



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Josué de Carvalho Oliveira

Números de Lucas e de Fibonacci: Propriedades e Conexões

**Rio Claro - SP
2023**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Números de Lucas e de Fibonacci: Propriedades e Conexões

Josué de Carvalho Oliveira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

**Rio Claro - SP
2023**

O48n Oliveira, Josué de Carvalho
Números de Lucas e de Fibonacci : Propriedades e Conexões /
Josué de Carvalho Oliveira. -- Rio Claro, 2023
79 p. : tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Números Especiais. 2. Números Notáveis. 3. Sequência de
Fibonacci. 4. Sequência de Lucas. 5. Teoria dos Números. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Este texto constitui um material completo e detalhado para aqueles que desejam iniciar estudos sobre números de Fibonacci. Além da abordagem, vale destacar a originalidade de demonstrações de diversos resultados, como, por exemplo, os dois teoremas apresentados na seção 5.2. Tais teoremas trazem resultados apresentados por Carlitz, mas sem uma demonstração matematicamente rigorosa. Também não pudemos encontrar na literatura nada semelhante com a demonstração que fizemos para o fato de $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$, desconsiderando a sequência de Lucas.

Potential impact of this research

This text constitutes a complete and detailed material for those who wish to start studies on Fibonacci numbers. In addition to the approach, it is worth highlighting the originality of demonstrations of various results, such as the two theorems presented in section 5.2. Such theorems bring results presented by Carlitz, but without a mathematically rigorous demonstration. Nor could we find in the literature anything similar to the proof we did for the fact that $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$, disregarding the Lucas sequence.

TERMO DE APROVAÇÃO

Josué de Carvalho Oliveira

NÚMEROS DE LUCAS E DE FIBONACCI: PROPRIEDADES E CONEXÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Orientador

Prof. Dr. João Peres Viera
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, IGCE.

Prof. Dr. José Antonio Salvador
Universidade Federal de São Carlos, DM.

Rio Claro, 10 de julho de 2023.

Dedico ao meu vô João que me ensinou que desistir não é uma opção.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, meu pai José Reis, minha mãe Cassia e minhas irmãs Sarah e Esther por todo o apoio que me deram durante o mestrado me ajudando a nunca desistir e a superar meus próprios limites.

Agradeço ao professor doutor Lucas Antonio Caritá que me proporcionou chegar até aqui com seu apoio desde a época da minha graduação e ensinando o caminho a se seguir no meio acadêmico.

Agradeço a Unesp de Rio Claro por me proporcionar uma experiência de ensino impecável com uma ótima estrutura e excelentes professores.

Agradeço também ao grupo GPMCC por me acolher e fornecer o espaço para estudos.

Agradeço à todos que também contribuíram durante esse percurso, como meu amigo Gabriel que me acompanha desde a graduação, entre outros, guardo todos com carinho em meu coração.

Por fim agradeço a mim, por não ter desistido não importando as dificuldades.

*A matemática é o alfabeto que
Deus usou para escrever o Universo*
Galileu Galilei

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar as sequências de Fibonacci e de Lucas, explorando suas co-relações e semelhanças no contexto da Teoria dos Números. Para isso, utilizaremos como principal ferramenta o desenvolvimento teórico, através de demonstrações de propriedades e teoremas envolvendo tais sequências. Abordaremos inicialmente conceitos básicos sobre Teoria dos Números essenciais para o melhor entendimento do texto, em seguida estudaremos as sucessões partindo de uma perspectiva histórica e algébrica.

Palavras-chave: Números Especiais. Números Notáveis. Sequência de Fibonacci. Sequência de Lucas. Teoria dos Números.

Abstract

This work studies the Fibonacci and Lucas sequences, exploring their connections and similarities in the context of Number Theory. For this, we will use theoretical development as the main tool, performing demonstrations of properties and theorems involving such sequences. We will study, in the first pages, basic concepts about Number Theory essential for a better understanding of the text, then we will study the sequences from a historical and algebraic perspective.

Keywords: Special Numbers. Notable Numbers. Fibonacci Sequence. Lucas Sequence. Number Theory.

Lista de Figuras

3.1	Primeiros termos da sequência de Fibonacci.	27
3.2	Segmento de reta $\overline{AB}$, cortado pelo ponto C com $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$	28
4.1	Primeiros termos da sequência de Lucas.	55
5.1	Comparação entre os primeiros números de Fibonacci e de Lucas.	65

Lista de Tabelas

3.1	Casais de coelhos nos primeiros 6 meses no problema de Fibonacci.	25
3.2	Casais de coelho após um ano no problema de Fibonacci.	26
3.3	Cálculo de $\left F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right $ para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$	33
4.1	Cálculo de $ L_n - \alpha^n $ para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10, \dots\}$	57

Sumário

1	Introdução	13
2	Conceitos Preliminares	16
2.1	O conjunto $\mathbb{Z}$	16
2.2	Indução matemática	16
2.3	Divisibilidade	18
2.4	Congruência módulo m em $\mathbb{Z}$	23
3	Números de Fibonacci	25
3.1	A origem da sequência de Fibonacci	25
3.2	A Equação Quadrática de Fibonacci e o Teorema de Binet	28
3.3	Particularidades combinatoriais	34
3.4	Propriedades gerais dos números de Fibonacci	39
3.5	Fibonacci e divisibilidade	47
3.6	Expandindo a sequência de Fibonacci para índices inteiros negativos	52
4	Números de Lucas	55
4.1	A sequência de Lucas	55
4.2	Propriedades gerais dos números de Lucas	57
4.3	Expandindo a sequência de Lucas para índices inteiros negativos	63
5	Conexões	65
5.1	Conexões gerais	65
5.2	Outros teoremas de Leonard Carlitz	75
6	Considerações Finais	77
	Referências	79

1 Introdução

Leonardo Fibonacci contribuiu com grandes feitos para a matemática mundial, porém pouco se sabe sobre sua história. Nascido em 1170, em algum lugar perto da Itália, seu pai, Guilielmo Bonacci, foi mercador de Pisa, o que, na época, era uma posição importante na sociedade, pois a Itália era um grande centro de importações de mercadorias e, com o fim da Idade das Trevas, os países europeus aumentaram seu interesse em comércio para aprimorar o desenvolvimento do país. Com isso, Fibonacci cresceu com muita exposição à importância dos números [1].

Quando adolescente, se mudou para Bugia, onde seu pai estava vivendo a fim de trabalhar em uma alfândega representando Pisa e a Itália. Naquela época, localizada onde hoje está a Algeria, Bugia possuía uma grande influência árabe, que tinha uma vantagem em desenvolvimento científico ao ser comparada com a Itália. Fibonacci começou seus estudos para se tornar um mercador, assim como seu pai, e teve o primeiro contato com os numerais Hindi (1 à 9) e com o numeral arábico (0). Logo reconheceu que esse sistema numérico era mais eficiente quando comparado ao usado na maioria da Europa na época (romano). Além disso, Fibonacci não teve sua educação restrita à clássica matemática grega, mas também teve contato com a matemática indiana e árabe, formando uma base sólida para seus futuros estudos.

Fibonacci escreveu diversos livros durante a sua vida, dentre eles o *Liber Abaci*, que foi sua maior contribuição para a era medieval. Nele, Fibonacci descreve as vantagens do sistema hindu-arábico, que facilitava os cálculos das operações básicas, além de simplificar o registro dos cálculos por descomplicar a escrita. *Liber Abaci* teve sua primeira publicação em 1202, em Latim, e foi revisado em 1228 [2]. Os primeiros sete capítulos do livro foram uma introdução e descrição dos cálculos utilizando o sistema, além de comparar com o romano para exemplificar a simplificação, já os outros quatro capítulos foram dedicados a explicar como o sistema hindu-Árábico facilitaria as transações realizadas na época [1].

No livro, Fibonacci introduziu duas ideias sobre álgebra que se tornaram essenciais nos dias de hoje, e que desde o século *XVI* são usadas constantemente. Essas ideias consistem do fato de utilizar letras para representar variáveis em problemas matemáticos e também a utilização dos números negativos. Tais contribuições e o cenário no qual a Europa se encontrava naquela época, fizeram com que o livro *Liber Abaci* fosse altamente aceito por toda a sociedade intelectual.

Fibonacci é lembrado até os dias de hoje pela sequência numérica que carrega seu nome, que surgiu através de um problema sobre a reprodução de coelhos, no qual, em seu livro *Liber Abaci*, propôs uma solução que gerou a sua sequência.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Nessa sucessão o n -ésimo termo é a soma dos dois termos anteriores, sendo os dois primeiros 0 e 1.

Com o avanço da ciência durante o período renascentista, foram encontradas várias representações da sequência de Fibonacci em plantas, nos seres humanos, na natureza, nas artes e na arquitetura, pois a humanidade começou a ter um olhar analítico mais aprofundado quanto à natureza ao seu redor.

A sequência de Fibonacci também está presente no reino animal. Ao observarmos a árvore genealógica de uma abelha macho (que nasce de ovos não fertilizados), notamos que essa abelha possui apenas uma mãe (a rainha). As fêmeas, por sua vez, tem um pai e uma mãe, visto que nascem dos ovos fertilizados. Consequentemente, a abelha macho terá 3 avós, 5 bisavós e assim seguirá para todas as gerações. A geração desta abelha obedecerá o padrão da sequência de Fibonacci e cada geração terá um número de Fibonacci.

Outro exemplo presente no reino animal, e também o mais famoso, é a aparição da sequência de Fibonacci na espiral presente na concha de alguns animais marinhos, como os do gênero *nautilus*. Conforme eles crescem, precisam de mais espaço dentro da concha, assim ela cresce em proporções semelhantes à proporção áurea, que está, de algum modo, relacionada à sequência de Fibonacci.

Alguns anos depois da sequência de Fibonacci ser apresentada, Lucas propôs outra sucessão derivada da de Fibonacci, que até hoje carrega seu nome.

François Édouard Anatole Lucas nasceu em abril de 1842 em Amiens, na França. Estudou em uma das mais prestigiadas instituições de ensino superior, a *École Normale Supérieure*. Assim que se graduou, trabalhou como assistente de laboratório em Paris e logo em seguida serviu o exército na guerra franco-prussiana. Logo após, começou a trabalhar como professor no ensino médio e também publicou vários artigos durante sua vida [3]. Muitos de seus trabalhos tinham continuações planejadas que nunca foram feitas, como um segundo volume para seu artigo *Théorie des nombres*. Foi nesse estudo que Lucas se deparou e estudou a sequência de Fibonacci [4]. Sua sequência

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

segue a mesma propriedade dos números de Fibonacci, onde o n -ésimo termo é igual a soma de seus dois anteriores, porém o que difere dos números de Fibonacci é o início onde o primeiro termo é igual a 2 e o segundo termo é igual a 1.

As sequências encontradas por Lucas e Fibonacci possuem diversas propriedades matemáticas interessantes que podemos observar, como, por exemplo, a propriedade que a soma de 10 números consecutivos de Fibonacci será sempre divisível por 11 [1]:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$$

$$\frac{143}{11} = 13$$

ou

$$89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4181 + 6675 = 17567$$

$$\frac{17567}{11} = 1597$$

Outra propriedade interessante, mas dessa vez envolvendo os números de Lucas, é que a multiplicação dos n primeiros números de Lucas é maior que $n!$, por exemplo:

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

e

$$84 > 24$$

Mais uma propriedade que vale destacar é que a multiplicação dos números de Lucas é maior que o fatorial de seus índices, observe que, tomando $n = 5$, temos:

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 11 > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$924 > 120$$

Os números de Lucas também possuem várias propriedades interessantes junto aos números de Fibonacci que demonstraremos durante esse trabalho. Podemos citar aqui exemplos, como a propriedade que um número de Lucas será a soma do seu antecessor em Fibonacci com o seu sucessor em Fibonacci, sendo assim observe que:

$$1 = 0 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$4 = 1 + 3$$

$$\vdots$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Algumas propriedades podem parecer triviais, porém suas demonstrações possuem detalhes que esse trabalho visa abordar.

Neste texto, estudaremos diversas propriedades envolvendo os números de Lucas e Fibonacci. No primeiro capítulo, estudaremos alguns assuntos preliminares para o desenvolvimento do trabalho, começando desde os conceitos de Indução Matemática, demonstrando alguns teoremas que serão úteis no decorrer do texto, logo em seguida estudaremos divisibilidade e alguns de seus teoremas (para a redação deste capítulo foram consultadas [5], [6] e [7]). No segundo capítulo, estudaremos os números de Fibonacci, começando desde a sua origem, a equação quadrática e o Teorema de Binet, e demonstraremos algumas propriedades envolvendo apenas os números de Fibonacci (para a redação foram consultadas [2], [7], [8], [9], [10], [11] e [12]). No terceiro capítulo, estudaremos a origem da sequência de Lucas e propriedades que envolvem apenas estes números (para a redação foram consultadas [2], [7] e [9]). Por fim, no último capítulo, estudaremos algumas propriedades que decorrem das conexões entre as duas sequências (para a redação consultadas [2], [7], [8] e [9]).

2 Conceitos Preliminares

2.1 O conjunto $\mathbb{Z}$

Durante esse capítulo apresentaremos alguns conceitos que serão úteis para o decorrer do trabalho. Dados dois números naturais a e b , a diferença $b - a$ só é definida para $b \geq a$. O conceito de números inteiros surgiu da necessidade de definirmos $b - a$ nos casos em que $a > b$. Sendo assim, o *conjunto dos números inteiros*, denotado pela letra $\mathbb{Z}$, trouxe tal solução. Seus termos podem ser apresentados ordenadamente da seguinte forma: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.

Com isso, temos os números inteiros negativos, o 0 e os números inteiros positivos (os naturais $\mathbb{N}$), formando todo o conjunto $\mathbb{Z}$. Para esse texto, assumimos que o leitor tenha familiaridade com o conjunto $\mathbb{Z}$, além de outros conjuntos numéricos. Um conceito que vale destacar em $\mathbb{Z}$ é o seguinte axioma:

Axioma 2.1. (Princípio da Boa Ordenação): Se S é um conjunto não vazio de inteiros positivos, então S tem um menor elemento.

Com o Axioma 2.1 podemos introduzir um teorema muito forte que será usado em muitas demonstrações no decorrer desse trabalho.

2.2 Indução matemática

Teorema 2.2. (Princípio da Indução Matemática): Suponha que, para cada n inteiro positivo, temos uma proposição $P(n)$. Suponha também que para $n = 1$ a proposição seja verdadeira e que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ também é verdadeira. Logo $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro positivo.

Demonstração. Vamos supor que o Teorema 2.2 seja falso e que S seja o conjunto de números inteiros positivos n tal que $P(n)$ seja falsa. Observe que S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, então pelo Axioma 2.1, S tem um menor elemento, o qual denotaremos por k . Por hipótese, $P(1)$ é verdadeira. Note que $k > 1$ e $P(k - 1)$ é verdadeira, uma vez que k é o menor inteiro tal que $P(k)$ é falsa.

Mas, também por hipótese, se $P(n)$ é verdadeira, $P(n + 1)$ também o é. Então, sendo $P(k - 1)$ verdadeira, tem-se verdadeiro $P(k)$.

Temos uma contradição. Portanto o teorema é válido. $\square$

Observação 2.3. Para demonstrar a validade de uma proposição $P(n)$, para inteiros positivos, usando o Princípio da Indução Matemática visto no Teorema 2.2, podemos nos organizar em três etapas:

1. Provar a validade de $P(1)$.
2. Supor que $P(n)$ seja verdadeira.
3. Usando a etapa (2), provar que $P(n + 1)$ é verdadeira.

A suposição feita na etapa (2) recebe o nome de Hipótese de Indução.

Usando esse resultado podemos demonstrar, por exemplo, o Teorema Binomial.

Teorema 2.4. (Teorema Binomial): *Sejam a e b números reais e n um número inteiro positivo. Então*

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Demonstração. Vamos provar por Indução Matemática (Teorema 2.2).

1. Para $n = 1$, temos $a + b = a + b$. Logo é verdadeiro o teorema nesse caso.
2. Suponha que o teorema seja válido para n , isto é:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

3. Para provar para $n + 1$, podemos aplicar propriedade de potência onde $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b)$ e assim chegamos em

$$(a+b)^{n+1} = \left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \right) (a+b)$$

Observe que se aplicarmos a distributiva nesse produto teremos uma soma de termos formados por um coeficiente multiplicado por $a^{n+1-k}b^k$ com $0 \leq k \leq n + 1$. Além disso, observe que os termos a^{n+1} e b^{n+1} possuem coeficiente 1. Já se analisarmos os termos $a^{n+1-k}b^k$, com $0 < k < n + 1$, o coeficiente será a soma $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$,

pois ele é formado por $\left(\binom{n}{k} a^{n-k}b^k \right) a$ e $\left(\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}b^{k-1} \right) b$. Portanto podemos manipular da seguinte forma

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}$$

Manipulando essa equação chegaremos em

$$\frac{n!(n+1)}{((n+1)-k)!k!} = \binom{n+1}{k}$$

Ou seja,

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}$$

Demonstrando assim que o teorema é válido.

□

Aproveitando o conteúdo do teorema anterior, introduziremos mais dois resultados que usaremos ao longo do texto.

Propriedade 2.5. Sejam k e n inteiros positivos, então $\binom{k}{0} = \binom{n}{0} = 1$.

Demonstração. Basta notar que

$$\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = \frac{k!}{k!} = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \binom{n}{0}.$$

□

Teorema 2.6. (Relação de Stifel): Dados k e n inteiros positivos com $n > k \geq 1$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Demonstração. De fato, note que:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}. \end{aligned}$$

para $n-k-1 \geq 0$ e $k-1 \geq 0$.

Sendo assim, observe que $k!(n-k)! = k(k-1)!(n-k)!$ e $k!(n-k)! = k!(n-k)(n-k-1)!$, com isso podemos afirmar que $k!(n-k)!$ é um múltiplo comum dos denominadores das frações acima, sendo assim

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

□

2.3 Divisibilidade

Agora vamos introduzir o conceito de divisibilidade.

