

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**ESTUDO DE MULTIREFRINGÊNCIA NA DINÂMICA DE UM FEIXE DE LUZ
CONSIDERANDO O BILHAR ANULAR**

Fábio Alessandro Oliveira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro (SP)

2012

Fábio Alessandro Oliveira da Silva

**ESTUDO DE MULTIREFRINGÊNCIA NA DINÂMICA DE UM FEIXE DE LUZ
CONSIDERANDO O BILHAR ANULAR**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima

Rio Claro, SP 13 de fevereiro de 2012

Resultado: APROVADO

A todos que contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

À CAPES, pelo auxílio financeiro;

Ao Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho pela orientação e sugestões;

Agradeço a todos, que de alguma forma, direta ou indireta, contribuíram e possibilitaram à conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos os efeitos de multirefringência e excentricidades, em três regiões circulares no bilhar anular, na dinâmica de um feixe de luz monocromática. Este estudo envolveu, inicialmente, definições da Lei de Snell-Descartes, conceitos de espaço de fase, pontos fixos, caos e ressonâncias para um melhor entendimento das demonstrações das equações dinâmicas e dos resultados e conclusões das simulações computacionais. Também definimos o que é um bilhar anular com dois círculos e, com os estudos desse sistema dinâmico, investigamos como seria a dinâmica de um feixe de luz monocromática com mais um círculo interno com índice de refração. Este bilhar com três regiões circulares forneceu um conjunto grande de combinações de parâmetros uma vez que temos neste tipo de bilhar dois raios, dois índices de refração e duas excentricidades (uma vez que, no círculo mais externo, deixamos fixos esses parâmetros) e, com isso, fazendo simulações com combinações de alguns desses parâmetros, obtivemos alguns resultados que estão de acordo com o caso do bilhar anular com dois círculos excêntricos, como por exemplo, mudança na topologia quando se variam os índices de refração e controle na intensidade do mar de caos quando se variam as excentricidades.

Palavra-Chave

Sistemas dinâmicos, multirefringência, caos, bilhar, ressonância isócrona.

Abstract

In this work we study the effects of multirefringence and eccentricity in the dynamic of a monochromatic light ray considering three circular regions in the annular billiard. This study involved initially, definitions of the Law of Snell-Descartes, concepts of phase space, fixed points, chaos and resonances for a better understanding of the dynamic equations and statements of results and findings of computer simulations. We also define what is an annular billiard with two circles and with studies of this dynamic system we investigated how the dynamics would be a beam of monochromatic light ray over an inner circle with index of refraction. This billiard with three circular regions, provided a large set of parameter combinations since we have this type of billiard, two radii, two indices of refraction and two eccentricities (as in the outer circle, we fixed these parameters) and with so doing simulations with some combinations of these parameters, we obtained some results according to the case of the annular billiard with two eccentric circles, such as the topology change when the indices of refraction vary and control the intensity of de sea chaos when the eccentricities vary .

Key words

Dynamic systems, multirefringence, chaos, billiards, isochronous resonances.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS.	viii
1 INTRODUÇÃO.	11
2 BILHAR ANULAR.	16
3 BILHAR ANULAR COM TRÊS CÍRCULOS EXCÊNTRICOS	22
4 RESULTADOS	30
4.1 Variação do raio do 2º e 3º círculos.	30
4.2 Variação do 2º ou 3º índices de refração.	34
4.3 Variação das excentricidades dos círculos internos.	37
5 CONCLUSÃO	41
APÊNDICE	42
A.1 Prova da primeira condição de tangência	42
A.2 Prova das equações para o caso em que a primeira condição de tangência é satisfeita.	45
A.3 – Prova da segunda condição de tangência	46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Visualização geométrica de um feixe de luz sofrendo refração e seus respectivos ângulos de incidência e refração	12
Figura 2 – Visualização dos ângulos que determinam a dinâmica das interações do feixe de luz monocromática com o bilhar anular	17
Figura 3 – Feixe luminoso atinge o círculo externo e reflete novamente no mesmo	18
Figura 4 – Feixe luminoso atinge o círculo externo e sofre refração no círculo menor	19
Figura 5 – Bilhar com três círculos excêntricos. Tal sistema será o ambiente onde faremos o estudo das trajetórias do feixe luminoso	22
Figura 6 – Situação em que o feixe luminoso sofre apenas reflexões no primeiro círculo	23
Figura 7 – Situação em que o feixe luminoso sofre refração com o segundo círculo	24
Figura 8 – Situação em que o feixe luminoso sofre refração com o segundo e terceiro círculo	24

Figura 9 – Visualização geométrica da relação entre r_1 e r_2 no bilhar com três círculos excêntrico	26
Figura 10 – Efeito da variação do segundo raio no bilhar anular com três círculos excêntricos (figuras de a à f).....	32
Figura 11 – Efeito da variação do terceiro raio no bilhar anular com três círculos excêntricos. Como no caso da variação do segundo, ocorrência de bifurcações, caos e pontos elípticos (figuras de a à d).....	33
Figura 12 – Sobreposições de cadeias de ilhas podem ser vistas nesta simulação, variando apenas o índice de refração do segundo círculo (figuras de a à e)	35
Figura 13 – Surgimento de sobreposições de cadeias de ilhas com a variação do terceiro índice de refração no terceiro círculo (figuras de c à d)	36
Figura 14 – Espaços de fase com a excentricidade do segundo círculo variando. Variação da intensidade do mar de caos e bifurcações de pontos elípticos sobre o mar de caos (figuras de a à f)	38
Figura 15 – Variação da intensidade do mar de caos e ressonâncias isócronas com a mudança da excentricidade do terceiro círculo (figuras de a à f).	40
Figura A.1 – Representação geométrica para a demonstração da primeira condição de tangência	43
Figura A.2 – Representação geométrica para a demonstração das equações dinâmicas no caso em que a primeira condição de tangência é satisfeita	45

Figura A.3 – Ilustração para o acompanhamento da demonstração da condição de tangência entre o segundo e terceiro círculos 47

Figura A.4 – Situação em que o feixe não passa pelo terceiro círculo, sofrendo refração 49

Figura A.5 – Figura ilustrativa para a demonstração das equações dinâmicas no caso em o feixe luminoso passa pelo terceiro círculo, sofrendo refração 54

Capítulo 1

Introdução

Em 1621, o matemático e físico holandês **Villebrord Snell** (1580-1626) e independentemente, o filósofo e matemático **René Descartes** (1596-1650), propuseram uma lei em que relaciona a refração de uma onda com o meio ao qual ela penetra. Essa lei foi denominada de **Snell-Descartes** e relaciona os índices de refração, n_1 e n_2 , a razão das velocidades, v_1 e v_2 , de propagação da onda luminosa em dois meios através da expressão $n_{1,2} = v_1 / v_2$. Assim, a lei mencionada se resume de acordo com a seguinte equação:

$$n_1 \cdot \sin(i) = n_2 \cdot \sin(r), \text{ onde :}$$

n_1 : índice de refração do meio 1;

n_2 : índice de refração do meio 2;

i: ângulo de incidência;

r: ângulo de refração.

Abaixo segue a visualização geométrica de um raio que sofre refração. A reta paralela ao eixo y e perpendicular à superfície que divide os meios 1 e 2, denomina-se **normal**.

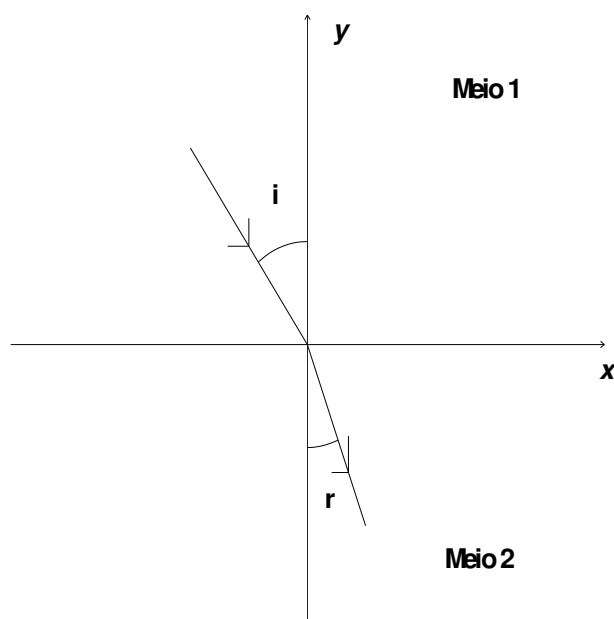


Figura 1 – Visualização geométrica de um raio de luz sofrendo refração e seus respectivos ângulos de incidência e refração.

A Lei de Snell-Descartes é útil para aplicações em vários problemas de diversas áreas, como a astronomia, a própria óptica, etc., porém, pela sua particularidade e a dos próprios modelos, os sistemas de equações resultantes são não-lineares e é extremamente difícil resolvê-los analiticamente. Da classe dessas equações reside uma característica que no século XVII ainda não se percebia de forma clara e tal peculiaridade se referia naquilo que conheceríamos mais tarde como movimento caótico.

A existência desse movimento foi observada por Henry Poincaré (1854-1912) no final do século XIX no famoso problema de três corpos [1] que, posteriormente, foi fortalecido pelas contribuições de G. D. Birkhoff (1884-1944) à teoria ergódica e fundamentos da mecânica estatística [2]. Nota-se, porém, que os trabalhos desenvolvidos para sistemas dinâmicos permaneceram isolados até meados do século XX, devido à dificuldade do tratamento analítico das equações não-lineares. Foi a partir de 1970, devido ao desenvolvimento de computadores, que o movimento caótico foi estabelecido como uma propriedade geral de sistemas dinâmicos não-lineares e caracterizado pela sensibilidade que as trajetórias possuem às ligeiras modificações das condições iniciais, ou seja: trajetórias próximas divergem uma das outras, exponencialmente, no tempo. Apesar dos importantes resultados obtidos entre o trabalho de Poincaré e a invenções dos computadores, a possibilidade de se investigar fenômenos não-lineares por meio de métodos numéricos extraordinariamente rápidos revela-se, a cada trabalho, um campo fascinante.

Estudos de reflexão e refração são importantes em aplicações tecnológicas de materiais que possuem características de refletividade e refringência, e esses estudos servem para o aprimoramento ou desenvolvimento de novas técnicas em áreas, como a engenharia óptica; isto pode ser considerado como uma das motivações para este trabalho, usando bilhares.

No capítulo 2, será apresentado o conceito de bilhar anular e a apresentação e comentário das equações dinâmicas, considerando o caso em que o bilhar anular possui dois círculos excêntricos.

No capítulo 3, será uma extensão das ideias do capítulo anterior, onde será apresentado o bilhar anular com três círculos excêntricos e as equações dinâmicas encontradas. Pode-se considerar esse capítulo como a outra motivação, digamos, a mais importante para esse trabalho, com objetivo de estudar a extensão do bilhar anular com dois círculos excêntricos, acrescentando mais um círculo e, com isso, obter resultados.

No capítulo 4, serão expostos os resultados ora encontrados com seus respectivos comentários.

A conclusão será baseada nos resultados expostos no capítulo 4.

No final será apresentado um apêndice com as demonstrações das equações expostas nos capítulos 2 e 3.

Abaixo, definiremos alguns conceitos que serão essenciais para uma melhor compreensão dos resultados e conclusões. Tais conceitos foram baseados nas referências [3], [4], [5] e [6].

Definição 1.1: No formalismo Hamiltoniano as coordenadas q_i e momentos p_i são tratados como variáveis independentes. O número de coordenadas n , que é sempre igual ao número de momentos conjugados é o **número de graus de liberdade** do sistema. O espaço vetorial $\mathcal{S}^{2n}$, de dimensão $2n$ formado pelas coordenadas e momentos é denominado **espaço de fases**.

Definição 1.2: Dizemos que $f(x_n) = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é uma **aplicação iterada**.

