



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

A large, abstract geometric design is centered on the page. It features a white circle containing several overlapping triangles in various shades of blue. The triangles are arranged in a way that creates a sense of depth and movement, with some triangles pointing towards the center and others pointing outwards. The background of the entire page is a solid light blue.

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Equações Diferenciais Fracionárias: Teoria e
Aplicações**

Lorena Salvi Stringheta

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Lorena Salvi Stringheta

Equações Diferenciais Fracionárias: Teoria e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Co-orientador
Prof. Dr. Luciano Aparecido Magrini
Rio Claro/SP

2026

S918e Stringheta, Lorena Salvi
Equações diferenciais fracionárias : teoria e aplicações / Lorena Salvi Stringheta. -- Rio Claro, 2026
85 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Marta Cilene Gadotti
Coorientador: Luciano Aparecido Magrini

1. Equações diferenciais. 2. Existência, Teoremas de. 3. Cálculo fracionário. I. Título.

Impacto potencial desta pesquisa

Este trabalho apresenta material didático em português sobre teoria qualitativa de equações diferenciais fracionárias, incluindo existência e unicidade de soluções para problemas de valores iniciais com derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, além de abordar a dependência contínua e aplicações em fenômenos com memória.

Potential impact of this research

This thesis presents instructional material in Portuguese on the qualitative theory of fractional differential equations, including existence and uniqueness of solutions for initial value problems with Riemann–Liouville and Caputo derivatives, as well as continuous dependence and applications to memory-related phenomena.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Lorena Salvi Stringheta

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: TEORIA E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti
IGCE/ UNESP/ Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
CNPEM/ Campinas (SP)

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos
ICEx/ UNIFAL/ Alfenas (MG)
Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 25 de março de 2026

*Dedico este trabalho aos meus pais,
que sempre acreditaram em mim, mesmo quando eu duvidei.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais Ana Paula e Antonio, por todo o amor que me deram e pela dedicação em sempre me proporcionar as melhores coisas do mundo, e ao meu irmão Igor, por sempre se fazer presente e me dar força em todas as fases da minha vida.

Também agradeço às minhas amigas: Gabi, que faz parte da minha vida há vinte anos e se tornou uma jovem mulher que me inspira muito; Luiza, que conheci através da Matemática e se tornou minha irmã de coração; Maria e Marina, por compartilharem a jornada do mestrado comigo e por sempre me apoiarem, incentivarem e fortalecerem. E ao meu namorado, Natanael, por me inspirar a viver a vida de forma leve.

Por fim, gratidão à minha orientadora Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, que sempre acreditou em mim e me fez crescer academicamente, e também às queridas Profa. Dra. Suzete Maria Afonso e Profa. Dra. Carina Alves, que têm minha eterna admiração por serem pessoas e profissionais incríveis.

*Deus criou os números inteiros,
todo o resto é obra do homem.*

Leopold Kronecker

Resumo

Neste trabalho, apresenta-se uma introdução ao cálculo fracionário, destacando-se conceitos e ferramentas fundamentais para o estudo de equações diferenciais. Inicialmente, são abordadas funções importantes dessa teoria, como as funções Gama, Beta e de Mittag-Leffler, além da Transformada de Laplace. Em seguida, introduzem-se a integral fracionária de Riemann-Liouville e as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo, com ênfase em suas propriedades, diferenças conceituais e exemplos ilustrativos. Na sequência, estudam-se problemas de valor inicial associados a equações diferenciais fracionárias, com ênfase em resultados de existência e unicidade de soluções, envolvendo as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, bem como na dependência contínua em relação aos dados iniciais para o caso da derivada de Caputo. Por fim, são apresentadas aplicações envolvendo a equação logística e o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, com o propósito de comparar os modelos clássicos e fracionários, evidenciando a relevância dessa abordagem na modelagem de fenômenos que incorporam efeitos de memória.

Palavras-chave: Função Gama. Função de Mittag-Leffler. Integral e Derivada fracionária de Riemann-Liouville. Derivada fracionária de Caputo.

Abstract

In this thesis, an introduction to fractional calculus is presented, highlighting fundamental concepts and tools for the study of differential equations. Initially, important functions of this theory are addressed, such as the Gamma, Beta, and Mittag-Leffler functions, as well as the Laplace transform. Next, the Riemann–Liouville fractional integral and the Riemann–Liouville and Caputo fractional derivatives are introduced, with emphasis on their properties, conceptual differences, and illustrative examples. Subsequently, initial value problems associated with fractional differential equations are studied, with emphasis on existence and uniqueness of solutions involving Riemann–Liouville and Caputo derivatives, as well as continuous dependence on initial data in the case of the Caputo derivative. Finally, applications involving the logistic equation and the Lotka–Volterra predator–prey model are presented, with the purpose of comparing classical and fractional models, highlighting the relevance of this approach in modeling phenomena that incorporate memory effects.

Keywords: Gamma Function. Mittag-Leffler Function. Riemann-Liouville fractional integral and derivative. Caputo fractional derivative.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico das funções $f(x) = x^2$, $D^{\frac{1}{2}}x^2 = {}^C D^{\frac{1}{2}}x^2$ e $f'(x) = 2x$	41
3.2	Derivadas da função $f(x) = x^2$ de ordens: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$	41
3.3	Gráfico das funções $f(x) = x^3$, $D^{\frac{1}{4}}x^3$, $D^{\frac{1}{2}}x^3$, $D^{\frac{3}{4}}x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $D^{\frac{3}{2}}x^3$, $f''(x) = 6x$	42
3.4	Derivadas de Riemann-Liouville de ordem $1/2$ de algumas funções constantes.	43
3.5	Derivada de ordem $\frac{1}{2}$ de $\sin x$	44
3.6	Derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ de $\cos x$	44
3.7	Derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ de e^x	44
3.8	Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de $\sin x$ e derivada primeira de $\sin x$	45
3.9	Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de $\cos x$ e derivada primeira de $\cos x$	45
3.10	Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de e^x e derivada primeira de e^x	45
5.1	Modelo Logístico para diferentes valores de α	64
5.2	Modelo Logístico para diferentes valores de P_0	65
5.3	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 1$	69
5.4	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 1$	69
5.5	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.9$	69
5.6	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.9$	69
5.7	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.8$	70
5.8	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.8$	70
5.9	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.7$	70
5.10	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.7$	70
5.11	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.6$	70
5.12	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.6$	70
5.13	Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.5$	71
5.14	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.5$	71
5.15	Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.9$	71
5.16	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.9$	71

5.17	Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.8$	71
5.18	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.8$	71
5.19	Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.7$	72
5.20	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.7$	72
5.21	Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.6$	72
5.22	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.6$	72
5.23	Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5$	72
5.24	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5$	72
5.25	Modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 1$	73
5.26	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 1$	73
5.27	Modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 1$	73
5.28	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 1$	73
5.29	Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 1$	73
5.30	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 1$	73
5.31	Modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 1$	74
5.32	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 1$	74
5.33	Modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$	74
5.34	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$	74
5.35	Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$	74
5.36	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$	74
5.37	Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.8$	75
5.38	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.8$	75
5.39	Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.6$	75
5.40	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$	75
5.41	Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.5$	75
5.42	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.5$	75
5.43	Modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 0.7$	76
5.44	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 0.7$	76
5.45	Modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.7$	76
5.46	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.7$	76
5.47	Modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 0.7$	76
5.48	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 0.7$	76
5.49	Modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.7$	77
5.50	Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.7$	77

Lista de Tabelas

2.1	Algumas Transformadas de Laplace úteis.	28
2.2	Resumo das Transformadas de Laplace dos exemplos anteriores.	29
3.1	Resumo das Transformadas de Laplace dos operadores fracionários.	47

Sumário

1	Introdução	15
2	Conceitos Iniciais	18
2.1	Funções Gama e Beta	18
2.2	Função de Mittag-Leffler	23
2.3	Transformada de Laplace	25
2.3.1	Propriedades da Transformada de Laplace	26
2.3.2	Transformada Inversa de Laplace	27
2.3.3	Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler	28
3	Cálculo Fracionário	30
3.1	Integral e Derivadas	30
3.2	Propriedades	34
3.3	Exemplos	40
3.3.1	Derivada de Constante	42
3.3.2	Derivadas das Funções Seno, Cosseno e Exponencial	43
3.4	Transformada de Laplace dos Operadores Fracionários	46
4	Equações Diferenciais Fracionárias	48
4.1	Problema de Valor Inicial	48
4.2	Teorema de Existência e Unicidade	53
4.3	Dependência Contínua	58
5	Aplicações	63
5.1	Equação Logística	63
5.2	Modelo de Lotka-Volterra (Presa-Predador)	66
	Referências	78

A	Alguns Resultados de Análise	80
A.1	Fórmula de Taylor	80
A.2	Integrais Impróprias	80
B	Alguns Resultados de Análise Funcional e Teoria da Medida	83
B.1	Espaço Normado	83
B.2	Espaço de Banach	84
B.3	Função Mensurável	84

Introdução

O Cálculo de ordem não inteira ou Cálculo Fracionário opera com ordens arbitrárias, generalizando os conceitos de derivada e integral do Cálculo de ordem inteira ou simplesmente Cálculo. Apesar da denominação Cálculo Fracionário, a ordem dos operadores não é necessariamente fracionária, podendo assumir valores reais ou até mesmo complexos.

Embora seja considerada uma área relativamente recente da matemática, com avanços significativos a partir da década de 1970, a primeira menção ao Cálculo Fracionário ocorreu em uma troca de correspondências entre Leibniz, um dos precursores do Cálculo, e L'Hôpital, em 30 de setembro de 1695. A respeito do contexto histórico referente ao Cálculo Fracionário, sugere-se a leitura do livro [1].

Assim como o Cálculo Fracionário é uma generalização do Cálculo de ordem inteira, as funções presentes nessa teoria também são generalizações de funções conhecidas. Destacam-se, nesse contexto, a Função Gama e a Função de Mittag-Leffler. A primeira estende o conceito de fatorial para valores não necessariamente naturais e a segunda pode ser vista como uma generalização da função exponencial, desempenhando papel central na teoria das equações diferenciais fracionárias.

Ao longo do desenvolvimento do Cálculo Fracionário, foram propostas diversas definições de integrais e derivadas de ordem arbitrária. Neste trabalho, entretanto, serão abordadas apenas as definições de integral fracionária segundo Riemann-Liouville e as definições de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo.

Em 2015, no artigo [2] foram estabelecidos alguns critérios que um operador deve cumprir para ser caracterizado como uma derivada fracionária. Tais critérios serão apresentados mais adiante neste texto. Além disso, no artigo [3] e na tese [4] os autores discutem esses critérios para diferentes definições de derivadas fracionárias, incluindo aquelas consideradas neste trabalho.

No Cálculo de ordem inteira, os dois principais ramos - o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral - costumam ser apresentados nos cursos de Cálculo nesta ordem. Contudo, do ponto de vista histórico, o desenvolvimento do Cálculo Integral precede o do Cálculo

Diferencial. De maneira análoga, no Cálculo Fracionário, as definições de integrais e derivadas de ordem arbitrária são apresentadas seguindo essa ordem historicamente correta, uma vez que a derivada fracionária é construída a partir da integral fracionária.

Mais precisamente, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville corresponde à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária, enquanto a derivada fracionária segundo Caputo corresponde à integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira. Embora essas duas formulações estejam intimamente relacionadas, elas não coincidem em geral. Em particular, para funções constantes, a derivada segundo Riemann-Liouville não é nula, enquanto a derivada segundo Caputo é igual a zero, como ocorre no Cálculo clássico.

Por esse e outros motivos a formulação de Caputo é considerada mais adequada em determinados contextos, especialmente no estudo das equações diferenciais fracionárias. As Equações Diferenciais Fracionárias são equações que envolvem funções e suas derivadas fracionárias. A definição de Caputo, embora mais restritiva, é mais conveniente neste estudo, pois as condições iniciais de uma Equação Diferencial Fracionária são derivadas inteiras.

O estudo de Equações Diferenciais Fracionárias é motivado pelo fato de que elas generalizam as ideias da teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias, possibilitando a modelagem de fenômenos que envolvem efeitos de memória e não localidade. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo estudar problemas de valor inicial envolvendo derivadas fracionárias, com ênfase nos resultados de existência e unicidade de soluções, bem como na dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais. Além disso, são investigadas algumas aplicações dessas equações, buscando-se obter uma comparação dos modelos fracionários com os modelos clássicos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta alguns pré-requisitos para o estudo das equações diferenciais fracionárias, bem como resultados envolvendo esses conceitos.

O Capítulo 3 apresenta de maneira introdutória as principais definições e resultados da teoria do Cálculo Fracionário, a saber: integral de Riemann-Liouville e derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

O Capítulo 4 apresenta a definição do Problema de Valor Inicial envolvendo as derivadas fracionárias e a demonstração de dois resultados a respeito da existência e unicidade de soluções para este tipo de equação, além de um resultado a respeito da dependência contínua das soluções.

O Capítulo 5 apresenta alguns modelos clássicos de Equações Diferenciais e os respectivos modelos fracionários, com a ideia de comparar as soluções, tanto analiticamente quanto graficamente.

O Apêndice A apresenta resultados que foram utilizados nas demonstrações feitas no capítulo 2 e 3 e o Apêndice B, resultados que foram utilizados no capítulo 4.

Os gráficos presentes neste trabalho foram construídos usando o software Wolfram Mathematica. Embora não seja gratuito, a Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (Unesp) dispõe de licença institucional para sua utilização, mas há opções de softwares gratuitos, como por exemplo o Python.

Conceitos Iniciais

Assim como o Cálculo Fracionário é uma generalização do cálculo de ordem inteira, as funções presentes nessa teoria também são generalizações de funções conhecidas. Como exemplo, neste capítulo, apresentam-se a Função Gama e a Função de Mittag-Leffler. A primeira generaliza o conceito de fatorial para um número que não precisa ser necessariamente natural e a segunda generaliza a função exponencial. Ademais, apresentam-se a Função Beta e a Transformada de Laplace. As principais referências deste capítulo são [5], [6], [7], [8], [9],[10].

2.1 Funções Gama e Beta

Definição 2.1. A função Gama, denotada por $\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$ e $Re(z) > 0$, é uma função definida pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.1)$$

A função Gama está bem definida já que a integral (2.1) é convergente.

Para mostrar que $\Gamma(z) = \Gamma(x + yi) = \int_0^{\infty} t^{x+yi-1} e^{-t} dt$ converge, mostra-se que $\int_0^{\infty} |t^{x+yi-1} e^{-t}| dt$ converge (Proposição A.4 do Apêndice A).

Note que,

$$\int_0^{\infty} |t^{x+yi-1} e^{-t}| dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |t^{x+yi-1} e^{-t}| &= |t^{x-1} e^{-t} t^{yi}| = |t^{x-1} e^{-t}| |t^{yi}| \\ &= |t^{x-1} e^{-t}| |(e^{\ln t})^{yi}| \\ &= |t^{x-1} e^{-t}| |\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |t^{x-1}e^{-t}| \underbrace{\sqrt{\cos^2(y \ln t) + \sin^2(y \ln t)}}_{=1} \\
&= |t^{x-1}e^{-t}| \stackrel{t \geq 0}{=} t^{x-1}e^{-t}.
\end{aligned}$$

Portanto, para mostrar a convergência de $\int_0^\infty |t^{x-1}e^{-t}| dt$ basta mostrar que $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$ converge, o que é equivalente a mostrar a convergência de $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$.

Como $t > 0$, então $e^{-t} < 1$, logo $t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$. Logo, se $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge, então $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt$ também converge (Proposição A.6 do Apêndice A).

De fato, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge, pois $x > 0 \Rightarrow x - 1 > -1$ e toda integral do tipo $\int_0^1 t^\alpha dt$ converge se $\alpha > -1$ (Proposição A.9 do Apêndice A).

Por outro lado, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0$ (Proposição A.10 do Apêndice A), existe $T > 0$, tal que para todo $t \geq T$:

$$\frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} < 1 \Rightarrow t^{x-1} < e^{t/2}.$$

Assim, para $t \geq T$, $t^{x-1}e^{-t} < e^{t/2}e^{-t} < e^{-t/2}$.

Como $\int_1^\infty e^{-t/2} dt$ converge (Proposição A.7 do Apêndice A), então $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$ também converge (Proposição A.5 do Apêndice A).

Portanto, $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$ converge, o que mostra que a função Gama converge.

Proposição 2.2. *A função Gama satisfaz a seguinte igualdade*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Demonstração.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z+1-1}e^{-t} dt = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt.$$

Fazendo $t^z = u$ e $e^{-t} = dv$, segue que $du = z t^{z-1} dt$ e $v = -e^{-t}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^z e^{-t} dt &= -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -z t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} (-t^z e^{-t}) \Big|_0^a + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} (-a^z e^{-a} + 0^z e^0) + z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow \infty} -a^z e^{-a} + z\Gamma(z) \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} -a^{x+yi} e^{-a} + z\Gamma(z) \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a^x}{e^a} a^{yi} + z\Gamma(z) \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{-a^x}{e^a} e^{yi \ln a}}_{=0} + z\Gamma(z) = z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

A função $e^{yi \ln a}$ é limitada e $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a^x}{e^a} = 0$ (Proposição A.10 do Apêndice A).

Portanto, $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a^x}{e^a} e^{yi \ln a} = 0$. □

Proposição 2.3. *Se n é inteiro positivo, então*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Demonstração. Primeiramente, calcula-se $\Gamma(1)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^a \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-a} - (-e^{-0}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^a} + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Por indução finita em n , a partir de $\Gamma(1)$, pode-se obter os valores da função Gama para qualquer inteiro positivo n utilizando a Proposição 2.2.

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2 = 2! \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 6 = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

□

Pelas proposições anteriores, conclui-se que a Função Gama generaliza o conceito de fatorial para números complexos.

Definição 2.4. A função Beta, denotada por $B(z, w)$, $z, w \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\operatorname{Re}(w) > 0$, é uma função definida pela integral imprópria:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (2.2)$$

A função Beta está bem definida já que a integral (2.2) é convergente.

Assim como foi realizado com a Função Gama, para mostrar a convergência de $B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$, mostra-se que $\int_0^1 |t^{z-1}(1-t)^{w-1}| dt$ converge.