Teorema 2.7. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então existem inteiros únicos r e q tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Demonstração. Primeiro provemos a existência de q e r . Para isso tomemos o conjunto $S = \{a - |b|k : k \in \mathbb{Z} \text{ e } a - |b|k \geq 0\}$ que é não vazio.

Pelo Princípio da Boa Ordenação (Axioma 2.1), S possui um menor elemento que podemos tomar como $r = a - |b|q$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Por construção $r \geq 0$. Provemos que $r < |b|$. Para isso suponha que $r \geq |b|$. Então:

$$\begin{aligned} a - |b|q \geq |b| &\Rightarrow a - |b|q - |b| \geq 0 \\ &\Rightarrow a - (q+1)|b| \geq 0 \\ &\Rightarrow a - (q+1)|b| \in S \end{aligned}$$

Todavia, como r é o menor elemento de S :

$$\begin{aligned} r \leq a - (q+1)|b| &\Rightarrow a - |b|q \leq a - (q+1)|b| \\ &\Rightarrow a - |b|q \leq a - |b|q - |b| \\ &\Rightarrow a \leq a - |b| \end{aligned}$$

o que é impossível, uma vez que $|b| > 0$.

Desse modo $r < |b|$ e existem $r, q \in \mathbb{Z}$, tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$. O sinal de q se ajusta conforme o sinal de b .

Para a unicidade, vamos supor que existam $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ onde $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1 < |b|$ e $0 \leq r_2 < |b|$. Então $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Assim, $|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$. Como r_1 e r_2 são menores que $|b|$, então $|r_2 - r_1| < |b|$. Dessa forma:

$$|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < |b| \Rightarrow |b||q_1 - q_2| < |b| \Rightarrow 0 \leq |q_1 - q_2| < 1$$

Dado que $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, a única possibilidade é $q_1 - q_2 = 0$, ou seja $q_1 = q_2$. Então:

$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow b \cdot 0 = r_2 - r_1 \Rightarrow 0 = r_2 - r_1 \Rightarrow r_2 = r_1$$

Portanto $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$. □

Podemos chamar q de quociente e r de resto. Agora podemos estudar a divisibilidade entre dois inteiros, que é o caso quando $r = 0$.

Definição 2.8. Sejam a e b inteiros, dizemos que a divide b (ou b é múltiplo de a) se existe algum inteiro c tal que $b = ac$. Podemos escrever $a|b$.

Lema 2.9. Considere $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Se $a | b$ e $b | c$, então $a | c$
2. Se $a | b$ e $b \neq 0$, então $a \leq |b|$
3. Se $a | b$ e $b | c$, então $a | (bu + cv)$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{Z}$

Demonstração. 1. Se $a | b$ e $b | c$, podemos dizer que existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$b = aq_1 \text{ e } c = bq_2$$

Com isso basta substituírmos b na segunda equação, para obtermos:

$$c = (aq_1)q_2 \Rightarrow c = aq_1q_2$$

Como $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, podemos dizer que $q_1q_2 \in \mathbb{Z}$ e podemos chamar de q_3 , com isso:

$$c = aq_3$$

Ou seja $a \mid c$.

2. Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então existe $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tal que:

$$b = aq \Rightarrow |b| = |aq| \geq a$$

3. Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$b = aq_1 \text{ e } c = bq_2$$

Já provamos anteriormente que se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$ com isso podemos afirmar que existe $q_3 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$c = aq_3$$

Tomemos então $b = aq_1$, $c = aq_3$ e multipliquemos as equações em ambos os lados por u e v respectivamente, onde $u, v \in \mathbb{Z}$. Com isso obtemos:

$$bu = aq_1u \text{ e } cv = aq_3v$$

Agora basta somarmos as duas equações, para obter:

$$bu + cv = aq_1u + aq_3v \Rightarrow bu + cv = a(q_1u + q_3v)$$

Observe que $q_1, q_2, u, v \in \mathbb{Z}$, logo $q_1u + q_3v = q_4 \in \mathbb{Z}$, por fim:

$$bu + cv = aq_4$$

Logo $a \mid bu + cv$. □

Além disso podemos definir o máximo divisor comum (mdc) entre dois inteiros.

Definição 2.10. Sejam a e b inteiros com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. O máximo divisor comum de a e b é o maior inteiro positivo c tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Podemos escrever $(a, b) = c$.

Lema 2.11. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que

1. $(a, b) = (-a, b)$
2. $(a, 0) = |a|$ e $(0, b) = |b|$
3. Se $a \mid b$ então $(a, b) = |a|$.

Demonstração. 1. Seja $(a, b) = d$, então $d \mid a$ e $d \mid b$. Como $d \mid a$ sabemos que $d \mid -a$. Se existisse $d' > d$ tal que $d' = (-a, b)$ então $d' \mid a$ e $d' \mid b$, $d' = (-a, b)$ e d não seria o máximo divisor comum de a e b . Absurdo! Logo d é o máximo divisor comum entre $-a$ e b .

2. Pela Definição 2.8, todo inteiro divide o 0. Então $(a, 0)$ deve ser o maior inteiro positivo que divide a , ou seja, $|a|$.

3. Como $a \mid b$, temos que $b = ma$, onde $m \in \mathbb{Z}$. Note que $|a| \mid a$ e $|a| \mid ma$. Então $|a| \mid a$ e $|a| \mid b$. Se existir outro inteiro d tal que $d \mid a$ e $d \mid b$, obrigatoriamente $d \mid |a|$. Portanto $d \leq |a|$. Assim $|a|$ é o máximo divisor comum de a e b . $\square$

Podemos agora usar o mdc de dois inteiros a e b para provarmos que existe uma combinação linear entre esses números que resulta no mdc.

Teorema 2.12. *Sejam a e b inteiros diferentes de zero simultaneamente. Então existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, b) = au + bv$. Além disso, (a, b) é o menor inteiro positivo que pode ser escrito dessa maneira.*

Demonstração. Seja $S = \{au + bv : u, v \in \mathbb{Z}, au + bv > 0\}$.

Pelo Axioma 2.1, existe um elemento $c \in S$, tal que $c = au_1 + bv_1$ com $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$, que é o menor inteiro positivo em S . Provemos que $(a, b) = c$ ocorre.

Pelo Teorema 2.7, podemos escrever que $a = cq + r$, com $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < c$. Agora suponha que $r \neq 0$, então

$$r = a - cq = a - (au_1 + bv_1)q = a(1 - u_1q) + b(-v_1q)$$

com isso $r \in S$, mas $r < c$ e isso contradiz c ser o menor inteiro positivo de S . Sendo assim, $r = 0$, por fim $c \mid a$. Analogamente $c \mid b$. Assim c é divisor comum de a e b .

Suponha que $d \mid a$ e $d \mid b$. Pelo Lema 2.9, $d \mid c$ e por isso $d \leq c$. Então c é o máximo divisor comum de a e b . $\square$

Um caso particular de mdc nos traz uma definição importante.

Definição 2.13. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que eles são primos entre si se $(a, b) = 1$.

Corolário 2.14. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então a e b são primos entre si se, e somente se, existem inteiros u e v tais quais $au + bv = 1$.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.12, considerando $(a, b) = 1$. $\square$

Corolário 2.15. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $(a, b) = 1$ e $a \mid bc$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.14, podemos afirmar que existem $u, v \in \mathbb{Z}$, tais que $au + bv = 1$, multiplicando ambos os lados da equação por c , teremos:

$$au + bv = 1 \Rightarrow c(au + bv) = c \Rightarrow auc + bvc = c$$

Temos, por hipótese, que $a \mid bc$ e, certamente, $a \mid a$.

Sendo assim, pelo Lema 2.9, temos que $a \mid (auc + bvc)$ e por fim como $auc + bvc = c$, então $a \mid c$. $\square$

Propriedade 2.16. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $b \mid c$, então $(a + c, b) = (a, b)$.

Demonstração. Como $b \mid c$, então $c = mb$, onde $m \in \mathbb{Z}$.

Denote $d = (a, b)$. Então $d \mid a$ e $d \mid b$, ou seja, $d \mid a$ e $d \mid mb$, então $d \mid a$ e $d \mid c$. Dessa forma, $d \mid (a + c)$ e $d \mid b$. Portanto d é divisor comum de $a + c$ e b .

Se d' também é divisor comum de $a + c$ e b , isto é, $d' \mid (a + c)$ e $d' \mid b$, então, $d' \mid (a + mb)$ e $d' \mid b$. Dessa forma, d' divide toda combinação linear de $a + mb$ e b , em particular, $d' \mid (a + mb - mb)$, ou seja, $d' \mid a$.

Como $d' \mid a$ e $d' \mid b$ onde $d = (a, b)$, segue que $d' \mid d$ e assim d é o máximo divisor comum de $a + c$ e b .

Portanto $(a, b) = d = (a + c, b)$. $\square$

Propriedade 2.17. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $(a, c) = 1$, então $(a, bc) = (a, b)$.

Demonstração. Denote $d = (a, b)$. Então $d \mid a$ e $d \mid b$, ou seja, $d \mid a$ e $d \mid bc$. Dessa forma, d é divisor comum de a e bc .

Se d' também é divisor comum de a e bc , então $d' \mid a$ e $d' \mid bc$. Como $(a, c) = 1$ pelo Corolário 2.15 $d' \mid b$. Assim $d' \mid a$ e $d' \mid b$. Como $d = (a, b)$, segue que $d' \mid d$ e assim, d é máximo divisor comum de a e bc .

Portanto $(a, b) = d = (a, bc)$. □

Por fim podemos falar de números primos, começando pela Definição 2.18.

Definição 2.18. Um número inteiro $p > 1$ é chamado de primo se seus únicos divisores positivos são 1 e p . Um inteiro $n > 1$ que não é primo é chamado de composto.

Teorema 2.19. Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$ com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração. Se p é primo e $p \mid ab$, obviamente $(p, a) \mid p$, ou seja, $(p, a) = 1$ ou $(p, a) = p$.

Se $(p, a) = p$, como $(p, a) \mid a$, então $p \mid a$. Se $(p, a) = 1$ e $p \mid ab$, pelo Corolário 2.15 segue que $p \mid b$. De todo modo $p \mid a$ ou $p \mid b$. □

Por fim, temos outro corolário importante.

Corolário 2.20. Seja $p \in \mathbb{Z}$ primo e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$ então $p \mid a_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Como $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, pelo Teorema 2.19 temos que $p \mid a_1$ ou $p \mid a_2 a_3 \dots a_n$, se $p \mid a_1$ então o corolário está demonstrado. Caso $p \mid a_2 a_3 \dots a_n$ basta repetir o processo para $p \mid a_3 a_4 \dots a_n$ ou $p \mid a_2$. Repetindo esse processo $n - 1$ vezes chegaremos em $p \mid a_{(n-1)}$ ou $p \mid a_n$ garantindo assim que algum termo será divisível por p , ou seja, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ teremos $p \mid a_i$. □

Teorema 2.21. Todo inteiro $m \geq 2$ é um número primo ou tem a forma $m = p_1 \dots p_n$, para certos inteiros primos $p_1, \dots, p_n$, com $n \geq 2$. Ou seja, cada inteiro, a partir de 2, é um número primo ou um produto de fatores primos.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração desse teorema por indução.

1. Se $m = 2$.

Então sabemos que os únicos números naturais que dividem 2, são 2 e 1, ou seja $1 \mid 2$ e $2 \mid 2$, com isso 2 é primo.

2. Vamos supor que para $k \geq 2$, com $k \in \mathbb{Z}$, todo inteiro m , com $2 \leq m \leq k$, seja primo ou se decompõe em fatores primos.

3. Vamos demonstrar para $k + 1$.

Se $k + 1$ é primo então já satisfaz o Teorema.

Se $k + 1$ não é primo, logo $k + 1$ é composto. Então existem inteiros positivos a e b , com $1 < a < k + 1$ e $1 < b < k + 1$, tais que $k + 1$ se fatora da seguinte forma: $k + 1 = ab$. Como $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$, pela hipótese de indução, os inteiros a e b são primos ou se decompõem em um produto de fatores primos.

Sendo assim, como $k + 1 = ab$ e a e b são primos ou se decompõem em fatores primos, então $k + 1$ se decompõe em fatores primos.

□

Teorema 2.22. (Euclides) *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que exista uma quantidade n finita de números primos. Seja S um subconjunto dos naturais, tal que seus elementos sejam todos os n números primos, ou seja, $S = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$. Vamos provar que existe um número primo que não está em S .

Consideremos o número inteiro positivo

$$a = p_1 \dots p_n + 1$$

Observe que a é um número inteiro positivo maior que cada um dos fatores primos $p_1, \dots, p_n$.

Se a é primo, então já encontramos um número primo maior que todos os outros que não pertence a S .

Se a não é primo, pelo Teorema 2.21, ele possui algum fator primo p , tal que $p \mid a$, se $p = p_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então $p \mid p_1 \dots p_n$. Sendo assim $p \mid (a - p_1 \dots p_n)$, porém $a - p_1 \dots p_n = 1$, com isso $p \mid 1$, contradizendo assim a hipótese de que p é primo.

Sendo assim, o inteiro a tem um fator primo diferente dos primos $p_1, \dots, p_n$, ou seja p não pertence a S . Portanto, S não pode ser finito. □

2.4 Congruência módulo m em $\mathbb{Z}$

Definição 2.23. Dados três inteiros a , b e m , dizemos que a é congruente a b módulo m e denotamos $a \equiv b \pmod{m}$, se m divide $a - b$.

Observação 2.24. Sejam $m \in \mathbb{Z}$ e a, b inteiros quaisquer. Temos que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se $m \mid (a - b) \Leftrightarrow a - b = xm$, para algum $x \in \mathbb{Z}$. Como x é inteiro, podemos dizer que para $-m$ a propriedade vai se manter, ou seja:

$$a \equiv b \pmod{-m} \Leftrightarrow -m \mid (a - b) \Leftrightarrow a - b = x(-m).$$

Com isso, a congruência módulo m e módulo $-m$ são equivalentes.

Proposição 2.25. *Sendo m um inteiro, a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, ou seja, satisfaz às três seguintes propriedades:*

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a \pmod{m}$. (Reflexiva)
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$. (Simétrica)
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$. (Transitiva)

Demonstração. Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$.

1. Para qualquer $m \in \mathbb{Z}$, temos que $m \mid 0$. Com isso, basta observar que $a - a = 0$ e $m \mid (a - a)$, o que implica que $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$, dessa forma $m \mid (b - a)$, ou seja, $b \equiv a \pmod{m}$.

3. Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$, logo $m \mid [(a - b) + (b - c)] \Rightarrow m \mid (a - c)$, sendo assim, $a \equiv c \pmod{m}$.

□

Proposição 2.26. *Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$ fixado:*

1. *Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.*
2. *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.*
3. *Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $ac \equiv bc \pmod{m}$.*
4. *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.*

Demonstração. Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$ fixado.

1. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$. Sendo assim, podemos somar zero à diferença de a e b que não alteraremos o resultado, logo $m \mid (a - b) + 0$. Porém, $c - c = 0$ e, com isso, $m \mid (a - b) + (c - c)$, o que implica $m \mid (a + c) - (b + c)$. Logo, $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
2. Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$ e $m \mid (c - d)$. Logo, $m \mid [(a - b) + (c - d)]$ e assim $m \mid [(a + c) - (b + d)]$, ou seja, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
3. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$. Sendo assim, m também dividirá qualquer múltiplo de $(a - b)$, logo $m \mid (a - b)c$, o que implica que $m \mid (ac - bc)$, ou seja, $ac \equiv bc \pmod{m}$.
4. Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então, pelo item anterior, temos que $ac \equiv bc \pmod{m}$ e $bc \equiv bd \pmod{m}$. Sendo assim, pela transitividade, temos que $ac \equiv bd \pmod{m}$.

□

Proposição 2.27. *Sejam a, b, c e m inteiros com $m \geq 2$. Se $ac \equiv bc \pmod{m}$, com c e m sendo primos entre si, então $a \equiv b \pmod{m}$.*

Demonstração. Se $ac \equiv bc \pmod{m}$, então $m \mid (ac - bc)$. Logo, $m \mid (a - b)c$. Porém $(c, m) = 1$. Assim $m \mid (a - b)$ e com isso $a \equiv b \pmod{m}$.

□

Proposição 2.28. *Sejam a, b e m inteiros com $m \geq 2$. Então:*

1. *Se r é resto da divisão de a por m , então $a \equiv r \pmod{m}$.*
2. *Se $a \equiv r \pmod{m}$ e $0 \leq r < m$, então r é o resto da divisão de a por m .*
3. *$a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se os restos das divisões de a e b por m são iguais.*

Demonstração. 1. Sabemos que $a = mq + r$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, $a - r = mq$, ou seja $m \mid (a - r)$, com isso $a \equiv r \pmod{m}$.

2. Se $a \equiv r \pmod{m}$, temos que $a - r = mq$, para algum inteiro q . Sendo assim, $a = mq + r$, com r e q inteiros e $0 \leq r < |m| = m$. Pelo Teorema 2.7, temos que r é o resto da divisão de a por m , visto que o resto e o quociente são únicos.
3. Seja r o resto da divisão de a por m , pelo item 1, temos que $a \equiv r \pmod{m}$. Como $a \equiv b \pmod{m}$, pela reflexibilidade e transitividade, temos que $b \equiv r \pmod{m}$. Como $0 \leq r < m$, pelo item 2, r é o resto da divisão de b por m .

□

3 Números de Fibonacci

3.1 A origem da sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um dos maiores matemáticos do século XIII. Também ficou conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa devido a sua cidade de origem (Pisa, Itália). Em Bugia iniciou seus estudos com um tutor que lhe apresentou o sistema de numeração hindu-arábico. Após muito estudo, Fibonacci escreveu, em 1202, o *Liber Abaci*, onde apresentou o sistema de numeração e a aritmética hindu-arábico para a Europa.