Definição 1.3: Um ponto c num espaço de fase no qual $f(c) = c$ denomina-se **ponto fixo** de uma aplicação iterada f .

Definição 1.4: Um ponto fixo c estará **atraído**, se $\exists \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$ sempre que $\|x(0) - c\| < \delta$.

Definição: 1.5: Dizemos que um ponto fixo c será **estável Liapunov**, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t) - c\| < \varepsilon$ sempre que $t \geq 0$ e $\|x(0) - c\| < \delta$.

Definição 1.6: Um ponto fixo c será **assimptoticamente estável**, se ele estiver atraído e se for estável Liapunov.

Definição 1.7: Um ponto fixo c num espaço de fase será **estável**, se uma sequência de pontos $x_1, x_2, x_3, \dots$, aproxima-se dele. Caso contrário, ele será um ponto fixo **instável**. Senão, ele será **assimptoticamente estável**.

Definição 1.8: Pontos fixos cujas trajetórias fechadas em torno deles são elipses num espaço de fase são denominados **pontos elípticos**. Caso a trajetórias em torno deles sejam hipérbolas, eles serão denominados **pontos hiperbólicos**.

Definição 1.9: Uma **bifurcação** num espaço de fase é uma mudança na estabilidade de um ponto fixo, devida a uma alteração de um parâmetro do sistema.

Definição 1.10: Um sistema dinâmico será **determinístico**, se não tiver aleatoriedade ou entradas ou parâmetros ruidosos. O comportamento irregular surge da não-linearidade do sistema um tanto que forças motrizes ruidosas.

Definição 1.11: **Caos** em um sistema determinístico é um comportamento não-periódico de longo termo que exhibe dependência sensível das condições iniciais. Nos espaços de fase apresentados aqui, os termos caos e mar de caos serão sinônimos e significarão as regiões escuras nesses.

Definição 1.12: Num sistema dinâmico regiões no espaço de fase que exibem comportamento regular, sem a presença de caos, são denominadas **regiões localmente regulares ou integráveis**. Às vezes estas regiões localmente aparecem sobre o mar de caos como ilhas ou como trajetórias abertas ou fechadas.

Definição 1.13: Dadas cadeias de ilhas em regiões integráveis, dizemos que houve uma **sobreposição (reconexão ou “overlap”)** entre elas no espaço de fase se, durante a variação de parâmetros de um sistema dinâmico, ocorrer uma interação entre elas.

Capítulo 2

Bilhar anular

No estudo apresentado aqui, focalizaremos o bilhar anular com dois círculos excêntricos.

O bilhar é um sistema com dois graus de liberdade, que em coordenadas cartesianas, o seu estado fica totalmente caracterizado pelas coordenadas de posição (x, y) e de *momentum* (p_x, p_y) . Sendo o espaço de fase um conjunto de coordenadas associado às variáveis que descrevem a dinâmica do sistema físico estudado, logo ele possuirá quatro dimensões. No caso estudado aqui, estamos considerando um feixe luminoso que é refletido numa região mais externa do sistema, e sofre refrações nas regiões mais internas do mesmo. Porém, como a trajetória do feixe só se altera pelas reflexões ou refrações nas fronteiras do sistema, podemos descrever apenas duas variáveis: uma relacionada à fronteira e que localiza a posição de uma reflexão ou refração com uma origem especificada, e outra que fornece a direção do movimento. Em geral, uma variável escolhida é o ângulo α de saída da trajetória do feixe em relação à reta normal à curva da fronteira, conforme ilustrado na figura 1, e a outra variável, é o ângulo θ , formado com o eixo das abcissas e a normal do círculo correspondente.

O estudo dos bilhares é de interesse em muitos aspectos:

- i) eles são, entre os sistemas físicos Hamiltonianos, conforme [5], os mais estudados a partir do ponto de vista matemático;
- ii) possuem uma grande riqueza de comportamentos.
- iii) a superfície de energia dos bilhares é tridimensional (porção acessível do espaço de fases para uma dada energia E , ou seja, a superfície de energia S_E é uma superfície tridimensional limitada), que é a menor necessária para observar um movimento caótico (para sistemas independentes do tempo).

Dada uma condição inicial identificada pelo par (θ_0, α_0) , o problema consiste em encontrar a sequência de pares (θ_n, α_n) que representa a órbita do feixe no bilhar.

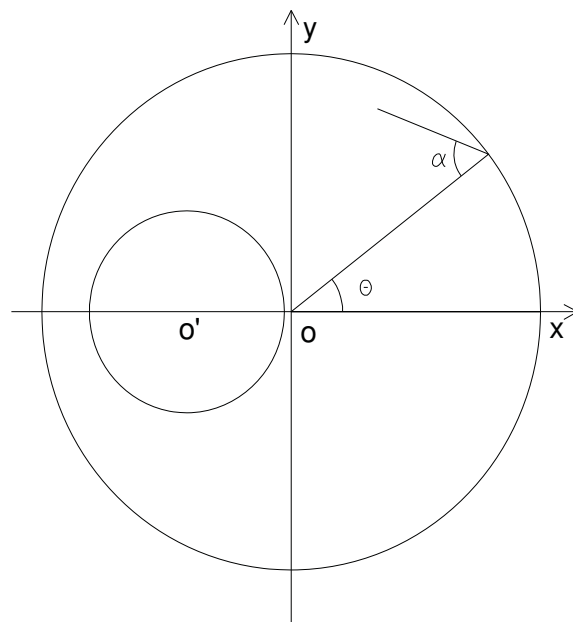


Figura 2 – Visualização dos ângulos que determinam a dinâmica das interações do feixe de luz monocromática com o bilhar anular.

De forma semelhante à [7], tomando-se um bilhar anular com o círculo interno de raio menor do que o raio do externo e excêntrico ao mesmo, vemos pelas figuras 3 e 4 que, em cada iteração, existirão, respectivamente, duas situações a serem levadas em consideração para o estudo do espaço de fase: se o feixe sofre reflexão ao atingir o círculo maior sem atingir o círculo menor, ou reflexão no círculo maior, seguido de refração no círculo menor. Abaixo estão as duas situações representadas através de figuras.

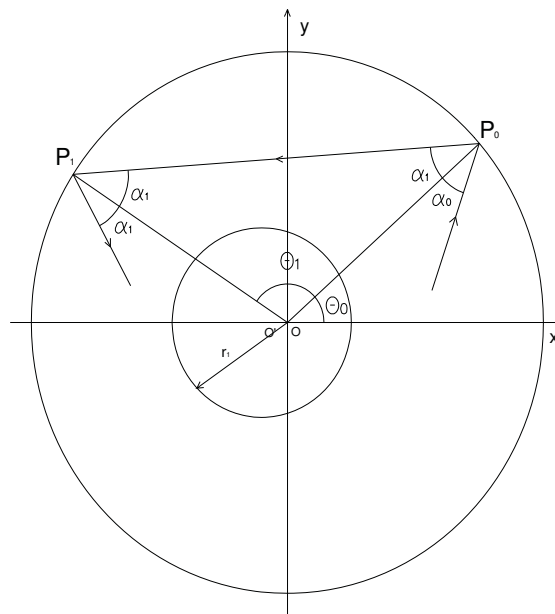


Figura 3 – Feixe luminoso atinge o círculo externo e reflete novamente no mesmo.

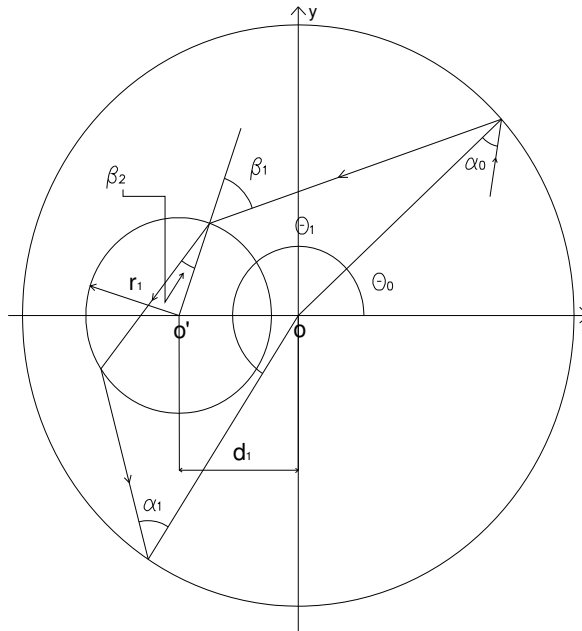


Figura 4 – Feixe luminoso atinge o círculo externo e sofre refração no círculo menor.

Tais situações dependerão da inequação abaixo, se será ou não satisfeita. Ela é denominada, **condição de tangência**:

$$\left| R \sin(\alpha_0) - d_1 \sin(\theta_0 - \alpha_0) \right| > r_1, \text{ onde}$$

θ_0 e α_0 : condições iniciais fornecidas;

d_1 : excentricidade entre os dois círculos;

R : raio do círculo externo;

r_1 : raio do círculo interno.

Para cada iteração, se tal condição não for satisfeita, o mapeamento é descrito pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 \\ \theta_1 = \pi + \theta_0 - 2\alpha_0 \end{cases}$$

Caso contrário, o mapeamento é descrito de acordo com as equações abaixo:

$$\begin{cases} \beta_1 = \arcsen(\sen(\alpha_0) + d_1(\sen(\alpha_0 - \theta_0))) / r_1 \\ \beta_2 = \arcsen(\sen(\beta_1)) / n_1 \\ \alpha_1 = \arcsen(r_1(\sen(\beta_1)) + d_1(\sen(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0))) \\ \theta_1 = \pi - \alpha_1 + 2\beta_1 - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0 \end{cases}$$

onde:

n_1 : índice de refração do segundo círculo ;

β_1 e β_2 : são os ângulos de incidência e refração, respectivamente, que formam com a normal do círculo interno.

A condição de tangência sai naturalmente da equação de β_1 apresentada no sistema de equações acima como é verificada, na sua demonstração, no apêndice, no final desse trabalho.

Para o esboço do espaço de fase são feitas, inicialmente, transformações sobre a sequência dos pares (θ_n, α_n) encontrados pelos mapeamentos descritos acima pelas expressões:

$$\begin{cases} L = \theta / 2\pi \\ S = \text{sen}(\alpha) \end{cases}$$

com:

$$-\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -1 \leq S \leq 1$$

Nos gráficos apresentados no capítulo 4, no eixo dos valores de S , onde $|S| > 0,45$, correspondem a linhas retas. Por isso que nas simulações computacionais feitas nesses espaços de fase, restringimos seus esboços em $-0,45 \leq S \leq 0,45$, pois as regiões excluídas apresentam as mesmas configurações (linhas retas) em todas as simulações, tornando-se irrelevantes para o estudo.

Nesse trabalho, para evitar confusões, chamaremos a condição de tangência entre o primeiro e segundo círculo de **primeira condição de tangência**.

A seguir, apresentaremos o bilhar anular constituído de três círculos excêntricos e a dinâmica do feixe de luz monocromática no seu interior, bem como as equações que a regem.

Capítulo 3

Bilhar com três círculos excêntricos

Nesta seção, apresentaremos o bilhar que é constituído por três círculos excêntricos, bem como as equações que descrevem a dinâmica do feixe de luz neste sistema. Este é uma extensão do anterior, que foi estudado por Ricardo [8].

Na figura 5, temos uma ilustração de tal sistema, onde cada círculo possui índice de refração ajustável. Para o círculo mais externo, assumimos que ele seja igual a 1.