Note que,

$$\int_0^1 |t^{z-1}(1-t)^{w-1}| dt = \int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1} dt.$$

De fato, sejam $z = x_1 + y_1 i$ e $w = x_2 + y_2 i$,

$$\begin{aligned} |t^{z-1}(1-t)^{w-1}| &= |t^{x_1+y_1 i}(1-t)^{x_2+y_2 i}| \\ &= |t^{x_1-1} t^{y_1 i} (1-t)^{x_2-1} (1-t)^{y_2 i}| \\ &= |t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1}| \underbrace{|t^{y_1 i}|}_{=1} \underbrace{|(1-t)^{y_2 i}|}_{=1} \\ &= |t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1}| \stackrel{t \geq 0}{=} t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1}. \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que $\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1} dt$ converge.

O fato de $0 < t < 1$, implica que $0 < (1-t)^{x_2-1} < 1$. Logo, $0 < t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1} < t^{x_1-1}$.

Como $\int_0^1 t^{x_1-1} dt$ converge (pois $x_1 - 1 > -1$), então $\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1} dt$ também converge.

Proposição 2.5. *A função Beta está relacionada com a função Gama pela propriedade:*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \int_0^\infty s^{w-1} e^{-s} ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} s^{w-1} e^{-s} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1} s^{w-1} e^{-(t+s)} dt ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Fazendo $t = uv$ e $s = u(1-v)$, segue do teorema de mudança de variáveis na integral dupla que:

$$dt ds = \left| \det \frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| du dv = |-uv - u + uv| du dv = u du dv.$$

Como $0 < t < \infty$ e $0 < s < \infty$, segue que $0 < t + s < \infty$ e portanto $0 < u < \infty$ (pois $t + s = uv + u - uv = u$).

Como $t = uv > 0$, segue que $v > 0$ (pois $u > 0$). Além disso, $s = u - uv > 0 \Rightarrow u > uv \Rightarrow v < 1$. Logo, $0 < v < 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1} s^{w-1} e^{-(t+s)} dt ds &= \int_0^1 \int_0^\infty (uv)^{z-1} u^{w-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} u du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{w-1} dv \int_0^\infty u^{z+w-1} e^{-u} du \\ &= B(z, w) \Gamma(z+w). \end{aligned} \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) segue que $\Gamma(z)\Gamma(w) = B(z, w)\Gamma(z+w) \Rightarrow B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$. $\square$

Proposição 2.6. *A função beta é simétrica, ou seja,*

$$B(z, w) = B(w, z).$$

Demonstração. Fazendo $t = 1 - s$, tem-se que $dt = -ds$ e $s = 1 - t$. Além disso, $t = 0 \Rightarrow s = 1$ e $t = 1 \Rightarrow s = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \\ &= - \int_1^0 (1-s)^{z-1} (1-1+s)^{w-1} ds \\ &= \int_0^1 s^{w-1} (1-s)^{z-1} ds = B(w, z). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.7. *A função Beta pode ser escrita como:*

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{2z-1} (\cos u)^{2w-1} du.$$

Demonstração. Seja $t = \sin^2 u \Rightarrow dt = 2 \sin u \cos u du$ na integral (2.2).

Disso segue que $u = \sin^{-1} \sqrt{t}$, $t = 0 \Rightarrow u = 0$ e $t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 B(z, w) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^{z-1} (1 - \sin^2 u)^{w-1} 2 \sin u \cos u \, du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^{z-1} (\cos^2 u)^{w-1} \sin u \cos u \, du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{2z-2} (\cos u)^{2w-2} \sin u \cos u \, du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{2z-1} (\cos u)^{2w-1} \, du.
 \end{aligned}$$

□

No exemplo a seguir, utiliza-se a Proposição 2.5, que relaciona as funções Gama e Beta, para calcular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exemplo 2.8. Mostre que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Pela Proposição 2.5:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.5)$$

Pela Proposição 2.7:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{1-1} (\cos u)^{1-1} \, du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, du = 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi. \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6) segue que,

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2.2 Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler atua como a generalização natural da função exponencial no contexto do Cálculo Fracionário. Assim como as soluções de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes são construídas a partir de exponenciais, as soluções de equações diferenciais fracionárias lineares análogas são expressas em termos da função de Mittag-Leffler.

Definição 2.9. Sejam $z, \alpha \in \mathbb{C}$ e $Re(\alpha) > 0$. A função de Mittag-Leffler com um parâmetro, denotada por $E_\alpha(z)$, é uma função definida a partir da série de potências:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.7)$$

Note que, quando $\alpha = 1$, recupera-se a função exponencial:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

A função de Mittag-Leffler está bem definida, pois a série (2.7) é convergente. Para mostrar a convergência da função de Mittag-Leffler utiliza-se uma aproximação para a Função Gama, conhecida como Fórmula de Stirling (livro [10] (página 195), livro [11] (página 346)). Essa fórmula descreve o comportamento da Função Gama quando $x \rightarrow \infty$ e, por extensão, de $n!$ para valores grandes de n , de acordo com o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1 \Rightarrow \Gamma(x+1) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}. \quad (2.8)$$

A seguir, mostra-se a convergência da função de Mittag-Leffler.

$$\text{Seja } E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \text{ com } a_k = \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Pelo teste da razão segue que a série converge, pois $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{|z|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \\ &= |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi \alpha k}}{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi \alpha k}} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha(k+1)}{e}\right)^{\alpha(k+1)} \sqrt{2\pi \alpha(k+1)}}{\left(\frac{\alpha(k+1)}{e}\right)^{\alpha(k+1)} \sqrt{2\pi \alpha(k+1)}} \\ &= |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi \alpha k}} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha(k+1)}{e}\right)^{\alpha(k+1)} \sqrt{2\pi \alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi \alpha k}}{\left(\frac{\alpha(k+1)}{e}\right)^{\alpha(k+1)} \sqrt{2\pi \alpha(k+1)}} \\ &= |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi \alpha k}}{\left(\frac{\alpha(k+1)}{e}\right)^{\alpha(k+1)} \sqrt{2\pi \alpha(k+1)}} \\ &= |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha k} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot \left(\frac{e}{\alpha(k+1)}\right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Note que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{-\alpha k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-\alpha} = e^{-\alpha}. \quad (2.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{1/2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{-1/2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-1/2} = 1. \quad (2.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{\alpha(k+1)} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Assim, pelos Limites (2.9), (2.10) e (2.11), segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0 < 1$.

Portanto, a série $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ é convergente.

Definição 2.10. Sejam $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$. A função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha, \beta}(z)$, é uma função definida a partir da série de potências:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.12)$$

Quando $\beta = 1$, tem-se:

$$E_{\alpha, 1} = E_\alpha.$$

Também é possível obter as funções seno e cosseno trigonométricos e hiperbólicos como casos particulares da função de Mittag-Leffler. Isto é,

- $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z \Rightarrow E_{2,1}(z^2) = \cosh z.$
- $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z} \Rightarrow z \cdot E_{2,2}(z^2) = \sinh z.$
- $E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z \Rightarrow E_{2,1}(-z^2) = \cos z.$
- $E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin z}{z} \Rightarrow z \cdot E_{2,2}(-z^2) = \sin z.$

2.3 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é uma ferramenta que auxilia a resolução de equações diferenciais. Através da transformada, obtém-se uma nova equação mais simples de ser resolvida e aplicando a transformada inversa na solução obtida, tem-se a solução da equação diferencial original.

Definição 2.11. A Transformada de Laplace de uma função f , denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$ e $t \geq 0$, é uma função definida pela integral imprópria:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

A seguir, apresentam-se condições suficientes para a existência da Transformada de Laplace.

Definição 2.12. Uma função f é seccionalmente contínua em um intervalo $[a, b]$ se existe uma quantidade finita de pontos em $[a, b]$ nos quais f possui descontinuidade de primeira espécie.

Definição 2.13. Uma função f é de ordem exponencial se existirem constantes reais $M, \alpha > 0$ tais que, para todo $t > 0$, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Proposição 2.14. A Transformada de Laplace de uma função f existe e converge se a função é seccionalmente contínua e de ordem exponencial.

A demonstração do resultado anterior encontra-se em [8].

As condições apresentadas na Proposição 2.14 são suficientes, mas não necessárias, para a existência da transformada de Laplace de uma função f , ou seja, caso as condições não sejam satisfeitas a transformada pode existir ou não. A partir daqui, assume-se f com tais condições.

2.3.1 Propriedades da Transformada de Laplace

Aqui, apresentam-se algumas propriedades da Transformada de Laplace, que serão úteis para este trabalho, mas há muitas outras que, assim como as que aqui estão, podem ser encontradas no livro [8].

Propriedade 2.15 (Linearidade). A Transformada de Laplace é linear, ou seja, se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Propriedade 2.16 (Transformada de Derivadas). As Transformadas de Laplace da derivada de ordem 1 até ordem n de uma função f são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Propriedade 2.17 (Transformada da Integral). A transformada de Laplace da integral da função f é dada por:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} F(s).$$

A demonstração da Propriedade 2.15 segue da definição, a demonstração da Propriedade 2.16 é obtida a partir de integração por partes e a demonstração da Propriedade 2.17 é obtida a partir da propriedade anterior. Todas essas demonstrações podem ser encontradas em [8].

2.3.2 Transformada Inversa de Laplace

Se a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é $F(s)$, ou seja, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $f(t)$ é a Transformada Inversa de Laplace da função $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. A Transformada Inversa também é um operador linear.

Existem diferentes métodos para encontrar a inversa, incluindo uma fórmula de inversão que pode ser encontrada em [8]. Neste trabalho, faz-se o uso das tabelas da Transformada de Laplace, um exemplo desse tipo de tabela também pode ser encontrado na mesma referência citada anteriormente.

Como foi apresentado anteriormente, a Transformada de Laplace é linear, ou seja, a Transformada da soma é a soma das Transformadas, mas o mesmo não pode ser dito para o produto das Transformadas. Assim, justifica-se o uso do Produto de Convolução.

Definição 2.18 (Produto de Convolução). O produto de convolução entre duas funções f e g é definido por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Propriedade 2.19. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s).$$

Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada em [9].

Propriedade 2.20. Propriedades do produto de convolução:

1. $f * g = g * f$;
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$;
4. $f * 0 = 0$;
5. $f * 1 \neq f$.

2.3.3 Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler

Para calcular alguns exemplos de transformadas de Laplace da função de Mittag-Leffler, utiliza-se a tabela a seguir, que foi retirada do livro [8].

Tabela 2.1: Algumas Transformadas de Laplace úteis.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
$\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^n}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{\Gamma(n)}$

Exemplo 2.21. Mostre que $\mathcal{L}\{E_v(\lambda t^v)\} = \frac{s^v}{s(s^v - \lambda)}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{E_v(\lambda t^v)\} &= \int_0^\infty E_v(\lambda t^v) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k t^{vk}}{\Gamma(vk+1)} e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \frac{t^{vk}}{\Gamma(vk+1)} e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{s^{vk+1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{s \cdot s^{vk}} \\
 &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{s^v}\right)^k = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s^v}} \\
 &= s^{-1} \cdot \frac{s^v}{s^v - \lambda} = \frac{s^v}{s(s^v - \lambda)}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.22. Mostre que $\mathcal{L}\{E_v(-\lambda t^v)\} = \frac{s^v}{s(s^v + \lambda)}$.

$$\mathcal{L}\{E_v((-\lambda)t^v)\} = \frac{s^v}{s(s^v - (-\lambda))} = \frac{s^v}{s(s^v + \lambda)}.$$

Exemplo 2.23. Mostre que $\mathcal{L}\{1 - E_v(-\lambda t^v)\} = \frac{\lambda}{s(s^v + \lambda)}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{1 - E_v(-\lambda t^v)\} &= \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{E_v(-\lambda t^v)\} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s^v}{s(s^v + \lambda)} \\
 &= \frac{s^v + \lambda - s^v}{s(s^v + \lambda)} \\
 &= \frac{\lambda}{s(s^v + \lambda)}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.24. Mostre que $\mathcal{L}\{t^{\nu-1}E_{v,\nu}(\lambda t^\nu)\} = \frac{s^{v-\nu}}{s^v - \lambda}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^{\nu-1}E_{v,\nu}(\lambda t^\nu)\} &= \int_0^\infty t^{\nu-1}E_{v,\nu}(\lambda t^\nu)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^\infty t^{\nu-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k t^{\nu k}}{\Gamma(vk + \nu)} e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \frac{t^{\nu k + \nu - 1}}{\Gamma(vk + \nu)} e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{s^{\nu k + \nu}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{s^\nu \cdot s^{\nu k}} \\
 &= \frac{1}{s^\nu} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{s^\nu}\right)^k = \frac{1}{s^\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s^\nu}} \\
 &= \frac{1}{s^\nu} \cdot \frac{s^\nu}{s^\nu - \lambda} = \frac{s^{v-\nu}}{s^v - \lambda}.
 \end{aligned}$$

Tabela 2.2: Resumo das Transformadas de Laplace dos exemplos anteriores.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$E_v(\lambda t^\nu)$	$\frac{s^\nu}{s(s^\nu - \lambda)}$
$E_v(-\lambda t^\nu)$	$\frac{s^\nu}{s(s^\nu + \lambda)}$
$1 - E_v(-\lambda t^\nu)$	$\frac{\lambda}{s(s^\nu + \lambda)}$
$t^{\nu-1}E_{v,\nu}(\lambda t^\nu)$	$\frac{s^{v-\nu}}{s^v - \lambda}$

Cálculo Fracionário

Neste capítulo, apresentam-se as definições de Integral de ordem arbitrária segundo Riemann-Liouville e Derivada de ordem arbitrária segundo Riemann-Liouville e Caputo, bem como exemplos e algumas propriedades. As notações utilizadas para integral de Riemann-Liouville e derivadas segundo Riemann-Liouville e Caputo serão, respectivamente, $I^\alpha f(x)$, $D^\alpha f(x)$ e ${}^C D^\alpha f(x)$. As principais referências deste capítulo são [1], [12], [13], [14], [15], [16], [17].

3.1 Integral e Derivadas

Antes de introduzir o conceito de Integral de ordem não inteira, apresenta-se um resultado que encontra-se no livro [1], assim como sua demonstração.

Proposição 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e f uma função de variável real integrável, então a integral de ordem inteira n é dada por:*

$$I^n f(x) = \phi_n(x) * f(x) = \int_0^x \phi_n(x-t) f(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1} f(t)}{(n-1)!} dt,$$

em que

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é a função de Gel'fand-Shilov e $*$ denota o Produto de Convolução.

A partir do resultado anterior, define-se a Integral de ordem arbitrária como uma generalização da Integral de ordem inteira.

Definição 3.2. Seja f uma função contínua e integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. As integrais de ordens arbitrárias de f segundo **Riemann-Liouville** à esquerda e à direita, ambas de

ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, são definidas, respectivamente, por:

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a$$

e

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b.$$

A integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville é um operador linear.

De fato,

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} [k_1 f(x) + k_2 g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{k_1 f(t) + k_2 g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left[\frac{k_1 f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{k_2 g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^x \frac{k_1 f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \int_a^x \frac{k_2 g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{k_1 f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{k_2 g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= k_1 I_{a+}^{\alpha} f(x) + k_2 I_{a+}^{\alpha} g(x). \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $I_{b-}^{\alpha} [k_1 f(x) + k_2 g(x)] = k_1 I_{b-}^{\alpha} f(x) + k_2 I_{b-}^{\alpha} g(x)$.

Definição 3.3. Seja f uma função contínua e integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. As derivadas de ordem arbitrária de f segundo **Riemann-Liouville** à esquerda e à direita, ambas de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$, são definidas, respectivamente, por:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt, \quad x > a$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-n+\alpha}} dt, \quad x < b$$

com $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$.

- Se $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, então:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad x > a$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \quad x < b.$$

- Quando $\alpha = 0$:

$$D_{a+}^0 f(x) = D_{b-}^0 f(x) = f(x).$$

- Quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$D_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad D_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Definição 3.4. Seja f uma função cuja derivada de ordem $n-1$ é absolutamente contínua em $[a, b]$. As derivadas de ordem arbitrária de f segundo **Caputo** à esquerda e à direita, ambas de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$, são definidas respectivamente, por:

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt, \quad x > a$$

e

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{1-n+\alpha}} dt, \quad x < b$$

com $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$.

- Se $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, então:

$${}^C D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad x > a$$

e

$${}^C D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^\alpha} dt, \quad x < b.$$

- Quando $\alpha = 0$:

$${}^C D_{a+}^0 f(x) = {}^C D_{b-}^0 f(x) = f(x).$$

- Quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$${}^C D_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad {}^C D_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Observe que a derivada de ordem arbitrária α de Riemann-Liouville equivale à derivada de ordem inteira n de uma integral de ordem arbitrária $n - \alpha$. Já a derivada de ordem arbitrária α de Caputo equivale à integral de ordem arbitrária $n - \alpha$ de uma derivada de ordem inteira n . Assim,

$$D^\alpha f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) \quad \text{e} \quad {}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x),$$

em que $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Portanto, tanto a derivada fracionária de Riemann-Liouville quanto a de Caputo são operadores lineares, já que a derivada ordinária e a integral fracionária de Riemann-Liouville são operadores lineares.

Como foi abordado na introdução deste trabalho, há critérios que definem o que um operador deve cumprir para ser caracterizado como uma derivada fracionária. Esses critérios são:

- O operador deve ser linear;
- A derivada de ordem zero de uma função é a própria função;
- Quando a ordem é inteira, a derivada fracionária produz o mesmo resultado da derivada ordinária;
- A lei dos expoentes é satisfeita quando $\alpha, \beta < 0$, ou seja, $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$.
- Vale a regra de Leibniz generalizada: $D^\alpha[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x)$.

Até aqui, apenas usando as definições anteriores, verifica-se os três primeiros critérios. O primeiro resultado da próxima seção diz respeito ao quarto item. Porém, segundo as definições de derivadas fracionárias abordadas anteriormente, a ordem da derivada é sempre um número complexo cuja parte real é positiva.

No entanto, considerando $-\alpha < 0$ como a ordem da derivada ($n = 0$, pois é o menor número natural maior do que qualquer número negativo) e usando as definições anteriores, segue que:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0+\alpha)} \left(\frac{d^0}{dx^0} \right) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1+0-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = I_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0+\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(0)}(t)}{(x-t)^{1+0-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = I_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Assim, uma derivada fracionária de ordem negativa, tanto no sentido de Riemann-Liouville quanto no sentido de Caputo, equivale a uma integral fracionária (livro [15], página 42).

