



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo sobre o comportamento de zeros de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos

Eduardo Fornazieri Filho

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, março de 2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estudo sobre o comportamento de zeros de
polinômios que satisfazem uma relação de
recorrência de quatro termos**

Eduardo Fornazieri Filho

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, março de 2023

F727e Fornazieri Filho, Eduardo

Estudo sobre o comportamento de zeros de polinômios que
satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos / Eduardo
Fornazieri Filho. -- Presidente Prudente, 2023
104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Vanessa Avansini Botta

1. Zeros de polinômios. 2. Autovalores. 3. Relação de recorrência
de quatro termos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudo sobre o comportamento de zeros de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos

AUTOR: EDUARDO FORNAZIERI FILHO

ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. DANIEL OLIVEIRA VERONESE (Participação Virtual)
Departamento de Matemática Aplicada / Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 03 de março de 2023

Aos meus pais, Bianca e Washington
ao meu amigo, David
Dedico

Agradecimentos

A Deus, por me fortalecer durante momentos difíceis.

Aos meus pais, por todo o apoio proporcionado e incentivo.

À Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani, pela paciência, compreensão e pela amizade construída nessa jornada.

Aos meus amigos de pós-graduação que compartilharam suas experiências e me auxiliaram em algum momento.

“Nunca deixe que alguém lhe diga que não pode fazer algo.

Se você tem um sonho, tem que protegê-lo.

As pessoas que não podem fazer por si mesmas, dirão que você não consegue.

Se quer alguma coisa, vá e lute por ela.”

À Procura da Felicidade

Resumo

No presente trabalho é apresentado um estudo sobre o comportamento dos zeros de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos sob algumas restrições. Para isso, estudaremos as funções polinomiais com o foco nos conceitos preliminares, principais teoremas sobre a localização de seus zeros e algumas classes especiais desse tipo de função. Em relação aos zeros, os abordaremos sob a luz da teoria matricial, representando-os como autovalores de uma matriz específica. Além disso, estabelecemos regiões no plano complexo e intervalos na reta real que os contém. Por fim, apresentamos algumas propriedades satisfeitas por um caso especial da relação de recorrência de quatro termos que estamos investigando.

Palavras-Chave: *Zeros de polinômios. Autovalores. Relação de recorrência de quatro termos.*

Abstract

In the present work, a study is presented on the behavior of zeros of polynomials that satisfy a four-term recurrence relation under some restrictions. For this, we will study polynomial functions with a focus on preliminary concepts, main theorems about the location of their zeros, and some special classes of this type of function. Regarding the zeros, we will approach them in the light of matrix theory, representing them as eigenvalues of a specific matrix. Furthermore, we establish regions in the complex plane and intervals in the real line that contain them. Finally, we present some properties satisfied by a special case of the four-term recurrence relation that we are investigating.

Keywords: *Zeros of polynomials. Eigenvalues. Four-term recurrence relation.*

Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica dos zeros de $P(z)$ e $P'(z)$	36
2.2	Representação geométrica dos zeros de $P(z)$ na região $ z \leq r$	37
3.1	Zeros de $Q_5(z)$ dentro dos círculos de Geršgorin.	64
3.2	Zeros de $Q_5(z)$ - Zoom in.	65
3.3	Zeros de $R_7^{(1)}(z)$ dentro dos círculos de Geršgorin.	66
3.4	Zeros de $R_k^{(1)}(z)$, $1 \leq k \leq 7$, dentro da região $W(-1, 0, 1.618)$	67
3.5	Conjunto de Geršgorin: círculo sem autovalor.	68
4.1	Zeros de $P_5(z)$ para $-2, 7 \leq z \leq 7, 2$	78
4.2	Zeros de $P_7(z)$	83
4.3	Representação dos conjuntos K_7 e K_{max} referentes a matriz M_7	84
4.4	$R_2(M_7) = K_7 \cup K_{max}$	84
4.5	Comparação entre os conjuntos de $R_2(M_7)$ e $G(M_7)$	85
4.6	$\bar{R}_2(M_5) \subset \bar{R}_2(M_6) \subset \bar{R}_2(M_7)$	96
4.7	Representação do entrelaçamento dos zeros de $S_5(z)$, $S_6(z)$ e $S_7(z)$. . .	96

Conteúdo

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	11
1 Introdução	15
2 Polinômios com coeficientes complexos	19
2.1 Resultados Preliminares sobre Polinômios	19
2.1.1 Definições básicas	19
2.1.2 Teoremas Fundamentais	21
2.1.3 Relação dos Coeficientes do Polinômio e Seus Zeros	25
2.2 Resultantes e Discriminantes	27
2.2.1 Discriminante de polinômios do segundo grau	30
2.2.2 Discriminante de polinômios do terceiro grau	31
2.3 Localização dos zeros de polinômios	33
3 Algumas classes especiais de polinômios	45
3.1 Polinômios Ortogonais	45
3.1.1 Definição e Propriedades	46
3.1.2 Relações de Recorrência de Três Termos	49
3.1.3 Zeros de polinômios ortogonais	52
3.1.4 Representação dos zeros de polinômios ortogonais por autovalores	55
3.2 Teorema de Geršgorin	57
3.3 Polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos . . .	59

3.3.1	Região especial para os zeros de $Q_m(z)$	62
4	Relações de recorrência de quatro termos	69
4.1	Representação dos zeros de polinômios por autovalores	70
4.2	Polinômios pares e ímpares	85
5	Considerações finais	99
6	Bibliografia	101
A	Apêndice	105

Introdução

O estudo de sequências de polinômios gerados por uma relação de recorrência de quatro termos (RRQT) possui pouco material na literatura, pois não foi tão explorado quanto as sequências de polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos (RRTT). Deste modo, focamos o nosso estudo nos resultados mais recentes sobre esse assunto como em [1], [20] e [21]. Nestes casos, os autores apresentam resultados relacionados à determinação de condições para que todos os zeros de polinômios sejam reais. Já em [8], é possível encontrar resultados sobre sequências de polinômios gerados por RRQT, que satisfazem uma determinada relação de ortogonalidade diferente dos conhecidos polinômios ortogonais na reta real.

Consideremos a sequência de polinômios $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ gerada pela relação de recorrência de quatro termos

$$P_n(z) + A(z)P_{n-1}(z) + B(z)P_{n-2}(z) + C(z)P_{n-3}(z) = 0, \quad (1.1)$$

em que $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ são polinômios de grau menor ou igual a um na variável z , $P_0(z) = 1$ e $P_{-n}(z) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em [1], o leitor é apresentado ao caso particular em que $A(z) = az$, $B(z) = b$, e $C(z) = cz$, com $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Neste artigo, o autor exhibe condições necessárias e suficientes para que os zeros de $P_n(z)$ sejam reais. Além disso, define um intervalo I simétrico na reta em relação à origem tal que o conjunto dos zeros de $P_n(z)$ é denso em I .

Em [18], os autores investigam um caso particular de uma sequência de polinômios gerada por uma relação de recorrência de três termos dada por

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots,$$

com $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z + \beta_1$ e $\alpha_{m+1} \neq 0$, $\beta_m \neq 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$, tendo como objetivo o de encontrar limitantes para os zeros de $Q_m(z)$. Tais zeros possuem representações por autovalores de uma matriz de Hessenberg.

Sob a perspectiva dos resultados apresentados em [1] e [18], desenvolvemos este trabalho com o objetivo de investigar a RRQT dada por

$$P_n(z) = (z + a_0)P_{n-1}(z) - (b_1z + b_0)P_{n-2}(z) - (c_1z + c_0)P_{n-3}(z),$$

com $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ e $c_0^2 + c_1^2 \neq 0$, $P_0(z) = 1$ e $P_{-n}(z) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que os zeros dos polinômios da RRQT anteriormente citada também serão representados por autovalores de uma determinada matriz. Com isso, seremos capazes de definir regiões do plano complexo que os contém. Um resultado semelhante aquele apresentado em [1], para a localização dos zeros na reta será desenvolvido aqui para o caso especial em que $a_0 = b_1 = c_0 = 0$ e $b_0, c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Isto é, quando a RRQT é da forma

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - b_0S_{n-2}(z) - c_1zS_{n-3}(z). \quad (1.2)$$

Ao avaliar a paridade de n , pode-se concluir a paridade do polinômio gerado. Além disso, quando b_0 e c_1 são reais positivos, é possível concluir dois resultados: os zeros de $S_n(z)$ satisfazem uma função crescente de b_0 e que, entre dois zeros de $S_n(z)$ existem um zero de $S_{n-1}(z)$ e outro de $S_{n-2}(z)$. Além disso, outras propriedades serão apresentadas.

Para alcançar os objetivos propostos, é necessário uma revisão bibliográfica acerca de assuntos importantes que fundamentam muitas demonstrações e abordam o comportamento dos zeros de polinômios e suas representações.

No Capítulo 2, relembramos uma série de resultados preliminares sobre polinômios, como sua definição, teoremas fundamentais, a relação dos coeficientes com seus zeros e sua localização. O objetivo de relembrar esses conceitos é de facilitar a

compreensão do leitor sobre tudo aquilo que está relacionado aos zeros de um polinômio, assunto principal deste trabalho.

No Capítulo 3, abordamos os polinômios ortogonais junto com suas principais propriedades e resultados sobre seus zeros. A partir deste momento, somos capazes de abordar as RRTT com profundidade e usá-las como motivação para o objetivo principal do nosso trabalho.

No Capítulo 4, abordamos uma representação por autovalores dos zeros dos polinômios que satisfazem um caso particular da relação de recorrência de quatro termos dada em (1.1) e enunciamos mais propriedades para o caso dado em (1.2). Por fim, realizamos algumas considerações finais no Capítulo 5.

Polinômios com coeficientes complexos

Este capítulo reúne os principais resultados sobre a teoria básica dos polinômios com coeficientes complexos e o comportamento de seus zeros. Especificamente, abordaremos as definições e propriedades deste polinômios, como zeros reais, complexos, zeros múltiplos, discriminantes, entre outros. Além disso, recordaremos os resultados clássicos para a localização dos zeros de polinômios na reta real e no plano complexo.

2.1 Resultados Preliminares sobre Polinômios

Nesta seção, tratamos sobre ideias elementares a respeito de polinômios em uma variável complexa e alguns teoremas clássicos. O objetivo desta seção é recordar resultados simples, mas muito importantes para o estudo de polinômios e que são inicialmente apresentados no ensino médio como verdades absolutas sem suas demonstrações.

2.1.1 Definições básicas

A definição sobre polinômios foi retirada da obra [15]. Onde o autor considera $\mathbb{F}$ um anel comutativo. Assim, o anel de polinômios em z sobre o corpo $\mathbb{C}$, anel comutativo por definição, é dado pelo conjunto cujos elementos são da forma:

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n,$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, para todo $i = 0, \dots, n$.

Observe que $P(z)$ é um somatório de produtos entre elementos de $\mathbb{C}$, denominados coeficientes de $P(z)$ e monômios de z . O grau do polinômio será definido pelo monômio de maior potência, por exemplo, o polinômio

$$S(z) = z^2 + 2z + 1,$$

possui grau dois. Com isso, se $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ e $Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m$ são dois polinômios, então as operações de adição e multiplicação são definidas por

$$(P + Q)(z) = P(z) + Q(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_rz^r,$$

com $c_i = a_i + b_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, r$ e

$$(PQ)(z) = P(z)Q(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_sz^s,$$

com $c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_1b_{i-1} + a_0b_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, s$. Note que se $n > m$, então $r = n$. Se $n < m$, então $r = m$. A igualdade entre m e n implica em $r = m = n$. Finalmente, qualquer que seja a relação de ordem entre m e n , teremos $s = m + n$.

Dentre as peculiaridades dos polinômios, lançaremos nossos esforços para encontrar seus zeros, todos os números complexos cuja imagem pelo polinômio é nula, isto é, todas as soluções da equação

$$P(z) = 0. \tag{2.1}$$

Na literatura é comum encontrar métodos explícitos, comumente conhecidos por radicais, para determinar a solução da equação (2.1) quando $n \leq 4$ é o grau de $P(z)$. Contudo, se $n = 5$, não existem soluções por radicais no caso geral (ver [3]). E ainda, para polinômios com grau superior, a tarefa de explicitar o conjunto solução em função dos coeficientes de $P(z)$ é impossível. Os elementos que compõe o conjunto solução da equação (2.1) são chamados de raízes da equação.

2.1.2 Teoremas Fundamentais

A seguir listaremos alguns teoremas fundamentais acerca de polinômios. Abaixo, relembremos o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), que nos garante a existência de soluções para a equação (2.1), sua prova foi retirada de [13].

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio não constante $P(z)$ de grau n com coeficientes complexos, tem exatamente n zeros complexos.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) \neq 0$. Defina $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$G(z) := \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}.$$

Note que se o mínimo de $|P|$ ocorre em z_0 , então o mínimo de $|G|$ ocorre em $z = 0$.

Mais precisamente,

$$G(z) = b_n z^n + \cdots + b_k z^k + 1,$$

com $n \geq 1$ e $b_k \neq 0$, para algum $1 \leq k \leq n$. Seja $b_k = |b_k|e^{i\theta}$ e $z = r|b_k|^{-1/k}e^{i(\pi-\theta)/k}$, com $r > 0$. Para z desta forma, temos

$$G(z) = 1 - r^k + r^{k+1}H(r),$$

em que H é um polinômio. Então, para $r < 1$, então temos

$$|G(z)| \leq 1 - r^k + r^{k+1}|H(r)|.$$

Para r positivo e suficientemente pequeno, segue que $r|H(r)| < 1$, devido à continuidade da função $rH(r)$. Então $|G(z)| \leq 1 - r^k(1 - r|H(r)|) < 1$, para algum z com $r \in (0, r_0)$ e $r_0 > 0$ e suficientemente pequeno. Mas o mínimo de $|G|$ não pode ser igual a 1. Logo $P(z_0) = 0$.

Como z_0 é zero de $P(z)$, então $P(z) = (z - z_0)Q_1(z) + r_1$, com $Q_1(z)$ polinômio de grau $n - 1$ e $r_1 = 0$. Em $Q_1(z)$, aplicamos o mesmo raciocínio feito anteriormente e teremos que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $Q_1(z_1) = 0$. Então $Q_1(z) = (z - z_1)Q_2(z) + r_2$ com

$Q_2(z)$ polinômio de grau $n - 2$ e $r_2 = 0$. Prosseguindo indutivamente, temos n zeros de $P(z)$. $\square$

De acordo com [7], as primeiras buscas por soluções de equações polinomiais consideravam apenas as raízes positivas, contudo a publicação do método geral para soluções de equações cúbicas fizeram dos números complexos ferramentas formais no estudo e na busca por essas soluções. Logo, o Teorema Fundamental da Álgebra foi enunciado em 1608 por Peter Roth. Um fato curioso é que Albert Girard já realizava esboços das ideias do teorema, mas nunca o enunciou de fato.