Fibonacci introduziu uma de suas maiores contribuições para a matemática, através do seguinte problema:

“Inicialmente existe um casal de coelhos em um recinto no primeiro dia de janeiro. Após um mês esse casal vai produzir mais um casal de coelhos e continuará a produzir em todo primeiro dia do mês subsequente. Além disso, todo novo casal levará um mês para amadurecer e a partir do segundo mês começará a produzir um novo casal por mês. Qual será a quantidade de coelhos após um ano?”

Denotemos os casais adultos por A e os casais ainda não aptos a reprodução por B. A Tabela 3.1 exibe os casais de coelhos nos 6 primeiros meses:

Data	Casais	Número de A's	Número de B's
1º de Janeiro	A	1	0
1º de Fevereiro	AB	1	1
1º de Março	ABA	2	1
1º de Abril	ABAAB	3	2
1º de Maio	ABAABABA	5	3
1º de Junho	ABAABABAABABA	8	5

Tabela 3.1: Casais de coelhos nos primeiros 6 meses no problema de Fibonacci.

O número de A's na Tabela 3.1 é sempre a soma do número de A's e do número de B's do mês anterior e isso acontecerá sempre em todos os meses subsequentes, logo podemos completar a tabela:

Data	Número de A's	Número de B's	Total de casais
1º de Janeiro	1	0	1
1º de Fevereiro	1	1	2
1º de Março	2	1	3
1º de Abril	3	2	5
1º de Maio	5	3	8
1º de Junho	8	5	13
1º de Julho	13	8	21
1º de Agosto	21	13	34
1º de Setembro	34	21	55
1º de Outubro	55	34	89
1º de Novembro	89	55	144
1º de Dezembro	144	89	233
1º de Janeiro	233	144	377

Tabela 3.2: Casais de coelho após um ano no problema de Fibonacci.

Considere no n -ésimo mês:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \text{Número de casais de coelhos adultos} \\
 B_n &= \text{Número de casais de coelhos ainda não aptos a reprodução} \\
 T_n &= \text{Total de casais de coelhos}
 \end{aligned}$$

Da Tabela 3.2, se percebe as seguintes relações:

- $B_{n+1} = A_n, n \geq 1$
- $A_{n+2} = A_{n+1} + B_{n+1}$ ou $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n, n \geq 1$
- $A_1 = 1, A_2 = 1$ e $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$ para $n \geq 2$.
- E, por fim, $T_n = A_n + B_n$

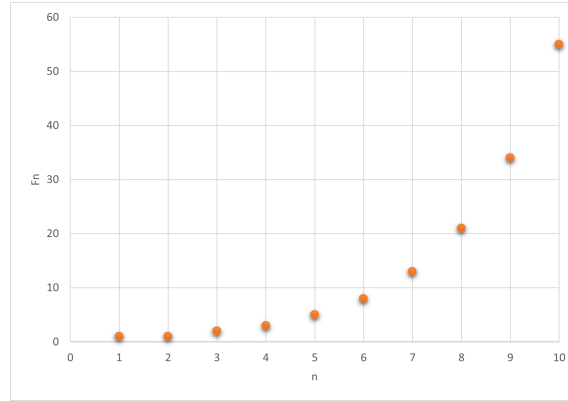
Pode-se observar que ao final do primeiro ano haverá 377 casais de coelhos, como nos mostra a Tabela 3.2. Note que é possível observar uma sequência gerada através dos números de A's, e com ela Fibonacci introduz a sua sequência.

Definição 3.1. É chamada de **Sequência de Fibonacci** ou **Números de Fibonacci** a sequência infinita de números naturais tais que $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

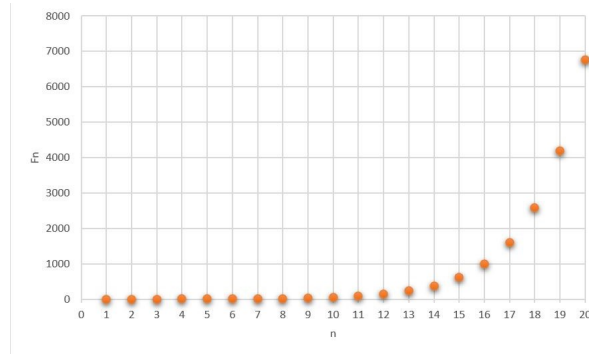
Diretamente dessa definição obtemos a sequência apresentada por Fibonacci no problema dos coelhos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

A Figura 3.1 apresenta graficamente os primeiros números de Fibonacci.



(a) Primeiros 10 números de Fibonacci em um gráfico de uma função discreta.



(b) Primeiros 20 números de Fibonacci em um gráfico de uma função discreta.

Figura 3.1: Primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Fonte: O Autor.

Observação 3.2. Em alguns casos é interessante iniciarmos a sequência de Fibonacci em 0, como na coluna do número de B's na Tabela 3.2. Sendo assim, quando houver necessidade, definiremos $F_0 = 0$.

Podemos generalizar a sequência de Fibonacci da seguinte forma:

Definição 3.3. Sejam p e q inteiros quaisquer e considere a sequência de números naturais tais que $H_1 = p$, $H_2 = q$ e $H_{n+1} = pF_{n-1} + qF_n$, com $n \geq 2$. Tal sequência

$$p, q, p + q, p + 2q, 2p + 3q, 3p + 5q, \dots$$

é chamada de **Sequência Generalizada de Fibonacci**.

Observação 3.4. Observe que a propriedade da sequência de Fibonacci original se mantém para a generalizada, ou seja,

$$\begin{aligned} H_{k-1} + H_k &= pF_{k-3} + qF_{k-2} + pF_{k-2} + qF_{k-1} \\ &= p(F_{k-3} + F_{k-2}) + q(F_{k-2} + F_{k-1}) \\ &= pF_{k-1} + qF_k = H_{k+1}. \end{aligned}$$

3.2 A Equação Quadrática de Fibonacci e o Teorema de Binet

Proporção áurea: Conforme representado na Figura 3.2, dado um segmento de reta qualquer $\overline{AB}$, podemos encontrar um ponto C (situado entre A e B) tal que o tamanho da maior parte do segmento (AC) é a média proporcional¹ entre o tamanho do segmento completo (AB) e o tamanho da menor parte (CB), com $AB \neq 0$, $AC \neq 0$ e $CB \neq 0$.



Figura 3.2: Segmento de reta $\overline{AB}$, cortado pelo ponto C com $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.
Fonte: O Autor.

Como o tamanho dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são diferentes de zero, podemos atribuir um valor $x > 0$ tal que $x = \frac{AB}{AC}$. Então

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}}.$$

Porém pela média proporcional temos que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, então

$$x = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Por fim encontramos a equação

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Multiplicando por x nos dois lados resulta em

$$x^2 = x + 1,$$

ou seja

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Produzindo a **Equação Quadrática de Fibonacci**.

Podemos então calcular as raízes dessa equação. Observe que

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5.$$

Portanto, as raízes dessa equação, as quais chamaremos de α e β , serão:

$$\alpha = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

¹Nessa seção utilizaremos o conceito de média proporcional onde, sendo a e b dois comprimentos de segmentos de retas quaisquer, a média proporcional é dada pela fórmula $x^2 = ab$, onde x é a média, ou ainda, por $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

e

$$\beta = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Por fim, essas raízes possuem algumas identidades sendo elas:

- $\alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1;$
- $\alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5};$
- $\alpha\beta = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 - 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1;$
- $1 - \alpha = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2 - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta;$
- $1 - \beta = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2 - 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha.$

A partir dessas considerações podemos demonstrar o Teorema de Binet.

Teorema 3.5. (Teorema de Binet): *Pode-se encontrar os termos da sequência de Fibonacci através da relação*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

onde $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci.

Demonstração. Para $n = 0$, temos que o teorema é válido, pois:

$$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0 = F_0.$$

Agora observemos que α e β são as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci, ou seja:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \text{ e } \beta^2 = \beta + 1.$$

Tomando a primeira igualdade podemos multiplicar os dois lados por α^{n-1} e na segunda por β^{n-1} , sendo assim

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \text{ e } \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}.$$

Basta, agora, subtrairmos as igualdades encontradas, resultando em:

$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \alpha^n - \beta^n + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}. \quad (3.1)$$

Por fim, observe que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, portanto, diferente de zero. Sendo assim, podemos dividir os dois lados da Equação (3.1) por $\alpha - \beta$:

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \quad (3.2)$$

Logo, (x_n) onde $x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ é uma sequência tal que, da Equação (3.2), $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Observe que:

$$x_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0,$$

$$x_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$

e

$$x_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1.$$

Portanto, $x_0 = 0$, $x_1 = x_2 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Da Definição 3.1 a sequência (x_n) é a própria sequência de Fibonacci e assim $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. $\square$

Proposição 3.6. *Considerando α e β as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci segue que $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$ para $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Provemos primeiro para $n \geq 0$ por indução sobre n .

1. Para $n = 0$, $\alpha^0 + \beta^0 = 2 \in \mathbb{Z}$
2. Para $n = 1$, $\alpha + \beta = 1 \in \mathbb{Z}$
3. Suponha que $\alpha^k + \beta^k \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ com $k < n$.
4. Note que, pelo Teorema 2.4:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^n &= \binom{n}{0} \beta^0 \alpha^n + \binom{n}{1} \beta^1 \alpha^{n-1} + \binom{n}{2} \beta^2 \alpha^{n-2} + \binom{n}{3} \beta^3 \alpha^{n-3} \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-3} \beta^{n-3} \alpha^3 + \binom{n}{n-2} \beta^{n-2} \alpha^2 \\ &+ \binom{n}{n-1} \beta^{n-1} \alpha^1 + \binom{n}{n} \beta^n \alpha^0. \end{aligned}$$

Isto é:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^n &= \alpha^n + \beta^n + \binom{n}{1} \beta \alpha^{n-1} + \binom{n}{2} \beta^2 \alpha^{n-2} + \binom{n}{3} \beta^3 \alpha^{n-3} \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-3} \beta^{n-3} \alpha^3 + \binom{n}{n-2} \beta^{n-2} \alpha^2 \\ &+ \binom{n}{n-1} \beta^{n-1} \alpha. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= (\alpha + \beta)^n - \binom{n}{1} \beta \alpha^{n-1} - \binom{n}{2} \beta^2 \alpha^{n-2} - \binom{n}{3} \beta^3 \alpha^{n-3} \\ &\quad - \dots - \binom{n}{n-3} \beta^{n-3} \alpha^3 - \binom{n}{n-2} \beta^{n-2} \alpha^2 - \binom{n}{n-1} \beta^{n-1} \alpha.\end{aligned}$$

Como $\alpha + \beta = 1$, então:

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= 1 - \binom{n}{2} \beta^2 \alpha^{n-2} - \binom{n}{3} \beta^3 \alpha^{n-3} - \dots - \binom{n}{n-3} \beta^{n-3} \alpha^3 \\ &\quad - \binom{n}{n-2} \beta^{n-2} \alpha^2 - \binom{n}{n-1} \beta^{n-1} \alpha.\end{aligned}$$

Denotemos $\alpha^n + \beta^n = 1 - X$, onde

$$\begin{aligned}X &= \binom{n}{2} \beta^2 \alpha^{n-2} + \binom{n}{3} \beta^3 \alpha^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-3} \beta^{n-3} \alpha^3 \\ &\quad + \binom{n}{n-2} \beta^{n-2} \alpha^2 + \binom{n}{n-1} \beta^{n-1} \alpha.\end{aligned}$$

Note que X possui $n - 1$ termos binomiais. Se n é ímpar, temos um número par de termos binomiais. Se n é par, temos um número ímpar de termos binomiais.

Além disso, lembre que

$$\binom{n}{l} = \binom{n}{n-l}, \quad (3.3)$$

onde $0 \leq l \leq n$. Então:

- Para n ímpar, agrupamos os termos de X em pares usando a Equação (3.3), temos:

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= 1 - \binom{n}{1} \beta \alpha (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) - \binom{n}{2} (\beta \alpha)^2 (\alpha^{n-4} + \beta^{n-4}) \\ &\quad - \binom{n}{3} (\beta \alpha)^3 (\alpha^{n-6} + \beta^{n-6}) - \dots = 1 - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (\alpha \beta)^i (\alpha^{n-2i} + \beta^{n-2i}),\end{aligned}$$

Onde $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ denota a parte inteira de $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

- Para n par, não é possível agrupar em pares os termos binomiais de X , sempre sobrar o termo do meio que é

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \alpha^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}}.$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \alpha^n + \beta^n &= 1 - \binom{n}{1} \beta \alpha (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) - \binom{n}{2} (\beta \alpha)^2 (\alpha^{n-4} + \beta^{n-4}) \\ &\quad - \binom{n}{3} (\beta \alpha)^3 (\alpha^{n-6} + \beta^{n-6}) - \dots - \binom{n}{\frac{n}{2}} \alpha^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}} - \dots \end{aligned}$$

Resultando em:

$$\alpha^n + \beta^n = 1 - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (\alpha \beta)^i (\alpha^{n-2i} + \beta^{n-2i}) - \binom{n}{\frac{n}{2}} \alpha^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}},$$

Onde $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ denota a parte inteira de $\frac{n-1}{2}$.

De todo modo, perceba que $\binom{n}{\frac{n}{2}}, \binom{n}{i} \in \mathbb{Z}$, $\alpha \beta = -1 \in \mathbb{Z}$ e, pela hipótese de indução, $\alpha^{\frac{n}{2}} + \beta^{\frac{n}{2}}, \alpha^{n-2i} + \beta^{n-2i} \in \mathbb{Z}$. Logo, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$ quando $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Mas, se $n < 0$, temos $n = -k$, onde k é um inteiro positivo. Assim:

$$\alpha^n + \beta^n = \alpha^{-k} + \beta^{-k} = \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta^k} = \frac{\alpha^k + \beta^k}{\alpha^k \beta^k} = \frac{\alpha^k + \beta^k}{(\alpha \beta)^k} \stackrel{\alpha \beta = -1}{=} (-1)^k (\alpha^k + \beta^k) \in \mathbb{Z},$$

uma vez que $\alpha^k + \beta^k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 3.7. *O número de Fibonacci F_n é o inteiro mais próximo do número $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$. E ainda quando n cresce, a distância entre F_n e $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ tende a zero.*

Demonstração. Basta que a distância entre F_n e $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ seja sempre menor que $\frac{1}{2}$. Observe que:

$$\left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Porém $|\beta| < 1$, logo $\frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ e, consequentemente, $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.

Agora provemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = 0.$$

Para isso, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta|^n.$$

Como $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, então $|\beta| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, sendo assim:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta|^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n.$$

Por fim temos que $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n = 0.$$

Provando assim o teorema. $\square$

A Tabela 3.3 exemplifica o Teorema 3.7, mostrando algumas distâncias entre F_n e $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$.

n	F_n	$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$	$F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$
1	1	0,723606798	0,276393202
2	1	1,170820393	0,170820393
3	2	1,894427191	0,105572809
4	3	3,065247584	0,065247584
5	5	4,959674775	0,040325225
6	8	8,024922359	0,024922359
7	13	12,98459713	0,015402865
8	21	21,00951949	0,009519494
9	34	33,99411663	0,005883371
10	55	55,00363612	0,003636123
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.3: Cálculo de $\left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right|$ para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Teorema 3.8. Considerando α e β as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci, então:

$$1. \alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}.$$

$$2. \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}.$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

Demonstração. 1. Pelo Teorema 3.5:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\alpha - \beta^{n-1}\beta}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\alpha - \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-1}\beta - \beta^{n-1}\beta}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - \beta) + \beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} + \beta \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \alpha^{n-1} + \beta F_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $\beta = -\frac{1}{\alpha}$, temos:

$$F_n = \alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha}F_{n-1} \Rightarrow \alpha^{n-1} = F_n + \frac{1}{\alpha}F_{n-1} \Rightarrow \alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}.$$

2. Pelo Teorema 3.5:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\beta}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1} + \alpha\beta^{n-1} - \beta^{n-1}\beta}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \beta^{n-1}(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{\beta^{n-1}(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha F_{n-1} + \beta^{n-1}. \end{aligned}$$

Como $\alpha = -\frac{1}{\beta}$, temos:

$$F_n = \beta^{n-1} - \frac{1}{\beta}F_{n-1} \Rightarrow \beta^{n-1} = F_n + \frac{1}{\beta}F_{n-1} \Rightarrow \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}.$$

□

3.3 Particularidades combinatoriais

O triângulo de Pascal é um triângulo formado pela expansão do binômio $(x + y)^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots, n$ quando tomamos os seus coeficientes, onde $x, y \in \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & x^0y^0 \\ & & & & & x^1y^0 + x^0y^1 \\ & & & & & x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 \\ & & & & & x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3 \\ & & & & & x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + x^0y^4 \\ & & & & & x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + x^0y^5 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \end{array}$$

Tomando apenas os coeficientes, teremos o triângulo pretendido:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Observe que os números de Fibonacci podem ser relacionados com os do triângulo de Pascal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_3 &= 1 + 1 \\ F_4 &= 1 + 2 \\ F_5 &= 1 + 3 + 1 \\ F_6 &= 1 + 4 + 3 \\ F_7 &= 1 + 5 + 6 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja, a soma das diagonais desse triângulo resultam nos números de Fibonacci. Provaremos esse fato na próxima propriedade.