O quinto item não será abordado neste trabalho, mas as demonstrações tanto para Riemann-Liouville quanto para Caputo podem ser encontradas nas referências [2], [3] e [4], citadas na introdução.

3.2 Propriedades

Nesta seção, apresentam-se algumas propriedades envolvendo integrais e derivadas fracionárias, que serão usadas em demonstrações posteriores.

Propriedade 3.5 (Lei dos expoentes para integral). Sejam I_{a+}^α , I_{a+}^β , I_{b-}^α e I_{b-}^β como na Definição 3.2. Então,

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) = I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

e

$$I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f(x) = I_{b-}^\beta I_{b-}^\alpha f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a+}^\beta f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{1-\beta}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x dt \int_a^t \frac{f(s) ds}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^{1-\beta}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) ds \underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt}_{k(x,s)}. \end{aligned}$$

Seja $u = \frac{t-s}{x-s}$. Então $t = s+u(x-s)$ e $dt = (x-s)du$. Além disso, $x-t = (x-s)(1-u)$ e $t-s = u(x-s)$. Quando $t = s$, tem-se $u = 0$ e quando $t = x$, tem-se $u = 1$.

Fazendo as substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned} k(x, s) &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} (x-s)^{\beta-1} (x-s) du \\ &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} (x-s)^\beta du \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du}_{B(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Sabe-se que a função beta relaciona-se com a função gama através da seguinte expressão: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Logo,

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) ds (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(s)(x - s)^{\alpha + \beta - 1} ds = I_{a+}^{\alpha + \beta}.$$

De forma análoga, mostra-se que $I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\alpha + \beta} f(x)$. $\square$

Em todas as propriedades a seguir considere que as condições das Definições 3.2, 3.3 e 3.4 são satisfeitas.

Propriedade 3.6. Composição entre integrais e derivadas de Riemann-Liouville (livro [12], Teorema 2.4, página 44).

1. $D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$ e $D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$;
2. $D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = D_{a+}^{\alpha - \beta} f(x)$ e $D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = D_{b-}^{\alpha - \beta} f(x)$;
3. $I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{n-\alpha})^{(n-k-1)} f(a)(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}$;
4. $I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1} (I_{b-}^{n-\alpha})^{(n-k-1)} f(b)(b-x)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}$.

Propriedade 3.7. Composição entre a integral de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo (livro [13], Lemas 2.21 e 2.22, páginas 95 e 96).

1. ${}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$ e ${}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$;
2. ${}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta - \alpha} f(x)$ e ${}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\beta - \alpha} f(x)$;
3. $I_{a+}^{\alpha} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$;
4. $I_{b-}^{\alpha} {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-x)^k}{k!}$.

As demonstrações das Propriedades 3.6 e 3.7 encontram-se nas referências citadas.

Propriedade 3.8. Integração e Derivação da função polinomial $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$.

1. $I_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}$; $I_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}$;
2. $D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$; $D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$;
3. $D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = 0$; $D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\alpha-j} = 0$, para $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha) + 1]$;
4. ${}^C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$; ${}^C D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$;
5. ${}^C D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = 0$; ${}^C D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\alpha-j} = 0$, para $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha) + 1]$.

Demonstração. Antes de iniciar as demonstrações das propriedades, mostra-se que a derivada n -ésima de uma função $f(x) = (x - a)^m$ é dada por:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x - a)^m = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)}(x - a)^{m-n}. \quad (3.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x - a)^m &= m(x - a)^{m-1}; \\ \frac{d^2}{dx^2}(x - a)^m &= m(m - 1)(x - a)^{m-2}; \\ \frac{d^3}{dx^3}(x - a)^m &= m(m - 1)(m - 2)(x - a)^{m-3}; \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dx^n}(x - a)^m &= m(m - 1)(m - (n - 1))(x - a)^{m-n}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} m! &= m(m - 1) \cdots (m - (n - 1))(m - n)! \\ \Rightarrow \frac{m!}{(m - n)!} &= m(m - 1)(m - 2) \cdots (m - (n - 1)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x - a)^m = \frac{m!}{(m - n)!}(x - a)^{m-n} = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)}(x - a)^{m-n}.$$

Agora, iniciam-se as demonstrações das propriedades.

- Mostrar que $I_{a+}^\alpha(x - a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x - a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta + \alpha)}$.

Para isso, utiliza-se uma mudança de variável.

$$\text{Seja } u = \frac{t - a}{x - a} \Rightarrow t = a + u(x - a) \Rightarrow dt = (x - a)du.$$

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha(x - a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t - a)^{\beta-1}}{(x - t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{u^{\beta-1}(x - a)^{\beta-1}}{(x - a)^{1-\alpha}(1 - u)^{1-\alpha}} (x - a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{u^{\beta-1}(x - a)^{\beta+\alpha-1}}{(1 - u)^{1-\alpha}} du \\ &= \frac{(x - a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^1 u^{\beta-1}(1 - u)^{\alpha-1} du}_{B(\beta, \alpha)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}.$$

De forma análoga, mostra-se que $I_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}$.

- Mostrar que $D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$.

Usando o resultado da integral de $(x-a)^{\beta-1}$ de ordem $n-\alpha$ e a Equação (3.1), segue que:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= D^n I^{n-\alpha}(x-a)^{\beta-1} \\ &= D^n \left(\frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta+n-\alpha-1}}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$.

- Mostrar que ${}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$.

Usando a Equação (3.1) e o resultado da integral de $(x-a)^{\beta-1}$ de ordem $n-\alpha$, segue que:

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= I^{n-\alpha} D^n (x-a)^{\beta-1} \\ &= I^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} (x-a)^{\beta-n-1} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} \frac{\Gamma(\beta-n)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que ${}^C D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)(b-x)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}$.

- Por fim, mostrar que $D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = {}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = 0$ quando $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)+1]$.

Fazendo $\alpha - j = \beta - 1$ e usando os resultados anteriores, obtém-se:

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = {}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)(x-a)^{-j}}{\Gamma(1-j)}.$$

Note que $1 - j \leq 0$ quando $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha) + 1]$. Assim, $\Gamma(1 - j) \rightarrow \infty$.

Logo, $\frac{\Gamma(\alpha - j + 1)(x - a)^{-j}}{\Gamma(1 - j)} \rightarrow 0$.

De forma análoga, mostra-se que $D_{b-}^{\alpha}(b - x)^{\alpha-j} = {}^C D_{b-}^{\alpha}(b - x)^{\alpha-j} = 0$ quando $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha) + 1]$.

□

Proposição 3.9. *As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo relacionam-se através das seguintes igualdades:*

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (3.2)$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha}. \quad (3.3)$$

Quando $0 < Re(\alpha) < 1$:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) + \frac{f(b)}{\Gamma(1 - \alpha)} (b - x)^{-\alpha}.$$

Demonstração. Seja $f \in C^n([a, b])$ com $a < x < b$ e $n = [Re(\alpha)] + 1$. Usando a Fórmula de Taylor com Resto Integral (apêndice A), obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} dt \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k + 1)} (x - a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt. \end{aligned}$$

Aplicando o operador D_{a+}^{α} em ambos os lados da igualdade:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \underbrace{D_{a+}^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k + 1)} (x - a)^k}_{(I)} + \underbrace{D_{a+}^{\alpha} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt}_{(II)}.$$

Pela Propriedade 3.8:

$$D_{a+}^{\alpha} (x - a)^k = \frac{\Gamma(k + 1)(x - a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}.$$

Assim, a expressão (I) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D_{a+}^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

Desenvolvendo a expressão (II), obtém-se:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{1}{(x-s)^{1-n+\alpha}} \int_a^s \frac{f^{(n)}(t)(s-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} \int_a^s f^{(n)}(t)(s-t)^{n-1} dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f^{(n)}(t) \underbrace{\int_t^x (x-s)^{n-\alpha-1}(s-t)^{n-1} ds}_{k(x,t)} dt. \end{aligned}$$

Seja $u = \frac{s-t}{x-t}$. Então $s = t+u(x-t)$ e $ds = (x-t)du$. Além disso, $x-s = (x-t)(1-u)$ e $s-t = u(x-t)$. Quando $s = t$, tem-se $u = 0$ e quando $s = x$, tem-se $u = 1$.

Fazendo as substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned} k(x,t) &= \int_0^1 (x-t)^{n-\alpha-1} (1-u)^{n-\alpha-1} u^{n-1} (x-t)^{n-1} (x-t) du \\ &= \int_0^1 (x-t)^{2n-\alpha-1} (1-u)^{n-\alpha-1} u^{n-1} du \\ &= (x-t)^{2n-\alpha-1} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{n-1} du}_{B(n-\alpha,n)} = (x-t)^{2n-\alpha-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(2n-\alpha)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} dt &= \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f^{(n)}(x-t)^{2n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} (x-t)^{2n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)} \frac{\Gamma(2n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-t)^{n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt = {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x).$$

De modo análogo, mostra-se que:

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha}.$$

□

A partir do resultado anterior, segue que as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo coincidem nos seguintes casos:

Se $\alpha \notin \mathbb{N}$:

- ${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = D_{a+}^{\alpha} f(x)$ se $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$.
- ${}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = D_{b-}^{\alpha} f(x)$ se $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0$.

Quando $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$:

- ${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = D_{a+}^{\alpha} f(x)$ se $f(a) = 0$.
- ${}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = D_{b-}^{\alpha} f(x)$ se $f(b) = 0$.

3.3 Exemplos

Observe que, o valor da derivada fracionária no ponto x depende da escolha de $a < x$ no caso da derivada à esquerda e de $b > x$ no caso da derivada à direita. A partir daqui, optamos por utilizar as derivadas fracionárias à esquerda com $a = 0$.

Para simplificar a notação, adotamos D^{α} e ${}^C D^{\alpha}$ ao invés de D_0^{α} e ${}^C D_0^{\alpha}$ para Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente.

Nos dois exemplos a seguir, calculam-se as derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ da função $f(x) = x^2$ utilizando as Definições 3.3 e 3.4.

Em ambos, utilizam-se o Exemplo 2.8 em que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e uma mudança de variável $u = x - t$ que implica $dt = -du$; $t = 0 \Rightarrow u = x$; $t = x \Rightarrow u = 0$.

Exemplo 3.10 (Derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\frac{1}{2}$ da função $f(x) = x^2$).

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(- \int_x^0 u^{-\frac{1}{2}} (x-u)^2 du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} (x^2 - 2xu + u^2) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} du - 2x \int_0^x u^{\frac{1}{2}} du + \int_0^x u^{\frac{3}{2}} du \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(2x^2 u^{\frac{1}{2}} \Big|_0^x - \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x + \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \Big|_0^x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(2x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.11 (Derivada fracionária de Caputo de ordem $\frac{1}{2}$ da função $f(x) = x^2$).

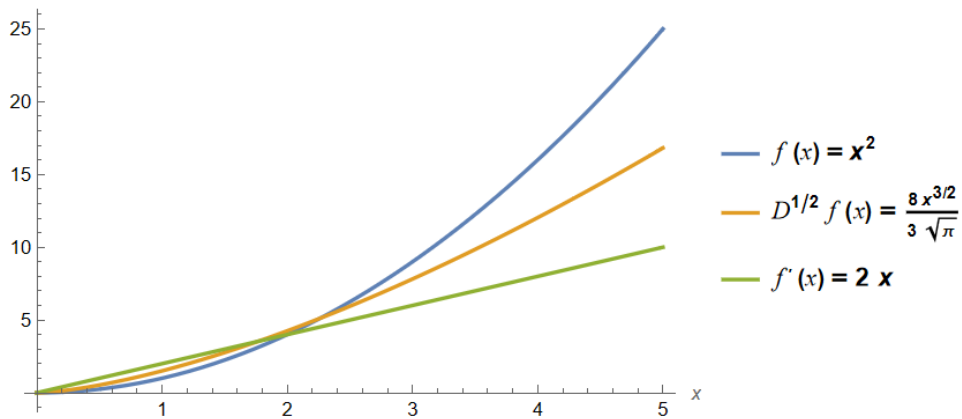
$$\begin{aligned}
{}^C D^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(- \int_x^0 (x-u)u^{-\frac{1}{2}} du \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} du - \int_0^x u^{\frac{1}{2}} du \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(2xu^{\frac{1}{2}} \Big|_0^x - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

As derivadas segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo coincidem nos exemplos anteriores, uma vez que $f(0) = 0^2 = 0$.

Na Figura 3.1 estão representadas a função $f(x) = x^2$, sua derivada fracionária de ordem $\frac{1}{2}$, $D^{\frac{1}{2}} x^2 = {}^C D^{\frac{1}{2}} x^2$ e sua derivada de primeira ordem $f'(x) = 2x$.

Note que, a derivada de ordem $\frac{1}{2}$ está entre a função e sua derivada de primeira ordem.

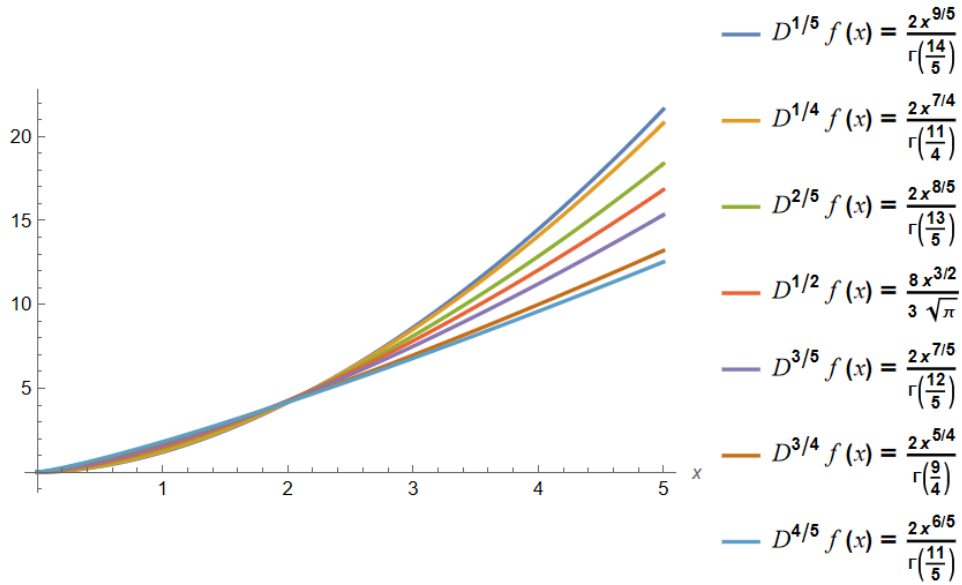
Figura 3.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2$, $D^{\frac{1}{2}} x^2 = {}^C D^{\frac{1}{2}} x^2$ e $f'(x) = 2x$.



Fonte: A autora.

Ainda em relação à função $f(x) = x^2$, seguem os gráficos das derivadas fracionárias de diferentes ordens (Figura 3.2).

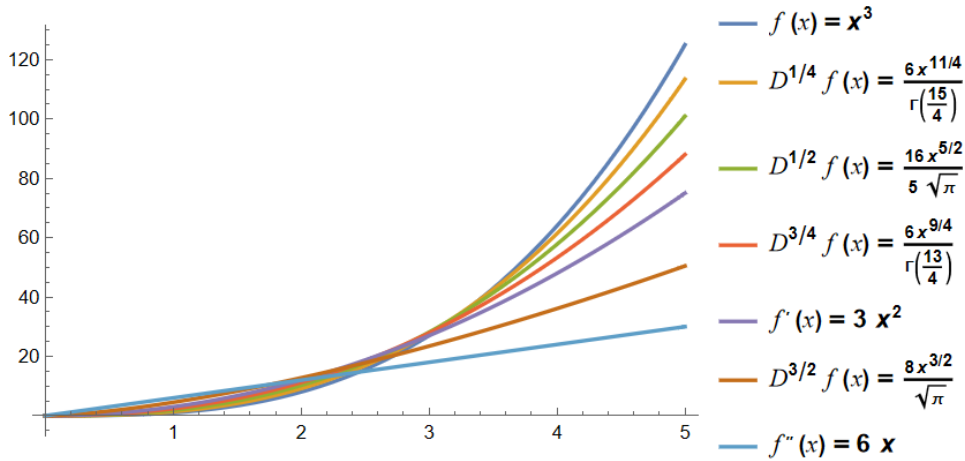
Figura 3.2: Derivadas da função $f(x) = x^2$ de ordens: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$.



Fonte: A autora.

Agora, em relação à função $f(x) = x^3$, seguem os gráficos das derivadas de ordens inteiras 1 e 2 e das derivadas de ordens fracionárias $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{2}$ (Figura 3.3).

Figura 3.3: Gráfico das funções $f(x) = x^3$, $D^{\frac{1}{4}}x^3$, $D^{\frac{1}{2}}x^3$, $D^{\frac{3}{4}}x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $D^{\frac{3}{2}}x^3$, $f''(x) = 6x$.



Fonte: A autora.

3.3.1 Derivada de Constante

Exemplo 3.12 (Derivada da função constante - Caputo.).

$${}^C D^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{0}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x 0 dt = 0.$$

Exemplo 3.13 (Derivada da função constante - Riemann-Liouville.).

$$\begin{aligned} D^\alpha k &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_0^x \frac{k}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \left(k \int_0^x u^{-1+n-\alpha} du \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \left(\frac{kx^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right). \end{aligned}$$

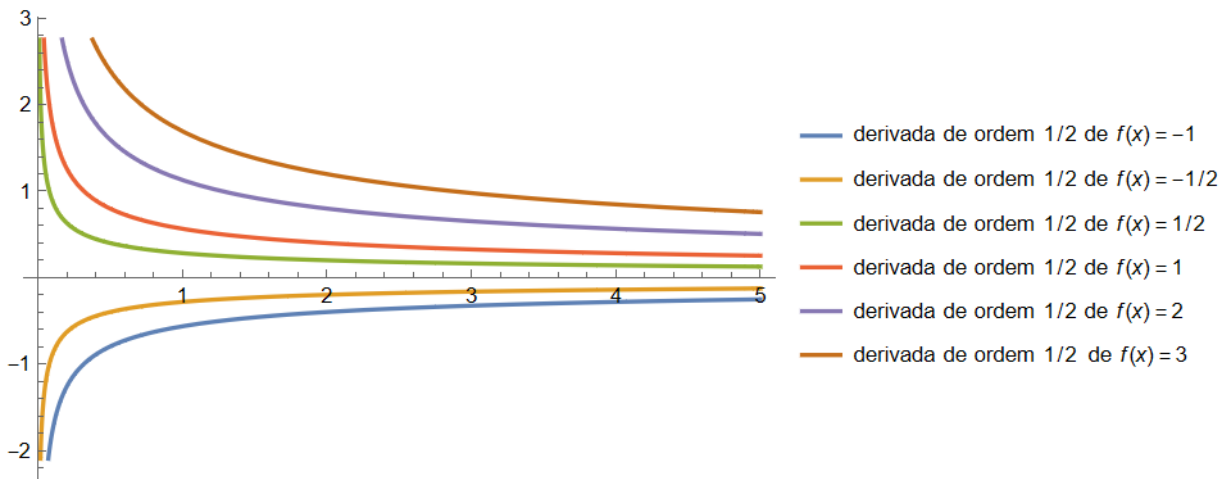
Observe que a derivada da função constante segundo Riemann-Liouville não é zero.