Teorema 2.1.2 (Teorema da Decomposição). *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes complexos. O polinômio $P(z)$ pode ser decomposto de maneira única em função de seus zeros. Se $z_1, \dots, z_n$ são zeros de $P(z)$, então*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Demonstração. Utilizando-se do método de indução sobre o grau n de $P(z)$, temos que para $n = 1$, $z_1 = -a_0/a_1$ é zero do polinômio grau 1.

Suponha a validade do teorema para $n - 1$. Temos que se z_1 é zero de $P(z)$, polinômio de grau n , então $(z - z_1)$ divide $P(z)$, ou seja, $P(z) = (z - z_1)Q(z)$. Da hipótese de indução, segue que $Q(z) = a_n(z - z_2)(z - z_3) \cdots (z - z_n)$. Portanto,

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i).$$

$\square$

Definição 2.1.1. *Se $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinômio de grau n em $\mathbb{C}$ com p zeros, $z_1, \dots, z_p$, então*

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^p (z - z_i)^{m_i} \text{ e } n = \sum_{i=1}^p m_i.$$

Definimos a multiplicidade do zero z_i como o valor do expoente m_i .

Teorema 2.1.3 (Teorema da Raiz Complexa). *Se os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$, do polinômio*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

são todos reais, então todas as raízes da equação $P(z) = 0$ são reais ou ocorrem em pares de complexos conjugados.

Demonstração. Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n . Temos

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \overline{z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \overline{z}^i = P(\overline{z}).$$

Portanto, se $P(z) = 0$, então $\overline{P(z)} = \overline{0}$, isto é, $P(\overline{z}) = 0$. $\square$

Do Teorema Fundamental da Álgebra, podemos concluir que toda equação da forma (2.1), possui conjunto solução no corpo dos números complexos. Além disso, o número de soluções é dado pelo grau do polinômio e estas poderão ser distintas ou não.

O Teorema da Raiz Complexa implica em um corolário que relaciona o grau do polinômio e a existência de zeros reais. Observe que se $P(z)$ possui grau três e coeficientes reais, então ele possui três zeros. Estes zeros podem ser todos reais ou não. Se algum zero é complexo, segue que o seu conjugado também o é. Logo, o último zero só pode ser real. Em resumo, o corolário afirma que se um polinômio real é de grau ímpar, então ele possui pelo menos um zero real.

Definimos o número de mudanças de sinais do polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

como o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Isto é, se dois elementos consecutivos da sequência possuem sinais opostos, então há uma mudança de sinal. Logo, para $n + 1$ elementos de uma sequência, existem no máximo n mudanças de sinais. Por exemplo, o polinômio $P(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 + 4$ possui duas mudanças de sinais, pois sua sequência de coeficientes dada por $\{4, -1, -2, 1\}$ alterna os sinais entre o primeiro e o segundo elemento e em seguida, outra mudança entre o penúltimo e último elemento.

A formulação do teorema a seguir foi feita por René Descartes, um filósofo, físico e matemático francês que viveu entre 1596 e 1650 e serviu de inspiração a outros grandes nomes como Immanuel Kant e Isaac Newton. Dentre suas obras, citamos *La Géométrie* que é composta por três livros, em que o último destes traz uma interpretação

geométrica sobre raízes de equações polinomiais e problemas do terceiro e quarto grau. Nesse livro, é possível verificar a primeira descrição da Regra de Sinais de Descartes.

Teorema 2.1.4 (Regra de sinais de Descartes). *Seja K o número de zeros positivos do polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$, $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e C o número de mudanças de sinais da sequência de seus coeficientes, então $C - K \geq p$ sendo que p é um par não negativo.*

Demonstração: Sejam $z_1, z_2, \dots, z_k$ os zeros de $P(z)$. Segue do Teorema da Decomposição que $P(z) = Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_k - z)$. Como o número de mudanças de sinais da sequência dos coeficientes do polinômio $Q(z)$, denotado por $C(Q(z))$ é não negativo, ou seja, $C(Q(z)) \geq 0$, segue indutivamente que

$$\begin{aligned} C(Q(z)(z_1 - z)) &\geq C(Q(z)) + 1 \\ C(Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z)) &\geq C(Q(z)(z_1 - z)) + 1 \geq C(Q(z)) + 2 \\ &\vdots \\ C(Q(z)(z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_k - z)) &\geq C(Q(z)) + k. \end{aligned}$$

Para mostrarmos que K é par, considere a_p e a_u o primeiro e o último coeficiente não nulo de $P(z)$, respectivamente. Sejam a e b números reais tais que

$$0 < a < z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_k < b.$$

Assim,

$$\text{senal}(P(a)) = \text{senal}(a_p) \neq 0 \text{ e } \text{senal}(P(b)) = \text{senal}(a_u) \neq 0.$$

Segue que K é par quando $\text{senal}(P(a)) = \text{senal}(P(b))$ e que C é par quando $\text{senal}(a_p) = \text{senal}(a_u)$. Logo a diferença $C - K$ também o é. Quando $\text{senal}(P(a)) \neq \text{senal}(P(b))$, então K e C são ímpares. Logo a diferença também o é, como queríamos demonstrar. $\square$

Para mais detalhes sobre a Regra de Sinais de Descartes, sugerimos a leitura de [17].

2.1.3 Relação dos Coeficientes do Polinômio e Seus Zeros

Segundo [2] e [16], François Viète e Albert Girard foram matemáticos franceses que estabeleceram as mais famosas relações entre os coeficientes de polinômios e seus zeros. Viète teve muitas contribuições na Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria. Em Álgebra, Viète foi o pioneiro a realizar uma distinção entre parâmetro e incógnita. Por outro lado, Girard já utilizava algumas propriedades do triângulo de Pascal, que ainda não tinha esse nome, para estabelecer relações entre somas de produtos de zeros de polinômios. Em um de seus trabalhos sobre trigonometria, foi o primeiro a utilizar abreviações para funções trigonométricas como conhecemos hoje: sin (seno), cos (cosseno) e tan (tangente). No Brasil, as fórmulas de Viète ou relações de Girard são apresentadas no currículo da educação básica para os casos em que o grau do polinômio é dois ou três. Vejamos tais fórmulas para equações do segundo e terceiro grau.

Seja $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos que $P(z)$ possui dois zeros. Assim, sendo eles z_1 e z_2 , segue do Teorema da Decomposição que

$$\begin{aligned}P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0 &= a_2(z - z_1)(z - z_2) \\&= a_2(z^2 - zz_2 - zz_1 + z_1z_2) \\&= a_2(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2) \\&= a_2z^2 - a_2(z_1 + z_2)z + a_2z_1z_2.\end{aligned}$$

Comparando-se a última igualdade com a primeira, vemos que

$$-a_2(z_1 + z_2) = a_1 \text{ e } a_2z_1z_2 = a_0,$$

logo $z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ e $z_1z_2 = \frac{a_0}{a_2}$.

Para polinômios de grau três, podemos prosseguir como anteriormente. Seja $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ com z_1, z_2 e z_3 zeros de $P(z)$. Então,

$$\begin{aligned} P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 &= z^3 + \frac{a_2}{a_3}z^2 + \frac{a_1}{a_3}z + \frac{a_0}{a_3} \\ &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z \\ &\quad - z_1z_2z_3. \end{aligned}$$

Novamente, concluímos que

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{a_1}{a_3} \text{ e } z_1z_2z_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

A expansão da decomposição do polinômio é trabalhosa, entretanto ela segue o padrão binomial definido pelo triângulo de Pascal. A única potência cúbica é obtida pelo produto final dos fatores. Haverão três potências quadráticas acompanhadas de um zero ao combinar os três fatores dois a dois. O mesmo pode-se dizer para o monômio de grau 1, porém este é acompanhado pelo produto de dois zeros em uma combinação de três elementos por duas escolhas. Por fim, restará o produto dos zeros.

Estas relações se estendem a qualquer grau que $P(z)$ possa ter. Assim, podemos generalizar estes resultados para quando $P(z)$ é de grau n . Isto é, se

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad a_n \neq 0, \tag{2.2}$$

então existem $z_1, \dots, z_n$ que são zeros de $P(z)$ tais que

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Realizando o produto dos termos acima, segue que

$$\begin{aligned}
 P(z) &= a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)}_{\sigma_1} z^{n-1} \\
 &+ a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n)}_{\sigma_2} z^{n-2} \\
 &- \cdots + (-1)^n a_n \underbrace{(z_1 z_2 \cdots z_n)}_{\sigma_n}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Comparando (2.2) e (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
 \sigma_2 &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
 &\vdots \\
 \sigma_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
 \end{aligned}$$

As relações dos coeficientes com seus zeros são de suma importância, haja vista que os métodos explícitos para obtenção de raízes de equações de grau três e quatro são profundamente trabalhosos e envolvem muitos cálculos, porém quando multiplicadas e somadas, as soluções que são frutos destas fórmulas, são reduzidas a uma simples divisão de coeficientes do polinômio. Além disso, podemos recorrer aos métodos de sistemas não lineares que envolvem estas relações utilizando métodos explícitos ou numéricos, como o método de Newton.

2.2 Resultantes e Discriminantes

A seção atual é composta de duas definições: resultantes e discriminantes de polinômios. Estas definições possuem grande relevância no estudo sobre o comportamento de zeros de polinômios. Veremos que os resultantes relacionam polinômios que compartilham zeros. Em respeito ao discriminante, estes estabelecem condições para que os zeros sejam reais, distintos, complexos ou múltiplos.

Sejam

$$P(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^i \text{ e } Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i \tag{2.4}$$

polinômios complexos e $z_1, z_2, \dots, z_m$, zeros da equação $P(z) = 0$. Definimos o resultante entre P e Q como o número complexo

$$R(P, Q) := a_m^n Q(z_1)Q(z_2) \cdots Q(z_m). \quad (2.5)$$

A expressão em (2.5), pode ser reescrita em termos de um determinante de uma matriz de ordem $n + m$, como

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Segue de imediato que, se $R(P, Q) = 0$, então $Q(z_k) = 0$ para algum $k = 1, \dots, m$. Isto é, os polinômios P e Q possuem pelo menos um zero em comum.

O discriminante de $P(z)$ é o produto dos quadrados de todas as possíveis diferenças entre os zeros de $P(z)$ pelo coeficiente da maior potência com expoente de grau na forma $2m - 2$.

Definição 2.2.1. *Seja $P(z)$ um polinômio como em (2.4) e ainda, $z_1, z_2, \dots, z_m$, zeros deste polinômio. Definimos o discriminante de $P(z)$ por*

$$\Delta = \Delta(P) = a_m^{2m-2} (z_1 - z_2)^2 \cdots (z_1 - z_m)^2 (z_2 - z_3)^2 \cdots (z_{m-1} - z_m)^2.$$

O discriminante também pode ser representado em termos do resultante entre o polinômio e sua derivada. Considere o polinômio $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Derivando $P(z)$ e aplicando sua função derivada em $z_1, \dots, z_m$, segue que

$$\begin{aligned} P'(z_1) &= a_m(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \cdots (z_1 - z_m) \\ P'(z_2) &= a_m(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \cdots (z_2 - z_m) \\ &\vdots \\ P'(z_m) &= a_m(z_m - z_1)(z_m - z_2) \cdots (z_m - z_{m-1}). \end{aligned}$$

Realizando o produto de todas as equações acima e ainda, multiplicando ambos os lados por a_m^{m-1} , obtemos

$$\begin{aligned} a_m^{m-1} P'(z_1) \cdots P'(z_m) &= a_m^{2m-1} (-1)^{m(m-1)/2} (z_1 - z_2)^2 \cdots (z_{m-1} - z_m)^2 \\ &= (-1)^{m(m-1)/2} a_m \Delta. \end{aligned}$$

Isolando Δ , temos a expressão para o discriminante:

$$\Delta = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^{-1} R(P, P').$$

Observe que se $\Delta = 0$, então $R(P, P') = 0$. Logo, conclui-se que o polinômio $P(z)$ e sua derivada possuem zeros em comum e ainda, algum zero do polinômio possui multiplicidade maior que um.

Para justificar a multiplicidade de um zero de $P(z)$ quando $\Delta = 0$, suponha que $P(z)$ é um polinômio de grau m e somente um de seus zeros possui multiplicidade k , $1 < k \leq m$. Sem perda de generalidade, seja z_1 tal zero. Assim,

$$P(z) = (z - z_1)^k Q(z) \text{ com } Q(z) = a_m \prod_{i=2}^{m-k} (z - z_i).$$

Derivando $P(z)$, temos

$$\begin{aligned} P'(z) &= k(z - z_1)^{k-1} Q(z) + (z - z_1)^k Q'(z) \\ &= (z - z_1)^{k-1} [kQ(z) + (z - z_1)Q'(z)]. \end{aligned}$$

Observe que

$$P'(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)^{k-1} = 0 \text{ ou } [Q(z) + (z - z_1)Q'(z)] = 0.$$

Portanto, como $z = z_1$ implica em $P'(z) = 0$, segue que z_1 também é zero de $P'(z)$. Neste caso, z_1 é zero até a derivada de ordem $k - 1$ do polinômio. Em geral, um zero de um polinômio $P(z)$ possui multiplicidade k quando ele também é zero das funções derivadas deste polinômio até a ordem $k - 1$.

2.2.1 Discriminante de polinômios do segundo grau

Nesta subseção, determinaremos uma fórmula geral para o discriminante de qualquer polinômio de grau 2 com coeficientes reais e ainda, analisaremos os casos em que o determinante é negativo, nulo e positivo.

Considere $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, com $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e z_1, z_2 tais que $P(z_1) = P(z_2) = 0$. Da Definição 2.2.1, temos

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= a_2^2(z_1 - z_2)^2 = a_2^2 \left(z_1^2 - 2 \underbrace{z_1 z_2}_{\sigma_2} + z_2^2 \right) = a_2^2(z_1^2 + z_2^2) - 2a_2 a_0 \\ &= a_2^2 \left[\underbrace{(z_1 + z_2)^2}_{\sigma_1} - 2 \underbrace{z_1 z_2}_{\sigma_2} \right] - 2a_2 a_0 = a_2^2 \left[-\frac{a_1^2}{a_2^2} - 2\frac{a_0}{a_2} \right] - 2a_2 a_0 \\ &= a_1^2 - 2a_2 a_0 - 2a_2 a_0 \\ &= a_1^2 - 4a_2 a_0. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante de um polinômio do segundo grau com coeficientes reais é dado em termos dos seus coeficientes por

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0. \quad (2.6)$$

A análise dos casos indicados no início desta subseção é feita ao demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1. *Considere o polinômio quadrático $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, com $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, então:*

A - $\Delta < 0$ se, e somente se, os zeros de $P(z)$ são complexos conjugados.

