matemática. Vimos que as funções fregianas incluem propriamente as últimas, mas que isso não ocorre em *Principia*. Há neste livro uma tentativa de demonstrar que tais funções reduzem-se contextualmente às funções proposicionais, isto é, que toda e qualquer sentença que contenha a expressão de uma função matemática pode ser reescrita de modo a não apresentar mais em seu interior essa expressão. Quando escreveu *The principles*, Russell ainda não havia desenvolvido a sua teoria das descrições; por isso esse tipo de redução não é empreendida neste livro. Mesmo assim, a ideia de que as funções usuais da Matemática pressupõem a noção de função proposicional já se evidencia. Russell discute o assunto primeiramente, e brevemente, no sétimo capítulo do livro, onde questiona a definibilidade das funções proposicionais:

The point which is chiefly important in these remarks is the indefinability of propositional functions. When these have been admitted, the general

⁴⁶ A omissão da letra ϕ em $\sim \phi(\phi)$ leva à expressão insaturada $\sim \dots(\dots)$, que designa a asserção ψ .

⁴⁷ Levine ([52]) denomina o primeiro método *análise*, o segundo, *decomposição*.

notion of one-valued functions is easily defined. Every relation which is many-one, i.e. every relation for which a given referent has only one relatum, defines a function: the relatum is that function of the referent which is defined by the relation in question. But where the function is a proposition, the notion involved is presupposed in the symbolism, and cannot be defined by means of it without a vicious circle: for in the above general definition of a function propositional functions already occur. (PoM, § 80)

Ele sugere nessa passagem que os referidos são funções de seus referentes em relações unívocas ⁴⁸ e chama atenção para a dificuldade em se considerar as funções proposicionais casos particulares dessas funções, porque quando os referentes de uma dada relação são proposições de um certo tipo, estes presumem uma função proposicional ⁴⁹. Somente no capítulo 32, onde discorre sobre sequências, ele volta a dar atenção ao assunto:

In its most general form, functionality does not differ from relation. For the present purpose it will be well to recall two technical terms, which were defined in Part I. If x has a certain relation to y , I shall call x the referent, and y the relatum, with regard to the relation in question. If now x be defined as belonging to some class contained in the domain of the relation, then the relation defines y as a function of x . That is to say, an independent variable is constituted by a collection of terms, each of which can be referent in regard to a certain relation. Then each of these terms has one or more relata, and any one of these is a certain function of its referent, the function being defined by the relation. Thus father defines a function, provided the independent variable be a class contained in that of male animals who have or will have propagated their kind; and if A be the father of B , B is said to be a function of A . What is essential is an independent variable, i.e. any term of some class, and a relation whose extension includes the variable. Then the referent is the independent variable, and its function is any one of the corresponding relata. (PoM, § 254)

Como se nota, para Russell uma função (de uma variável) é uma espécie de variável dependente, sendo a expressão “função” aplicada ao y com que x mantém uma certa relação unívoca. Nessa mesma seção, ele sugere que a natureza da oposição entre a função proposicional e a proposição e, mais geralmente, entre a função e seus valores seja explicada por meio de uma análise da noção de variável:

The question concerning the nature of a propositional function as opposed to a proposition, and generally of a function as opposed to its values, is a difficult one, which can only be solved by an analysis of the nature of the variable. It is important, however, to observe that propositional functions [...] are more fundamental than other functions, or even than relations. (PoM, § 254)

⁴⁸ Conforme visto no início deste capítulo, em *Principia* é o contrário: os referentes é que são funções dos referidos em relações um para muitos.

⁴⁹ A função proposicional é a entidade que corresponde à forma comum que essas proposições possuem.

Conforme será exposto na próxima seção, Russell entende que a noção de variável não pode ser explicada sem a de função proposicional. Por isso, volta a enfatizar no fragmento acima o caráter fundamental da noção de função proposicional. No apêndice onde discute o trabalho de Frege, uma vez mais menciona o assunto:

If $f(x)$ is not a propositional function, its value for a given value of x ($f(x)$ being assumed to be one-valued) is the term y satisfying the propositional function $y = f(x)$, i.e. satisfying, for the given value of x , some relational proposition; this relational proposition is involved in the definition of $f(x)$, and some such propositional function is required in the definition of any function which is not propositional. (PoM, § 482)

Assim, se y é uma função de x , y satisfaz a função proposicional “ $y = f(x)$ ” e, por essa razão, uma função proposicional é sempre requerida na definição de uma função que não é proposicional. Finalmente, se uma função proposicional não é uma função ordinária ou uma relação, seria possível identificar a classe dos referidos de uma relação unívoca com a função proposicional? Russell conclui que não, haja vista que a classe dos referentes de uma relação é constituída pelos objetos que satisfazem uma dada função proposicional:

We may say that a propositional function is a many-one relation which has all terms for the class of its referents, and has its relata contained among propositions: or, if we prefer, we may call the class of relata of such a relation a propositional function. But the air of formal definition about these statements is fallacious, since propositional functions are presupposed in defining the class of referents and relata of a relation. (*op. cit.*)

Como a noção aqui utilizada para se definir a função proposicional novamente a pressupõe, não resta outra alternativa a Russell a não ser aceitar a impossibilidade de uma definição.

2.5 O contato com Frege

Russell começou a ler os trabalhos de Frege no ano anterior ao da conclusão de *The principles*, conforme ele mesmo o atesta em seu livro *Portraits from memory*:

With the beginning of the twentieth, I became aware of a man for whom I had and have the very highest respect although at that time he was practically unknown. This man is Frege. [...] My relations with him were curious. They ought to have begun when my teacher in philosophy, James Ward, gave me Frege's little book *Begriffsschrift* saying that he had not read the book and did not know whether it had any value. To my shame I have to confess that I did not read it either, until I had

independently worked out a great deal of what it contained. The book was published in 1879 and I read it in 1901. ([75], p. 21-22)

Ele afirma que leu CG em 1901, mas este pode não ter sido o primeiro dos trabalhos de Frege que examinou à época. Um pouco mais adiante, ainda no mesmo parágrafo, ele afirma que o seu interesse pelo trabalho do colega despertou em uma resenha que Peano escreveu sobre LFA:

What first attracted me to Frege was a review of a later book of his by Peano accusing him of unnecessary subtlety. As Peano was the most subtle logician I had at that time come across, I felt that Frege must be remarkable. I acquired the first volume of his book on arithmetic (the second volume was not yet published). I read the introduction with passionate admiration, but I was repelled by the crabbed symbolism which he had invented and it was only after I had done the same work for myself that I was able to understand what he had written in the main text. ([75], p. 21-22)

Assim, parece que Russell leu os dois livros no mesmo ano, embora não com a devida atenção. O seu retorno aos escritos de Frege ocorreu em junho de 1902 ([65]), quando, finalmente, os compreendeu. Ao perceber que muito em comum havia entre eles, Russell incluiu um agradecimento no prefácio de *The principles*:

In Mathematics my chief obligations, as is indeed evident, are to Georg Cantor and Professor Peano. If I had become acquainted sooner with the work of Professor Frege, I should have owed a great deal to him, but as it is I arrived independently at many results which he had already established. ([92], xlvi)

E também escreveu dois apêndices: um com o propósito de discutir as diferenças entre o seu trabalho e o de Frege, o outro com a finalidade de apresentar uma solução para o paradoxo que encontrou.

Enquanto trabalhava na revisão do livro e na elaboração desses anexos, Russell começou a se corresponder com Frege. Entre os diversos assuntos discutidos nessa correspondência está a questão da natureza das proposições. Ao longo das cartas que remeteu a Russell, Frege deixa claro considerar que o objeto sobre o qual a proposição⁵⁰ diz respeito não faz parte da proposição. Monte Branco não é, diz ele em uma dessas cartas⁵¹, um componente da proposição “Monte Branco tem mais do que quatro mil metros de altura”. A opinião de Frege é apoiada na sua teoria da linguagem; esta, recordemos, sustenta que os sentidos dos constituintes da sentença sejam os constituintes do sentido da sentença,

⁵⁰ Frege usa o termo “pensamento” (*Gedanke*) em lugar de “proposição”.