Se $\alpha = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$D^{\frac{1}{2}} k = \frac{k}{\sqrt{\pi x}}.$$

Na Figura 3.4 estão representados os gráficos das derivadas segundo Riemann-Liouville de ordem $1/2$ de algumas funções constantes.

Figura 3.4: Derivadas de Riemann-Liouville de ordem $1/2$ de algumas funções constantes.



Fonte: A autora.

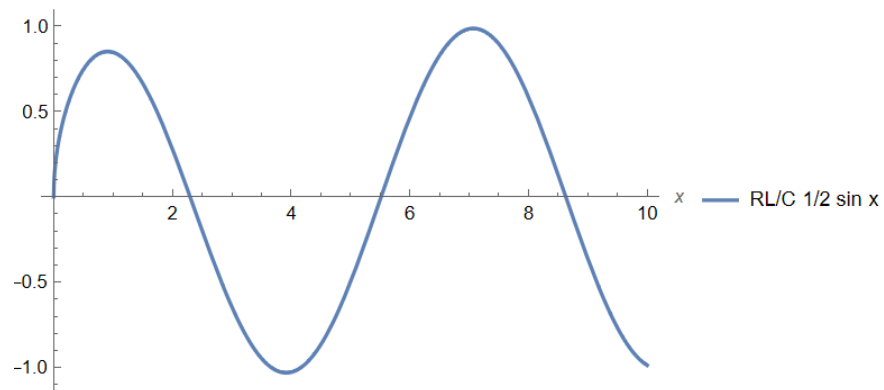
3.3.2 Derivadas das Funções Seno, Cosseno e Exponencial

Nas figuras a seguir, pode-se observar o comportamento das derivadas fracionárias das funções seno, cosseno e exponencial.

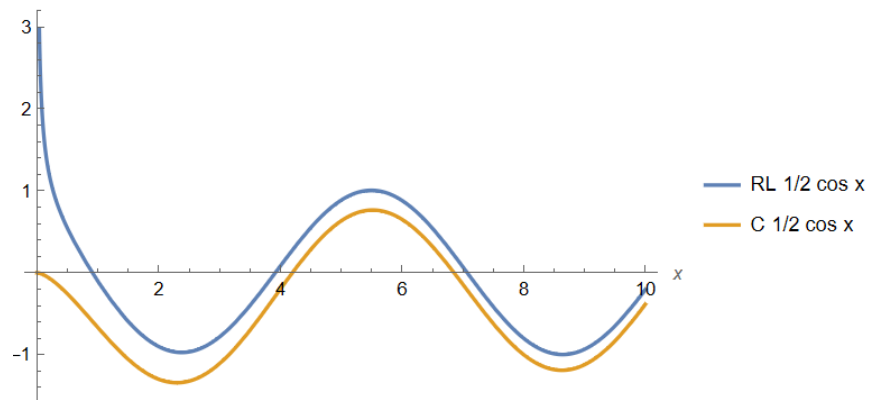
Observando as Figuras 3.5, 3.6 e 3.7, nota-se que as derivadas segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo coincidem na função seno, o que não acontece nas funções cosseno e exponencial, pois $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1 \neq 0$ e $e^0 = 1 \neq 0$.

As Figuras 3.8, 3.9 e 3.10 representam as derivadas de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ segundo a definição de Caputo e as respectivas derivadas de primeira ordem dessas três funções.

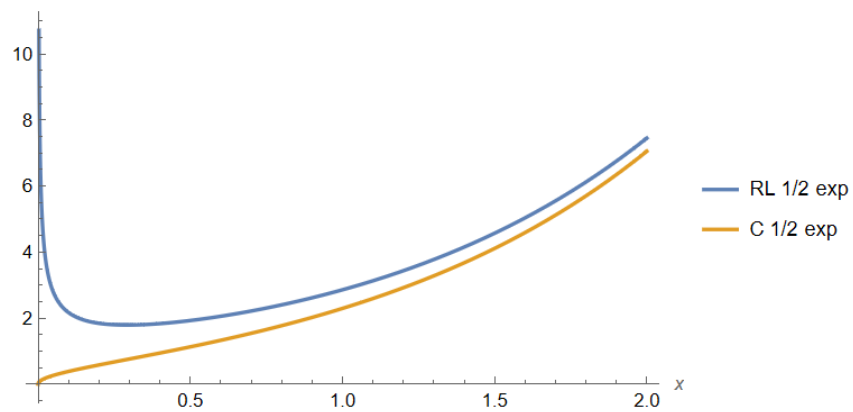
Na legenda das figuras, foi utilizado “RL” para denotar Riemann-Liouville e “C” para denotar Caputo.

Figura 3.5: Derivada de ordem $\frac{1}{2}$ de $\sin x$.

Fonte: A autora.

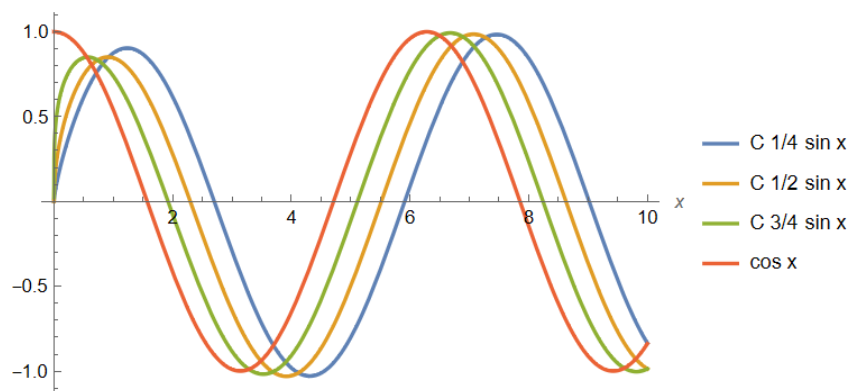
Figura 3.6: Derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ de $\cos x$.

Fonte: A autora.

Figura 3.7: Derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ de e^x .

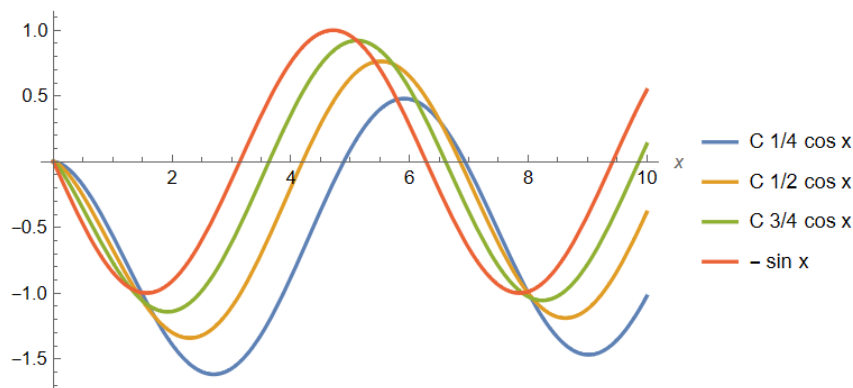
Fonte: A autora.

Figura 3.8: Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de $\sin x$ e derivada primeira de $\sin x$.



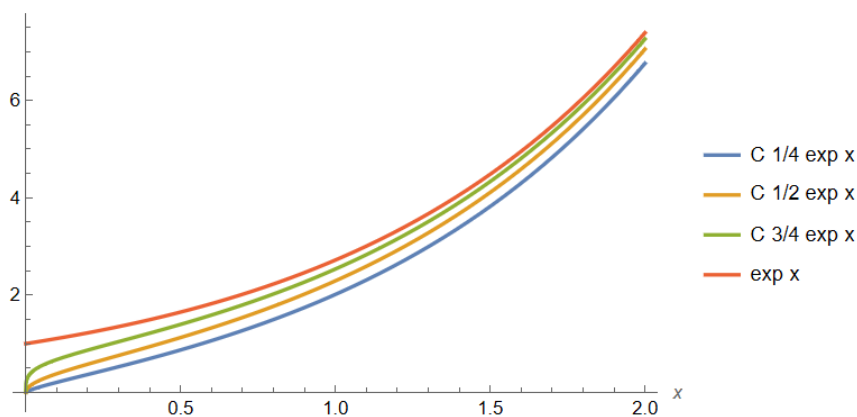
Fonte: A autora.

Figura 3.9: Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de $\cos x$ e derivada primeira de $\cos x$.



Fonte: A autora.

Figura 3.10: Derivadas de Caputo de ordens $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de e^x e derivada primeira de e^x .



Fonte: A autora.

3.4 Transformada de Laplace dos Operadores Fracionários

Nessa seção calculam-se a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville e das derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

Para calcular a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville utilizam-se duas mudanças de variável:

- a primeira será $u = x - t \Rightarrow du = dx$;
- a segunda, $v = su \Rightarrow dv = sdu$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{I_0^\alpha f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty e^{-sx}(x-t)^{\alpha-1} dx dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-su} e^{-st} u^{\alpha-1} du dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} du = \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} \frac{v^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}} \frac{dv}{s} \\
 &= \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s^{\alpha-1}s} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv = \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s^\alpha s^{-1}s} \Gamma(\alpha) = F(s) \frac{1}{s^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Agora, para calcular a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville usa-se a Definição 3.3, a Propriedade 2.16 e o resultado anterior.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{D_0^\alpha f(x)\} &= \mathcal{L}\{D^n I_0^{n-\alpha} f(x)\} = s^n \frac{F(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0) \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0),
 \end{aligned}$$

onde $g^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} D^k(I_0^{n-\alpha} f(x))$.

Assim como no cálculo anterior, para o cálculo da transformada de Laplace da derivada de Caputo usa-se a Definição 3.4, a Propriedade 2.16 e o resultado da integral de Riemann-Liouville.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{{}^C D_0^\alpha f(x)\} &= \mathcal{L}\{I_0^{n-\alpha} D^n f(x)\} = \frac{1}{s^{n-\alpha}} \left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right] \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
 \end{aligned}$$

Tabela 3.1: Resumo das Transformadas de Laplace dos operadores fracionários.

$f(x)$	$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$
$I_0^\alpha f(x)$	$F(s) \frac{1}{s^\alpha}$
$D_0^\alpha f(x)$	$s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} g^{(k)}(0)$
${}^C D_0^\alpha f(x)$	$s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$

Equações Diferenciais Fracionárias

Neste capítulo provam-se a existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias, envolvendo derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo, e também prova-se a dependência contínua das soluções utilizando a derivada de Caputo. As principais referências deste capítulo são [13], [14], [15], [16], [17], [18].

4.1 Problema de Valor Inicial

A seguir, apresentam-se as definições do PVI, utilizando as definições de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, e a definição de uma equação auxiliar no estudo de um PVI do tipo fracionário chamada de Equação Integral de Volterra; em seguida, mostra-se a equivalência entre as duas definições.

A princípio, define-se os espaços das funções em questão.

Definição 4.1. O espaço $L^\alpha([a, b])$ é definido como:

$$L^\alpha([a, b]) = \left\{ y \in L[a, b] : D_{a+}^\alpha y \in L[a, b] \right\},$$

em que $L([a, b]) = L_1([a, b])$ é o espaço das funções integráveis em $[a, b]$ segundo Lebesgue com a norma 1: $\|y\|_1 = \int |y(x)| dx$.

Definição 4.2. O espaço $C^{\alpha, n-1}([a, b])$ é definido como:

$$C^{\alpha, n-1}([a, b]) = \left\{ y \in C^{n-1}[a, b] : {}^C D_{a+}^\alpha y \in C[a, b] \right\},$$

em que $C([a, b])$ é o espaço das funções contínuas em $[a, b]$ com a norma do supremo: $\|y\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$; $C^{n-1}([a, b])$ é o espaço das funções cuja $(n - 1)$ -ésima derivada é contínua em $[a, b]$.

Definição 4.3 (PVI - Riemann-Liouville). A equação diferencial ordinária fracionária

$$D_{a+}^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)), \quad (Re(\alpha) > 0), \quad (4.1)$$

com condições iniciais

$$D_{a+}^{\alpha-k} y(a) = b_k, \quad (4.2)$$

em que $b_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n-1$ e $n = [Re(\alpha)] + 1$, é chamada de Problema de Valor Inicial ou Problema de Cauchy em um intervalo $[a, b]$.

Uma solução para o PVI (4.1) e (4.2) é uma função $y(x) \in L^{\alpha}([a, b])$.

Definição 4.4 (PVI - Caputo). A equação diferencial ordinária fracionária

$${}^C D_{a+}^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)), \quad (Re(\alpha) > 0), \quad (4.3)$$

com condições iniciais

$$y^{(k)}(a) = b_k, \quad (4.4)$$

em que $b_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n-1$ e $n = [Re(\alpha)] + 1$, é chamada de Problema de Valor Inicial ou Problema de Cauchy em um intervalo $[a, b]$.

Uma solução para o PVI (4.3) e (4.4) é uma função $y(x) \in C^{\alpha, n-1}([a, b])$.

Para demonstrar os resultados de existência e unicidade dos problemas de valor inicial mencionados anteriormente, será utilizada a formulação em termos de Equações Integrais de Volterra.

Essas equações integrais são particularmente úteis na modelagem de fenômenos que levam em consideração a influência de estados passados no comportamento atual do sistema. Em especial, a Equação Integral de Volterra de Segunda Espécie caracteriza-se por apresentar a função incógnita tanto fora quanto no interior da integral, o que permite reformular certos problemas diferenciais em uma forma integral conveniente para a aplicação de teoremas de existência e unicidade.

Definição 4.5. As equações integrais

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (4.5)$$

e

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (4.6)$$

são exemplos de Equação Integral de Volterra de segunda espécie.

Os próximos resultados abordam a equivalência entre os PVIs e as Equações de Volterra apresentadas.

Lema 4.6. *Seja $Re(\alpha) > 0$ e $n - 1 \leq Re(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}$. Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e seja $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x, y) \in L(a, b)$ para todo $y \in \Omega$. Se $y(x) \in L(a, b)$, então $y(x)$ satisfaz em quase todo ponto as Equações (4.1) e (4.2) se, e somente se, $y(x)$ satisfaz a Equação (4.5).*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Hipótese: $y(x)$ satisfaz as Equações (4.1) e (4.2).

Tese: $y(x)$ satisfaz a Equação (4.5).

Aplicando o operador I_{a+}^α nos dois lados da igualdade (4.1):

$$\underbrace{I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha y(x)}_{(i)} = \underbrace{I_{a+}^\alpha f(x, y(x))}_{(ii)}.$$

Pela Propriedade 3.6, pode-se reescrever (i) como:

$$y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{n-\alpha})^{(n-j-1)} y(a) (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)}.$$

Note que,

$$(I_{a+}^{n-\alpha})^{(n-j-1)} y(a) = \left(\frac{d^{n-j-1}}{dx^{n-j-1}} \right) I_{a+}^{n-\alpha} y(a) = \left(\frac{d^{n-j-1}}{dx^{n-j-1}} \right) I_{a+}^{(n-j-1)-(\alpha-j-1)} y(a) = D_{a+}^{\alpha-j-1} y(a).$$

E, por hipótese, $D_{a+}^{\alpha-j-1} y(a) = b_{j+1}$. Assim, (i) pode ser escrito como:

$$y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} f(a) (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)}. \quad (4.7)$$

Pela definição de integral fracionária pode-se reescrever (ii) como:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (4.8)$$

Igualando (4.7) e (4.8) obtém-se a equação integral de Volterra:

$$\begin{aligned} y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ y(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Hipótese: $y(x)$ satisfaz a Equação (4.5).

Tese: $y(x)$ satisfaz as Equações (4.1) e (4.2).

Aplicando o operador D_{a+}^α nos dois lados da igualdade (4.5):

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha y(x) &= D_{a+}^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + D_{a+}^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ D_{a+}^\alpha y(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} D_{a+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + D_{a+}^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.8:

$$D_{a+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j-1} = 0 \implies \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} D_{a+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} = 0,$$

e pela Propriedade 3.6:

$$D_{a+}^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x, y(x)) = f(x, y(x)).$$

Assim, obtém-se (4.1):

$$D_{a+}^\alpha y(x) = f(x, y(x)).$$

Para obter (4.2), aplica-se o operador $D_{a+}^{\alpha-k}$ nos dois lados da igualdade (4.5):

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha-k} y(x) &= D_{a+}^{\alpha-k} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + D_{a+}^{\alpha-k} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ D_{a+}^{\alpha-k} y(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} D_{a+}^{\alpha-k} (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + D_{a+}^{\alpha-k} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.8:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha-k} (x-a)^{\alpha-j-1} &= D_{a+}^{\alpha-k} (x-a)^{(\alpha-j)-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-j)(x-a)^{(\alpha-j)-(\alpha-k)-1}}{\Gamma((\alpha-j)-(\alpha-k))} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-j)(x-a)^{k-j-1}}{\Gamma(k-j)} \\ &\implies \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} D_{a+}^{\alpha-k} (x-a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1} (x-a)^{k-j}}{\Gamma(k-j)}, \end{aligned}$$

e pela Propriedade 3.6:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha-k} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} &= D_{a+}^{\alpha-k} I_{a+}^\alpha f(x, y(x)) \\ &= I^{\alpha-(\alpha-k)} f(x, y(x)) = I^k f(x, y(x)) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$D_{a+}^{\alpha-k} y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{k-j-1}}{\Gamma(k-j)} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt.$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow a$, obtém-se $D_{a+}^{\alpha-k} y(a) = b_k$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} D_{a+}^{\alpha-k} y(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{k-j-1}}{\Gamma(k-j)} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x-a)^{k-j-1}}{\Gamma(k-j)} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt}_{=0} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{b_1(x-a)^{k-1}}{\Gamma(k)} + \dots + \frac{b_k(x-a)^{k-(k-1)-1}}{\Gamma(k-(k-1))} + \dots + \frac{b_n(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n-1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{b_k(x-a)^0}{\Gamma(1)} = b_k. \end{aligned}$$

□

Lema 4.7. *Seja $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $n-1 \leq \operatorname{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}$. Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e seja $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x, y) \in C(a, b)$ para todo $y \in \Omega$. Se $y(x) \in C(a, b)$, então $y(x)$ satisfaz em quase todo ponto as Equações (4.3) e (4.4) se, e somente se, $y(x)$ satisfaz a Equação (4.6).*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Hipótese: $y(x)$ satisfaz as Equações (4.3) e (4.4).