B - $\Delta = 0$ se, e somente se, $P(z)$ possui zeros múltiplos.

C - $\Delta > 0$ se, e somente se, $P(z)$ possui dois zeros reais e distintos.

Demonstração. Sejam, z_1 e z_2 os zeros de $P(z)$.

Para o item A, se $\Delta = a_2^2(z_1 - z_2)^2 < 0$, então $(z_1 - z_2)^2 = (\lambda i)^2 \in \mathbb{C}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, pois $a_2^2 > 0$. Logo, $z_1 - z_2 = \lambda i$ e por consequência $z_1 = z_2 + \lambda i$ e $z_2 = z_1 - \lambda i$. Portanto, z_1 e z_2 são complexos conjugados. Por outro lado, se z_1, z_2 são zeros complexos conjugados, então $z_1 = a + bi$ e $z_2 = a - bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Com isso, $\Delta = a_2^2(z_1 - z_2)^2 = a_2^2(a + bi - a + bi)^2 = a_2^2(2bi)^2 = -4a_2^2b^2 < 0$.

Para o item B, se $\Delta = 0$, então $z_1 - z_2 = 0$, pois $a_2^2 > 0$. Logo $z_1 = z_2$. A recíproca é trivial.

Em C, se $\Delta > 0$, então $a_2^2(z_1 - z_2)^2 > 0$. Sabemos que o produto de dois fatores quadrados resulta em um número positivo desde que ambos sejam reais não nulos. Contudo, haja vista que $a_2 \in \mathbb{R}^*$, deve-se ter $z_1 - z_2 \neq 0$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

2.2.2 Discriminante de polinômios do terceiro grau

Nesta subseção, determinaremos uma fórmula geral para o discriminante de um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais. Além disso, analisaremos os casos em que o determinante é negativo, nulo e positivo.

Para isso, considere

$$P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad (2.7)$$

com $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e z_1, z_2, z_3 zeros de $P(z)$. Por definição, o discriminante é dado por

$$a_3^4(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2.$$

Para escrevê-lo em função dos coeficientes do polinômio, podemos considerar em (2.7), $a_3 = 1$, sem perda de generalidade. Assim, façamos a substituição $z = y - a_2/3$ e $P(z) = 0$ que nos retorna

$$y^3 + py + q = 0,$$

com $p = a_1 - a_2^2/3$ e $q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}$. Seguindo o método de Viète para encontrar as raízes da equação em y , proposto em 1951, façamos a substituição $y = t - \frac{p}{3t}$, obtendo

$$t^3 - \frac{p^3}{27t^3} + q = 0$$

ou, equivalente,

$$t^6 + qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

que é uma equação quadrática em t^3 . Isto é,

$$(t^3)^2 + qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

cujos discriminante é dado como em (2.6)

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}.$$

Analisaremos os casos em que o discriminante é negativo, nulo ou positivo ao demonstrar o teorema a seguir:

Teorema 2.2.2. *Seja $P(z)$ um polinômio de grau três.*

A - $\Delta < 0$ se, e somente se, $P(z)$ possui apenas um zero real.

B - $\Delta = 0$ se, e somente se, $P(z)$ tem zeros múltiplos.

C - $\Delta > 0$ se, e somente se, todos os zeros de $P(z)$ são reais e distintos.

Demonstração. Em A, se $\Delta < 0$, então $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ e somos tentados a pensar que um número ímpar de fatores são negativos, com isso temos dois casos:

1º caso) $(z_1 - z_2)^2 < 0$, $(z_1 - z_3)^2 < 0$ e $(z_2 - z_3)^2 < 0$. Então, $(z_1 - z_2) = \lambda_{12}i$, $(z_1 - z_3) = \lambda_{13}i$ e $(z_2 - z_3) = \lambda_{23}i$. Contudo, isso implicaria em $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ com $z_1 = \bar{z}_2$, $z_1 = \bar{z}_3$ e $z_2 = \bar{z}_3$, logo teríamos duas contradições: $z_1 = z_2$ e a ocorrência de um zero complexo sem o seu conjugado. Assim, somente o caso dois é válido.

2º caso) Sem perda de generalidade, $(z_1 - z_2)^2 < 0$ e $(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2 > 0$. Logo, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_1 = \bar{z}_2$. Temos que $(z_1 - z_3), (z_2 - z_3) \in \mathbb{C}$ e o produto $(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \in \mathbb{R}$.

Suponha que $z_1 = a + bi$ e $z_3 = c + di$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(z_1 - z_3) = (a - c) + (b - d)i;$$

$$(z_2 - z_3) = (a - c) - (b + d)i.$$

O que implica em

$$\begin{aligned} (z_1 - z_3)(z_2 - z_3) &= (a - c)^2 + [(b - d) - (b + d)](a - c)i + (b - d)(b + d) \\ &= (a - c)^2 - 2d(a - c)i + (b - d)(b + d), \end{aligned}$$

que só é real quando $-2d(a - c)i = 0$, ou seja, $d = 0$ ou $a = c$. Porém, se $a = c$, teríamos a mesma contradição do caso 1. Portanto, segue que $d = 0$. Isto é, z_3 é real.

Reciprocamente, se $z_3 \in \mathbb{R}$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1 = \bar{z}_2$, $(z_1 - z_3) = \overline{z_2 - z_3}$, $(z_1 - z_2)^2 < 0$ e $[(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)]^2 > 0$, logo $\Delta < 0$.

Em B, $\Delta = 0$ se, e somente se, algum fator é nulo, ou seja, sem perda de generalidade, $z_1 = z_2$ se, e somente, z_1 tem multiplicidade maior que 1.

Em C, $\Delta > 0$ se $(z_1 - z_2)^2 > 0$, $(z_1 - z_3)^2 > 0$ e $(z_2 - z_3)^2 > 0$, que implica em $z_1 \neq z_2 \neq z_3$. Para mostrar que são reais, basta supor que existe um zero complexo, logo também existe o seu par conjugado. Assim, retornaríamos à recíproca do item A. Se $(z_1 - z_2)^2 > 0$, $(z_1 - z_3)^2 < 0$ e $(z_2 - z_3)^2 < 0$, temos $z_1 \neq z_2 \neq z_3$. Contudo, o fato de dois fatores quadráticos serem negativos implica em $z_1 = \bar{z}_3$ e $z_2 = \bar{z}_3$, logo $z_1 = z_2$, que é um absurdo. A recíproca é trivial. $\square$

2.3 Localização dos zeros de polinômios

Aqui apresentamos resultados que apontam regiões do plano complexo que contém algum zero ou todos zeros do polinômio complexo.

Teorema 2.3.1. *Seja $P(z)$ um polinômio no intervalo (a, b) da reta. Se $P(a)P(b) \leq 0$, então há pelo menos um zero de $P(z)$ neste intervalo.*

Demonstração. Se $P(a)P(b) < 0$, podemos considerar sem perda de generalidade $P(a) < 0$ e $P(b) > 0$. Seja $A = \{z \in [a, b] : P(z) < 0\}$, tem-se $A \neq \emptyset$. Considere $\alpha \in A$, logo $\alpha < b$. Tomando-se $\epsilon = -P(\alpha)$, a continuidade de $P(z)$ garante a existência de

$\delta > 0$ tal que $[\alpha, \alpha + \delta) \subset [a, b]$ de modo que $z \in [\alpha, \alpha + \delta) \Rightarrow P(z) < 0$ e com isso, $[\alpha, \alpha + \delta) \subset A$. Supondo $c = \sup A$, como c é limite de uma sequência de pontos z_n em A , temos $P(c) = \lim P(z_n) \leq 0$. Como A não possui maior elemento, temos $P(c) = 0$. Se $P(a)P(b) = 0$, o resultado é trivial. $\square$

O Teorema 2.3.1, cuja demonstração foi retirada de [14], um clássico entre os teoremas utilizados na teoria do Cálculo Numérico, nos garante a existência de um intervalo na reta real que contém os zeros reais com multiplicidade ímpar. Para exemplificar sua tese, acompanhe o exemplo a seguir.

Considere

$$P(z) = z^2 - z - 2 \text{ e o intervalo } (-2, 0).$$

Verifica-se que $P(-2) = 4$ e $P(0) = -2$. Portanto, $P(-2)P(0) < 0$ e com isso, concluímos que há pelo menos um zero neste intervalo. Neste caso, $z_1 = -1$.

Definição 2.3.1. *Seja M um conjunto de pontos no plano bidimensional. A menor extensão de M a um conjunto fechado e convexo é dito como o menor polígono convexo que contém M .*

Da definição acima, se M é um conjunto do plano, então o menor polígono convexo que contém M é o conjunto H dado pelo fecho convexo de M (ver [11]).

Teorema 2.3.2 (Teorema de Gauss-Lucas). *Todos os pontos críticos de um polinômio não constante $P(z)$ estão contidos no menor polígono convexo H que contém todos os zeros de $P(z)$. Se os zeros de $P(z)$ são colineares, então os pontos críticos pertencem ao segmento de reta que contém os zeros do polinômio.*

Demonstração. Seja $P(z)$ um polinômio não constante de grau n com zeros $z_1, z_2, \dots, z_p$. Assim,

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_p)^{m_p}, \quad n = \sum_{i=1}^p m_i, \quad \forall m_i > 0.$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) \neq 0$, defina a função

$$F(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d[\ln(P(z))]}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=1}^p m_i \ln(z - z_i) \right) = \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{z - z_i}.$$

Seja $z_0 \in \mathbb{C} - H$ tal que $P'(z_0) = 0$, logo $P(z_0) \neq 0$. Deste modo,

$$0 = \frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{i=0}^p \frac{m_i}{z_0 - z_i}.$$

Multiplicando cada parcela do somatório pela fração cujos numeradores e denominadores são o conjugado dos denominadores, respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \frac{m_i(\overline{z_0} - \overline{z_i})}{|z_0 - z_i|^2} &= 0 \\ \sum_{i=0}^p \frac{m_i \overline{z_0}}{|z_0 - z_i|^2} - \sum_{i=0}^p \frac{m_i \overline{z_i}}{|z_0 - z_i|^2} &= 0 \\ \overline{z_0} \sum_{i=0}^p \frac{m_i}{|z_0 - z_i|^2} &= \sum_{i=0}^p \frac{m_i \overline{z_i}}{|z_0 - z_i|^2}. \end{aligned}$$

Considerando $\lambda = \sum_{i=0}^p \frac{m_i}{|z_0 - z_i|^2}$ e $\lambda_i = \frac{m_i}{|z_0 - z_i|^2}$, então

$$\overline{z_0} \lambda = \sum_{i=0}^p \lambda_i \overline{z_i} \Leftrightarrow z_0 = \sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{\lambda} z_i = \sum_{i=0}^p \beta_i z_i, \text{ com } \beta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

Note que $\lambda = \sum_{i=0}^p \lambda_i$, que implica em $1 = \sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{\lambda} = \sum_{i=0}^p \beta_i$. Logo z_0 é combinação convexa dos zeros de $P(z)$ e portanto, temos $z_0 \in H$, o que é um absurdo. Isso mostra que $P'(z_0) = 0$ só pode ocorrer se $z_0 \in H$. $\square$

O Teorema de Gauss-Lucas mostra uma relação entre os zeros de um polinômio e os zeros de sua derivada. Observe o exemplo a seguir que ilustra a tese do teorema. Considere

$$P(z) = z^3 + z^2 + z + 1,$$

em que $z_1 = -1$, $z_2 = i$ e $z_3 = -i$ são zeros de $P(z)$. Derivando o polinômio, obtemos

$$P'(z) = 3z^2 + 2z + 1,$$

cujos zeros são $z'_1 = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$ e $z'_2 = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$.

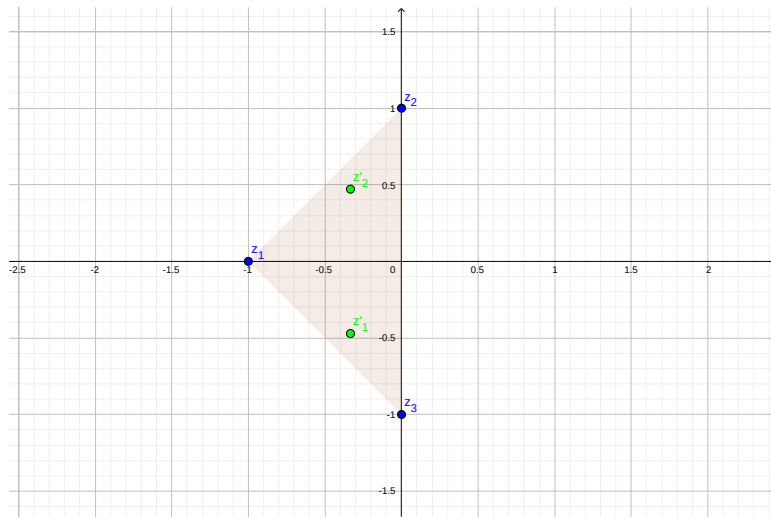


Figura 2.1: Representação geométrica dos zeros de $P(z)$ e $P'(z)$.

Podemos ainda concluir que se um polinômio possui todos os zeros reais, então os zeros de sua derivada também o são. De modo intuitivo, basta considerar o segmento de reta cujas extremidades coincidem com o menor e o maior zero do polinômio, respectivamente. Note que o segmento construído contém os demais zeros do polinômio e além disso, é fechado e convexo. Assim, o teorema garante que os zeros de sua derivada estão contidos neste segmento de reta.

No Teorema de Gauss-Lucas, se trocarmos a hipótese sobre o menor polígono convexo que contém os zeros de $P(z)$ por qualquer círculo que contenha os zeros de $P(z)$, então o resultado ainda é válido. Trivialmente, se C é um círculo que contém os zeros do polinômio, então C também contém o menor polígono convexo com os zeros de $P(z)$.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Cauchy). *Seja $z \mapsto P(z)$ um polinômio complexo dado por*

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0,$$

e seja r a única raiz positiva da equação

$$f(z) = |a_n|z^n - (|a_{n-1}|z^{n-1} + \cdots + |a_1|z + |a_0|) = 0. \quad (2.8)$$

Então todos os zeros do polinômio $P(z)$ estão na região $|z| \leq r$.

Demonstração. Note que se $|z| > r$, então $f(|z|) > 0$. Como

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) = f(|z|),$$

logo $P(z) \neq 0$ quando $|z| > r$. Portanto, todos os zeros de $P(z)$ devem estar contidos na região $|z| \leq r$. $\square$

Veja que (2.8) possui uma única raiz positiva como consequência da Regra de Sinais de Descartes, pois há apenas uma mudança de sinal entre as potências z^n e z^{n-1} . Assim, a única solução para a inequação $C - K \geq p$, com $C = 1$ e p um par não negativo é quando $K = 1$.