⁵¹ A carta aludida é de 13 de novembro de 1904.

isto é, da proposição. Russell, por sua vez, manifesta uma opinião diferente. Em uma carta de dezembro de 1904, usando o mesmo exemplo fornecido por Frege, ele responde o seguinte:

Acredito que o monte Branco, a despeito de toda a sua neve, é ele próprio um constituinte daquilo que de fato é asserido na proposição “O monte Branco tem mais do que 4000 metros de altura”. Não se pode asserir o pensamento, pois é uma questão íntima e psicológica: afirma-se o objeto do pensamento, e este é em minha opinião um determinado complexo (uma proposição objetiva, pode-se dizer) do qual o próprio monte Branco é um constituinte. Se não se admite isso, chega-se à conclusão que não sabemos nada afinal sobre o monte Branco. Por conseguinte, para mim o referente da sentença não é o verdadeiro, mas sim um determinado complexo que (no dado caso) é verdadeiro. No caso de um simples nome próprio como “Sócrates”, não posso distinguir entre sentido e referência [...] ([29], p. 250-251)

Russell manifesta-se contrariamente à ideia de que aos nomes próprios conectam-se, além dos objetos que designam, isto é, além dos seus referentes, uma entidade intermediária correspondente à noção fregiana de sentido. E também não reconhece, como Frege o faz, a sentença como sendo nome próprio de um valor de verdade; mantendo, desse modo, a posição assumida em uma carta escrita dois anos antes: “Não posso me convencer que o verdadeiro ou o falso é o referente de uma sentença do mesmo modo que, *e.g.*, uma determinada pessoa é o referente do nome Júlio César. ” ([29], p. 233). Além disso, a proposição – ou o sentido da sentença – é, para ele, um complexo que contém o objeto designado pelo nome próprio e a respeito do qual se pode dizer que é verdadeiro ou falso.

O princípio assumido por Russell em sua correspondência com Frege não está livre de exceções, como ele próprio o admite em *The principles*: “It seems to me that only such proper names as are derived from concepts by means of *the* can be said to have meaning, and that such words as *John* merely indicate without meaning” (PoM, § 476, grifos do autor). A expressão [o filósofo que tomou cicuta] seria um exemplo, no seu entendimento, de expressão que, além de designar um objeto, possui um significado⁵². É esse significado que uma proposição sobre Sócrates contém quando a sentença correspondente contém a descrição. Por exemplo, a sentença [o filósofo que tomou cicuta é sábio] exprime uma proposição sobre Sócrates, mas Sócrates não é um constituinte da proposição; uma entidade intermediária entre a expressão [o filósofo que tomou cicuta] e a pessoa Sócrates é que é. Essa entidade, o significado da descrição, Russell denomina *conceito* (*concept*); a relação peculiar que subsiste entre o conceito e o(s) objeto(s) que a expressão indica, denomina *denotação* (*denoting*). O trecho a seguir, extraído de *The principles*, resume suas ideias:

⁵² É importante observar que a palavra “significado” não tem aqui a mesma acepção que é empregada por Russell em *Principia*. Neste, o significado de uma expressão é aquilo que a expressão designa. No período objeto da presente discussão, a acepção do termo é a mesma que a da palavra “*Sinn*” para Frege.

A concept denotes when, if it occurs in a proposition, the proposition is not about the concept, but about a term connected in a certain peculiar way with the concept. If I say “I met a man”, the proposition is not about a man: this is a concept which does not walk the streets, but lives in the shadowy limbo of the logic-books. What I met was a thing, not a concept, an actual man with a tailor and a bank-account or a public-house and a drunken wife. (PoM, § 56)

Conceitos podem ser combinados de modo a formar novos conceitos, admite Russell, e expressões contendo uma das seis palavras “todo”, “cada”, “qualquer”, “um”, “algum” e “o” (*all, every, any, a, some e the*) indicam conceitos (PoM, § 58). Expressões “conceituais” contendo a palavra “o” designam uma entidade definida, enquanto expressões contendo as outras cinco palavras, agergados de objetos combinados de uma maneira peculiar (*ibid.*, § 62-63).

Pode parecer estranho o fato de Russell adotar um ponto de vista que contraria parcialmente o que defende na carta a Frege, mas ele tinha um bom motivo para assim proceder. Conforme assinalado por Hylton ([44]), se as proposições, sem exceção, contivessem os objetos dos quais dizem respeito, então as proposições gerais conteriam todas as possíveis entidades. Desse modo, “todo homem é mortal” conteria Sócrates, Platão, Aristóteles e muitos outros. Pois isso seria um sério obstáculo à teoria lógica advogada por Russell, cujas proposições, como vimos, devem conter tão somente constantes lógicas e variáveis ([44]).

A noção russeliana de conceito está intimamente conectada à noção de variável e uma discussão sobre isso é apresentada no oitavo capítulo de *The principles*. A variável, assim sugere Russell ao longo do capítulo, é também uma espécie de conceito. “The terms included in the object denoted by the defining concept of a variable are called the values of the variable: thus every value of a variable is a constant”, diz (*ibid.*, § 88). Essa assunção, porém, não está livre de problemas, admite ao final do capítulo, porque se as variáveis são conceitos, não é possível distinguir entre duas variáveis em uma mesma proposição (PoM, § 93). É certo que entre as letras x e y há uma diferença porque trata-se de dois sinais distintos, mas isso não é evidente no nível dos significados dessas letras, uma vez que esses significados são os mesmos conceitos. Assim, não há diferença de uma relação entre x e y para uma relação entre x e x . Por esse motivo, Russell conclui estabelecendo que uma variável não é pura e simplesmente um conceito, mas um conceito enquanto constituinte de uma função proposicional:

A variable is not *any term* simply, but any term as entering into a propositional function. We may say, if ϕx be a propositional function, that x is the term in any proposition of the class of propositions whose type is ϕx . (*op. cit.*)

Nesse mesmo capítulo há um extrato que julgo relevante para a presente discussão sobre funções proposicionais e que reproduzo a seguir:

There is a certain difficulty about such propositions as “any number is a number”. Interpreted by formal implication, they offer no difficulty, for they assert merely that the propositional function “ x is a number implies x is a number” holds for all values of x . But if “any number” be taken to be a definite object, it is plain that it is not identical with 1 or 2 or 3 or any number that may be mentioned. Yet these are all the numbers there are, so that “any number” cannot be a number at all. The fact is that the concept “any number” does denote one number, but not a particular one. (PoM, § 93)

Aqui Russell fala da peculiaridade da relação que há entre o conceito “qualquer número” e aquilo que este conceito denota. Porque, diferente de descrições como [o número inteiro entre 1 e 3], a expressão [qualquer termo] não designa um só e determinado número. A mesma dificuldade, aliás, se estende à variável, que corresponde, segundo ele, ao conceito “qualquer termo”. Mas se proposições como “qualquer número é um número” são equivalentes, como propõe na passagem acima, a proposições contendo funções proposicionais – no caso, ela equivale a “qualquer que seja x , x é um número implica x é um número” –, que não encerram as entidades denominadas conceitos, não há motivo para recorrer a tais entidades. Como Russell só viria a desenvolver a sua teoria das descrições nos dois anos seguintes, é possível que não tenha se dado conta disso nesse momento. É igualmente possível que estivesse ciente de que a equivalência entre as duas proposições não elimina por completo a necessidade de se admitir um elemento intermediário entre o sinal e as entidades conectadas a esse sinal, porque em sua doutrina de funções proposicionais essa admissão não poderia ser desprezada. De fato, algumas passagens sugerem que a noção de função proposicional se comporta como esse elemento. Para Hylton ([44]), o fragmento a seguir, extraído de um parágrafo de *The principles* onde Russell fala sobre a função proposicional “ x é homem implica x é mortal”, é uma evidência disso:

[...] our formal implication asserts a class of implications, not a single implication at all. We do not, in a word, have one implication containing a variable, but rather a variable implication. We have a class of implications, no one of which contains a variable, and we assert that every member of this class is true. (PoM, § 42)

A função proposicional em questão, que Russell chama de implicação formal, constitui, como indicado, uma espécie de variável que denota uma classe de implicações. Assim, uma proposição contendo essa função proposicional não é, de fato, um enunciado sobre essa função, mas sim sobre as implicações “Sócrates é homem implica Sócrates é mortal”,

“Platão é homem implica Platão é mortal”, “Bucéfalo é homem implica Bucéfalo é mortal” etc.