Tese: $y(x)$ satisfaz a Equação (4.6).

Aplicando o operador I_{a+}^{α} em ambos os lados da igualdade (4.3):

$$I_{a+}^{\alpha} {}^C D_{a+}^{\alpha} y(x) = I_{a+}^{\alpha} f(x, y(x)).$$

Utilizando a Propriedade 3.7 e a Definição de integral fracionária, obtém-se:

$$\begin{aligned} y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

($\Leftarrow$): Hipótese: $y(x)$ satisfaz a Equação (4.6).

Tese: $y(x)$ satisfaz as Equações (4.3) e (4.4).

Aplicando o operador ${}^C D_{a+}^\alpha$ nos dois lados da igualdade (4.6) e utilizando as Propriedades 3.8 e 3.7:

$${}^C D_{a+}^\alpha y(x) = {}^C D_{a+}^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!} + {}^C D_{a+}^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \implies {}^C D_{a+}^\alpha y(x) = f(x, y(x)).$$

E derivando ambos os lados da igualdade (4.6) k vezes, obtém-se:

$$y^{(k)}(x) = \left(\frac{d^k}{dx^k} \right) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!} + \left(\frac{d^k}{dx^k} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow a$, segue que $y^{(k)}(a) = b_k$. □

4.2 Teorema de Existência e Unicidade

Esta seção apresenta o enunciado e a prova de dois teoremas de existência e unicidade do problema de valor inicial de uma equação diferencial fracionária. Todos os resultados que serão utilizados encontram-se no apêndice B.

O próximo lema será usado na demonstração dos resultados referentes à existência e unicidade de soluções.

Lema 4.8. *A integral de Riemann-Liouville é um operador limitado em $L(a, b)$ e satisfaz*

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_1 \leq k \|f\|_1$$

e

$$\|I_{b-}^\alpha f\|_1 \leq k \|f\|_1,$$

$$\text{com } k = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|I_{a+}^\alpha f\|_1 &= \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \right| dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x |f(t)(x-t)^{\alpha-1}| dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x |f(t)|(x-t)^{\alpha-1} dt dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b |f(t)|(x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{(b-t)^\alpha}{\alpha} \right) dt \\ &= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)|(b-t)^\alpha dt \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|(b-a)^\alpha dt \\ &= \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_1 = k \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

A seguir, os enunciados e as provas dos dois teoremas de existência e unicidade. O primeiro refere-se ao PVI com a derivada de Riemann-Liouville e o segundo, ao PVI com a derivada de Caputo.

Teorema 4.9 (Existência e Unicidade - Riemann-Liouville). *Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $n - 1 \leq \operatorname{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}$, Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(\cdot, y) \in L[a, b]$, para todo $y \in \Omega$. Suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq m|y_1 - y_2|$$

para todo $x \in [a, b]$ e para todo $y_1, y_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}$, onde $m > 0$ não depende de x . Então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de Cauchy (4.1) no espaço $L^\alpha[a, b]$.

Demonstração. Pela equivalência entre o problema de Cauchy e a equação integral de Volterra, mostrar que existe uma única solução para uma, implica a existência de uma única solução para a outra, que corresponde à primeira.

Desse modo, tome $\eta \in [a, b]$ arbitrário e defina um operador T em $L[a, \eta]$ da seguinte forma:

$$T(y)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}},$$

$$\text{em que } y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{j+1}(x - a)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha - j)}.$$

A ideia é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso, precisa-se verificar que $T(L[a, \eta]) \subset L[a, \eta]$ e que T é uma contração.

Pelo Lema 4.8 segue que $T(y)(x) \in L[a, \eta]$. Logo, $T : L[a, \eta] \rightarrow L[a, \eta]$.

Afirmção: T é uma contração, ou seja, $\|T(y_1) - T(y_2)\|_1 \leq c\|y_1 - y_2\|_1$, com $0 < c < 1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|T(y_1) - T(y_2)\|_1 &= \int_a^\eta |T(y_1) - T(y_2)| dx = \int_a^\eta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \left| \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}{(x - t)^{1-\alpha}} \right| dt \right] dx \\ &\leq \int_a^\eta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \frac{m|y_1(t) - y_2(t)|}{(x - t)^{1-\alpha}} dt \right] dx \\ &= m \int_a^\eta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x \frac{|y_1(t) - y_2(t)|}{(x - t)^{1-\alpha}} dt \right] dx \\ &\leq m \int_a^\eta \frac{(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} |y_1(t) - y_2(t)| dx \\ &= \frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^\eta |y_1(t) - y_2(t)| dx \end{aligned}$$

$$= \frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1 - y_2\|_1.$$

Como η é arbitrário, deve-se tomá-lo de modo que a desigualdade $\frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1$ seja válida. Assim,

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_1 \leq c \|y_1 - y_2\|_1, \quad 0 < c < 1.$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe e é única uma função y solução da equação de Volterra e, portanto, essa y corresponde a solução do PVI. $\square$

Teorema 4.10 (Existência e Unicidade - Caputo). *Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $n - 1 \leq \operatorname{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}$, Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e seja $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(\cdot, y) \in C[a, b]$, para todo $y \in \Omega$, que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq m |y_1 - y_2|$$

para todo $x \in [a, b]$ e para todo $y_1, y_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}$, onde $m > 0$ não depende de x . Então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de Cauchy (4.3) no espaço $C^{\alpha, n-1}[a, b]$.

Demonstração. Assim como no teorema anterior, resolver o PVI é resolver Volterra. Para isso, tome $\eta \in [a, b]$ arbitrário e defina um operador T em $C[a, \eta]$ da seguinte forma:

$$T(y)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}},$$

$$\text{em que } y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!}.$$

A ideia é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso, precisa-se verificar que $T(C[a, \eta]) \subset C[a, \eta]$ e que T é uma contração.

Afirmção 1: $T(C[a, \eta]) \subset C[a, \eta]$.

Com efeito,

$$T(y)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}},$$

com $y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j(x-a)^j}{j!}$, que é uma função contínua, pois trata-se de uma função polinomial.

Assim, basta analisar a continuidade da função dada pela integral:

$$G(y)(x) = \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}}.$$

Para isso, considere (x_n) uma sequência em $[a, \eta]$ convergindo para um elemento $\bar{x} \in [a, \eta]$, isto é, $x_n \rightarrow \bar{x}$, e mostre que $G(y)(x_n) \rightarrow G(y)(\bar{x})$.

Reescrevendo a integral $G(y)(x)$ através de uma mudança de variável $s = x - t$, tem-se $dt = -ds$, quando $t = a \Rightarrow s = x - a$ e quando $t = x \Rightarrow s = 0$. Assim,

$$G(y)(x) = \int_0^{x-a} f(t, y(t)) s^{\alpha-1} ds.$$

Para $s \in [0, \eta - a]$ defina:

$$\begin{aligned} F_n &:= f(x_n - s, y(x_n - s)) s^{\alpha-1} \chi_{[0, x_n - a]}(s) \quad \text{e} \\ F &:= f(\bar{x} - s, y(\bar{x} - s)) s^{\alpha-1} \chi_{[0, \bar{x} - a]}(s), \end{aligned}$$

em que χ_E denota a função característica, isto é,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Com essa definição, tem-se:

$$\begin{aligned} G(y)(x_n) &= \int_0^{\eta-a} F_n(s) ds \quad \text{e} \\ G(y)(\bar{x}) &= \int_0^{\eta-a} F(s) ds. \end{aligned}$$

Como $x_n \rightarrow \bar{x}$, para n suficientemente grande, tem-se $\chi_{[0, x_n - a]}(s) \rightarrow \chi_{[0, \bar{x} - a]}(s)$.

Sejam $u = x_n - s$ e $v = \bar{x} - s$. Note que,

$$\begin{aligned} |f(u, y(u)) - f(v, y(v))| &= |f(u, y(u)) - f(u, y(v)) + f(u, y(v)) - f(v, y(v))| \\ &\leq |f(u, y(u)) - f(u, y(v))| + |f(u, y(v)) - f(v, y(v))|. \end{aligned}$$

Pelo fato de $f(\cdot, y)$ ser Lipschitziana na segunda variável, tem-se:

$$|f(u, y(u)) - f(u, y(v))| \leq m |y(u) - y(v)|.$$

Pelo fato de y ser contínua e $u \rightarrow v$, tem-se:

$$|f(u, y(u)) - f(u, y(v))| \rightarrow 0.$$

Pelo fato de $f(\cdot, y)$ ser contínua e $u \rightarrow v$ tem-se:

$$|f(u, y(v)) - f(v, y(v))| \rightarrow 0.$$

Assim,

$$f(u, y(u)) \rightarrow f(v, y(v)).$$

E portanto,

$$F_n(s) \rightarrow F(s).$$

Pelo fato de $f(t, y(t))$ ser contínua em $[a, \eta]$, pode-se afirmar que f é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que $|f(t, y(t))| \leq K$ em $[a, \eta]$. Então,

$$|F_n(s)| \leq K \cdot s^{Re(\alpha)-1} \chi_{[0, \eta-a]}(s).$$

Defina $g(s) := K \cdot s^{Re(\alpha)-1} \chi_{[0, \eta-a]}(s)$.

Como $Re(\alpha) > 0$ então $Re(\alpha) - 1 > -1$ e portanto:

$$\int_0^{\eta-a} g(s) ds = K \int_0^{\eta-a} s^{Re(\alpha)-1} ds = \frac{K(\eta-a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha)} < \infty.$$

Logo, $g \in L[a, b]$.

Assim,

- $F_n(s) \rightarrow F(s)$ para quase todo $s \in [0, \eta - a]$;
- $|F_n(s)| \leq g(s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo $s \in [0, \eta - a]$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.5 do apêndice B), segue que:

$$\int_0^{\eta-a} F_n(s) ds \rightarrow \int_0^{\eta-a} F(s) ds,$$

isto é, $G(y)(x_n) \rightarrow G(y)(\bar{x})$.

Afirmção 2: T é uma contração, ou seja, $\|T(y_1) - T(y_2)\|_\infty \leq c\|y_1 - y_2\|_\infty$, com $0 < c < 1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} |T(y_1) - T(y_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{m|y_1(t) - y_2(t)| dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= m \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{|y_1(t) - y_2(t)| dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &\leq m \frac{(\eta-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (y_1(t) - y_2(t)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \|T(y_1) - T(y_2)\|_\infty &= \sup_{t \in [a, \eta]} |T(y_1) - T(y_2)| \\
 &\leq \sup_{t \in [a, \eta]} m \left| \frac{(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} (y_1(t) - y_2(t)) \right| \\
 &= \frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sup_{t \in [a, \eta]} |y_1(t) - y_2(t)| \\
 &= \frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1 - y_2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Como η é arbitrário, deve-se tomá-lo de modo que a desigualdade $\frac{m(\eta - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1$ seja válida. Assim,

$$\|T(y_1) - T(y_2)\|_\infty \leq c \|y_1 - y_2\|_\infty, \quad 0 < c < 1.$$

Pelas afirmações 1 e 2 segue que, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe e é única uma função y solução da equação de Volterra e, portanto, essa y corresponde à solução do PVI. $\square$

Exemplo 4.11. Resolver a seguinte equação fracionária linear ${}^C D_0^\alpha y(x) = \lambda y(x)$ com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y^{(k)}(0) = 0$, para $k = 1, \dots, n$, com $n = [Re(\alpha)] + 1$, utilizando a transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}
 {}^C D_0^\alpha y(x) - \lambda y(x) &= 0 \\
 \mathcal{L} \{ {}^C D_0^\alpha y(x) \} - \mathcal{L} \{ \lambda y(x) \} &= 0 \\
 s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y_0 - \lambda Y(s) &= 0 \\
 (s^\alpha - \lambda) Y(s) &= s^{\alpha-1} y_0 \\
 Y(s) &= y_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}.
 \end{aligned}$$

Logo, utilizando a Tabela 2.2, a solução $y(x)$ é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ y_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \right\} = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

4.3 Dependência Contínua

A ideia de dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais significa que pequenas perturbações nos dados iniciais produzem apenas pequenas perturbações na solução, o que garante que a solução obtida utilizando os dados perturbados ficará próxima da solução original.

Desse modo a solução é previsível, estável e confiável, o que garante que os modelos e cálculos numéricos sejam úteis no mundo real.

Na teoria qualitativa de equações diferenciais, há uma desigualdade bastante utilizada, a Desigualdade de Gronwall, que será apresentada no lema a seguir e cuja demonstração pode ser encontrada no livro [18] (página 31).

Lema 4.12 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam k_1, k_2 constantes positivas e sejam f e g funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ que satisfazem:*

$$f(x) \leq k_1 + k_2 \int_a^x f(t)g(t) dt, \forall x \in [a, b].$$

Então,

$$f(x) \leq k_1 e^{k_2 \int_a^x g(t) dt}, \forall x \in [a, b].$$

Com o intuito de demonstrar a dependência contínua das soluções de Equações Diferenciais Fracionárias, apresenta-se o próximo lema, que é uma generalização fracionária da Desigualdade de Gronwall.

Lema 4.13 (Desigualdade de Gronwall - Fracionária). *Sejam k_1, k_2 constantes positivas, $Re(\alpha) > 0$ e seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ satisfazendo a desigualdade:*

$$|f(x)| \leq k_1 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt, \forall x \in [a, b].$$

Então

$$|f(x)| \leq k_1 E_\alpha(k_2 x^\alpha), \forall x \in [a, b].$$

Demonstração. Para provar o resultado, vamos comparar a função f com a solução de um problema fracionário.

Tomando uma constante positiva qualquer k_3 , defina $\Phi(x) = (k_1 + k_3)E_\alpha(k_2 x^\alpha)$.

Note que a função Φ é solução de uma equação fracionária como a apresentada no Exemplo 4.11: ${}^C D_a^\alpha \Phi(x) = k_2 \Phi(x)$, com condições iniciais $\Phi(a) = k_1 + k_3$ e $\Phi^{(k)}(a) = 0$, para $k = 1, \dots, n$, com $n = [Re(\alpha)] + 1$.

Pelo Teorema 4.7, a função Φ satisfaz uma Equação Integral, ou seja,

$$\Phi(x) = k_1 + k_3 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt.$$

Por hipótese:

$$|f(a)| \leq k_1 < k_1 + k_3 = \Phi(a) \Rightarrow |f(a)| < \Phi(a).$$

E pela continuidade da f , existe $h > 0$ tal que:

$$|f(x)| < \Phi(x), \forall x \in [a, a+h].$$

Suponha, por contradição, que x_0 seja o menor número maior que a tal que $|f(x_0)| = \Phi(x_0)$. Então, para $a \leq x \leq x_0$, tem-se que $|f(x)| \leq \Phi(x)$ e assim:

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &\leq k_1 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq k_1 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt \\ &< k_1 + k_3 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^{\alpha-1} \Phi(t) dt = \Phi(x_0). \end{aligned}$$

Logo, $|f(x_0)| < \Phi(x_0)$, o que não é verdade, portanto a suposição de que $|f(x_0)| = \Phi(x_0)$ é falsa e, de fato,

$$|f(x)| < \Phi(x) = (k_1 + k_3)E_\alpha(k_2x^\alpha), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4.9)$$

Como a constante $k_3 > 0$ foi tomada arbitrariamente, vamos tomar em (4.9) o limite $k_3 \rightarrow 0^+$.

Portanto, $|f(x)| \leq k_1E_\alpha(k_2x^\alpha)$, $\forall x \in [a, b]$. $\square$

A seguir, o enunciado e a prova do Teorema da Dependência Contínua para derivadas fracionárias de Caputo.

Teorema 4.14 (Dependência Contínua - Caputo). *Seja f uma função que satisfaz as condições do Teorema 4.10 e sejam y e z as soluções definidas em $[a, h]$ dos respectivos PVI's:*

$${}^C D_{a+}^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad (Re(\alpha) > 0),$$

com condições iniciais

$$y^{(k)}(a) = b_k \quad (b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n-1; n = [Re(\alpha)] + 1)$$

e

$${}^C D_{a+}^\alpha z(x) = f(x, z(x)), \quad (Re(\alpha) > 0),$$

com condições iniciais

$$z^{(k)}(a) = c_k \quad (c_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n-1; n = [Re(\alpha)] + 1).$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} |b_k - c_k| < \delta \text{ então } |y(x) - z(x)| < \epsilon, \text{ para qualquer } x \in [a, h].$$

Demonstração. Defina $\Phi(x) := y(x) - z(x)$, para todo $x \in [a, h]$. Pelo Lema 4.7, pode-se

escrever $\Phi(x)$ como uma Equação Integral de Volterra:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - c_k) \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt.$$

Pela desigualdade triangular, segue que:

$$|\Phi(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt.$$

Como a função f é lipschitziana na segunda variável com constante de Lipschitz m , tem-se:

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} |y(t) - z(t)| dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} |\Phi(t)| dt. \end{aligned}$$

Para todo $x \in [a, h]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(x-a)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(h-a)^k}{k!}.$$

Definindo $A := \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - c_k| \frac{(h-a)^k}{k!}$, obtém-se:

$$|\Phi(x)| \leq A + \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |\Phi(t)| dt, \quad x \in [a, h].$$

Pelo Lema 4.13, segue que:

$$|\Phi(x)| \leq A \cdot E_\alpha(mx^\alpha), \quad \forall x \in [a, h].$$

Pelo fato de $E_\alpha(mx^\alpha)$ ser contínua em um conjunto compacto $[a, h]$, $E_\alpha(mx^\alpha)$ é limitada por uma constante C , logo:

$$|\Phi(x)| \leq AC \quad \forall x \in [a, h].$$

Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{AC}$ para que, $\max_{0 \leq k \leq n-1} |b_k - c_k| \leq \delta$, implique $|y(x) - z(x)| < \epsilon$. $\square$

O Teorema da Dependência Contínua para o caso fracionário desempenha um papel fundamental na análise dos modelos, pois está diretamente relacionado à boa formulação do problema.