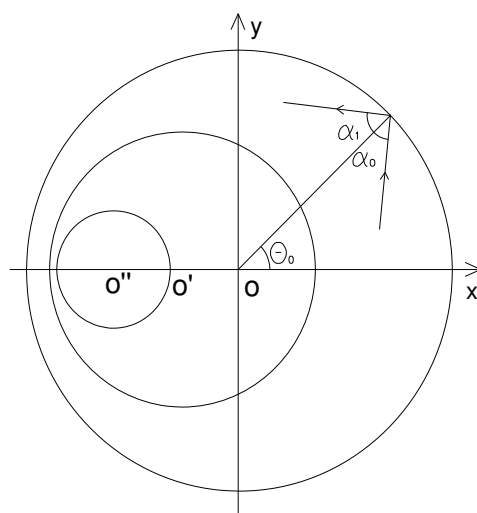


Figura 5 – Bilhar com três círculos excêntricos. Tal sistema será o ambiente onde faremos o estudo das trajetórias do feixe luminoso.

O feixe luminoso, da mesma forma como no bilhar anular do início do trabalho, sofrerá reflexões e refrações dentro desse sistema. Além de considerar a condição de tangência entre o primeiro e o segundo círculo, também haverá uma condição de tangência entre o segundo e o terceiro círculo. Nas figuras 6, 7 e 8, para cada iteração, estão as possíveis reflexões e refrações que o feixe sofrerá.

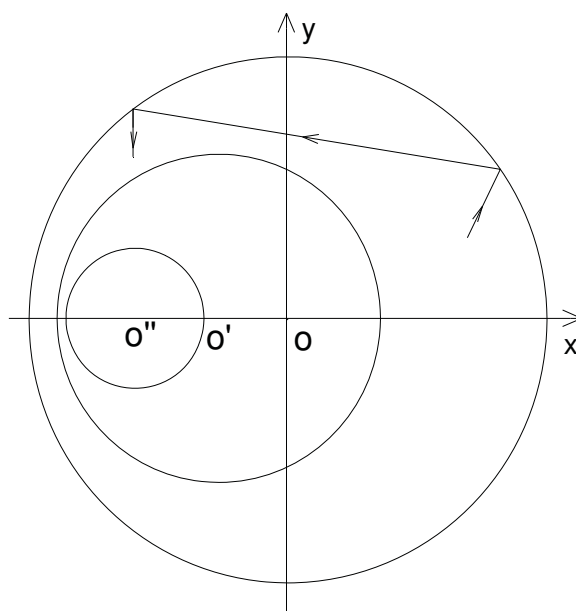


Figura 6 – Situação em que o feixe luminoso sofre apenas reflexões no primeiro círculo.

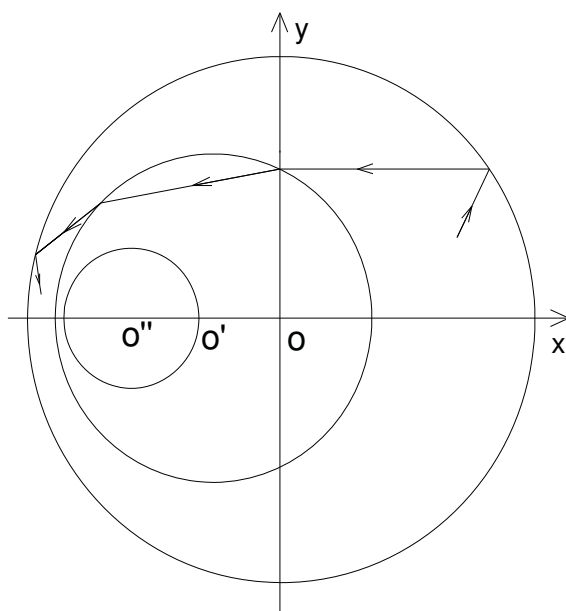


Figura 7–Situação em que o feixe luminoso sofre refração apenas com o segundo círculo.

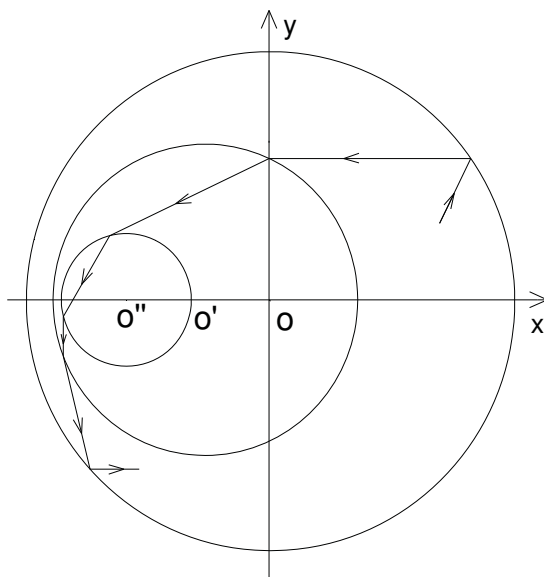


Figura 8 – Situação em que o feixe luminoso sofre refração com o segundo e terceiro círculo.

Para obtermos as trajetórias feitas pelo feixe luminoso nas figuras 6, 7 e 8, foi suposto, a fim de se tornar fácil a visualização delas e para a demonstração das equações dinâmicas, que os índices de refração do primeiro, segundo e terceiro círculo, obedeciam as seguintes desigualdades: $n_0=1 < n_1 \leq n_2$.

Denominamos, neste sistema, o raio do círculo exterior, raios do segundo e terceiro círculo, respectivamente, por $R=1$, r_1 e r_2 , onde sempre está sendo suposto que $r_1 < 1$ e $r_1 \geq r_2$. As distâncias entre os centros O e O' e os centros O e O'' (excentricidades), denominamos, respectivamente, d_1 e d_2 .

Apesar de r_1 , d_1 e r_2 , d_2 poderem assumir valores diferentes, eles serão limitados pelos seguintes vínculos apresentados logo abaixo:

$$\begin{cases} r_1 + d_1 \leq 1 \\ r_2 + (d_2 - d_1) \leq r_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Resolvendo o sistema de inequações (3.1) temos também que $r_2 + d_2 \leq 1$.

Pela figura 9, vemos que podemos encontrar uma relação algébrica entre r_1 e r_2 onde $r_1 = r_2 + (d_2 - d_1) + r$, sendo r um incremento. Ela será muito importante, pois, numericamente, serve como um auxílio no controle da distância do terceiro círculo dentro do segundo.

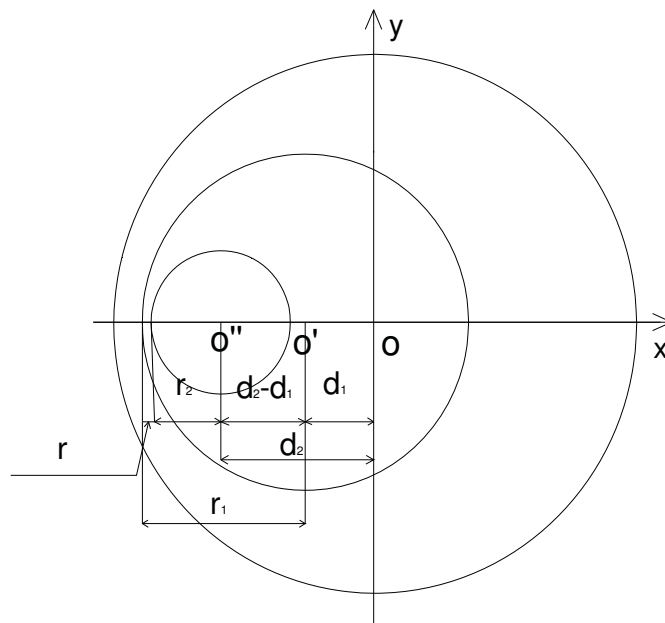


Figura 9 – Visualização geométrica da relação entre r_1 e r_2 no bilhar triplo excêntrico.

A inequação (3.2) é a segunda condição de tangência, necessária para o segundo e terceiro círculo. Ela está demonstrada no anexo ao final desse trabalho.

Segunda condição de tangência:

$$\left| r_1 \sin(\beta_2) - (d_2 - d_1) \sin(\varphi' - \beta_2) \right| > r_2 \quad (3.2)$$

Se (3.2) for satisfeita, o feixe não atingirá o terceiro círculo. As equações encontradas foram:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta' + \theta'' + \theta''' \end{cases}$$

onde:

$$\varphi = \arctg(d_1 \sin(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0) / r_1 + d_1 \cos(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0))$$

$$\varphi' = \theta_0 - \alpha_0 + \beta_1$$

$$\theta' = \varphi + \beta_1 - \alpha_0$$

$$\theta'' = \pi - \varphi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0$$

$$\theta''' = 2\beta_1 - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha_2$$

Está demonstrado no anexo no final desse trabalho que as equações nesta situação, combinadas de forma adequada, se resumem, na situação do bilhar anular com dois círculos excêntricos, em que a primeira condição de tangência é satisfeita, para cada iteração.

Caso (3.2) não seja satisfeita, o feixe atingirá o terceiro círculo e sofrerá refração nele e teremos então outras equações dinâmicas, a saber:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta' + \theta'' + \bar{\theta} + \theta_4 \end{cases}$$

sendo que:

$$\beta_3 = \arcsen(r_1 \sen(\beta_2) + (d_2 - d_1) \sen(\beta_2 - \varphi') / r_2)$$

$$\beta_4 = \arcsen((n_1 / n_2) \sen(\beta_3))$$

$$u = \pi + \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 - \varphi'$$

$$v = \varphi' - \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4$$

$$\bar{u} = \arctg((d_2 - d_1) \sen(v) / r_2 + (d_2 - d_1) \cos(v))$$

$$u' = \varphi' - \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4 - \bar{u}$$

$$\overline{O'P_3} = r_2 \sen(u) / \sen(u')$$

$$\beta_5 = \beta_3$$

$$\beta_6 = \arcsen(\overline{O'P_3} \sen(\pi - \bar{u} - \beta_3) / r_1)$$

$$\beta_7 = \arcsen(n_1 \sen(\beta_6))$$

$$\rho = \pi - \bar{u} - \beta_3$$

$$\rho' = \pi - \rho - \beta_6$$

$$\zeta = \pi - \rho' - u'$$

$$\zeta' = \arctg(d_1 \sen(\pi - \zeta) / r_1 + d_1 \cos(\pi - \zeta))$$

$$\bar{\theta} = \pi - \zeta - \zeta'$$

$$\alpha_3 = \arcsen(d_1 \sen(v) \sen(\pi - v' - \beta_7) / \sen(v'))$$

$$\theta_4 = v' + \beta_4 - \alpha_3$$

onde β_1 e β_2 são as mesmas equações apresentadas no caso do bilhar anular anterior e θ' , θ'' e φ' , as apresentadas no caso anterior.

No apêndice, no final desse trabalho, apresentamos as demonstrações devidas para as fórmulas explicitadas na situação em que a segunda condição de tangência não é satisfeita.

Capítulo 4

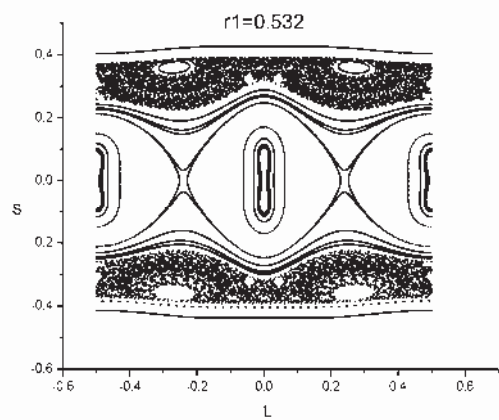
Resultados

Nesta seção, apresentaremos os resultados encontrados nas simulações computacionais feitas com as equações procuradas para o bilhar com três círculos não-concêntricos. Esse capítulo fará subdivisões para cada caso estudado, levando em consideração, os parâmetros neste tipo de bilhar.