Propriedade 3.9. Os números de Fibonacci podem ser escritos da seguinte maneira:

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

Demonstração. Vamos demonstrar utilizando indução sobre $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$ a propriedade é válida, pois $F_1 = \binom{0}{0} = 1$.
2. Vamos supor que, para $k \leq n$, ocorra:

$$F_k = \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \dots$$

E também:

$$F_{k-1} = \binom{k-2}{0} + \binom{k-3}{1} + \binom{k-4}{2} + \dots$$

3. Vamos demonstrar para $n + 1$. De fato:

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_n &= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots \right] \\ &\quad + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Podemos então reorganizar a equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_{n-1} + F_n \\ &= \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} \right] + \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} \right] + \dots \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5 junto ao Teorema 2.6, temos que:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 3.10. É verdade que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \right].$$

Demonstração. Do Teorema 3.5 podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^i - \beta^i) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \right]. \end{aligned}$$

□

Observação 3.11. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é válido que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1 + x)^n$$

Propriedade 3.12. É verdade que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} = F_{2n+j}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, usando o mesmo raciocínio da Propriedade 3.10, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{i+j} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^{i+j} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \alpha^j - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \beta^j \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \beta^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \right]. \end{aligned}$$

Logo, pela Observação 3.11, temos que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^j (1 + \alpha)^n - \beta^j (1 + \beta)^n \right].$$

Por fim, como sabemos da Equação Quadrática de Fibonacci, temos que $\alpha^2 = 1 + \alpha$ e $\beta^2 = 1 + \beta$, sendo assim

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^j \alpha^{2n} - \beta^j \beta^{2n} \right] = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^{2n+j} - \beta^{2n+j} \right].$$

Logo, usando o Teorema 3.5, temos

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+j} = \frac{\alpha^{2n+j} - \beta^{2n+j}}{\alpha - \beta} = F_{2n+j}$$

□

Propriedade 3.13. É verdade que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{i+j} = (-1)^{j+1} F_{n-j}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{i+j} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \alpha^{i+j} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \beta^{i+j} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \alpha^i \alpha^j - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \beta^i \beta^j \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\alpha)^i - \beta^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\beta)^i \right]. \end{aligned}$$

Pela Observação 3.11, temos que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{i+j} = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^j (1 - \alpha)^n - \beta^j (1 - \beta)^n].$$

Sendo assim, como $1 - \alpha = \beta$ e $1 - \beta = \alpha$, segue:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{i+j} = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^j \beta^n - \beta^j \alpha^n] = \frac{(\alpha\beta)^j (\beta^{n-j} - \alpha^{n-j})}{\alpha - \beta}.$$

Por fim, como $\alpha\beta = -1$, segue que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{i+j} = (-1)^{j+1} \left(\frac{\alpha^{n-j} - \beta^{n-j}}{\alpha - \beta} \right) = (-1)^{j+1} F_{n-j}.$$

□

Propriedade 3.14. É verdade que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{2i+j} = (-1)^n F_{n+j}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{2i+j} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \alpha^{2i+j} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \beta^{2i+j} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \alpha^{2i} \alpha^j - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \beta^{2i} \beta^j \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\alpha^2)^i - \beta^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-\beta^2)^i \right]. \end{aligned}$$

Logo, pela Observação 3.11, temos que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{2i+j} = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^j (1 - \alpha^2)^n - \beta^j (1 - \beta^2)^n].$$

Pela Equação Quadrática de Fibonacci temos que $-\alpha = 1 - \alpha^2$ e $-\beta = 1 - \beta^2$, sendo assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_{2i+j} &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^j (-\alpha)^n - \beta^j (-\beta)^n] \\ &= \frac{-\alpha^{n+j} + \beta^{n+j}}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^n \left(\frac{\alpha^{n+j} - \beta^{n+j}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= (-1)^n F_{n+j}. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Teorema 3.15. Para $m, r \in \mathbb{N}$ o (mr) -ésimo número de Fibonacci pode ser calculado por:

$$F_{mr} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F_m^i F_{m-1}^{r-i} F_i.$$

Demonstração. Pelos Teoremas 3.5 e 3.8, temos:

$$F_{mr} = \frac{\alpha^{mr} - \beta^{mr}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha F_m + F_{m-1})^r - (\beta F_m + F_{m-1})^r}{\alpha - \beta}. \quad (3.4)$$

Para cada parcela $(\alpha F_m + F_{m-1})^r$ e $(\beta F_m + F_{m-1})^r$, apliquemos o Teorema 2.4

$$\begin{aligned} (\alpha F_m + F_{m-1})^r &= \binom{r}{0} (\alpha F_m)^0 F_{m-1}^r + \binom{r}{1} (\alpha F_m)^1 F_{m-1}^{r-1} \\ &\quad + \binom{r}{2} (\alpha F_m)^2 F_{m-1}^{r-2} + \cdots + \binom{r}{r-2} (\alpha F_m)^{r-2} F_{m-1}^2 \\ &\quad + \binom{r}{r-1} (\alpha F_m)^{r-1} F_{m-1}^1 + \binom{r}{r} (\alpha F_m)^r F_{m-1}^0 \\ &= \binom{r}{0} \alpha^0 F_m^0 F_{m-1}^r + \binom{r}{1} \alpha^1 F_m^1 F_{m-1}^{r-1} \\ &\quad + \binom{r}{2} \alpha^2 F_m^2 F_{m-1}^{r-2} + \cdots + \binom{r}{r-2} \alpha^{r-2} F_m^{r-2} F_{m-1}^2 \\ &\quad + \binom{r}{r-1} \alpha^{r-1} F_m^{r-1} F_{m-1}^1 + \binom{r}{r} \alpha^r F_m^r F_{m-1}^0. \end{aligned}$$

Logo $(\alpha F_m + F_{m-1})^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F_m^i F_{m-1}^{r-i} \alpha^i$. Usando exatamente as mesmas contas, tem-se $(\beta F_m + F_{m-1})^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F_m^i F_{m-1}^{r-i} \beta^i$.

Substituindo na Equação (3.4):

$$F_{mr} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F_m^i F_{m-1}^{r-i} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F_m^i F_{m-1}^{r-i} F_i.$$

□

3.4 Propriedades gerais dos números de Fibonacci

Propriedade 3.16. A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$, com $n \geq 1$.

Demonstração. Usando a indução sobre n .

1. Para $n = 1$, a relação é válida, pois $1 = 2 - 1$.
2. Suponha que a propriedade seja verdadeira para n , isto é:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

3. Provemos para $n + 1$, isto é $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.

Partindo da hipótese de indução, segue:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

O que implica que

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1.$$

Como $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$, temos que

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1} = F_{n+3} - 1.$$

Segue da indução, portanto, que a propriedade é válida.

□

Propriedade 3.17. A soma alternada da sequência de Fibonacci é dada por:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1,$$

onde $n \geq 1$.

Demonstração. Vamos fazer por indução sobre $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$, temos $F_1 = 1 = (-1)^1F_0 + 1$, pois $F_0 = 0$.
2. Suponha que $F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^nF_{n-1} = (-1)^nF_{n-2} + 1$.
3. Provemos que $F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$. De fato:

$$F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^nF_{n-1}) + (-1)^{n+1}F_n.$$

Pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n &= (-1)^nF_{n-2} + 1 + (-1)^{n+1}F_n \\ &= (-1)^n(F_{n-2} - F_n) + 1 \\ &= (-1)^{n+1}(F_n - F_{n-2}) + 1 \\ &= (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.18. Sejam m e n números naturais, tais que $m \geq 1$ e $n \geq 1$, é verdadeira a igualdade:

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Demonstração. Fixando m , faremos indução sobre n .

1. Para $n = 1$, temos que a relação é válida, pois $F_{m+1} = F_{m-1} + F_m$.

Sabemos que $F_1 = F_2 = 1$, logo $F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2$.

2. Vamos supor que a propriedade seja válida para todo $k < n$, ou seja, $F_{m+(n-1)} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n$, $F_{m+(n-2)} = F_{m-1}F_{n-2} + F_mF_{n-1}$ e assim por diante.

3. Provemos para n .

Para isso observe que $F_{m+n} = F_{m+(n-1)} + F_{m+(n-2)}$ pela própria definição da sequência de Fibonacci. Pela hipótese de indução, temos que:

$$F_{m+(n-1)} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n \quad (3.5)$$

e

$$F_{m+(n-2)} = F_{m-1}F_{n-2} + F_mF_{n-1}. \quad (3.6)$$

Logo F_{m+n} é igual a soma de (3.5) e (3.6), sendo assim

$$\begin{aligned} F_{m+n} &= (F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n) + (F_{m-1}F_{n-2} + F_mF_{n-1}) \\ &= F_{m-1} \cdot (F_{n-1} + F_{n-2}) + F_m \cdot (F_n + F_{n-1}). \end{aligned}$$

Por fim $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, sendo assim

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Provando assim a propriedade. □

Teorema 3.19. (Carlitz): Sejam F_m e F_n números de Fibonacci, com $m \neq 2$. $F_m \mid F_n$ se, e somente se, $m \mid n$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Como $m \mid n$, logo existe algum $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = km$.

Vamos provar utilizando a indução sobre k .

1. Para $k = 1$, temos que $n = m$, logo $F_n = F_m$ e $F_m \mid F_n$.
2. Vamos supor que a propriedade seja válida para k , isto é $F_m \mid F_{km}$.
3. Vamos provar para $k + 1$, ou seja $n = m(k + 1)$.

Observe que $F_{m(k+1)} = F_{mk+m}$. Logo pela Propriedade 3.18, temos que

$$F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Analisando os termos separadamente, temos que $F_m \mid F_{mk-1}F_m$, pois $F_m \mid F_m$. Também $F_m \mid F_{mk}F_{m+1}$, pois $F_m \mid F_{mk}$ por hipótese de indução. Sendo assim $F_m \mid (F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1})$. Portanto $F_m \mid F_{m(k+1)}$.

($\Rightarrow$) Primeiramente, note que a propriedade não funciona para $m = 2$, pois $F_2 = 1$ e obviamente $1 \mid F_n$, para qualquer índice n , mas 2 não divide qualquer índice n , logo a propriedade não é válida.

Para os demais valores de m vamos separar em dois casos:

Caso $m = 1$, nesse caso é trivial, pois 1 divide qualquer número natural.

Caso $m > 2$, nesse caso, pelo Lema 2.11 observe que se $F_m \mid F_n$, então $(F_m, F_n) = F_m$. Mas pela Propriedade 3.41 podemos concluir que $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ e por consequência, $F_{(m,n)} = F_m$, sendo assim $m = (m, n)$. Provando por fim que $m \mid n$. $\square$

O Teorema 3.19 foi introduzido por Leonard Carlitz (1907 - 1999), um importante algebrista americano que publicou muitos artigos sobre sucessões de Fibonacci. Outros resultados serão apresentados na seção 5.2.

Observação 3.20. Uma forma equivalente de se enunciar o Teorema 3.19 é: Sejam F_m e F_n números de Fibonacci. $F_m \mid F_n$ se, e somente se, $n = mk$, com $k \in \mathbb{N}$.

Propriedade 3.21. Todos os elementos de índice pares de Fibonacci podem ser escritos como:

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2,$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Da Propriedade 3.18, temos que

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Agora basta lembrar que $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. Sendo assim, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Provando assim a propriedade. $\square$

Propriedade 3.22. A soma dos n primeiros números de índice ímpares de Fibonacci é igual ao número de Fibonacci de índice $2n$, ou seja:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n .

1. Primeiro verifiquemos para $n = 1$.

Se $n = 1$, então temos $F_1 = F_2$ que é verdadeiro pela definição da sequência de Fibonacci, onde $F_1 = F_2 = 1$.

2. Supomos verdadeira para $n = k$, ou seja, $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} = F_{2k}$.

3. Demonstraremos para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2(k+1)-1} &= F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2k+2-1} \\ &= F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} \\ &= F_{2(k+1)}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.23. A soma dos n primeiros números de índice pares de Fibonacci é igual ao antecessor do número de Fibonacci de índice $2n + 1$, ou seja:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

com $n \geq 2$.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n :

1. Para $n = 1$ temos que $F_2 = 2 - 1 = F_3 - 1$, pois $F_2 = 1 = F_3 - 1$.
2. Vamos supor que seja verdadeiro para $n = k$, ou seja, $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} = F_{2k+1} - 1$.
3. Demonstremos para $n = k + 1$. Partindo da hipótese de indução:

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} &= F_{2k+1} - 1 \\ &\Rightarrow F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} + F_{2(k+1)} \\ &= F_{2k+1} - 1 + F_{2(k+1)} \\ &= F_{2k+1} + F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2k+3} - 1 = F_{2(k+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

Por indução segue o resultado.

□

Propriedade 3.24. A seguinte propriedade é válida para os números de Fibonacci:

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$$

para $n \geq 1$.

Demonstração. Provemos que $\sum_{i=1}^{2n} F_{i-1} F_i = 2F_n^2$, por indução sobre $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i-1} F_i = F_0 F_1 + F_1 F_2 = 0 + 1 = 1 = F_2^2.$$

2. Suponha que a propriedade vale para $n = k$, ou seja, $F_0 F_1 + \cdots + F_{2k-1} F_{2k} = F_{2k}^2$.
3. Provemos para $n = k + 1$. De fato, usando a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} F_0 F_1 + \cdots + F_{2(k+1)-1} F_{2(k+1)} &= F_0 F_1 + \cdots + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_0 F_1 + \cdots + F_{2k-1} F_{2k} + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k}^2 + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k} (F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k} F_{2k+2} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k+2} (F_{2k} + F_{2k+1}) = F_{2k+2} F_{2k+2} \\ &= F_{2k+2}^2 = F_{2(k+1)}^2. \end{aligned}$$

Por indução, segue o resultado. $\square$

Propriedade 3.25. A seguinte propriedade é válida para os números de Fibonacci:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

para $n \geq 1$.

Demonstração. Provemos que $\sum_{i=1}^{2n} F_iF_{i+1} = F_{2n+1}^2 - 1$, por indução sobre $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 F_iF_{i+1} &= F_1F_2 + F_2F_3 = 1 + 2 \\ &= 3 = 2^2 - 1 \\ &= F_{2 \cdot 1 + 1}^2 - 1 = F_3^2 - 1. \end{aligned}$$

2. Suponha que a propriedade vale para $n = k$, ou seja, $F_1F_2 + \cdots + F_{2k}F_{2k+1} = F_{2k+1}^2 - 1$.

3. Provemos que vale para $n = k + 1$.

De fato, usando a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} F_1F_2 + \cdots + F_{2(k+1)}F_{2(k+1)+1} &= F_1F_2 + \cdots + F_{2k+2}F_{2k+3} \\ &= F_1F_2 + \cdots + F_{2k}F_{2k+1} + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3} \\ &= F_{2k+1}^2 - 1 + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} + F_{2k+2}) + F_{2k+2}F_{2k+3} - 1 \\ &= F_{2k+1}F_{2k+3} + F_{2k+2}F_{2k+3} - 1 \\ &= F_{2k+3}(F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1 \\ &= F_{2k+3}F_{2k+3} - 1 = F_{2k+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Por indução, segue o resultado. $\square$

Propriedade 3.26. A seguinte identidade é válida para a sequência de números de Fibonacci:

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Observe que, por diferença de quadrados, podemos manipular a primeira parte da igualdade da seguinte forma:

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n).$$

Porém, observe que $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ e $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$, logo $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}$. $\square$

Propriedade 3.27. A soma dos quadrados dos n primeiros termos de Fibonacci é dada por:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Notemos primeiro que

$$\begin{aligned} F_n^2 &= F_n F_n \\ &= F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever $F_1^2 = F_1 F_2 - F_1 F_0$, $F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$ e assim por diante para os n termos, onde teremos $F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$. Por fim, basta somarmos todas essas igualdades:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2 + F_n^2 &= F_1 F_2 + F_2 F_3 - F_1 F_2 + \cdots \\ &\quad + F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} + F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}. \end{aligned}$$

Simplificando essa equação, encontramos:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 3.28. Os números de Fibonacci de índices múltiplos de 3 podem ser escritos da seguinte forma:

$$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3,$$

com $n \geq 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 3.18, podemos escrever F_{3n} da seguinte forma

$$F_{3n} = F_{n+2n} = F_{n-1} F_{2n} + F_n F_{2n+1}.$$

Pela Propriedade 3.21 e também pela Propriedade 3.18 escrevendo $F_{2n+1} = F_{(n+1)+n}$, temos:

$$\begin{aligned} F_{n-1} F_{2n} + F_n F_{2n+1} &= F_{n-1} (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) + F_n (F_n F_n + F_{n+1} F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}^2 F_{n-1} - F_{n-1}^3 + F_n^3 + F_{n+1}^2 F_n \\ &= F_n^3 - F_{n-1}^3 + F_{n+1}^2 (F_n + F_{n-1}) \\ &= F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 3.29. O n -ésimo termo de Fibonacci ao quadrado pode ser escrito pela fórmula:

$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

com $n \geq 0$.

Demonstração. Vamos provar usando a indução sobre n .

1. Para $n = 1$, temos que

$$F_1^2 = F_0 F_2 + (-1)^2 = 1,$$

pois $F_0 = 0$.