A fim de exemplificar o teorema anterior, considere o polinômio

$$P(z) = -iz^3 + iz^2 - 2iz - 1 \quad (2.9)$$

e a equação

$$f(z) = z^3 - z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Segue que a única raiz positiva da equação $f(z) = 0$ é $r \approx 2.15$. Logo, pelo Teorema de Cauchy, os zeros do polinômio $P(z)$ estão na região $|z| \leq r = 2.15$.

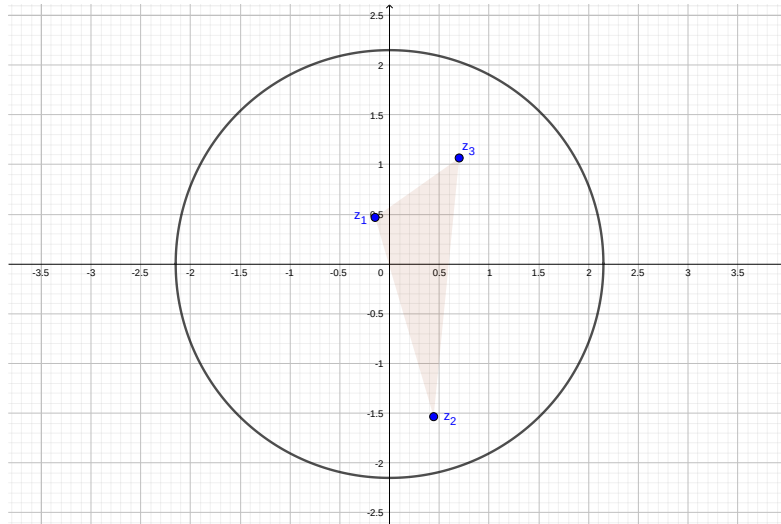


Figura 2.2: Representação geométrica dos zeros de $P(z)$ na região $|z| \leq r$.

Veja que o Teorema de Cauchy nos auxilia na busca de uma região do plano complexo onde os zeros do polinômio estão localizados. Apesar de não explicitar cada

um dos zeros do polinômio, o teorema aponta uma região para onde há certeza da existência dos zeros, logo pode-se utilizar métodos numéricos com mais eficiência para a busca destes números e evitar trabalho computacional desnecessário durante a busca em regiões maiores.

Teorema 2.3.4. *Seja $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ um polinômio com coeficientes complexos não nulos e ainda, seja $z_i, i = 1, \dots, n$, os zeros deste polinômio.*

Então

$$\max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \leq \max \left\{ 2|a_{n-1}|, 2 \left| \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right|, \dots, 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, 2 \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \right\}.$$

O Teorema 2.3.4 é apresentado no livro de Bourbaki [6, p. 97] como um exercício. Na ausência de sua demonstração, apresentamos uma aplicação sobre o polinômio dado em (2.9). Para atender a hipótese do Teorema 2.3.4, devemos dividir o polinômio $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ pelo seu coeficiente da maior potência. Assim, multiplicando-se (2.9) por $-1/i$, tem-se

$$\hat{P}(z) = z^3 - z^2 + 2z + 1/i.$$

Logo, sobre $\hat{P}(z)$ segue

$$\max \left\{ 2|a_2|, 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, 2 \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \right\} = \max \left\{ 2|-1|, 2 \left| \frac{2}{-1} \right|, 2 \left| \frac{1/i}{2} \right| \right\} = 4.$$

Ademais, como os zeros de $\hat{P}(z)$ são $z_1 \approx -0,14544 + 0,46839i$, $z_2 \approx 0,4434 - 1,5345i$ e $z_3 \approx 0,70207 + 1,06610i$, então

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |z_i| = |z_2| \approx 1,59728 < 4.$$

Disso, vemos que os zeros de $\hat{P}(z)$ estão contidos na região $|z| \leq 4$. Comparando-se os Teoremas 2.3.4 e 2.3.3 nota-se que Cauchy fornece uma região mais precisa para localização dos zeros do polinômio, contudo essa comparação deve ser feita caso a caso.

Se dividirmos a equação (2.8) pelo coeficiente da maior potência de z , então podemos reescrevê-la como

$$z^n = \sum_{k=1}^n p_k z^{n-k}, \quad (2.10)$$

em que $p_k = |a_{n-k}/a_n|$, com $k = 1, \dots, n$. Assim, enunciamos o próximo teorema que determina uma cota superior para a única raiz positiva da equação (2.10). A prova do teorema a seguir é apresentada na obra de Bojanov [4], como indicado em [15], como uma aplicação de um de seus métodos. Contudo a obra citada não foi encontrada.

Teorema 2.3.5. *Seja r a única raiz positiva da equação (2.10) e ainda, considere os valores $\sqrt[k]{p_k}$, com $k = 1, \dots, n$, em ordem decrescente, formando uma sequência $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$. Então r satisfaz a inequação $r \leq \sum_{k=1}^n q_k s_k$, em que*

$$s_1 = y_1 \quad s_k = y_k - y_{k-1} \text{ com } k = 2, \dots, n,$$

e y_k é a única raiz positiva da equação

$$y^k = \sum_{v=1}^k y^{k-v}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Como exemplo, considere o polinômio (2.9) e a equação

$$z^3 = z^2 + 2z + 1.$$

Vamos determinar uma cota superior para a raiz positiva da equação anterior. Temos então a sequência decrescente $(p_2, p_1, p_3) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{1})$. Para $k = 1, 2, 3$, temos

$$\left. \begin{array}{l} k = 1 \Rightarrow y = 1 \\ k = 2 \Rightarrow y^2 = y + 1 \\ k = 3 \Rightarrow y^3 = y^2 + y + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ s_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ s_3 \approx 0,2212 \end{array}$$

e portanto,

$$r \leq \sqrt{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 0,2212 \approx 2,2534.$$

Comparando-se brevemente os Teoremas 2.3.5 e 2.3.4, vemos que 2,2534 é uma cota superior para a única raiz positiva de (2.8) e ainda, é uma estimativa mais precisa para uma região que contém os zeros do polinômio.

Milovanović aponta a referência [23] onde estaria a prova do próximo teorema, porém não pôde ser consultada uma vez que é datada de 1924.

Teorema 2.3.6. *Todos os zeros de um polinômio como em (2.2), porém com $a_n = 1$, estão contidos na região*

$$\left| z + \frac{1}{2}a_{n-1} \right| \leq \frac{1}{2}|a_{n-1}| + \sum_{v=2}^n |a_{n-v}|^{\frac{1}{v}}.$$

Por exemplo, dividindo-se (2.9) por $a_3 = -i$, temos novamente

$$\hat{P}(z) = z^3 - z^2 + 2z + 1/i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| z + \frac{1}{2}(-1) \right| &\leq \frac{1}{2}| -1 | + [\sqrt{|2|} + \sqrt[3]{|1/i|}] \\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \approx 2.9142. \end{aligned}$$

Veja que a região obtida é menor em área quando comparada as demais obtidas anteriormente, logo aproxima-se melhor da localização dos zeros de $P(z)$. Contudo, Cauchy ainda é mais eficiente.

Teorema 2.3.7. *Seja $P(z)$ um polinômio de grau n , com $a_n = 1$. Considere também, $\beta = \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$. Então todos os zeros de $P(z)$ estão na região*

$$|z| \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 + |a_{n-1}| + \sqrt{(1 - |a_{n-1}|)^2 + 4\beta} \right\}.$$

Demonstração. Note que se

$$|z| > \frac{1}{2} \left\{ 1 + |a_{n-1}| + \sqrt{(1 - |a_{n-1}|)^2 + 4\beta} \right\},$$

então $|z| > 1$ e

$$(|z| - 1)(|z| - |a_{n-1}|) - \beta > 0.$$

Multiplicando a equação acima por $|z|^{n-1}/(|z| - 1)$, tem-se

$$|z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \beta|z|^{n-1}/(|z| - 1) > 0.$$

Mas veja que

$$\begin{aligned} \beta|z|^{n-1}/(|z| - 1) &> \beta(1 + |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^{n-2}) \\ &\geq |a_{n-2}z^{n-2} + a_{n-3}z^{n-3} + \cdots + a_0| \end{aligned}$$

e

$$|z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} \leq |z^n + a_{n-1}z^{n-1}|.$$

Portanto,

$$|P(z)| \geq |z^n + a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-2} + a_{n-3}z^{n-3} + \cdots + a_0| > 0,$$

que prova o resultado. $\square$

Como exemplo do Teorema 2.3.7, considere o polinômio $\hat{P}(z)$. Segue que $\beta = a_1 = 2$, logo

$$|z| \leq \frac{1}{2} \left\{ 1 + |-1| + \sqrt{(1 - |-1|)^2 + 4(2)} \right\} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142.$$

O Teorema 2.3.7 foi o que mais se aproximou da região obtida pelo Teorema de Cauchy. Observe que se $|a_{n-1}| = 1$, então os zeros de $\hat{P}(z)$ se encontram na região $|z| \leq 1 + \sqrt{\beta}$.

Teorema 2.3.8. *Se $P(z)$ é um polinômio de grau n , com $a_n = 1$ e $A = \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$, então todos os zeros de $P(z)$ estão na região*

$$\frac{|a_0|}{2(1+A)^{n-1}(An+1)} \leq |z| \leq 1 + \lambda_0 A,$$

com λ_0 sendo a única raiz positiva da equação $z = 1 - 1/(1 + Az)^n$ no intervalo $(0, 1)$.

Demonstração. Essa prova foi retirada de [9]. Primeiro, mostremos que os zeros de $P(z)$ estão contidos na região $|z| \leq 1 + \lambda_0 A$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |z|^n \left\{ 1 - A \sum_{j=1}^n |z|^{-j} \right\} \\ &= |z|^n - A \sum_{j=1}^{n-1} |z|^j \\ &= |z|^n - A \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $\lambda > 0$ e $|z| = 1 + A\lambda$, segue que

$$|P(z)| = (1 + A\lambda)^n - \frac{(1 + A\lambda)^n - 1}{\lambda} > 0,$$

se

$$\lambda > 1 - \frac{1}{(1 + A\lambda)^n}. \quad (2.11)$$

Logo, se λ_0 é a única raiz da equação $z = 1 - 1/(1 + Az)^n$ no intervalo $(0, 1)$, então $\lambda > \lambda_0$ satisfaz (2.11) e assim, $|P(z)| > 0$ na circunferência $|z| = 1 + A\lambda$, que implica em todos os zeros de $P(z)$ estarem contidos na região $|z| \leq 1 + A\lambda_0$.

Para a primeira desigualdade, vamos mostrar que $P(z)$ não possui zeros na região $|z| < |a_0|/[2(1 + A)^{n-1}(1 + nA)]$. Primeiramente, considere $G(z) = (1 - z)P(z)$, isto é

$$G(z) = a_0 + z^n - a_{n-1}z^n - z^{n+1} + \sum_{v=0}^{n-1} (a_v - a_{v-1})z^v = a_0 + H(z).$$

Se $|z| = R = 1 + A$, então

$$\begin{aligned} \max_{|z|=R} |H(z)| &\leq R^{n+1} + R^n + |a_{n-1}|R^n + \sum_{v=0}^{n-1} |a_v - a_{v-1}|R^v \\ &\leq R^n [R + 1 + A + (2n - 2)A] \\ &= 2(1 + A)^n (nA + 1). \end{aligned}$$

Assim, na região $|z| \leq R$

$$\begin{aligned} |G(z)| &= |a_0 + H(z)| \geq |a_0| - |H(z)| \geq |a_0| - \frac{|z|}{(1+A)} \max_{|z|=1+A} |H(z)| \\ &\geq |a_0| - \frac{|z|}{(1+A)} [2(1+A)^n(nA+1)] > 0, \end{aligned}$$

sempre que $|z| < \frac{|a_0|}{2(1+A)^n(nA+1)}$.

□

Por exemplo, ainda sobre $\hat{P}(z)$, temos $A = 2$ e

$$\begin{aligned} z &= 1 - 1/(1+2z)^2 \\ z &= \frac{4z(z+1)}{(2z+1)^2} \\ 4z^3 + 4z^2 + z &= 4z^2 + 4z \\ 4z^3 - 3z &= 0 \\ z(4z^2 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3}/2$ e $z_3 = -z_2$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{|-i|}{2(1+2)^2(2(3)+1)} &\leq |z| \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}2 \\ \frac{1}{126} &\leq |z| \leq 1 + \sqrt{3} \approx 2,732. \end{aligned}$$

Como $1/126$ é muito próximo de zero, podemos dizer que a região obtida é dada por apenas $|z| \leq 2,732$ que também é um bom resultado comparando-se com o teorema anterior e o Teorema de Cauchy.

Algumas classes especiais de polinômios

Neste capítulo, o foco será o estudo das propriedades básicas dos polinômios ortogonais na reta real e o comportamento de seus zeros. Abordaremos duas relações de recorrência de três termos, sendo a primeira de polinômios ortogonais na reta real e a segunda uma classe especial de polinômios. Tais relações diferem entre si por um polinômio linear e pelo corpo que contém seus coeficientes. Representaremos os zeros dos polinômios que satisfazem essas relações pela teoria de matrizes. Além disso, enunciaremos alguns resultados para determinar a localização dos zeros destes polinômios.

3.1 Polinômios Ortogonais

Nesta seção apresentaremos sequências de polinômios ortogonais (SPO) em um intervalo da reta com relação a uma função peso. Discutiremos suas principais propriedades à luz da Álgebra Linear e ao fim, investigaremos o comportamento e a localização dos zeros de uma SPO que satisfaz uma relação de recorrência de três termos. A teoria apresentada é um recorte das obras [10] e [19].

3.1.1 Definição e Propriedades

Usaremos a notação

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0,$$

para denotar o polinômio em x de grau n com $a_{n,i} \in \mathbb{R}$ o coeficiente da i -ésima potência.

Definição 3.1.1. *Seja ψ uma função real, não decrescente, definida em $[a, b]$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. ξ é um ponto de aumento isolado de ψ se ele for um ponto de aumento e existir $\epsilon > 0$ tal que ψ é constante nos intervalos $(\xi - \epsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi + \epsilon)$.*

Definição 3.1.2. *Seja ψ uma função definida, não decrescente, limitada e com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que as integrais de Stieltjes*

$$\mu_k = \int_a^b \tau^k d\psi(\tau), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

existem. Então dizemos que ψ é uma distribuição (ou medida positiva) em $[a, b]$.

Seja $d\psi$ uma distribuição como na Definição 3.1.2. Se $d\psi(x) = w(x)dx$, então $w(x) \geq 0$ em (a, b) , mas não identicamente nula, e é chamada de função peso.