Em *The principles* Russell não emprega o termo “denotação” para se referir à relação peculiar que há entre a função proposicional e os seus muitos valores, o que sugere que ele não a via como a mesma relação que há entre os conceitos e os objetos que estes denotam ([44]). Em um manuscrito seu de 1903, *On Meaning and denotation*, Russell usa o termo para designar a relação que há entre a fórmula proposicional e as proposições: “We agree that ‘ x is human’ *express* a definite meaning, and ambiguously denotes a number of propositions” ([91], p. 342, grifo do autor). Uma vez que a sentença que contém a expressão [x é humano] exprime uma proposição que não diz respeito ao significado dessa expressão, que é uma função proposicional, mas às proposições com que esta função proposicional mantém uma relação lógica peculiar, como exprimir, afinal, uma proposição sobre a função proposicional? A resposta a essa questão é dada por Russell no manuscrito *Fundamental notions*, de 1904, por meio da introdução de uma notação para designar a função proposicional. Reproduzo abaixo um trecho desse manuscrito:

A single letter, as x or y , always stands for a wholly unrestricted variable. We have another kind of variable, represented by $\phi'\hat{x}$. This represents a variable statement about anything. The \hat{x} , as opposed to x , indicates that we have to do with meaning, not with denotation. Thus if we assign a value to ϕ , $\phi'\hat{x}$ becomes the constant meaning which ambiguously denotes all the propositions got by giving values to x . When we wish instead to speak of one of these propositions, without deciding which, we write $\phi'x$ (where the constant value of ϕ in question is to be substituted for ϕ).

It must not be supposed that \hat{x} represents a constituent of the meaning $\phi'\hat{x}$. [...] The fact is, $\phi'\hat{x}$ means “a meaning ambiguously denoting propositions got by giving a value to x ”. ([90], p. 113-114)

O sinal $\phi'\hat{x}$ designa uma função proposicional enquanto o sinal $\phi'x$, os valores da função proposicional. Como o manuscrito foi redigido no período em que Russell se correspondia com Frege, é provável que aquele tenha se inspirado neste ao conceber notações distintas para a função proposicional e para o valor indeterminado da função. Note nesse fragmento que Russell exprime a existência da relação peculiar entre a função proposicional $\phi'\hat{x}$ e as proposições que são seus valores dizendo que a primeira “denota de maneira ambígua” (*ambiguously denotes*) as últimas, o que mostra uma congruência entre conceitos e funções proposicionais.

Como vimos no capítulo anterior, com o sinal $\phi(\xi)$ Frege designa a função, com o sinal $\phi(x)$, os valores da função. No entanto, as conexões entre as entidades designadas por esses sinais não são as mesmas nos dois contextos. Não existe uma entidade intermediária entre o sinal da função proposicional e a função proposicional como o há entre o sinal da

função e a função na doutrina fregiana. E Frege também não possui uma notação para designar essa entidade intermediária, justamente porque o sinal designa o referente do sinal não o seu sentido. Assim, para se referir ao sentido do sinal $\phi(\xi)$, ele teria que utilizar a expressão [o sentido do sinal $\phi(\xi)$]. A função proposicional, por sua vez, constitui uma entidade intermediária entre o sinal $\phi'x$ e as proposições que são os seus valores. Para se referir à função – ao sentido (ou ao significado, como diz) de $\phi'x$ –, Russell não necessita da expressão [o significado do sinal $\phi'x$], pois utiliza a notação $\phi'\hat{x}$:

When we write $\vdash: p \supset q. \supset .q :\equiv: q \supset p. \supset .p$, we state that the equivalence in question holds for *any* value. When we wish to speak of the function itself. i. e., the constant meaning, we write $\hat{p} \supset \hat{q}. \supset .\hat{q}$ instead of $p \supset q. \supset .q$. In $\hat{p} \supset \hat{q}. \supset .\hat{q}$, we do not have an undetermined term of the denotation, but the constant meaning which denotes the term of the denotation. The circumflex has the same sort of effect as inverted commas have. E. g., we say Any man is biped; “Any man” is a denoting concept.

The difference between $p \supset q. \supset .q$ and $\hat{p} \supset \hat{q}. \supset .\hat{q}$ corresponds to the difference between any man and “any man”. ([90], p. 128)

A diferença entre $\phi'x$ e $\phi'\hat{x}$ corresponde, portanto, à diferença entre a pluralidade que um sinal indica e o conceito que denota (de maneira ambígua) essa pluralidade. Com o exemplo, Russell está admitindo que o sinal $\phi'\hat{x}$ designa um elemento intermediário entre o sinal $\phi'x$ e a pluralidade (das proposições) que esse sinal representa ⁵³.

Para Frege, a característica essencial da função é a insaturação. Mas Russell não reconhece a existência de entidades com essa característica, como deixa claro em *The principles*:

Frege’s general definition of a function, which is intended to cover also functions which are not propositional, may be shown to be inadequate by considering what may be called the identical function, i.e. x as a function of x . If we follow Frege’s advice, and remove x in hopes of having the function left, we find that nothing is left at all; yet nothing is not the meaning of the identical function. Frege wishes to have the empty places where the argument is to be inserted indicated in some way; thus he says that in $2x^3 + x$ the function is $2()^3 + ()$. But here his requirement that the two empty places are to be filled by the same letter cannot be indicated: there is no way of distinguishing what we mean from the function involved in $2x^3 + y$. (PoM, § 482)

⁵³ Convém observar aqui que a notação utilizada por Russell no texto de 1904 sofreu alteração em *Principia*. Neste livro, os sinais $\phi\hat{x}$ e ϕx são empregados com os mesmos propósitos que os sinais $\phi'\hat{x}$ e $\phi'x$, respectivamente. O propósito do apóstrofo era então diferenciar uma função proposicional de uma função descritiva, como sugerido em [88].

Aqui Russell critica a natureza insaturada da noção fregiana de função, que, segundo ele, é problemática quando está envolvida a função idêntica ou uma função de duas variáveis. Se a variável é uma entidade independente e separada da função, ao se remover o x da expressão de uma função idêntica, nada restará; ao se remover o x e o y , por sua vez, da expressão de uma função de duas variáveis, não será possível distinguir entre as variáveis designadas pelas duas letras e, por conseguinte, a distinção entre uma função de duas variáveis e uma função de uma só variável será perdida.

O que distingue a função proposicional de outras entidades – e que constitui o aspecto fundamental dessa noção, portanto – é a peculiaridade da relação que ela mantém com os seus valores: “The function itself, $\phi\hat{x}$, is the single thing which ambiguously denotes its many values; while ϕx , where x is not specified, is one of the denoted objects, with the ambiguity belonging to the manner of denoting”, diz Russell (PM, v. 1, p. 42). Não se pode negar que alguma influência Frege exerceu sobre Russell nesse período, mas qualquer semelhança entre a teoria fregiana de funções e a teoria de funções proposicionais, como se vê, é apenas superficial.

3 Funções proposicionais e classes

A teoria dos conjuntos constitui hoje não apenas uma área independente da Matemática, com seus próprios problemas e técnicas, mas também uma linguagem fundamental sobre a qual outros ramos desta ciência se assentam. Dentro dessa concepção metodológica, cujo desenvolvimento foi um processo lento e cujas origens precedem o trabalho de Cantor ([23]), encontra-se uma explicação simples e precisa da noção de função em termos de classes de pares ordenados. Uma vez que se saiba o que um par ordenado é em termos de conjuntos, a simplicidade da definição vem à superfície. Hoje sabemos que diferentes formulações da noção de par ordenado, nesse sentido, são possíveis¹, mas quando escreveu seus dois livros, na primeira década do século passado, Russell não sabia disso. Norbert Wiener, um pupilo seu, forneceu uma definição em 1914, num artigo onde propôs algumas simplificações do sistema de *Principia*. Como a proposta do artigo traz à tona algumas questões metodológicas inerentes ao trabalho fundador de Russell, questões estas que nos levam de volta a uma discussão sobre classes que este travou com Frege anos antes, inicio o presente capítulo com uma exposição das ideias contidas no manuscrito de Wiener e suas consequências.

