



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.007/02

Limite de Acoplamento Forte da QCD e a Interação Méson-Méson.

Patrícia Soares Morales

Orientador

Prof. Dr. Gastão I. Krein

Março de 2002

Para meus pais,

Assis e Iêda.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Prof. Gastão, por ter me aceitado como aluna e por ter tido paciência em me ensinar.

À minha família pelo constante carinho e apoio.

Ao Rodrigo, pela paciência e pelo companheirismo.

Aos meus amigos de sempre, que estão no meu Rio Grande de Sul amado: Tati, Marcos e Fabi.

Aos amigos que encontrei aqui em São Paulo e que fizeram mais tranquila e divertida esta etapa da minha trajetória.

Ao Sérgio e ao Wanderson pela ajuda com os gráficos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O mecanismo de rearranjo de tubos de fluxo predito no limite de acoplamento forte da formulação Hamiltoniana da QCD na rede foi implementado num modelo de quarks constituintes e suas consequências investigadas para o espalhamento méson-méson. O rearranjo de tubos de fluxo leva a efeitos similares aos tradicionais efeitos de troca de quarks com troca de um glúon em interações hádron-hádron. Contudo, enquanto o primeiro está relacionado ao regime de confinamento da QCD, o último está relacionado ao regime de liberdade assintótica desta teoria. Mostra-se aqui que ambos mecanismos levam a resultados qualitativamente similares quando o potencial de rearranjo pode ser escrito como a soma de interações locais quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark. Para interações gerais, não locais e de longo alcance, o rearranjo de tubos de fluxo leva a resultados qualitativa e quantitativamente diferentes dos resultados de troca de quarks com troca de um glúon. As consequências disso para a fenomenologia das interações hádron-hádron são discutidas.

Palavras Chaves: Cromodinâmica Quântica; Modelo de Quarks; Rearranjo de Tubos de Fluxo, Troca de Quarks, Interação Méson-Méson

Áreas do conhecimento: 12.38; 11.30.R; 12.39; 21.30

Abstract

The mechanism of link rearrangement predicted in the strong coupling limit of Hamiltonian lattice QCD is implemented in a constituent quark model and its consequences for meson-meson scattering are investigated. Link rearrangement leads to effects similar to the traditional quark exchange with one gluon exchange in hadron-hadron interactions. However while the first is related to the confinement regime of QCD, the latter is related to the asymptotic freedom regime of this theory. It is shown here that both mechanisms lead to identical qualitative results when the rearrangement potential can be written as a sum of local quark-quark, antiquark-antiquark and quark-antiquark interactions. For general, long-range nonlocal interactions, link rearrangement leads to results qualitative and quantitatively different from those of quark exchange with one gluon exchange. The consequences of this for the phenomenology of hadron-hadron interactions are discussed.

Key words: Quantum Chromodynamics; Quark Models; Link Rearrangement, Quark Exchange, Meson-Meson Interaction

Índice

1	Introdução	3
2	O Modelo de Quarks	10
2.1	Os quarks e a interação forte	12
2.2	Simetria de sabor	14
2.3	Mésons: estados $q\bar{q}$	14
2.4	Bárions: estados qqq	15
2.5	Simetria de Isospin	15
2.6	Simetria Quiral	16
2.7	Modelo de quarks constituintes	18
3	O modelo de Greenberg e Hietarinta e a QCD	26
3.1	O Modelo de Greenberg e Hietarinta	26
3.2	Introdução formal do modelo	27
3.3	A QCD no Limite de Acoplamento Forte (SCQCD)	37
3.3.1	Formulação Hamiltoniana da QCD na Rede	38
3.3.2	O modelo de Greenberg e Hietarinta e SCQCD	43
4	Potenciais Efetivos para a Interação Méson-Méson	52
4.1	Amplitude de espalhamento, Matriz-S e Seção de Choque	54
4.2	Quark-Born Diagram Method (QBD).	56
4.3	Rearranjo de links - <i>quark exchange</i>	60
5	Conclusões e Perspectivas	68
A	Notação Compacta	71

<i>Índice</i>	<i>2</i>
B Cálculo da amplitude de espalhamento	72
C Cálculo das integrais espaciais	79
C.1 Potencial de contato	79
C.2 Potencial do tipo gaussiano	80
Referências	81

Capítulo 1

Introdução

Segundo o modelo padrão das interações fundamentais e partículas elementares, são quatro as interações, ou forças, fundamentais: a gravitacional, a eletromagnética, a fraca e a forte. Esta classificação tem como base propriedades intrínsecas dos sistemas físicos que atuam como fontes para os diferentes campos de interação. A força gravitacional atua sobre todos os sistemas físicos, a fonte relevante é massa e energia. A força eletromagnética atua sobre sistemas que carregam a familiar *carga elétrica*, como elétrons, prótons, núcleos atômicos, quarks, etc. A força fraca atua sobre sistemas que carregam a menos familiar *carga de sabor (flavor)*, como os neutrinos, múons, quarks, etc. A força forte atua sobre a ainda menos familiar *carga de cor (color)*, carregada por quarks e glúons.

As interações eletromagnética e fraca podem ser consideradas como sendo duas manifestações de uma única interação - a eletrofraca. Isto devido ao fato de elas poderem ser descritas através de uma única Lagrangiana do tipo Yang-Mills [1], a qual é invariante sob o grupo de simetria *local* $U(1) \times SU(2)$ - o grupo $U(1)$ corresponde à carga elétrica e o grupo $SU(2)$ aos sabores. O nome *local* vem associado ao fato de os parâmetros do grupo dependerem das coordenadas do espaço-tempo, e a transformação de simetria é chamada de transformação de *calibre (gauge)*. O sucesso desta *unificação* alcançada pela teoria de calibre eletrofraca serviu de paradigma para a construção de uma teoria de calibre para as interações fortes, a cromodinâmica quântica (QCD).

Historicamente, a QCD teve sua origem no modelo de quarks, o qual foi desenvolvido na década de 60 como resultado de estudos do espectro dos *hádrons*.

A palavra hádron significa pesado em grego, e foi associado a partículas que eram muito mais pesadas que os elétrons. Os hádrons se sub-dividem em *mésons* e *bárions*. Os mésons têm spin inteiro, e os bárions têm spin semi-inteiro. Além dessa separação pelo spin, foi possível separar os mésons e bárions em subgrupos, chamados multipletos, de acordo com paridade e outros números quânticos que foram introduzidos, como o *isospin*. Por exemplo, o nêutron e o próton são muito parecidos; possuem o mesmo spin, a mesma paridade, suas massas são praticamente idênticas - elas diferem de somente 1,3 MeV - e a única diferença marcante é a carga elétrica que carregam. Em analogia com o spin, foi introduzido o isospin: o nêutron e o próton são uma única partícula, o nucleon, que aparece em dois estados diferentes, formando um dubleto de isospin. Outro exemplo é o tripleto de píons: π^- (139,6 MeV), π^0 (134,9 MeV), e π^+ (139,6 MeV) - os números entre parênteses indicam a massa das partículas. Apesar da simetria de isospin não ser exata, pois as massas das partículas de um mesmo multipletto não são idênticas, o conceito de simetria mostrou-se muito útil para a classificação dos hádrons e a construção de uma teoria de campos para a interação forte.

Novos bárions e mésons que interagiam fortemente foram descobertos, mas que comportavam-se de maneira *estranha* - eram conservados em número quando interagiam entre si, mas em certos decaimentos essa conservação não se verificava. A estas partículas foi atribuído um novo número quântico intrínseco, a *estranheza*. Com o aumento da energia dos aceleradores, ainda outros mésons e bárions foram produzidos, para os quais foi necessário atribuir um outro número quântico, o *charme*. Desta forma, verificou-se que bárions e mésons poderiam ser classificados em multipletos pertencentes a representações de grupos unitários de transformações de simetrias. Houve uma rápida proliferação de mésons e bárions que se encaixavam em estruturas de multipletos de dimensões elevadas, como octetos, nonetos e decupletos.

A questão que imediatamente se impôs foi o porquê do agrupamento dos mésons e bárions em estruturas de multipletos. A resposta foi que os multipletos de ordem elevada eram resultado de uma estrutura básica elementar, cujos estados formariam a representação fundamental de um grupo de simetria [2]. As partículas da represen-

tação fundamental foram chamadas de *quarks*, que apareciam em estados de *sabores*: u, d, s, c - *up*, *down*, *strange*, *charm*. Um próton, por exemplo, seria formado por dois quarks u e um d , e um nêutron por dois quarks d e um u . Uma das consequências disso, é que os quarks teriam cargas fracionárias, $\pm 1/3, \pm 2/3$. Outros dois sabores, t, b - *top* e *bottom*, completam a lista dos sabores de quarks conhecidos atualmente.

Apesar dos quarks terem sido considerados inicialmente como elementos matemáticos, sem significado físico, não custou muito para que a idéia fosse levada a sério, com tentativas de postular uma dinâmica para eles. Seguindo a tradição em outros campos da Física, como a Física Nuclear, na ausência de um melhor conhecimento da dinâmica, um potencial de interação entre os quarks foi postulado e a equação de Schrödinger resolvida para quarks com massas aproximadamente iguais a $1/3$ da massa do próton. Massas e outras propriedades estáticas de hádrons foram calculadas dentro desse contexto. A não observação de quarks com cargas elétricas fracionárias levou à hipótese do *confinamento dos quarks*, e o potencial de interação entre quarks naturalmente, era da forma que cresce com a distância de separação entre os quarks.

As tentativas de calcular espectros de bárions e mésons defrontou-se com um problema de princípio: alguns estados bariônicos aparentemente violavam o princípio de exclusão de Pauli. Havia estados bariônicos cujos estados de mais baixa energia eram ocupados por três quarks idênticos - mesmo spin e mesmo sabor. A solução para o problema veio [3] com o postulado da existência de um novo número quântico, a *cor*: cada quark aparece em três cores. Para compatibilizar com o fato experimental da inexistência de estados hadrônicos *coloridos*, foi feito o postulado adicional que bárions e mésons são estados *singletos* de cor.

Concomitantemente aos estudos de classificação e espectroscopia dos hádrons, experiências de espalhamento inelástico de elétrons a altas energias por prótons indicavam [4] a existência de centros espalhadores não interagentes com spin $1/2$ no interior do próton. Além disso, essas experiências também indicavam a existência de constituintes bosônicos, os quais carregavam 50% do momentum total do próton. Foi dado o nome genérico de *pártons* a ambos constituintes fermiônicos e bosônicos. A

conexão entre pártons fermiônicos e quarks não custou muito a ser feita e a sugestão que uma teoria quântica de campos de calibre, nos moldes da teoria eletrofraca, para as interações fortes foi mais ou menos imediata. Os graus de liberdade fundamentais seriam partículas fermiônicas de spin $1/2$ - os quarks, que aparecem em três cores na representação fundamental do grupo de simetria local $SU(3)$, e partículas bosônicas de spin 1 - os glúons, em número de oito na representação adjunta desse grupo.

Um impulso na direção de consolidar essa construção matemática como uma teoria física foi a demonstração [5] que ela era assintoticamente livre, i.e., a interação entre dois quarks, por exemplo, torna-se cada vez mais fraca a altas energias e altos momentos transferidos (ou distâncias relativas mais pequenas). A relevância dessa propriedade da teoria para os espalhamentos de elétrons a altas energias foi imediatamente reconhecida e a teoria passou a ser considerada seriamente. A teoria passou-se a chamar de cromodinâmica quântica - QCD.

O fato que a interação se tornar fraca para processos a altas energias e altos momentos transferidos permite que se use a familiar teoria de perturbações baseada nos diagramas de Feynman para efetuar cálculos analíticos sistemáticos e precisos. Há uma extensa literatura em QCD perturbativa que testemunha o grande sucesso dessa teoria em descrever precisamente esses processos. Por outro lado, processos a baixas energias e/ou baixos momentos transferidos, a interação não é fraca, e os tradicionais métodos perturbativos não podem ser empregados. O fenômeno do confinamento dos quarks e glúons, por exemplo, é um fenômeno tipicamente não-perturbativo. A única maneira conhecida de se realizar cálculos de primeiros princípios na fase não perturbativa da QCD é o emprego da QCD na rede [6]. Trata-se de formular a teoria numa rede discreta do espaço-tempo Euclidiano, em que os quarks aparecem nos sítios da rede e os glúons nas conexões entre os sítios. Os observáveis que originalmente na teoria do contínuo seriam calculados a partir de integrais de trajetória, são agora calculados em analogia com problemas de mecânica estatística, através de valores esperados e funções de partição. O limite do contínuo é um ponto crítico da mecânica estatística associada.

Um problema com a QCD na rede é a necessidade do emprego de computação

de alto desempenho, cujas tecnologias associadas ainda não estão suficientemente desenvolvidas para cálculos que sejam realistas o suficiente para comparar com dados experimentais. Por causa disso, o emprego de modelos fenomenológicos é uma parte importante para fazer progresso no estudo da fase não perturbativa da QCD. Nesse contexto, o modelo de quarks não-relativístico idealizado na era pré-QCD ainda reina soberano entre os modelos fenomenológicos, tanto em estudos de espectroscopia hadrônica, quanto em estudos das interações hádron-hádron a baixas energias. Com o advento da QCD, o modelo não-relativístico original foi suplementado com a adição da troca de um glúon (OGE) entre os quarks ao potencial confinante [7]. A parte dominante da interação OGE nesse modelo é uma interação de contato do tipo spin-spin, a qual é a principal responsável pela diferença de massas do próton e da $\Delta(1232)$, e dos mésons π e ρ .

Estudos da interação núcleon-núcleon (NN) no contexto desse modelo de quarks não-relativístico com OGE, empregando diferentes técnicas para descrever o movimento relativo dos hádrons, tais como *resonating group method (RGM)* [8], ou *quark-Born diagram method* [9], ou *Fock-Tani* [10], mostram que a repulsão de curto alcance NN é o resultado combinado da componente spin-spin da interação OGE e o princípio de exclusão de Pauli. A repulsão devida ao princípio de Pauli ocorre quando quarks idênticos pertencentes a nucleons diferentes se encontram na região de superposição entre os nucleons, levando a um efeito de troca - *quark exchange*. Há uma extensa literatura nesse assunto, essencialmente descrevendo os sucessos de estudos de interações hádron-hádron nesse contexto. No entanto, há alguns indícios que o mecanismo de quark-exchange pode não ser o principal responsável pela repulsão de curto alcance. Há indícios teóricos [11] [12] e fenomenológicos [13].

Os indícios teóricos vêm da QCD, mais precisamente do limite de acoplamento forte da QCD na rede na formulação Hamiltoniana [14]. Essa formulação da QCD na rede lida com um espaço de Hilbert de estados, onde conceitos como estado de vácuo e estados de muitas partículas são a base do formalismo e, portanto, parece muito conveniente para comparar resultados com modelos fenomenológicos. No limite de acoplamento forte, o termo gluônico de energia elétrica domina o termo

de energia magnética, implicando que o estado fundamental de estados gluônicos são tubos de fluxo de cor - ou *links*, ou *strings*. No limite extremo de acoplamento forte, em que a energia gluônica magnética e termos de criação e aniquilação de quarks e antiquarks podem ser desprezados, é possível mostrar [11] [12] que quarks pertencentes a hádrons diferentes comportam-se como se fossem distinguíveis e, portanto, efeitos de *quark exchange* não existem neste limite da QCD. Obviamente, a situação real pode não ser a de acoplamento forte extremo. Termos magnéticos levam a quebras dos tubos de fluxo - *string rearrangement* ou *string breaking* - e esses levam a efeitos de troca de quarks. O quanto a situação real a baixas energias está próxima do acoplamento forte, somente cálculos explícitos de QCD na rede podem responder.

Os indícios fenomenológicos vêm de estudos recentes [13] que mostram que a substituição do tradicional mecanismo de troca de mésons vetoriais pelo mecanismo de *quark exchange* para gerar a repulsão de curto alcance da interação NN não é capaz de explicar semi-quantitativamente os dados experimentais. Uma outra referência recente que mostra dificuldades é a Ref. [15]. Em particular, foi mostrado na Ref. [13] que a repulsão de curto alcance gerada pelo mecanismo OGE com *quark exchange* leva a um fracasso total para descrever a onda $^1F_3$. A importância disso é que esta onda é sensível a efeitos da região de alcance intermediário da interação e, nos modelos baseados no mecanismo OGE com *quark exchange* esta parte da interação é invariavelmente mais forte que em modelos que usam mésons vetoriais. Isso é devido ao fato que o efeito de OGE mais *quark exchange* é de muito mais curto alcance que os advindos da troca de mésons vetoriais.

O objetivo desta dissertação é implementar o limite de acoplamento forte predito pela formulação Hamiltoniana da QCD na rede num modelo de quarks não-relativístico. Em particular, será investigado com algum detalhe o mecanismo de *string rearrangement* na interação méson-méson. O modelo inclui naturalmente o mecanismo de troca de mésons, o qual, de acordo com a Ref. [13] parece ser essencial para descrever os dados experimentais da força nuclear. Este estudo não tem a intenção de ser completo, nem tem o objetivo de comparar com dados experimentais.

O objetivo é introduzir uma metodologia de cálculo que poderá ser estendido para situações realistas com um pouco mais de esforço.

A presente dissertação constrói sobre argumentos e técnicas desenvolvidos na Ref. [16], e avança no sentido de empregar a interação de *link breaking* no contexto do modelo de quarks desenvolvido por Greenberg e Hietarinta [17]. Esse é um modelo de quarks em segunda quantização em que, além dos tradicionais graus de liberdade de quarks e antiquarks massivos, graus de liberdade gluônicos são adicionados, a saber *links* e *junctions*. Esses novos graus de liberdade têm consequências não triviais para as interações entre hádrons. Uma questão importante que essa dissertação investiga é o efeito da não-localidade da interação microscópica de *link breaking* ao nível dos quarks na interação efetiva méson-méson. Em particular, serão investigadas possíveis maneiras de diferenciar um mecanismo do tipo OGE, o qual está baseado numa idéia de liberdade assintótica, de um mecanismo de link breaking, que vem associado à fase do confinamento.

A dissertação está dividida da seguinte maneira. No próximo capítulo será feita uma breve revisão do modelo de quarks não-relativístico, com particular ênfase na introdução da interação de troca de um glúon. No Capítulo 3, o modelo de Greenberg e Hierarinta será apresentado com algum detalhe. Uma justificativa para esse modelo será discutida dentro do contexto do limite de acoplamento forte da QCD na rede na formulação Hamiltoniana. O Capítulo 4 contém os resultados originais dessa dissertação. Inicialmente será feita uma breve revisão sobre estudos tradicionais da interação méson-méson como base em *quark exchange* com OGE. Após, será introduzida a interação de *link rearrangement* no contexto do modelo de Greenberg e Hietarinta. Serão introduzidas diferentes formas para o potencial de *link rearrangement* e suas consequências investigadas para o espalhamento méson-méson. Conclusões e Perspectivas Futuras fazem parte do Capítulo 5. A dissertação conta ainda com três apêndices, onde estão os detalhes de notação e cálculos detalhados de amplitudes de espalhamento para diferentes interações.

Capítulo 2

O Modelo de Quarks

No ano de 1964, a idéia de quarks como constituintes elementares da matéria nuclear e hadrônica foi concebida independentemente no Caltech (*California Institute of Technology*), na Califórnia por Murray Gell-Mann [18, 19] e no CERN (*European Center for Nuclear Research*), por George Zweig [20]. Entretanto, levou em torno de 10 anos mais para que essa idéia fosse reconhecida, com experiências de espalhamento inelástico profundo de elétrons por prótons [4] e o advento da Cromodinâmica Quântica (QCD), que atualmente é a teoria fundamental para as interações fortes. São conhecidos hoje 6 diferentes tipos de quarks, ou sabores: u (*up*), d (*down*), s (*strange*), c (*charm*), t (*top*), b (*bottom*). Esses diferentes sabores têm massas diferentes, sendo u, d, s os mais leves, e c, t, b os quarks pesados. Os quarks u, c, t têm carga fracionária $+\frac{2}{3}$ enquanto que d, s, b têm carga $-\frac{1}{3}$.

O modelo de quarks foi desenvolvido estudando o espectro das partículas conhecidas até então, onde foram encontrados vários casos em que duas ou mais partículas existiriam com mesmo spin, paridade e massa (dentro de um certo intervalo) e a única diferença seria sua carga elétrica. São exemplos: o nêutron (939.6 MeV) e o próton (938.3 MeV) ou os três píons π^- (139.6 MeV), π^0 (134.9 MeV) e o π^+ (139.6 MeV). Essas famílias foram chamadas de multipletos de isospin.

Com a descoberta de novas partículas e de suas propriedades, elas foram sendo agrupadas em multipletos de acordo com seus números quânticos característicos de isospin (I) e hipercarga (Y). Os mésons são agrupados em singletos e octetos (nonetos). Dois exemplos são mostrados na Fig. 2.1 para mésons pseudoescalares com spin-paridade 0^- e vetoriais com spin-paridade 1^- . Os bárions são encontrados

em singletos com spin-paridade $1/2^-$, octetos com $1/2^+$ e decupletos com $3/2^+$, e estão mostrados na Fig. 2.2.

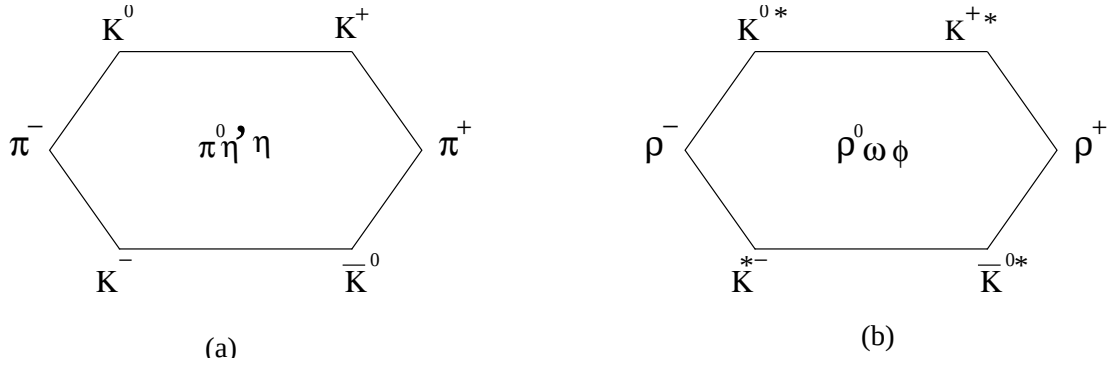


Figura 2.1: Nonetos de méson (a) pseudoescalar e (b) vetorial compostos de quarks u, d e s . Os mésons neutros do centro são misturas dos estados $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ e $s\bar{s}$.