Definição 3.1.3. *Considere o intervalo (a, b) na reta, a função peso $w(x) > 0$ e o produto escalar entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ em $[a, b]$ definido por:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

Se $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ satisfaz as condições

- $P_n(x)$ é de grau n , $n \geq 0$;
- $\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & n = m. \end{cases}$;

então temos uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) .

Quando $\rho_n = 1$, temos uma sequência de polinômios ortonormais e a denotamos por $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$.

Teorema 3.1.1. *Se $P_0, P_1, \dots, P_m$, pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais, então o conjunto de polinômios formado por eles é linearmente independente.*

Demonstração. Considere as constantes reais c_j , $j = 0, 1, 2, \dots, m$ e a combinação linear

$$\sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = 0.$$

Assim,

$$\left\langle \sum_{j=0}^m c_j P_j(x), P_k(x) \right\rangle = \langle 0, P_k(x) \rangle = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

Contudo, das propriedades do produto interno e da Definição 3.1.3, segue que

$$0 = \left\langle \sum_{j=0}^m c_j P_j(x), P_k(x) \right\rangle = \sum_{j=0}^m c_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = c_k \rho_k,$$

que implica em $c_k = 0$, para todo $0 \leq k \leq m$. □

Teorema 3.1.2. *Dada uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e uma função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) , então são equivalentes:*

a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a $w(x)$ em (a, b) .

b) $\langle P_n(x), \pi(x) \rangle = 0, \forall \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}, n \geq 1$.

c) $\langle x^m, P_n(x) \rangle = \int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & m = n. \end{cases}$

Demonstração. Mostremos que a) $\Rightarrow$ b). De fato, pelo Teorema 3.1.1, o conjunto $A = \{P_k(x) : 0 \leq k \leq n-1\}$ é linearmente independente e gera $\mathbb{P}_{n-1}$, logo A é base para $\mathbb{P}_{n-1}$. Com isso, temos

i) Se $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, então $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$. Logo,

$$\langle P_n(x), \pi(x) \rangle = \left\langle P_n(x), \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n(x), P_k(x) \rangle = 0,$$

pois $\langle P_n(x), P_k(x) \rangle = 0, \forall k \neq n$.

ii) Quando $\pi(x)$ possui grau n , então $\pi(x) = \alpha_n P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$. Assim,

$$\langle P_n(x), \pi(x) \rangle = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = \alpha_n \rho_n \neq 0.$$

Agora, mostremos que $b) \Rightarrow c)$. Para tal, observe que

i) Se $x^m \in \mathbb{P}_{n-1}(x)$, isto é, $m \leq n-1$, então $\langle P_n, x^m \rangle = 0$.

ii) Se $\pi(x) = x^n$, então $x^n = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x)$. Logo,

$$\langle P_n, x^n \rangle = \left\langle P_n, \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x) \right\rangle = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

Finalmente, $c) \Rightarrow a)$.

i) Se $0 \leq m \leq n-1$ e $P_m(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} x^k$, $\alpha_{m,m} \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \langle P_m, P_n \rangle &= \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} \int_a^b x^k P_n(x) w(x) dx = 0. \end{aligned}$$

ii) Se $m = n$,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle = \alpha_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = \alpha_{n,n} \tilde{\rho}_n \neq 0.$$

□

Corolário 3.1.2.1. *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_m(x)\}_{m=0}^\infty$ duas sequências de polinômios ortogonais em relação a mesma função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) , então os polinômios de mesmo grau em cada sequência diferem-se entre si por uma constante. Isto é,*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração. Do Teorema 3.1.1, podemos tomar $j + 1$ polinômios da sequência $\{P_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $Q_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x)$, $c_j \neq 0$. Logo, para $0 \leq k \leq j - 1$,

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle \Leftrightarrow c_k = 0, \forall 0 \leq k \leq j - 1.$$

Portanto, $Q_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x) = c_j P_j(x)$. □

3.1.2 Relações de Recorrência de Três Termos

A seguir, apresentamos as relações de recorrência de três termos para sequências de polinômios ortogonais e suas variações quando os polinômios são mônicos ou ortonormais.

Teorema 3.1.3. *Dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ no intervalo (a, b) em relação a função peso $w(x)$, então*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.1)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle}{\gamma_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

Demonstração. Note que podemos escrever $xP_n(x)$ como $xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x)$. Por comparação entre os termos de mesmo grau, é imediato que $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$. Além disso, para $j \leq n - 2$,

$$b_j \langle P_j, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = \langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x)dx = 0.$$

Implicando em $b_j = 0$, $\forall j \leq n - 2$. Com isso,

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x) = b_{n+1}P_{n+1} + b_nP_n + b_{n-1}P_{n-1}.$$

Isolando $P_{n+1}(x)$, temos

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{1}{b_{n+1}}x - \frac{b_n}{b_{n+1}} \right) P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} P_{n+1}(x). \quad (3.2)$$

Comparando (3.1) e (3.2), segue que

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Sabendo que $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$, então $\gamma_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$. Para determinar β_{n+1} , basta notar que

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle.$$

Logo, $\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}$. Prosseguindo de modo análogo,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle,$$

que resulta em $\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$.

Podemos expressar α_{n+1} de outra maneira ao ajustar os índices da equação (3.1), obtendo

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n) P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x).$$

Assim, temos

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle$$

e portanto, $\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$. □

Se $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais em relação a função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) , então $\{\hat{P}_n(x) = P_n(x)/a_{n,n}\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de polinômios ortogonais mônicos em relação a mesma função peso neste intervalo. A relação de recorrência de três termos para estes polinômios é obtida ao dividir (3.1) por $a_{n+1,n+1}$

que, após algumas simplificações, resulta em

$$\hat{P}_{n+1}(x) = \left(x - \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right) \hat{P}_n(x) - \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}} \hat{P}_{n-1}(x). \quad (3.3)$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} &= \frac{\langle x \frac{P_n}{a_{n,n}}, \frac{P_n}{a_{n,n}} \rangle}{\langle \frac{P_n}{a_{n,n}}, \frac{P_n}{a_{n,n}} \rangle} = \frac{\frac{1}{a_{n,n}^2} \langle x P_n, P_n \rangle}{\frac{1}{a_{n,n}^2} \langle P_n, P_n \rangle} = \frac{\frac{1}{a_{n,n}^2 \gamma_{n+1}} \langle x P_n, P_n \rangle}{\frac{1}{a_{n,n}^2 \gamma_{n+1}} \langle P_n, P_n \rangle} \\ &= \frac{\gamma_{n+1} \langle x P_n, P_n \rangle}{\gamma_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle} = \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}, \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} &= \frac{\langle \frac{P_n}{a_{n,n}}, \frac{P_n}{a_{n,n}} \rangle}{\langle \frac{P_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \frac{P_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} \rangle} = \frac{\frac{1}{a_{n,n}^2} \langle P_n, P_n \rangle}{\frac{1}{a_{n-1,n-1}^2} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} = \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \\ &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \cdot \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} = \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}}. \end{aligned}$$

Logo, reescrevemos (3.3) como

$$\hat{P}_{n+1}(x) = \left(x - \hat{\beta}_{n+1}\right) \hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x),$$

com

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} \text{ e } \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n \gamma_{n+1}} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}.$$

Por fim, podemos considerar a sequência de polinômios ortonormais $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ em relação a função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) , em que

$$P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \quad n \geq 1$$

e $\|P_n(x)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$. A relação de recorrência para estes polinômios é obtida de (3.1) e é da forma

$$P_{n+1}^*(x) = (\gamma_{n+1}^* x - \beta_{n+1}^*) P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^* P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 0, \quad (3.4)$$

com $P_0^*(x) = 1$, $P_{-1}^*(x) = 0$ e

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^*}, \quad \beta_{n+1}^* = \gamma_{n+1}^* \langle xP_n^*, P_n^* \rangle, \quad \alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}.$$

A dedução de (3.4) é feita ao dividir a equação (3.1) por $\|P_{n+1}(x)\|$, resultando em

$$P_{n+1}^*(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1}) \frac{\|P_n(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} P_n^*(x) - \alpha_{n+1} \frac{\|P_{n-1}\|}{\|P_{n+1}(x)\|} P_{n-1}^*(x),$$

em que

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^* &= \gamma_{n+1} \frac{\|P_n(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \cdot \frac{\|P_n(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} = \frac{\frac{a_{n+1,n+1}}{\|P_{n+1}(x)\|}}{\frac{a_{n,n}}{\|P_n(x)\|}} = \frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^*}, \\ \beta_{n+1}^* &= \beta_{n+1} \cdot \frac{\|P_n(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \cdot \frac{\|P_n(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} = \gamma_{n+1}^* \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} \\ &= \gamma_{n+1}^* \langle xP_n^*, P_n^* \rangle, \\ \alpha_{n+1}^* &= \alpha_{n+1} \frac{\|P_{n-1}(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \cdot \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \cdot \frac{\|P_{n-1}(x)\|}{\|P_{n+1}(x)\|} \\ &= a_{n+1,n+1}^* a_{n-1,n-1}^* \frac{\langle P_n, P_n \rangle \cdot \frac{1}{\|P_n\|^2}}{a_{n,n}^2 \cdot \frac{1}{\|P_n\|^2}} = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \underbrace{\langle P_n^*, P_n^* \rangle}_1. \end{aligned}$$

3.1.3 Zeros de polinômios ortogonais

Começamos essa subseção enunciando um teorema que refere-se à Identidade de Christoffel-Darboux. Sua demonstração será omitida, pois estamos interessados na fórmula confluyente, consequência direta de tal identidade.

Teorema 3.1.4 (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x) P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x) P_n^*(y) - P_n^*(x) P_{n+1}^*(y)}{x - y}.$$

Note que ao somar e subtrair $P_{n+1}^*(x) P_n^*(x)$ ao numerador da Identidade de Christoffel-Darboux, obtemos

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x) P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ \frac{P_n^*(x) (P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(y))}{x - y} - \frac{P_{n+1}^*(x) (P_n^*(x) - P_n^*(y))}{x - y} \right\}.$$

Fazendo $x \rightarrow y$ em ambos os membros da igualdade acima, obtemos a fórmula confluyente, dada como

$$\sum_{k=0}^n (P_k^*(x))^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} [P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x))' - P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x))'] > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O próximo teorema a ser apresentado nos garante que todos os zeros de $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$, dois polinômios consecutivos de uma SPO, são distintos.

Teorema 3.1.5. *Considere a sequência de polinômios ortogonais $\{P_j(x)\}_{j=0}^\infty$. Se $P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$ pertencem a mesma SPO, então seus zeros são distintos. Isto é, se $P_n(\xi) = 0$, então $P_{n-1}(\xi) \neq 0$.*

Demonstração. Note que ao substituir os zeros de $P_{n-1}(x)$ na fórmula confluyente trocando-se n por $n-1$, resulta em

$$P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0,$$

que implica em $P_n(x_{n-1,k}) \neq 0$, para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$. □

Teorema 3.1.6. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) da reta em relação a função peso $w(x)$. Então os zeros de $P_n(x)$ são todos reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração. Supondo que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) , temos

$$P_n(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0 \text{ ou } P_n(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0.$$

Contudo, a relação de ortogonalidade nos dá

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot P_n(x)w(x)dx = 0$$

e portanto, $P_n(x)$ deve mudar de sinal no intervalo (a, b) . Com isso, deve haver pelo menos um zero real de $P_n(x)$ com multiplicidade ímpar neste intervalo. Supondo que existam $r < n$ zeros distintos de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) , dados por

$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$, então do Teorema 2.1.2 segue que

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r})Q(x) = R(x)Q(x),$$

em que $R(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de grau r e $(n - r)$, respectivamente. Para $Q(x)$, sabemos que seus zeros em (a, b) serão complexos ou de multiplicidade par se forem reais, logo não muda de sinal no intervalo. Agora, note que da relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b R(x)P(x)w(x)dx = 0. \quad (3.5)$$

Entretanto,

$$\int_a^b R(x)P(x)w(x)dx = \int_a^b R(x)^2Q(x)w(x)dx \neq 0. \quad (3.6)$$

O absurdo visto pelas equações (3.5) e (3.6) implicam que devemos ter $r \geq n$ zeros reais de $P_n(x)$ com multiplicidade ímpar em (a, b) . Finalmente, do Teorema 2.1.1 segue que $r = n$ e portanto, $P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \cdots (x - x_{n,n})^{i_n}$. Além disso, a soma de n índices ímpares resultando em n implica em $i_k = 1, \forall k = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Teorema 3.1.7. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n + 1$, $P_{n+1}(x)$, existe somente um zero de $P_n(x)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que os polinômios $P_j(x)$ são ortonormais com $a_{j,j} > 0, \forall j = 1, 2, \dots$. Considere $x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n+1}$ os zeros de $P_{n+1}(x)$. Tomando-se dois zeros consecutivos $x_{n+1,k}$ e $x_{n+1,k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, na sequência crescente de zeros de $P_{n+1}(x)$ e substituindo-os na fórmula confluyente, segue que

$$P_n(x_{n+1,k})P'_{n+1}(x_{n+1,k}) > 0 \text{ e } P_n(x_{n+1,k+1})P'_{n+1}(x_{n+1,k+1}) > 0.$$

Como $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$ e $P'_{n+1}(x_{n+1,k+1})$ possuem sinais opostos, então $P_n(x_{n+1,k})$ e $P_n(x_{n+1,k+1})$ também têm. Logo, existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ em $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$ onde ocorre mudança de sinal. Tomando $k = 1, 2, 3, \dots, n$, temos a existência de n zeros de $P_n(x)$. $\square$

3.1.4 Representação dos zeros de polinômios ortogonais por autovalores

Nesta seção, apresentamos como os zeros dos polinômios gerados pelas sequências de polinômios ortogonais mônicos e ortonormais estão relacionados com autovalores de determinadas matrizes.

Se tomarmos o conjunto de m equações, fazendo $n = 0, 1, \dots, m-1$, na equação (3.3), obtém-se

$$\begin{aligned}
 x\hat{P}_0(x) &= \beta_1\hat{P}_0(x) + \hat{P}_1(x); \\
 x\hat{P}_1(x) &= \hat{\alpha}_2\hat{P}_0(x) + \hat{\beta}_2\hat{P}_1(x) + \hat{P}_2(x); \\
 x\hat{P}_2(x) &= \hat{\alpha}_3\hat{P}_1(x) + \hat{\beta}_3\hat{P}_2(x) + \hat{P}_3(x); \\
 &\vdots \\
 x\hat{P}_{m-1}(x) &= \hat{\alpha}_m\hat{P}_{m-2}(x) + \hat{\beta}_m\hat{P}_{m-1}(x) + \hat{P}_m(x),
 \end{aligned}$$

cujas representação matricial dá-se por

$$x \begin{bmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{P}_m(x) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Considerando $x_{m,k}$, $1 \leq k \leq m$, zeros de $\hat{P}_m(x)$ e substituindo-o em (3.7), temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{bmatrix}}_{v_{m,k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{bmatrix}}_{G_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{P}_0(x_{m,k}) \\ \hat{P}_1(x_{m,k}) \\ \hat{P}_2(x_{m,k}) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x_{m,k}) \\ \hat{P}_{m-1}(x_{m,k}) \end{bmatrix}}_{v_{m,k}}.$$

Como $v_{m,k}$ não é identicamente nulo, pois $\hat{P}_0(x_{m,k}) = 1$, concluímos que $x_{m,k}$ é autovalor da matriz G_m associado ao autovetor $v_{m,k}$ para $1 \leq k \leq m$.