3.1 A noção de par ordenado

Vimos na seção anterior como Russell faz, por meio de sua teoria de funções proposicionais, para reescrever sentenças que contenham símbolos de classes ou relações de modo que nenhuma referência seja feita a tais entidades. Para tanto, duas versões do axioma da redutibilidade são por ele utilizadas: uma para funções proposicionais de uma variável, outra para funções de duas variáveis. No seu artigo *A simplification of the logic of relations*, Wiener chama atenção para o fato de que em apenas dois teoremas de *Principia*, a segunda versão do axioma é diretamente empregada:

Two axioms, known as the axioms of reducibility, are stated on page 174 of the first volume of *Principia mathematica* of Whitehead and Russell. One of these, *12.1, is essential to the treatment of identity, descriptions, classes, and relations; the other, *12.11, is involved only in the theory of relations. *12.11 is applied directly only in *20.701.702.703 and *21.12.13.151.3.701.702.703.

In *20 and *21.701.702.703 all that is done with *12.11 is to extend it to cases where the arguments of φ and f are classes and relations; *12.11

¹ A mais popular delas, sugerida por Kuratowski em 1921, estabelece que o par ordenado (x, y) é o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

is essential to the development of the calculus of relations only owing to its application in *21.12.13.151.3. ([98], p. 224-225)

E, diante disso, estabelece a superfluidade do axioma para funções proposicionais de duas variáveis, mostrando que, para toda função proposicional φ desse tipo, existe uma função proposicional de uma variável ψ de modo que qualquer enunciado sobre a extensão de φ seja equivalente a um enunciado sobre a extensão de ψ :

Now, if we can discover a propositional function ψ of one variable so correlated with φ that its extension is determined uniquely by that of φ , and vice versa [...] we can entirely avoid the use of *12.11 and interpret any proposition concerning the extension of φ as if it concerned the extension of ψ ; for the existence of the extension of a propositional function of one variable is assured to us by *12.1, quite as that of one of two variables is by *12.11. Now, the propositional function $(\exists x, y) . \varphi(x, y) . \alpha = i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ is such a ψ . For it is clear that for each ordered pair of values of x and y there is one and only one value of α , and vice versa. On the one hand, as $i'(i'ix \cup i'\Lambda)$ is determined uniquely by x , and $i'i'iy$ is determined uniquely by y , $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ is determined uniquely by x and y . (*ibid.*, p. 225)

Como é o sistema de *Principia* que está sob exame em seu manuscrito, é com a notação deste livro que Wiener exprime seus resultados. Observamos, primeiramente, que o sinal Λ designa o conjunto vazio (ou classe nula, no jargão de Russell e Whitehead)² e o símbolo $i'x$, o conjunto cujo único elemento é x , isto é, $\{x\}$. Sendo assim, $i'(i'ix \cup i'\Lambda)$ corresponde ao conjunto $\{\{\{x\}, \Lambda\}\}$, $i'i'iy$, ao conjunto $\{\{\{y\}\}\}$, e $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$, a $\{\{\{x\}, \Lambda\}, \{\{y\}\}\}$ ³. Naturalmente, $\{\{\{x\}, \Lambda\}, \{\{y\}\}\} = \{\{\{z\}, \Lambda\}, \{\{w\}\}\}$ se, e somente se, $x = z$ e $y = w$; por isso, $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ é unicamente determinado por x e y . Por conseguinte, se α satisfaz a (ou, de modo equivalente, pertence à extensão da) função proposicional ψ , conforme a definição acima, existem x e y , únicos, tais que $\alpha = i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ e que satisfazem a função proposicional φ . Reciprocamente, se x e y satisfazem φ , então existe um único objeto α que coincide com $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$, ou seja, que satisfaz ψ .

A existência da função proposicional ψ viabiliza a definição da extensão de uma função proposicional de duas variáveis, isto é, a definição extensional de uma relação, e é isso o que Wiener propõe em seu artigo: “when x and y are of the same type, we can make the following definition: $\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y) = \hat{\alpha}\{(\exists x, y) . \varphi(x, y) . \alpha = i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy\}$ Df” ([98], p. 225). Recordemos que Russell define contextualmente $\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)$, substituindo

² A classe Λ é definida como a extensão da função proposicional $\hat{x} \neq \hat{x}$, ou seja, $\Lambda = \hat{x}(x \neq x)$ Df. (PM, p. 30).

³ Como observa Wiener, a expressão $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ só tem significado se x e y são objetos do mesmo tipo lógico: “it is essential that the x and the y should be of the same type, for if they are not $i'(i'ix \cup i'\Lambda)$ and $i'i'iy$ will not be, and $i'(i'ix \cup i'\Lambda) \cup i'i'iy$ will be meaningless” ([98], p. 225).

sentenças que contenham esta expressão por sentenças que expressem a existência de uma função predicativa de duas variáveis coextensiva com φ que satisfaz uma determinada função proposicional. A existência da função predicativa em questão é garantida pelo axioma da redutibilidade para funções proposicionais de duas variáveis. Com a definição nominal de Wiener, a utilização deste axioma se torna desnecessária visto que uma sentença contendo a expressão $\hat{x}\hat{y}\varphi(x, y)$ se torna uma sentença contendo o *definiens* da identidade acima. Esta sentença contém, portanto, a extensão de ψ , uma função proposicional de uma variável. Logo, apenas o axioma da redutibilidade para funções de uma variável é necessário.

O desconforto de Russell com respeito à abordagem “extensionalista” das relações precede *Principia*, sendo visível em *The principles*:

[...] it is necessary to give sense to the couple, to distinguish the referent from the relatum: thus a couple becomes essentially distinct from a class of two terms, and must itself be introduced as a primitive idea. It would seem, viewing the matter philosophically, that sense can only be derived from some relational proposition, and that the assertion that a is referent and b relatum already involves a purely relational proposition in which a and b are terms [...] It seems therefore more correct to take an intensional view of relations, and to identify them rather with class-concepts than with classes. (PoM, § 98)

É característico de uma relação de dois termos, afirma Russell algumas seções antes dessa passagem, que a relação proceda de um termo para o outro – esse elemento característico é o que denomina sentido (*sense*) da relação (PoM, § 94). Pois é o sentido da relação que torna um par ordenado essencialmente distinto de uma classe de dois termos. O problema é como explicar o sentido da relação, pois dizer que a é o referente e b , o referido, em uma relação, pressupõe uma asserção puramente relacional sobre a e b . Por isso, não há outra alternativa senão identificar relações com conceitos-classe, conclui. Por um conceito-classe, Russell entende um conceito que denota um agregado de objetos. Por exemplo, em “Sócrates é homem”, “homem” é um conceito-classe. Os muitos indivíduos pertencentes à espécie humana constituem uma coleção que é denotada por esse conceito. Sócrates, aliás, é um elemento dessa coleção, não do conceito-classe “homem” (PoM, § 21). Se não se sabe o que pares ordenados são, não é possível agrupá-los em uma coleção e, por esse motivo, não há outro meio de falar sobre relações senão “intensionalmente”, ou seja, por meio de conceitos-classes. Em *Principia*, a teoria dos conceitos-classes é abandonada em favor da doutrina das funções proposicionais que, como vimos, possuem um papel representativo análogo ao assumido pelos conceitos. Não existe, nesse caso, uma classe de pares ordenados determinada por uma função proposicional de duas variáveis e, por isso, o único meio de lidar com relações é através dessas funções.