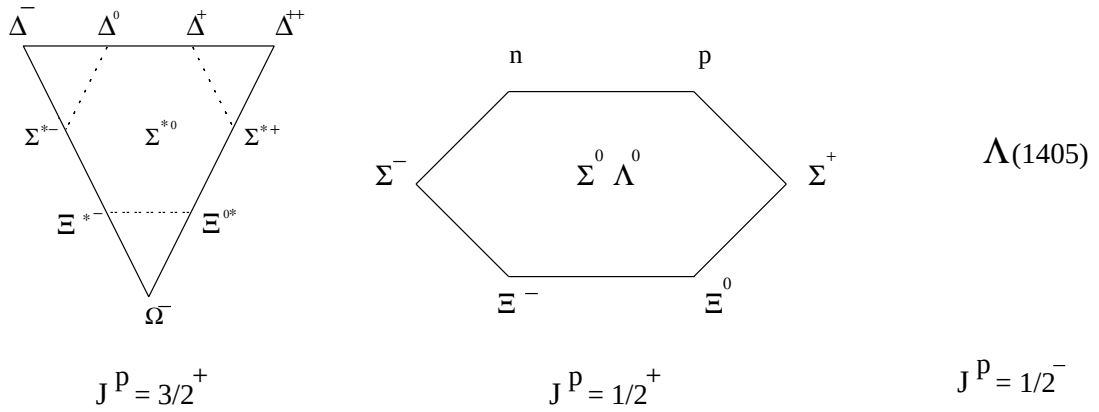


Figura 2.2: Decuplo $3/2^+$, octeto $1/2^+$ e o singlete $1/2^-$ de bárions.

Mas por que motivo os mésons se agrupam em octetos e os bárions em octetos e decupletos e as estruturas de supermultipletos mais elevados, como o **27** não aparecem? A explicação provável está no modelo de quarks, baseado na existência de um triplete fundamental: os quarks u, d e s , que formam um grupo $SU(3)$ de sabor e podem ser empregados na construção de outras representações de $SU(3)$.

Os quarks são férmions com spin $1/2$ e têm ainda um número quântico adicional, que vem do fato observado de que algumas partículas, tal como o bárion Δ^{++} , serem estados ligados de três quarks idênticos ($\Delta^{++} = uuu$), o que violaria o princípio de

exclusão de Pauli. Então como essas partículas existem de fato, foi introduzido o número quântico de cor, nome dado à carga responsável pela interação forte. Um quark pode ter carga de cor *red* (r), *green* (g) ou *blue* (b), que pode mudar quando o quark emite ou absorve um glúon.

Os glúons são bósons de *gauge* da interação forte, sem massa e de spin 1, que são responsáveis por manter os quarks ligados, e podem ser de nove possíveis estados, de acordo com a cor que eles carregam: $r\bar{r}$, $r\bar{g}$, $r\bar{b}$, $g\bar{r}$, $g\bar{g}$, $g\bar{b}$, $b\bar{r}$, $b\bar{g}$ e $b\bar{b}$. Uma das nove combinações é um singlete de cor

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}), \quad (2.1)$$

mas que não pode intermediar processos de troca de cor. Então apenas 8 glúons são efetivos para os esses processos. Por exemplo, se um quark *red* muda para *green*, emite um glúon *red – antigreen* - um glúon que tira o *red* do quark e dá a ele o *green* (*antigreen* significa que o glúon carrega *green* na direção oposta). Como os glúons carregam cor, a teoria permite que exista acoplamento glúon-glúon.

Devemos observar que as partículas que são compostas de quarks não devem carregar cor, de modo que as combinações que formam os estados ligados de bárions e mésons devem ser de tal forma que esses sejam incolores.

2.1 Os quarks e a interação forte

A Lagrangiana da QCD tem a forma

$$\begin{aligned} L(x) &= i \sum_i \bar{q}_i(x) \left[\partial_\mu - ig \sum_a \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) \right] \gamma^\mu q_i(x) \\ &- \frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x) - \sum_i \bar{q}_i(x) m_i q_i(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde g é a constante de acoplamento forte adimensional; i corre sobre todos os sabores. Para cada i , $q_i(x)$ é um campo espinorial de Dirac e um vetor tridimensional no espaço de cor. As matrizes de Gell-Mann 3×3 de cor λ^a ($a=1,\dots,8$), com traço nulo e Hermitianas, satisfazem as relações de comutação do grupo $SU(3)_c$,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \quad (2.3)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura da álgebra de Lie de $SU(3)$ e $A_\mu^a(x)$ ($a=1,\dots,8$) são os campos de glúon. O tensor $F_{\mu\nu}^a(x)$ é definido por

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (2.4)$$

Definindo o campo de glúons na forma das matrizes de cor,

$$A_\mu = \sum_a A_\mu^a \lambda^a, \quad (2.5)$$

a Lagrangiana da QCD é invariante sob as transformações de *gauge* de cor,

$$A_\mu(x) \rightarrow S(x)^{-1} A_\mu(x) S(x) + \frac{i}{g} S(x)^{-1} \partial_\mu S(x), \quad (2.6)$$

$$q(x) \rightarrow S^{-1}(x) q(x), \quad (2.7)$$

onde $S(x)$, uma matriz $SU(3)_c$, é uma função suave do espaço-tempo.

Como fica claro acima, a Lagrangiana da QCD descreve, além das interações quark-glúon, as interações glúon-glúon, pois esses também carregam carga de cor. É precisamente esse último fato que torna a QCD muito mais complicada que a eletrodinâmica quântica, em que os bósons de gauge, os fótons, não são carregados.

A QCD tem duas propriedades importantes: a liberdade assintótica e o confinamento de cor. Embora a constante de acoplamento g seja adimensional, a renormalização introduz um parâmetro de escala, Λ , cujo valor é em torno de 100-200 MeV fitado por dados experimentais, a verdadeira quantidade fundamental da QCD. A constante de acoplamento $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ dependerá então da escala μ no qual o processo ocorre e mais precisamente da razão $\frac{\mu}{\Lambda}$. Por causa da natureza não-abeliana do grupo $SU(3)_c$, os glúons são auto-interagentes, de acordo com (2.2) e (2.4). O efeito de polarização do vácuo leva a um acoplamento efetivo $\alpha_s(\mu^2)$, que decresce de forma logarítmica com o aumento de μ , ou de forma equivalente em curtas distâncias. Essa é a propriedade de liberdade assintótica [5], com $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$ se $\mu \rightarrow \infty$, que explica a estrutura puntiforme dos constituintes dos hádrons descobertos no espalhamento inelástico profundo (grandes transferências de momentum e de energia) de lépton-nucleon [4]. De forma contrária, $\alpha_s(\mu^2)$ cresce com o decréscimo de μ^2 (longas distâncias) deixando um potencial $V(r) \sim r$ entre os quarks. Essa é a propriedade

de confinamento: quarks e glúons estão confinados dentro de hádrons. Essa propriedade faz com que a teoria de perturbação não possa ser utilizada para cálculos no regime de interação forte, i.e. o confinamento é fenômeno não-perturbativo.

2.2 Simetria de sabor

Temos visto a interação quark-glúon e glúon-glúon da QCD conserva sabor. A única dependência de sabor na Lagrangiana da QCD é nos termos de massa dos quarks em (2.2). Para quarks leves, a diferença de massa não é grande, $m_d - m_u = 3\text{MeV}$, $m_s - m = 150\text{MeV}$ ($m = m_u, m_d$).

No limite $m_u = m_d = m_s$ a Lagrangiana da QCD é invariante sob rotações globais de $SU(3)_F$ (α^a independente do espaço-tempo):

$$q \rightarrow \exp\left(i \sum_a \alpha^a \lambda^a\right) q, \quad (2.8)$$

$$q^\dagger \rightarrow q^\dagger \exp\left(-i \sum_a \alpha^a \lambda^a\right), \quad (2.9)$$

q é agora um vetor ($u \ d \ s$), e λ^a são as matrizes de Gell-Mann de $SU(3)$ atuando nesse espaço tridimensional de sabor. Mésons e bárions podem ser agrupados em multipletos degenerados correspondendo a representações irredutíveis de $SU(3)_F$.

Obviamente que os quarks pesados, c , t e b quebram violentamente a simetria de sabor. Somente o setor de quarks leves possui uma simetria *aproximada* de sabor.

2.3 Mésons: estados $q\bar{q}$

Consideremos primeiramente os mésons, que são estados ligados de um quark q e um antiquark $\bar{q}$ (os sabores de q e $\bar{q}$ podem ser diferentes). Ao olhar para o espectro dos mésons, encontramos 8 mésons pseudoescalares com massa menor que 500 MeV e um pseudoescalar com massa da ordem de 1 GeV, o η' . A forma como os mésons se agrupam são mostrados na Fig. 2.1

As funções de onda de sabor desse noneto pseudoescalar são:

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \pi^- = -d\bar{u}, \quad (2.10)$$

$$K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}, \quad K^- = -s\bar{u}, \quad (2.11)$$

$$\eta \approx -\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \quad \eta' \approx -\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}). \quad (2.12)$$

O sinal $\approx$ para η, η' vem do fato que existe um pouco de mistura octeto-singlete nesses estados. De forma parecida, um noneto de mésons vetoriais é encontrado com massas entre 0.77 e 1.02 GeV: ρ^+, ρ^-, ρ^0 têm a mesma função de onda de sabor que os píons, os mésons vetoriais estranhos $K^{*+}, K^{*0}, \bar{K}^{*0}, K^{*-}$, com mesma função de sabor que o pseudoescalar de (2.11) e dois estados neutros ω, ϕ que são misturas da função de onda (2.12):

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \phi = -s\bar{s}. \quad (2.13)$$

2.4 Bárions: estados qqq

Todos os bárions conhecidos são aparentemente estados ligados de três quarks (qqq), e cada um deles é um singlete de cor $SU(3)_c$, ou seja, um estado completamente anti-simétrico das 3 cores possíveis. Podemos decompor o produto de três quarks para os bárions nas representações irredutíveis de singlete, octeto e decuplo de $SU(3)$ (sabor ou cor)

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}'_M \oplus \mathbf{10}_S. \quad (2.14)$$

onde o subscrito S ou A indica simetria ou anti-simetria sob a troca de dois quarks de mesma massa. No caso de $SU(3)_c$, somente o estado singlete existe na natureza (os hádrons carregam cor total nula). Para $SU(3)_F$, todas as representações podem existir em princípio.

2.5 Simetria de Isospin

Em $SU(3)_F$ existe uma simetria aproximada quebrada pela diferença de massa entre $m_s - m = 150$ MeV ($m = m_u = m_d$). Como as massas do u e d diferem por poucos MeV, existe um subgrupo $SU(2)$ de $SU(3)_F$, de isospin que é uma simetria

de sabor conservada em boa aproximação. No limite $m_u = m_d$, a Lagrangiana (2.2) e o vácuo da teoria são invariantes sob as rotações globais de isospin

$$q \rightarrow e^{i\tau \cdot \alpha} q, \quad (2.15)$$

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q} e^{-i\tau \cdot \alpha}, \quad (2.16)$$

onde q e $\bar{q}$ são vetores bidimensionais no espaço de isospin: $q = (u \ d)$ e $\bar{q} = (\bar{d} \ -\bar{u})$ e τ são as matrizes de Pauli. Existem ainda os tripletos de isospin $\pi^+, \pi^0, \pi^-, \rho^+, \rho^0, \rho^-$ e $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$. Os dubletos de isospin são K^+, K^0 e p, n .

A simetria de isospin é quebrada pela pequena diferença de massa entre os quarks d e u e pelo eletromagnetismo, que distingue os quarks d e u que têm cargas elétricas diferentes ($-1/3$ e $+2/3$ respectivamente).

2.6 Simetria Quiral

Os mésons pseudoescalares são relativamente leves. O tripleto de isospin π^+, π^0, π^- tem massas ≈ 140 MeV, o isosinglete η tem massa ≈ 550 MeV e os correspondentes mésons estranhos (káons $K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$) têm massas ≈ 495 MeV. Essas massas relativamente pequenas na escala hadrônica indicam a existência de uma simetria global aproximada da L_{QCD} chamada *simetria quiral*.

Essa simetria é quebrada dinamicamente e resulta num octeto de bósons pseudoescalares de Nambu-Goldstone que deveriam ser de massa nula se a simetria fosse exata. Para que essa simetria fosse exata, as massas dos quarks na L_{QCD} deveriam ser exatamente zero. A aproximação é feita porque as diferenças de massa $m_u - m_d$, $m_s - m_u$, e $m_s - m_d$ são pequenas. A simetria quiral depende ainda de algo mais: as magnitudes absolutas m_u, m_d, m_s devem ser pequenas. Isso é bem verificado em particular para os quarks u, d , que após a renormalização possuem massa de corrente da ordem de alguns MeV.

Vamos supor primeiramente que as massas de corrente na L_{QCD} são nulas para u, d, s . Então a Lagrangiana (2.2) se restrita a esses sabores é invariante sob as seguintes transformações globais dos campos dos quarks,

$$q(x) \rightarrow \exp \left[i\gamma_5 \left(\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \alpha^a + \alpha^0 \right) \right] q(x), \quad (2.17)$$

$$q^\dagger(x) \rightarrow q^\dagger(x) \exp \left[-i\gamma_5 \left(\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \alpha^a + \alpha^0 \right) \right], \quad (2.18)$$

onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann da simetria de sabor $SU(3)_F$, $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e $\alpha^a (a = 0, \dots, 8)$ são números reais. Essas transformações, combinadas com as transformações (2.8) e (2.9)

$$q(x) \rightarrow \exp \left[i \left(\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \beta^a + \beta^0 \right) \right] q(x), \quad (2.19)$$

$$q^\dagger(x) \rightarrow q^\dagger(x) \exp \left[-i \left(\sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \beta^a + \beta^0 \right) \right], \quad (2.20)$$

formam um grupo chamado $U(3) \otimes U(3)$ quiral. Esse grupo fatoriza-se em $U(1)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. $U(1)_V$ tem como gerador a matriz identidade $\mathbf{1}$ no espaço de sabor e de Dirac. $U(1)_A$ tem $\mathbf{1}$ no espaço de sabor e γ_5 no espaço de Dirac. $SU(3)_R$ e $SU(3)_L$ têm respectivamente

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \frac{\lambda^a}{2} \quad (a = 1, \dots, 8), \quad (2.21)$$

onde $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ projeta os campos de quark em campos de mão-direita e mão-esquerda,

$$q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q, \quad q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q. \quad (2.22)$$

Para $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$, existem dois possíveis modos de realização (ou fases) dessa simetria. Se o vácuo da QCD for simétrico sob esse grupo de transformações então o espectro teria dubletos de paridade, isto é, hádrons de mesma massa e spin apareceriam em pares degenerados de paridade oposta devido à simetria $\mathbf{1} \leftrightarrow \gamma_5$. Por exemplo, para mésons 1^- , os correspondentes mésons seriam os mésons 1^+ . Esse padrão não aparece na natureza, mas existe um espectro caracterizado pelos mésons leves 0^- seguidos pelos mésons mais pesados 1^- , sem mesmo um sinal aproximado de paridade oposta. Esta é uma outra maneira em que a simetria quiral é aproximadamente conservada.

O que acontece é que embora a Lagrangiana da QCD seja invariante sob $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$, o vácuo não é, pois esse é um condensado de pares $q\bar{q}$ que possuem valores no vácuo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \approx \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle \neq 0 \\ &= -(220 \text{ MeV})^3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Estes valores diferentes de zero violam a simetria quiral. O vácuo é invariante sob $SU(3)_F$ e $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ é dito ser espontaneamente ou dinamicamente quebrado em $SU(3)_F$. Os bósons de Goldstone de simetria quiral são π^+ , π^0 , π^- , η , K^+ , K^0 , $\bar{K}^0$, K^- . $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ é somente uma simetria aproximada por causa dos termos de massa na L_{QCD} , que quebram explicitamente essa simetria e por isso os mésons pseudo-escalares não têm massa nula e são ditos ser quasi-bósons de Goldstone.

Outro efeito do vácuo condensado é que são geradas dinamicamente massas para os quarks muito maiores que as massas de corrente. Consideremos um condensado de pares $q\bar{q}$ que tem quiralidade não-nula. Um quark que se mova nesse vácuo não-trivial “sente” a ação desses pares de condensados. Essa interação tem o efeito de criar um *gap* de energia entre o quark de momento nulo e o vácuo. Esse *gap* de energia é uma massa dinâmica efetiva, presente mesmo no limite de massa de corrente nula. É razoável assumir que isso é precisamente a massa do quark constituinte, o qual é a base do modelo de quarks não relativístico.

Fitando as massas e os momentos magnéticos do núcleon e, por exemplo da Λ , a massa efetiva dos quarks constituintes deve ser da ordem de

$$m_u \approx m_d \approx 300 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 450 \text{ MeV}, \quad (2.24)$$

as quais diferem bastante da massa de corrente

$$m_u \approx 4 \text{ MeV}, \quad m_d \approx 7 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 150 \text{ MeV}. \quad (2.25)$$

Apesar de o mecanismo da quebra dinâmica da simetria quiral ainda não ter sido verificado na QCD, há uma expectativa que com o aumento do poder computacional para a QCD na rede essa seja verificada.

2.7 Modelo de quarks constituintes

Após a introdução do conceito de confinamento da cor e a descoberta da liberdade assintótica na QCD [5], A. De Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow (DGG) tiveram a idéia [7] de trazer esses conceitos para o modelo de quarks. Motivados pela formulação da QCD na rede [6], os autores atribuíram a dependência em spin

da interação de dois corpos à parte dependente de spin na interação de troca de um glúon. A interação do tipo spin-spin é essencial para explicar, por exemplo, o *splitting* das massas do nucleon e da $\Delta(1232)$. Isso explicou pela primeira vez também o sinal do *splitting* hiperfino, e relacionou as respectivas magnitudes do *splitting* hiperfino às massas dos quarks.

Como já foi discutido, a característica do modelo que merece maior atenção é o fato que os graus de liberdade fundamentais dos hádrons são quarks massivos, confinados por forças de longo alcance. Para fazer contato com o mecanismo de *quark exchange* ao nível de OGE e *link rearrangement* ao nível da QCD no limite acoplamento forte (que será discutido mais adiante), vamos fazer uma curta discussão de como a interação de contato spin-spin surge a partir de OGE. Para tal, partimos do potencial de Fermi-Breit resultante da troca de um glúon Abeliano. O intuito é mostrar a diferença conceitual marcante entre esses dois mecanismos.

Partimos de uma Hamiltoniana relativística da forma

$$\begin{aligned} H_{qq} &= T_{qq} + V_{qq} \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\alpha \cdot \nabla + \beta m] \psi(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y), \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\mu \psi(x)$ é a corrente de cor carregada pelos quarks, $D_{\mu\nu}$ é o propagador do glúon e $\psi(\mathbf{x})$ é o campo de Dirac. O campo $\psi(\mathbf{x})$ pode ser expandido em um dado instante de tempo ($t = 0$, por exemplo) como

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_s \left[u_s(\mathbf{p}) q_s(\mathbf{p}) + v_s(-\mathbf{p}) \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \right], \quad (2.27)$$

onde

$$u_s(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$v_s(-\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_s^c \\ \chi_s^c \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

com $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e o espinor de Pauli definido por $\chi_s^c = -i\sigma^2 \chi_s^*$, normalizado

da seguinte forma

$$\chi_s^* \chi_{s'} = \chi_s^{c*} \chi_{s'}^c = \delta_{s s'}. \quad (2.30)$$

Os operadores $q^\dagger$, q , $\bar{q}^\dagger$ e $\bar{q}$ são respectivamente os operadores de criação e destruição de quarks e os operadores de criação e destruição de anti-quarks, que obedecem às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{tsc}(\mathbf{p}), q_{t's'c'}(\mathbf{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}), \bar{q}_{t's'c'}(\mathbf{p}')\} = 0, \\ \{q_{tsc}(\mathbf{p}), q_{t's'c'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}), \bar{q}_{t's'c'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{t t'} \delta_{s s'} \delta_{c c'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para obter o respectivo Hamiltoniano não-relativístico o operador de quarks $\psi(\mathbf{x})$ pode ser escrito em termos de uma expansão em potências do operador ∇ como

$$\psi(\mathbf{x}) \approx \left[1 + i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] \psi'(\mathbf{x}), \quad (2.32)$$

onde $\psi'(\mathbf{x})$ é o operador não-relativístico de quarks dado por

$$\psi'_{tc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \, e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_s \left[q_{tsc}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{tsc}^\dagger(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s^c \end{pmatrix} \right], \quad (2.33)$$

e os índices s , t e c são de spin, isospin e cor respectivamente. Uma expansão tal pode ser obtida através da transformação de Foldy-Wouthuysen ou, equivalentemente, expandindo os espinores $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(-\mathbf{p})$ acima até a ordem $(\mathbf{p}/m)^2$, o que resulta em

$$u_s(\mathbf{p}) \approx \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{p^2}{8m^2} \right] \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$v_s(-\mathbf{p}) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \chi_s^c \\ \left[1 - \frac{p^2}{8m^2} \right] \chi_s^c \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

A parte livre T_{qq} do Hamiltoniano (2.26), após substituir (2.32) e a respectiva expressão conjugada, toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} T_{qq} &\approx \psi^{\dagger'}(\mathbf{x}) \left[1 - i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m] \left[1 + i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] \psi'(\mathbf{x}) \\ &= \psi^{\dagger'}(\mathbf{x}) \left[\beta m - \beta \frac{\nabla^2}{2m} \right] \psi'(\mathbf{x}) = \psi^{\dagger'}(\mathbf{x}) \beta T(\mathbf{x}) \psi'(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $T(\mathbf{x})$ é dada por

$$T(\mathbf{x}) \equiv m - \frac{\nabla^2}{2m}. \quad (2.37)$$

Usaremos a seguinte forma para as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

e as matrizes de Dirac

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Usando (2.39) e (2.33) em (2.36), obtemos a expressão no espaço de momento para o operador energia cinética como

$$T_{qq} = \sum_{tsc} \int d^3p T_t(\mathbf{p}) \left[q_{tsc}^\dagger(\mathbf{p}) q_{tsc}(\mathbf{p}) - \bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}) \bar{q}_{tsc}^\dagger(\mathbf{p}) \right]. \quad (2.40)$$

O cálculo da parte de interação exige um pouco mais de trabalho pois envolve o produto de duas correntes. Lembrando que

$$\mathbf{p} = -i\nabla \quad (2.41)$$

$$\beta \alpha \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ -\sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

e utilizando a expansão (2.27) para o campo de Dirac, podemos então obter a corrente de quarks na forma

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^0 \Gamma \psi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \sum_{ss'} \left[u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 \Gamma u_s(\mathbf{p}) q_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') q_s(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad + u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 \Gamma v_s(-\mathbf{p}) q_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \\ &\quad + v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 \Gamma u_s(\mathbf{p}) \bar{q}_{s'}(-\mathbf{p}') q_s(\mathbf{p}) \\ &\quad \left. + v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 \Gamma v_s(\mathbf{p}) \bar{q}_{s'}(\mathbf{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\Gamma = \{\mathbf{1}, \beta, \alpha, \gamma\} \times \lambda/2$. Dessa forma para, por exemplo, $\Gamma = \mathbf{1}$ temos

$$u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 u_s(\mathbf{p}) \approx \left[1 - \frac{\mathbf{P}}{8m^2} - i \frac{\sigma \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'},$$

$$\begin{aligned}
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 v_s(-\mathbf{p}) &\approx -\chi_{s'}^* \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{2m} \chi_s^c, \\
v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 u_s(\mathbf{p}) &\approx -\chi_{s'}^{c*} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{2m} \chi_s, \\
v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \gamma^0 v_s(-\mathbf{p}) &\approx - \left[1 - \frac{\mathbf{P}}{8m^2} - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'}. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Aqui não foi explicitada a matriz $\lambda/2$ de cor explicitamente por conveniência, e chamamos $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$. As demais combinações podem ser encontradas na literatura [21]. A parte que envolve apenas operadores de quarks é dada por

$$\begin{aligned}
V_{qq} &= \frac{1}{2} \sum_{s_n, t_m} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_4 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta_{t_1 t_2} \delta_{t_3 t_4} \\
&\times \left[J_{I_1 I_2}^0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) D_{00}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \right. \\
&+ \left. J_{I_1 I_2}^i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) D_{ij}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \right] q_{I_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) q_{I_2}(\mathbf{p}_2) q_{I_3}^\dagger(\mathbf{p}_3) q_{I_4}(\mathbf{p}_4), \quad (2.45)
\end{aligned}$$

com $I \equiv (t, s, c)$ e

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int d^3 p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} D_{\mu\nu}(\mathbf{p}). \quad (2.46)$$

Devemos notar que nas expressões acima foi feita a aproximação estática, que consiste em desprezar a componente temporal do momento transferido no propagador.