Na Seção 3.1.2, apresentamos a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortonormais e deduzimos os parâmetros γ_{n+1}^* , β_{n+1}^* e α_{n+1}^* que a compõe. Se substituirmos β_{n+1}^* e α_{n+1}^* por seus respectivos valores ora apresentados em (3.4) e dividirmos tal equação por γ_{n+1}^* , obtemos, ao isolar $xP_n^*(x)$, a seguinte equação:

$$xP_n^*(x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*}P_{n+1}^*(x) + \langle xP_n, P_n \rangle P_n^*(x) + \frac{1}{\gamma_n^*}P_{n-1}^*(x). \quad (3.8)$$

Definindo $\lambda_{n+1}^* = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*}$, $\tau_{n+1}^* = \langle xP_n, P_n \rangle$ e haja vista que $\hat{P}_n(x) = \frac{P_n^*(x)}{a_{n,n}^*}$, segue que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{n+1} &= \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} = \frac{(a_{n-1,n-1}^*)^2}{(a_{n,n}^*)^2} = (\lambda_n^*)^2 \text{ e} \\ \hat{\beta}_{n+1} &= \frac{x\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} = \langle xP_n^*, P_n^* \rangle = \tau_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Portanto, reescrevemos (3.8) como

$$xP_n^*(x) = \lambda_n^*P_{n-1}^*(x) + \tau_{n+1}^*P_n^*(x) + \lambda_{n+1}^*P_{n+1}^*(x),$$

equivalente a

$$xP_n^*(x) = \sqrt{\hat{\alpha}_{n+1}}P_{n-1}^*(x) + \hat{\beta}_{n+1}^*P_n^*(x) + \sqrt{\hat{\alpha}_{n+2}}P_{n+1}^*(x). \quad (3.9)$$

Prosseguindo de modo análogo como feito ao início desta seção, se tomarmos o conjunto de m equações, fazendo $n = 0, 1, \dots, m-1$, na equação (3.9), obtém-se, já

em sua forma matricial, a expressão

$$x_{m,k} \underbrace{\begin{bmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{bmatrix}}_{u_{m,k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & \sqrt{\hat{\alpha}_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_2} & \hat{\beta}_2 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \hat{\beta}_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\beta}_{m-1} & \sqrt{\hat{\alpha}_m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\hat{\alpha}_m} & \hat{\beta}_m \end{bmatrix}}_{J_m} \underbrace{\begin{bmatrix} P_0^*(x_{m,k}) \\ P_1^*(x_{m,k}) \\ P_2^*(x_{m,k}) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x_{m,k}) \\ P_{m-1}^*(x_{m,k}) \end{bmatrix}}_{u_{m,k}}.$$

Finalmente, conclui-se que $x_{m,k}$, zero de $P_m^*(x)$, é autovalor da matriz J_m associado ao autovetor $u_{m,k}$.

3.2 Teorema de Geršgorin

Essa seção traz um teorema que auxilia na determinação de regiões do plano que contém os autovalores de uma matriz. Vimos que podemos representar os zeros de polinômios gerados pelas relações de recorrência de três termos por autovalores, logo o seguinte teorema determinará uma região onde os zeros dos polinômios estão localizados.

Antes de enunciar o teorema, retirado de [22], precisamos definir a soma absoluta da i -ésima linha de uma matriz de ordem n , excluindo-se seu elemento diagonal. O número positivo resultante desta soma será denotado por

$$r_i(A) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|.$$

Teorema 3.2.1 (Teorema de Geršgorin). *Para qualquer matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e λ autovalor de A , existe um número natural positivo tal que*

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A).$$

Demonstração. Para todo λ autovalor de A , seja $0 \neq x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ o autovetor associado, ou seja, $Ax = \lambda x$. Então $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j = \lambda x_i \forall i \in \mathbb{N}$. Como x é um

vetor não nulo, então existe um número natural positivo k tal que $0 < |x_k| = \max\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Para esse k , temos

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{k,i} x_i = \lambda x_k,$$

equivalente a

$$(\lambda - a_{k,k})x_k = \sum_{i \in \mathbb{N}-k} a_{k,i} x_i.$$

Se tomarmos os valores absolutos na equação acima, utilizarmos da desigualdade triangular, tem-se então

$$|\lambda - a_{k,k}| \cdot |x_k| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}-k} |a_{k,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}-k} |a_{k,i}| \cdot |x_k| = r_k(A) |x_k|.$$

Dividindo toda a expressão anterior por $|x_k|$, obtemos o resultado desejado. $\square$

O Teorema de Geršgorin estabelece n círculos dados por

$$\begin{aligned} G_i(M_n) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - m_{ii}| \leq r_i(M_n)\}, \\ G(M_n) &:= \bigcup_{i=1}^n G_i(M_n), \end{aligned} \tag{3.10}$$

com $m_{ij} \in M_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$, e $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Portanto, se M_n é uma matriz de ordem n , então a união dos n círculos é chamada de Conjunto de Geršgorin. É importante esclarecer que o Teorema de Geršgorin, não se resume a delimitar círculos sobre os zeros destes polinômios. Contudo, neste estudo, vimos que os zeros de alguns de polinômios ortogonais são autovalores de uma dada matriz e o mesmo vale aos zeros dos polinômios Q_m , não necessariamente ortogonais entre si, mas em ambas sequências de polinômios estabelecemos uma representação dos seus zeros por autovalores e, por isso, o Teorema de Geršgorin destaca-se neste trabalho.

Quando publicado pela primeira vez em 1931, o Teorema de Geršgorin provocou muito entusiasmo aos pesquisadores de seu tempo. Sua beleza e simplicidade em determinar uma região que contém os autovalores de uma matriz utilizando-se apenas de operações aritméticas é o que o torna um teorema elegante.

3.3 Polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos

Nessa seção, abordamos a relação de recorrência estudada no artigo [18], dada por

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

com $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z + \beta_1$, $\alpha_m \neq 0$, $m = 2, 3, \dots$, $\beta_m \neq 0$, $m = 1, 2, \dots$ sendo $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$.

A sequência de polinômios gerada pela relação acima não é ortogonal na reta real como (3.1). Contudo, quando $\alpha_{m+1} > 0$ e $\beta_m < 0$ para todo $m \geq 1$, então teremos uma sequência de polinômios L-ortogonais, que é um tipo diferente de ortogonalidade. Um estudo mais aprofundado sobre este caso pode ser visto em [12]. Neste trabalho não utilizaremos qualquer restrição sobre os coeficientes de (3.11), logo a sequência de polinômios não será necessariamente ortogonal. Vale ressaltar que a (3.11) difere-se de (3.1) por um monômio em z que multiplica o polinômio $Q_{m-1}(z)$.

É notável que 0 não é zero de nenhum polinômio $Q_m(z)$ para todo $m \geq 1$. Além disso, $Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_m$. De fato,

$$Q_1(0) = 0 + \beta_1 = \beta_1.$$

Suponha que para $m = k - 1$, $k > 1$, tenha-se que $Q_{k-1}(0) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k-1}$. Com isso,

$$Q_k(0) = (0 + \beta_k)Q_{k-1}(0) - \alpha_k 0 Q_{k-2}(0).$$

Utilizando-se a hipótese de indução, segue que

$$Q_k(0) = \beta_k\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k-1} = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k-1}\beta_k.$$

Portanto,

$$Q_m(0) \neq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (3.12)$$

Lema 3.3.1. *Dois polinômios $Q_m(z)$ e $Q_{m+1}(z)$ consecutivos na sequência gerada por (3.11) não possuem zeros em comum para todo $m \geq 1$.*

Demonstração. Utilizando-se do princípio da indução, segue de imediato que se $\xi \in \mathbb{C}$ é tal que $Q_1(\xi) = Q_2(\xi) = 0$, então de (3.11) temos

$$\begin{aligned} Q_2(\xi) &= (\xi + \beta_2)Q_1(\xi) - \alpha_2\xi Q_0(\xi) \\ 0 &= -\alpha_2\xi. \end{aligned}$$

De (3.12), temos $\xi \neq 0$. Então $-\alpha_2\xi = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$. Desta contradição, concluímos que não existe $\xi \in \mathbb{C}$ que é zero de $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ simultaneamente.

Suponha que para $m \geq 2$, $Q_{m-1}(z)$ e $Q_m(z)$ não possuam zeros em comum. Mostremos que $Q_m(z)$ e $Q_{m+1}(z)$ também não têm. Com efeito, se $Q_m(\xi) = 0$ e $Q_{m-1}(\xi) \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(\xi) &= (\xi + \beta_{m+1})Q_m(\xi) - \alpha_{m+1}\xi Q_{m-1}(\xi) \\ &= -\alpha_{m+1}\xi Q_{m-1}(\xi). \end{aligned}$$

Da hipótese de indução, de (3.11) e de (3.12), cada um dos fatores acima são não nulos e temos o resultado desejado. $\square$

Note que podemos escrever cada polinômio da equação (3.11) como

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_{m-1} & -\alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z + \beta_m \end{vmatrix}, \quad m \geq 1. \quad (3.13)$$

Quando $m = 1$, $Q_1(z) = z + \beta_1$ por definição. Para $m = 2$,

$$\begin{aligned} Q_2(z) &\stackrel{(3.11)}{=} (z + \beta_2)Q_1(z) - \alpha_2zQ_0(z) \\ &\stackrel{def.}{=} (z + \beta_2)(z + \beta_1) - \alpha_2z \\ &= \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 \\ -z & z + \beta_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que para $m \geq 3$, a igualdade em (3.13) é válida. Então, o cálculo do determinante

$$\begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_m & -\alpha_{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z + \beta_{m+1} \end{vmatrix},$$

feito pelo método de Laplace, considerando-se a última coluna, é dado por:

$$(z + \beta_{m+1})(-1)^{2(m+1)}C_{m+1,m+1} + (-\alpha_{m+1})(-1)^{2m+1}C_{m,m+1}, \quad (3.14)$$

em que $C_{m+1,m+1}$ e $C_{m,m+1}$ são os cofatores de $(z + \beta_{m+1})$ e $(-\alpha_{m+1})$, respectivamente. A partir da hipótese indutiva, é evidente que $C_{m+1,m+1} = Q_m(z)$. Além disso, calculando-se o cofator $C_{m,m+1}$ pela última linha, temos

$$\begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_{m-1} & -\alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -z \end{vmatrix} = -zQ_{m-1}.$$

Substituindo os cofatores em (3.14), conclui-se a demonstração.

Podemos representar os zeros do polinômios gerados por (3.11), como feito na Subseção 3.1.4. Para isso, é necessário definir o conceito de matriz de Hessenberg.

Definição 3.3.1. *Uma matriz de Hessenberg é uma matriz quadrada quase triangular. Isto é, a matriz de Hessenberg inferior é uma matriz não nula, cujos elementos acima da superdiagonal principal são nulos. Em outras palavras, a matriz de Hessenberg $H_n = a_{ij}$ em que $a_{i,i+2} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.*

Teorema 3.3.1. *Os zeros de Q_m são autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$H_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

em que $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração. Considere as matrizes A_n e B_n de ordem n , dadas respectivamente por

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B_n = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_n \end{bmatrix}.$$

De (3.13), temos que $Q_m(z) = \det(zA_n - B_n)$ e ainda, como $\det(A_n) = 1$, então $Q_m(z) = \det(A_n)\det(zI - A_n^{-1}B_n) = \det(zI - A_n^{-1}B_n)$. Claramente, Q_m é o polinômio característico da matriz $A_n^{-1}B_n$ que coincide com H_n . Portanto, seus zeros são autovalores de $A_n^{-1}B_n = H_n$. $\square$

3.3.1 Região especial para os zeros de $Q_m(z)$

Estudaremos um teorema que determina uma região no plano onde os zeros dos polinômios gerados por (3.11) estão localizados. Considere a região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, em que $\lambda_2 \geq \lambda_1$ e $\tau > 0$ dada pelo conjunto

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \tau) \equiv \left\{ z = x + yi \in \mathbb{C} : |y| \leq \tau, \lambda_1 - \sqrt{\tau^2 - y^2} \leq x \leq \lambda_2 + \sqrt{\tau^2 - y^2} \right\}.$$

Teorema 3.3.2. Para todo $n \geq 2$, defina $\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$ e $\eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$. Seja

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}} \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M} \quad e \quad d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}}.$$

Então os zeros de $Q_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão dentro da região $|z| \leq \hat{\rho}_n$, em que

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se para $k = 1, 2, \dots, n$, tem-se η_k real, então os zeros de $Q_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão dentro da região $W(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$, em que

$$\eta_{n,1} = \min\{\eta_k, k = 1, 2, 3, \dots, n\}, \quad \eta_n = \max\{\eta_k, k = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

e

$$\tilde{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Para $\delta \neq 0$, defina D_δ como a matriz diagonal de ordem n , cujas entradas são $(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$. Tomemos $0 < \delta < 1$. Note que as matrizes H_n e $S = D_\delta H_n D_\delta^{-1}$ são semelhantes e com isso, possuem os mesmos autovalores. Utilizando-se do Teorema de Geršgorin, temos que os autovalores de S estão contidos em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$ em que $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ é o círculo fechado centrado em η_k e raio $\rho_k(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}$. Note que, $\rho_1(\delta) < \tilde{\rho}_1(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} |\eta_1|$ e para $2 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho_k(\delta) &\leq \frac{\delta}{1-\delta} |\eta_k| + \frac{1}{\delta} |\alpha_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M \\ &= -\eta_n^M + \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M. \end{aligned}$$

Então todos os círculos $\Delta_k^{(n)}(\delta)$, $2 \leq k \leq n$, estão dentro da região

$$|z| \leq \hat{\rho}_n(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M.$$

Do mesmo modo, $\Delta_1^{(n)}(\delta)$ está contido no círculo $|z| < \hat{\rho}_1(\delta) = \frac{1}{1-\delta}|\eta_1|$. Escolhendo δ que minimize $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\}$, temos d_2 ou d_1 dependendo de $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ ou não.