Com a definição proposta em seu artigo, na medida em que estabelece como a noção de par ordenado pode ser reduzida à de classe, Wiener mostra, ao contrário do que acreditava Russell, ser possível lidar extensionalmente com relações. Isso permite uma grande simplificação do sistema lógico de *Principia*, que emprega uma notação para exprimir operações entre classes, outra para expressar operações análogas entre relações. Por exemplo, para indicar a união (soma lógica, no seu jargão) de duas classes α e β , Russell usa a notação $\alpha \cup \beta$, enquanto para denotar a união de duas relações R e S , utiliza $R \dot{\cup} S$ ⁴. Uma das simplificações possíveis com a definição de Wiener – e que este, a propósito, sugere em seu manuscrito – é o emprego, para indicar a união de duas relações (que aí nada mais são do que classes de pares ordenados) da mesma notação usada para a indicação da união de duas classes⁵.

Quine, em vários de seus livros⁶, reitera a importância da contribuição de Wiener para o desenvolvimento da Matemática. Uma consequência interessante da definição de Wiener, e a qual o primeiro aderiu prontamente, é a redução da noção de função à de relação. Pelos motivos elencados anteriormente, Russell não pensava ser isso possível.

3.2 Russell e a noção de classe

Desde a descoberta do paradoxo que leva seu nome, classes foram uma fonte de desconforto para Russell, como evidenciado em uma carta a Frege em julho de 1902:

Penso que classes nem sempre podem ser reconhecidas como nomes próprios. Uma classe composta de mais do que um objeto é, sobretudo, não um objeto, mas muitos. Pois uma classe ordinária constitui um todo; os soldados, e.g., constituem o exército. Isto não me parece ser, contudo, uma necessidade do pensamento, não obstante é essencial quando se faz uso da classe como nome próprio. Por isso, acredito poder dizer sem contradição que determinadas classes [...] são apenas multiplicidades, e não constituem, afinal, totalidades. Surgem, por esse motivo, falsas

⁴ Por definição, $\alpha \cup \beta = \hat{x}(x\epsilon\alpha \vee .x\epsilon\beta)$ e $R \dot{\cup} S = \hat{x}\hat{y}(sRy \vee .xSy)$ (PM, p. 28-30).

⁵ A descoberta de Wiener possibilita não apenas tornar mais simples o sistema de Russell e Whitehead, mas também um sistema concorrente. Em um artigo de 1908, no qual apresenta a primeira teoria axiomática de conjuntos, Zermelo faz uso do axioma da escolha para definir correspondências entre duas classes. Dados dois conjuntos infinitos disjuntos M e N , o axioma garante a existência de um conjunto $\{m, n\}$ contendo exatamente um único elemento de cada um dos dois conjuntos. O conjunto de todos os conjuntos com esta propriedade Zermelo denomina produto dos conjuntos M e N , notação MN (por exemplo, se $M = \{a, b, c\}$ e $N = \{0, 1\}$, $MN = \{\{a, 0\}, \{a, 1\}, \{b, 0\}, \{b, 1\}, \{c, 0\}, \{c, 1\}\}$). Então ele define uma correspondência de M em N (*Abbildung von M auf N*) como sendo um subconjunto ϕ de MN tal que cada elemento da união $M \cup N$ (a notação usada por ele é $M + N$) ocorre em um, e somente um, elemento $\{m, n\}$ de ϕ (se $M = \{a, b, c\}$ e $N = \{0, 1, 2\}$, $\phi = \{\{a, 0\}, \{b, 2\}, \{c, 1\}\}$ é um caso particular, segundo Zermelo, de correspondência de M em N). A definição de Wiener também permite, portanto, uma considerável simplificação dessa teoria, pois torna desnecessário o emprego do axioma da escolha para essa finalidade.

⁶ Entre eles, [67] e [71].

proposições e até mesmo paradoxos quando são consideradas indivíduos. ([29], p. 219-220)

Esse fragmento traz à tona a distinção feita anteriormente por Russell em *The principles* entre uma classe enquanto pluralidade e uma classe enquanto unidade ou indivíduo. No primeiro caso, a classe constitui um mero agregado de objetos, no segundo, um todo, isto é, algo mais do que a mera soma dos objetos que a constituem. Quando se enuncia o número de membros de uma classe, o enunciado diz respeito a um indivíduo, não a uma pluralidade, afirma Russell em *The principles*. Por outro lado, uma classe enquanto unidade é que pode ou não ser membro de uma classe enquanto pluralidade; por isso, aquelas classes que são membros de si mesmas são, além de pluralidades, unidades. Em face do paradoxo, se $\phi\hat{x}$ é a função proposicional satisfeita pelas classes que não são membros de si mesmas, e por estas apenas, a pluralidade determinada por $\phi\hat{x}$ não pode constituir uma unidade (PoM, § 103). Por esse motivo, Russell afirma em sua carta que certas classes são meros agregados, não constituindo unidades.

Frege, em resposta à carta de Russell, rebate a distinção feita por este e observa que classes, além de não serem meros agregados, não são unidades no sentido exposto acima. Um todo ou sistema, afirma Frege, é sustentado por relações entre suas partes, enquanto em uma classe é irrelevante quais relações existem entre os seus membros. Usando o exemplo fornecido por Russell em sua carta, Frege argumenta que um exército é destruído quando a relação que mantém a sua unidade é dissolvida, mesmo que os soldados individualmente permaneçam vivos. Também em um todo não é possível, afirma, saber quais objetos são suas partes; pode-se considerar partes de um regimento os batalhões, as companhias ou os soldados individualmente. Já em uma classe deve ser possível saber quais objetos são os seus membros. Além disso, uma parte de uma parte de um todo é também parte do todo (*e.g.*, os soldados são parte da companhia e também do exército do qual essa companhia é parte), mas o membro de um membro de uma classe não é um membro dessa classe. Os objetos que são membros de uma classe, observa ainda Frege, podem formar um sistema, mas este não deve ser confundido com a classe (assim, um monte de areia não deve ser confundido com a classe de grãos de areia que constituem esse monte). E “um todo cujas partes são objetos materiais é ele próprio material; uma classe, em comparação, não pode denotar um objeto físico, ao contrário, é um objeto lógico”, conclui ([29], p. 223).

Ainda em sua carta, Frege salienta que classes enquanto objetos lógicos só podem ser apreendidas enquanto extensões de conceitos, não havendo outra opção, em sua opinião, para assentar a Aritmética em bases lógicas. A resposta de Russell veio em uma carta no início do mês de agosto:

Muito obrigado por suas explicações sobre cursos de valores. Eu entendo agora a necessidade de tratar os cursos de valores não como

meros agregados de objetos, como sistemas. Entretanto, ainda falta inteiramente para mim a intuição direta, o conhecimento direto, daquilo que o senhor chama de valores: logicamente ele é necessário, mas permanece para mim uma hipótese justificável.

O paradoxo pode ser solucionado com a ajuda da admissão de que os cursos de valores não são objetos do tipo ordinário; i.e., $\varphi(x)$ necessita ser complementado (exceto em casos especiais) ou por um objeto, ou por um curso de valores de objetos ou por um curso de valores de cursos de valores etc. ([29], p. 226)

Nota-se aqui um primeiro esboço da teoria dos tipos. Conforme expus no capítulo anterior, Russell escreveu um segundo apêndice em *The principles*, onde propõe uma solução para o paradoxo. Nesse apêndice, apresenta uma hierarquia de classes onde o primeiro nível é formado por indivíduos, o segundo por classes de indivíduos, o terceiro por classes de classes de indivíduos e assim por diante. A contradição aplica-se, no entanto, igualmente a funções proposicionais, como deve ter percebido mais tarde, e isso deve tê-lo conduzido à teoria apresentada em *Principia*.