Para determinar de maneira completa o potencial de Fermi-Breit para a troca de um glúon, é necessário conhecer a forma explícita do propagador $D_{\mu\nu}(\mathbf{p})$, o qual é fixado no gauge de Coulomb

$$D_{00}(\mathbf{p}) = -\frac{4\pi \alpha_s}{\mathbf{p}^2}, \quad D_{0i}(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.47)$$

$$D_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{4\pi \alpha_s}{\mathbf{p}^2} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right). \quad (2.48)$$

Utilizando a convenção de soma, incluindo os índices contínuos, podemos denotar o termo de interação quark-quark como

$$V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv \delta(\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}_\rho - \mathbf{p}_\sigma) \delta_{t_\mu t_\rho} \delta_{t_\nu t_\sigma} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a V_{qq}^{OGEP}(\mu\nu; \sigma\rho), \quad (2.49)$$

onde os índices $\mu, \nu, \dots$ representam os graus de liberdade de momento, spin, isospin e cor, e $\mathcal{F}^a = \lambda^a/2$. Explicitamente, V_{qq}^{OGEP} é dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
V_{qq}^{OGEP} = & 4\pi\alpha_s \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_1 m_2 \mathbf{q}^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_1 m_2 \mathbf{q}^4} \right. \\
& + \frac{i}{\mathbf{q}^2} \left\{ \frac{\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{m_1^2} - \frac{2\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_2^2} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_1^2} \right\} \\
& \left. - \frac{2}{3m_1 m_2} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \frac{1}{\mathbf{q}^2} (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{3} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \right\} \right], \quad (2.50)
\end{aligned}$$

onde m_i , é massa do i -ésimo quark, e $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$. De particular interesse aqui, é o termo spin-spin, dado por

$$V_{ss} = - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (2.51)$$

Como dito anteriormente, esse termo é responsável por uma categoria muito importante de *splittings* de massas hadrônicas, como por exemplo, o *splitting* de massa $\Delta - N$.

Podemos agora proceder de forma análoga para as interações quark-antiquark e antiquark-antiquark. O Hamiltoniano microscópico pode, então, ser escrito de forma compacta como

$$\begin{aligned}
H = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\
& + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

As formas explícitas dos termos $V_{\bar{q}\bar{q}}$ e $V_{q\bar{q}}$ podem ser encontradas na Tese de Doutorado de Sérgio Szpigel, Ref. [22].

Nesta formulação em segunda quantização, um bárion é o estado ligado de três quarks constituintes, e um méson é o estado ligado de um quark e um antiquark. O estado de um bárion pode ser escrito em termos de um operador de criação $B_a^\dagger$,

$$|a\rangle = B_a^\dagger |0\rangle, \quad (2.53)$$

tal que o estado de vácuo é definido como

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0. \quad (2.54)$$

O índice a envolve todos os números quânticos necessários para especificar o estado do bárion, $a = \{\text{espacial}, \text{spin}, \text{isospin}\}$. A forma explícita do operador de criação

de bárions $B_a^\dagger$ é dada por

$$B_a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_a^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad (2.55)$$

com a normalização da amplitude no espaço de Fock dada por

$$\langle a|b \rangle = \Psi_a^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_b^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \delta_{ab}. \quad (2.56)$$

A amplitude no espaço de Fock Ψ pode ser escrita como

$$\Psi_a^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \equiv \frac{\mathcal{N}(\mathbf{p}_a)}{\sqrt{3! \cdot 18}} \epsilon^{c_{\mu_1} c_{\mu_2} c_{\mu_3}} \chi_a^{I_{\mu_1} I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \phi(\mathbf{p}_1) \phi(\mathbf{p}_2) \phi(\mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3), \quad (2.57)$$

onde $\epsilon^{c_{\mu_1} c_{\mu_2} c_{\mu_3}}$ sendo o tensor antisimétrico de cor (que garante que o bárion é um singlete de cor); $\chi_a^{I_{\mu_1} I_{\mu_2} I_{\mu_3}}$ é o coeficiente de Clebsch-Gordan de spin-isospin; ϕ a função de onda do quark e $\mathcal{N}(\mathbf{p}_a)$ a normalização. O fator $1/\sqrt{3! \cdot 18}$ está relacionada com a normalização da cor e spin-isospin respectivamente.

Da mesma forma, o estado de um méson pode ser escrito como

$$|a\rangle = M_a^\dagger |0\rangle, \quad (2.58)$$

normalizado como

$$\langle a|b \rangle = \Phi_a^{*\mu\nu} \Phi_b^{\mu\nu} = \delta_{ab}, \quad (2.59)$$

sendo o operador de criação do méson $M_a^\dagger$ dado por

$$M_a^\dagger = \Phi_a^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (2.60)$$

onde $\Phi_a^{\mu\nu}$ é a amplitude do méson no espaço de Fock

$$\Phi_a^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \chi_a^{\mu\nu} \psi(\mathbf{k}) \psi(\bar{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}), \quad (2.61)$$

com os índices μ e ν envolvendo os índices de cor, spin e isospin.

A equação de Schrödinger em primeira quantização para o estado de um bárion pode ser obtida aplicando o Hamiltoniano H_{qq} de (2.52) sobre o estado definido em (2.53) e efetuando as contrações nos operadores de quarks

$$H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_a^{\sigma\rho\lambda} = \varepsilon_{[a]} \Psi_{[a]}^{\mu\nu\lambda}, \quad (2.62)$$

onde ε_a é a energia total (energia do centro de massa mais energia interna) do bárion e

$$H_{qq}(\mu\nu, \sigma\rho) = 3 \left[\delta_{[\mu]\sigma} \delta_{\nu\rho} T_{qq}([\mu]) + V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \right] . \quad (2.63)$$

Adotamos aqui a notação como na tese de doutorado de Dimiter Hadjimichef [23], onde índices repetidos dentro de colchetes não representam somas.

Para o estado de um méson temos

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_a^{\mu'\nu'} = \epsilon_{[a]} \Phi_{[a]}^{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

onde $\epsilon_{[a]}$ é a energia total do méson e $H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu')$ é dada por

$$H_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T([\mu']) + T([\nu'])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu'). \quad (2.65)$$

Isto encerra essa revisão do modelo de quarks não relativístico, com a inclusão da troca de um glúon.

Capítulo 3

O modelo de Greenberg e Hietarinta e a QCD

3.1 O Modelo de Greenberg e Hietarinta

Greenberg e Hietarinta (GH) [17] construíram um modelo de quarks em segunda quantização no qual, usando operadores de *links* e *junctions*, quarks e antiquarks estão permanentemente confinados no interior dos hádrons. Uma das consequências destes novos graus de liberdade de links e junções é a ausência de interação de van der Waals [24] entre hádrons. Greenberg e Hietarinta também esquematizam como incluir interações de curto alcance entre hádrons.

O problema do confinamento de quarks via potenciais entre dois corpos, deixa uma interação residual não observada entre hádrons separados. Essas são forças de longo alcance, fisicamente similares ao caso eletromagnético da interação entre dois átomos neutros. No caso hadrônico, elas são o resultado do efeito do princípio de Pauli entre quarks idênticos de dois hádrons distintos e da força de confinamento que excita estados intermediários que não são estados singletos de cor, e que levam a forças de longo alcance que decaem com a distância como uma lei de potência. Essas forças estão, em princípio, sempre presentes nos cálculos de interações hádron-hádron usando o modelo de quarks, como os das Refs. [8] [9] [10]. Elas não aparecem nestes estudos porque a excitação de estados intermediários coloridos não é incluída nestes cálculos - primeiramente porque é complicado incluí-los e segundo para justamente evitar o aparecimento das forças de van der Waals. Como o modelo de potenciais é útil para descrever mésons isolados, como os que estão no espectro do charmonium e upsilonium, e também bárions isolados, seria importante encontrar

um modelo de potencial sem ter o problema da interação residual. O modelo de GH confina de forma permanente quarks e antiquarks no interior dos hádrons, sem interações residuais de potência inversa com distância de separação entre hádrons. O modelo de GH utiliza o formalismo de segunda quantização, e serve para interações que separadamente conservam o número de quarks e antiquarks. Ainda mais, o modelo é invariante sob transformações de *gauge* locais (o modelo de quarks usual não é invariante sob transformações de *gauge* locais), e ainda permite a produção de quarks e antiquarks, o que leva a acoplamentos méson-bárion.

Para isso, GH introduziram o operador *link*, que tem algo em comum com o modelo de corda, entretanto os links só dependem dos pontos extremos e não carregam graus de liberdade dinâmicos. O link torna distinguíveis quarks (e antiquarks) pertencentes a hádrons diferentes, sem violar o princípio de exclusão de Pauli. Para os bárions, torna-se necessário incluir operadores de junções de links (*junctions*).

3.2 Introdução formal do modelo

Começamos apresentando o modelo Abelian, não-relativístico para mésons que são estados ligados de quark-antiquark, os quais serão representados por operadores de criação e aniquilação $q^\dagger, \bar{q}^\dagger, q$ e $\bar{q}$, que satisfazem as relações de anticomutação

$$\{q_\mu, q_\nu^\dagger\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}, \quad \{q_\mu, \nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{\nu}\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0. \quad (3.1)$$

Os operadores de criação e destruição de links L e $L^\dagger$, obedecem às relações de comutação

$$[L(x, y), L(x', y')] = [L^\dagger(x, y), L^\dagger(x', y')] = 0, \quad (3.2)$$

$$[L(x, y), L^\dagger(x', y')] = \delta_K(x - x')\delta_K(y - y'), \quad (3.3)$$

onde

$$\delta_K(x - x') = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x' \\ 1, & \text{se } x = x'. \end{cases}$$

Aqui, $\delta_K(x - x')$ e $\delta_K(y - y')$ são deltas de Kronecker dos índices contínuos x e x', y e y' , que são as posições das extremidades dos links. O estado de vácuo para os

operadores de quark, antiquark e link é definido através de:

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\mu|0\rangle = 0. \quad (3.4)$$

$$L|0\rangle = 0. \quad (3.5)$$

Um estado de um méson inclui o novo grau de liberdade, onde as coordenadas do quark e do antiquark coincidem com as extremidades do link:

$$M^\dagger \sim q^\dagger(x)L^\dagger(x,y)\bar{q}^\dagger(y), \quad (3.6)$$

Devemos notar que o operador de criação do link sempre vem acompanhado de um par $q^\dagger\bar{q}^\dagger$ e não cria estados somente de links, ou seja, um link não pode existir sem o par $q^\dagger\bar{q}^\dagger$.

É conveniente introduzir o equivalente do operador número para os links:

$$N(x, x') \sim \int L^\dagger(x, y)L(x', y) d^3y, \quad (3.7)$$

$$\bar{N}(y, y') \sim \int L^\dagger(x, y)L(x, y') d^3x, \quad (3.8)$$

e seus comutadores com os operadores de link:

$$[N(x, x'), L^\dagger(x_1, y_1)] = \delta_K(x' - x_1)L^\dagger(x, y_1), \quad (3.9)$$

$$[\bar{N}(y, y'), L^\dagger(x_1, y_1)] = \delta_K(y' - y_1)L^\dagger(x_1, y), \quad (3.10)$$

$$[N(x, x'), N(x_1, x'_1)] = \delta_K(x' - x_1)N(x, x'_1) - \delta_K(x - x'_1)N(x_1, x'), \quad (3.11)$$

$$[\bar{N}(y, y'), \bar{N}(y_1, y'_1)] = \delta_K(y' - y_1)\bar{N}(y, y'_1) - \delta_K(y - y'_1)\bar{N}(y_1, y'), \quad (3.12)$$

$$[N(x, x'), \bar{N}(y, y')] = 0. \quad (3.13)$$

Como o grau de liberdade de link é independente dos graus de liberdade de quarks e antiquarks, em um dado instante, $L^\dagger, \bar{N}, L$ e N comutam com $q^\dagger, q, \bar{q}^\dagger$ e $\bar{q}$.

É necessário que o operador de link esteja acompanhado de seus devidos operadores de quark e antiquark, senão, quando integradas sob as variáveis x e y , os links não contribuiriam. Para construir o operador Hamiltoniano, assim como outros operadores da teoria, precisa-se de um operador de momento P^i , que é o gerador de

translações. P^i é a soma de dois termos: um que gera translações do quark e sua extremidade do link e outro que gera translações do antiquark e sua extremidade do link:

$$\begin{aligned} P^i &= i \int d^3x \left[{}^1\nabla_x^i q^\dagger(x) N(x, x) \right] q(x) \\ &+ i \int d^3y \left[{}^1\nabla_y^i \bar{q}^\dagger(y) \bar{N}(y, y) \right] \bar{q}(y), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde ${}^1\nabla^i$ atua somente na primeira coordenada do link. Existem expressões análogas para o momento angular L^i , que gera as rotações.

Os comutadores (3.9) e (3.10) implicam que os links permanecem conectados aos quarks e antiquarks sob translações e rotações. Essas definições fazem o momento e o momento angular invariantes de *gauge* e as densidades espaciais invariantes sob transformações de *gauge* locais:

$$q^\dagger(x) \rightarrow q^\dagger U^\dagger(x), \quad \bar{q}^\dagger(y) \rightarrow U(y) \bar{q}^\dagger(y), \quad (3.15)$$

$$L^\dagger(x, y) \rightarrow U(x) L^\dagger(x, y) U^\dagger(y), \quad (3.16)$$

$$N(x, x') \rightarrow U(x) N(x, x') U^\dagger(x'), \quad (3.17)$$

$$\bar{N}(y, y') \rightarrow U^\dagger(y) \bar{N}(y, y') U(y'), \quad (3.18)$$

onde $U(x)$ é a representação unitária de $U(1)$ em x .

A Hamiltoniana é similar à usual não-relativística de interação entre dois corpos, exceto pela presença dos operadores N e $\bar{N}$ nos termos cinéticos e de L e $L^\dagger$ no termo de potencial, justificados pela manutenção de links e quarks juntos:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2m} \int d^3x \left[{}^1\nabla_x^2 q^\dagger(x) N(x, x) \right] q(x) \\ &- \frac{1}{2m} \int d^3y \left[{}^1\nabla_y^2 \bar{q}^\dagger(y) \bar{N}(y, y) \right] \bar{q}(y) \\ &+ \int d^3x d^3y q^\dagger(x) L^\dagger(x, y) \bar{q}^\dagger(y) V(x - y) \bar{q}(y) L(x, y) q(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Podemos construir um estado de méson como:

$$|M(p)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x d^3y e^{ip \cdot (x+y)/2} \psi(x - y) q^\dagger(x) L^\dagger(x, y) \bar{q}^\dagger(y) |0\rangle, \quad (3.20)$$

onde $\psi(x - y)$ é a função de onda do méson e p é o momento do méson. Para avaliarmos o efeito do operador de link no estado de um méson, consideremos o produto interno entre os estados de um méson,

$$\begin{aligned} \langle M(p') | M(p) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' d^3y' e^{-ip' \cdot (x+y)/2} e^{ip \cdot (x'+y')/2} \psi^*(x-y) \\ &\times \psi(x'-y') \langle 0 | \bar{q}(y) L(x, y) q(x) q^\dagger(x') L^\dagger(x', y') \bar{q}^\dagger(y') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fazendo as contrações de operadores de quark, antiquark e link no vácuo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle M(p') | M(p) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' d^3y' e^{-ip' \cdot (x+y)/2} e^{ip \cdot (x'+y')/2} \\ &\times \psi^*(x-y) \psi(x'-y') \delta_K(x-x') \delta_K(y-y') \\ &\times \delta(x-x') \delta(y-y') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y e^{i(p-p') \cdot (x+y)/2} \psi^*(x-y) \psi(x-y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Note que temos nessa expressão deltas de Kronecker e de Dirac sob o sinal de integração. Utilizando as coordenadas de centro-de-massa e relativas

$$R = \frac{x+y}{2}, \quad (3.23)$$

$$r = x - y, \quad (3.24)$$

obtemos

$$\langle M(p') | M(p) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3R e^{i(p-p') \cdot R} \int d^3r \psi^*(r) \psi(r). \quad (3.25)$$

Supondo que $\psi(r)$ esteja normalizada, obtemos então

$$\langle M(p') | M(p) \rangle = \delta^{(3)}(p - p'). \quad (3.26)$$

Esse resultado mostra que para o estado de um único méson, nada muda com relação à normalização do estado. Consideremos agora o estado de dois mésons

$$\begin{aligned} |M_1(p_1) M_2(p_2)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{ip_1 \cdot (x_1+y_1)/2} e^{ip_2 \cdot (x_2+y_2)/2} \\ &\times \psi(x_1-y_1) \psi(x_2-y_2) q^\dagger(x_1) L^\dagger(x_1, y_1) \bar{q}^\dagger(y_1) \\ &\times q^\dagger(x_2) L^\dagger(x_2, y_2) \bar{q}^\dagger(y_2) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podemos calcular a norma desse estado como

$$\begin{aligned}
\langle M'_1(p'_1) M'_2(p'_2) | M_1(p_1) M_2(p_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 x_1 d^3 y_1 d^3 x_2 d^3 y_2 e^{-ip_1 \cdot (x_1 + y_1)/2} \\
&\times e^{-ip_2 \cdot (x_2 + y_2)/2} \psi^*(x_1 - y_1) \psi^*(x_2 - y_2) \\
&\times \int d^3 x'_1 d^3 y'_1 d^3 x'_2 d^3 y'_2 e^{ip'_1 \cdot (x'_1 + y'_1)/2} \\
&\times e^{ip'_2 \cdot (x'_2 + y'_2)/2} \psi(x'_1 - y'_1) \psi(x'_2 - y'_2) \mathcal{O}_M, \quad (3.28)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_M &= \langle 0 | \bar{q}(y_1) L(x_1, y_1) q(x_1) \bar{q}(y_2) L(x_2, y_2) q(x_2) \\
&\times q^\dagger(x'_1) L^\dagger(x'_1, y'_1) \bar{q}^\dagger(y'_1) q^\dagger(x'_2) L^\dagger(x'_2, y'_2) \bar{q}^\dagger(y'_2) | 0 \rangle. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Fazendo a contração dos operadores de quarks, antiquarks e links no vácuo, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_M &= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(y_2 - y'_2) \delta(y_1 - y'_1) \\
&+ \delta(x_1 - x'_2) \delta(x_2 - x'_1) \delta(y_1 - y'_2) \delta(y_2 - y'_1). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Colocando o resultado (3.30) em (3.28) e fazendo a transformação

$$R_i = \frac{x_i + y_i}{2}, \quad (3.31)$$

$$r_i = x_i - y_i, \quad (3.32)$$

onde $i=1,2$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\langle M'_1(p'_1) M'_2(p'_2) | M_1(p_1) M_2(p_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 R_1 e^{i(p'_1 - p_1) \cdot R_1} \int d^3 r_1 \psi^*(r_1) \psi(r_1) \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 R_2 e^{i(p'_2 - p_2) \cdot R_2} \int d^3 r_2 \psi^*(r_2) \psi(r_2) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 R_1 e^{i(p'_2 - p_1) \cdot R_1} \int d^3 r_1 \psi^*(r_1) \psi(r_1) \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 R_2 e^{i(p'_1 - p_2) \cdot R_2} \int d^3 r_2 \psi^*(r_2) \psi(r_2). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Supondo novamente que as funções ψ estejam normalizadas, obtemos o resultado final:

$$\begin{aligned}
\langle M'_1(p'_1) M'_2(p'_2) | M_1(p_1) M_2(p_2) \rangle &= \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) \\
&+ \delta(p_1 - p'_2) \delta(p_2 - p'_1). \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Desse resultado, podemos observar que o produto interno entre o estado de dois mésons tem termos que seriam esperados para mésons considerados como bósons sem estrutura interna. Os termos de superposição dos operadores de quark e antiquark de dois mésons distintos não estão presentes, ou seja, não há troca de quarks entre mésons distintos. Em um modelo sem os operadores de link (que garantem que quarks e antiquarks estejam permanentemente confinados no interior dos mésons), esses termos decrescem exponencialmente com a separação entre dois mésons. Outra forma de descrever a equação (3.34) é que os estados com diferentes configurações de link são ortogonais.