2. Vamos supor que a propriedade seja válida para $n = k$, ou seja

$$F_k^2 = F_{k-1} F_{k+1} + (-1)^{k+1}. \quad (3.7)$$

3. Demonstremos para $n = k + 1$.

Para isso, somando $F_k F_{k+1}$ aos dois lados da Equação (3.7), teremos

$$\begin{aligned} F_k^2 + F_k F_{k+1} &= F_{k-1} F_{k+1} + (-1)^{k+1} + F_k F_{k+1} \\ &\Rightarrow F_k(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1}(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\ &\Rightarrow F_k F_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Por fim, basta somarmos $(-1)^{k+2}$ dos dois lados que encontraremos

$$F_{k+1}^2 = F_k F_{k+2} + (-1)^{k+2}.$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 3.30. O termo $(n + 1)$ -ésimo de Fibonacci ao quadrado pode ser escrito da seguinte maneira:

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + \cdots + F_1^2).$$

Demonstração. Sabemos pela definição da sequência de Fibonacci que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, sendo assim:

$$F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 = F_n^2 + 2F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2.$$

Porém, pela Propriedade 3.27, temos que:

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 2(F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2) + F_{n-1}^2.$$

Portanto, basta manipularmos:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 &= F_n^2 + 2F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2) + F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + \cdots + F_1^2). \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 3.31. É verdade que:

$$F_{n-k} F_{n+k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2.$$

Demonstração. De fato:

$$\begin{aligned} F_{n-k} + F_{n+k} - F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n-k} \beta^{n+k} - \beta^{n-k} \alpha^{n+k} + \beta^{2n} - (\alpha^{2n} - 2\alpha^n \beta^n + \beta^{2n})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n-k} \beta^{n+k} - \beta^{n-k} \alpha^{n+k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2\alpha^n \beta^n - \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{-\alpha^{n-k} \beta^{n+k} - \beta^{n-k} \alpha^{n+k} + 2\alpha^n \beta^n}{(\alpha - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$, logo:

$$\begin{aligned}
 F_{n-k} + F_{n+k} - F_n^2 &= \frac{-\alpha^{n-k} \beta^{n+k} - \beta^{n-k} \alpha^{n+k} + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{-\alpha^n \alpha^{-k} \beta^n \beta^k - \beta^n \beta^{-k} \alpha^n \alpha^k + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{-\alpha^n (\alpha^{-k} \beta^n \beta^k + \beta^n \beta^{-k} \alpha^k) + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{-\alpha^n \beta^n (\alpha^{-k} \beta^k + \beta^{-k} \beta^k) + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{-(-1)^n (\alpha^{-k} \beta^k + \beta^{-k} \beta^k) + 2(-1)^n}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(-1)^n (2 - \alpha^{-k} \beta^k - \beta^{-k} \alpha^k)}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} (\alpha^{-k} \beta^k + \beta^{-k} \alpha^k - 2)}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{\beta^k}{\alpha^k} + \frac{\alpha^k}{\beta^k} - 2 \right)}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{\beta^{2k} + \alpha^{2k} - 2\alpha^k \beta^k}{\alpha^k \beta^k} \right)}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^{2k} - 2\alpha^k \beta^k + \beta^{2k}}{(-1)^k} \right)}{(\alpha - \beta)^2} \\
 &= (-1)^{n+k+1} \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
 &= (-1)^{n+k+1} F_k^2.
 \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Teorema 3.32. (Teorema de Hoggatt): *Todo número natural pode ser escrito como soma de distintos números de Fibonacci.*

Demonstração. Primeiro note que para qualquer $x \in \mathbb{N}$, existe um único $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_{n-1} < x \leq F_n$.

1. Para $n = 1$, $F_0 < 1 \leq F_1$ e $1 = F_0 + F_1$.
2. Suponha que para $k \geq 2$, todo natural x tal que $x \leq F_k$ é escrito como a soma de distintos números de Fibonacci.
3. Provemos que o natural x tal que $F_k < x \leq F_{k+1}$ é escrito como a soma de distintos números de Fibonacci:

$$F_k < x \leq F_{k+1} \Rightarrow 0 < x - F_k \leq F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$$

Pela hipótese de indução, $x - F_k$ é escrito como a soma de distintos números de Fibonacci e F_k não faz parte deles. Então $x \in \mathbb{N}$ é escrito como a soma de distintos números de Fibonacci.

□

Propriedade 3.33. Se um número de Fibonacci possuí índice $n \geq 6$, segue que $F_n > n$.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre $n \geq 6$.

1. Vamos mostrar que é válido para $n = 6$.

Se $n = 6$, então teremos que $F_6 = 8$ e com isso evidentemente $F_6 > 6$.

2. Supondo que seja verdade para $n = k > 6$, ou seja, $F_k > k$.
3. Provemos para $n = k + 1$.

Sabendo que $F_{k-1} > 1$ e usando a hipótese de indução, temos:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} > k + F_{k-1} > k + 1.$$

□

Propriedade 3.34. É verdade que $\prod_{i=6}^n F_i > \frac{n!}{120}$, com $n \geq 6$.

Demonstração. Pela Propriedade 3.33, temos que $F_n > n$ para $n \geq 6$. Logo podemos afirmar que:

$$F_6 F_7 \dots F_{n-1} F_n > 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Em outras palavras:

$$\prod_{i=6}^n F_i > \frac{n!}{5!} = \frac{n!}{120}.$$

□

3.5 Fibonacci e divisibilidade

Propriedade 3.35. Se um número de Fibonacci F_n é par, então n é divisível por 3, com $n \geq 0$.

Demonstração. Se F_n é par, então $F_n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, sendo assim, $2 \mid F_n$. Como $F_3 = 2$, temos $F_3 \mid F_n$ e pelo Teorema 3.19 temos que $3 \mid n$. □

Propriedade 3.36. Se um número de Fibonacci F_n é múltiplo de 3, então n é divisível por 4, com $n \geq 0$.

Demonstração. Se F_n é divisível por 3, então $F_n = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, sendo assim, $3 \mid F_n$. Como $F_4 = 3$, temos $F_4 \mid F_n$, logo pelo Teorema 3.19 temos que $4 \mid n$. □

Propriedade 3.37. Se um número de Fibonacci F_n é divisível por 5, então n é divisível por 5, com $n \geq 0$.

Demonstração. Se F_n é divisível por 5, então $F_n = 5k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, sendo assim, $5 \mid F_n$. Como $F_5 = 5$, temos $F_5 \mid F_n$, logo pelo Teorema 3.19 temos que $5 \mid n$. □

Propriedade 3.38. Na sequência de Fibonacci é válida a seguinte propriedade da divisão:

$$F_n \mid F_{2n},$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Se $n = 0$ temos que $0 \mid 0$ é verdadeiro. Como $n \neq 0$, basta usarmos o Teorema de Binet 3.5, pois $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $F_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}$, com isso

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n}}{F_n} &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \alpha^n + \beta^n, \end{aligned}$$

ou seja, $F_{2n} = F_n(\alpha^n + \beta^n)$. Pela Proposição 3.6, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$. Assim $F_n \mid F_{2n}$. $\square$

Propriedade 3.39. Todo n -ésimo número de Fibonacci divide o (nk) -ésimo número de Fibonacci para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. O resultado é consequência direta do Teorema 3.19. $\square$

Teorema 3.40. Se $m \in \mathbb{N}$ divide um número de Fibonacci, então m divide infinitos números de Fibonacci.

Demonstração. Se $m \mid F_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue da Propriedade 3.39 que $F_n \mid F_{nk}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, $m \mid F_{nk}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

Propriedade 3.41. Sejam F_m e F_n dois números de Fibonacci quaisquer. O mdc entre eles é um número de Fibonacci e $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

Demonstração. Essa demonstração vamos separar em dois casos.

Caso $n \mid m$, nesse caso, pelo Teorema 3.19, sabemos que $F_n \mid F_m$, ou seja, pelo Lema 2.11, temos que $(m, n) = n$ e $(F_n, F_m) = F_n = F_{(m,n)}$.

Caso n não divida m , podemos aplicar o Teorema 2.7, onde realizaremos divisões sucessivas. Supondo $m > n$, então:

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < |n| \\ n &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < |r_1| \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < |r_2| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Em algum momento:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k, \quad 0 \leq r_k < |r_{k-1}| \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1} + 0 \end{aligned}$$

Com isso, temos que $r_k \mid r_{k-1}$ e consequentemente $(r_{k-1}, r_k) = r_k$. Também, pelo Teorema, 3.19 $F_{r_k} \mid F_{r_{k-1}}$. Sendo assim, pela Propriedade 2.16 e Lema 2.11, temos:

$$(0 + F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) = (0, F_{r_k}) = F_{r_k}$$

E, ainda, pela Propriedade 3.43 podemos afirmar que:

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = \cdots = (F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) = F_{r_k}$$

Sendo assim, como r_k é o último resto não nulo da divisão sucessiva, $(m, n) = r_k$. Então $(F_m, F_n) = F_{r_k} = F_{(m,n)}$. $\square$

Propriedade 3.42. Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si, ou seja, $(F_n, F_{n+1}) = 1$, com $n \geq 0$.

Demonstração. A partir do algoritmo de Euclides (Teorema 2.7), podemos realizar divisões sucessivas de F_{n+1} por F_n , sendo assim teremos da Definição 3.1

$$F_{n+1} = F_n \cdot 1 + F_{n-1}$$

Consequentemente, podemos repetir esse processo para F_n e assim por diante até chegarmos no resto 0, ou seja:

$$F_{n+1} = F_n \cdot 1 + F_{n-1}$$

$$F_n = F_{n-1} \cdot 1 + F_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$F_3 = F_2 \cdot 1 + F_1$$

$$F_2 = F_1 \cdot 1 + F_0$$

Sabe-se que $F_0 = 0$ e $F_2 = F_1 = 1$, logo o último resto não nulo obtido foi $F_1 = 1$. Sendo assim $(F_n, F_{n+1}) = (F_n, F_{n-1}) = (F_{n-1}, F_{n-2}) = \cdots = (F_2, F_1) = 1$, ou seja, os termos consecutivos são primos entre si. $\square$

Propriedade 3.43. Seja $m = nq + r$ e $0 \leq r < |n|$. Então $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$.

Demonstração. Como $m = nq + r$, podemos afirmar pela Propriedade 3.18, que $F_{nq+r} = F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}$. Sendo assim,

$$(F_m, F_n) = (F_{nq+r}, F_n) = (F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}, F_n).$$

Observe que $F_n \mid F_{nq}$, ou seja $F_n \mid F_{nq}F_{r+1}$, pela Propriedade 2.16, temos que

$$(F_m, F_n) = (F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}, F_n) = (F_{nq-1}F_r, F_n).$$

Vamos supor que $(F_{nq-1}, F_n) = d$. Como $d \mid F_n$ e $F_n \mid F_{nq}$, podemos afirmar que $d \mid F_{nq}$, logo d divide dois números de Fibonacci consecutivos (F_{nq-1} e F_{nq}). Porém dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si, ou seja $(F_{nq}, F_{nq-1}) = 1$, ou seja, $d = 1$.

Pela Propriedade 2.17, temos que:

$$(F_m, F_n) = (F_{nq-1}F_r, F_n) = (F_r, F_n).$$

Provando assim a Propriedade. $\square$

Propriedade 3.44. Seja (H_n) uma sequência generalizada de Fibonacci. Se $(H_1, H_2) = 1$, então $(H_{n-1}, H_n) = 1$, $n \geq 2$.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre n .

1. Para $n = 2$ temos por hipótese que $(H_1, H_2) = 1$.
2. Vamos supor que a propriedade seja verdadeira para $n = k > 2$, ou seja, $(H_{k-1}, H_k) = 1$.
3. Demonstremos para $n = k + 1$.

Para isso vamos supor que $(H_k, H_{k+1}) = d$. Sendo assim podemos dizer que $d \mid H_k$ e $d \mid H_{k+1}$. Além disso podemos afirmar que $d \mid (H_{k+1} - H_k)$. Porém sabemos que $H_{k-1} = H_{k+1} - H_k$, ou seja, $d \mid H_{k-1}$. Sendo assim $d \mid H_k$ e $d \mid H_{k-1}$. Mas $(H_{k-1}, H_k) = 1$ com $m \geq 2$ e portanto $d = 1$, isto é, $(H_k, H_{k+1}) = 1$.

□

Definição 3.45. Dado $m \in \mathbb{N}$ e (F_n) a sequência de Fibonacci, definimos $(\overline{F_n})$ a sequência formada pelos restos da divisão dos números de Fibonacci F_n por m , ou seja, $\overline{F_1}$ é o resto da divisão de F_1 por m , $\overline{F_2}$ é o resto da divisão de F_2 por m e assim sucessivamente.

Considere a sequência de pares ordenados $(\langle \overline{F_n}, \overline{F_{n+1}} \rangle)$. Temos que cada m gerará uma sequência de pares ordenados diferente.

Exemplo 3.46. Tomemos $m = 2$, sendo assim $\overline{F_1} = 1$, pois $F_1 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$ e $\overline{F_2} = 1$ pelo mesmo motivo. Logo teremos:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_1} = 1 \\ F_2 &= 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_2} = 1 \\ F_3 &= 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \overline{F_3} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sendo assim, a sequência gerada por esses restos será:

$$\langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 0 \rangle; \langle 0, 1 \rangle; \langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 0 \rangle; \dots$$

Tomemos agora $m = 3$, com isso teremos a sequência:

$$\begin{aligned} F_1 &= 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_1} = 1 \\ F_2 &= 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_2} = 1 \\ F_3 &= 3 \cdot 0 + 2 \Rightarrow \overline{F_3} = 2 \\ F_4 &= 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \overline{F_4} = 0 \\ F_5 &= 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow \overline{F_5} = 2 \\ F_6 &= 3 \cdot 2 + 2 \Rightarrow \overline{F_6} = 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sendo assim, a sequência gerada por $m = 3$, será:

$$\langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \langle 2, 0 \rangle; \langle 0, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle; \langle 2, 1 \rangle; \langle 1, 0 \rangle; \langle 0, 1 \rangle; \langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \dots$$

Tomando $m = 4$, temos:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 4 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_1} = 1 \\
F_2 &= 4 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_2} = 1 \\
F_3 &= 4 \cdot 0 + 2 \Rightarrow \overline{F_3} = 2 \\
F_4 &= 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow \overline{F_4} = 3 \\
F_5 &= 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow \overline{F_5} = 1 \\
F_6 &= 4 \cdot 2 + 0 \Rightarrow \overline{F_6} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sendo assim, a sequência gerada por $m = 4$ será:

$$\langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \langle 2, 3 \rangle; \langle 3, 1 \rangle; \langle 1, 0 \rangle; \langle 0, 1 \rangle; \langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \dots$$

Por fim tomemos $m = 5$, sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 5 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_1} = 1 \\
F_2 &= 5 \cdot 0 + 1 \Rightarrow \overline{F_2} = 1 \\
F_3 &= 5 \cdot 0 + 2 \Rightarrow \overline{F_3} = 2 \\
F_4 &= 5 \cdot 0 + 3 \Rightarrow \overline{F_4} = 3 \\
F_5 &= 5 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \overline{F_5} = 0 \\
F_6 &= 5 \cdot 1 + 3 \Rightarrow \overline{F_6} = 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Com isso, a sequência gerada por $m = 5$, será:

$$\begin{aligned}
&\langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \langle 2, 3 \rangle; \langle 3, 0 \rangle; \langle 0, 3 \rangle; \langle 3, 3 \rangle; \langle 3, 1 \rangle; \langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 0 \rangle; \langle 4, 4 \rangle; \langle 4, 3 \rangle; \langle 3, 2 \rangle; \\
&\langle 2, 0 \rangle; \langle 0, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle; \langle 2, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 1, 0 \rangle; \langle 0, 1 \rangle; \langle 1, 1 \rangle; \langle 1, 2 \rangle; \dots
\end{aligned}$$

Pode ser observado no Exemplo 3.46 que a sequência $(\overline{F_n})$ é cíclica. Sendo assim, a sequência de pares ordenados $(\langle \overline{F_n}, \overline{F_{n+1}} \rangle)$ também passa a se repetir em determinado período. No entanto, independente do $m \in \mathbb{N}$, é possível determinar o primeiro par que se repete.

Teorema 3.47. *Dado $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 2$, considere a sequência de pares ordenados $(\langle \overline{F_n}, \overline{F_{n+1}} \rangle)$. O primeiro par ordenado a se repetir é o $\langle 1, 1 \rangle = \langle \overline{F_1}, \overline{F_2} \rangle$.*

Demonstração. Consideremos a sequência de pares:

$$\langle \overline{F_1}, \overline{F_2} \rangle, \langle \overline{F_2}, \overline{F_3} \rangle, \langle \overline{F_3}, \overline{F_4} \rangle, \dots$$

Um par ordenado $\langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle$ será igual a outro par ordenado $\langle \overline{F_t}, \overline{F_{t+1}} \rangle$ se, e somente se, $\overline{F_k} = \overline{F_t}$ e $\overline{F_{k+1}} = \overline{F_{t+1}}$. Vamos supor que $\langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle$ seja o primeiro par ordenado que se repete com $k > 1$. Sendo assim, temos que $\langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle = \langle \overline{F_t}, \overline{F_{t+1}} \rangle$, com $t > k$.

Pela definição da sequência de Fibonacci, temos que $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ e $F_{t-1} = F_{t+1} - F_t$. Pelo Teorema 2.7, temos que existem $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= q_1 m + \overline{F_{k+1}} \\
F_{t+1} &= q_2 m + \overline{F_{t+1}} \\
F_k &= q_3 m + \overline{F_k} \\
F_t &= q_4 m + \overline{F_t}
\end{aligned}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} F_{k-1} &= F_{k+1} - F_k = (q_1 - q_3)m + (\overline{F_{k+1}} - \overline{F_k}) \\ F_{t-1} &= F_{t+1} - F_t = (q_2 - q_4)m + (\overline{F_{t+1}} - \overline{F_t}) \end{aligned}$$

Então:

$$F_{t-1} - F_{k-1} = (q_2 - q_4 - q_1 + q_3)m + \overline{F_{t+1}} - \overline{F_{k+1}} + \overline{F_k} - \overline{F_t}$$

Como $\overline{F_k} = \overline{F_t}$ e $\overline{F_{k+1}} = \overline{F_{t+1}}$ então $F_{t-1} - F_{k-1}$ é múltiplo de m , ou seja, $\overline{F_{k-1}} - \overline{F_{t-1}} = 0$, isto é, $\overline{F_{k-1}} = \overline{F_{t-1}}$. Assim, $\langle \overline{F_{k-1}}, \overline{F_k} \rangle = \langle \overline{F_{t-1}}, \overline{F_t} \rangle$. Logo, o par ordenado $\langle \overline{F_{k-1}}, \overline{F_k} \rangle$ é o primeiro que se repete, contrariando a hipótese inicial de que $\langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle$ é o primeiro par que se repete com $k > 1$.