Para a segunda parte, note que $\Delta_1^{(n)}(\delta)$ está contido no círculo $|z - \eta_1| < \tilde{\rho}_1(\delta)$ e para todo k , $2 \leq k \leq n$, o círculo $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ está contido na região $|z - \eta_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta)$. Novamente, tomando δ que minimize $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\}$, temos d_3 ou d_1 dependendo de $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ ou não.

Por fim, como o zero de $Q_1(z)$ é η_1 , temos $\eta_1 \in \bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$. Se p é tal que $1 < p < n$, então os autovalores da matriz H_p estão contidos em $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta)$. Como $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta) \subset \bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$ para $1 \leq k \leq p$, temos que os zeros de $Q_p(z)$ também estão dentro de $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$ que prova o teorema para todos os polinômios Q_k , $1 \leq k \leq n$. $\square$

Para exemplificar a tese do Teorema de Geršgorin, vamos considerar a equação (3.11) e vamos definir $\beta_m = 1$, $\alpha_{2m} = -0.05$ e $\alpha_{2m+1} = 0.05$. Logo, para $n = 5$, temos $Q_5(z) = z^5 + 5z^4 + \frac{4001z^3}{400} + \frac{4001z^2}{400} + 5z + 1$. A representação geométrica dos zeros do polinômio $Q_5(z)$ e dos círculos de Geršgorin podem ser vistas nas figuras abaixo.

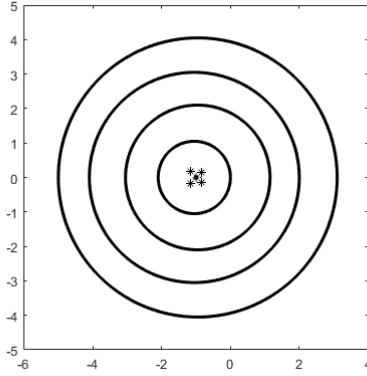
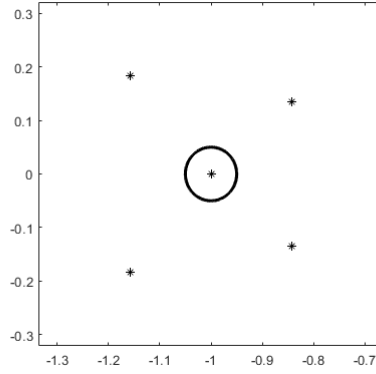


Figura 3.1: Zeros de $Q_5(z)$ dentro dos círculos de Geršgorin.

Figura 3.2: Zeros de $Q_5(z)$ - Zoom in.

Durante o desenvolvimento das relações de recorrência de três termos neste trabalho, apresentamos a relação dos zeros com os autovalores associados às matrizes construídas a partir das relações dos polinômios mônicos e ortonormais. Logo, o Teorema de Geršgorin também se aplica a ambos.

Agora, apresentamos um exemplo para comparação entre o Teorema de Geršgorin e o Teorema 3.3.2. Para isso, vamos utilizar a sequência de polinômios apresentada em [5]. Considere

$$R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}) + z^n, \quad n \geq 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

A sequência de polinômios $\{R_n^{(\lambda)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz a relação de recorrência

$$R_{n+1}^{(\lambda)}(z) = (z + 1)R_n^{(\lambda)}(z) - \alpha_{n+1}zR_{n-1}^{(\lambda)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$, $R_1(z) = z + 1$, $\alpha_2 = 2 - \lambda$ e $\alpha_n = 1$ para $n \geq 3$.

Façamos $n = 7$ e $\lambda = 1$ em (3.15). Assim,

$$R_7^{(1)}(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7.$$

Como seus zeros são autovalores da matriz de Hessenberg H_7 , dada por

$$H_7 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e como $r_1(H_7) = 1 = r_7(H_7)$ e $r_i(H_7) = 2$, $2 \leq k \leq 6$, segue do Teorema de Geršgorin que os zeros de $R_7^{(1)}$, dados por

$$\{-1, \pm i, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\},$$

estão contidos na união dos círculos com centro $(0, -1)$ e raio r_1 ou centrados na origem e raios r_i , $i = 2, 3, \dots, 7$.

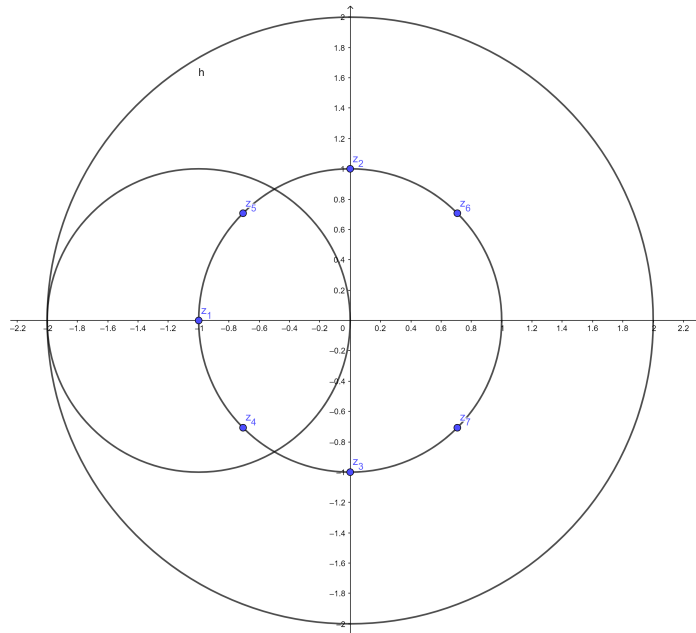


Figura 3.3: Zeros de $R_7^{(1)}(z)$ dentro dos círculos de Geršgorin.

Nas hipóteses do Teorema 3.3.2, temos que

$$\alpha_7^M = 1, \eta_7^M = 0, \hat{\rho}_7 = 2, \tilde{\rho}_7 \approx 1,618, \eta_{7,1} = -1 \text{ e } \eta_{7,2} = 0.$$

Portanto, segue que os zeros dos polinômios $R_k^{(1)}(z)$, $1 \leq k \leq 7$, estão contidos na região $W(-1, 0, 1.618)$, que assemelha-se a uma elipse, mas não é, representada abaixo.

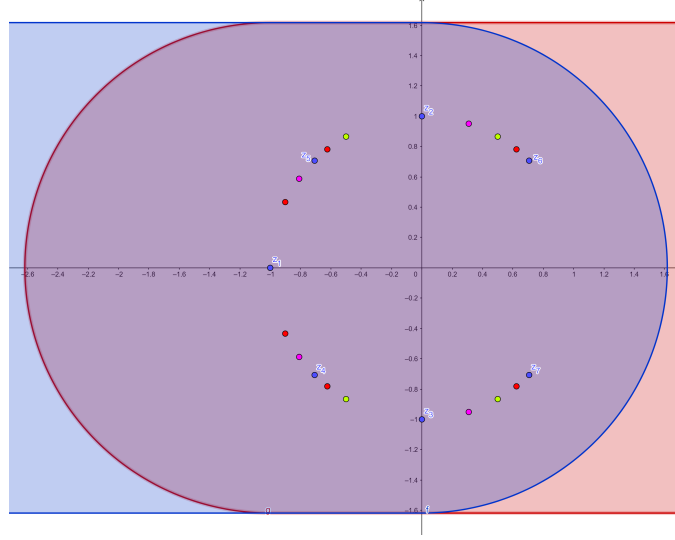


Figura 3.4: Zeros de $R_k^{(1)}(z)$, $1 \leq k \leq 7$, dentro da região $W(-1, 0, 1.618)$.

Em azul, vermelho, verde e rosa, estão representados os zeros de $R_7^{(1)}$, $R_6^{(1)}$, $R_5^{(1)}$ e $R_4^{(1)}$, respectivamente. Alguns zeros coincidem, como:

$$R_5^{(1)}(-1) = R_7^{(1)}(-1) = R_3^{(1)}(-1) = R_1^{(1)}(-1) = 0$$

$$R_7^{(1)}(\pm i) = R_3^{(1)}(\pm i) = 0$$

$$R_5^{(1)}(-1/2 \pm \sqrt{3}/2) = R_2^{(1)}(-1/2 \pm \sqrt{3}/2) = 0.$$

Na Figura 3.3, vemos que os autovalores (zeros do polinômio) podem pertencer a circunferência que define o círculo de Geršgorin. Alguns círculos podem conter mais de um autovalor, como visto em (3.1). Por fim, poderá existir algum círculo que não contém autovalor. Contudo, a união de todos eles (conjunto de Geršgorin) conterá todos os autovalores. Para exemplificar o caso em que há círculos sem a presença de autovalores, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & -i & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -2i & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -9/2 \end{bmatrix}.$$

O conjunto dos autovalores de A é dado por

$$\{3,2361; -1,2361; -2; -1,0323i; -1,9677i; 4,5277; -4,5277\}.$$

Calculando-se os raios dos círculos de Geršgorin em relação a matriz A , tem-se

$$r_1(A) = 4, \quad r_2(A) = r_3(A) = 1, \quad r_4(A) = 1/4, \quad r_5(A) = r_6(A) = r_7(A) = 1/2.$$

Logo, o conjunto de Geršgorin é dado por

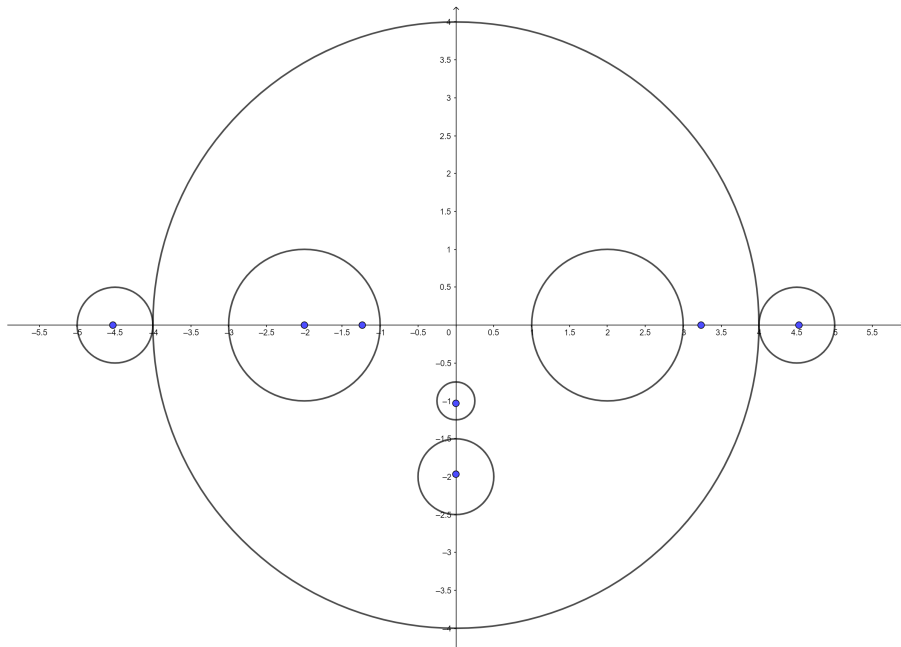


Figura 3.5: Conjunto de Geršgorin: círculo sem autovalor.

Acima podemos notar que o círculo com centro em $(2, 0)$ e raio r_2 não contém autovalor de A , contudo a união de todos os círculos contém todos os autovalores de A .

Relações de recorrência de quatro termos

Neste capítulo abordamos a sequência de polinômios gerada pela relação de recorrência de quatro termos

$$P_n(z) + A(z)P_{n-1}(z) + B(z)P_{n-2}(z) + C(z)P_{n-3}(z) = 0, \quad (4.1)$$

em que $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ são polinômios de grau menor ou igual a um na variável z , $P_0(z) = 1$ e $P_{-n}(z) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como mencionado na Introdução deste trabalho, as RRQT não foram tão exploradas em comparação com as RRTT relacionadas aos polinômios ortogonais clássicos. Porém, na literatura recente, podemos encontrar resultados interessantes a respeito dos polinômios gerados por (4.1) que motivam o principal objetivo do nosso trabalho.

Em [1], o autor investiga um caso particular da relação de recorrência (4.1). Isto é, considera $A(z) = az$, $B(z) = b$, e $C(z) = cz$, com $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ e obtém

$$P_n(z) + azP_{n-1}(z) + bP_{n-2}(z) + czP_{n-3}(z) = 0. \quad (4.2)$$

Neste artigo, o autor enuncia o seguinte teorema

Teorema 4.0.1. *Os zeros de $P_n(z)$ que satisfazem a relação (4.2) serão reais se, e somente se, $b > 0$ e $\frac{c}{ab} := \alpha \leq \frac{1}{9}$, em ambos os casos, eles pertencem ao intervalo $I := (-\lambda, \lambda)$, em que*

$$\lambda := \frac{4}{\left(\frac{3\alpha+1+\sqrt{9\alpha^2-10\alpha+1}}{-5\alpha+1+\sqrt{9\alpha^2-10\alpha+1}}\right)^{3/2} \left(-5\alpha+1+\sqrt{9\alpha^2-10\alpha+1}\right)}.$$

Além disso, considerando $\mathcal{Z}(P_n)$ o conjunto dos zeros de $P_n(z)$, então $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}(P_n(z))$ é denso em I .

Veja que esse teorema estabelece condições necessárias e suficientes para definir um intervalo I na reta tal que $P_n(z)$ possui todos os zeros reais para todo n natural e ainda, o conjunto de zeros de $P_n(z)$ é denso em I . Sua demonstração será omitida, pois está fundamentada sob uma dezena de definições, proposições e lemas que auxiliam na estrutura da demonstração, logo seria exaustivo demais e complexo trazê-la para este texto. A prova completa deste teorema está disponível em [1].

Além disso, em [20], os autores investigam o comportamento dos zeros dos polinômios $P_n(z)$ gerados por (4.1) em que $A(z) = z$, $B(z) = b$ e $C(z) = c$ com $b, c \in \mathbb{R}$. De modo semelhante, em [21], os autores estudam a localização dos zeros dos polinômios que pertencem a sequência gerada por (4.1) quando $A(z) = a_1z + a_0$, $B(z) = b_1z + b_0$ e $C(z) = c$, sendo $a_1, a_0, b_1, b_0, c \in \mathbb{R}$.

Com a motivação dos resultados apresentados em [1], [18], [20] e [21] construímos as seguintes seções que compõe este capítulo.

4.1 Representação dos zeros de polinômios por autovalores

Essa seção trata da representação dos zeros dos polinômios gerados por um caso particular de (4.1), associando-os como autovalores de uma matriz específica como na Seção 3.3.