Neste momento seria interessante mostrar o resultado que é obtido se calculamos esse mesmo comutador, mas escrevendo o estado do méson sem o link. Sejam o operador de méson

$$M^\dagger(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x d^3y e^{ip \cdot (x+y)/2} \psi(x-y) q^\dagger(x) \bar{q}^\dagger(y), \quad (3.35)$$

e o comutador

$$\begin{aligned} [M(p), M^\dagger(p')] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' d^3y' e^{-ip(x+y)/2} e^{ip'(x'+y')/2} \\ &\times \psi^*(x-y) \psi(x'-y') [\bar{q}(y) q(x), q^\dagger(x') \bar{q}^\dagger(y')]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Calculando os comutadores de quark e antiquark, fazendo uso dos anticomutadores de operadores de quarks e antiquark, obtemos

$$\begin{aligned} [\bar{q}(y) q(x), q^\dagger(x') \bar{q}^\dagger(y')] &= \delta(x-x') \delta(y-y') - \delta(x-x') \bar{q}^\dagger(y') \bar{q}(y) \\ &- \delta(y-y') q^\dagger(x') q(x). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Podemos então escrever

$$[M(p), M^\dagger(p')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y e^{i(p'-p)(x+y)/2} \psi^*(x-y) \psi(x-y) - \Delta_{pp'} \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_{pp'} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' e^{-ip(x+y)/2} e^{ip'(x'+y)/2} \psi^*(x-y) \psi(x'-y) q^\dagger(x') q(x) \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3y' e^{-ip(x+y)/2} e^{ip'(x+y')/2} \psi^*(x-y) \psi(x-y') \bar{q}^\dagger(y') \bar{q}(y). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando as transformações (3.23) e (3.24) para o primeiro termo, temos então

$$[M(p), M^\dagger(p')] = \delta(p - p') - \Delta_{pp'}. \quad (3.40)$$

Esse resultado, se comparado ao resultado obtido através do cálculo da relação de comutação com link, que será calculada a seguir, mostra que sem a introdução dos links os mésons mostram sua estrutura interna. Essa é a interpretação do termo $\Delta_{pp'}$.

A relação de comutação canônica para mésons com Link é calculada como segue

$$\begin{aligned} [M(p), M^\dagger(p')] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' d^3y' e^{-ip(x+y)/2} e^{ip'(x'+y')/2} \psi^*(x-y) \\ &\times \psi(x'-y) [\bar{q}(y) L(x, y) q(x), q^\dagger(x') L^\dagger(x', y') \bar{q}^\dagger(y')], \end{aligned} \quad (3.41)$$

o comutador em (3.41) pode ser calculado e nos dá como resultado

$$\begin{aligned} [\bar{q}(y) L(x, y) q(x), q^\dagger(x') L^\dagger(x', y') \bar{q}^\dagger(y')] &= \delta(x - x') \delta(y - y') \\ &\times \delta_K(x - x') \delta_K(y - y'). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aqui os termos que envolvem deltas de Kronecker sozinhos, ou termos com links sozinhos ou com pontas soltas, que resultam do cálculo de (3.42), não foram mostrados porque são nulos sob uma integração. Colocando (3.42) em (3.41) temos

$$[M(p), M^\dagger(p')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y e^{i(p'-p) \cdot (x+y)/2} \psi^*(x-y) \psi(x-y). \quad (3.43)$$

Usando (3.23) e (3.24)

$$[M(p), M^\dagger(p')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3R e^{i(p'-p) \cdot R} \int d^3r \psi^*(r) \psi(r), \quad (3.44)$$

obtemos, enfim

$$[M(p), M^\dagger(p')] = \delta(p - p'). \quad (3.45)$$

Podemos concluir através desse resultado que os mésons se comportam como bósons elementares, ou seja, não mostram sua estrutura interna, devido a presença do link, o que não acontece em (3.40).

A equação de Schrödinger para a amplitude ψ é obtida a partir de

$$\langle 0 | \bar{q}(y) L(x, y) q(x) (H - E_1) | M(p) \rangle = 0, \quad (3.46)$$

com a Hamiltoniana (3.19) e o estado de méson dado pela relação (3.20). Fazendo o cálculo das contrações para os operadores de quarks e links, obtemos

$$\left\{ \frac{p^2}{4m} - \frac{\nabla_r^2}{m} + V(r) - E_1 \right\} \psi(r) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip \cdot R} = 0, \quad (3.47)$$

que pode ser escrito como

$$\left\{ -\frac{\nabla_r^2}{m} + V(r) \right\} \psi(r) = \varepsilon_1 \psi(r), \quad (3.48)$$

onde

$$E_1 = \varepsilon_1 + \frac{p^2}{4m}. \quad (3.49)$$

Essas são as equações usuais para a amplitude de um méson, ou seja, a inclusão dos links no méson não modifica a equação de movimento para um méson isolado.

A equação de movimento para o estado de dois mésons é calculada da forma

$$\langle 0 | \bar{q}(y_1) L(x_1, y_1) q(x_1) \bar{q}(y_2) L(x_2, y_2) q(x_2) (H - E_2), | M_1(p_1) M_2(p_2) \rangle = 0. \quad (3.50)$$

Após manipulações similares às acima, obtemos

$$\left[-\frac{\nabla_{r_1}^2 + \nabla_{r_2}^2}{m} + V(r_1) + V(r_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] \psi_{p_1 p_2}(r_1, r_2; R_1, R_2) = 0, \quad (3.51)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_{p_1 p_2}(r_1, r_2; R_1, R_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[e^{i(p_1 \cdot R_1 + p_2 \cdot R_2)} \psi(r_1) \psi(r_2) \right. \\ &\quad \left. + e^{i(p_1 \cdot R_2 + p_2 \cdot R_1)} \psi(r_2) \psi(r_1) \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$E_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{4m} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (3.53)$$

Como o espectro é somente formado pela energia cinética do centro-de-massa e pelas energias internas de cada méson ε_1 e ε_2 , podemos concluir que não há interações de outra natureza, além do confinamento que atua somente dentro de cada méson. Desta forma fica claro que não aparecem forças de van der Waals entre mésons.

Podemos agora generalizar para o grupo não-abeliano $SU(3)$. Para esse caso os operadores de criação e aniquilação de links carregam dois índices de cor $L_\beta^{\dagger\alpha}$ e L_β^α .

Sendo $U_\alpha^\beta(x)$ a matriz unitária 3×3 que implementa as transformações de *gauge* locais $SU(3)$, os operadores de criação de quarks se transformam como

$$q^{\dagger\alpha}(x) \rightarrow q^{\dagger\beta}(x) U_\beta^{\dagger\alpha}(x), \quad \bar{q}^{\dagger\alpha}(y) \rightarrow U_\alpha^\beta(y) \bar{q}_\beta^\dagger(y) = \bar{q}_\beta^\dagger(y) U_\alpha^{T\beta}(y). \quad (3.54)$$

Os operadores de criação de links e operador número se transformam como

$$L_\alpha^{\dagger\delta}(x, y) \rightarrow U_\alpha^\beta(x) L_\beta^{\dagger\gamma}(x, y) U_\gamma^{\dagger\delta}(y), \quad (3.55)$$

$$N_\alpha^\delta(x, x') \rightarrow U_\alpha^\beta(x) N_\beta^\gamma(x, x') U_\gamma^{\dagger\delta}(x'), \quad (3.56)$$

$$\bar{N}_\delta^\alpha(y, y') \rightarrow U_\beta^{T\dagger\alpha}(y) \bar{N}_\gamma^\beta(y, y') U_\delta^{T\gamma}(y'). \quad (3.57)$$

As relações de comutação dos operadores de link são

$$[L_\beta^\alpha(x, y), L_{\beta'}^{\alpha'}(x', y')] = [L_\alpha^{\dagger\beta}(x, y), L_{\alpha'}^{\dagger\beta'}(x', y')] = 0, \quad (3.58)$$

$$[L_\beta^\alpha(x, y), L_{\alpha'}^{\dagger\beta'}(x', y')] = \frac{1}{9} \delta_{\alpha'}^\alpha \delta_{\beta'}^\beta \delta_K(x - x') \delta_K(y - y'). \quad (3.59)$$

De forma análoga ao caso não-abeliano, temos

$$[N_\alpha^\beta(x, x'), L_{\alpha_1}^{\dagger\beta_1}(x_1, y_1)] = \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^\beta \delta_K(x' - x_1) L_{\alpha_1}^{\dagger\beta_1}(x, y_1), \quad (3.60)$$

$$[\bar{N}_\alpha^\beta(y, y'), L_{\alpha_1}^{\dagger\beta_1}(x_1, y_1)] = \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_K(y' - y_1) L_{\alpha_1}^{\dagger\beta_1}(x_1, y), \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} [N_\alpha^\beta(x, x'), N_{\beta_1}^{\alpha_1}(x_1, x'_1)] &= \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^\beta \delta_K(x' - x_1) N_{\alpha_1}^{\beta_1}(x, x'_1) \\ &- \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_K(x - x'_1) N_{\alpha_1}^{\beta_1}(x_1, x'), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} [\bar{N}_\alpha^\beta(y, y'), \bar{N}_{\alpha_1}^{\beta_1}(y_1, y'_1)] &= \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_K(y' - y_1) \bar{N}_{\alpha_1}^{\beta_1}(y, y'_1) \\ &- \frac{1}{9} \delta_{\alpha_1}^\beta \delta_K(y - y'_1) \bar{N}_{\alpha_1}^{\beta_1}(y_1, y'), \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$[N_\alpha^\beta(x, x'), \bar{N}_{\alpha'}^{\beta'}(y, y')] = 0, \quad (3.64)$$

onde $L^\dagger$, L , N e $\bar{N}$ satisfazem todas as identidades de Jacobi, ou seja formam uma álgebra de Lie. O operador de momento é definido como

$$\begin{aligned} P^i &= i \int d^3x [{}^1\nabla_x^i q^{\dagger\alpha}(x) N_\alpha^\beta(x, x)] q_\beta(x) \\ &+ i \int d^3y [{}^1\nabla_y^i \bar{q}_\beta^\dagger(y) \bar{N}_\alpha^\beta(y, y)] \bar{q}^\alpha(y). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Não é difícil mostrar que P^i é invariante de *gauge* sob as transformações (3.54).

A Hamiltoniana de confinamento para mésons tem a forma

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2m} \int d^3x \left[{}^1\nabla_x^2 q^{\dagger\alpha}(x) N_\alpha^\beta(x, x) \right] q_\beta(x) \\ & -\frac{1}{2m} \int d^3y \left[{}^1\nabla_y^2 \bar{q}_\alpha^\dagger(y) \bar{N}_\beta^\alpha(y, y) \right] \bar{q}^\beta(y) \\ & + \int d^3x d^3y q^{\dagger\alpha}(x) L_\alpha^{\dagger\beta}(x, y) \bar{q}_\beta^\dagger(y) V(x-y) \bar{q}^\gamma(y) L_\gamma^\delta(x, y) q_\delta(x). \end{aligned} \quad (3.66)$$

O estado singleto de cor $SU(3)$ de um méson é dado por

$$|M(p)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x d^3y e^{ip\cdot(x+y)/2} \psi(x-y) q^{\dagger\alpha}(x) L_\alpha^{\dagger\beta}(x, y) \bar{q}_\beta^\dagger(y) |0\rangle. \quad (3.67)$$

Produtos internos desses estados são obtidos da mesma forma que anteriormente, ou seja, os mésons se comportam como partículas elementares de acordo com suas relações de comutação (não há troca de quarks entre mésons distintos).

Agora, vamos generalizar de forma a incluir os grau de liberdade de spin e sabor, escrevendo o estado de méson como:

$$M_a^\dagger(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x d^3y e^{ip\cdot(x+y)/2} \Phi_a^{ij} \psi_a(x-y) q_i^{\dagger\alpha}(x) L_\alpha^{\dagger\beta}(x, y) \bar{q}_{\beta j}^\dagger(y), \quad (3.68)$$

onde $i, j = \{\text{spin, sabor}\}$ e $\alpha, \beta = \{\text{cor}\}$.

Para simplificar vamos denotar $\mu = (\alpha, i)$ e $\nu = (\beta, j)$, e escrevemos (3.68) como

$$M_a^\dagger(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x d^3y e^{ip\cdot(x+y)/2} \Phi_a^{\mu\nu} \psi_a(x-y) q^{\dagger\mu}(x) L_\mu^{\dagger\nu}(x, y) \bar{q}_\nu^\dagger(y), \quad (3.69)$$

com o entendimento de que os links carregam somente índices de cor. Podemos calcular a norma desse estado para verificar que a introdução desses índices não deve modificar esse valor.

$$\begin{aligned} \langle p | p' \rangle &= \langle 0 | M_a M_b^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y d^3x' d^3y' e^{-ip(x+y)/2} \psi_a^*(x-y) \Phi_a^{*\mu\nu} \\ &\quad \times e^{ip'(x'+y')/2} \psi_b(x'-y') \Phi_b^{\mu'\nu'} \times \mathcal{O}_{ab} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Onde

$$\mathcal{O}_{ab} = \langle 0 | \bar{q}^\nu(y) L_\nu^\mu(x, y) q_\mu(x) q^{\dagger\mu'}(x') L_{\mu'}^{\dagger\nu'}(x', y') \bar{q}_{\nu'}^\dagger(y') | 0 \rangle. \quad (3.71)$$

Fazendo as contrações dos índices no vácuo temos,

$$\mathcal{O}_{ab} = \frac{1}{9} \delta_{\mu}^{\mu'} \delta(x-x') \delta_{\nu'}^{\nu} \delta(y-y') \bar{\delta}_{\mu'}^{\mu} \delta_K(x-x') \bar{\delta}_{\nu'}^{\nu} \delta_K(y-y'), \quad (3.72)$$

onde as barras sobre as deltas significa que somente índices de cor devem ser considerados nessas deltas. Colocando esse resultado em (3.70) e explicitando os índices como em (3.68), obtemos

$$\begin{aligned} \langle p | p' \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3y e^{-i(p-p')(x+y)/2} \psi_a^*(x-y) \psi_b(x-y) \Phi_a^{*ij} \\ &\times \Phi_b^{i'j'} \times \frac{1}{9} \delta_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_i^{\alpha'} \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{j'}^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Usando as coordenadas de centro-de-massa e relativas, fazendo uso das deltas (onde, como sempre, os índices repetidos indicam somas), temos

$$\langle p | p' \rangle = \delta_{ab} \delta(p-p'). \quad (3.74)$$

Isso mostra que a introdução dos índices não compromete a estatística já calculada anteriormente.

Para finalizar esta seção, convém comentar que GH mostram como introduzir interações microscópicas de curto alcance no modelo. Tais interações incluem a criação de pares de quark-antiquark, rearranjo de links (*link rearrangement*), entre outras. A interação de criação de pares leva à possibilidade de construir interações efetivas de troca de mésons entre hádrons. Esse tipo de interação não será considerada nessa dissertação. Aqui, vamos nos deter somente na interação de *link rearrangement*.

3.3 A QCD no Limite de Acoplamento Forte (SCQCD)

Nesta seção vamos apresentar uma possível justificativa para o modelo de Greenberg e Hietarinta como base no limite de acoplamento forte da QCD. Partimos da formulação Hamiltoniana da QCD na rede [14] e consideramos o limite de acoplamento forte desse Hamiltoniano. Essa seção está fortemente baseada nas referências [11, 12].

Em primeiro instante devemos discutir a formulação da QCD numa rede espacial e o confinamento [14]. A indicação de que a QCD leva ao confinamento vem do

estudo dessa teoria no limite de acoplamento forte, e resultados nesse regime podem ser obtidos através da formulação de tal teoria de campos numa rede. A QCD é uma teoria de campos não-abeliana e é importante salientar que a constante de acoplamento depende de uma escala de comprimento. Para distinguir o acoplamento forte do fraco, podemos introduzir uma escala intrínseca na teoria, que será proporcionada por uma rede.

3.3.1 Formulação Hamiltoniana da QCD na Rede

Primeiramente, vamos considerar quarks estáticos. Isso é necessário para mostrar mais detalhadamente a discretização da parte gluônica. Combinando o campo gluônico na forma de uma matriz 3×3 da forma (2.5), e escrevendo a derivada covariante que atua nos campos de quark e o tensor campo eletromagnético (de cor) como

$$\begin{aligned} D_\mu q^c &= \partial_\mu q^c - ig A_\mu^{c'c} q^{c'}, \\ D_\mu \bar{q}^c &= \partial_\mu \bar{q}^c - ig \bar{q}^{c'} A_\mu^{c'c}, \\ F_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} \lambda^a \mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \end{aligned} \quad (3.75)$$

a densidade de Lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{q} \gamma^0 D_0 q - m_0 \bar{q} q. \quad (3.76)$$

A natureza estática dos quarks é garantida pela ausência de derivadas espaciais atuando nos campos de quarks.

Essa Lagrangiana é invariante sob transformação de *gauge* $SU(3)$ locais, (2.6) e (2.7), descritas pela matriz 3×3

$$S(x) = \exp[i\omega^a(x)\lambda^a/2]. \quad (3.77)$$

Aqui, a discretização é feita ao nível do Hamiltoniano; precisaremos, portanto, do Hamiltoniano correspondente à Lagrangiana anterior. Devido à invariância de *gauge*, nem todas as variáveis A_μ são independentes, e devemos então evitar esta redundância através de uma escolha apropriada do *gauge*. O mais conveniente é o

gauge $A_0 = 0$. Com

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^a &= \partial_0 \mathbf{A}^a, & \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \lambda^a \mathbf{E}^a, \\ B_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk},\end{aligned}\tag{3.78}$$

o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \int d^3x \{ \text{Tr}[\mathbf{E}^2(x) + \mathbf{B}^2(x)] + m_0 \bar{q}(x) q(x) \}.\tag{3.79}$$

O gauge $A_0 = 0$ deve ser suplementado com a condição auxiliar correspondente à lei de Gauss, pois ainda é necessário eliminar o último grau de liberdade espúrio:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} - ig[A_i, E_i] = -gq^\dagger \frac{\lambda^a}{2} q \frac{\lambda^a}{2}.\tag{3.80}$$

É útil primeiro reescalonar as variáveis de tal maneira a remover a constante de acoplamento g das Eqs. (3.75), (3.76), (2.6) e (2.7) (naturalmente, ela deverá aparecer em outra parte). Sejam

$$\tilde{\mathbf{A}}^a(x) = g \mathbf{A}^a(x), \quad \tilde{\mathbf{E}}^a(x) = \frac{1}{g} \mathbf{E}^a(x).\tag{3.81}$$

Essas novas variáveis continuam satisfazendo as relações de comutação usuais. Algumas das outras relações mudam para

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \frac{1}{g} \left(\partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu - i[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \right), \\ \tilde{A}_\mu &\longrightarrow S^{-1} \tilde{A}_\mu S + iS^{-1} \partial_\mu S,\end{aligned}\tag{3.82}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} - i[\tilde{A}_i, \tilde{E}_i] = -q^\dagger q,\tag{3.83}$$

e o Hamiltoniano fica dado como

$$H = \text{Tr} \int d^3x \left\{ \left[g^2 \tilde{\mathbf{E}}^2(x) + \frac{1}{g^2} \tilde{\mathbf{B}}^2(x) \right] + m_0 \bar{q}(x) q(x) \right\},\tag{3.84}$$

com

$$\tilde{B}_k = \frac{1}{2} g \varepsilon_{ijk} F_{ij}.\tag{3.85}$$

Vamos discretizar o espaço em uma rede cúbica simples, com espaçamento a . Os pontos da rede são vetores da forma

$$\tilde{\mathbf{x}} = a(i\hat{\mathbf{e}}_x + j\hat{\mathbf{e}}_y + k\hat{\mathbf{e}}_z),\tag{3.86}$$

i, j, k são inteiros e os $\hat{e}_i$ são vetores unitários ao longo das direções da rede. O link direcionado de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + a\hat{e}$ será indicado por $(\mathbf{x}, \hat{e})$. O oposto desse link é $(\mathbf{x} + a\hat{e}, -\hat{e})$.

Introduzir uma rede na teoria nos obriga a abrir mão de várias simetrias espaciais, como por exemplo a invariância de Lorentz. Mas queremos respeitar a invariância de *gauge* e exigindo que a teoria seja invariante sob a generalização discreta da lei de transformação dos campos de quarks, Eqs. (2.6) e (2.7). Associamos os campos de *gauge* vetoriais aos links. Em uma rede, escalares são associados aos pontos da rede, vetores aos links direcionados, tensores antisimétricos com áreas orientadas, etc. A unidade básica será o operador de corda (operador de link)

$$U(\mathbf{x}; \hat{e}) = U(\mathbf{x} + a\hat{e}, \mathbf{x}; c) = P \exp i \left[\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + a\hat{e}} \tilde{\mathbf{A}} \cdot dz \right]. \quad (3.87)$$

Uma propriedade que segue da unitariedade de U é

$$U^{-1}(\mathbf{x}; \hat{e}) = U(\mathbf{x} + a\hat{e}; -\hat{e}). \quad (3.88)$$

O limite contínuo é obtido fazendo $a \rightarrow 0$ e, então

$$U(\mathbf{x}; \hat{e}) \approx \exp\{ia\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{e}\} \approx 1 + ia\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{e}. \quad (3.89)$$

Vamos usar esse limite para justificar as versões de vários operadores na rede.

U é uma matriz unitária 3×3 e, assim, pode ser parametrizada como qualquer elemento de $SU(3)$,

$$U(\mathbf{x}; \hat{e}) = \exp \left\{ i \frac{\lambda^a}{2} \cdot b^a(\mathbf{x}; \hat{e}) \right\}. \quad (3.90)$$

Comparando com (3.89), vemos que os parâmetros b do grupo são associados ao potencial A . É importante notar que os b 's variam sobre uma variedade compacta (*manifold*), ao contrário dos A 's do contínuo.

Estamos agora em condições de definir um operador invariante de *gauge* cujo limite contínuo seja relacionado a $\tilde{B}$ de (3.85). Seja o traço de um produto de quatro operadores de link, $U_{\mathbf{x}; \hat{e}}$, ao longo de um quadrado, ou plaqueta, indicada na Fig. 3.1. A plaqueta é definida como

$$U(\mathbf{x}; \hat{e}_1, \hat{e}_2) = U(\mathbf{x} + a\hat{e}_2; -\hat{e}_2)U(\mathbf{x} + a(\hat{e}_1 + \hat{e}_2); -\hat{e}_1)U(\mathbf{x} + a\hat{e}_1; \hat{e}_2)U(\mathbf{x}; \hat{e}_1). \quad (3.91)$$

Usando a Eq. (3.89), combinamos os fatores de $U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}})$ e, até a ordem a^2 , obtemos

$$\text{Tr } U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) = \epsilon_{ijk} \text{Tr} \exp[ia^2 \tilde{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k] \approx \epsilon_{ijk} \text{Tr} [1 - \frac{1}{2}a^4 (\tilde{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k)^2]. \quad (3.92)$$

Quando não há ambiguidade, substituímos a combinação $(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j)$ por p

$$U_p = U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j). \quad (3.93)$$

De acordo com a Eq. (3.92), a versão na rede de

$$H_M = \text{Tr} \int d^3x \frac{1}{g^2} \tilde{\mathbf{B}}^2(x) \quad (3.94)$$

é

$$H_M = \sum_p \frac{1}{g^2 a} \text{Tr} [2 - U_p - U_p^\dagger]. \quad (3.95)$$

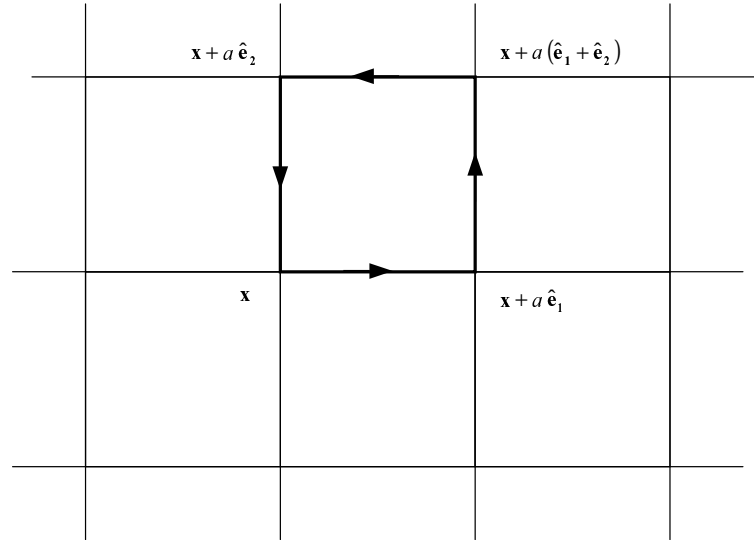


Figura 3.1: Uma plaqueta elementar da rede.