Uma questão surge nesse ponto: se a teoria dos tipos é aplicável a classes, porque eliminá-las em favor de funções proposicionais? Russell sugere, décadas depois, que foi a sua teoria das descrições que tornou possível resolver o problema dos paradoxos:

It soon appeared that class-symbols could be treated like descriptions, i.e. as non-significant parts of significant sentences. This made it possible to see, in a general way, how a solution of the contradictions might be possible. ([93], p. 17)

Mas como Quine ([69]) corretamente observa, não é a teoria das descrições que resolve o problema, mas a teoria dos tipos:

Seeing Russell's perplexities over classes, we can understand his gratification at accommodating classes under a theory of incomplete symbols. But the paradoxes, which were the most significant of these perplexities, were not solved by his theory of incomplete symbols; they were solved, or parried, by his theory of types. (*ibid.*, p. 77)

Sendo um adepto da fundamentação da Matemática sobre a teoria dos conjuntos, em diversos momentos Quine criticou a derivação de classes a partir de funções proposicionais empreendida por Russell em *Principia*. No livro *O sentido da nova lógica*, que escreveu a partir das conferências que fez no Brasil em 1942, Quine atribui essa redução a uma confusão entre atributo e fórmula (ou matriz, como diz no livro). Com efeito, do que vimos até aqui (e ao menos no período em que escreveu seus dois livros), Russell considera fórmulas como “ x é homem”, como expressões de entidades não-linguísticas denominadas

funções proposicionais. Não é a fórmula que é satisfeita ou não por um possível argumento, mas a entidade que a fórmula designa. Assim, a classe emerge como o objeto cujos membros satisfazem essa entidade e, por esse motivo, a pressupõe.

Hylton ([47]) defende que se classes fossem entidades independentes na doutrina russelliana, a teoria dos tipos não seria a elas aplicável. É o princípio de pressuposição relacionado às funções proposicionais (funções proposicionais pressupõem os seus valores e, portanto, os seus argumentos) aliado ao princípio do círculo vicioso, argumenta, que torna possível a teoria dos tipos para tais entidades. De fato, como a função proposicional pressupõe os objetos que são os seus possíveis argumentos, ela deve estar em um nível diferente daquele que contém esses objetos, o que justifica, em princípio, uma hierarquia de tipos.

Ao admitir um princípio de pressuposição relacionado às funções proposicionais, Russell não está aceitando, com isso, que para se apreender uma função proposicional seja preciso apreender todos os seus possíveis valores:

[...] a [propositional] function can be apprehended without its being necessary to apprehend its values severally and individually. If this were not the case, no function could be apprehended at all, since the number of values (true and false) of a function is necessarily infinite and there are necessarily possible arguments with which we are unacquainted. What is necessary is not that the values should be given individually and extensionally, but that the totality of the values should be given intensionally, so that, concerning any assigned object, it is at least theoretically determinate whether or not the said object is a value of the function. (PM, v. 1, p. 42).

Basta, portanto, que se possa decidir, ao menos teoricamente, se uma dada proposição é ou não valor de uma função proposicional. Por exemplo, a função proposicional “ \hat{x} é homem” é apreendida reconhecendo-se que a proposição “Sócrates é homem” é o seu valor para o argumento “Sócrates”. A função proposicional em questão pressupõe os seus valores, porque somos capazes, em princípio, de reconhecer se uma dada proposição é ou não seu valor.

Mas se a classe fosse uma entidade independente da função proposicional, por que não haveria um princípio de pressuposição similar a ela associado? Em um manuscrito elaborado no primeiro semestre de 1903, Russell afirma que uma classe infinita só pode ser especificada através de uma propriedade pertencente a todos os seus membros e somente a eles:

A class (manifold, aggregate, *Menge*, *ensemble*, etc.), when the number of its members is finite, may be specified by enumerating all the members.

But when it is infinite, like the class of finite cardinal integers, of rational numbers, of real numbers, or of points of space, it is only definable by means of some property belonging to all its members and to no other terms. Now a property, in its most general form, is a propositional function [...] ([87], p. 5, grifos do autor)

Russell entende, portanto, que uma classe pode ser apreendida a partir do momento que somos capazes de avaliar se um dado objeto possui ou não um determinado atributo – ou, de modo equivalente, se o objeto satisfaz ou não uma determinada função proposicional. Para tornar a classe independente da função proposicional, seria preciso um critério para se decidir se um dado objeto pertence ou não à classe; havendo esse critério, a classe presumiria, nesse sentido, os seus elementos e não haveria motivo para não se pensar em uma hierarquia de tipos para classes. Para Quine ([70]), esse critério seria verificar se o objeto satisfaz ou não uma fórmula (condição de pertinência), mas ele, diferente de Russell, entende que a fórmula está desvinculada da função proposicional.

Para poder pensar em classes como entidades independentes, Russell teria que renunciar às suas funções proposicionais. Quando escreveu *Principia* ele “tinha em mãos” as duas espécies de entidades: classes e funções proposicionais. Ele não quis abrir mão das últimas, o que se justifica considerando que a sua teoria das descrições delas depende. A alternativa que encontrou, por uma questão metodológica, foi encaixar a sua doutrina de classes nessa teoria. Sobre a sua escolha, alguns detalhes são revelados no seu livro *Introduction to mathematical philosophy*, de 1919. No livro, Russell chega a considerar a possibilidade de identificar classes com funções proposicionais, mas a rejeita tendo em vista que duas funções proposicionais distintas podem determinar a mesma classe:

Every class [...] is defined by some propositional function which is true of the members of the class and false of other things. But if a class can be defined by one propositional function, it can equally well be defined by any other which is true whenever the first is true and false whenever the first is false. For this reason the class cannot be identified with any one such propositional function rather than with any other—and given a propositional function, there are always many others which are true when it is true and false when it is false. ([79], p. 183)

Uma vez que classes não podem ser coisas do mesmo tipo que seus membros, não podem ser meros agregados e também não podem ser identificadas com funções proposicionais, não há outra opção senão considerá-las ficções simbólicas, conclui Russell no parágrafo seguinte.

Tendo isso em vista, fica claro porque incluir a teoria de classes na teoria dos símbolos incompletos, pois esta é isenta de qualquer compromisso ontológico com respeito a classes. O fragmento abaixo mostra que era isso o que Russell tinha em mente:

And if we can find any way of dealing with them as symbolic fictions, we increase the logical security of our position, since we avoid the need of assuming that there are classes without being compelled to make the opposite assumption that there are no classes. We merely abstain from both assumptions. This is an example of Occam's razor, namely, "entities are not to be multiplied without necessity". ([79], p. 184)

A derivação das classes a partir das funções proposicionais justifica-se, desse modo, na medida em que evita a admissão desnecessária das primeiras.

Considerações finais

No presente estudo, considerei apenas uma pequena parcela da imensa produção de Frege e Russell sobre os fundamentos da Matemática. Do último, em particular, analisei uma parte reduzida do material disponível referente à primeira década do século XX. Com a publicação, nas últimas décadas, de uma série de manuscritos inéditos de Russell – a qual pertencem os rascunhos dos dois livros cujo conteúdo avaliei –, um vasto campo de pesquisa descortina-se. Uma possibilidade de estudo filosófico e histórico que não foi possível desenvolver aqui, pois exigiria muito mais tempo, diz respeito ao desenvolvimento da teoria dos tipos. Como foi dito no segundo capítulo, Russell abandonou momentaneamente essa teoria, tentando encontrar soluções alternativas para as contradições. Até o seu retorno a ela, ele esboçou as suas ideias em alguns manuscritos, que encontram-se todos publicados. Infelizmente, em face do curto tempo disponível, escolhas devem ser feitas: nem todo material disponível pode ser avaliado e estudos como o indicado acima necessitam ser adiados. Muitas das questões filosóficas que emergem da análise das investigações de Frege e Russell também tiveram que ser postas de lado, pois, como expressei na introdução, meu propósito não foi emitir julgamento sobre as perspectivas filosóficas dos autores. Antes, tentei fazer uma reconstrução das concepções de função dos autores sob tais perspectivas.

Como vimos no primeiro capítulo, Frege empreendeu, motivado por seu projeto fundamentador, uma ampliação da concepção de função então vigente ao entender que objetos além do âmbito da Aritmética poderiam ser argumentos e valores de uma função. Como resultado dessa extensão, ele reuniu sob a mesma noção geral as funções ordinárias da Matemática e a noção lógica de conceito e desenvolveu um método de análise filosófica que lhe possibilitou criar uma linguagem simbólica capaz de exprimir as proposições da Matemática de uma maneira que nenhum outro até aquele momento, aparentemente, havia sido capaz de fazer.