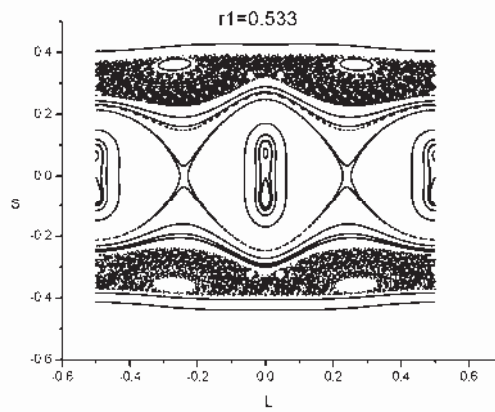
Todas as figuras mostradas aqui foram feitas levando em consideração no bilhar em questão, o raio e o índice de refração do círculo mais externo de valor unitário, raio e excentricidade do segundo círculo (r_1 e d_1 , respectivamente) e raio e excentricidade do terceiro círculo (r_2 e d_2 , respectivamente). Nas simulações computacionais que geraram as figuras, foram usadas 75 condições iniciais e 2000, o número de iterações.

4.1 - Variação do raio do 2º ou 3º círculos.

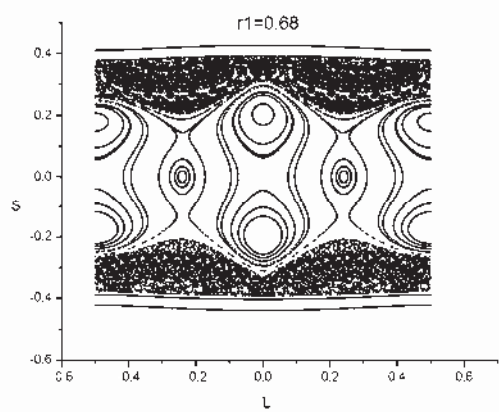
Nesta simulação, tanto variando apenas um como outro raio e deixando os outros parâmetros fixos, ocorrem no espaço de fase bifurcações, caos, ressonâncias, pontos fixos, etc. Nas figuras de (a) à (f), variamos r_1 e deixamos fixos $d_1=0.04$, $n_1=1.36$, $n_2=1.60$, $r_2=0.23$ e $d_2=0.07$.



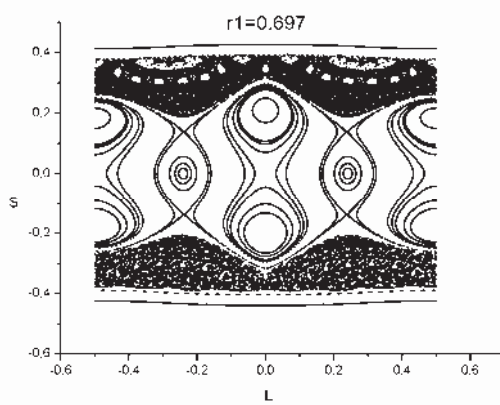
a



(b)



(c)



(d)

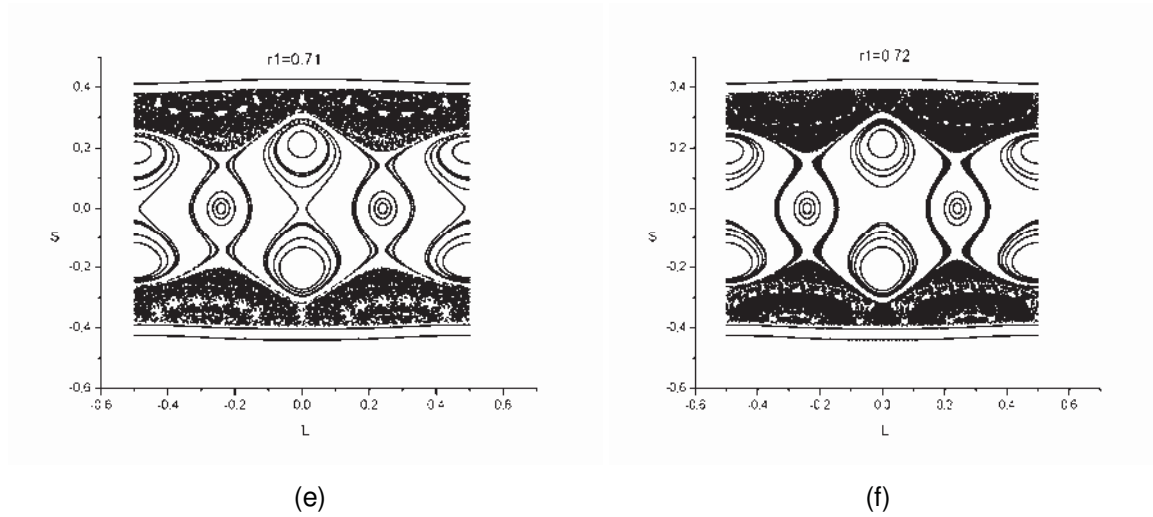


Figura 10 – Efeito da variação do segundo raio no bilhar anular com três círculos excêntricos (figuras de a à f).

Vemos nos primeiros gráficos (figuras (a) e (c)), que no ponto fixo 0.0, ocorre uma bifurcação. Também é visto, em todas as figuras, regiões com caos acima e abaixo das regiões integráveis, bem como pequenas ilhas nesses mares de caos.

Com respeito a mudança de r_2 e fixos os mesmos parâmetros do caso anterior apresentamos algumas simulações em que também é possível verificar bifurcações, no ponto fixo 0.0, regiões caóticas e pontos elípticos nessas regiões. Em tais casos, $r_1=0.46$:

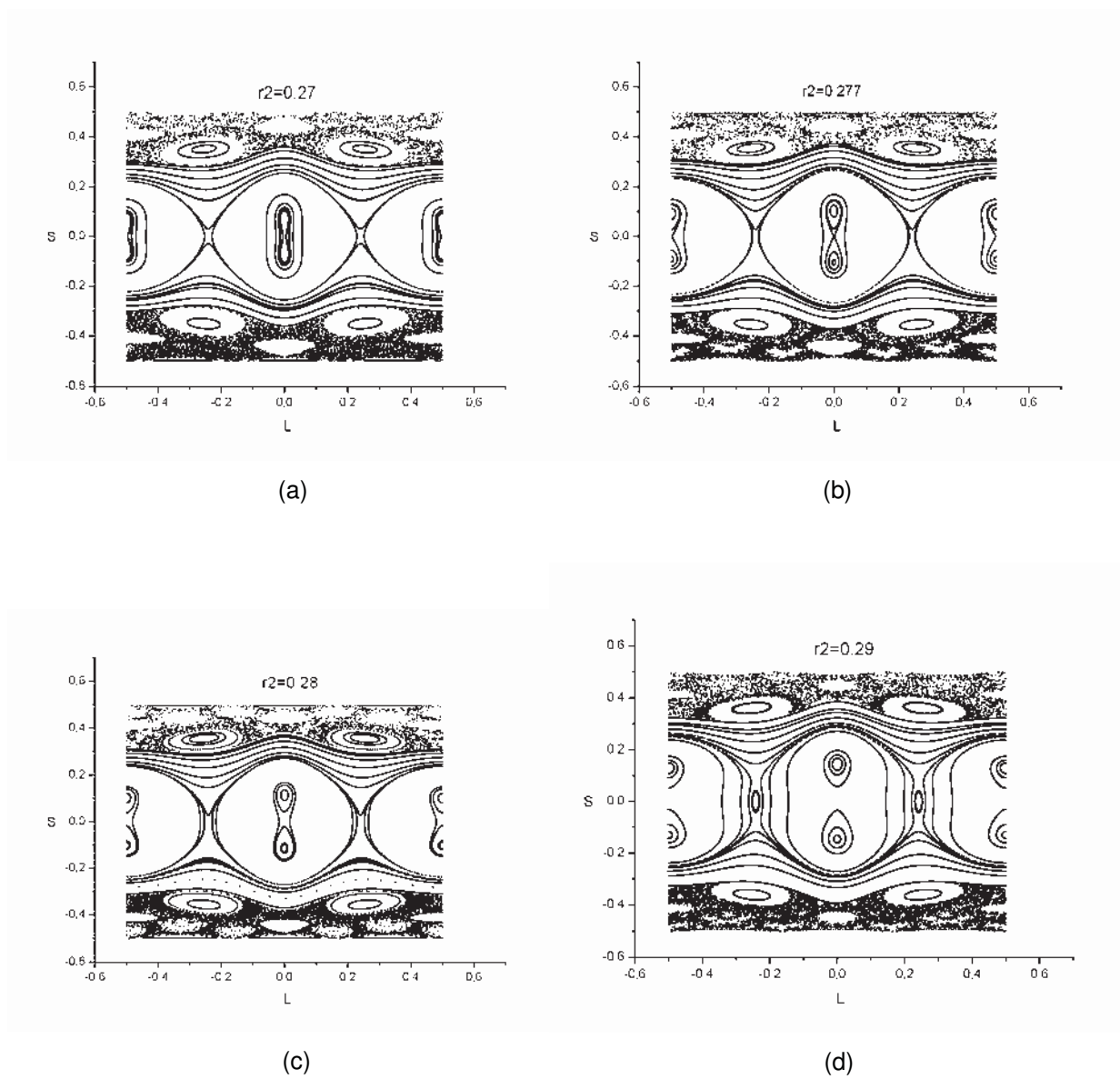
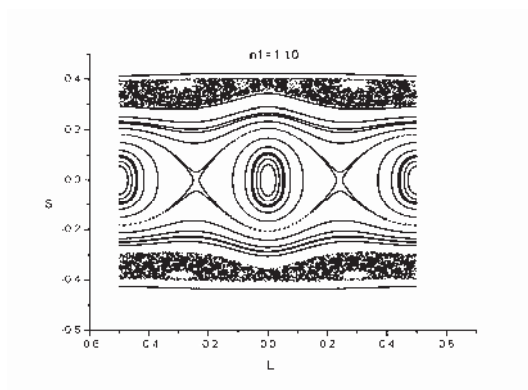


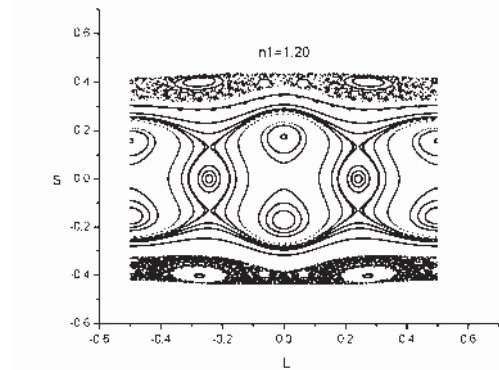
Figura 11 – Efeito da variação do terceiro raio no bilhar anular com três círculos excêntricos. Como no caso da variação do segundo, ocorrência de bifurcações, caos e pontos elípticos (figuras de a à d).

4.2 - Variação do 2º ou 3º índices de refração.

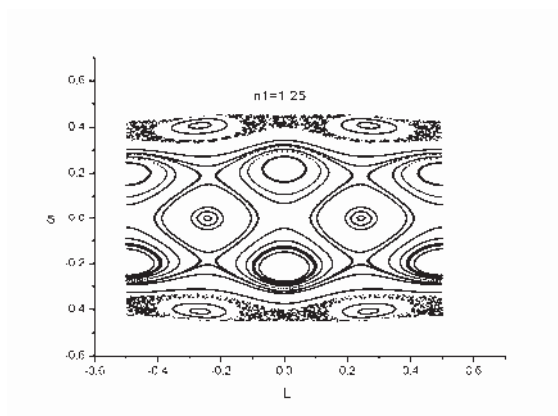
Nas simulações a seguir, foram feitas simulações variando apenas um dos índices de refração e deixando fixos os outros parâmetros. Abaixo, variamos, inicialmente, n_1 e fixamos $n_2=1,55$, $r_1=0,49$, $r_2=0,315$, $d_1=0,035$ e $d_2=0,055$.