As relações de comutação

$$\begin{aligned} [E_j^a(\mathbf{y}), A_i^b(\mathbf{x})] &= -i\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{q^{\dagger c}(\mathbf{x}), q^{c'}(\mathbf{y})\} &= \delta^{cc'}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.96)$$

servem de guia para a construção do equivalente ao operador campo elétrico na rede.

Com $U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}})$ definido na Eq. (3.87), não é muito complicado mostrar que

$$[E^a(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}})] = \delta_{ij} \delta^2(y_\perp) U(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{y}; c) \frac{\lambda^a}{2} U(\mathbf{y}, \mathbf{x}; c), \quad (3.97)$$

se $\mathbf{y}$ coincide com qualquer ponto no intervalo $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}})$, e zero nos outros casos. Devemos notar que $U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}})$ não pode ser quebrado ao longo do link - é uma quantidade elementar. Podemos definir um campo elétrico no começo ou no final de um link. Os dois campos associados com o link $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}})$ são $E^a(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}})$ e $E^a(\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}}; -\hat{\mathbf{e}})$, e são determinados pelas suas relações de comutação com os operadores de link $U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}})$. Para $\hat{\mathbf{e}}$ positivo, postula-se

$$\begin{aligned} [E^a(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i), U(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{e}}_i)] &= \delta_{ij} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i) \frac{\lambda^a}{2}, \\ [E^a(\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}}_i; -\hat{\mathbf{e}}_i), U(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{e}}_i)] &= -\delta_{ij} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{\lambda^a}{2} U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i). \end{aligned} \quad (3.98)$$

As relações para $\hat{\mathbf{e}}$'s negativos são obtidas fazendo uso do fato que

$$U^\dagger(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) = U(\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}}; -\hat{\mathbf{e}}).$$

A identidade de Jacobi leva às relações de comutação para o campo elétrico

$$\begin{aligned} [E^a(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i), E^b(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{e}}_j)] &= i\delta_{ij} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} f^{abc} E^c(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i), \\ [E^a(\mathbf{x}; -\hat{\mathbf{e}}_i), E^b(\mathbf{y}; -\hat{\mathbf{e}}_j)] &= -i\delta_{ij} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} f^{abc} E^c(\mathbf{x}; -\hat{\mathbf{e}}_i), \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$[E^a(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}_i), E^b(\mathbf{y}; -\hat{\mathbf{e}}_j)] = 0. \quad (3.100)$$

Os dois campos elétricos não são independentes; a relação de comutação definida permite a conexão

$$\lambda^a E^a(\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}}; -\hat{\mathbf{e}}) = -U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) \lambda^b E^b(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) U^\dagger(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}), \quad (3.101)$$

que implica em

$$\mathbf{E}^2(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{E}^2(\mathbf{x} + a\hat{\mathbf{e}}; -\hat{\mathbf{e}}). \quad (3.102)$$

Juntando os termos, temos que a parte gluônica (mais o termo trivial de massa) da QCD é dada por:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_{\text{links}} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) + \frac{2}{g^4} \text{Tr} \sum_p (2 - U_p - U_p^\dagger) \right] + \sum_x m_0 q^\dagger(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}). \quad (3.103)$$

Para finalizar esta parte, mencionamos que a discretização dos termos que envolvem a energia cinética dos quarks e a sua interação com as componentes espaciais

do campo de glúons leva a problemas. A discretização simples resulta na seguinte expressão

$$H_q = \frac{1}{a} \sum_{\hat{\mathbf{e}}} \bar{q}(\mathbf{x} + a\mathbf{e}) \gamma_{\hat{\mathbf{e}}} U(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{e}}) q(\mathbf{x}), \quad (3.104)$$

onde γ é a matriz de Dirac com índice espacial. Para um espaçamento finito a , o problema que surge é que o número de graus de liberdade fermiônicos é o *dobro* do número no contínuo. Esse problema é conhecido como duplicação de férmions (*fermion doubling*) na rede. Embora não tenhamos interesse neste ponto aqui, vale lembrar que há maneiras de se contornar o problema. Para a construção de um modelo de quarks com base neste Hamiltoniano, esse problema é contornado tratando a energia cinética no contínuo [25].

3.3.2 O modelo de Greenberg e Hietarinta e SCQCD

Muitos dos argumentos apresentados aqui são tomados das referências [11, 12] e [16]. Vamos agora discutir a construção de um modelo de quarks a partir do Hamiltoniano da QCD no limite de acoplamento forte, e mostrar sua relação ao modelo de Greenberg e Hietarinta. Para tornar a notação mais compacta que a empregada na discussão da seção anterior, escreveremos o Hamiltoniano da seguinte forma:

$$H_{QCD}^{SC} \equiv H_E + H_q + H_M, \quad (3.105)$$

onde cada termo é dado como

$$H_E = \frac{g^2}{2a} \sum_l E(l) \cdot E(l), \quad (3.106)$$

$$H_q = \sum_q m_q \sum_n q_n^\dagger q_n + \frac{1}{a} \sum_{q,l,i,j} q_j^\dagger U(l) \alpha_l q_i, \quad (3.107)$$

$$H_M = \frac{1}{ag^2} \sum_p (2 - U_p - U_p^\dagger). \quad (3.108)$$

Aqui, l indica a orientação do link, e α_l é a componente, na direção do link, da matriz de Dirac com índice espacial, $\alpha_l = \gamma_0 \gamma_l$. O resto da notação é auto-evidente.

Como foi dito anteriormente, o objetivo é usar teoria de perturbação no inverso da constante de acoplamento forte. A discretização fornece um *cutoff* ultravioleta a ;

quando a é tomado suficientemente grande g deve ser grande também. A expansão é definida tomando o termo H_E como sendo o termo dominante. Resolve-se, então, o mais exatamente possível, a teoria dada por esse Hamiltoniano, e trata-se os termos restantes em teoria de perturbação. É importante notar que essa estratégia não é possível sem introduzir um regulador ultravioleta, como é o caso da formulação na rede, que nos dá naturalmente esse regulador.

Para ilustrar o procedimento, vamos considerar um exemplo simples, apresentado por Isgur e Paton [25]. Vamos aproximar um oscilador harmônico contínuo unidimensional por uma partícula saltando ao longo de uma rede unidimensional de pontos $x = na$ ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), com espaçamento a . O Hamiltoniano desse modelo pode ser escrito como

$$H_{m,n} = \left[\frac{1}{ma^2} + \frac{1}{2}ka^2n^2 \right] \delta_{m,n} - \frac{1}{2ma^2}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}). \quad (3.109)$$

A equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial t} = H_{mn}\psi_n(t), \quad (3.110)$$

no limite $a \rightarrow 0$, torna-se

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \right] \psi(x,t), \quad (3.111)$$

que é a equação usual do contínuo.

Agora, quando $a \rightarrow \infty$, o termo da energia potencial $\frac{1}{2}ka^2n^2\delta_{mn}$ é dominante, e os autoestados correspondem à partícula localizada (*sentada*) nos pontos da rede. Nesse limite, as correções são, relativamente ao termo dominante, da ordem de

$$\chi = \frac{1/ma^2}{ka^2} = \frac{1}{kma^4}. \quad (3.112)$$

Podemos então usar sistematicamente a teoria de perturbação nesse parâmetro.

É claro que para $a \gg \alpha^{-1}$, onde $\alpha^{-1} = (km)^{-1/4}$ é a escala característica do oscilador harmônico, não se pode obter auto-valores e funções de onda realísticos com perturbações em potências de χ . Mas para $\chi \sim 1$, já é possível obter boa aproximação para as soluções do problema no contínuo em teoria de perturbação, se usarmos ordens de χ razoavelmente altas.

Voltando agora ao problema de interesse. Para entender um pouco mais a teoria, vamos considerar alguns aspectos da sua dinâmica. Consideremos primeiramente o confinamento. O estado de vácuo não perturbado $|0\rangle$ é definido como

$$E^a(l)|0\rangle = 0, \quad (3.113)$$

$$\langle 0|U(l)|0\rangle = 0. \quad (3.114)$$

Usando a relação de comutação entre E e U , Eq. (3.98), obtemos

$$E^2(l)U(l)|0\rangle = \frac{4}{3}U(l)|0\rangle. \quad (3.115)$$

Isso mostra que o operador U cria fluxo elétrico e energia. Portanto, a energia elétrica (por unidade de comprimento) é igual a $2g^2/3a^2$ para cada termo $U(l)$ atuando no estado do vácuo não perturbado. Um par quark-antiquark, separado por n links, tem energia na vezes $2g^2/3a^2$. Mas na é precisamente a distância d entre o quark e o antiquark. Portanto, obtemos para a energia

$$E_{\bar{q}q} = \frac{2}{3} \frac{g^2}{a^2} d \equiv \sigma d, \quad (3.116)$$

onde σ é conhecida como a tensão da corda (*string tension*).

Agora, se o confinamento deve persistir quando $a \rightarrow 0$, g deve escalonar com a como $g \sim a$. A questão é saber se isso é verdade na SCQCD em ordens mais altas. Cálculos analíticos usando teoria de perturbação até ordens arbitrariamente altas, usando extrapolações de Padè, mostram que esse é realmente o caso [26]. Em particular, mostra-se que [26]

$$\sigma = \frac{1}{a^2} f(g^2), \quad (3.117)$$

onde $f(g^2)$ é uma série de potências em $1/g^2$. Isso indica que deve ser possível escolher $g(a)$ de tal maneira que, no limite $a \rightarrow 0$, σ mantenha-se fixo em seu valor físico. Para $a \rightarrow 0$, $g(a)$ deve comportar-se da mesma forma que como calculado com a teoria no contínuo. Esse fato mostra que o confinamento é natural, mas não trivial, na QCD na rede. Se exigirmos que

$$\frac{d\sigma}{da} = 0, \quad (3.118)$$

podemos escrever

$$2\sigma + a \frac{dg}{da} \frac{d\sigma}{dg} = 0. \quad (3.119)$$

Usando o resultado do contínuo para dg/da [27] como condição de contorno para $a \rightarrow 0$ e integrando essa equação diferencial, obtemos a solução

$$f(g^2) = \frac{\sigma}{\Lambda^2} (\beta_0 g^2)^{\beta_1/\beta_0^2} e^{-1/\beta_0 g^2}, \quad (3.120)$$

onde Λ é uma constante, $\beta_0 = 11/16\pi^2$ e $\beta_1 = 102/256\pi^2$. Vemos que a função $f(g^2)$ não pode ser expandida em série de potências em torno de $g^2 = 0$. Isso significa que o confinamento não pode ser obtido na QCD via teoria de perturbação usual usando uma expansão na constante de acoplamento.

O próximo aspecto importante da dinâmica da SCQCD para o contexto dessa dissertação está contido no termo H_q . Esse termo descreve o movimento dos quarks e a produção de pares $\bar{q}q$: ele destrói um quark, cria um antiquark e um link. Isso pode mudar o comprimento de um par $\bar{q}q$ ligado por um link (os quarks se moveram); pode também criar um novo par $\bar{q}q$ (quebra de link). Portanto, o comprimento de um link não é um auto-estado do Hamiltoniano. Um estado físico, então, é uma superposição de estados com links de diversos tamanhos e geometrias.

Por fim, o termo H_M é de ordem $1/g^4$ em relação ao termo dominante, H_E . Ele contém plaquetas que aniquilam e criam links. Sua ação é rearranjar links.

Em princípio, com suficiente poder computacional, pode-se empregar a formulação na rede e calcular funções de onda e autovalores usando H_{QCD}^{SC} . No entanto, o esforço computacional é enorme e um modelo pode ser mais útil enquanto não chegarmos a um estágio mais avançado na tecnologia de computadores. O modelo tem como base usar funções de onda contínuas, concomitantemente a um Hamiltoniano discretizado. O Hamiltoniano da Eq. (3.105) pode ser reescrito como

$$H_{QCD}^{SC} \approx T + V + (H_q - T) + H_M + (H_E - V), \quad (3.121)$$

onde T é o termo de energia cinética e massa dos quarks e V é o potencial confinante, no *contínuo*. O potencial é da forma σr , onde r é a distância entre os quarks. Definimos $H_0 = T + V$ e o restante de H_{QCD}^{SC} como H_1 . Os termos de H_1 , comparados aos de H_0 , são de ordem superior em $1/g^2$. O Hamiltoniano H_0 é tratado exatamente

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle. \quad (3.122)$$

O estado fundamental não perturbado é $|\phi_0\rangle$. A correção ao estado fundamental, devida a H_1 , pode ser obtida usando a teoria de perturbação de Wigner-Brillouin, que fornece

$$|\psi\rangle = \sqrt{\mathcal{N}}\Omega|\phi_0\rangle, \quad (3.123)$$

onde

$$\Omega = 1 + \frac{1}{E - \Lambda(H_0 + H_1)\Lambda}\Lambda H_1, \quad (3.124)$$

com

$$\Lambda = 1 - |\phi_0\rangle\langle\phi_0|. \quad (3.125)$$

O significado disso é que podemos calcular elementos de matriz do Hamiltoniano discreto usando funções de onda do contínuo. Por exemplo [12], consideremos a contribuição da energia elétrica ao estado de um méson, dada pelo termo H_E contido em H_1 . Sendo $\phi_0(\mathbf{r})$ a autofunção de H_0 do méson, e $\mathbf{r}$ a distância relativa entre o quark e o antiquark, podemos, para cada valor de r , definir uma rede (dividir r em n pedaços de tamanho a). Orientando o link de fluxo elétrico na direção de $\mathbf{r}$, cada segmento contribui, de acordo com a discussão da Eq. (3.116), com uma energia igual a $2g^2/3a = \sigma a$. Somando sobre todos os a 's e tomando o limite contínuo, a contribuição de primeira ordem é dada por

$$\langle\phi_0|H_E|\phi_0\rangle = \sigma \int d^3r |\phi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (3.126)$$

É importante notar que as correções H_1 aos termos não perturbados têm o efeito, entre outros, de introduzir glúons no estado hadrônico. Essas interações são invariantes de *gauge* e, portanto, o estado deve ser invariante de *gauge*. Assim, é importante examinar as consequências de se usar um modelo de quarks com estados hadrônicos que satisfazem a invariância de *gauge* local. A conexão com o modelo de

Greenberg e Hietarinta pode ser estabelecida examinando efeitos referentes à indistinguibilidade dos quarks em superposições das estruturas de estados hadrônicos.

Um estado de méson, com momentum total p , que satisfaz a invariância local de *gauge* $SU(3)$, pode ser escrito como (usando cinemática não-relativística)

$$|M(p)\rangle = (a^3)^2 \sum_{x,y,c} \frac{e^{ip \cdot (x+y)/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\Phi_c(|x-y|)}{\sqrt{3}} \bar{q}_b^\dagger(y) \Gamma U_{ba}(x, y, c) q_a^\dagger(x) |0\rangle, \quad (3.127)$$

onde os operadores de criação de quark e antiquark $q^\dagger$ e $\bar{q}^\dagger$ satisfazem regras de anti-comutação canônicas, Γ é uma matriz que dá os números quânticos corretos do méson no espaço de spin e sabor. Devemos notar que estamos usando os mesmos símbolos $q^\dagger$ e q para operadores de campos e operadores de criação e destruição de quarks; o significado deve ficar claro em cada contexto onde são empregados. Φ_c é a versão discreta da amplitude mesônica no espaço de Fock; são números que dão um peso a cada trajetória c que conecta os pontos x e y . No limite de acoplamento forte, a trajetória mais importante entre x e y é uma linha reta; as outras trajetórias contribuem com termos que vão como potências de $1/g^2$.

A normalização do estado é simplesmente obtida a partir de

$$\langle M(p') | M(p) \rangle = a^3 \sum_{r,c} |\chi_c(\mathbf{r})|^2 \text{Tr}(\Gamma^\dagger \Gamma) \sum_R \frac{a^3}{(2\pi)^3} e^{i(p-p') \cdot R}, \quad (3.128)$$

onde $R = (x + y)/2$, e usamos a propriedade

$$\langle 0 | U_{ab}^\dagger(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{m}}) U_{cd}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \delta_{\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}}. \quad (3.129)$$

Passando ao contínuo (desprezando termos superiores de a) e supondo

$$\sum_c \int |\chi_c(\mathbf{r})|^2 d^3r \text{Tr}(\Gamma^\dagger \Gamma) = 1, \quad (3.130)$$

obtemos

$$\langle M(p') | M(p) \rangle = \delta(p - p'), \quad (3.131)$$

A norma de um estado de dois mésons pode ser calculada. Consideremos o elemento de matriz

$$\langle M'_1(p'_1) M'_2(p'_2) | M_1(p_1) M_2(p_2) \rangle \equiv \mathcal{O}_M. \quad (3.132)$$

Esse termo contém uma contribuição que vem dos quarks e outra que vem dos glúons. A parte dos quarks pode ser calculada imediatamente somente contraindo operadores de quarks e antiquarks

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_Q &= \langle 0 | q(x'_2) \bar{q}(y'_2) q(x'_1) \bar{q}(y'_1) \bar{q}^\dagger(y_1) q^\dagger(x_1) \bar{q}^\dagger(y_2) \bar{q}^\dagger(x_2) | 0 \rangle \\
&= [\delta(y'_1, y_1) \delta(y'_2, y_2) - \delta(y'_1, y_2) \delta(y'_2, y_1)] \\
&\times [\delta(x'_1, x_1) \delta(x'_2, x_2) - \delta(x'_1, x_2) \delta(x'_2, x_1)].
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Isso leva ao seguinte resultado para $\mathcal{O}_M$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_M &= \sum_{c'_1 c'_2 c_1 c_2} \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2 e^{-ip_1 \cdot (x_1 + y_2)/2} e^{-ip_2 \cdot x_1 + y_2)/2} \\
&\times \text{Tr}[\Gamma^\dagger \Gamma^\dagger \Gamma \Gamma] \chi_{c_1}^\dagger(x_1 - y_1) \chi_{c_2}^\dagger(x_2 - y_2) \mathcal{O}_G \\
&\times \left\{ \left[\chi_{c_1}(x_1 - y_1) \chi_{c_2}(x_2 - y_2) e^{-ip_1 \cdot (x_1 + y_1)/2} e^{-ip_2 \cdot (x_2 + y_2)/2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \right. \\
&\left. - \left[\chi_{c_1}(x_2 - y_1) \chi_{c_2}(x_1 - y_2) e^{-ip_1 \cdot (x_2 + y_1)/2} e^{-ip_2 \cdot (x_1 + y_2)/2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.134}$$

A parte gluônica é dada esquematicamente por

$$\mathcal{O}_G = \langle 0 | U^\dagger(c'_2) U^\dagger(c'_1) U(c_1) U(c_2) | 0 \rangle. \tag{3.135}$$

Para calcular esse valor esperado, precisamos de alguns resultados intermediários, todos demonstráveis de maneira simples. Em primeiro lugar, temos

$$\begin{aligned}
\langle 0 | U_{a'e}^\dagger(\mathbf{r}' + a\hat{\mathbf{n}}', \hat{\mathbf{m}}') U_{eb}^\dagger(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{n}}') U_{b'e}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) U_{ea}(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}') | 0 \rangle \\
= \frac{1}{9} \delta_{a',a} \delta_{b',b} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \delta_{\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}'} \delta_{\hat{\mathbf{m}},\hat{\mathbf{m}}'}.
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Essa propriedade, juntamente com a da Eq. (3.129), são exemplos do resultado mais geral

$$\langle 0 | U_a^\dagger(x', y'; c') U_{b'a'}(x, y; c) | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{a,a'} \delta_{b,b'} \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} \delta_{cc'} \equiv \frac{1}{3} \delta_{cc'} \delta_{a,a'} \delta_{b,b'}, \tag{3.137}$$

onde os operadores $U(x, y; c)$ são construídos a partir de operadores de link elementares conectados. A $\delta_{cc'}$ é uma notação abreviada para indicar que trajetórias

com pontos iniciais e finais diferentes são ortogonais. O último resultado que precisamos vem do fato que

$$U(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})U(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}) = U(\mathbf{r}, \mathbf{r} + a\hat{\mathbf{n}} + a\hat{\mathbf{m}}; c), \quad (3.138)$$

leva a

$$\langle 0|[U(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})U(\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}})]^2|0\rangle = \langle 0|[U(\mathbf{r}, \mathbf{r} + a\hat{\mathbf{n}} + a\hat{\mathbf{m}}; c)]^2|0\rangle = 0. \quad (3.139)$$

O resultado é zero porque o vácuo é invariante por transformações de *gauge* e o produto de dois U 's não é invariante (o valor esperado de um objeto colorido no estado de vácuo é zero).

Agora, ao calcular o valor esperado $\mathcal{O}_G$, há várias possibilidades a considerar com relação às quatro trajetórias envolvidas. A primeira é se as trajetórias são retas ou não. No limite de acoplamento forte, somente as retas interessam; as outras são de energia mais alta. Quando são retas, temos ainda duas possibilidades: (1) as trajetórias se cruzam e (2) não se cruzam. Não é difícil ver que o primeiro caso não pode acontecer, pois não é possível duas retas se cruzarem sem “pular” uma sobre a outra; mas “pular” significa já se desviar de uma reta. Portanto, precisamos considerar somente o caso em que as retas não se cruzam. Assim, o resultado é

$$\mathcal{O}_G = [\delta(c'_1, c_1)\delta(c'_2, c_2) + \delta(c'_1, c_2)\delta(c'_2, c_1)]. \quad (3.140)$$

Com isso, obtém-se

$$\mathcal{O}_M = \delta(p'_1 - p_1)\delta(p'_2 - p_2) + \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1), \quad (3.141)$$

e, portanto, a norma do estado de dois mesons é

$$\begin{aligned} \langle M'_1(p'_1)M'_2(p'_2)|M_1(p_1)M_2(p_2)\rangle &= \delta(p'_1 - p_1)\delta(p'_2 - p_2) \\ &+ \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Esse é exatamente o resultado obtido anteriormente no modelo de Greenberg e Hietarinta, mostrando que esse modelo tem como base a QCD no limite de acoplamento forte. Obviamente, correções de ordem mais alta existem e eventualmente precisam ser avaliadas. Mas esse não é o objetivo dessa dissertação.