Sendo assim, o primeiro par ordenado que se repete é $\langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle$ com $k = 1$, ou seja, $\langle 1, 1 \rangle = \langle \overline{F_1}, \overline{F_2} \rangle$. $\square$

Teorema 3.48. *Considere $m \in \mathbb{N}$, então m divide algum número entre os $m^2 + 1$ primeiros da sequência de Fibonacci.*

Demonstração. Se $m = 1$ o resultado é trivial. Para $m > 1$, observe que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que pela divisão por m teremos m possibilidades de restos, sendo $0, 1, \dots, m-1$, ou seja, para pares ordenados de restos $\langle \overline{F_n}, \overline{F_{n+1}} \rangle$, existem m^2 possibilidades.

Nos $m^2 + 1$ primeiros termos da sequência $(\langle \overline{F_n}, \overline{F_{n+1}} \rangle)$, necessariamente aparecerá um par repetido. Pelo Teorema 3.47, o primeiro par a aparecer repetido será o $\langle 1, 1 \rangle$. Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\langle 1, 1 \rangle = \langle \overline{F_k}, \overline{F_{k+1}} \rangle$, com $2 \leq k \leq m^2 + 1$. Logo $F_{k+1} \equiv 1 \pmod{m}$ e $F_k \equiv 1 \pmod{m}$. Então:

$$F_{k+1} - F_k \equiv 1 - 1 \pmod{m} \Rightarrow F_{k-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

ou seja, $m \mid F_{k-1}$, provando assim o teorema. $\square$

3.6 Expandindo a sequência de Fibonacci para índices inteiros negativos

Vimos na Seção 3.1 que os números de Fibonacci são

$$\begin{array}{cccccccc} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \quad \dots \end{array}$$

Mas será possível expandir a sequência para índices inteiros negativos? Considere $n > 0$ e vamos em busca de uma definição para F_{-n} .

Supondo que o Teorema 3.5 (Binet) continue verdadeiro, temos:

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(\frac{1}{\alpha})^n - (\frac{1}{\beta})^n}{\alpha - \beta}. \quad (3.8)$$

Porém já provamos anteriormente que $\alpha\beta = -1$, ou seja, $\frac{1}{\alpha} = -\beta$ e $\frac{1}{\beta} = -\alpha$, com isso podemos substituir na Equação (3.8):

$$F_{-n} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta}. \quad (3.9)$$

Manipulando a Equação (3.9)

$$\begin{aligned} F_{-n} &= (-1)^n \left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= (-1)^{n+1} F_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sendo assim, uma boa extensão para os números de Fibonacci com índices inteiros negativos é:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n. \quad (3.11)$$

Considerando a Equação (3.11), nossa sequência ampliada fica

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & F_{-6} & F_{-5} & F_{-4} & F_{-3} & F_{-2} & F_{-1} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & & \\ & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \\ \dots & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \dots \end{array}$$

Se $n < 0$, os $(-n)$ -ésimos termos de Fibonacci ainda podem ser escritos como:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

Para isso, basta observarmos que se $n < 0$, então $-n > 0$, logo, podemos considerar a Equação (3.11) para $-n$, ou seja

$$F_{-(-n)} = (-1)^{-n+1} F_{-n}. \quad (3.12)$$

Manipulando a Equação (3.12), teremos

$$\frac{F_n}{(-1)^{-n-1}(-1)^2} = F_{-n}.$$

Logo,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

Ou seja, a propriedade se mantém. Com base no que foi discutido previamente, podemos garantir que:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Agora perceba que a lei de recorrência característica dos números de Fibonacci se mantém para essa sequência estendida

$$\begin{aligned} & \vdots \\ F_{-6} + F_{-5} &= F_{-4} \\ F_{-5} + F_{-4} &= F_{-3} \\ F_{-4} + F_{-3} &= F_{-2} \\ F_{-3} + F_{-2} &= F_{-1} \\ F_{-2} + F_{-1} &= F_0 \\ F_{-1} + F_0 &= F_1 \\ F_0 + F_1 &= F_2 \\ F_1 + F_2 &= F_3 \\ F_2 + F_3 &= F_4 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
 F_{-n} + F_{-(n+1)} &= (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{(n+1)+1}F_{n+1} \\
 &= (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} \\
 &= (-1)^n[F_{n+1} - F_n] \\
 &= (-1)^nF_{n-1} \\
 &= (-1)^{(n-1)+1}F_{n-1} \\
 &= F_{-(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, uma forma coerente de se propor uma expansão dos números de Fibonacci para índices inteiros negativos é:

Definição 3.49. É chamada de **Sequência de Fibonacci** ou **Números de Fibonacci** a sequência infinita de números inteiros tais que $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ e $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

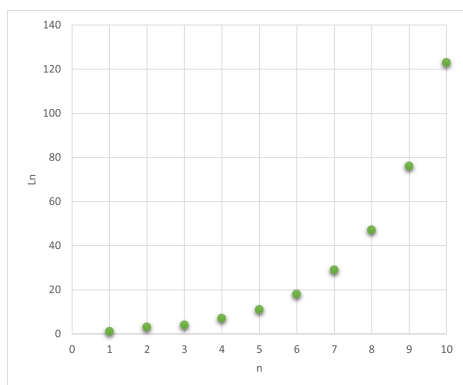
4 Números de Lucas

4.1 A sequência de Lucas

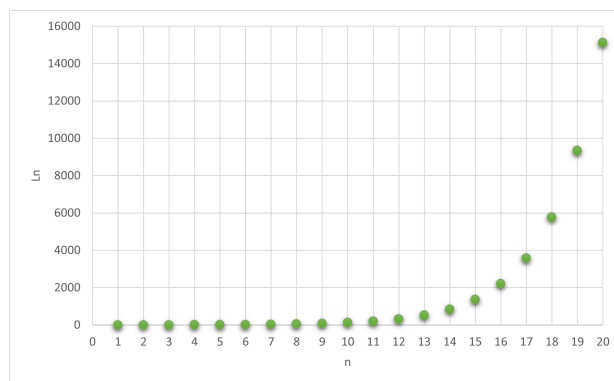
François Édouard Anatole Lucas nasceu em abril de 1842 na França. Em 1861 teve a oportunidade de ingressar em uma instituição renomada de ensino superior da França, a *École Normale Supérieure*. Logo após se formar, trabalhou como assistente no observatório de Paris até 1869, depois serviu ao exército entre 1870 à 1871, posteriormente começou a trabalhar como professor passando por várias escolas de Paris. Em sua vida acadêmica chegou a publicar mais de 180 artigos sobre diversas áreas da matemática, porém, a maioria de suas publicações foi em Teoria dos Números. Em 1876 estudou a sequência de Fibonacci e uma de suas generalizações, que posteriormente deu origem a sequência que leva seu nome, a sequência de Lucas.

Definição 4.1. É chamada de **Sequência de Lucas** ou **Números de Lucas**, a sequência infinita de números naturais tais que $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ e $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

A Figura 4.1 apresenta graficamente os primeiros números de Lucas.



(a) Primeiros 10 números de Lucas em um gráfico de uma função discreta.



(b) Primeiros 20 números de Lucas em um gráfico de uma função discreta.

Figura 4.1: Primeiros termos da sequência de Lucas.

Fonte: O Autor.

Observação 4.2. Em alguns casos é interessante iniciarmos a sequência de Lucas com o termo $L_0 = 2$.

Teorema 4.3. O resultado equivalente ao Teorema de Binet para a sequência de Lucas, é:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

onde $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci.

Demonstração. Para $n = 0$, o Teorema é válido, pois $2 = \alpha^0 + \beta^0 = L_0$.

Como α e β são raízes da Equação Quadrática de Fibonacci, temos:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \text{ e } \beta^2 = \beta + 1.$$

Multiplicando a primeira igualdade por α^{n-1} e a segunda por β^{n-1} , segue que

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \text{ e } \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}.$$

Adicionando ambas as igualdades:

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}. \quad (4.1)$$

Considere a sequência (S_n) onde $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Desse modo, pela Equação (4.1) segue que $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$. Calculamos os primeiros termos:

$$S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2,$$

$$S_1 = \alpha^1 + \beta^1 = \alpha + \beta = 1$$

e

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^1 + \beta^1 + \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Portanto, $S_1 = 1$, $S_2 = 3$ e $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$ para $n \geq 2$. Da Definição 4.1, a sequência (S_n) é a própria sequência de Lucas e assim $L_n = \alpha^n + \beta^n$. $\square$

Teorema 4.4. *O número de Lucas L_n é o inteiro mais próximo do número α^n . E ainda quando n cresce, a distância entre L_n e α^n tende a zero.*

Demonstração. Basta provar que a distância entre L_n e α^n é sempre menor que $\frac{1}{2}$, ou seja, $|L_n - \alpha^n| < \frac{1}{2}$. Observe que:

$$|L_n - \alpha^n| = |\alpha^n + \beta^n - \alpha^n| = |\beta^n| = |\beta|^n.$$

Lembre que $|\beta| \approx 0,618$.

Para $n = 1$, $L_1 = 1$ é o inteiro mais próximo de $|\beta|^1$.

Para $n \geq 2$, $|\beta|^n < \frac{1}{2}$, isto é, $|L_n - \alpha^n| < \frac{1}{2}$.

Vamos provar que o limite tende a zero:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |L_n - \alpha^n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha^n + \beta^n - \alpha^n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta^n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Por fim, temos que $0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1$, logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n - \alpha^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n = 0.$$

Provando assim o teorema. $\square$

A Tabela 4.1 exemplifica o Teorema 4.4, mostrando a distância entre L_n e α^n .

n	L_n	α^n	$ L_n - \alpha^n $
1	1	1,618033989	0,618033989
2	3	2,618033989	0,381966011
3	4	4,236067977	0,236067977
4	7	6,854101966	0,145898034
5	11	4,959674775	0,090169944
6	18	17,94427191	0,05572809
7	29	29,03444185	0,034441854
8	47	46,97871376	0,021286236
9	76	76,01315562	0,013155617
10	123	122,9918694	0,008130619
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.1: Cálculo de $|L_n - \alpha^n|$ para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10, \dots\}$.

4.2 Propriedades gerais dos números de Lucas

Propriedade 4.5. Sobre a soma dos primeiros termos de Lucas, é verdade que:

(a) $L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 1$;

(b) $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3$.

Demonstração. (a) Vamos provar por indução sobre $n \geq 0$.

1. Para $n = 0$, temos que $L_0 = 2 = 3 - 1 = L_2 - 1$.
2. Vamos supor que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja:

$$\sum_{i=0}^k L_i = L_0 + L_1 + \dots + L_k = L_{k+2} - 1.$$

3. Vamos provar para $n = k + 1$, de fato:

$$\sum_{i=0}^{k+1} L_i = L_0 + L_1 + \dots + L_k + L_{k+1} = (L_0 + L_1 + \dots + L_k) + L_{k+1}.$$

Pela hipótese de indução temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_i &= L_{k+2} - 1 + L_{k+1} \\ &= L_{k+3} - 1 \\ &= L_{(k+1)+2} - 1. \end{aligned}$$

- (b) Vamos provar por indução sobre $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$, observe que a propriedade é verdadeira, pois $L_3 - 3 = 4 - 3 = 1 = L_1$.

2. Vamos assumir que seja verdadeiro para $n = k$, ou seja:

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k = L_{k+2} - 3.$$

3. Vamos provar para $n = k + 1$, de fato:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + \cdots + L_k + L_{k+1} &= L_{k+2} - 3 + L_{k+1} \\ &= L_{k+1} + L_{k+2} - 3 \\ &= L_{k+3} - 3 \\ &= L_{(k+1)+2} - 3. \end{aligned}$$

Ou seja, a propriedade é verdadeira.

□

Propriedade 4.6. É verdade que:

$$L_0 + L_2 + L_4 + \cdots + L_{2n} = L_{2n+1} + 1,$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre $n \geq 0$.

1. Para $n = 0$, temos que $L_0 = 2 = 1 + 1 = L_1 + 1$.
2. Vamos supor que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k L_{2i} &= L_0 + L_2 + \cdots + L_{2k-1} + L_{2k} \\ &= L_{2k+1} + 1. \end{aligned}$$

3. Provemos para $n = k + 1$, de fato:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_{2i} &= L_0 + L_2 + \cdots + L_{2k} + L_{2(k+1)} \\ &= (L_0 + L_2 + \cdots + L_{2k}) + L_{2k+2}. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_{2i} &= L_{2k+1} + 1 + L_{2k+2} \\ &= L_{2k+3} + 1 \\ &= L_{2(k+1)+1} + 1. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade.

□

Propriedade 4.7. É verdade que:

$$L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2,$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre $n \geq 0$.

1. Para $n = 0$, temos que $L_{2 \cdot 0 + 1} = L_1 = 1 = 3 - 2 = L_2 - 2$.
2. Vamos supor ser verdadeiro para $n = k$, ou seja:

$$\sum_{i=0}^k L_{2i+1} = L_1 + L_3 + \cdots + L_{2k+1} = L_{2k+2} - 2.$$

3. Vamos provar para $n = k + 1$, de fato:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_{2i+1} &= L_1 + L_3 + \cdots + L_{2k+1} + L_{2(k+1)+1} \\ &= L_1 + L_3 + \cdots + L_{2k+1} + L_{2k+3}. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_{2i+1} &= L_{2k+2} - 2 + L_{2k+3} \\ &= L_{2k+4} - 2 \\ &= L_{2(k+1)+2} - 2. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 4.8. É verdade que:

$$L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} + 2,$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução para $n \geq 0$.

1. Para $n = 0$, temos que $L_0^2 = 2^2 = 4 = 2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = L_0 L_1 + 2$.
2. Vamos supor que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, ou seja:

$$\sum_{i=0}^k L_i^2 = L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_k^2 = L_k L_{k+1} + 2.$$

3. Vamos provar para $n = k + 1$, de fato:

$$\sum_{i=0}^{k+1} L_i^2 = L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_k^2 + L_{k+1}^2$$

Pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} L_i^2 &= L_k L_{k+1} + 2 + L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) + 2 \\ &= L_{k+1} L_{k+2} + 2. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. $\square$

Propriedade 4.9. O $(2n)$ -ésimo número de Lucas ao quadrado pode ser escrito como o número $(4n)$ -ésimo termo mais 2, ou seja:

$$L_{2n}^2 = L_{4n} + 2,$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Para essa demonstração vamos usar o Teorema 4.3, com isso teremos:

$$\begin{aligned} L_{2n}^2 &= (\alpha^{2n} + \beta^{2n})^2 \\ &= \alpha^{4n} + 2\alpha^{2n}\beta^{2n} + \beta^{4n} \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} + 2(\alpha\beta)^{2n}. \end{aligned}$$

Sendo assim, basta lembrarmos que $\alpha\beta = -1$ e $2n$ será sempre par, ou seja, $(\alpha\beta)^{2n} = 1$, portanto:

$$\begin{aligned} L_{2n}^2 &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} + 2(\alpha\beta)^{2n} \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} + 2 \\ &= L_{4n} + 2. \end{aligned}$$

$\square$

Propriedade 4.10. É válida a seguinte propriedade:

$$L_{2n+1}^2 = L_{4n+2} - 2,$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.3:

$$\begin{aligned} L_{2n+1}^2 &= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})^2 \\ &= \alpha^{4n+2} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n+1} + \beta^{4n+2} \\ &= \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Observe que $\alpha\beta = -1$ e $2n + 1$ é sempre um número ímpar, ou seja, $(\alpha\beta)^{2n+1} = -1$, sendo assim:

$$L_{2n+1}^2 = \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + 2(-1) = \alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2.$$

Por fim, basta usar novamente o Teorema 4.3:

$$L_{2n+1}^2 = L_{4n+2} - 2.$$

$\square$

Propriedade 4.11. É válida a seguinte propriedade:

$$L_{2n} = L_n^2 + 2(-1)^{n-1},$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Do Teorema 4.3 segue que:

$$\begin{aligned} L_{2n} &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} \\ &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 2\alpha^n \beta^n \\ &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 2(-1)^n \\ &= L_n^2 - 2(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 4.12. É verdade que:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 &= (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - [(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)] \\ &= \alpha^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{2n} - (\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}) \\ &= \alpha^{2n} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n} \\ &= \alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \beta^{n-1}\alpha^{n+1} - 2\alpha^n\beta^n \\ &= \alpha^n\alpha^{-1}\beta^n\beta^1 + \beta^n\beta^{-1}\alpha^n\alpha^1 - 2(-1)^n \\ &= \alpha^n(\alpha^{-1}\beta^n\beta + \beta^n\beta^{-1}\alpha) - 2(-1)^n \\ &= \alpha^n\beta^n(\alpha^{-1}\beta + \beta^{-1}\alpha) - 2(-1)^n \\ &= (-1)^n \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{-1} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{(\sqrt{5})^2}{-1} \right) = -5(-1)^n. \end{aligned}$$

Provando assim a propriedade. □

Propriedade 4.13. o n -ésimo termo de Lucas ao quadrado pode ser escrito através da fórmula

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n,$$

com $n \geq 0$.

Demonstração. Usando a Teorema 4.3, sabemos que

$$\begin{aligned} L_n^2 &= (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} \\ &= \alpha^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} \end{aligned}$$

Observe que já foi provado anteriormente que $\alpha\beta = -1$. Então

$$L_n^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n$$

Por fim $L_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n}$, ou seja

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$$

□

Propriedade 4.14. Para todo índice natural n dos números de Lucas, se $n \geq 2$, então é válido que $L_n > n$.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n .

1. Vamos mostrar que é verdadeiro para $n = 2$.

Se $n = 2$, então temos que $L_2 = 3$ e com isso, evidentemente, $L_2 > 2$.

2. Suponhamos que seja válido para todo n com $2 < n \leq k$, isto é, $L_n > n$, para $n \in \{3, \dots, k\}$.

3. Vamos provar que é válido para $n = k + 1$.

Podemos utilizar a definição dos números de Lucas onde $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$. Porém sabemos que $L_k > k$ e $L_{k-1} > k - 1$, logo $L_k + L_{k-1} > k + k - 1 = 2k - 1$. Por fim observe que $k > 2$ por hipótese, logo $2k - 1 = k + k - 1 > k + 2 - 1 = k + 1$, portanto $L_{k+1} > k + 1$.