Em algumas aplicações os dados iniciais frequentemente estão sujeitos a imprecisões decorrentes de erros de medição ou estimativas aproximadas. O resultado de dependência contínua assegura que pequenas variações nesses dados produzem apenas pequenas variações na solução, indicando que o problema considerado é bem posto.

Além disso, em modelos fracionários, o comportamento do sistema depende não apenas do estado atual, mas também de sua evolução passada, característica associada ao efeito memória. Nesse contexto, o Teorema da Dependência Contínua contribui para compreender como essa memória influencia a estabilidade das soluções do modelo.

Aplicações

O objetivo deste capítulo é comparar as soluções de alguns modelos de equações diferenciais conhecidos com seus respectivos modelos fracionários utilizando a derivada de Caputo e também compará-los visualmente através dos respectivos gráficos.

Os valores numéricos utilizados para plotar os gráficos não correspondem a nenhum modelo específico. Além disso, vale ressaltar que a ordem das derivadas das equações são números reais que variam entre 0 e 1.

Este capítulo foi baseado nas referências [1] e [19].

5.1 Equação Logística

A Equação Logística é um modelo de equação diferencial publicado por Pierre François Verhulst em 1838 a fim de modelar o crescimento populacional mundial com base em estatísticas disponíveis.

A Equação Logística Clássica é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right), \quad (5.1)$$

em que $P(t)$ denota a população no instante t , r é a taxa de crescimento e K é o valor máximo que essa população atinge, chamada capacidade de suporte. Sua solução é dada por:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0} \right) e^{-rt}}, \quad (5.2)$$

em que P_0 é a população no instante inicial.

A Equação (5.1) é não linear, portanto introduz-se a mudança de variável, $P(t) = \frac{1}{Q(t)}$, a fim de torná-la linear para que seja possível a aplicação da Transformada de

Laplace em sua resolução.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= -\frac{1}{Q^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{r}{Q(t)} \left(1 - \frac{1}{Q(t)K}\right) = rQ(t) - \frac{r}{K} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + rQ(t) &= \frac{r}{K}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

A versão fracionária da Equação Logística (5.3) com a derivada de Caputo é dada por:

$${}^C D^\alpha Q(t) + rQ(t) = \frac{r}{K} \quad (5.4)$$

com $0 < \alpha < 1$.

Denote por $\mathcal{L}\{Q(t)\} = \tilde{Q}(s)$. Aplicando a Transformada de Laplace na Equação (5.4), segue que:

$$\begin{aligned}{}^C D^\alpha Q(t) + rQ(t) &= \frac{r}{K} \\ \mathcal{L}\{{}^C D^\alpha Q(t)\} + \mathcal{L}\{rQ(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{r}{K}\right\} \\ s^\alpha \tilde{Q}(s) - s^{\alpha-1}Q_0 + r\tilde{Q}(s) &= \frac{r}{K} \frac{1}{s} \\ \tilde{Q}(s)(s^\alpha + r) &= \frac{r}{Ks} + s^{\alpha-1}Q_0 \\ \tilde{Q}(s) &= \frac{1}{K} \frac{r}{s(s^\alpha + r)} + Q_0 \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + r)}\end{aligned}$$

em que $Q_0 = \frac{1}{P_0}$.

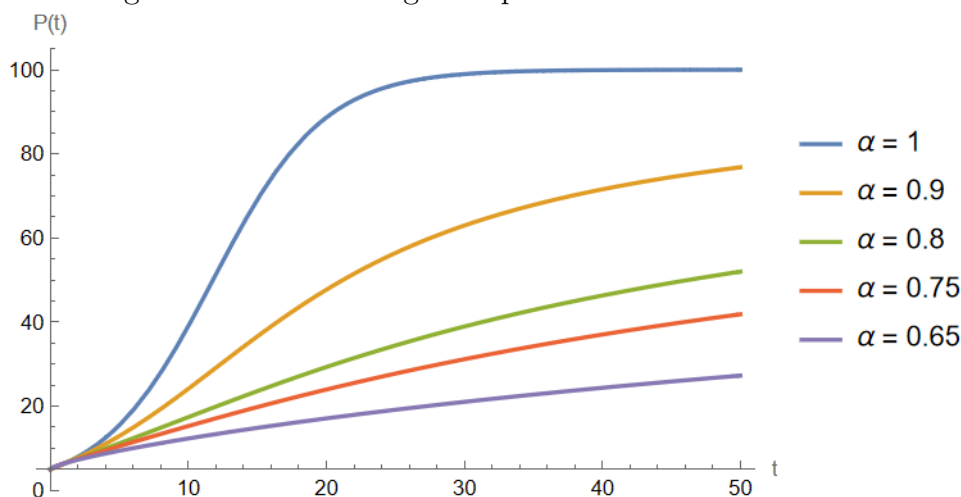
Aplicando a Transformada Inversa com os dados da Tabela 2.2, obtém-se a solução:

$$\begin{aligned}Q(t) &= \frac{1}{K}(1 - E_\alpha(-rt^\alpha)) + Q_0 E_\alpha(-rt^\alpha) \\ Q(t) &= \frac{1}{K}(1 - E_\alpha(-rt^\alpha) + KQ_0 E_\alpha(-rt^\alpha)).\end{aligned}$$

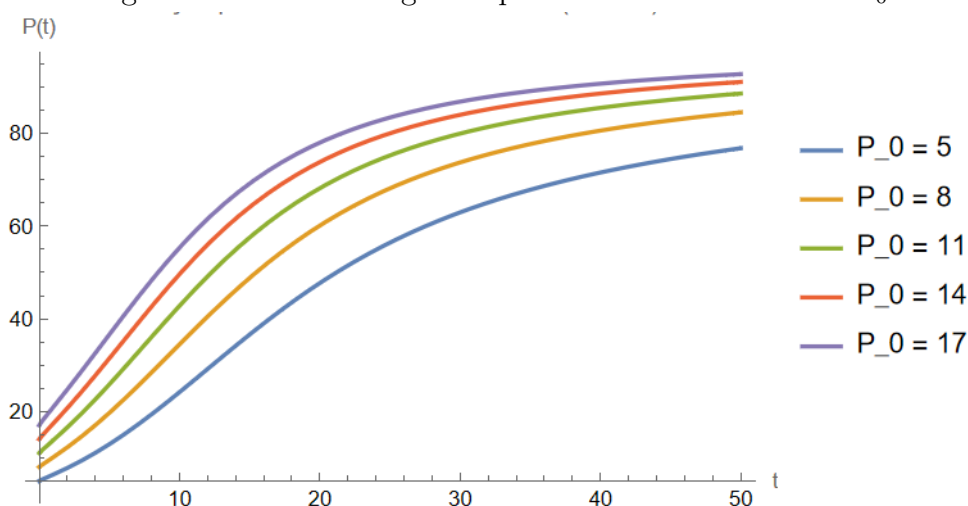
Voltando para a função original:

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{K}{1 + \left(K \frac{1}{P_0} - 1\right) E_\alpha(-rt^\alpha)} \\ P(t) &= \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) E_\alpha(-rt^\alpha)}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

As figuras a seguir representam a solução da equação logística fracionária, considerando $K = 100$ e $r = 0.25$. Na Figura 5.1, consideramos $P_0 = 5$ e variamos os valores de α . Já na Figura 5.2, consideramos $\alpha = 0.9$ e variamos os valores de P_0 .

Figura 5.1: Modelo Logístico para diferentes valores de α .

Fonte: A autora.

Figura 5.2: Modelo Logístico para diferentes valores de P_0 .

Fonte: A autora.

Observando os gráficos obtidos, nota-se que, à medida que o valor de α diminui, a solução leva mais tempo para alcançar a capacidade de suporte do sistema. Em particular, quando $\alpha = 1$, recupera-se o modelo logístico clássico.

Além disso, ao variar os valores da condição inicial P_0 , observa-se que as soluções permanecem próximas entre si, apresentando apenas pequenas variações ao longo do tempo. Esse comportamento está de acordo com o teorema de dependência contínua em relação às condições iniciais, indicando que o modelo é pouco sensível a pequenas perturbações em P_0 .

Por fim, os resultados gráficos sugerem que o modelo logístico fracionário preserva as principais propriedades qualitativas do modelo clássico, ao mesmo tempo em que incorpora efeitos de memória que modificam a velocidade de aproximação ao equilíbrio quando comparado ao caso clássico, sem comprometer a estabilidade das soluções.

5.2 Modelo de Lotka-Volterra (Presa-Predador)

O modelo de Lotka-Volterra é um sistema composto por duas equações diferenciais que descrevem as interações entre uma população de presas e uma população de predadores. Foi desenvolvido por volta de 1920, de forma independente, por Alfred James Lotka e Vito Volterra.

O modelo clássico é dado pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases} \quad (5.6)$$

em que $x = x(t)$ representa a população de presas e $y = y(t)$, a população de predadores, no instante t ; e a, b, c e d são números reais positivos, que representam as interações entre as espécies.

É importante observar que o modelo presa-predador considera apenas duas populações de animais interagindo em um ambiente, descartando a influência de outros fatores do ambiente nesse processo. Assim há algumas premissas a serem consideradas:

- Na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente;
- Na ausência de presas, a população de predadores decresce exponencialmente;
- O decréscimo da população de presas, bem como o crescimento da população de predadores acontece de forma proporcional ao tamanho das populações de presas e predadores disponíveis.

No entanto, apesar de tais restrições, o modelo de Lotka-Volterra se destaca ao descrever fenômenos com aplicações em diversas áreas da biologia.

Observa-se também que as equações que compõem o Sistema (5.6) são equações não lineares, então realiza-se uma linearização em torno do ponto de equilíbrio (x_E, y_E) com o objetivo de obter um sistema correspondente, porém linear, o que permite o uso da Transformada de Laplace.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

e seja (x_E, y_E) o ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x_E, y_E) = 0$ e $g(x_E, y_E) = 0$. Sejam $u = x - x_E$ e $v = y - y_E$.

O sistema linearizado é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Jacobiana}} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Assim, denotando por $f(x, y) = x(a - by)$ e $g(x, y) = y(-c + dx)$, com $x = x(t)$ e $y = y(t)$, obtém-se os pontos de equilíbrio do sistema de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x(a - by) = 0 \Rightarrow x = 0 & \text{ou} & y = \frac{a}{b} \\ y(-c + dx) = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{ou} & x = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow (x_E, y_E) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x_E, y_E) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

A linearização será feita em torno do ponto de equilíbrio não trivial $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, em que as duas populações coexistem.

A matriz Jacobiana nesse ponto é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

E o sistema linearizado é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \frac{-bc}{d}v \\ \dot{v} = \frac{ad}{b}u. \end{cases} \quad (5.7)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e depois a Transformada Inversa de Laplace no Sistema (5.7), obtém-se as seguintes soluções:

$$u(t) = v_0 \frac{bc}{d} \frac{\sin(\sqrt{ac}t)}{\sqrt{ac}} - u_0 \cos(\sqrt{ac}t)$$

e

$$v(t) = -u_0 \frac{ad}{b} \frac{\sin(\sqrt{ac}t)}{\sqrt{ac}} - v_0 \cos(\sqrt{ac}t).$$

em que u_0 e v_0 representam, respectivamente, os desvios iniciais das populações de presas e predadores em relação ao equilíbrio.

Para investigar a influência da ordem fracionária na dinâmica local do modelo de Lotka-Volterra, considera-se a versão linearizada do sistema em torno do ponto de equi-

l brio não-trivial $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. É importante notar que, embora as soluções do problema não linear não sejam iguais às do problema linearizado, elas são topologicamente equivalentes.

O sistema linear fracionário, com a derivada de Caputo, correspondente   dado por:

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u(t) = \frac{-bc}{d}v \\ {}^C D^\beta v(t) = \frac{ad}{b}u. \end{cases} \quad (5.8)$$

Denote por $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ e $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$. Aplicando a Transformada de Laplace no Sistema de Equações (5.8), segue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}^C D^\alpha u(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{-bc}{d}v\right\} \\ s^\alpha U(s) - s^{\alpha-1}u_0 &= \frac{-bc}{d}V(s) \end{aligned} \quad (5.9)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}^C D^\beta v(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{ad}{b}u\right\} \\ s^\beta V(s) - s^{\beta-1}v_0 &= \frac{ad}{b}U(s). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Isolando $U(s)$ em (5.9) e substituindo em (5.10) obtém-se:

$$V(s) = u_0 \frac{ad}{b} \frac{s^\alpha}{s(s^{\alpha+\beta} + ac)} + v_0 \frac{s^{\alpha+\beta}}{s(s^{\alpha+\beta} + ac)}.$$

E Isolando $V(s)$ em (5.10) e substituindo em (5.9) obtém-se:

$$U(s) = -v_0 \frac{bc}{d} \frac{s^\beta}{s(s^{\alpha+\beta} + ac)} + u_0 \frac{s^{\alpha+\beta}}{s(s^{\alpha+\beta} + ac)}.$$

Aplicando a Transformada Inversa com os dados da Tabela 2.2, obt m-se a solução:

$$v(t) = u_0 \frac{ad}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-ac t^{\alpha+\beta}) + v_0 E_{\alpha+\beta}(-ac t^{\alpha+\beta}) \quad (5.11)$$

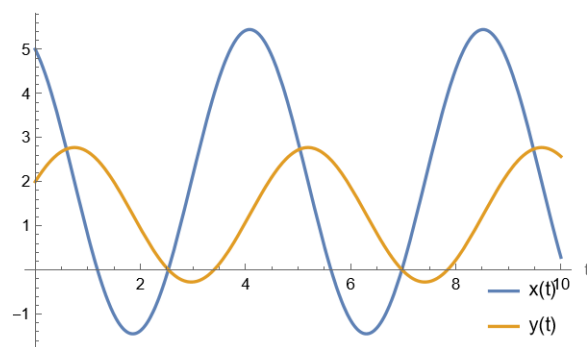
e

$$u(t) = -v_0 \frac{bc}{d} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-ac t^{\alpha+\beta}) + u_0 E_{\alpha+\beta}(-ac t^{\alpha+\beta}). \quad (5.12)$$

As figuras a seguir, representam as soluções do modelo presa-predador fracionário em função do tempo e também os planos de fases correspondentes, para diferentes valores de α e β , considerando os parâmetros $a = 2$, $b = 1,6$, $c = 1$ e $d = 0,5$. Além disso, consideramos $x_0 = 5$ e $y_0 = 2$.

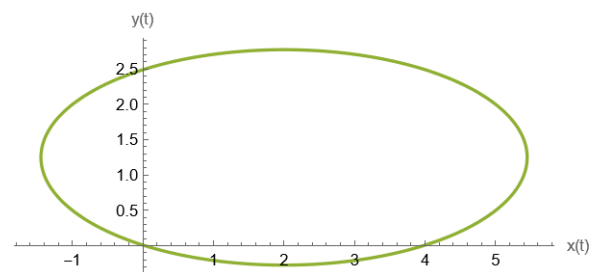
Quando $\alpha = \beta = 1$, recupera-se o modelo clássico, em que as populações variam de maneira periódica e o plano de fases é uma elipse centrada no ponto de equilíbrio, que neste caso é o ponto $(2, 1.25)$, como pode-se observar nas Figuras 5.3 e 5.4.

Figura 5.3: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 1$.



Fonte: A autora.

Figura 5.4: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 1$.

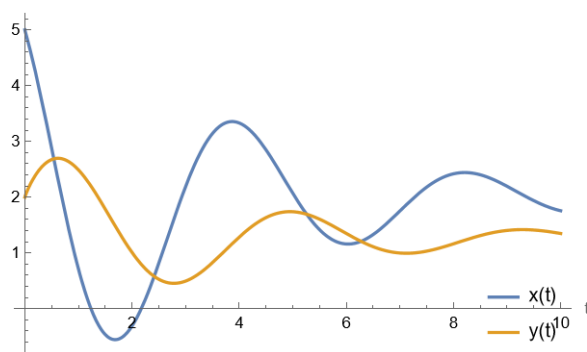


Fonte: A autora.

Nas próximas figuras, variamos os valores de α e β , seguindo alguns critérios:

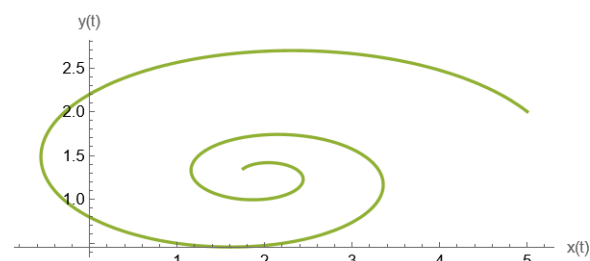
1. $\alpha = \beta = i$ com $i \in \{0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5\}$;
 2. $\alpha = 1$ e $\beta = i$ com $i \in \{0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5\}$;
 3. $\alpha = i$ e $\beta = 1$ com $i \in \{0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5\}$;
 4. $\alpha = 0.7$ e $\beta = i$ com $i \in \{0.9, 0.8, 0.6, 0.5\}$;
 5. $\alpha = i$ e $\beta = 0.7$ com $i \in \{0.9, 0.8, 0.6, 0.5\}$;
- Nas figuras 5.5 a 5.14 temos $\alpha = \beta$ variando.

Figura 5.5: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.9$.



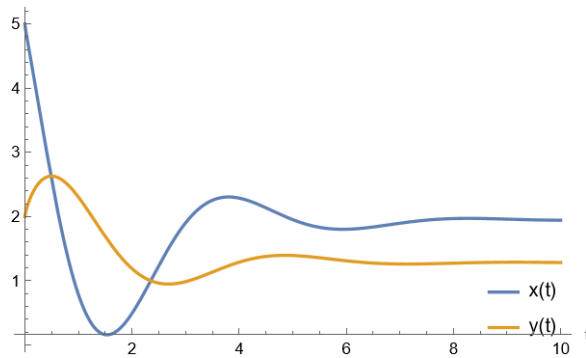
Fonte: A autora.