Para encerrar, mencionamos o fato que os operadores de link do modelo de GH podem ser explicitamente construídos [28], no limite de acoplamento forte da QCD, a partir dos operadores de transporte de cor U , definidas pela Eq. (3.87). Por outro lado, os operadores de junções do modelo de GH não aparecem em SCQCD - eles podem surgir como graus de liberdade efetivos de SCQCD.

Capítulo 4

Potenciais Efetivos para a Interação Méson-Méson

Conforme já salientado anteriormente, o modelo de quarks constituintes não-relativístico é um dos mais bem sucedidos modelos para a estrutura hadrônica, i.e. tem sido capaz de reproduzir com um reduzido número de parâmetros os resultados experimentais para espectros de massas e outras propriedades estáticas dos hádrons, como momentos magnéticos. Contudo, é muito importante notar que isto não implica de maneira alguma que este mesmo modelo possa ser estendido de uma maneira direta a sistemas de muitos quarks, isto é, sistemas mais complexos como dois hádrons em interação. O sucesso do modelo para hádrons isolados indica que os graus de liberdade gluônicos - tubos de fluxo de cor - estão “congelados” em seus estados fundamentais. Agora, para hádrons em interação, estes tubos de fluxos poderão se excitar e, portanto, sua dinâmica deve ser considerada explicitamente.

Como vimos na discussão do modelo de Greenberg e Hietarinta, a introdução dos operadores de link, que representam os tubos de fluxo em seus estados fundamentais, não afeta o espectro dos hádrons. As excitações dos tubos de fluxo podem ser consideradas explicitamente introduzindo novos operadores de links correspondentes aos seus estados excitados. Uma outra maneira de levar em conta as excitações, que será seguida aqui, é introduzir interações efetivas que excitam os tubos. Isto é, ao invés de considerar explicitamente os estados excitados, estes serão gerados através de interações efetivas que atuam sobre os estados em que os links estejam em seus estados fundamentais.

Neste Capítulo vamos explorar uma dessas interações efetivas, a saber, o *rearranjo de links*. Como já explicado anteriormente, a motivação principal para

investigar essa interação em particular é o fato que ela leva a *quark exchange* como no caso da troca de um glúon (OGE). O conceito da troca de um glúon é motivado pela liberdade assintótica da QCD, um efeito de curtas distâncias. Por outro lado, o conceito de tubos de fluxo, é um conceito relacionado à fase do confinamento da QCD, um efeito de longas distâncias. O objetivo aqui é investigar as condições para diferenciar fenomenologicamente esses dois mecanismos de troca de quarks. Obviamente, a resposta definitiva a essa questão virá eventualmente de estudos da QCD na rede.

Especificamente, este estudo exploratório vai se concentrar na interação méson-méson. São duas as razões principais para tal. Primeiro, é mais simples estudar sistemas com menos partículas, quatro no caso méson-méson ao invés de seis no caso nucleon-nucleon. Segundo, porque a interação nucleon-nucleon possui um “caroço duro” que previne os nucleons de explorar livremente toda sua estrutura de multiquarks. Isto é, devido o caroço-duro, há regiões do espaço entre os hádrons que não estão disponíveis. Sistemas méson-méson também possuem repulsão de curto alcance, mas de nenhuma maneira tão forte quanto o caroço duro do sistema nucleon-nucleon. Uma outra vantagem ainda no sistema méson-méson é a variedade de canais disponíveis, como $\pi\pi$, $\rho\rho$, $\pi\rho$, KK (que contém estranheza) etc, sem contar canais com charme.

Convém também salientar que a determinação das amplitudes de espalhamento entre pares de mésons é um problema de interesse na QCD e em alguns aspectos, de difícil tratamento como no processo de aniquilação de pares $q\bar{q}$ no canal s (ressonâncias). Entretanto, nesse trabalho vamos nos deter nos canais livres de aniquilação. O entendimento das amplitudes de espalhamento méson-méson é também importante para uma série de processos, como decaimentos não-leptônicos via interação fraca, pois esses mostram evidências de importantes interações hadrônicas de estado final.

Como comentado anteriormente, uma possibilidade recente é a oportunidade de usar a QCD na rede para inferir amplitudes de espalhamentos méson-méson, assim como isolar as contribuições dos vários mecanismos que têm sido propostos para as

forças residuais entre hádrons. Mas até o momento, a QCD na rede tem sido pouco aplicada a problemas de espalhamento por causa da dificuldade de tratamento de sistemas que não estão em seu estado fundamental. Estimativas de comprimento de espalhamento de $\pi\pi$, $I = 0$ e $I = 2$, têm sido obtidas explorando um resultado teórico de efeitos de tamanho-finito [29, 30] e mais recentemente resultados interessantes para a física nuclear [31]. No futuro, talvez seja possível melhorar os modelos de espalhamento de hádrons através de comparações com dados de QCD na rede.

Este Capítulo sumariza nossos resultados. Para não obscurecer a discussão com muitas fórmulas e detalhes de cálculos, apresentamos apenas os resultados finais; os Apêndices ao final contém detalhamentos dos cálculos intermediários que levam aos resultados apresentados aqui.

A seguir, serão apresentadas as fórmulas tradicionais que relacionam a amplitude de espalhamento, a matriz S e a seção de choque. Logo a seguir, será feita uma pequena revisão sobre a obtenção de amplitudes de espalhamento méson-méson empregando OGE que leva a *quark exchange*. Para descrever o movimento relativo dos mésons, será empregado o *Quark-Born Diagram method* (QBD) de Barnes e Swanson [9] [32] [33] [34] [35]. Para os objetivos dessa dissertação, o emprego do QBD é suficiente. Obviamente que para um estudo detalhado e sistemático, um formalismo preciso e elegante como a representação Fock-Tani [10] [36] será necessário. Mais adiante, a interação de rearranjo de link será considerada.

4.1 Amplitude de espalhamento, Matriz-S e Seção de Choque

Os elementos da matriz-S, na aproximação de Born, são dados por:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle a'b' | V | ab \rangle, \quad (4.1)$$

onde V é o potencial de interação, $E_f = E_{a'} + E_{b'}$ e $E_i = E_a + E_b$ são, respectivamente, as energias final e inicial do sistema de dois mésons, com

$$E_a = (P_a^2 + M_a^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Observamos que S_{fi} satisfaz a conservação de energia. Além disso, a invariância translacional permite que $\langle a'b'|V|ab \rangle$ possa ser escrito na forma

$$\langle a'b'|V|ab \rangle = \delta^{(3)}(P_f - P_i) h_{fi} , \quad (4.3)$$

onde $P_f = P_{a'} + P_{b'}$ e $P_i = P_a + P_b$ são, respectivamente, os momentos final e inicial do sistema. Assim, a conservação do 4-momento é implementada pelo elemento de matriz S_{fi} .

A matriz-S pode ser escrita em termos da amplitude invariante, $\mathcal{M}_{fi}$, como

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[\prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}_{fi} , \quad (4.4)$$

onde P_f e P_i são, respectivamente, os 4-momentos final e inicial, e

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{N} h_{fi} , \quad (4.5)$$

onde

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{\frac{1}{2}} , \quad (4.6)$$

é o fator de normalização necessário para obter a forma correta da amplitude invariante a partir do elemento de matriz -T não-relativístico.

A secção de choque diferencial no referencial do centro-de-massa (c.m.) para o processo $i \rightarrow f$ é dada por

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{P^2(s)} |\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)|^2 , \quad (4.7)$$

onde $P(s)$ é o momento relativo dos dois mésons no estado inicial e $\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)$ é a amplitude invariante calculada no centro-de-massa dos mésons iniciais. Todas as grandezas são expressas em termos das variáveis de Mandelstan, isto é, na forma invariante de Lorentz.

A secção de choque total é obtida integrando-se Eq. (4.7) em t ,

$$\sigma_{fi}(s) = \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} , \quad (4.8)$$

onde t_- e t_+ são, respectivamente, o momento mínimo e o momento máximo transferidos. Essa integral em t pode ser transformada em uma integral na variável z ,

$$z = \cos \theta(P, P') , \quad (4.9)$$

onde $\theta(P, P')$ é o ângulo entre os momentos relativos inicial e final. Para partículas não-idênticas, temos:

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{1}{32\pi s} \frac{|P'(s)|}{|P(s)|} \int_{-1}^{+1} dz |\mathcal{M}_{fi}(|P'(s)|, |P(s)|, z)|^2. \quad (4.10)$$

Para espalhamento elástico no c.m. de partículas idênticas com massa M , obtemos:

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} |h_{fi}|^2, \quad (4.11)$$

e

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} \int_{-(s-4M^2)}^0 dt |h_{fi}|^2. \quad (4.12)$$

4.2 Quark-Born Diagram Method (QBD).

O *Quark-Born Diagram Method* (QBD) é um formalismo que utiliza diagramas de troca de quarks para calcular amplitudes de espalhamento hádron-hádron na aproximação de Born. O método consiste na representação diagramática da interação de troca de um glúon perturbativa seguida pelo rearranjo dos quarks em estados finais (hádrons) singletos de cor. Esse mecanismo de interação corresponde ao modelo de troca de constituintes [37] acrescido da troca de um glúon. Dessa forma, dado o Hamiltoniano de quarks e a função de onda dos hádrons, as amplitudes de espalhamento podem ser escritas diretamente dos diagramas de espalhamento. Esse formalismo tem sido utilizado para descrever os processos de espalhamento nucleon-nucleon [9], méson-méson [32] e nucleon-méson [33] em baixa energia. Nesta seção descrevemos a aplicação do método no espalhamento méson-méson, seguindo a Ref. [32].

Consideremos o espalhamento de dois mésons,

$$A + B \rightarrow C + D. \quad (4.13)$$

É usual empregar um Hamiltoniano microscópico da forma

$$H = - \sum_i \frac{\nabla^2}{2m_i} + \sum_{i < j} H_{ij}, \quad (4.14)$$

onde H_{ij} é o Hamiltoniano de interação ,

$$H_{ij} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \left[-\frac{3b_s}{4} r_{ij} + \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \delta^{(3)}(\mathbf{r}_{ij}) \left(\frac{\sigma_i}{2} \cdot \frac{\sigma_j}{2} \right) \right]. \quad (4.15)$$

Podemos escrever esse Hamiltoniano na forma

$$H = H_0(A, B) + H_I(A, B). \quad (4.16)$$

O termo $H_0(A, B)$ é dado por

$$H_0(A, B) = H_0(A) + H_0(B), \quad (4.17)$$

onde

$$H_0(A) = - \sum_{i \in A} \frac{\nabla^2}{2m_i} + \sum_{i < j (i, j \in A)} H_{ij} \quad (4.18)$$

é o termo livre, que contém as interações dentro de cada méson inicial. O termo $H_I(A, B)$ é o termo de interação, que contém as interações entre os mésons iniciais e é dado por:

$$H_I(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} H_{ij}. \quad (4.19)$$

O estado inicial $|A, B\rangle$ é, por definição, auto-estado de $H_0(A, B)$:

$$\begin{aligned} H_0(A, B)|A, B\rangle &= (E_A + E_B)|A, B\rangle \\ &= \left(m_A + \frac{P_A^2}{2m_A} + m_B + \frac{P_B^2}{2m_B} \right) |A, B\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Os estados assintóticos $|a\rangle$ de um méson satisfazem a equação de Schrödinger

$$H_0(A)|a\rangle = E_0(A)|a\rangle \quad (4.21)$$

e podem ser escritos na forma (2.58)

$$|a\rangle = M_a^\dagger |0\rangle, \quad (4.22)$$

onde $M_a^\dagger$ é o operador de criação de um méson dado por (2.60) e (2.61).

Existem quatro diagramas de Born que contribuem para a amplitude de espalhamento. Esses diagramas correspondem aos quatro tipos de interação possíveis

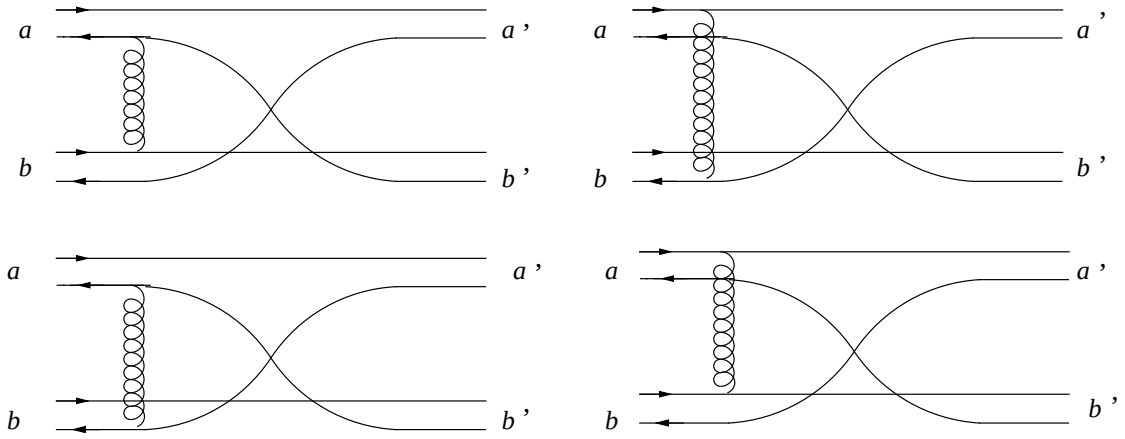


Figura 4.1: Diagramas que contribuem para o espalhamento méson-méson utilizados no QBD.

entre os constituintes do méson a e do méson b com troca de um quark entre os mesmos. Esses diagramas são mostrados na Fig. 4.1. Para cada méson, a linha superior corresponde ao quark e a linha inferior ao antiquark. As linhas espiraladas correspondem ao potencial efetivo de troca de um glúon.

O elemento de matriz h_{fi}^j correspondente à interação spin-spin pode ser escrito como [22]:

$$h_{fi}^{spin-spin} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(e^{-\frac{1}{4a^2}(p_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}p_{\gamma\delta}^2)} + e^{-\frac{1}{4a^2}(\frac{1}{3}p_{\alpha\beta}^2 + p_{\gamma\delta}^2)} \right) \right. \\ \left. + e^{-\frac{1}{8a^2}(p_{\alpha\beta} - p_{\gamma\delta})^2} + e^{-\frac{1}{8a^2}(p_{\alpha\beta} + p_{\gamma\delta})^2} \right], \quad (4.23)$$

onde a é o parâmetro da gaussiana empregada para modelar a função de onda do méson, definida na Eq. (3.35)

$$\psi(r) = \left(\frac{a^2}{\pi} \right)^{3/4} e^{-a^2 r^2/2}, \quad (4.24)$$

e m_q é massa do quark constituinte, α_s a constante de acoplamento quark-glúon, e

$$p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(P_\alpha - P_\beta) \\ p_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(P_\gamma - P_\delta). \quad (4.25)$$

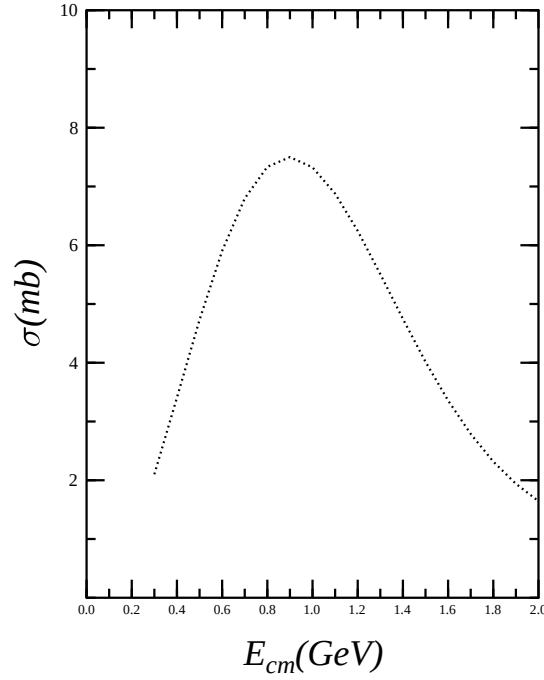


Figura 4.2: Seção de choque total para o processo de espalhamento de dois mésons com isospin total igual a $I = 2$.

Para espalhamento elástico no c.m., temos que:

$$P_\alpha = -P_\beta = P \quad (4.26)$$

$$P_\gamma = -P_\delta = P' \quad (4.27)$$

$$|P| = |P'|. \quad (4.28)$$

Com isso, o elemento de matriz em termos das variáveis de Mandelstam (s,t,u) pode ser escrito como:

$$h_{fi}^{spin-spin} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{16}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{4a^2} \frac{(s-4M^2)}{3}} + e^{\frac{t}{8a^2}} + e^{\frac{u}{8a^2}} \right], \quad (4.29)$$

onde M é a massa do méson. A secção de choque diferencial é dada por:

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.}^{spin-spin} = \frac{16\pi\alpha_s^2 a^2 s}{81\xi} \left[\frac{16}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{4a^2} \frac{\xi}{3}} + e^{\frac{t}{8a^2}} + e^{\frac{u}{8a^2}} \right]^2, \quad (4.30)$$

onde $\xi = s - 4M^2$.

Integrando a secção de choque diferencial em t e dividindo por dois devido ao estado final conter dois mésons idênticos, obtemos a secção de choque total,

$$\begin{aligned} \sigma_{fi}^{spin-spin}(s) &= \frac{4\pi\alpha_s^2 s}{81m_q^4} \left[\frac{4a^2 \left(1 - e^{-\frac{\xi}{4a^2}}\right)}{\xi} + \frac{128}{27} e^{-\frac{\xi}{6a^2}} + e^{-\frac{\xi}{8a^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{4a^2}{\xi} \left(e^{-\frac{\xi}{12a^2}} - e^{-\frac{5\xi}{24a^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Com o objetivo de mostrar ordem de magnitude e dependência com a energia da secção de choque, mostramos na Fig. 4.2 a secção de choque para o sistema com isospin total $I = 2$, correspondente à Eq. (4.31). Escolhemos os seguintes parâmetros para esse exemplo [22]:

$$\begin{aligned} M &= 0,138 \text{ GeV} \\ \alpha_s &= 0,6 \\ m_q &= m_u = m_d = 0,33 \text{ GeV} \\ a &= 0,337 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Esses parâmetros são típicos para o modelo de quarks [32].

Para finalizar essa secção, convém salientar que usando esses parâmetros, é possível obter um ajuste razoável para o deslocamento de fase experimental da onda- S [32], tanto no que se refere à dependência com a energia, quanto no valor numérico.

4.3 Rearranjo de links - *quark exchange*

O modelo de Greenberg e Hietarinta implementa o confinamento permanente dos quarks no interior dos hádrons através da introdução dos operadores de links. Esses operadores modelam o estado fundamental de tubos de fluxo e implementam a invariância de gauge local de $SU(3)$ de cor. Como dito no Capítulo anterior, esses operadores podem ser derivados em SCQCD.

Nesta secção vamos calcular explicitamente o efeito de uma interação de rearranjo de links num estado de dois mésons. Em SCQCD, tal interação vem do termo H_M da Eq. (3.108). Uma representação esquemática da atuação de H_M sobre um estado de dois mésons está mostrada na Fig. 4.3.

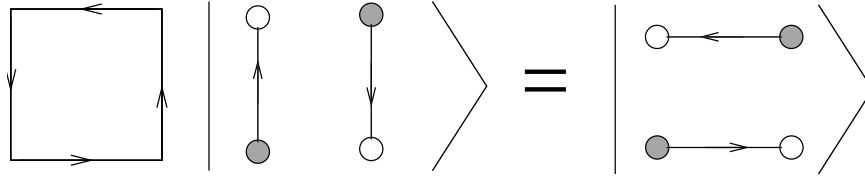


Figura 4.3: Representação esquemática do efeito do termo H_M da Eq. (3.108) sobre o estado de dois mésons.

No modelo de Greenberg e Hietarinta, o efeito de H_M da QCD na rede pode ser modelado através do operador

$$\begin{aligned}
 V_{LR} = & \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 q^{\dagger\mu_2}(x_2) L_{\mu_2}^{\dagger\nu_1}(x_2, y_1) \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger}(y_1) q^{\dagger\mu_1}(x_1) L_{\mu_1}^{\dagger\nu_2}(x_1, y_2) \bar{q}_{\nu_2}^{\dagger}(y_2) \\
 & \times V_{LR}(x_1, y_1; x_2, y_2) \mathcal{C}_{\sigma_1\rho_1\sigma_2\rho_2}^{\mu_2\nu_1\mu_1\nu_2} \\
 & \times \bar{q}^{\rho_1}(y_1) L_{\rho_1}^{\sigma_1}(x_1, y_1) q_{\sigma_1}(x_1) \bar{q}^{\rho_2}(y_2) L_{\rho_2}^{\sigma_2}(x_2, y_2) q_{\sigma_2}(x_2),
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde os índices $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_1, \rho_1, \sigma_2, \rho_2$ denotam conjuntamente $\{\text{spin, sabor, cor}\}$, com o entendimento que os operadores L e $L^\dagger$ só dependem de cor. O termo $\mathcal{C}$ é a parte do potencial que depende de spin e sabor e $V_{LR}(x_1, \dots, y_2)$ só depende de coordenadas espaciais. É interessante notar que na Ref. [17], não há menção da relação entre H_M e V_{LR} . Na Fig. 4.4 está mostrado esquematicamente o efeito de V_{LR} sobre um estado de dois mésons.

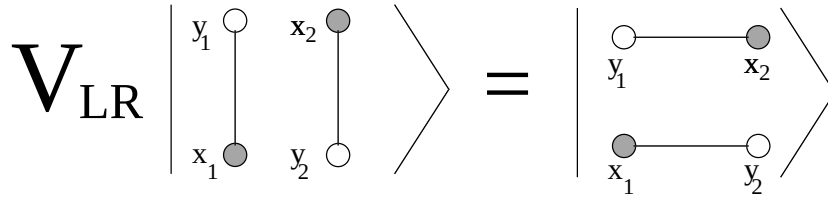


Figura 4.4: Representação esquemática do efeito do potencial V_{LR} sobre o estado de dois mésons.