□

Propriedade 4.15. É verdade que

$$\prod_{i=2}^n L_i > n!,$$

para $n \geq 2$.

Demonstração. Pela Propriedade 4.14, temos que $L_n > n$ para qualquer índice $n \geq 2$ dos números de Lucas. Portanto:

$$L_2 L_3 L_4 \dots L_{n-1} L_n > 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n$$

Porém observe que o lado direito pode ser escrito como: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n = n!$.

Por fim,

$$\prod_{i=2}^n L_i > n!$$

□

Propriedade 4.16. Dois números de Lucas consecutivos são primos entre si, ou seja, $(L_n, L_{n+1}) = 1$, com $n \geq 0$.

Demonstração. Vamos utilizar o algoritmo de Euclides (Teorema 2.7) para realizar essa demonstração. Tomemos o termo L_{n+1} e sabemos que:

$$L_{n+1} = L_n \cdot 1 + L_{n-1}.$$

Realizando novamente esse processo para L_n teremos:

$$L_n = L_{n-1} \cdot 1 + L_{n-2}.$$

Sendo assim se continuarmos a repetir esse processo n vezes teremos:

$$L_3 = L_2 \cdot 1 + L_1$$

$$L_2 = L_1 \cdot 3 + 0.$$

Logo o último resto não nulo obtido foi $L_1 = 1$. Com isso podemos observar que $(L_{n+1}, L_n) = (L_{n-1}, L_n) = \dots = (L_1, L_2) = 1$.

Portanto dois números de Lucas consecutivos são primos entre si. $\square$

Propriedade 4.17. A seguinte identidade é válida para a sequência de números de Lucas:

$$L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n+2}L_{n-1},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Observe que por diferença de quadrados podemos manipular a primeira parte da igualdade da seguinte forma:

$$L_{n+1}^2 - L_n^2 = (L_{n+1} + L_n)(L_{n+1} - L_n).$$

Sendo assim, basta observar que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ e $L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$. Logo, $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n+2}L_{n-1}$. $\square$

4.3 Expandindo a sequência de Lucas para índices inteiros negativos

Vimos que

$$\begin{array}{cccccccc} L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 \end{array} \quad \dots$$

Assim como fizemos com a sequência de Fibonacci, vamos expandir a sequência (L_n) para índices inteiros negativos. Considere $n > 0$ e vamos em busca de uma definição para L_{-n} .

Supondo que o Teorema 4.3 continue verdadeiro, temos:

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

Porém, vimos anteriormente que $\alpha\beta = -1$, ou seja, $\frac{1}{\alpha} = -\beta$ e $\frac{1}{\beta} = -\alpha$, logo podemos substituir na equação encontrada anteriormente.

$$L_{-n} = (-\beta)^n + (-\alpha)^n$$

Manipulando algebricamente:

$$L_{-n} = (-\beta)^n + (-\alpha)^n = (-1)^n(\beta^n + \alpha^n) = (-1)^n(\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n L_n$$

Sendo assim, podemos estender a sequência de Lucas para índices inteiros negativos da forma

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \tag{4.2}$$

Note então que a sequência ampliada fica:

$$\dots \quad \overset{L_{-7}}{\underset{||}{-29}} \quad \overset{L_{-6}}{\underset{||}{18}} \quad \overset{L_{-5}}{\underset{||}{-11}} \quad \overset{L_{-4}}{\underset{||}{7}} \quad \overset{L_{-3}}{\underset{||}{-4}} \quad \overset{L_{-2}}{\underset{||}{3}} \quad \overset{L_{-1}}{\underset{||}{-1}} \quad \overset{L_0}{\underset{||}{2}} \quad \overset{L_1}{\underset{||}{1}} \quad \overset{L_2}{\underset{||}{3}} \quad \overset{L_3}{\underset{||}{4}} \quad \overset{L_4}{\underset{||}{7}} \quad \overset{L_5}{\underset{||}{11}} \quad \overset{L_6}{\underset{||}{18}} \quad \overset{L_7}{\underset{||}{29}} \quad \dots$$

Se $n < 0$, os $(-n)$ -ésimos termos de Fibonacci ainda podem ser escritos como:

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

Apenas observe que se $n < 0$, então $-n > 0$ e pela Equação (4.2) segue:

$$L_{-(-n)} = (-1)^{-n} L_{-n}$$

Então:

$$L_{-n} = \frac{L_n}{(-1)^{-n}} = (-1)^n L_n$$

Portanto, a propriedade se mantém.

Sendo assim, pode-se garantir que:

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Observe que a lei de recorrência da sequência de Lucas se preserva:

$$\vdots$$

$$L_{-6} + L_{-5} = L_{-4}$$

$$L_{-5} + L_{-4} = L_{-3}$$

$$L_{-4} + L_{-3} = L_{-2}$$

$$L_{-3} + L_{-2} = L_{-1}$$

$$L_{-2} + L_{-1} = L_0$$

$$L_{-1} + L_0 = L_1$$

$$L_0 + L_1 = L_2$$

$$L_1 + L_2 = L_3$$

$$L_2 + L_3 = L_4$$

$$\vdots$$

De fato, note que:

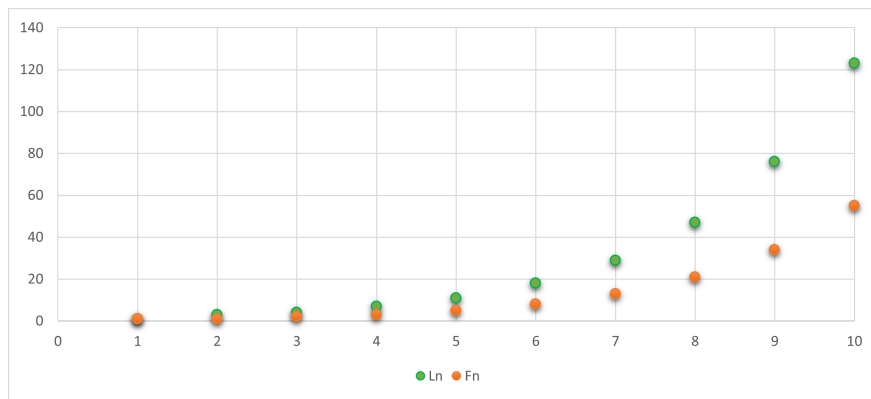
$$\begin{aligned} L_{-n} + L_{-(n+1)} &= (-1)^n L_n + (-1)^{n+1} L_{n+1} \\ &= (-1)^{n-1} (-1) L_n + (-1)^{n-1} (-1)^2 L_{n+1} \\ &= (-1)^{n-1} [L_{n+1} - L_n] \\ &= (-1)^{n-1} L_{n-1} \\ &= L_{-(n-1)} \end{aligned}$$

Desse modo, uma forma coerente para se propor uma expansão dos números de Lucas para índices inteiros negativos é:

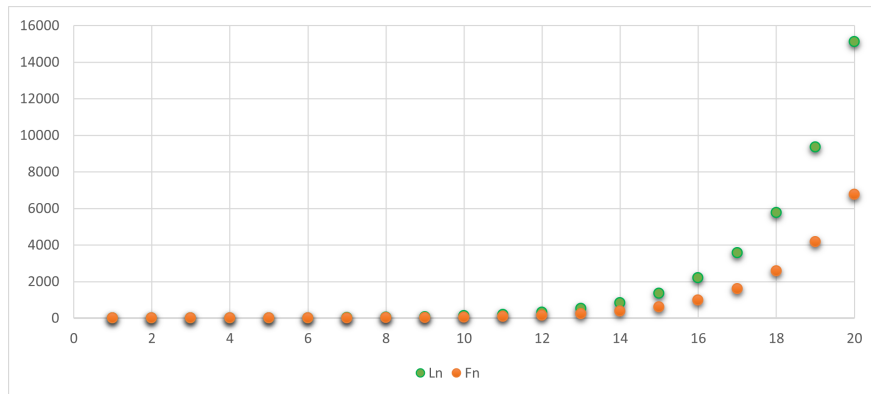
Definição 4.18. É chamada de Sequência de Lucas ou Números de Lucas a sequência infinita de números inteiros tais que $L_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ e $L_{-n} = (-1)^n L_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5 Conexões

A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas possuem várias relações entre si, que iremos explorar neste capítulo. A Figura 5.1 compara os primeiros termos das sequências de Fibonacci e de Lucas em um gráfico em conjunto.



(a) Primeiros 10 números de Fibonacci e de Lucas.



(b) Primeiros 20 números de Fibonacci e de Lucas.

Figura 5.1: Comparação entre os primeiros números de Fibonacci e de Lucas.
Fonte: O Autor.

5.1 Conexões gerais

Propriedade 5.1. O $(2n)$ -ésimo termo de Fibonacci é a multiplicação entre o n -ésimo termo de Fibonacci com o n -ésimo termo de Lucas, ou seja, $F_{2n} = F_n L_n$, com $n \geq 0$.

Demonstração. Basta usar o Teorema 3.5 e o Teorema 4.3. Note que:

$$F_{2n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}$$

Porém, $(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) = (\alpha^n - \beta^n) \cdot (\alpha^n + \beta^n)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{(\alpha^n - \beta^n) \cdot (\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \cdot (\alpha^n + \beta^n) \\ &= F_n L_n \end{aligned}$$

Provando, assim, a propriedade. □

Propriedade 5.2. O n -ésimo número de Lucas pode ser escrito como a soma do termo $(n-1)$ -ésimo e $(n+1)$ -ésimo dos números de Fibonacci, ou seja, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, com $n \geq 1$.

Demonstração. Tomemos o Teorema 3.5 para F_{n-1} e F_{n+1} .

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{-(\alpha\beta)\alpha^{n-1} + (\alpha\beta)\beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{-\alpha^n\beta + \beta^n\alpha + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^n + \beta^n = L_n. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.3. O n -ésimo número de Lucas é igual a soma do n -ésimo número de Fibonacci mais duas vezes o $(n-1)$ -ésimo número de Fibonacci, ou seja, $L_n = F_n + 2F_{n-1}$, com $n \geq 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 5.2, como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, então $L_n = F_{n-1} + (F_n + F_{n-1})$ e, assim, $L_n = F_n + 2F_{n-1}$. □

Propriedade 5.4. O n -ésimo número de Fibonacci somado ao n -ésimo número de Lucas é igual a duas vezes o $(n+1)$ -ésimo número de Fibonacci, ou seja, $F_n + L_n = 2F_{n+1}$, com $n \geq 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 5.2, temos

$$F_n + L_n = F_n + F_n + F_{n+1}.$$

Porém, sabemos que $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$, logo

$$\begin{aligned} F_n + L_n &= F_{n+1} - F_{n-1} + F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= F_{n+1} + F_{n+1} \\ &= 2F_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.5. Pode-se escrever o n -ésimo termo de Lucas como:

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2},$$

com $n \geq 2$.

Demonstração. A demonstração vem diretamente da Propriedade 5.2, pois sabemos que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e, além disso, $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$ e $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$. Dessa forma:

$$L_n = (F_{n+2} - F_n) + (F_n - F_{n-2}) = F_{n+2} - F_{n-2}.$$

Provando, assim, a propriedade.

□

Propriedade 5.6. É verdade que:

$$5F_n^2 = L_{2n} - 2(-1)^n,$$

com $n \geq 0$.

Demonstração.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Então:

$$5(F_n)^2 = 5 \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right)^2 = 5 \left(\frac{\alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n}}{5} \right).$$

Porém, sabemos que $\alpha\beta = -1$, assim $\alpha^n\beta^n = (-1)^n$. Substituindo na equação, temos

$$5F_n^2 = \alpha^{2n} - 2(-1)^n + \beta^{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n.$$

Por fim basta lembrarmos que $L_n = \alpha^n + \beta^n$, ou seja,

$$5F_n^2 = L_{2n} - 2(-1)^n.$$

□

Propriedade 5.7. É verdade que:

$$5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n,$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Basta isolar L_{2n} na Propriedade 4.13, ou seja,

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n.$$

Substituindo na Propriedade 5.6:

$$5F_n^2 = (L_n^2 - 2(-1)^n) - 2(-1)^n = L_n^2 - 4(-1)^n.$$

Provando, assim, a propriedade. $\square$

Propriedade 5.8. As raízes da Equação Quadrática de Fibonacci elevadas a n -ésima potência podem ser escritas da seguinte maneira: $\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}$ e $\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$, com $n \geq 0$.

Demonstração. Lembremos que $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $L_n = \alpha^n + \beta^n$, onde $\alpha - \beta = \sqrt{5}$. Sendo assim,

$$L_n + \sqrt{5}F_n = \alpha^n - \beta^n + \alpha^n + \beta^n = 2\alpha^n.$$

O que implica

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}.$$

Provando, assim, a primeira parte. Para β^n , obtemos:

$$\begin{aligned} L_n - \sqrt{5}F_n &= \alpha^n + \beta^n - (\alpha^n - \beta^n) \\ &= \alpha^n + \beta^n - \alpha^n + \beta^n \\ &= 2\beta^n. \end{aligned}$$

E, com isso,

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}.$$

$\square$

Propriedade 5.9. É verdade que:

$$F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n = 2 \cdot (-1)^n,$$

para $n \geq 0$.

Demonstração. Sabemos que $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Então:

$$\begin{aligned} F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^n + \beta^n) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{n+1}\alpha^n + \alpha^{n+1}\beta^n - \beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1} - \beta^{n+1}\alpha^n + \alpha^{n+1}\beta^n + \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{-\beta^{n+1}\alpha^n - \beta^{n+1}\alpha^n + \alpha^{n+1}\beta^n + \alpha^{n+1}\beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{2(\alpha^{n+1}\beta^n - \alpha^n\beta^{n+1})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{2(\alpha^n\beta^n)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= 2(-1)^n, \end{aligned}$$

pois $(\alpha\beta)^n = (-1)^n$

Ou seja, $F_{n+1}L_n - F_nL_{n+1} = 2(-1)^n$. □

A partir dessa última propriedade podemos provar outra.

Propriedade 5.10. Podemos relacionar os números de Lucas e Fibonacci através da fórmula:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Basta usar a propriedade anterior, ou seja,

$$F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n = 2(-1)^n.$$

Dividindo os dois lados por F_{2n} , tem-se:

$$\frac{F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n}{F_{2n}} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}}.$$

Pela Propriedade 5.1 $F_{2n} = F_nL_n$. Logo

$$\frac{F_{n+1}L_n}{F_nL_n} - \frac{L_{n+1}F_n}{F_nL_n} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}}.$$

Ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2(-1)^n}{F_{2n}}.$$

Provando, assim, a propriedade. □

Propriedade 5.11. É verdade que:

$$L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração. Vamos provar por indução em n . Mantendo m fixo temos:

1. Para $n = 1$, temos:

$$L_{m+1} = L_{m+1}F_1 + L_mF_0 = L_{m+1} \cdot 1 + L_m \cdot 0.$$

2. Vamos supor que seja válido para todo $1 < n \leq k$.

3. Vamos demonstrar para $n = k + 1$.

Observe que:

$$L_{m+(k+1)} = L_{m+k+1} = L_{m+k} + L_{m+(k-1)}$$

Porém, sabemos que a propriedade é válida para L_{m+k} e $L_{m+(k-1)}$. Logo

$$\begin{aligned} L_{m+(k+1)} &= L_{m+1}F_k + L_mF_{k-1} + L_{m+1}F_{k-1} + L_mF_{k-2} \\ &= L_{m+1}(F_k + F_{k-1}) + L_m(F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= L_{m+1}F_{k+1} + L_mF_k. \end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = k + 1$.

□

Propriedade 5.12. É verdade que:

$$F_{4n} = F_n(L_n^3 + 2(-1)^{n-1}L_n),$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 5.1, temos que:

$$F_{4n} = F_{2n}L_{2n}.$$

Sendo assim, pela Propriedade 4.11, segue:

$$F_{4n} = F_{2n}(L_n^2 + 2(-1)^{n-1}).$$

Repetindo o processo para F_{2n} , teremos:

$$F_{4n} = F_nL_n(L_n^2 + 2(-1)^{n-1}) = F_n(L_n^3 + 2(-1)^{n-1}L_n).$$

□

Propriedade 5.13. É verdade que:

$$F_{3n} = F_n(L_n^2 + (-1)^n),$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.5 e 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} F_n(L_n^2 + (-1)^n) &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + (-1)^n) \\ &= \frac{\alpha^{3n} + \alpha^n\beta^{2n} + \alpha^n(-1)^n - \alpha^{2n}\beta^n - \beta^{3n} - \beta^n(-1)^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n} + \alpha^n\beta^{2n} - \alpha^{2n}\beta^n + (-1)^n(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n} + \alpha^n(\beta^{2n} - \alpha^n\beta^n) + (-1)^n(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n} + \alpha^n\beta^n(\beta^n - \alpha^n) + (-1)^n(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n} - (-1)^n(\alpha^n - \beta^n) + (-1)^n(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\alpha - \beta} = F_{3n}. \end{aligned}$$

Provando, assim, a propriedade.