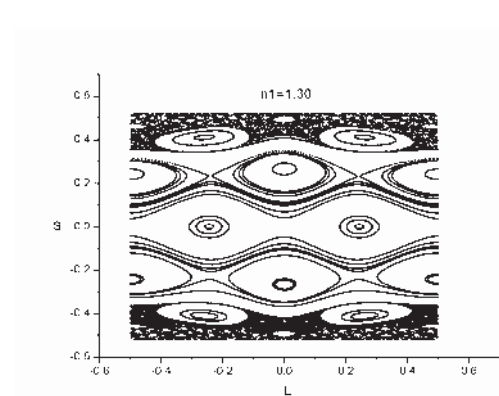
(a)



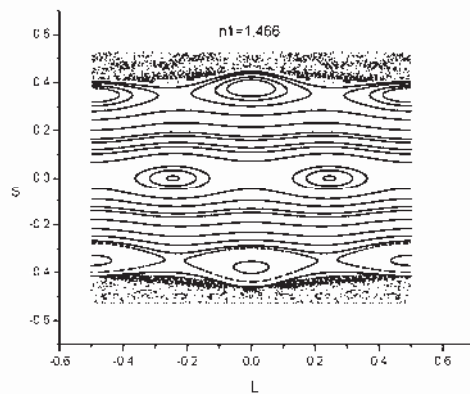
(b)



(c)



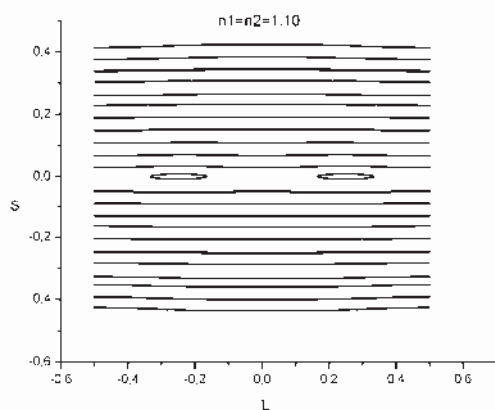
(d)



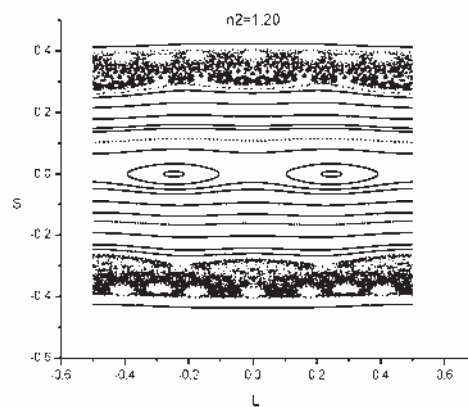
(e)

Figura 12 – Sobreposições de cadeias de ilhas podem ser vistas nesta simulação, variando apenas o índice de refração do segundo círculo (figuras de a à e).

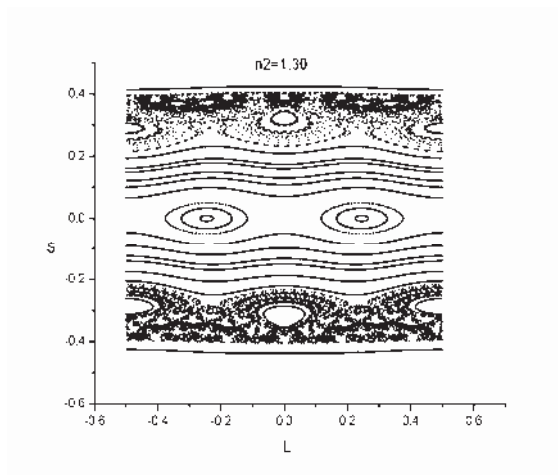
Abaixo, mais simulações, agora variando apenas o índice de refração do terceiro círculo e mantendo os mesmos parâmetros na do caso anterior, onde $n_1 = 1.10$



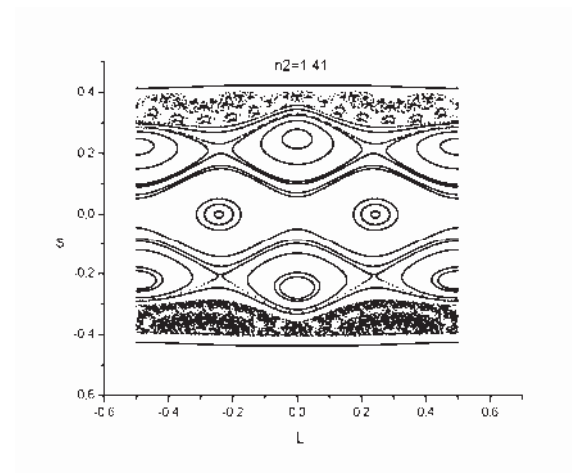
(a)



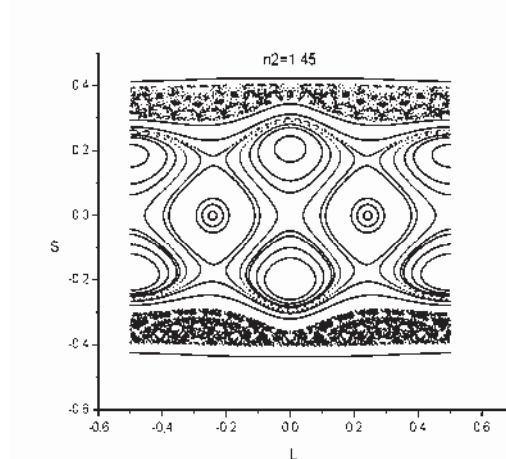
(b)



(c)



(d)



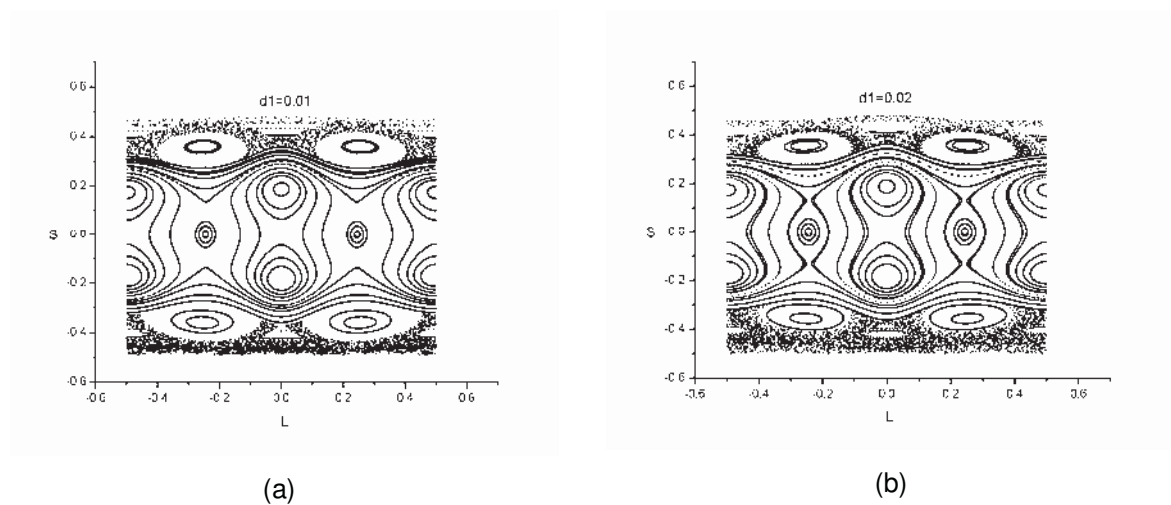
(e)

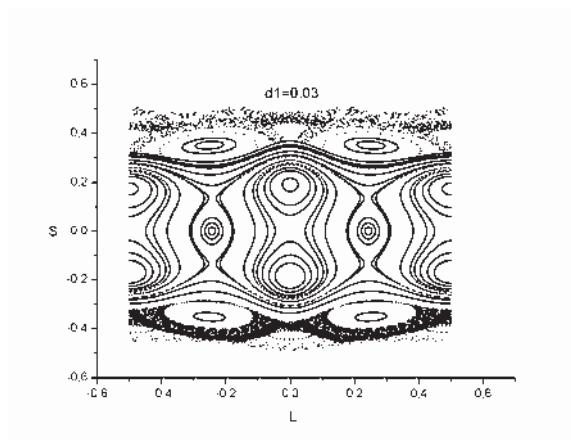
Figura 13 – Surgimento de sobreposições de cadeias de ilhas com a variação do terceiro índice de refração no terceiro círculo (figuras de c à d).

Tanto no caso em que variamos n_1 como n_2 , ocorrem “overlaps” de três cadeias de ilhas nos respectivos espaços de fase. Também podemos ver pontos hiperbólicos em todas as figuras se nos atentarmos, nas regiões integráveis, os pontos que estão no centro e sobre as ilhas e entre elas.

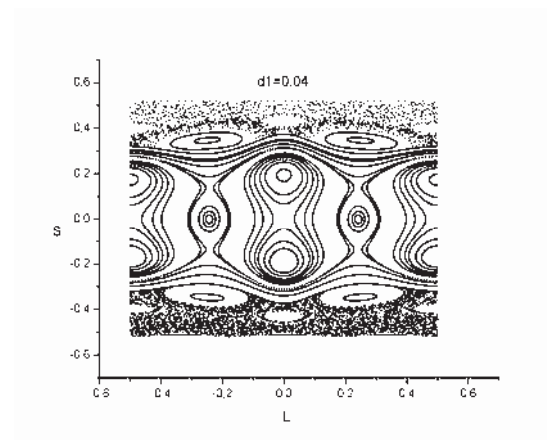
4.3 - Variação das excentricidades dos círculos internos.

No caso analisado aqui, onde foram feitas simulações com as excentricidades, percebe-se que variando tanto uma como outra excentricidade, ocorrem mudanças na intensidade do mar de caos. Na figura 14, mostraremos inicialmente o caso em que variamos d_1 e fixamos os outros parâmetros nos seguintes valores: $n_1=1.50$, $n_2=1.65$, $r_1=0.48$, $r_2=0.25$ e $d_2=0.07$.

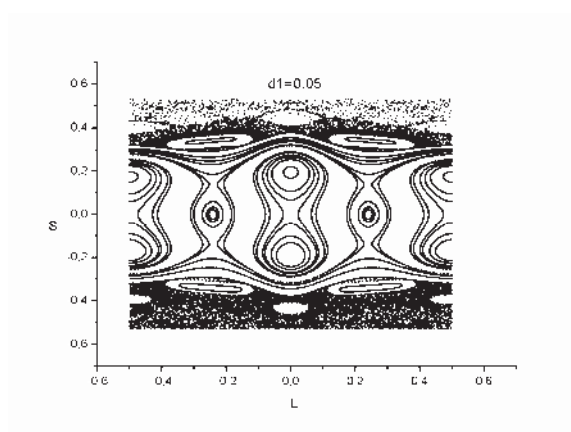




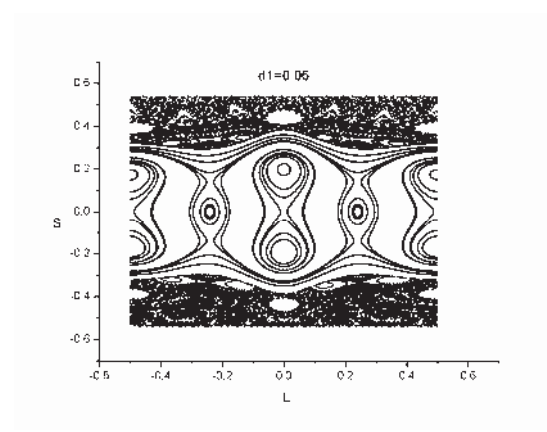
(c)



(d)