Russell, conforme exposto no segundo capítulo, também foi conduzido a ampliação semelhante, porém, apresentando algumas diferenças significativas em relação a Frege. A função proposicional, extensão russelliana da ideia de função, é posterior ao método russelliano de análise e, por esse motivo, não possui as mesmas raízes que a noção fregiana de conceito. Além disso, a função proposicional não é uma categoria de funções tal como o são os conceitos e as relações na doutrina fregiana. Os seus desdobramentos metodológicos, contudo, não são menos interessantes: por meio de sua doutrina de funções proposicionais, como discutido no terceiro capítulo, Russell estabelece o menor número necessário de noções fundamentais a partir dos quais derivam todas as outras, entre elas, as noções de classe e de função descritiva.

Segundo Bento de Jesus Caraça, no seu livro *Conceitos fundamentais da Matemática*:

[...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. ([13], p. 9)

O princípio em virtude do qual se manifesta essa tendência, Caraça denomina *princípio de extensão*. O estudo de caso que ora apresento ilustra como tal princípio aplica-se à Matemática. Pois a concepção compreensiva de função de Frege e a função proposicional de Russell nada mais são que generalizações de uma importante aquisição do pensamento matemático: a ideia de função. A conceitografia e as teorias dos tipos e das descrições, por sua vez, correspondem à outra face do princípio de extensão: constituem a exploração metódica daquilo que essas generalizações acarretam.

Nota-se, por fim, a existência de um padrão de rigor muito próprio subjacente às concepções de função de Frege e Russell, pois o processo de extensão da ideia de função empreendido por ambos está vinculado a uma teoria filosófica mais ampla do significado. Em Frege, a distinção horizontal função/argumento subordina-se à distinção vertical signo/sentido/referência e, por esse motivo, a doutrina fregiana de funções estrutura-se em torno dessa última: a função é o referente de uma expressão insaturada e esta, por sua vez, está relacionada a uma fórmula (a expressão funcional que leva à dada expressão insaturada através da supressão da(s) letra(s) do(s) argumento(s)). A função proposicional de Russell, por outro lado, é o elemento intermediário entre a fórmula e as proposições que estão conectadas à fórmula. Nem toda fórmula corresponde a uma função proposicional: algumas fórmulas são funções descritivas e estas são explicadas contextualmente em termos das funções proposicionais. A função fregiana e a função proposicional são, portanto, as entidades que participam de suas respectivas relações de significado e que só podem ser explicadas no âmbito dessas relações.

Referências

- [1] A VIEW ON CITIES. Contém informações e fotos de atrações de algumas das maiores cidades do mundo. Disponível em <<http://www.aviewoncities.com/berlin/tiergarten.htm>>. Acesso em: 10 fev. 2013.
- [2] ALCOFORADO, P. Introdução. In: FREGE, G. *Lógica e filosofia da linguagem*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009. p. 9-39.
- [3] ARNAULD, A.; NICOLE, P. *Logic or the art of thinking*: containing, besides common rules, several new observations appropriate for forming judgment. Translated by J. V. Buroker. [Cambridge]: Cambridge University Press, 1996.
- [4] BEANEY, M. *Frege: making sense*. Trowbridge: Duckworth, 1996.
- [5] _____. The early life of Russell's notion of a propositional function. *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication*, v. 4, p. 1-25, Ago. 2009. Disponível em <<http://www.thebalticyearbook.org>>. Acesso em: 20 mai. 2013.
- [6] BLACKWELL, K. Part I of The principles of mathematics. *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, v. 4, p. 271-288, 1984.
- [7] BOOLE, G. *An Investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. London: Walton & Maberly, 1854.
- [8] BOTTAZZINI, U. *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [9] BOURBAKI, N. *Théorie des ensembles*. Paris: Diffusion C.C.L.S., 1970. (Éléments du mathématique; 1)
- [10] BYNUM, T. W. On the life and work of Gottlob Frege. In: FREGE, G. *Conceptual notation and related articles*. Oxford: Oxford University Press, 1972. p. 1-54.
- [11] _____. Appendix I: reviews of the Conceptual Notation by Frege's contemporaries. In: FREGE, G. *Conceptual notation and related articles*. Oxford: Oxford University Press, 1972. p. 209-235.
- [12] CANTOR, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Translated by P. E. B. Jourdain. New York: Dover, [1955].
- [13] CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.
- [14] CARNAP, R. The logicist foundations of mathematics. In: BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics: selected readings*. 2nd ed. [Cambridge]: Cambridge University Press, [1983]. p. 41-52.

- [15] COSTA, M. A. As idéias fundamentais da matemática. In: _____. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. 3. ed. São Paulo: Convívio, 1981. p.173-330.
- [16] DAUBEN, J. W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1990.
- [17] DEDEKIND, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1961.
- [18] DIEUDONNÉ, J. *Pour l'honneur de l'esprit humain: les mathématiques aujourd'hui*. [S.l.]: Hachette, 1987.
- [19] DUMMETT, M. *Frege: philosophy of mathematics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1991.
- [20] EULER, L. *Introduction to analysis of the infinite*. Translated by J. D. Blanton. New York: Springer-Verlag: 1988-1990. 2 v.
- [21] _____. *Foundations of differential calculus*. Translated by J. D. Blanton. New York: Springer-Verlag: 2000.
- [22] FERREIRÓS, J. Introducción. In: DEDEKIND, R. *Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza, 1998. p. 5-75.
- [23] _____. O surgimento da abordagem conjuntista em matemática. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 2, n. 4, p. 141-154, Out. 2002.
- [24] FREGE, G. *The foundations of arithmetic: a logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Translated by J. L. Austin. 2nd ed. New York: Harper & Brothers, 1953.
- [25] _____. *The basic laws of arithmetic: exposition of the system*. Translated by M. Furth. Berkeley: University of California Press, 1967.
- [26] _____. Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift. In: _____. *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner, 1969. p. 9-52.
- [27] _____. Logik. In: _____. *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner, 1969. p. 137-163.
- [28] _____. Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter. In: _____. *Nachgelassene Schriften*. Hamburg: Felix Meiner, 1969. p. 273-277.
- [29] _____. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg: Felix Meiner, 1976.
- [30] _____. *Posthumous writings*. Translated by P. Long and R. White. Colchester: Basil Blackwell, 1979.
- [31] _____. *Philosophical and mathematical correspondence*. Translated by H. Kaal. Colchester: Basil Blackwell, 1980.

- [32] _____. Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen. In: _____. *Kleine Schriften*. 2. Aufl. Hildesheim: George Olms, 1990. p. 50-84.
- [33] _____. Funktion und Begriff. In: _____. *Kleine Schriften*. 2. Aufl. Hildesheim: George Olms, 1990. p. 125-142.
- [34] _____. Was ist eine Funktion? In: _____. *Kleine Schriften*. 2. Aufl. Hildesheim: George Olms, 1990. p. 273-280.
- [35] _____. Logische Untersuchungen. In: _____. *Kleine Schriften*. 2. Aufl. Hildesheim: George Olms, 1990. p. 342-394.
- [36] _____. Begriffsschrift. In: _____. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2. Aufl. Hildesheim: Georg Olms, 1993. p. v-88.
- [37] _____. G. Über den Zweck der Begriffsschrift. In: _____. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2. Aufl. Hildesheim: Georg Olms, 1993. p. 97-105.
- [38] _____. Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. In: _____. *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2. Aufl. Hildesheim: Georg Olms, 1993. p. 106-114.
- [39] GOMES, R. R. *A noção de função em Frege*. 2009. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.
- [40] GRATAN-GUINNESS, I. How Bertrand Russell discovered his paradox. *Historia Mathematica*, v. 5, n. 2, p. 127-137, 1978.
- [41] _____. *The Search for mathematical roots, 1870-1940: logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton: Princeton University Press, 2000.
- [42] GRIFFIN, N. The prehistory of Russell's paradox. In: LINK, G. (ed.) *One hundred years of Russell's paradox: mathematics, logic and philosophy*. Berlin: Walter de Gruyter, 2004. p. 349-371. (De Gruyter series in logic and its applications; 6)
- [43] HADDOCK, G. E. R. *A critical introduction to the philosophy of Gottlob Frege*. Chippenham: Ashgate, 2006.
- [44] HYLTON, P. *Russell, idealism and the emergence of analytic philosophy*. Oxford: Oxford University Press, 1990.
- [45] _____. The theory of descriptions. In: GRIFFIN, N. (Ed.). *The Cambridge companion to Bertrand Russell*. New York: Cambridge University Press, 2003. p. 202-240.
- [46] _____. Functions and propositional functions in 'Principia mathematica'. In: _____. *Propositions, functions, and analysis: selected essays on Russell's philosophy*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 122-137.
- [47] _____. The vicious circle principle. In: _____. *Propositions, functions, and analysis: selected essays on Russell's philosophy*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 108-114.