Figura 5.6: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.9$.



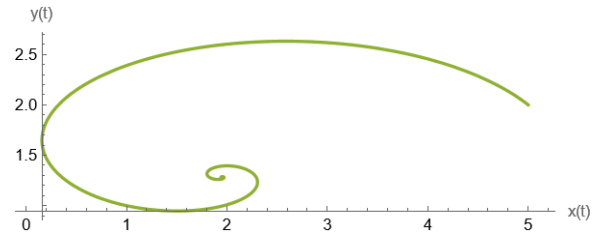
Fonte: A autora.

Figura 5.7: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.8$.



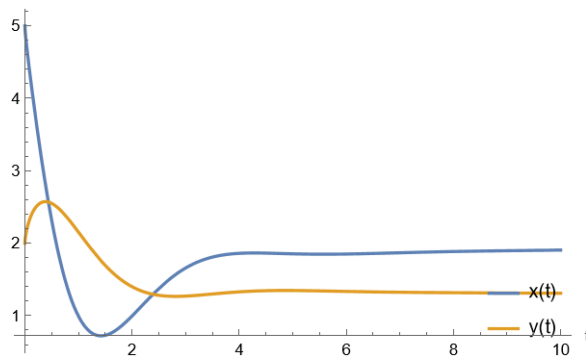
Fonte: A autora.

Figura 5.8: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.8$.



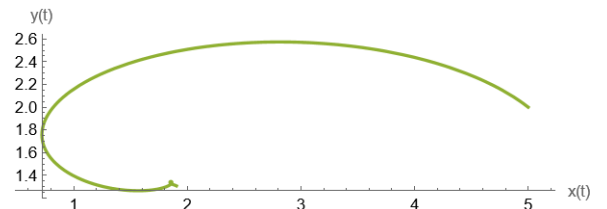
Fonte: A autora.

Figura 5.9: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.7$.



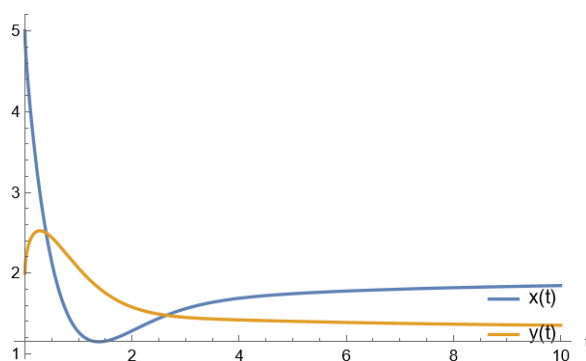
Fonte: A autora.

Figura 5.10: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.7$.



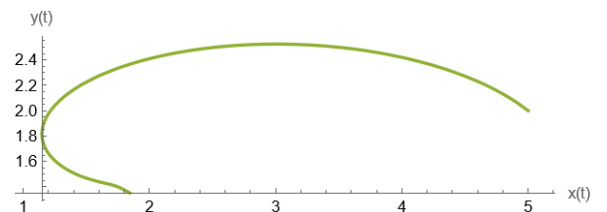
Fonte: A autora.

Figura 5.11: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.6$.



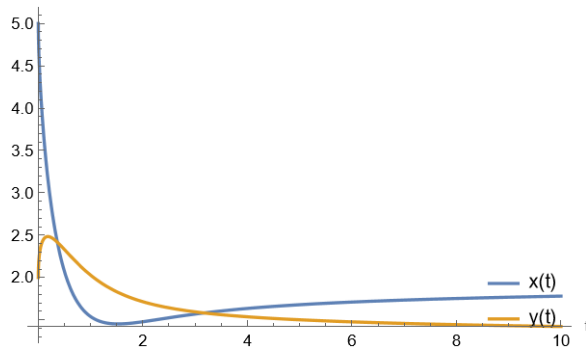
Fonte: A autora.

Figura 5.12: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.6$.



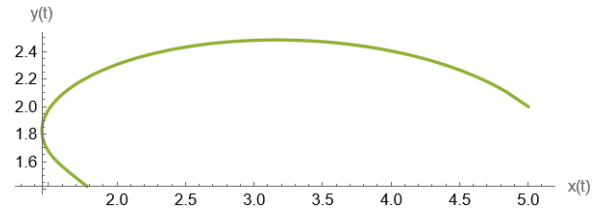
Fonte: A autora.

Figura 5.13: Modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

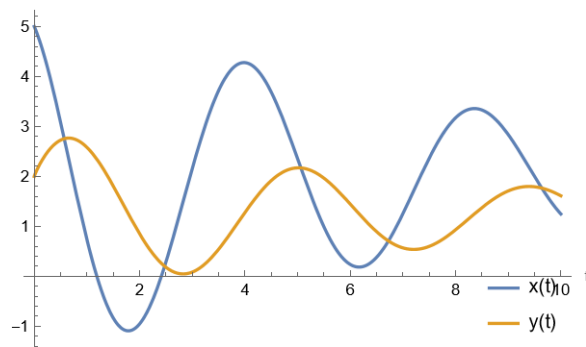
Figura 5.14: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = \beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

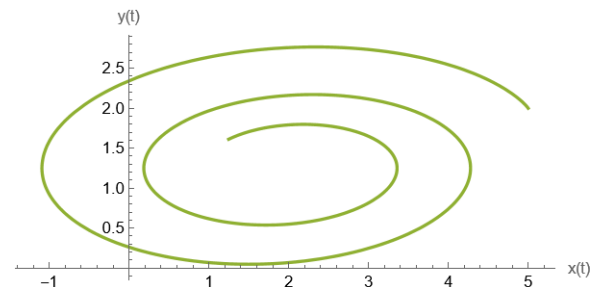
- Nas figuras 5.15 a 5.24, temos $\alpha = 1$ e β variando.

Figura 5.15: Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.9$.



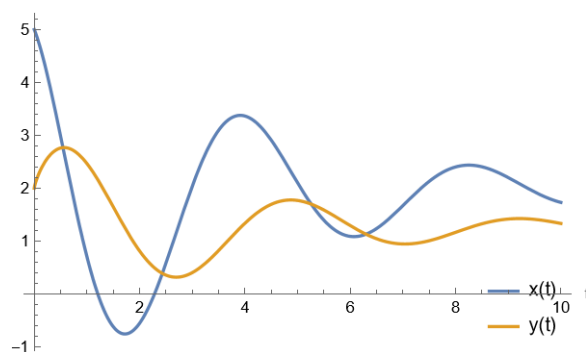
Fonte: A autora.

Figura 5.16: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.9$.



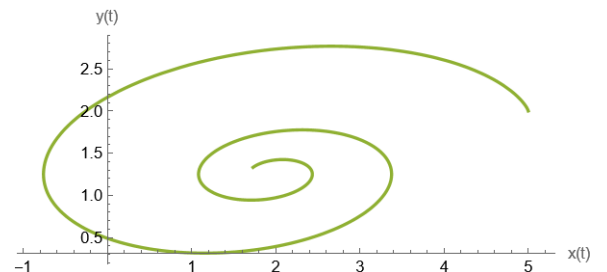
Fonte: A autora.

Figura 5.17: Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.8$.



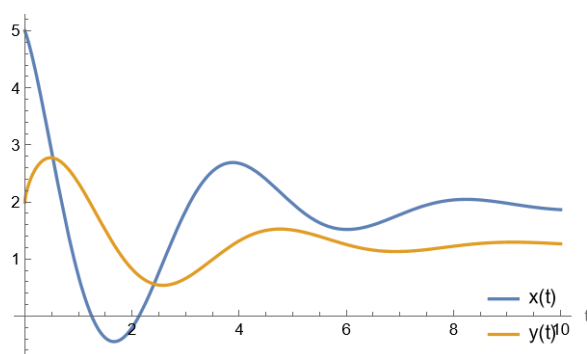
Fonte: A autora.

Figura 5.18: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.8$.



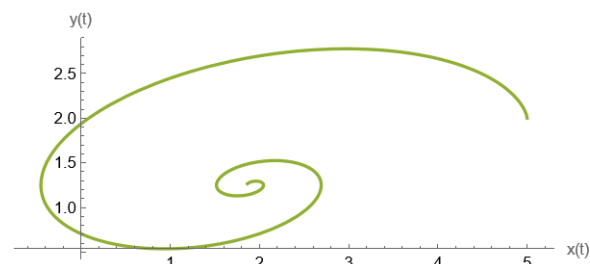
Fonte: A autora.

Figura 5.19: Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.7$.



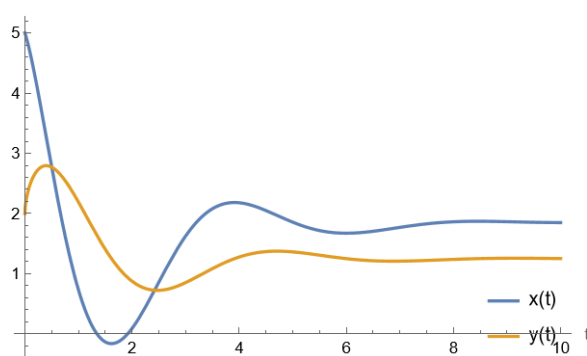
Fonte: A autora.

Figura 5.20: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.7$.



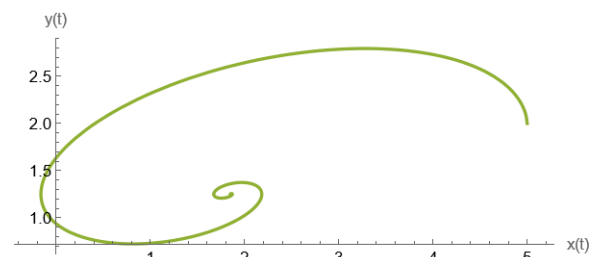
Fonte: A autora.

Figura 5.21: Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.6$.



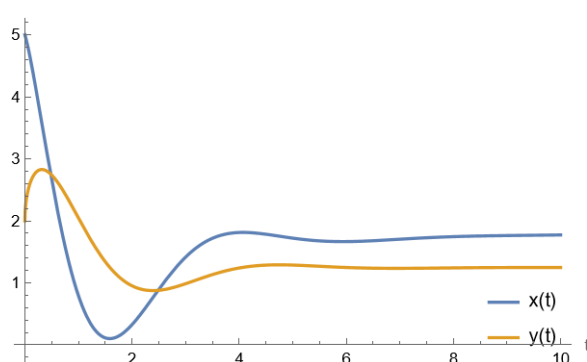
Fonte: A autora.

Figura 5.22: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.6$.



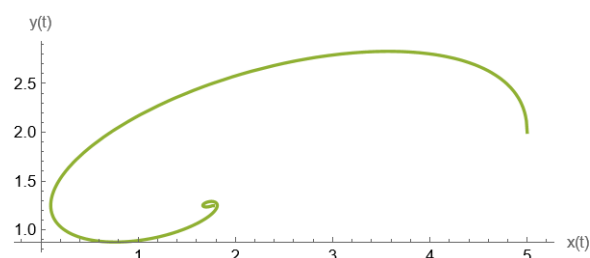
Fonte: A autora.

Figura 5.23: Modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

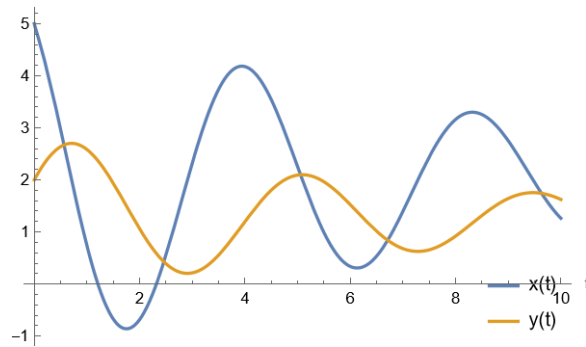
Figura 5.24: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

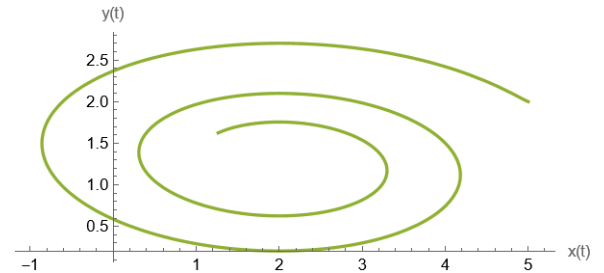
- Nas figuras 5.25 a 5.34, temos α variando e $\beta = 1$.

Figura 5.25: Modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 1$.



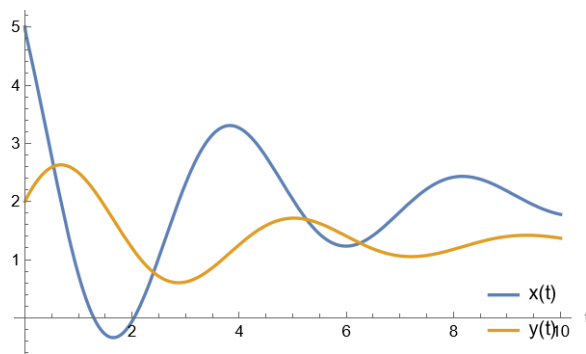
Fonte: A autora.

Figura 5.26: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 1$.



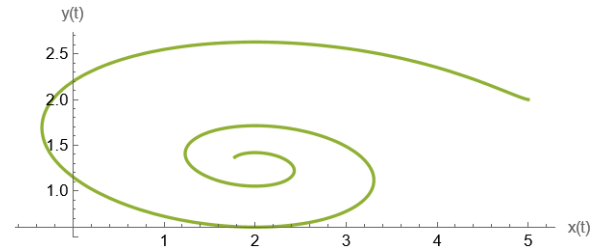
Fonte: A autora.

Figura 5.27: Modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 1$.



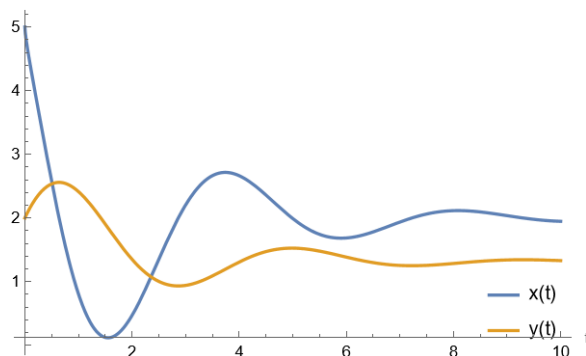
Fonte: A autora.

Figura 5.28: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 1$.



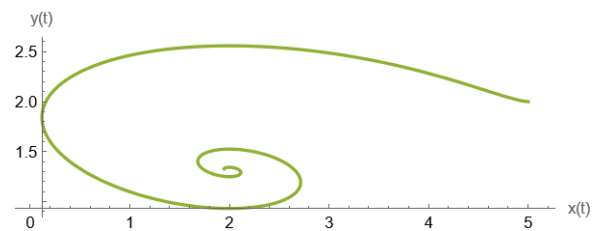
Fonte: A autora.

Figura 5.29: Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 1$.



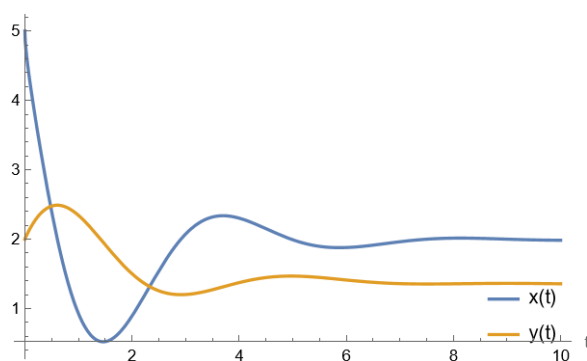
Fonte: A autora.

Figura 5.30: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 1$.



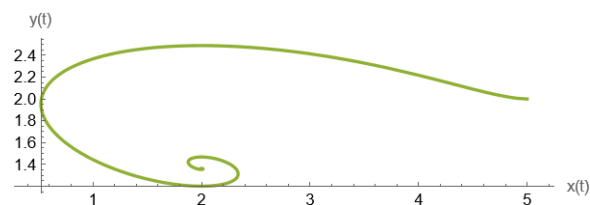
Fonte: A autora.

Figura 5.31: Modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 1$.



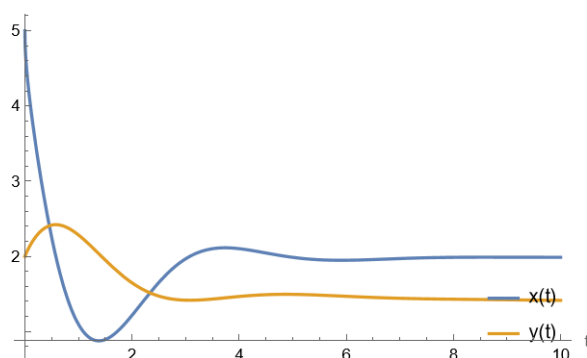
Fonte: A autora.

Figura 5.32: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 1$.



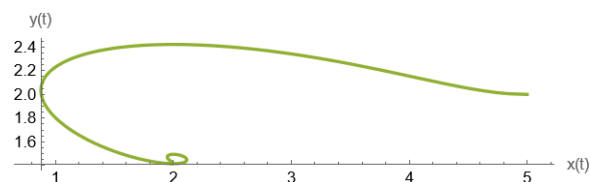
Fonte: A autora.

Figura 5.33: Modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$.



Fonte: A autora.

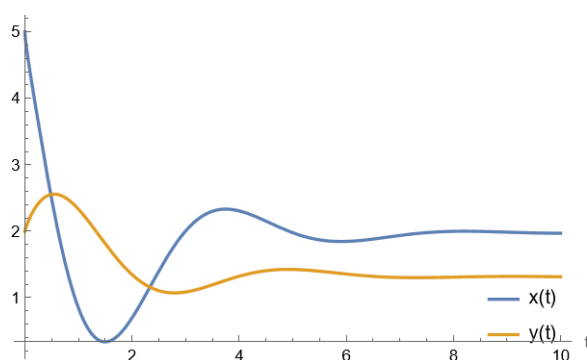
Figura 5.34: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$.