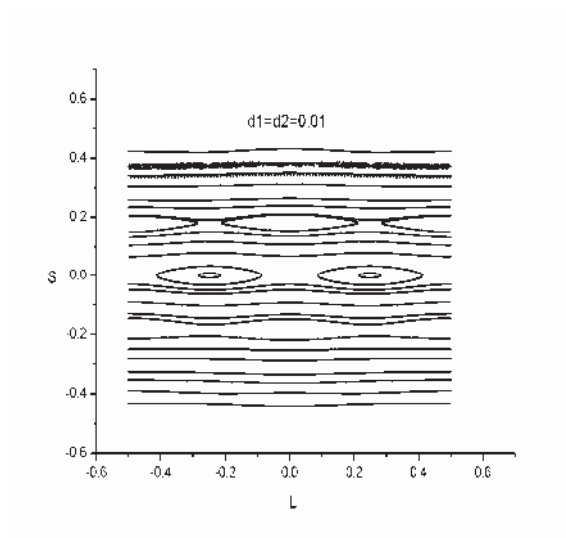
(e)



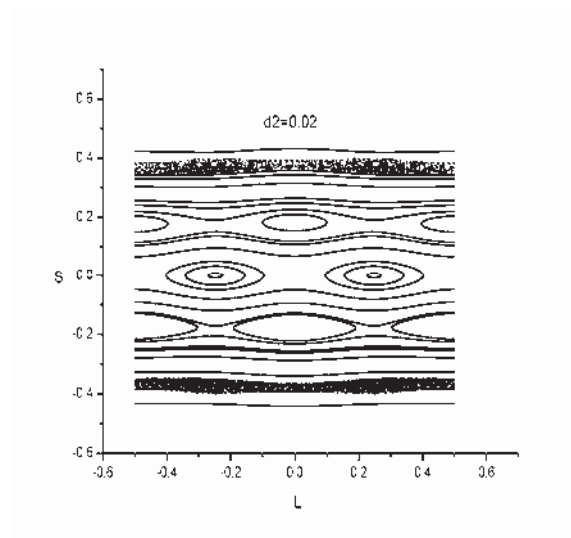
(f)

Figura 14 – Espaços de fase com a excentricidade do segundo círculo variando. Variação da intensidade do mar de caos e bifurcações de pontos elípticos sobre o mar de caos (figuras de a à f).

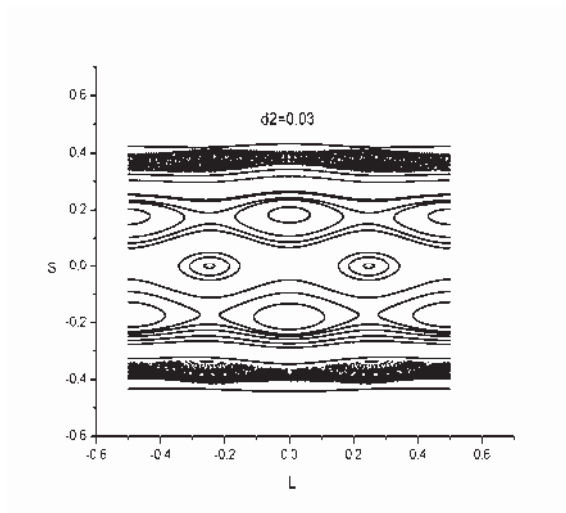
Na figura 15, variamos d_2 e usamos os mesmos valores fixados do caso anterior, com $d_1=0.01$.



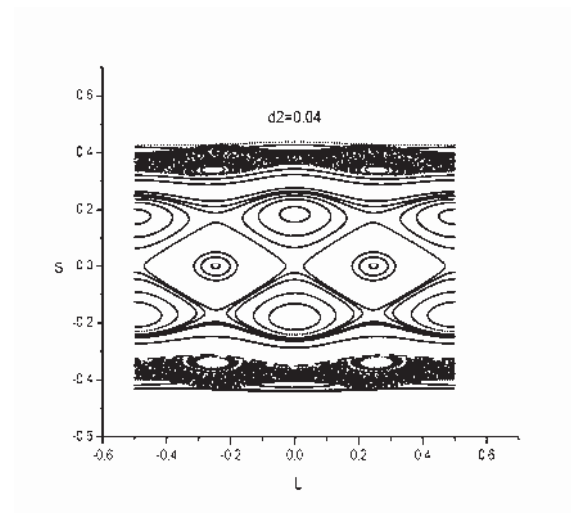
(a)



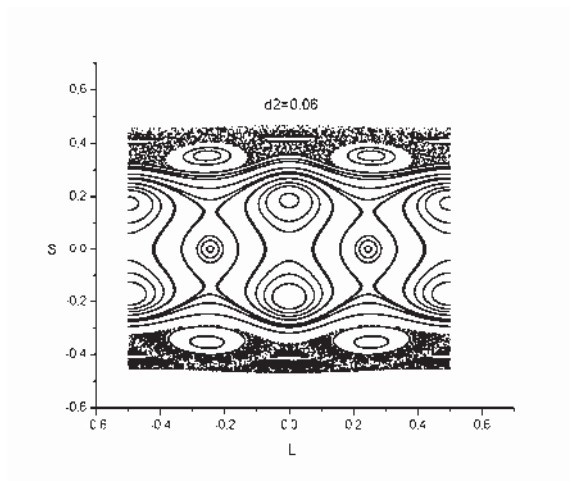
(b)



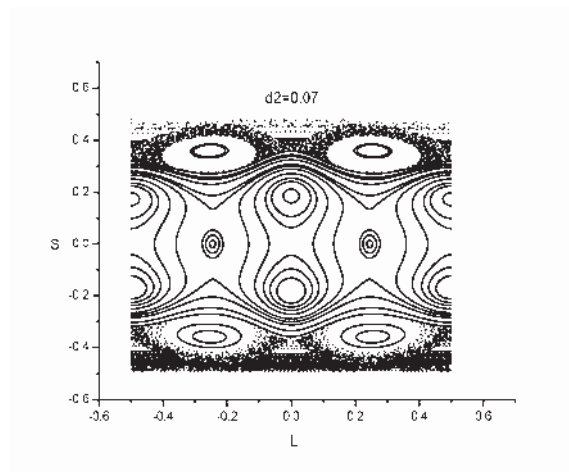
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 15 – Variação da intensidade do mar de caos e ressonâncias isócronas com a mudança da excentricidade do terceiro círculo (figuras de a à f).

Capítulo 5

Conclusão

No bilhar anular com três círculos excêntricos, além dos estudos com os índices de refração e excentricidades, foi acrescentado também um estudo com os raios dos círculos internos e pode-se observar que eles acrescentaram resultados, uma vez que em [8], não faz tal estudo.

No estudo dos índices de refração e das excentricidades, vimos que tais parâmetros apenas alteram a topologia das regiões integráveis e controla da intensidade do mar de caos, respectivamente, e estes resultados também podem ser vistos no caso do bilhar anular com apenas um círculo interno estudado por [8].

Portanto, concluímos que os resultados obtidos pela variação dos índices de refração e excentricidades usando o bilhar anular constituído por três círculos excêntricos, são os mesmos encontrados no bilhar anular com apenas um círculo interno.

Apêndice

Apresentaremos aqui as demonstrações das fórmulas que possibilitaram o desenvolvimento do programa para o estudo do bilhar anular com três círculos excêntricos.

Inicialmente, mostraremos como foram obtidas a primeira condição de tangência e as equações da situação em que ela não é satisfeita.

Depois, apresentaremos como foi obtida a desigualdade que retrata a segunda condição de tangência, condição essa muito importante para impor duas situações possíveis: se o feixe luminoso não entra no terceiro círculo, ou sim, caso em que ele entra no terceiro círculo, sofrendo refração.

Ficará claro também, usando as fórmulas da situação na qual a segunda condição de tangência não é satisfeita, elas geram as equações da situação em que a primeira condição de tangência é satisfeita.

A.1 - Prova da primeira condição de tangência.

Usaremos a seguinte figura abaixo para uma melhor compreensão desta demonstração.

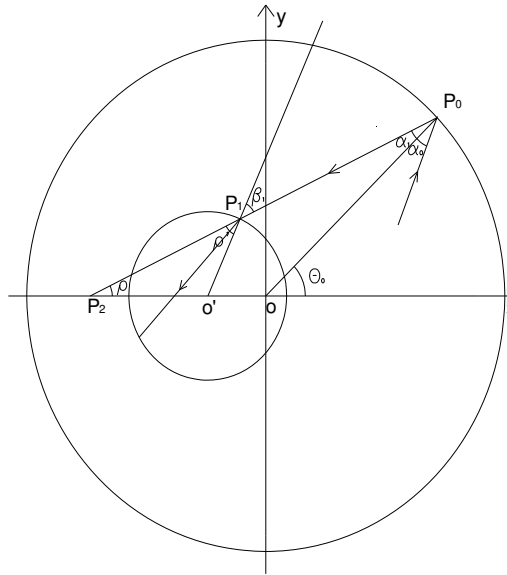


Figura A.1 – Representação geométrica para a demonstração da primeira condição de tangência.

Por ângulos opostos pelo vértice, $\rho' = \beta_1$. Considerando o $\Delta P_0 O P_2$, temos ainda que $m(\angle P_0 O P_2) = \pi - \theta_0$, $\alpha_1 = \alpha_0$ (por causa da reflexão) e então,

$$\rho + \alpha_0 + (\pi - \theta_0) = \pi \Rightarrow \rho = \theta_0 - \alpha_0$$

Pelo $\Delta P_1 O' P_2$, usando a Lei dos senos, temos que:

$$\frac{\text{sen}(\beta_1)}{\overline{O' P_2}} = \frac{\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0)}{r_1} \Rightarrow r_1 \text{sen}(\beta_1) = \overline{O' P_2} \text{sen}(\theta_0 - \alpha_0) \quad (1)$$

Por outro lado, $\overline{OP_2} = d_1 + \overline{O'P_2}$ e usando a mesma Lei para o ΔP_0OP_2 , temos que:

$$\frac{\overline{sen(\theta_0 - \alpha_0)}}{\overline{OP_0} = 1} = \frac{\overline{sen(\alpha_0)}}{\overline{OP_2}} \Rightarrow \overline{O'P_2} sen(\theta_0 - \alpha_0) = \overline{sen(\alpha_0)} - d_1 sen(\theta_0 - \alpha_0) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) segue que:

$$r_1 sen(\beta_1) = sen(\alpha_0) - d_1 sen(\theta_0 - \alpha_0) \quad (3)$$

Logo, a desigualdade que consiste a primeira condição de tangência se obtém analisando, em valor absoluto, a equação (3), sendo que $0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

Portanto:

$$|R sen(\alpha_0) - d_1 sen(\theta_0 - \alpha_0)| > r_1, \text{ onde}$$

$R=1$ é o raio do círculo externo.

Também pela última equação é possível obter o valor de β_1 da seguinte forma:

$$r_1 sen(\beta_1) = sen(\alpha_0) - d_1 sen(\theta_0 - \alpha_0) \Rightarrow \beta_1 = arcsen \left[\frac{sen(\alpha_0) - d_1 sen(\theta_0 - \alpha_0)}{r_1} \right]$$

A.2 - Prova das equações para o caso em que a primeira condição de tangência é satisfeita.

Usaremos a figura A.2 para ficar mais claro o acompanhamento da demonstração:

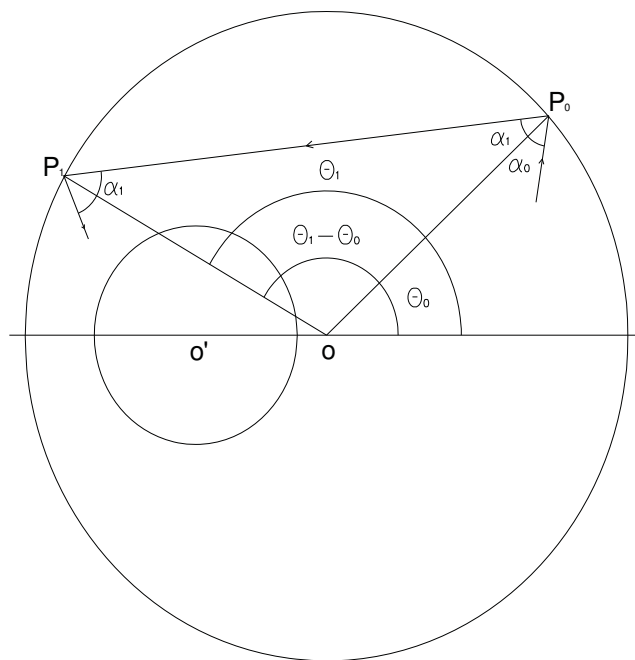


Figura A.2 – Representação geométrica para a demonstração das equações dinâmicas no caso em que a primeira condição de tangência é satisfeita.