A amplitude de espalhamento na aproximação de Born é dada por

$$A = \langle a'_1 a'_2 | V_{LR} | a_1 a_2 \rangle, \tag{4.34}$$

onde

$$|a_1 a_2\rangle = M_{a_1}^\dagger M_{a_2}^\dagger |0\rangle, \tag{4.35}$$

representa o estado inicial de dois mésons, com

$$M_a^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 \times e^{ip_a(x_1+y_1)/2} \psi_a(x_1 - y_1) \Phi_a^{\mu_1\nu_1} q^{\dagger\mu_1}(x_1) L_{\mu_1}^{\dagger\nu_1}(x_1, y_1) \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(y_1). \quad (4.36)$$

Substituindo a Eq. (4.33) na Eq. (4.34), obtemos que a amplitude de espalhamento é a soma de quatro termos

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i, \quad (4.37)$$

em que cada A_i pode ser escrito como

$$A_i = I_i \chi_i, \quad (4.38)$$

com I_i sendo integrais espaciais, dadas explicitamente no Apêndice A, e χ_i fatores de *spin-flavor*, que serão discutidos logo abaixo. Para prosseguir, temos que ser mais específicos com relação às dependências espacial e de spin-sabor da interação. Na ausência de maior informação quanto a dependência de spin-sabor, vamos tomá-la aqui como sendo diagonal. Com isso, temos que os fatores de spin-sabor são dados explicitamente por

$$\chi_1 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a'_2}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}, \quad (4.39)$$

$$\chi_2 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}, \quad (4.40)$$

$$\chi_3 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}, \quad (4.41)$$

$$\chi_4 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a'_2}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}. \quad (4.42)$$

Esses termos podem ser representados graficamente como nas Figs. 4.5 e 4.6. Fica clara a semelhança desses gráficos com os dos *Quark-Born diagrams*, Fig.4.1. As linhas espiraladas não aparecem nas Figs. 4.5 e 4.6 porque tomamos a interação diagonal em spin-sabor. Obviamente, podemos concluir que a interação *link rearrangement* é qualitativamente equivalente a *quark exchange*.

Agora, é importante notar que *link rearrangement* e *quark exchange com OGE* somente poderão ser equivalentes se a parte espacial da interação for da forma

$$V_{LR}(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv \frac{1}{2} [V_{qq}(x_1 - x_2) + V_{\bar{q}\bar{q}}(y_1 - y_2)] + V_{q\bar{q}}(x_1 - y_2). \quad (4.43)$$

Ainda mais, quando cada um dos V_{qq} , $V_{\bar{q}\bar{q}}$ e $V_{q\bar{q}}$ for proporcional a uma delta de Dirac nas suas respectivas dependências espaciais, obteremos para a parte espacial da interação efetiva méson-méson os resultados obtidos na seção anterior.

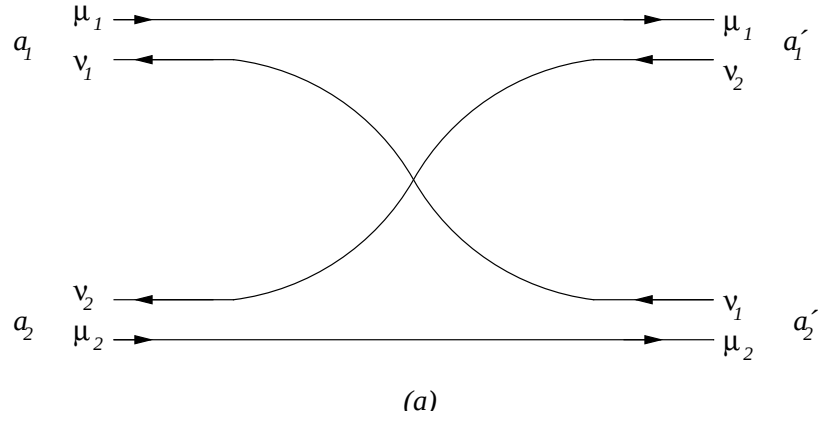


Figura 4.5: Gráfico para a contribuição de troca spin-sabor de antiquarks para a interação efetiva méson-méson, eqs. (4.39) e (4.42).

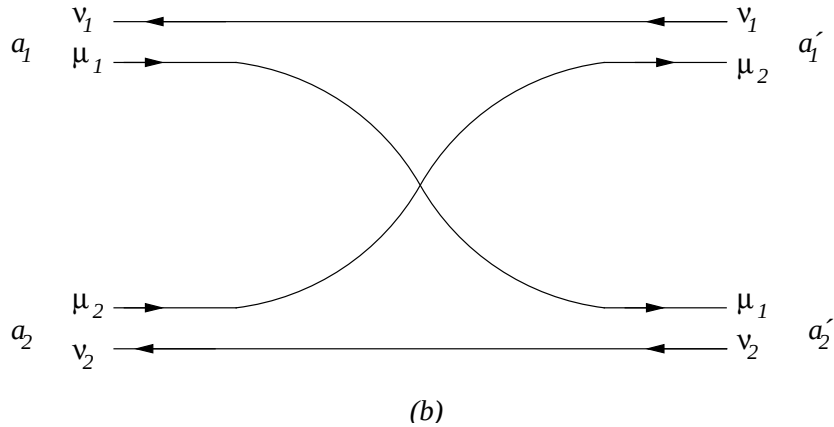


Figura 4.6: Gráfico para a contribuição de troca spin-sabor de quarks para a interação efetiva méson-méson, eqs. (4.40) e (4.41).

A conclusão importante que chegamos neste ponto é que *link rearrangement* e *quark exchange com OGE* só serão equivalentes se a parte espacial for da forma local, como na Eq. (4.43). Deve estar claro nesse ponto que um potencial dessa forma é muito especial. Como mostra a Fig. 4.3, no processo de *link rearrangement*, para distâncias relativas grandes entre os dois mésons, os quatro quarks parecem

participar concomitantemente do processo de interação, e a quebra do processo em subprocessos com na Eq. (4.43) parece ser muito pouco provável.

Consideremos agora uma interação não-local da forma

$$\begin{aligned} V_{LR}(x_1, y_1; x_2, y_2) &\equiv V_R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \\ &= V_q(x_1 - x_2) V_{\bar{q}}(y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Certamente que essa é uma escolha arbitrária, mas, como veremos, ela é suficiente rica para mostrar as diferenças qualitativa e quantitativa em relação ao potencial local acima, Eq. (4.43).

Para efetuar mais facilmente as integrais sobre as coordenadas espaciais nas I_i 's, Eq. (4.38), consideremos as transformadas de Fourier dos potenciais V_q e $V_{\bar{q}}$

$$V_q(x_1 - x_2) = \int d^3k e^{ik \cdot (x_1 - x_2)} \tilde{V}_q(k), \quad (4.45)$$

$$V_{\bar{q}}(y_1 - y_2) = \int d^3k e^{ik \cdot (y_1 - y_2)} \tilde{V}_{\bar{q}}(k), \quad (4.46)$$

e das funções de onda relativas ψ ,

$$\psi_a(x_1 - y_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q e^{iq \cdot (x_1 - y_1)} \tilde{\psi}_a(q). \quad (4.47)$$

As expressões explícitas das I_i 's estão dadas no Apêndice B. Substituindo as transformadas de Fourier acima naquelas expressões, podemos escrever cada uma das I_i 's como

$$I_i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) = \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \tilde{I}_i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2). \quad (4.48)$$

Usando variáveis do c.m.

$$p_1 = -p_2 \equiv p, \quad p'_1 = -p'_2 \equiv p', \quad (4.49)$$

podemos escrever as diferentes $\tilde{I}_i$'s da forma geral

$$\tilde{I}_i(p, p') = \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) F_i[\psi(k_1, k_2, q)], \quad (4.50)$$

onde

$$F_1 = \tilde{\psi}_{a'_1}^*(1/2(p - p') + k_1 + k_2 + q) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(-1/2(p + p') + q) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2)$$

$$\times \tilde{\psi}_{a_2}(-p' + k_1 + q), \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \tilde{\psi}_{a'_1}^*(1/2(p' - p) + q) \psi_{a'_2}^*(1/2(p + p') + k_1 + k_2 + q) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \\ &\times \tilde{\psi}_{a_2}(p' + k_1 + q), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \tilde{\psi}_{a'_1}^*(1/2(p' - p) + q) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(1/2(p + p') + k_1 + k_2 + q) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \\ &\times \tilde{\psi}_{a_2}(p' + k_1 + q), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} F_4 &= \tilde{\psi}_{a'_1}^*(1/2(p - p') + k_1 + k_2 + q) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(-1/2(p + p') + q) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \\ &\times \tilde{\psi}_{a_2}(-p' + k_1 + q). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para continuar calculando de maneira analítica, i.e. não numérica, vamos escolher formas convenientes para as funções de onda e os potenciais. De outra forma, teríamos que empregar métodos Monte Carlo para avaliar integrais em nove dimensões. Consideramos que para os objetivos dessa dissertação, tal preciosismo não se justifica e optamos pelos aspectos qualitativos. Tomamos uma forma Gaussiana para as $\tilde{\psi}$'s:

$$\tilde{\psi}(k) = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{3/4} e^{-a^2 k^2/2}. \quad (4.55)$$

Para os potenciais, tomamos potenciais de contato

$$\tilde{V}_q(k) = \tilde{V}_{\bar{q}}(k) = V_0, \quad (4.56)$$

e na forma Gaussiana

$$\tilde{V}_q(k) = \tilde{V}_{\bar{q}}(k) = V_0 (\pi r_0^2)^{3/2} V_0 e^{-\frac{r_0^2}{4} k^2}. \quad (4.57)$$

A forma de contato significa que no processo de *link breaking*, os quarks de cada méson e os antiquarks de cada méson estão em contato. A forma Gaussiana simplesmente torna mais suave essa interação.

A forma de contato leva ao resultado que as quatro $\tilde{I}_i$'s são idênticas e iguais a uma constante:

$$\tilde{I}_i(p, p') = 2 V_0^2 \left(\frac{2\pi}{a^2}\right)^{3/2}. \quad (4.58)$$

Claramente esse tipo de interação não dá uma dependência com a energia para a secção de choque totalmente diferente daquela obtida com *quark exchange com OGE*.

O que significa isso? Significa que esse potencial de *contato não local* é fisicamente diferente daquele potencial de *contato local* do OGE.

A forma Gaussiana também leva ao resultado que as quatro $\tilde{I}_i$'s são idênticas, no entanto, elas dependem do momento como

$$\tilde{I}_i(p, p') = 2 V_0^2 \left(\frac{r_0^2}{b} \right)^3 \left(\frac{2\pi^3}{a^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{1}{b} \right) (p^2 - p'^2) \right\}, \quad (4.59)$$

onde

$$b = 1 + \frac{r_0^2}{2a^2}. \quad (4.60)$$

Como o resultado final para a amplitude de espalhamento é uma Gaussiana como no caso OGE, a forma da seção de choque para o presente caso não deve ter uma dependência com a energia muito diferente daquela do OGE. Há uma diferença, que se mostra não crucial, que é o fato que o resultado da Eq. (4.59) não depende de ângulo. Na Fig. 4.7 estão mostradas as seções de choque obtidas com *quark exchange com OGE* e com *link rearrangement*, onde normalizamos o resultado para que ambas tivessem essencialmente o mesmo valor máximo. Essa figura foi obtida para $a = r_0 = 1$ fm.

Como pode ser observado da figura, ambas seções de choque têm essencialmente a mesma dependência com a energia para baixas energias, mas diferem para altas energias. Esse resultado confirma o fato que *link rearrangement*, para um potencial fisicamente razoável - isto é, um potencial não-local de longo alcance - leva a resultados qualitativa e quantitativamente diferentes de *quark exchange com OGE*. Para altas energias, OGE se faz mais importante do que *link rearrangement*.

Agora, uma questão completamente diferente, a qual ainda não é possível responder, é o valor de V_0 nas equações acima. Em um cálculo usando o limite extremo de acoplamento forte da QCD, Miller [11] encontrou que V_0 é muito pequeno para dar conta do espalhamento méson-méson. Obviamente que esse resultado deve ser tomado com reserva, pois o limite extremo de acoplamento forte pode não ser físico.

Para concluir, o resultado principal de nosso estudo é que *quark exchange com OGE* e *link rearrangement* são qualitativamente similares, no entanto, ao se fazer contato com a QCD na rede, em particular com a SCQCD, mostrou-se que eles

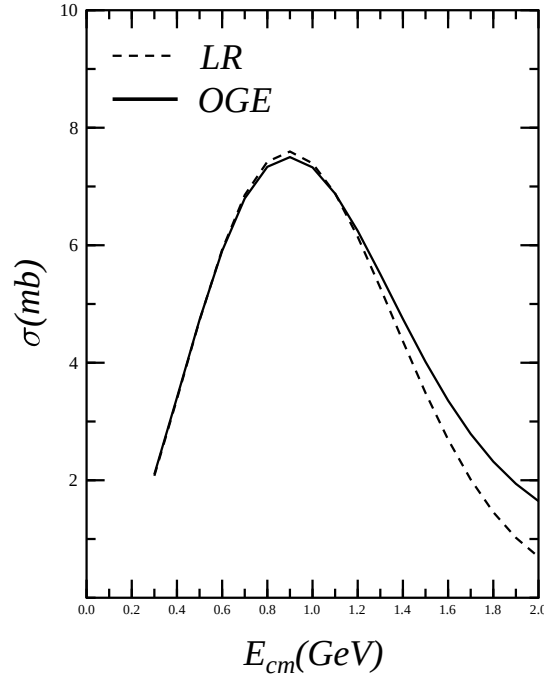


Figura 4.7: As seções de choque total para o processo de espalhamento de dois mésons com isospin total igual a $I = 2$, para *quark exchange* com *OGE* e *link rearrangement*.

atuam em escalas de distâncias diferentes. Isso foi claramente demonstrado empregando potenciais de contato locais e não-locais motivados pela SCQCD. O modelo aqui desenvolvido pode servir para estudar efeitos de graus de liberdade gluônicos a baixas energias em sistemas multiquarks. Também, a introdução de outras interações microscópicas, como criação de pares quark-antiquark, leva à possibilidade de se construir interações efetivas de troca de mésons entre hádrons. O formalismo de segunda quantização é particularmente conveniente nesse contexto, pois permite para empregar os tradicionais métodos da teoria quântica de muitos corpos para estudar sistemas de muitos hádrons. Em particular, o emprego da representação Fock-Tani [10] [36] deverá ser muito útil.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Esta dissertação teve como objetivo primeiro implementar o limite de acoplamento forte predito pela formulação Hamiltoniana da QCD na rede no modelo de quarks não-relativístico de Greenberg e Hietarinta (GH) [17] para investigar efeitos de troca de quarks - *quark exchange* - na interação efetiva méson-méson. A motivação original para este estudo está no fato que o mecanismo tradicional de *quark exchange*, baseado na interação de contato de spin-spin da troca de um glúon, parece sofrer deficiências em descrever a interação nucleon-nucleon a baixas energias [13]. Motivados pela formulação Hamiltoniana da QCD, a qual prediz um outro mecanismo para a *quark exchange*, o *link rearrangement*, investigamos os efeitos da não-localidade dessa interação no espalhamento méson-méson.

O modelo de GH generaliza o modelo de quarks constituintes pela introdução de graus de liberdade gluônicos - os *links*, que são interpretados como o resultado de excitações coletivas dos campos de glúons, que tem origem na natureza não-abeliana da QCD. O modelo de GH confina de forma permanente quarks e antiquarks no interior dos hádrons, eliminando as interações residuais do tipo van der Waals. A introdução destes novos graus de liberdade trazem implicações para a interação entre mésons, por exemplo com relação ao princípio de exclusão de Pauli entre quarks de mésons diferentes. Os graus de liberdade de *link* representam tubos de fluxo de cor em seus estados fundamentais e não afetam o espectro dos hádrons. Nessa dissertação, as excitações dos tubos de fluxo foram introduzidas através de interações efetivas, isto é, estados excitados dos tubos de fluxo são gerados através de interações efetivas que atuam sobre os estados em que os *links* estejam em seus

estados fundamentais.

As razões principais para estudar o espalhamento de dois mésons ao invés do memorável sistema de dois nucleons foram basicamente duas: (1) é mais simples estudar sistemas com menos partículas, quatro no caso méson-méson ao invés de seis no caso nucleon-nucleon e, (2) devido à presença de um “caroço duro” na interação nucleon-nucleon, há regiões do espaço entre os hádrons que não estão disponíveis para todos os quarks do sistema. Sistemas méson-méson também possuem repulsão de curto alcance, mas de nenhuma maneira tão forte quanto o caroço duro do sistema nucleon-nucleon.

Investigamos as consequências da interação *rearranjo de links* para o espalhamento méson-méson. A motivação principal para investigar essa interação é que ela leva a *quark exchange* como no caso da troca de um glúon (OGE). O conceito da troca de um glúon é motivado pela liberdade assintótica da QCD, um efeito de curtas distâncias. Por outro lado, o conceito de tubos de fluxo, é um conceito relacionado à fase do confinamento da QCD, um efeito de longas distâncias. É de interesse fundamental diferenciar mecanismos de longas e curtas distâncias, pois o mecanismo de confinamento da QCD ainda não está entendido, e qualquer ajuda fenomenológica implicará num grande avanço nesse campo.

Inicialmente nosso estudo mostrou explicitamente que usando interações locais para as interações microóspicas quark-quark, antiquark-antiquark e quark-antiquark, *link rearrangement* leva a resultados idênticos ao *quark exchange com OGE*. Ainda mais, quando cada uma das interações microscópicas for de contato, a parte espacial da interação méson-méson é idêntica à parte espacial da parte spin-spin de OGE.

Para um potencial de *link rearrangement* fisicamente razoável, isto é, um potencial não local de longo alcance, leva a resultados qualitativa e quantitativamente diferentes de *quark exchange com OGE*. Nesse sentido, para diferenciar fenomenologicamente esses dois mecanismos, é necessário um estudo sistemático de vários canais méson-méson, nos moldes do estudo da Ref. [13] para a interação nucleon-nucleon. Também, à medida que o poder computacional disponível para a QCD na rede venha tornar factível um estudo sistemático de interações méson-méson, esses

mecanismos poderão ser investigados a partir de primeiros princípios.

Como perspectiva futura, temos a dizer que o modelo aqui desenvolvido pode servir para estudar efeitos de graus de liberdade gluônicos a baixas energias em sistemas multiquarks. Também, a introdução de outras interações microscópicas, como criação de pares quark-antiquark, leva à possibilidade de se construir interações efetivas de troca de mésons entre hádrons. O formalismo de segunda quantização é particularmente conveniente nesse contexto, pois permite para empregar os tradicionais métodos da teoria quântica de muitos corpos para estudar sistemas de muitos hádrons. Em particular, o emprego da representação Fock-Tani [10] [36] deverá ser muito útil.

Apêndice A

Notação Compacta

Para abreviar a notação, condensamos os índices na forma compacta, onde por exemplo, os operadores de méson são escritos da forma

$$M_a^\dagger = \Phi_a^{\mu\nu} q_\mu^\dagger L^\dagger(\mu, \nu) \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\Phi_a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip(x+y)/2} \psi(x-y), \quad (\text{A.2})$$

e

$$q_\mu^\dagger \equiv q_\mu^\dagger(x), \quad \bar{q}^{\dagger\nu} \equiv \bar{q}^{\dagger\nu}(y), \quad L^\dagger(\mu, \nu) \equiv L_\mu^{\dagger\nu}(x, y). \quad (\text{A.3})$$

O índice a denota conjuntamente momento do centro-de-massa e sabor do méson, enquanto que os índices μ, ν denotam conjuntamente posição cor e sabor dos quarks e antiquarks. Índices repetidos indicam somas.

Apêndice B

Cálculo da amplitude de espalhamento

Efetuando as contrações dos operadores de quarks, antiquarks e de link, a amplitude total A pode ser escrita como a soma de quatro contribuições,

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i, \quad (\text{B.1})$$

onde cada amplitude A_i é dada por

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x'_1 d^3y'_1 d^3x'_2 d^3y'_2 d^3x''_1 d^3y''_1 d^3x''_2 d^3y''_2 d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 \\ &\times e^{-ip'_1(x'_1+y'_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x'_1 - y'_1) \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} e^{-ip'_2(x'_2+y'_2)/2} \psi_{a'_2}^*(x'_2 - y'_2) \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \\ &\times V_R(x''_1, \dots, y''_2) \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \\ &\times e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \times \frac{1}{9^4} \delta_{\sigma''_2}^{\mu_1} \delta_{\sigma''_1}^{\mu_2} \delta_{\mu'_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu'_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu'_1}^{\rho''_2} \delta_{\nu'_2}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\ &\times \bar{\delta}_{\mu_1}^{\sigma''_2} \bar{\delta}_{\rho_2}^{\nu_1} \bar{\delta}_{\mu_2}^{\sigma''_1} \bar{\delta}_{\rho_1}^{\nu_2} \bar{\delta}_{\mu'_1}^{\mu''_2} \bar{\delta}_{\nu'_1}^{\nu''_1} \bar{\delta}_{\mu'_2}^{\mu''_1} \bar{\delta}_{\nu'_2}^{\nu''_2} \delta(x''_2 - x_1) \delta(x''_1 - x_2) \delta(x'_1 - x''_2) \\ &\times \delta(x'_2 - x''_1) \delta(y''_2 - y_1) \delta(y''_1 - y_2) \delta(y'_1 - y''_1) \delta(y'_2 - y''_2) \\ A_2 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x'_1 d^3y'_1 d^3x'_2 d^3y'_2 d^3x''_1 d^3y''_1 d^3x''_2 d^3y''_2 d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 \\ &\times e^{-ip'_1(x'_1+y'_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x'_1 - y'_1) \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} e^{-ip'_2(x'_2+y'_2)/2} \psi_{a'_2}^*(x'_2 - y'_2) \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \\ &\times V_R(x''_1, \dots, y''_2) \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \\ &\times e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \times \frac{1}{9^4} \delta_{\sigma''_2}^{\mu_1} \delta_{\sigma''_1}^{\mu_2} \delta_{\mu'_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu'_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu'_1}^{\rho''_2} \delta_{\nu'_2}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\ &\times \bar{\delta}_{\mu_1}^{\sigma''_2} \bar{\delta}_{\rho_2}^{\nu_1} \bar{\delta}_{\mu_2}^{\sigma''_1} \bar{\delta}_{\rho_1}^{\nu_2} \bar{\delta}_{\mu'_1}^{\mu''_2} \bar{\delta}_{\nu'_1}^{\nu''_1} \bar{\delta}_{\mu'_2}^{\mu''_1} \bar{\delta}_{\nu'_2}^{\nu''_2} \delta(x''_2 - x_1) \delta(x''_1 - x_2) \delta(x'_1 - x''_2) \\ &\times \delta(x'_2 - x''_1) \delta(y''_2 - y_1) \delta(y''_1 - y_2) \delta(y'_1 - y''_1) \delta(y'_2 - y''_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x'_1 d^3y'_1 d^3x'_2 d^3y'_2 d^3x''_1 d^3y''_1 d^3x''_2 d^3y''_2 d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 \\
 &\times e^{-ip'_1(x'_1+y'_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x'_1 - y'_1) \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} e^{-ip'_2(x'_2+y'_2)/2} \psi_{a'_2}^*(x'_2 - y'_2) \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \\
 &\times V_R(x''_1, \dots, y''_2) \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \\
 &\times e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \times \frac{1}{9^4} \delta_{\sigma''_2}^{\mu''_2} \delta_{\sigma''_1}^{\mu''_1} \delta_{\mu''_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu''_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu''_2}^{\rho''_2} \delta_{\nu''_1}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\
 &\times \bar{\delta}_{\mu''_2}^{\sigma''_2} \bar{\delta}_{\rho''_2}^{\nu''_2} \bar{\delta}_{\mu''_1}^{\sigma''_1} \bar{\delta}_{\rho''_1}^{\nu''_1} \bar{\delta}_{\mu''_1}^{\mu'_1} \bar{\delta}_{\nu''_1}^{\nu'_1} \\
 &\times \bar{\delta}_{\mu''_2}^{\mu'_2} \bar{\delta}_{\nu''_2}^{\nu'_2} \delta(x''_2 - x_2) \delta(x''_1 - x_1) \delta(x'_1 - x''_1) \\
 &\times \delta(x'_2 - x''_1) \delta(y''_2 - y_2) \delta(y''_1 - y_1) \delta(y'_1 - y''_1) \delta(y'_2 - y''_2) \\
 A_4 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x'_1 d^3y'_1 d^3x'_2 d^3y'_2 d^3x''_1 d^3y''_1 d^3x''_2 d^3y''_2 d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 \\
 &\times e^{-ip'_1(x'_1+y'_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x'_1 - y'_1) \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} e^{-ip'_2(x'_2+y'_2)/2} \psi_{a'_2}^*(x'_2 - y'_2) \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \\
 &\times V_R(x''_1, \dots, y''_2) \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \\
 &\times e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \times \frac{1}{9^4} \delta_{\sigma''_2}^{\mu''_2} \delta_{\sigma''_1}^{\mu''_1} \delta_{\mu''_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu''_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu''_2}^{\rho''_2} \delta_{\nu''_1}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_2} \\
 &\times \bar{\delta}_{\mu''_2}^{\sigma''_2} \bar{\delta}_{\rho''_2}^{\nu''_2} \bar{\delta}_{\mu''_1}^{\sigma''_1} \bar{\delta}_{\rho''_1}^{\nu''_1} \bar{\delta}_{\mu''_1}^{\mu'_1} \bar{\delta}_{\nu''_1}^{\nu'_1} \bar{\delta}_{\mu''_2}^{\mu'_2} \bar{\delta}_{\nu''_2}^{\nu'_2} \delta(x''_2 - x_2) \delta(x''_1 - x_1) \delta(x'_1 - x''_1) \\
 &\times \delta(x'_2 - x''_2) \delta(y''_2 - y_2) \delta(y''_1 - y_1) \delta(y'_1 - y''_1) \delta(y'_2 - y''_1). \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