□

Propriedade 5.14. O n -ésimo número de Fibonacci pode ser escrito como a quinta parte da soma do $(n-1)$ -ésimo com o $(n+1)$ -ésimo número de Lucas, ou seja:

$$F_n = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}),$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Para isso, basta tomarmos $\frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1})$ e usarmos a Propriedade 5.2, com isso teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}) &= \frac{1}{5}((F_{n-2} + F_n) + (F_n + F_{n+2})) \\ &= \frac{1}{5}(2F_n + F_{n+2} + F_{n-2}) \\ &= \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}(2F_n + (F_{n+1} + F_n) + (F_n - F_{n-1})) \\ &= \frac{1}{5}(4F_n + F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}) \\ &= \frac{1}{5}(4F_n + F_n) \\ &= \frac{1}{5}(5F_n) = F_n. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.15. A seguinte identidade é válida:

$$5F_{2n}^2 = L_{4n} - 2,$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Para essa demonstração, começaremos com o Teorema 3.5.

$$\begin{aligned} 5F_{2n}^2 &= 5 \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= 5 \left(\frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})^2}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= 5 \left(\frac{\alpha^{4n} - 2\alpha^{2n}\beta^{2n} + \beta^{4n}}{(\alpha - \beta)^2} \right). \end{aligned}$$

Observe que $\alpha^{2n}\beta^{2n}$ pode ser escrito como $(\alpha\beta)^{2n}$. Também, note que $\alpha\beta = -1$ e $2n$ é sempre um número par, ou seja, podemos entender que $(\alpha\beta)^{2n} = 1$. Sendo assim:

$$5F_{2n}^2 = 5 \left(\frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2(\alpha\beta)^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \right) = 5 \left(\frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2}{(\alpha - \beta)^2} \right).$$

Por fim, pelo Teorema 4.3 e como $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, temos que:

$$5F_{2n}^2 = 5 \left(\frac{L_{4n} - 2}{(\sqrt{5})^2} \right) = 5 \left(\frac{L_{4n} - 2}{5} \right) = L_{4n} - 2.$$

□

Propriedade 5.16. A seguinte propriedade é válida:

$$5F_{2n+1}^2 = L_{4n+2} + 2,$$

onde $n \geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, temos:

$$\begin{aligned} 5F_{2n+1}^2 &= 5 \left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= 5 \left(\frac{(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= 5 \left(\frac{\alpha^{4n+2} - 2(\alpha\beta)^{2n+1} + \beta^{4n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \right). \end{aligned}$$

Observe que $\alpha\beta = -1$ e $2n + 1$ é sempre um número ímpar, ou seja, $(\alpha\beta)^{2n+1} = -1$. Sendo assim:

$$5F_{2n+1}^2 = 5 \left(\frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + 2}{(\alpha - \beta)^2} \right).$$

Por fim, observe que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, sendo assim, pelo Teorema 4.3, segue que:

$$5F_{2n+1}^2 = 5 \left(\frac{L_{4n+2} + 2}{(\sqrt{5})^2} \right) = 5 \left(\frac{L_{4n+2} + 2}{5} \right) = L_{4n+2} + 2.$$

□

Propriedade 5.17. É válida a seguinte propriedade:

$$L_{n-k}L_{n+k} - L_n^2 = 5(-1)^{n+k}F_k^2,$$

onde $n \geq 0$ e $k \geq 0$.

Demonstração. Do Teorema 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} L_{n-k}L_{n+k} - L_n^2 &= (\alpha^{n-k} + \beta^{n-k})(\alpha^{n+k} + \beta^{n+k}) - (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^n + \beta^n) \\ &= \alpha^{2n} + \alpha^{n-k}\beta^{n+k} + \beta^{n-k}\alpha^{n+k} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n \\ &= \alpha^{n-k}\beta^{n+k} + \beta^{n-k}\alpha^{n+k} - 2\alpha^n\beta^n \\ &= \alpha^n(\alpha^{-k}\beta^{n+k} + \alpha^k\beta^{n-k}) - 2(-1)^n \\ &= \alpha^n\beta^n(\alpha^{-k}\beta^k + \alpha^k\beta^{-k}) - 2(-1)^n \\ &= (-1)^n \left(\frac{\beta^k}{\alpha^k} + \frac{\alpha^k}{\beta^k} - 2 \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\beta^{2k} + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\beta^{2k} + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k}{(-1)^k} \right) \\ &= (-1)^{n+k}(\beta^{2k} + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k) \\ &= (-1)^{n+k}(\alpha^k - \beta^k)^2 \\ &= (-1)^{n+k}(\sqrt{5})^2 \frac{(\alpha^k - \beta^k)^2}{(\sqrt{5})^2} \\ &= (-1)^{n+k}5 \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= 5(-1)^{n+k}F_k^2. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.18. É válida a seguinte propriedade:

$$F_k L_n = F_{n+k} + (-1)^{k+1} F_{n-k},$$

onde $n \geq 0$ e $k \geq 0$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.5 e 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} L_n F_k &= (\alpha^n + \beta^n) \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{\alpha^{n+k} - \alpha^n \beta^k + \alpha^k \beta^n - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^k \beta^n - \alpha^n \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + \alpha^k \left(\frac{\beta^n - \alpha^{n-k} \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + \alpha^k \beta^k \left(\frac{\beta^{n-k} - \alpha^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + (-1)^{k+1} \left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + (-1)^{k+1} F_{n-k}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.19. É válida a seguinte propriedade:

$$F_n L_k = F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k},$$

onde $n \geq 0$ e $k \geq 0$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.5 e 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} F_n L_k &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^k + \beta^k) \\ &= \frac{\alpha^{n+k} + \alpha^n \beta^k - \alpha^k \beta^n - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^n \beta^k - \alpha^k \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + \left(\frac{\alpha^n \beta^k - \alpha^k \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + \frac{\alpha^k (\alpha^{n-k} \beta^k - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= F_{n+k} + \frac{\alpha^k \beta^k (\alpha^{n-k} - \beta^{n-k})}{\alpha - \beta} \\ &= F_{n+k} + (-1)^k \left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.20. É válida a seguinte propriedade:

$$F_{n+k}^2 - F_{n-k}^2 = F_{2n}F_{2k},$$

onde $n \geq 0$ e $k \geq 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 5.1, temos:

$$F_{2n}F_{2k} = F_nL_nF_kL_k = F_nL_kF_kL_n.$$

Com isso, caso k seja par, pelas Propriedades 5.18 e 5.19 temos que:

$$\begin{aligned} F_{2n}F_{2k} &= F_nL_kF_kL_n \\ &= (F_{n+k} + F_{n-k})(F_{n+k} - F_{n-k}) \\ &= F_{n+k}^2 - F_{n-k}^2. \end{aligned}$$

Caso k seja ímpar, pelas Propriedades 5.18 e 5.19, temos que:

$$\begin{aligned} F_{2n}F_{2k} &= F_nL_kF_kL_n \\ &= (F_{n+k} - F_{n-k})(F_{n+k} + F_{n-k}) \\ &= F_{n+k}^2 - F_{n-k}^2. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.21. É verdade que:

$$L_nF_{m-n} + F_nL_{m-n} = 2F_m,$$

onde $n \geq 0$ e $m \geq 0$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.5 e 4.3, temos que:

$$\begin{aligned} L_nF_{m-n} + F_nL_{m-n} &= (\alpha^n + \beta^n) \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} L_nF_{m-n} + F_nL_{m-n} &= \left(\frac{\alpha^n\alpha^{m-n} - \alpha^n\beta^{m-n} + \alpha^{m-n}\beta^n - \beta^n\beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^n\alpha^{m-n} - \alpha^{m-n}\beta^n + \alpha^n\beta^{m-n} - \beta^n\beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} L_nF_{m-n} + F_nL_{m-n} &= \frac{\alpha^m - \beta^m + \alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \\ &= 2F_m. \end{aligned}$$

□

5.2 Outros teoremas de Leonard Carlitz

A seguir estudaremos dois teoremas sobre divisibilidade entre números de Fibonacci e de Lucas. Tais resultados foram apresentados por Leonard Carlitz, em 1964, em um artigo na *The Fibonacci Quarterly* e complementam o Teorema 3.19. As demonstrações aqui apresentadas foram por nós elaboradas, uma vez que em seu artigo original, Carlitz basicamente apenas enuncia tais resultados.

Teorema 5.22. *Sejam L_n e L_m dois números quaisquer de Lucas, $L_m \mid L_n$ se, e somente se $n = (2k - 1)m$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Provemos que se $n = (2k - 1)m = 2km - m$, então $L_m \mid L_n$, onde $k \in \mathbb{N}$. Faremos por indução sobre k .

1. Para $k = 1$, $L_m \mid L_{1 \cdot m}$ é verdadeiro.
2. Suponha que $L_m \mid L_{2km-m}$.
3. Provemos que $L_m \mid L_{(2(k+1)-1)m}$.

$$L_{(2(k+1)-1)m} = L_{(2k+2-1)m} = L_{2km+m} = L_{(2km-m)+2m} = L_{2km-m+1}F_{2m} + L_{2km-m}F_{2m-1}.$$

Como $L_m \mid F_{2m}$, temos que $L_m \mid L_{2km-m+1}F_{2m}$. Também, $L_m \mid L_{2km-m}$ por hipótese de indução e então $L_m \mid L_{2km-m}F_{2m-1}$. Dessa forma, $L_m \mid L_{2km+m}$, isto é, $L_m \mid L_{(2(k+1)-1)m}$.

Portanto, está provado o resultado.

($\Rightarrow$) Assumindo que $n = (2k - 1)m + r$, com $0 \leq r < m$, temos:

$$\begin{aligned} L_n &= \alpha^n + \beta^n = \alpha^{(2k-1)m+r} + \beta^{(2k-1)m+r} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\alpha^r + \beta^{(2k-1)m}\beta^r \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\alpha^r - \beta^r\alpha^{(2k-1)m} + \beta^r\alpha^{(2k-1)m} + \beta^{(2k-1)m}\beta^r \\ &= \alpha^{(2k-1)m}(\alpha^r - \beta^r) + \beta^r L_{(2k-1)m} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}(\alpha - \beta)F_r + \beta^r L_{(2k-1)m} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\sqrt{5}F_r + \beta^r L_{(2k-1)m}. \end{aligned}$$

Como $L_m \mid L_n$ e $L_m \mid L_{(2k-1)m}$, então $L_m \mid F_r$. Uma vez que $0 \leq r < m$, segue que $r = 0$. Portanto $n = (2k - 1)m$. $\square$

Note que $L_n \geq F_n$ se $n \geq 1$. Então:

Lema 5.23. *Se $L_m \mid F_r$ e $r \neq 0$, então $r \geq m$.*

Demonstração. Suponha $L_m \mid F_r$ e $r < m$. Então $F_r \geq L_m$ e $r < m$. Absurdo! $\square$

Teorema 5.24. *Sejam L_n e F_m um número de Lucas e um número de Fibonacci quaisquer, respectivamente, $L_m \mid F_n$ se, e somente se, $n = 2mk$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Provemos que se $n = 2mk$, então $L_m \mid F_n$, onde $k \in \mathbb{N}$. Faremos por indução sobre k .

1. Para $k = 1$, $n = 2m$ e sabemos que $L_m \mid F_{2m}$ da Propriedade 5.1.
2. Suponha que $L_m \mid F_{2mk}$.
3. Provemos para $k + 1$.

$$F_{2m(k+1)} = F_{2mk+2m}$$

Da Propriedade 3.18:

$$F_{2mk+2m} = F_{2mk-1}F_{2m} + F_{2mk}F_{2m+1}$$

Sabemos que $L_m \mid F_{2mk-1}F_{2m}$, pois $L_m \mid F_{2m}$. Também sabemos que $L_m \mid F_{2mk}F_{2m+1}$, pois, pela hipótese de indução, $L_m \mid F_{2mk}$.

Portanto, $L_m \mid (F_{2mk-1}F_{2m} + F_{2mk}F_{2m+1})$, isto é, $L_m \mid F_{2m(k+1)}$.

Provando, assim, o resultado.

($\Rightarrow$) Do algoritmo da divisão, existem inteiros k e r tais que $n = 2mk + r$ com $0 \leq r < 2m$. Então:

$$\begin{aligned} \alpha^n - \beta^n &= \alpha^{2mk+r} - \beta^{2mk+r} \\ &= \alpha^{2mk+r} - \alpha^r \beta^{2mk} + \alpha^r \beta^{2mk} - \beta^{2mk+r} \\ &= \alpha^{2mk} \alpha^r - \alpha^r \beta^{2mk} + \alpha^r \beta^{2mk} - \beta^{2mk} \beta^r \\ &= \alpha^r (\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}) + \beta^{2mk} (\alpha^r - \beta^r). \end{aligned}$$

Logo

$$\alpha^n - \beta^n = \alpha^r (\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}) + \beta^{2mk} (\alpha^r - \beta^r).$$

E portanto

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^r \left(\frac{\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}}{\alpha - \beta} \right) + \beta^{2mk} \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right).$$

Assim

$$F_n = \alpha^r F_{2mk} + \beta^{2mk} F_r.$$

Como $L_m \mid F_n$, então $L_m \mid F_r$, pois $L_m \mid F_{2mk}$.

Suponha que $r \neq 0$, pelo Lema 5.23, $r \geq m$, isto é, $r - m \geq 0$. Pelo Teorema 3.5:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)F_r &= \alpha^r - \beta^r \\ &= \alpha^{r-m} \alpha^m - \beta^{r-m} \beta^m \\ &= \alpha^{r-m} (L_m - \beta^m) - \beta^m (L_{r-m} - \alpha^{r-m}) \\ &= \alpha^{r-m} L_m - \alpha^{r-m} \beta^m - \beta^m L_{r-m} + \alpha^{r-m} \beta^m \\ &= \alpha^{r-m} L_m - \beta^m L_{r-m}. \end{aligned}$$

Logo

$$(\alpha - \beta)F_r = \alpha^{r-m} L_m - \beta^m L_{r-m}$$

Como $L_m \mid F_r$ e $L_m \mid L_m$, segue que $L_m \mid L_{r-m}$. Absurdo! Portanto $r = 0$.

Assim $n = 2mk$. □

6 Considerações Finais

Em síntese, este trabalho visou enunciar e demonstrar diversas propriedades e teoremas dos números de Lucas e Fibonacci, além de trazer algumas conexões entre essas duas sequências.

O texto se inicia trazendo o conteúdo necessário para a compreensão do trabalho, começando pelo Princípio da Boa Ordenação, pelo Princípio da Indução Finita e pelo Teorema Binomial. Também enunciamos e demonstramos resultados sobre divisibilidade e congruência módulo m . Logo após, entramos em um contexto histórico sobre a sequência de Fibonacci, trazendo o “problema dos coelhos” que originou a sequência e, através da Proporção Áurea, encontramos a Equação Quadrática de Fibonacci. A partir das raízes produzidas por essa equação, estudamos o Teorema de Binet, que permitiu a demonstração de outras propriedades gerais, algumas particularidades combinatórias e propriedades envolvendo divisibilidade. Por fim, expandimos o conceito dos números de Fibonacci para índices inteiros negativos, trazendo uma definição para a sequência expandida. Posteriormente, trazemos o contexto histórico dos estudos de Lucas, que deram origem a sua sequência. Apresentamos um teorema equivalente ao de Binet para os números de Lucas, possibilitando demonstrar diversas propriedades. Também expandimos o conceito dos números de Lucas para índices inteiros negativos. E, finalmente, através dos teoremas e propriedades já apresentados no texto, trabalhamos propriedades que envolvem os números de Lucas e de Fibonacci ao mesmo tempo, trazendo resultados importantes como os teoremas de L. Carlitz, tais quais trazem resultados importantíssimos para o estudo algébrico dessas duas sequências.

Além da abordagem detalhada e didática que fizemos, vale destacar a originalidade de demonstrações de diversos resultados deste texto, como, por exemplo, os dois teoremas apresentados na seção 5.2. Tais teoremas trazem resultados apresentados por Carlitz, mas sem uma demonstração matematicamente rigorosa. Também não pudemos encontrar na literatura nada semelhante com a demonstração que fizemos para o fato de $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$, desconsiderando a sequência de Lucas. Para esse último resultado, agradecemos as sugestões preciosas do Prof. Dr. João Peres Vieira sobre a nossa primeira versão da prova (apresentada na qualificação deste trabalho).

Estudos sobre sequências de números inteiros e sequências generalizadas de Fibonacci estão ainda em voga, sendo, inclusive, destacados como temáticas na classificação internacional MSC2020 - *Mathematics Subject Classification System*, por exemplo, nas linhas 11B39 (*Fibonacci and Lucas numbers and polynomials and generalizations*), 11B83 (*Special sequences and polynomials*), 11Y55 (*Calculation of integer sequences*), entre outras. Em 1963, foi criada a *The Fibonacci Association*, que incentiva estudos sobre Álgebra e Teoria dos Números envolvendo sequências de números especiais, publica livros, além de organizar uma conferência, a cada dois anos, intitulada “*International Conference on*

Fibonacci Numbers and Their Applications". Também, ainda estabelecido pela *The Fibonacci Association*, existe o periódico acadêmico *The Fibonacci Quarterly*, que publica, desde 1963, até os dias atuais, artigos sobre números de Fibonacci e assuntos relacionados. Dentro deste rico universo, esperamos que este trabalho seja uma contribuição para todos que desejarem se iniciar nos estudos neste tema.

Referências

- [1] GRIGAS, A. *The Fibonacci Sequence, It's History, Significance, and Manifestations in Nature*. Lynchburg, Virginia: Tese Sênior no Programa de Honras da Liberty University, 2013.
- [2] HOGGATT, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. 1. ed. California: Santa Clara: The Fibonacci Association, 1979.
- [3] SILVA, B. A. *Números de Fibonacci e números de Lucas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- [4] HARKIN, D. On the mathematical works of François Edouard Anatole Lucas. *Enseignement mathématique*, v. 3, p. 276–288, 1957.
- [5] SAMPAIO, J. C. V.; CAETANO, P. A. S. *Introdução à Teoria dos Números*. São Carlos: EdUFSCar, 2014.
- [6] LEE, G. T. *Abstract Algebra*. Gewerbestrasse 11, 6330 Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [7] SHOKRANIAN, S. *Uma Introdução a Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- [8] CALDEIRA, J. A aritmética da sequência de Fibonacci. *Anais do IV Workshop de Álgebra da UFG-CAC*, v. 1, p. 1–26, 2015.
- [9] CARLITZ, L. A note on Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 2, p. 15–28, 1964.
- [10] GUSMAO, G. A. P. Sobre uma questão da IX Olimpíada. *Revista IME*, v. 2, p. 42–46, 2001.
- [11] GUSMAO, G. A. P. A sequência de Fibonacci. *Revista IME*, v. 4, p. 55–71, 2003.
- [12] PEREIRA, F. C. *Números de Fibonacci: propriedades e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2022.