Por causa da reflexão, $\alpha_1 = \alpha_0$ e como o $\Delta P_0 O P_1$ é isósceles, então $m(\angle O P_1 P_0) = \alpha_1$. Logo $\theta_1 - \theta_0 + 2\alpha_1 = \pi \Rightarrow \theta_1 = \pi - 2\alpha_1 + \theta_0$ e temos, portanto, para cada iteração, quando a primeira condição é satisfeita, as equações procuradas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 \\ \theta_1 = \pi + \theta_0 - 2\alpha_0 \end{cases}$$

A.3 – Prova da segunda condição de tangência.

Agora mostraremos de onde surgiu a desigualdade que impõe, a cada iteração, se o feixe de luz sofre ou não refração no terceiro círculo. A figura A.3 servirá de acompanhamento para prová-la.

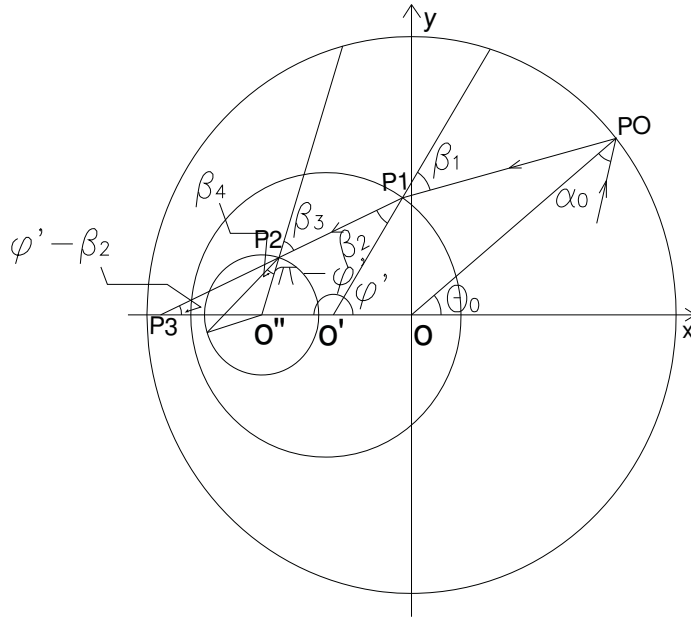


Figura A.3 – Ilustração para o acompanhamento da demonstração da condição de tangência entre o segundo e terceiro círculos.

De acordo com a figura A.3, temos que, por ângulos opostos pelo vértice, $m(\angle O'P_2P_3) = \beta_3$, então pela Lei dos senos no $\Delta P_2O''P_3$:

$$\frac{\text{sen}(\beta_3)}{\overline{O''P_3}} = \frac{\text{sen}(\varphi' - \beta_2)}{r_2} \Rightarrow r_2 \text{sen}(\beta_3) = \overline{O''P_3} \text{sen}(\varphi' - \beta_2) \quad (4)$$

Como $\overline{O''P_3} = \overline{O'P_3} - (d_2 - d_1)$ substituindo-a em (4), temos que:

$$r_2 \text{sen}(\beta_3) = [\overline{O'P_3} - (d_2 - d_1)] \text{sen}(\varphi' - \beta_2) = \overline{O'P_3} \text{sen}(\varphi' - \beta_2) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\varphi' - \beta_2)$$

Pela Lei dos senos no $\Delta P_1 O' P_3$ segue que:

$$\frac{\text{sen}(\beta_2)}{\overline{O'P_3}} = \frac{\text{sen}(\varphi' - \beta_2)}{r_1} \Rightarrow \overline{O'P_3} = \frac{r_1 \text{sen}(\beta_2)}{\text{sen}(\varphi' - \beta_2)} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), temos:

$$\begin{aligned} r_2 \text{sen}(\beta_3) &= \left[\frac{r_1 \text{sen}(\beta_2)}{\text{sen}(\varphi' - \beta_2)} \right] \text{sen}(\varphi' - \beta_2) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\varphi' - \beta_2) \\ r_2 \text{sen}(\beta_3) &= r_1 \text{sen}(\beta_2) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\varphi' - \beta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Portanto, a condição da tangência entre o 2º e 3º círculos será:

$$|r_1 \text{sen}(\beta_2) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\varphi' - \beta_2)| > r_2$$

Por meio de (6), podemos também achar a medida do ângulo β_3 . Vejamos:

$$r_2 \sin(\beta_3) = r_1 \sin(\beta_2) - (d_2 - d_1) \sin(\varphi' - \beta_2)$$

$$r_2 \sin(\beta_3) = r_1 \sin(\beta_2) + (d_2 - d_1) \sin(\beta_2 - \varphi')$$

$$\beta_3 = \arcsen \left(\frac{r_1 \sin(\beta_2) + (d_2 - d_1) \sin(\beta_2 - \varphi')}{r_2} \right)$$

Provada a segunda condição de tangência, iremos, a partir de agora, provar as equações dinâmicas para este caso. A figura A.4 dará o suporte devido para a compreensão da demonstração do caso em que a referida condição é satisfeita, isto é, quando:

$$|r_1 \sin(\beta_2) - (d_2 - d_1) \sin(\varphi' - \beta_2)| > r_2$$

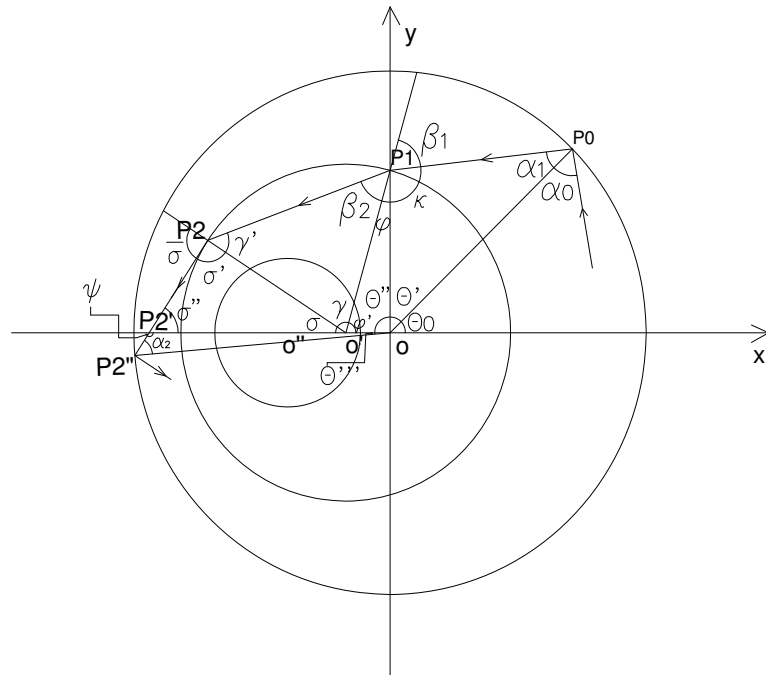


Figura A.4 – Situação em que o feixe não passa pelo terceiro círculo, sofrendo refração.

Temos que $\alpha_1 = \alpha_0$ pois o feixe apenas está sofrendo reflexão no círculo mais externo. Então, segue que:

$$\varphi + \kappa + \beta_1 = \pi \Rightarrow \kappa = \pi - \varphi - \beta_1 \quad (7)$$

No $\Delta P_0 O P_1$, aplicando (7), temos:

$$\alpha_1 + \kappa + \theta' = \pi \Rightarrow \alpha_0 + (\pi - \varphi - \beta_1) + \theta' = \pi \Rightarrow \theta' = \varphi + \beta_1 - \alpha_0 \quad (8)$$

Pela Lei dos senos no $\Delta P_0 O P_1$ e aplicando (7) temos que:

$$\frac{\text{sen}(\alpha_0)}{\overline{OP_1}} = \frac{\text{sen}(\kappa)}{\overline{OP_0}} \Rightarrow \overline{OP_1} = \frac{\text{sen}(\alpha_0)}{\text{sen}(\pi - \varphi - \beta_1)}$$

Usando novamente a Lei dos senos, porém, no $\Delta O P_1 O'$, temos:

$$\frac{\text{sen}(\varphi)}{d_1} = \frac{\text{sen}(\theta'')}{r_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}(\varphi)}{d_1} = \frac{\text{sen}(\pi - \theta' - \theta_0)}{r_1} \quad (9)$$

$$r_1 \text{sen}(\varphi) = d_1 \text{sen}(\pi - \theta' - \theta_0)$$

Pelo Teorema do Ângulo Externo no $\Delta O P_1 O'$ e aplicando (8) ainda temos que:

$$\theta_0 + \theta' = \varphi + \varphi' \Rightarrow \theta_0 + (\varphi + \beta_1 - \alpha_0) = \varphi + \varphi' \Rightarrow \varphi' = \theta_0 - \alpha_0 + \beta_1 \quad (10)$$

Observe que a equação (10) é extremamente importante para o cálculo da segunda condição de tangência. Operando ainda mais na equação (9) temos que:

$$\begin{aligned}
r_1 \sin(\varphi) &= d_1 \sin[\pi - (\varphi + \beta_1 - \alpha_0) - \theta_0] = d_1 \sin(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0 - \varphi) \\
r_1 \sin(\varphi) &= d_1 [\sin(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cos(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0)] \\
\varphi &= \arctg \left[\frac{d_1 \sin(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0)}{r_1 + d_1 \cos(\pi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0)} \right]
\end{aligned}$$

Sendo $\theta'' = \pi - \varphi - \varphi'$ temos que, aplicando (10) nela, obtemos:

$$\theta'' = \pi - (\theta_0 - \alpha_0 + \beta_1) - \varphi \Rightarrow \theta'' = \pi - \varphi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0 \quad (11)$$

Pela figura A.4, temos que o $\Delta P_1 O' P_2$ é isósceles, então $\gamma' = \beta_2$ e segue que, no mesmo triângulo:

$$\gamma + \gamma' + \beta_2 = \pi \Rightarrow \gamma = \pi - 2\beta_2$$

Usando a Lei de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin(\beta_2) = \sin(\bar{\sigma}) = \sin(\beta_1) \Rightarrow \sin(\bar{\sigma}) = \sin(\beta_1)$$

Como os ângulos de incidência e refração variam de 0 à $\frac{\pi}{2}$ em relação à normal segue que $\bar{\sigma} = \beta_1$ e analisando no $\Delta P_1 O' P_2'$ temos que:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \pi - \gamma - \varphi' \\
\sigma' &= \pi - \sigma' - \sigma = \pi - (\pi - \beta_1) - \sigma \Rightarrow \sigma' = \beta_1 - \sigma
\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos senos no $\Delta P_2 O' P_2'$ temos que:

$$\frac{\text{sen}(\pi - \beta_1)}{\overline{O' P_2'}} = \frac{\text{sen}(\sigma'')}{r_1} \Rightarrow \overline{O' P_2'} = \frac{r_1 \text{sen}(\pi - \beta_1)}{\text{sen}(\beta_1 - \sigma)}$$

e também:

$$\overline{OP_2'} = d_1 + \overline{O' P_2'}, \quad \psi = \pi - \sigma'', \quad \theta''' = \pi - \psi - \alpha_2 \quad (12)$$

Usando a Lei dos senos no $\Delta P_2' O P_2''$, segue que:

$$\frac{\text{sen}(\alpha_2)}{\overline{OP_2'}} = \frac{\text{sen}(\psi)}{\overline{OP_2''} = 1} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsen[\overline{OP_2'} \text{sen}(\psi)] \quad (13)$$