A seguir, calculamos cada uma das amplitudes fazendo uso das deltas. Os resultados são os seguintes:

Amplitude A_1 :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_1+y_2)/2} \psi_{a'_1}^*(x_1 - y_2) \Psi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \\
 &\times e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_2}^*(x_2 - y_1) \Psi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) \mathcal{C}_{\mu_2\nu_2\mu_1\nu_1}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} \\
 &\times e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Psi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Psi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

- Cálculo do fator de *spin-flavor* χ_1

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \delta_{\sigma''_2}^{\mu''_2} \delta_{\sigma''_1}^{\mu''_1} \delta_{\mu''_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu''_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu''_2}^{\rho''_2} \delta_{\nu''_1}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\
 &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\mu_2\nu_2\mu_1\nu_1}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}. \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

O termo de cor do potencial nos dá deltas da forma

$$C_{\mu_2\nu_2\mu_1\nu_1}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} = \delta_{\mu_2}^{\mu'_2} \delta_{\mu_1}^{\mu'_1} \delta_{\nu_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu_2}^{\nu'_2}. \quad (\text{B.6})$$

Colocando (B.6) em (B.5) temos como resultado

$$\chi_1 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a'_2}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}. \quad (\text{B.7})$$

- Cálculo do fator de cor

$$\begin{aligned} & \delta_{\sigma_2'}^{\mu_1} \delta_{\sigma_1'}^{\mu_2} \delta_{\mu_1'}^{\mu_2'} \delta_{\mu_2'}^{\mu_1'} \delta_{\nu_1'}^{\rho_2'} \delta_{\nu_2'}^{\rho_1'} \delta_{\nu_1'}^{\nu_2'} \delta_{\nu_2'}^{\nu_1'} \bar{\delta}_{\mu_1'}^{\sigma_2'} \bar{\delta}_{\rho_2'}^{\nu_1'} \bar{\delta}_{\mu_2'}^{\sigma_1'} \bar{\delta}_{\rho_1'}^{\nu_2'} \bar{\delta}_{\mu_1'}^{\mu_2'} \bar{\delta}_{\nu_1'}^{\mu_1'} \bar{\delta}_{\mu_1'}^{\mu_2'} \bar{\delta}_{\nu_2'}^{\nu_1'} = \\ & = \delta_{\mu_1}^{\mu_1} \delta_{\mu_2}^{\mu_2} \delta_{\mu_1'}^{\mu_1'} \delta_{\mu_2'}^{\mu_2'} \delta_{\nu_1}^{\nu_1} \delta_{\nu_2}^{\nu_2} \delta_{\nu_1'}^{\nu_1'} \delta_{\nu_2'}^{\nu_2'} \\ & = 9^4. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Esse resultado mostra que temos a normalização correta e é o mesmo para as amplitudes restantes A_2 , A_3 , A_4 e por esse motivo não será apresentado novamente.

- Cálculo das integrais espaciais I_1

No cálculo das integrais espaciais, iremos primeiramente nos restringir aos potenciais não-locais, onde

$$\begin{aligned} V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) & \equiv V_R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \\ & = V_q(x_1 - x_2) V_{\bar{q}}(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

então,

$$\begin{aligned} I_1 & = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_1+y_2)/2} \psi_{a'_1}^*(x_1 - y_2) e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} \\ & \times \psi_{a'_2}^*(x_2 - y_1) V_R(x_2, y_2; x_1, y_1) e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \\ & \times \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} I_1 & = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 d^3q'_1 d^3q'_2 d^3k_1 d^3k_2 d^3q_1 d^3q_2 \\ & \times e^{-ip'_1(x_1+y_2)/2} e^{-iq'_1(x_1-y_2)} \tilde{\psi}_{a'_1}^*(q'_1) e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} e^{-iq'_2(x_2-y_1)} \tilde{\psi}_{a'_2}^*(q'_2) \\ & \times e^{ik_1(x_1-x_2)} \tilde{V}_q(k_1) e^{ik_2(y_1-y_2)} \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \\ & \times e^{ip_1(x_1+y_1)/2} e^{iq_1(x_1-y_1)} \tilde{\psi}_{a_1}(q_1) e^{ip_2(x_2+y_2)/2} e^{iq_2(x_2-y_2)} \tilde{\psi}_{a_2}(q_2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int d^3 q'_1 d^3 q'_2 d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q_1 d^3 q_2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x_1 e^{i(-\frac{p'_1}{2} - q'_1 + k_1 + \frac{p_1}{2} + q_1) \cdot x_1} \\
 &\times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 y_1 e^{i(-\frac{p'_2}{2} + q'_2 + k_2 + \frac{p_1}{2} - q_1) \cdot y_1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x_2 e^{i(-\frac{p'_2}{2} - q'_2 - k_1 + \frac{p_2}{2} + q_2) \cdot x_2} \\
 &\times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 y_2 e^{i(-\frac{p'_1}{2} + q'_1 - k_2 + \frac{p_2}{2} - q_2) \cdot y_2} \\
 &\times \tilde{\psi}_{a'_1}^*(q'_1) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(q'_2) \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q_1) \tilde{\psi}_{a_2}(q_2)
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int d^3 q'_1 d^3 q'_2 d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q_1 d^3 q_2 \\
 &\times \delta(\frac{p_1}{2} - \frac{p'_1}{2} + k_1 + q_1 - q'_1) \delta(\frac{p_1}{2} - \frac{p'_2}{2} + k_2 - q_1 + q'_2) \\
 &\times \delta(\frac{p_2}{2} - \frac{p'_2}{2} - k_1 + q_2 - q'_2) \delta(\frac{p_2}{2} - \frac{p'_1}{2} - k_2 - q_2 + q'_1) \\
 &\times \tilde{\psi}_{a'_1}^*(q'_1) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(q'_2) \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q_1) \tilde{\psi}_{a_2}(q_2)
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Integrando nas variáveis q'_1 , q'_2 e q_2 , ficamos com:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q_1 \\
 &\times \tilde{\psi}_{a'_1}^*(-p_2 - \frac{p_1}{2} + \frac{p'_1}{2} + p'_2 + k_1 + q_1) \tilde{\psi}_{a'_2}^*(-\frac{p_1}{2} + \frac{p'_2}{2} - k_2 + q_1) \\
 &\times \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q_1) \tilde{\psi}_{a_2}(-\frac{p_1}{2} - \frac{p_2}{2} + p'_2 + k_1 - k_2 + q_1)
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Colocando no C.M. do sistema

$$p_1 = -p_2 \equiv p, \quad p'_1 = -p'_2 \equiv p'. \tag{B.15}$$

E fazendo a seguinte troca de variáveis

$$q_1 - k_2 \equiv q, \tag{B.16}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q \tilde{\psi}_{a'_1}^*[\frac{1}{2}(p - p') + k_1 + k_2 + q] \\
 &\times \tilde{\psi}_{a'_2}^*[-\frac{1}{2}(p + p') + q] \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \tilde{\psi}_{a_2}(-p' + k_1 + q).
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Amplitude A_2 :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 x_1 d^3 y_1 d^3 x_2 d^3 y_2 e^{-ip'_1(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x_2 - y_1) \Psi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \\
 &\times e^{-ip'_2(x_1+y_2)/2} \psi_{a'_2}^*(x_1 - y_2) \Psi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) \mathcal{C}_{\mu_2\nu_2\mu_1\nu_1}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} \\
 &\times e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Psi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Psi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

- Cálculo do fator de *spin-flavor* χ_2

$$\begin{aligned}\chi_2 &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_1\nu''_1\mu''_2\nu''_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \delta_{\sigma''_2}^{\mu_1} \delta_{\sigma''_1}^{\mu_2} \delta_{\mu'_1}^{\mu''_1} \delta_{\mu'_2}^{\mu''_2} \delta_{\nu'_1}^{\nu''_1} \delta_{\nu'_2}^{\nu''_2} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\ &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\mu_2\nu_2\nu\mu_1\nu_1}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

onde

$$\mathcal{C}_{\mu_2\nu_2\nu\mu_1\nu_1}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} = \delta_{\mu_2}^{\mu'_2} \delta_{\mu_1}^{\mu'_1} \delta_{\nu_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu_2}^{\nu'_2}.\quad (\text{B.20})$$

Colocando (B.20) em (B.19), temos

$$\chi_2 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}.\quad (\text{B.21})$$

- Cálculo das integrais espaciais I_2

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x_2 - y_1) e^{-ip'_2(x_1+y_2)/2} \\ &\times \psi_{a'_2}^*(x_1 - y_2) V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \\ &\times \psi_{a_2}(x_2 - y_2)\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Procedendo da mesma forma que em I_1 , chegamos ao resultado final para I_2

$$\begin{aligned}I_2 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \tilde{\psi}_{a'_1}^*[\tfrac{1}{2}(p' - p) + q] \\ &\times \psi_{a'_2}^*[\tfrac{1}{2}(p + p') + k_1 + k_2 + q] \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \tilde{\psi}_{a_2}(p' + k_1 + q).\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

Amplitude A_3

$$\begin{aligned}A_3 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x_2 - y_1) \Psi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \\ &\times e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_2}^*(x_2 - y_1) \Psi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) \mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} \\ &\times e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Psi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Psi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

- Cálculo do fator de *spin-flavor* χ_3

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\sigma''_1\rho''_1\sigma''_2\rho''_2}^{\mu''_2\nu''_1\mu''_1\nu''_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \delta_{\sigma''_2}^{\mu_2} \delta_{\sigma''_1}^{\mu_1} \delta_{\mu'_1}^{\mu''_2} \delta_{\mu'_2}^{\mu''_1} \delta_{\nu'_2}^{\rho''_2} \delta_{\nu'_1}^{\rho''_1} \delta_{\nu''_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu''_2}^{\nu'_2} \\ &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2},\end{aligned}\quad (\text{B.25})$$

onde

$$\mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_1\nu'_1\mu'_2\nu'_2} = \delta_{\mu_1}^{\mu'_1} \delta_{\mu_2}^{\mu'_2} \delta_{\nu_1}^{\nu'_1} \delta_{\nu_2}^{\nu'_2}.\quad (\text{B.26})$$

Colocando (B.26) em (B.25), temos

$$\chi_3 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}.\quad (\text{B.27})$$

- Cálculo das integrais espaciais I_3

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_1}^*(x_2 - y_1) e^{-ip'_2(x_1+y_2)/2} \\ &\times \psi_{a'_2}^*(x_1 - y_2) V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \\ &\times \psi_{a_2}(x_2 - y_2)\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Da mesma forma que para I_2 ,

$$\begin{aligned}I_3 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \tilde{\psi}_{a'_1}^*[\tfrac{1}{2}(p' - p) + q] \\ &\times \psi_{a'_2}^*[\tfrac{1}{2}(p + p') + k_1 + k_2 + q] \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \tilde{\psi}_{a_2}(p' + k_1 + q).\end{aligned}\quad (\text{B.29})$$

Amplitude A_4

$$\begin{aligned}A_4 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_1+y_2)/2} \psi_{a'_1}^*(x_1 - y_2) \Psi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \\ &\times e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} \psi_{a'_2}^*(x_2 - y_1) \Psi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) \mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} \\ &\times e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) \Psi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \psi_{a_2}(x_2 - y_2) \Psi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}.\end{aligned}\quad (\text{B.30})$$

- Cálculo do fator de *spin-flavor* χ_4

$$\begin{aligned}\chi_4 &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\sigma'_1\rho'_1\sigma'_2\rho'_2}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \delta_{\sigma'_2}^{\mu_2} \delta_{\sigma'_1}^{\mu_1} \delta_{\mu'_1}^{\mu_1} \delta_{\mu'_2}^{\mu_2} \delta_{\nu'_2}^{\nu_2} \delta_{\nu'_1}^{\nu_1} \delta_{\nu'_2}^{\nu_2} \\ &= \Phi_{a'_1}^{*\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a'_2}^{*\mu'_2\nu'_2} \mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2}\end{aligned}\quad (\text{B.31})$$

onde

$$\mathcal{C}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}^{\mu'_2\nu'_2\mu'_1\nu'_1} = \delta_{\mu_1}^{\mu'_2} \delta_{\mu_2}^{\mu'_1} \delta_{\nu_1}^{\nu'_2} \delta_{\nu_2}^{\nu'_1} \dots \quad (\text{B.32})$$

Colocando (B.32) em (B.31), temos

$$\chi_4 = \Phi_{a'_1}^{*\mu_1\nu_2} \Phi_{a'_2}^{*\mu_2\nu_1} \Phi_{a_2}^{\mu_2\nu_2} \Phi_{a_1}^{\mu_1\nu_1}. \quad (\text{B.33})$$

- Cálculo das integrais espaciais I_4

$$\begin{aligned}I_4 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x_1 d^3y_1 d^3x_2 d^3y_2 e^{-ip'_1(x_1+y_2)/2} \psi_{a'_1}^*(x_1 - y_2) e^{-ip'_2(x_2+y_1)/2} \\ &\times \psi_{a'_2}^*(x_2 - y_1) V_R(x_1, y_1; x_2, y_2) e^{ip_1(x_1+y_1)/2} \psi_{a_1}(x_1 - y_1) e^{ip_2(x_2+y_2)/2} \\ &\times \psi_{a_2}(x_2 - y_2)\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}I_4 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3k_1 d^3k_2 d^3q \tilde{\psi}_{a'_1}^*[\tfrac{1}{2}(p - p') + k_1 + k_2 + q] \\ &\times \psi_{a'_2}^*[-\tfrac{1}{2}(p + p') + q] \tilde{V}_q(k_1) \tilde{V}_{\bar{q}}(k_2) \tilde{\psi}_{a_1}(q + k_2) \tilde{\psi}_{a_2}(-p' + k_1 + q).\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

Apêndice C

Cálculo das integrais espaciais

Aqui mostramos com algum detalhe o cálculo das integrais espaciais I_i . Serão considerados os potenciais não-locais de contato e Gaussiano.

C.1 Potencial de contato

Usando a Eq. (4.56) nas Eqs. (4.48)-(4.54), podemos escrever

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_0^2 \left(\frac{a^2}{\pi} \right)^3 \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} a^2 \left[\left(\frac{1}{2}(p - p') + k_1 + k_2 + q \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}(p + p') + q \right)^2 + (q + k_2)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + (-p' + k_1 + q)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Efetuando as integrais, obtemos como resultado

$$I_1 = \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_0^2 \left(\frac{2\pi}{a^2} \right)^3. \quad (\text{C.2})$$

O mesmo procedimento é utilizado para as integrais espaciais I_2 , I_3 e I_4 e obtemos

$$I_2 = I_3 = I_4 = \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_0^2 \left(\frac{2\pi}{a^2} \right)^3 \quad (\text{C.3})$$

C.2 Potencial do tipo gaussiano

Partindo de (4.57) nas Eqs. (4.48)-(4.54), obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_0^2 \left(\frac{2\pi}{a^2} \right)^3 (\pi r_0^2)^3 \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 q \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} a^2 \left[\left(\frac{1}{2} (p - p') + k_1 + k_2 + q \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} (p + p') + q \right)^2 + \frac{r_0^2}{2a^2} k_1^2 \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{r_0^2}{2a^2} k_2^2 + (q + k_2)^2 + (-p' + k_1 + q)^2 \right] \right\}. \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

Efetutando as integrais, temos como resultado final

$$I_1 = \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_{0q}^2 \left(\frac{r_0^2}{b} \right)^3 \left(\frac{2\pi^3}{a^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{4} a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{b} \right) (p^2 + p'^2) \right] \right\}, \tag{C.5}$$

onde

$$b = 1 + \frac{r_0^2}{2a^2}.$$

Se repetirmos o cálculo para I_2 , I_3 e I_4 , obteremos o mesmo resultado

$$\begin{aligned}
 I_2 = I_3 = I_4 &= \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) V_{0q} V_{0\bar{q}} \left(\frac{2\pi r_0^2}{b} \right)^3 \left(\frac{2\pi^3}{a^2} \right)^{3/2} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{b} \right) (p^2 + p'^2) \right] \right\}. \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

Referências

- [1] C.N. Yang e R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [2] M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way* (Benjamin, Nova Iorque, 1964).
- [3] O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [4] H.W. Kendall, Rev. Mod. Phys. **63**, 597 (1991).
- [5] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973); D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973); G. t'Hooft, Observações não publicadas nos *Proceedings of the 1972 Marseilles Conference on Yang-Mills Fields*, como citado na nota de rodapé número 3 na página 32 de H.D. Politzer, Phys. Rep. **14**, 129 (1974).
- [6] K. Wilson, Phys. Rev D **10**, 2445 (1974); J. Kogut e L. Susskind, Phys. Rev D **11**, 3594 (1974); I. Montvay e G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice* (Cambridge University Press, Nova Iorque, 1997).
- [7] A. De Rújula, G. Howard e S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [8] M. Oka e K. Yazaki, Prog. Theor. Phys. **66**, 556 (1981); *ibid* **66**, 572 (1981); A. Faessler, F. Fernandez, G. Lübeck e K. Shimizu, Phys. Lett. B **112**, 201 (1982); Nucl. Phys. A **A02**, 555 (1983); F. Fernández, A. Valcarce, U. Straub, e A. Faessler, J. Phys. G **19**, 2013 (1993); A. Valcarce, A. Buchmann, F. Fernández, e A. Faessler, Phys. Rev. C **50**, 2246 (1994); A. Valcarce, A. Buchmann, F. Fernández, e A. Faessler, Phys. Rev. C **51**, 1480 (1995); A. Valcarce, P. González, F. Fernández, e V. Vento, Phys. Lett. B **367**, 35 (1996); A. Valcarce,

- F. Fernández, e P. González, Phys. Rev. C **56**, 3026 (1997); S. Takeuchi, K. Shimizu, e K. Yazaki, Nucl. Phys. A **504**, 777 (1989); Y. Fujiwara, C. Nakamoto, e Y. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **76**, 2242 (1996); Phys. Rev. C **54**, 2180 (1996).
- [9] T. Barnes, S. Capstick, M. D. Kovarik e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **48**, 539 (1993).
- [10] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J.S. da Veiga, Phys. Lett. B **367**, 317 (1996).
- [11] G. A. Miller, Phys. Rev. D **37**, 2431 (1988).
- [12] G. A. Miller, Phys. Rev. C **39**, 1563 (1989).
- [13] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer e G. Krein, Phys. Rev. C **63**, 035204 (2001).
- [14] M. Bander, Phys. Rept. **75**, 205 (1981).
- [15] M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau, P. Demetriou, J.P.B.C. de Melo, e C. Semay, Phys. Rev. C **65**, 034004 (2002).
- [16] C. M. Rizzato, *A QCD no Limite de Acoplamento Forte, a Simetria Quiral e a Força Nuclear*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - UNESP, 2000.
- [17] O. W. Greenberg e J. Hietarinta, Phys. Rev. D **22**, 993 (1980).
- [18] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
- [19] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [20] G. Zweig, CERN Report **8182/TH 412** (não-publicado) (1964).
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Relativistic Quantum Theory* (Pergamom Press, London, 1960).

- [22] S. Szpigel, *Interação Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani*, Tese de Doutorado, USP, 1995.
- [23] D. Hadjimichef, *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica-UNESP, 1995.
- [24] O.W. Greenberg e H.J. Lipkin, Nucl. Phys. A **370**, 349 (1981).
- [25] N. Isgur e J. Paton, Phys. Rev. D **31**, 2910 (1985).
- [26] J. Kogut, R. Pearson e J. Shigemitsu, Phys. Rev. D **23**, 2945 (1981).
- [27] F. J. Ynduráin, *Quantum Chromodynamics* (Springer, New York, 1983).
- [28] D. Robson, Phys. Rev. D **35**, 1029 (1987).
- [29] M. Fukugita et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 2387 (1993).
- [30] M. Fukugita et al., Phys. Rev. D **52**, 3003 (1995).
- [31] C. Stewart e R. Koniuk, Phys. Rev. D **57**, 5581 (1998).
- [32] T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. D **46**, 131 (1992).
- [33] T. Barnes e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **49**, 1166 (1994).
- [34] T. Barnes, N. Black, D.J. Dean e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **60**, 045202 (1999).
- [35] T. Barnes, N. Black e E.S. Swanson, Phys. Rev. C **63**, 025204 (2001).
- [36] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J.S. da Veiga, Ann. Phys. (NY) **268**, 105 (1998).
- [37] G. P. Lepage e S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).