- [48] HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to set theory*. 3rd ed. New York: Marcel Dekker, [1999].
- [49] KENNEDY, H. C. What Russell learned from Peano. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 14, n. 3, p. 28-34, Jul. 1973.
- [50] KLEMENT, K. C. The origins of the propositional functions version of Russell's paradox. *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, v. 24, p. 101-132, 2004.
- [51] KREMER, M. Sense and reference: the origins and development of the distinction. In: POTTER, M.; RICKETTS, T. (Ed.). *The Cambridge Companion to Frege*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. p. 220-292.
- [52] LEVINE, J. Analysis and decomposition in Frege and Russell. *The Philosophical Quarterly*, v. 52, n. 207, p. 195-216, Abr. 2002.
- [53] LINSKY, B. Russell's marginalia in his copies of Frege's works. *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, v. 24, p. 5-36, 2004.
- [54] _____. Russell and Frege on the logic of functions. *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication*, v. 4, p. 1-17, Ago. 2009. Disponível em <<http://www.thebalticyearbook.org>>. Acesso em: 20 mai. 2013.
- [55] _____. From descriptive functions to sets of ordered pairs. In: HIEKE, A.; LEITGEB, H. (Ed.). *Reduction – Abstraction – Analysis*. Munich: Ontos, 2009. p 259–272.
- [56] _____. *The evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell's manuscripts and notes for the second edition*. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [57] LÜTZEN, J. Between rigor and applications: developments in the concept of function in mathematical analysis. In: NYE, M. J. (Ed.). *The Cambridge history of science: volume 5, the modern physical and mathematical sciences*. [Cambridge]: Cambridge University Press, [2003?]. p. 468-487.
- [58] ŁUKASIEWICZ, J. *Elements of mathematical logic*. Translated by O. Wojtasiewicz. N. York: Pergamon, 1963.
- [59] _____. Investigations into the sentential calculus. In: _____. *Selected works*. Poland: North-Holland, 1970.
- [60] _____. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la logica formal moderna*. Traducción de J. F. Robles. Madrid: Editorial Tecnos, 1977.
- [61] MONNA, A. F. The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 9, n. 1, p. 57-84, Nov. 1972.
- [62] MOORE, G. H. General headnote to part I. In: RUSSELL, B. *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 3-8. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [63] _____. Headnote to paper 2. In: RUSSELL, B. *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 209-210. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)

- [64] _____. H. Headnote to paper 3. In: RUSSELL, B. *Toward the “Principles of Mathematics” 1900-02*. MOORE, G. H., editor. London: Routledge, 1993. p. 209-210. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [65] _____. Introduction. In: RUSSELL, B. *Toward the “Principles of Mathematics” 1900-02*. MOORE, G. H., editor. London: Routledge, 1993. p. xiii-xlviii. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [66] NACHTOMY, O. *Possibility, agency and individuality in Leibniz’s metaphysics*. Dordrecht: Springer, 2007.
- [67] QUINE, W. V. O. *Set theory and its logic*. 2nd ed. Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University Press, 1969.
- [68] _____. Commentary before Russell’s 1908a. In: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971. p. 150–153.
- [69] _____. Russell’s ontological development. In: _____. *Theories and things*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1982. p. 73-85.
- [70] _____. On the individuation of attributes. In: _____. *Theories and things*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1982. p. 100-112.
- [71] _____. *O sentido da nova lógica*. 2. ed. Curitiba: Editora da UFPR, 1996.
- [72] RANG, B; THOMAS, W. Zermelo’s discovery of “Russell paradox”. *Historia Mathematica*, v. 8, n. 1, p. 15-22, 1981.
- [73] RUSSELL, B; WHITEHEAD, A. N. *Principia mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913. 3 v.
- [74] _____. *Principia mathematica to *56*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [75] RUSSELL, B. *Portraits from memory and other essays*. New York: Simon and Schuster, 1956.
- [76] _____. On denoting. In: _____. *Logic and knowledge: essays 1901-1950*. R. C. Marsh. (Ed.) New York: MacMillan, [1956?]. p. 41-56.
- [77] _____. *The autobiography of Bertrand Russell 1872-1914*. [Boston]: Little, Brown, [1967?].
- [78] _____. *My philosophical development*. London: Unwin, 1975.
- [79] _____. *Introduction to mathematical philosophy*. New York: Dover, 1993.
- [80] _____. Note on the logic of the sciences. In: _____. *Philosophical papers 1896-99*. London: Routledge, 1993. p. 3-5. (The collected papers of Bertrand Russell; 2)
- [81] _____. The principles of mathematics, draft of 1899-1900. In: _____. *Toward the “Principles of Mathematics” 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 9-180. (The collected papers of Bertrand Russell; 2)

- [82] _____. Review of Hannequin, *essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine*. In: _____. *Philosophical papers 1896-99*. London: Routledge, 1993. p. 35-43. (The collected papers of Bertrand Russell; 2)
- [83] _____. An analysis of mathematical reasoning, being an inquiry into the subject-matter, the fundamental conceptions, and the necessary postulates of mathematics. In: _____. *Philosophical papers 1896-99*. London: Routledge, 1993. p. 155-162. (The collected papers of Bertrand Russell; 2)
- [84] _____. Part I of the Principles, draft of 1901. In: _____. *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 181-208. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [85] _____. Plan for book I: the variable. In: _____. *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 209-212. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [86] _____. Recent work on the principles of mathematics. In: _____. *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02*. London: Routledge, 1993. p. 363-379. (The collected papers of Bertrand Russell; 3)
- [87] _____. Classes. In: _____. *Foundations of logic, 1903-05*. London: Routledge, 1994. p. 3-37. (The collected papers of Bertrand Russell; 4)
- [88] _____. On functions, classes and relations. In: _____. *Foundations of logic, 1903-05*. London: Routledge, 1994. p. 85-95. (The collected papers of Bertrand Russell; 4)
- [89] _____. On functions. In: _____. *Foundations of logic, 1903-05*. London: Routledge, 1994. p. 96-110. (The collected papers of Bertrand Russell; 4)
- [90] _____. Fundamental notions. In: _____. *Foundations of logic, 1903-05*. London: Routledge, 1994. p. 111-259. (The collected papers of Bertrand Russell; 4)
- [91] _____. On meaning and denotation. In: _____. *Foundations of logic, 1903-05*. London: Routledge, 1994. p. 314-358. (The collected papers of Bertrand Russell; 4)
- [92] _____. *Principles of mathematics*. 3rd ed. [Oxford]: Taylor & Francis, 2009.
- [93] _____. My mental development. In: _____. *The basic writings of Bertrand Russell*. [Oxford]: Taylor & Francis, 2009. p. 9-22.
- [94] RUTHERFORD, D. Philosophy and language in Leibniz. In: Jolley, N. (Ed.). *The Cambridge companion to Leibniz*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. p. 224-269.
- [95] SCHRÖDER, E. [Rezension über] Gottlob Frege, Begriffsschrift. *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik*, v. 25, p. 81-94, 1880.
- [96] SLUGA, H. Frege against the booleans. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 28, n. 1, p. 80-98, Jan. 1987.
- [97] SOLOMON, G. What became of Russell's "relation-arithmetic"? *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, v. 9, p. 168-173, 1989.

-
- [98] WIENER, N. A simplification of the logic of relations. In: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971. p. 224–227.
- [99] YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, n. 1, p. 37-84, Set. 1976.
- [100] ZERMELO, E. Investigations in the foundations of set theory I. In: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971. p. 199–215.