Portanto, tomando θ_0 , (8), (10), (12) e (13), temos que:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta' + \theta'' + \theta''' \end{cases}$$

Percebe-se que:

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \beta_1 - \sigma = \beta_1 - \pi + \gamma + \varphi' = \beta_1 - \pi + \pi - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0 + \beta_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma'' = 2\beta_1 - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0 \\ \psi &= \pi - \sigma'' \Rightarrow \psi = \pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0 \end{aligned}$$

e também:

$$\overline{O'P'_2} = \frac{r_1 \sin(\pi - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \sigma)} = \frac{r_1 \sin(\beta_1)}{\sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)}$$

$$\overline{OP'_2} = d_1 + \overline{O'P'_2} = \frac{r_1 \sin(\beta_1) + d_1 \sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)}{\sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)}$$

então:

$$\alpha_2 = \arcsen[\overline{OP'_2} \sin(\psi)]$$

$$\alpha_2 = \arcsen\left\{ \frac{[r_1 \sin(\beta_1) + d_1 \sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)] \sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)}{\sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)} \right\}$$

$$\alpha_2 = \arcsen[r_1 \sin(\beta_1) + d_1 \sin(\pi - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \theta_0 + \alpha_0)]$$

e:

$$\theta + \theta' + \theta'' = \varphi + \beta_1 - \alpha_0 + \pi - \varphi - \beta_1 - \theta_0 + \alpha_0 + \pi - \pi + 2\beta_1 - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha_2$$

$$\theta + \theta' + \theta'' = \pi + 2\beta_1 - 2\beta_2 - \alpha_0 - \alpha_2$$

logo:

$$\theta_1 = \theta_0 + \theta' + \theta'' + \theta''' \Rightarrow \theta_1 = \pi - \alpha_2 + 2\beta_1 - 2\beta_2 + \theta_0 - \alpha_0$$

Observando as novas equações para α_1 e θ_1 , elas são idênticas às apresentadas no bilhar anular com dois círculos excêntricos onde foi considerada lá, em cada iteração, a situação em que a primeira condição de tangência fosse satisfeita.

Agora, provaremos as equações dinâmicas que regem o caso em que a segunda condição de tangência não será satisfeita, ou seja:

$$|r_1 \text{sen}(\beta_2) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\varphi' - \beta_2)| \leq r_2$$

Temos a figura A.5 que nos orientará na demonstração das equações:

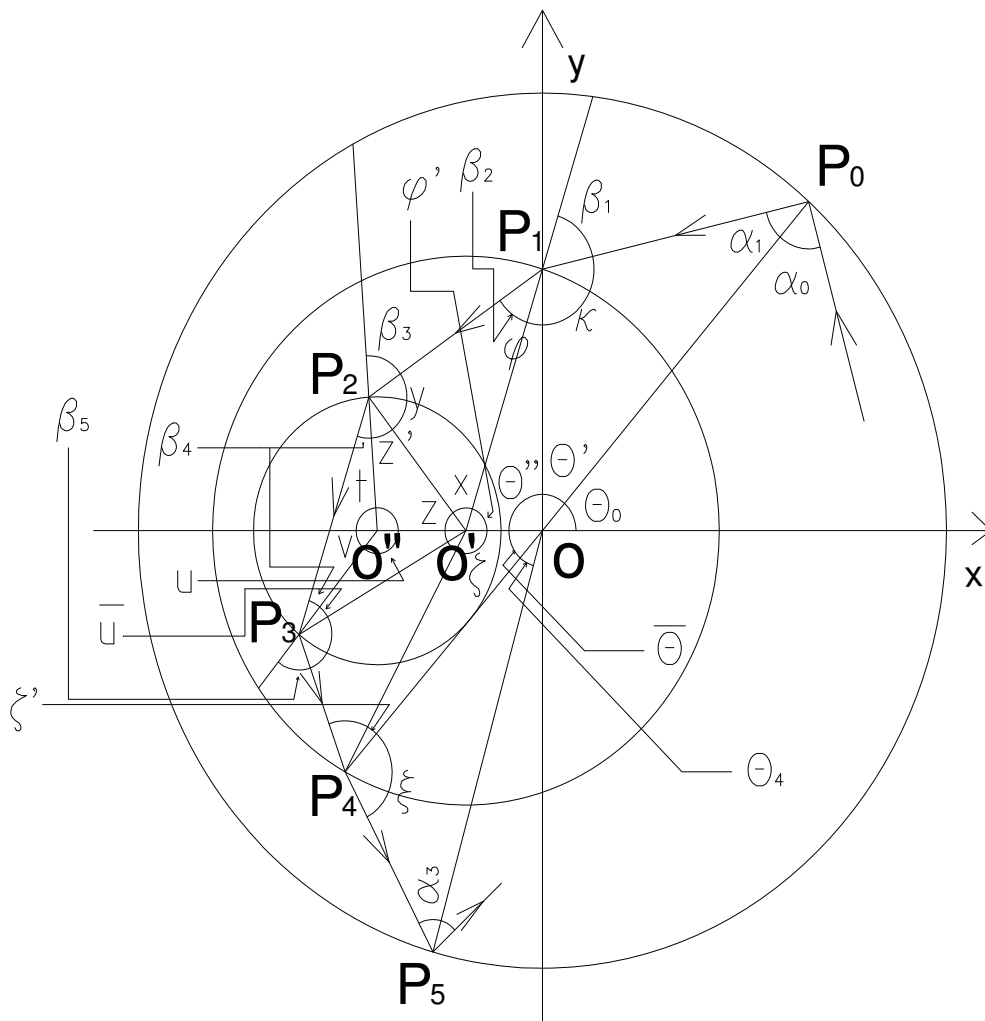


Figura A.5 – Figura ilustrativa para a demonstração das equações dinâmicas no caso em o feixe luminoso passa pelo terceiro círculo, sofrendo refração.

De acordo com a figura A.5, podemos considerar dois triângulos a saber: o $\Delta P_1 O' P_2$ e o $\Delta O' P_2 O''$. Logo, teríamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + \beta_2 = \pi \\ y + z' + \beta_3 = \pi \\ x + z + \phi' = \pi \end{cases}$$

A primeira equação deste sistema nos dará $x + y = \pi - \beta_2$ e somando a segunda e a terceira do mesmo nos dará $x + y + z + z' + \phi' + \beta_3 = 2\pi$. Pelo teorema do ângulo externo, $t = z + z'$. Então:

$$x + y + z + z' + \phi' + \beta_3 = 2\pi \Rightarrow \pi - \beta_2 + z + z' + \phi' + \beta_3 = 2\pi \Rightarrow t = \pi + \beta_2 - \beta_3 - \phi'$$

Usando a Lei de Snell-Descartes, temos que $\beta_4 = \arcsen [n_1 \sen(\beta_3) / n_2]$. Logo, para o $\Delta P_2 O'' P_3$:

$$m(\angle P_2 O'' P_3) = \omega = \pi - 2\beta_4 \text{ e } \nu = \omega - t$$

Tomando, $m(\angle O'' P_3 O') = \bar{u}$ e denominando $m(\angle P_3 O' O'') = u'$, pelo Teorema do Ângulo Externo:

$$\nu = u' + \bar{u} \Rightarrow u' = \nu - \bar{u}$$

Pela Lei dos Senos no $\Delta O' P_3 O''$, ainda temos que:

$$\frac{\text{sen}(\bar{u})}{d_2 - d_1} = \frac{\text{sen}(u')}{r_2} \Rightarrow r_2 \text{sen}(\bar{u}) = (d_2 - d_1) \text{sen}(v - \bar{u})$$

$$r_2 \text{sen}(\bar{u}) = (d_2 - d_1) \text{sen}(v) \cos(\bar{u}) - (d_2 - d_1) \text{sen}(\bar{u}) \cos(v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \arctg \left[\frac{(d_2 - d_1) \text{sen}(v)}{r_2 + (d_2 - d_1) \cos(v)} \right]$$

Usando a mesma Lei neste triângulo também temos:

$$\frac{\text{sen}(u)}{\overline{O'P_3}} = \frac{\text{sen}(u')}{r_2} \Rightarrow \overline{O'P_3} = \frac{r_2 \text{sen}(u)}{\text{sen}(u')}$$

Pela Lei de Snell-Descartes temos que:

$$n_1 \text{sen}(\beta_3) = n_2 \text{sen}(\beta_4)$$

$$n_2 \text{sen}(\beta_4) = n_1 \text{sen}(\beta_5) \Rightarrow n_1 \text{sen}(\beta_3) = n_2 \text{sen}(\beta_5) \Rightarrow \beta_3 = \beta_5$$

então:

$$m(\angle O'P_3P_4) = \rho = \pi - \bar{u} - \beta_3 \text{ e denominando } m(\angle P_3P_4O') = \beta_6 \text{ pela Lei dos}$$

Senos no $\Delta P_3O'P_4$:

$$\frac{\text{sen}(\beta_6)}{\overline{O'P_3}} = \frac{\text{sen}(\rho)}{r_1} \Rightarrow \beta_6 = \arcsen \left[\frac{\overline{O'P_3} \text{sen}(\rho)}{r_1} \right]$$

$$e \quad m(\angle P_3 O' P_4) = \rho' = \pi - \rho - \beta_6.$$

$$\zeta' = \pi - \rho' - u'$$

$$\bar{\theta} = \pi - \zeta - \zeta' \quad (14)$$

Usando a Lei dos Senos no $\Delta OP_4 O'$ e (14), segue que:

$$\frac{\text{sen}(\zeta)}{\overline{OP_4}} = \frac{\text{sen}(\zeta')}{d_1} \Rightarrow \overline{OP_4} = \frac{d_1 \text{sen}(\zeta)}{\text{sen}(\zeta')}$$

$$\frac{\text{sen}(\zeta')}{d_1} = \frac{\text{sen}(\bar{\theta})}{r_1} \Rightarrow r_1 \text{sen}(\zeta') = d_1 \text{sen}(\pi - \zeta - \zeta')$$

$$r_1 \text{sen}(\zeta') = d_1 \text{sen}(\pi - \zeta) \cos(\zeta') - d_1 \text{sen}(\zeta') \cos(\pi - \zeta') \Rightarrow \zeta' = \arctg \left[\frac{d_1 \text{sen}(\pi - \zeta)}{r_1 + d_1 \cos(\pi - \zeta)} \right]$$

Pela Lei dos Senos no $\Delta P_4 OP_5$:

$$\frac{\text{sen}(\alpha_3)}{\overline{OP_4}} = \frac{\text{sen}(\xi)}{\overline{OP_5}} = 1 \Rightarrow \alpha_3 = \arcsen[\overline{OP_4} \text{sen}(\xi)]$$

onde:

$\xi = \pi - \zeta' - \beta_7$, sendo que $\beta_7 = \arcsen[n_1 \text{sen}(\beta_6)]$ se obtém pela Lei de Snell-Descartes.

Logo, $\theta_4 = \pi - \alpha_3 - \xi$ e, portanto, temos que:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta' + \theta'' + \bar{\theta} + \theta_4 \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, Gauthier-Villars, Paris, (1892).
- [2] G. D. Birkhoff, *Collected Mathematical Papers*, American Physical Society, Providence (1950); Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (2), 4, 267 (1935).
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, (1994).
- [4] J. E. Villate, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima*, Creative Commons, (2006).
- [5] A. P. Mijolaro, *Estudo da Distribuição de Espaçamentos de Dubletos utilizando o modelo do Bilhar*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2004).
- [6] C. G. L. Martins, *Controle de Dinâmica Caótica com Toros Robustos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2010).
- [7] C. V. Abud, *Propriedades de Transporte, Caos e Dissipação num Sistema Dinâmico Não-Linear*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2010).
- [8] R. Egdio de carvalho, *Overlap of Isochrone resonances: Chaos e refraction*, Physical Review E, 55 (1997), 3781.