Fonte: A autora.

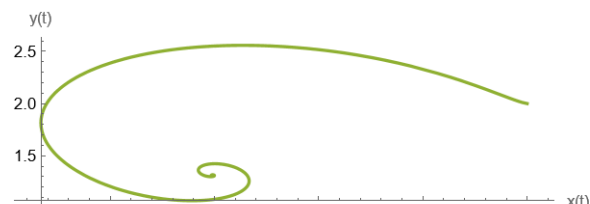
- Nas figuras 5.35 a 5.42, temos $\alpha = 0.7$ e β variando.

Figura 5.35: Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$.



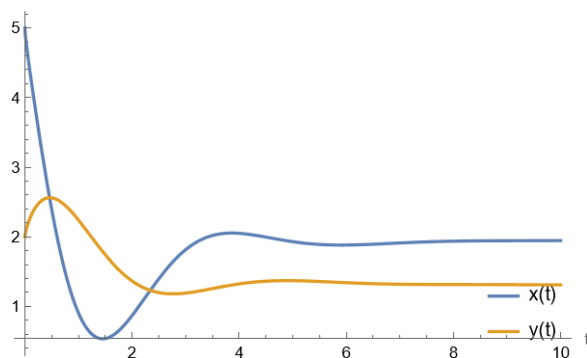
Fonte: A autora.

Figura 5.36: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$.



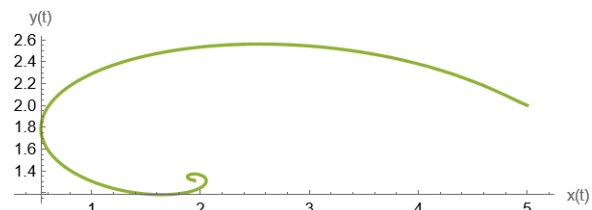
Fonte: A autora.

Figura 5.37: Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.8$.



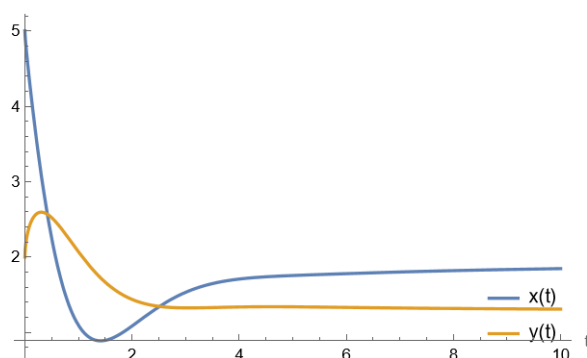
Fonte: A autora.

Figura 5.38: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.8$.



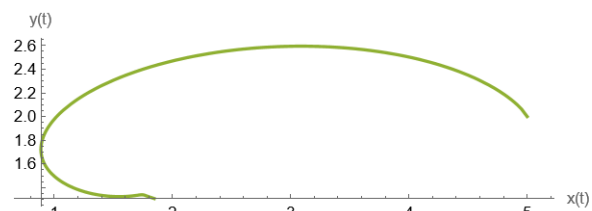
Fonte: A autora.

Figura 5.39: Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.6$.



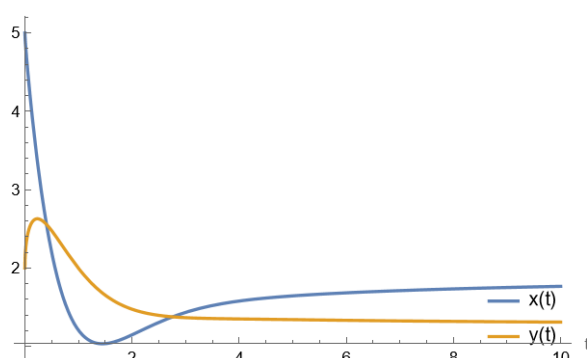
Fonte: A autora.

Figura 5.40: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.9$.



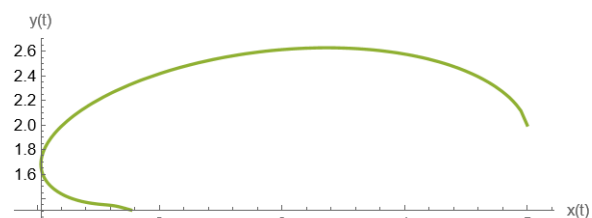
Fonte: A autora.

Figura 5.41: Modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

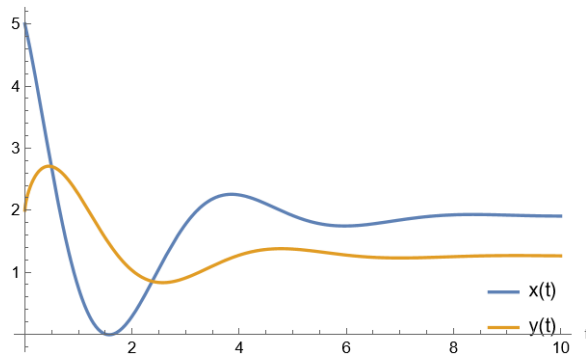
Figura 5.42: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.5$.



Fonte: A autora.

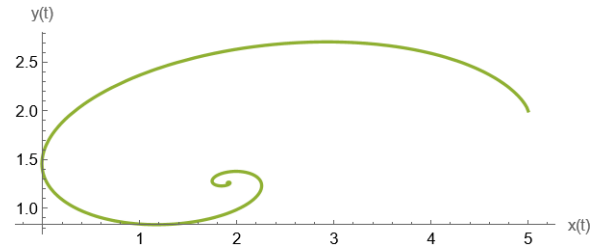
- Nas figuras 5.43 a 5.50, temos α variando e $\beta = 0.7$.

Figura 5.43: Modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 0.7$.



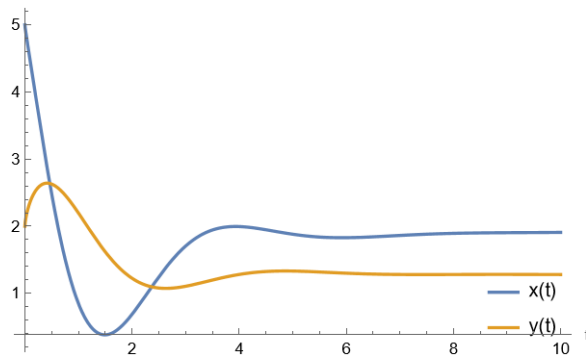
Fonte: A autora.

Figura 5.44: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 0.7$.



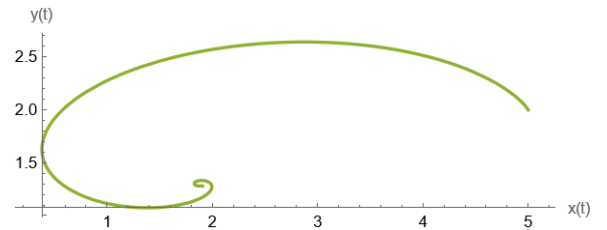
Fonte: A autora.

Figura 5.45: Modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.7$.



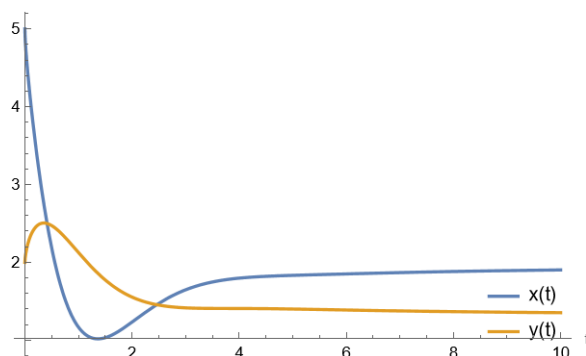
Fonte: A autora.

Figura 5.46: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.7$.



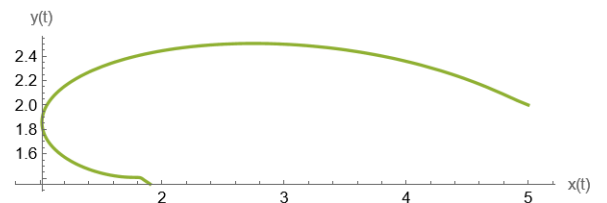
Fonte: A autora.

Figura 5.47: Modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 0.7$.



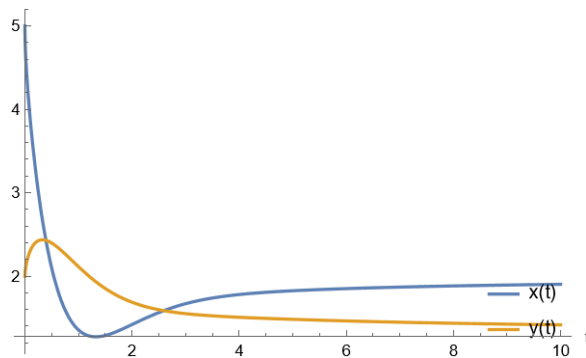
Fonte: A autora.

Figura 5.48: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.6$ e $\beta = 0.7$.



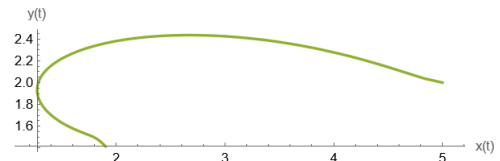
Fonte: A autora.

Figura 5.49: Modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.7$.



Fonte: A autora.

Figura 5.50: Plano de fases do modelo presa predador com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.7$.



Fonte: A autora.

Observando as figuras apresentadas anteriormente, nota-se que, à medida que o valor da soma $\alpha + \beta$ diminui, ocorre um aumento na velocidade de convergência das trajetórias para o ponto de equilíbrio do sistema. Para valores menores dessa soma, as trajetórias no plano de fases apresentam poucas oscilações e tendem a se estabilizar em um intervalo de tempo menor, indicando um efeito de amortecimento na dinâmica do sistema.

Além disso, a redução do valor de $\alpha + \beta$ suaviza variações abruptas nas populações e evita amplitudes excessivas nas oscilações populacionais, de modo que as soluções permanecem no semieixo positivo, deixando de assumir valores negativos. Tal comportamento é relevante, uma vez que valores negativos para as populações não possuem interpretação no contexto do modelo.

Esse comportamento está associado à memória introduzida pelas derivadas fracionárias, que faz com que a evolução do sistema dependa não apenas do estado atual, mas também do seu histórico, contribuindo para uma dinâmica mais regular. Como consequência, as trajetórias permanecem em regiões biologicamente admissíveis por intervalos de tempo mais longos e deixam de apresentar ciclos fechados persistentes, passando a se aproximar do equilíbrio de forma mais controlada quando comparadas ao modelo clássico.

Por fim, a análise dos gráficos sugere que valores menores de $\alpha + \beta$ favorecem a estabilidade do ponto de equilíbrio, reduzem oscilações e tornam o sistema menos sensível às condições iniciais, resultando em soluções mais estáveis e consistentes do ponto de vista matemático no modelo proposto.

Referências

- [1] CAMARGO, R. F. de; OLIVEIRA, E. C. de. *Cálculo Fracionário*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- [2] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, 2015.
- [3] TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. de. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2018.
- [4] TEODORO, G. S. *Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2019.
- [5] SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. São Paulo: McGraw-Hill, 1976.
- [6] OLIVEIRA, E. C. de. Sobre a clássica função de mittag-leffler. *Revista Matemática Universitária*, v. 1, 2019.
- [7] GORENFLO, R. et al. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. 3. ed. Berlim: Springer, 2014.
- [8] SPIEGEL, M. R. *Transformadas de Laplace*. São Paulo e Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1971.
- [9] ZILL, D. G. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. 10. ed. USA: Richard Stratton.
- [10] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. United States of America: McGraw Hill International Editions, 1976.
- [11] NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- [12] SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

-
- [13] KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [14] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Berlin: Springer, 2010.
- [15] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. United States of America: Academic Press, 1998.
- [16] MILICI, C.; DRAGANESCU, G.; MACHADO, J. T. *Introduction to Fractional Differential Equations*. Switzerland: Springer, 2019.
- [17] MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Canada: John Wiley Sons, Inc., 1993.
- [18] BRAUER, F.; NOHEL, J. A. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: W. A. Benjamin, 1969.
- [19] CAMARGO, R. F. de; OLIVEIRA, E. C. de; MONTEIRO, N. Z. *Equações Fracionárias: Métodos analíticos e numéricos*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2025.
- [20] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.
- [21] PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V.; BOTELHO, G. M. de A. *Fundamentos de Análise Funcional*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- [22] ROYDEN, H.; FITZPATRICK, P. *Real Analysis*. 4. ed. United States of America: Pearson, 2010.

Alguns Resultados de Análise

Este apêndice foi baseado nas referências [20] e [11].

A.1 Fórmula de Taylor

Definição A.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f \in C^n[a, b]$ quando sua n -ésima derivada existe e é contínua no intervalo $[a, b]$.

Definição A.2. Seja $f \in C^n[a, b]$ com $a \leq x_0 \leq b$. Definimos o Polinômio de Taylor de ordem n centrado em x_0 como:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Teorema A.3 (Fórmula de Taylor com Resto Integral). *Seja $f \in C^n[a, b]$ com $a \leq x_0 \leq b$. Então,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

A.2 Integrais Impróprias

A seguir apresentam-se definições de integrais impróprias.

- Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$ então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

- Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$ então

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

- Se f é uma função integrável em $(-\infty, +\infty)$ então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

- Se f é uma função integrável em $(a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

- Se f é uma função integrável em $[a, b)$ então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

- Se f é uma função integrável em $[a, b]$, exceto em c tal que $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Quando os limites acima existem, a integral é convergente. Caso contrário, a integral é divergente.

Os próximos resultados abordam alguns critérios para determinar a convergência de integrais impróprias.

Proposição A.4. *Seja f uma função integrável em $[a, x]$ para todo $x > a$. Então a integral imprópria $\int_a^\infty f(x) dx$ converge se $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge.*

Proposição A.5. *Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, \infty)$ para todo $x \in [a, \infty)$ e $0 < f < g$. Se $\int_a^\infty g(t) dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t) dt$ converge e $\int_a^\infty f(t) dt \leq \int_a^\infty g(t) dt$.*

Proposição A.6. *Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ e $0 < f < g$. Se $\int_a^b g(t) dt$ converge, então $\int_a^b f(t) dt$ converge e $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.*

Proposição A.7. *A integral $\int_0^\infty e^{-t} dt$ converge.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -(e^{-a} - e^0) = 1. \end{aligned}$$

□

Proposição A.8. A integral $\int_1^\infty t^\alpha dt$ converge se, e somente se, $\alpha < -1$.

Demonstração. Se $\alpha \neq -1$,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty t^\alpha dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a t^\alpha dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + 1} t^{\alpha+1} \Big|_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + 1} (a^{\alpha+1} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + 1} (0 - 1) = \frac{-1}{\alpha + 1}, & \text{se } \alpha + 1 < 0. \\ \infty, & \text{se } \alpha + 1 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Se } \alpha = -1, \int_1^\infty t^\alpha dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \log t \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \log a = \infty.$$

Portanto, o limite existe apenas quando $\alpha < -1$.

□

Proposição A.9. A integral $\int_0^1 t^\alpha dt$ converge se, e somente se, $\alpha > -1$.

Demonstração. Fazendo $t = \frac{1}{s} \Rightarrow dt = -s^{-2} ds$. Quando $t \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow 1 \Rightarrow s \rightarrow 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^\alpha dt &= \int_\infty^1 s^{-\alpha} (-s^{-2}) ds \\ &= - \int_\infty^1 s^{-\alpha} s^{-2} ds \\ &= \int_1^\infty s^{-\alpha-2} ds. \end{aligned}$$

Pela proposição A.8 temos que a integral converge se, e somente se, $\alpha - 2 < -1 \Rightarrow -\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > -1$.

□

Proposição A.10. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

Demonstração. A demonstração é uma consequência do Teorema de L'Hôpital.

□

Alguns Resultados de Análise Funcional e Teoria da Medida

Este apêndice foi baseado nas referências [21] e [22].

B.1 Espaço Normado

Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma **norma** em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

N1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é um **espaço normado**.

Uma **métrica** num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in M$:

M1. $d(x, x) = 0$.

M2. Se $x \neq y$, $d(x, y) > 0$.

M3. $d(x, y) = d(y, x)$.

M4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um **espaço métrico** é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Portanto, todo espaço normado é um espaço métrico com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$; a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$.

B.2 Espaço de Banach

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é uma **sequência de Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Um espaço métrico M é um **espaço métrico completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M .

Um espaço normado E é um **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo B.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo. O espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma do supremo: $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

Exemplo B.2. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$. O espaço $L_p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma p : $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Dados M e N espaços métricos, Uma função $f : M \rightarrow N$ chama-se **contração** quando existe c ($0 \leq c < 1$) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.

Sejam $f : M \rightarrow M$ e $x \in M$. Se $f(x) = x$ então x é um **ponto fixo** de f .

Teorema B.3 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Se M é um espaço de Banach, então toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo em M .*

B.3 Função Mensurável

Um conjunto E é um **conjunto mensurável** se, para qualquer conjunto A , vale que:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C),$$

onde m^* é a medida exterior de Lebesgue dada por:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(E_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\}.$$

Proposição B.4. *Seja f uma função definida em um domínio mensurável E . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. Para cada número real c , o conjunto $\{x \in E : f(x) > c\}$ é mensurável.
2. Para cada número real c , o conjunto $\{x \in E : f(x) \geq c\}$ é mensurável.
3. Para cada número real c , o conjunto $\{x \in E : f(x) < c\}$ é mensurável.
4. Para cada número real c , o conjunto $\{x \in E : f(x) \leq c\}$ é mensurável.

Cada uma dessas propriedades implica que, para cada número real estendido c , o conjunto $\{x \in E : f(x) = c\}$ é mensurável.

Uma função f , com valores nos números reais estendidos, definida em E , é uma **função mensurável no sentido de Lebesgue**, ou simplesmente **função mensurável**, se o seu domínio E é mensurável e se ela satisfaz uma das quatro condições da Proposição B.4.

Teorema B.5. [*Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*] Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em E . Suponha que exista uma função g que é integrável sobre E e domina $\{f_n\}$ em E no sentido de que $|f_n| \leq g$ em E para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $\{f_n\} \rightarrow f$, qtp em E , então f é integrável sobre E e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$.