Considerando $A(z) = -(z + a_0)$, $B(z) = b_1z + b_0$ e $C(z) = c_1z + c_0$, temos

$$P_n(z) - (z + a_0)P_{n-1}(z) + (b_1z + b_0)P_{n-2}(z) + (c_1z + c_0)P_{n-3}(z) = 0,$$

equivalente a

$$P_n(z) = (z + a_0)P_{n-1}(z) - (b_1z + b_0)P_{n-2}(z) - (c_1z + c_0)P_{n-3}(z), \quad (4.3)$$

com $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ e $c_0^2 + c_1^2 \neq 0$, $P_0(z) = 1$ e $P_{-n}(z) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que as restrições sobre os coeficientes dos polinômios $B(z)$ e $C(z)$ impedem que sejam identicamente nulos. Em outras palavras, se pensarmos nestes polinômios como retas, as possibilidades são de polinômios com coeficiente lineares nulos, polinômios constantes não nulos ou polinômios lineares com coeficientes angulares e lineares não nulos.

À primeira vista, analisando-se a equação (4.3), percebe-se que $P_n(z)$ possui grau n e é mônico. De modo formal, enunciamos o lema a seguir.

Lema 4.1.1. *Os polinômios gerados pela relação de recorrência de quatro termos como em (4.3), são mônicos e possuem grau exatamente n para todo n natural.*

Demonstração. Por indução sobre n , note que quando $n = 1$, temos

$$P_1(z) = (z + a_0)P_0(z) - (b_1z + b_0)P_{-1}(z) - (c_1z + c_0)P_{-2}(z).$$

Como $P_{-1}(z) = P_{-2}(z) = 0$ e $P_0(z) = 1$, ambos de acordo com a definição, temos que $P_1(z) = z + a_0$ que é mônico e possui grau um. Supondo que para $n = k > 1$, tenhamos que $P_k(z)$ é mônico e possui grau k , provemos que o mesmo vale para $n = k + 1$. De fato,

$$P_{k+1}(z) = (z + a_0)P_k(z) - (b_1z + b_0)P_{k-1}(z) - (c_1z + c_0)P_{k-2}(z) = (z + a_0)P_k(z) + S(z),$$

em que $S(z) = -B(z)P_{k-1}(z) - C(z)P_{k-2}(z)$. Da hipótese de indução, segue que $(z + a_0)P_k(z)$ possui grau $k + 1$ e é mônico. Como $S(z)$ possui no máximo grau k , temos $P_{k+1}(z)$ mônico e de grau $k + 1$. $\square$

Assim como em (3.13), podemos reescrever os polinômios gerados por (4.3) como um determinante.

Proposição 4.1.1. *Os polinômios da sequência gerada por (4.3) podem ser representados como*

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} z + a_0 & -b_1z - b_0 & -c_1z - c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & z + a_0 & -b_1z - b_0 & -c_1z - c_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z + a_0 & -b_1z - b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z + a_0 & -b_1z - b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z + a_0 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Demonstração. De fato, quando $n = 1$,

$$P_1 = z + a_0 = |z + a_0|.$$

Supondo que para $n = k > 1$, a equação (4.4) é válida. Temos que o determinante de ordem $(k + 1)$ a seguir

$$\begin{vmatrix} z + a_0 & -b_1z - b_0 & -c_1z - c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & z + a_0 & -b_1z - b_0 & -c_1z - c_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z + a_0 & -b_1z - b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z + a_0 & -b_1z - b_0 & -C(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z + a_0 & -B(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -A(z) \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

é dado por

$$-A(z)C_{k+1,k+1} - B(z)C_{k,k+1} - C(z)C_{k-1,k+1},$$

em que $C_{k+1,k+1}$, $C_{k,k+1}$ e $C_{k-1,k+1}$ são cofatores que compõe o cálculo do determinante (4.5) utilizando-se o método de Laplace sobre a última coluna.

Note que $C_{k+1,k+1} = P_k$, pois é obtido ao excluir a última linha e última coluna de (4.5), que coincide com a hipótese de indução. Para obter o próximo cofator,

continuaremos a aplicar Laplace aos demais determinantes que surgirão, assim temos

$$\begin{aligned}
 C_{k,k+1} &= (-1)^{2k+1} \begin{vmatrix} z+a_0 & -b_1z-b_0 & -c_1z-c_0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & z+a_0 & -b_1z-b_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z+a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z+a_0 & -b_1z-b_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= - \left((-1)(-1)^{k+k} \begin{vmatrix} z+a_0 & -b_1z-b_0 & -c_1z-c_0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & z+a_0 & -b_1z-b_0 & -c_1z-c_0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & z+a_0 & -b_1z-b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z+a_0 \end{vmatrix} \right) \\
 &= P_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Durante o cálculo de $C_{k,k+1}$, temos na primeira igualdade, um determinante que é calculado utilizando-se Laplace sobre sua última linha. Na segunda igualdade, o determinante não precisa ser calculado, dada a hipótese de indução. Analogamente,

$$C_{k-1,k+1} = (-1)^{2k} \begin{vmatrix} z+a_0 & -b_1z-b_0 & -c_1z-c_0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & z+a_0 & -b_1z-b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_1z+b_0 & -c_1z+c_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z+a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)(-1)^{k+k} \begin{vmatrix} z+a_0 & -b_1z-b_0 & -c_1z-c_0 & \dots & 0 \\ -1 & z+a_0 & -b_1z-b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_1z+b_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \\
&= - \left((-1)(-1)^{2(k-1)} \begin{vmatrix} z+a_0 & -b_1z-b_0 & \dots & 0 \\ -1 & z+a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & z+a_0 \end{vmatrix} \right) \\
&= P_{k-2},
\end{aligned}$$

que prova o resultado. $\square$

Considere as matrizes A_n e B_n de ordem n , dadas por

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1 & -c_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B_n = \begin{pmatrix} -a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -a_0 & b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_0 & b_0 & c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_0 \end{pmatrix}.$$

O próximo teorema define uma representação para os zeros do polinômio $P_n(z)$ como autovalores de uma matriz de Hessenberg.

Teorema 4.1.1. *Os zeros de $P_n(z)$ gerados por (4.3) são autovalores da matriz $M_n = A_n^{-1}B_n$.*

Demonstração. Temos $\det(A_n) = 1$. Note que $P_n(z) = \det(zA_n - B_n) = \det(A_n(zI_n - A_n^{-1}B_n)) = \det(zI_n - A_n^{-1}B_n)$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n . Como $P_n(z) = \det(zI_n - A_n^{-1}B_n)$, segue que é o polinômio característico da matriz $A_n^{-1}B_n = M_n$. $\square$

Como A_n é uma matriz triangular superior, então sua inversa também será triangular superior. Para determinar a matriz A_n^{-1} , considere a matriz aumentada

$$(A_n|I_n) = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & -b_1 & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1 & -c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Para obter $(I_n|A_n^{-1})$, basta realizar uma sequência de n operações elementares sobre $(A_n|I_n)$, nesta ordem:

$$\begin{aligned} L'_n &:= L_n; \\ L'_{n-1} &:= L_{n-1} + b_1 L'_n; \\ L'_{n-2} &:= L_{n-2} + b_1 L'_{n-1} + c_1 L'_n; \\ L'_{n-3} &:= L_{n-3} + b_1 L'_{n-2} + c_1 L'_{n-1}; \\ L'_{n-4} &:= L_{n-4} + b_1 L'_{n-3} + c_1 L'_{n-2}; \\ &\vdots \\ L'_1 &:= L_1 + b_1 L'_2 + c_1 L'_3. \end{aligned}$$

Sendo L'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, a k -ésima linha da matriz aumentada $(I_n|A_n^{-1})$ e L_k , $k = 1, 2, \dots, n$, a k -ésima linha da matriz aumentada $(A_n|I_n)$. Após esse procedimento,

obtem-se

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 + c_1 & \dots & \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{n-l}{l-1} b_1^{n-(2l-1)} c_1^{l-1} \\ 0 & 1 & b_1 & \dots & \sum_{l=1}^{\gamma} \binom{n-1-l}{l-1} b_1^{n-1-(2l-1)} c_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

em que $\gamma = \frac{n}{2}$ para n par e $\gamma = \frac{n+1}{2}$ para n ímpar. Um algoritmo computacional que determina A_n^{-1} , M_n , $P_n(z)$ e os zeros do polinômio para quando $n \geq 3$ está disponível na seção de apêndices.

A matriz A_n^{-1} possui uma característica interessante quanto à sua forma. Note que, uma vez que se conhece a sua primeira linha, as demais são determinadas a partir dela. Podemos escrever os elementos da primeira linha de A_n^{-1} como

$$a'_{1,j} = \sum_{l=1}^{\gamma(j)} \binom{j-l}{l-1} b_1^{j-(2l-1)} c_1^{l-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

em que $\gamma(k) = \gamma(k+1) = \frac{k+1}{2}$, $k = 1, 3, 5, \dots, \beta$, tal que $\beta = \begin{cases} n-1, & \text{se } n \text{ é par} \\ n-2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ e $\gamma(n) = \frac{n+1}{2}$ se n é ímpar.

Deste modo, as próximas linhas de A_n^{-1} são obtidas fazendo $a'_{i+1,j+1} = a'_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, e $a'_{i,j} = 0$ se $i > j$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Dados os padrões existentes em A_n^{-1} e B_n sobre suas linhas, temos então um padrão na matriz produto $M_n = A_n^{-1} B_n$, em que $M_n = (m_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Temos que os elementos da primeira linha de M_n são da forma

$$\begin{aligned} m_{1,1} &= -a_0 + b_1 \\ m_{1,2} &= b_0 - a_0 b_1 + b_1^2 + c_1 \\ m_{1,j} &= c_0 a'_{1,j-2} + b_0 a'_{1,j-1} - a_0 a'_{1,j} + a'_{1,j+1}, \quad \text{para } j = 3, \dots, n-1 \\ m_{1,n} &= c_0 a'_{1,n-2} + b_0 a'_{1,n-1} - a_0 a'_{1,n} \end{aligned}$$

e para as próximas linhas, temos

$$\begin{aligned}
 m_{i+1,j+1} &= m_{i,j}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \text{ e } j = 1, \dots, n-2 \\
 m_{i,n} &= c_0 a'_{i,n-2} + b_0 a'_{i,n-1} - a_0 a'_{i,n}, i = 2, \dots, n \\
 m_{j+1,j} &= 1, \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\
 m_{i,j} &= 0, \text{ para } i \geq j+2, j = 1, \dots, n-2.
 \end{aligned}$$

Uma observação importante faz-se necessária a respeito da forma geral dada em (4.6): quando $b_1 = 0$ ou $c_1 = 0$, podemos nos deparar com uma indeterminação do tipo 0^0 em alguma parcela do somatório. Para contornar este problema, podemos definir $0^0 = 1$ somente para este cálculo ou recorrer ao processo de escalonamento cujas operações elementares já foram indicadas.

Como exemplo do que foi mostrado até o momento nesta seção, considere $A(z) = -(z+1)$, $B(z) = 2z+3$ e $C(z) = 4z+5$. Segue da equação (4.3) que, para $n = 5$,

$$P_5(z) = (z+1)P_4(z) - (2z+3)P_3(z) - (4z+5)P_2(z),$$

ou seja,

$$P_5(z) = z^5 - 3z^4 - 26z^3 - 25z^2 + 26z + 31.$$

Como as entradas das matrizes B_5 e A_5^{-1} dependem apenas dos coeficientes dos polinômios $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ que conhecemos, segue que o produto $A_5^{-1}B_5 = M_5$ é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 24 & 80 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_5^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{B_5} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 9 & 27 & 90 & 32 \\ 1 & 1 & 9 & 27 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{M_5}.$$

Calculando-se os autovalores de M_5 e os zeros de $P_5(z)$ utilizando o MATLAB¹, temos que

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} : \det(zI_5 - M_5) = 0\} &= \{7,0834; -2,5237; 1,0354; -1,3910; -1,2040\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : P_5(z) = 0\},\end{aligned}$$

ou seja, o conjunto de autovalores de M_5 e o conjunto dos zeros de $P_5(z)$ são iguais, como o esperado. A Figura 4.1 mostra os zeros de $P_5(z)$ no intervalo $[-2, 7; 7, 2]$.

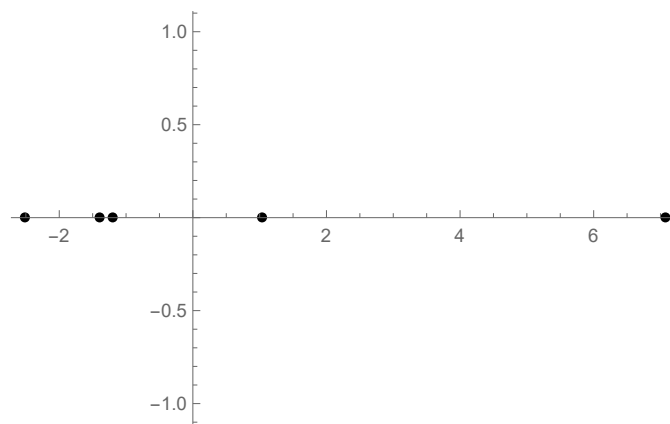


Figura 4.1: Zeros de $P_5(z)$ para $-2,7 \leq z \leq 7,2$.

De modo geral, o processo de encontrar os zeros de um polinômio pode ser muito complexo, envolver muitas operações aritméticas, muito esforço computacional, entre outros. O mesmo se estende ao trabalho de procurar autovalores de uma matriz. Quando o problema é determinar os zeros dos polinômios gerados por (4.3), podemos recorrer ao Teorema de Geršgorin que determina uma região no plano complexo que contém os autovalores de uma matriz associada a este polinômio. Contudo, essas regiões podem ser refinadas a fim de obter uma localização mais precisa dos autovalores. Antes de exibir um refinamento do conjunto de Geršgorin como em (3.10), devemos abordar dois teoremas que são equivalentes, logo basta provar apenas um deles.

Teorema 4.1.2. *Se $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, e se $|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A)$, para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, $i \neq j$, então A é não singular.*

¹MATLAB (MATrix LABoratory) trata-se de um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar, onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

Demonstração. Por contradição, suponha que $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisfaz

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A), \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (4.7)$$

e é singular. Logo existe $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ não nulo tal que $AX = 0$. Tomando-se os valores absolutos de cada componente em X , encontramos s e t tais que $|x_t| > 0$ e

$$|x_t| \geq |x_s| \geq \max\{|x_k| : 1 \leq k \leq n, \quad k \neq s, \quad k \neq t\}. \quad (4.8)$$

Com isso, $AX = 0$ implica em $a_{i,i}x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}x_j$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Tomando-se os valores absolutos e aplicando a desigualdade triangular, segue que

$$|a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}||x_j|, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Escolhendo $i = t$, nas desigualdades (4.8) e (4.9), temos

$$|a_{t,t}||x_t| \leq \sum_{j=1, j \neq t}^n |a_{t,j}||x_j| \leq r_t(A)|x_s|. \quad (4.10)$$

Se $|x_s| = 0$, então a desigualdade (4.10) se reduz a $|a_{t,t}||x_t| = 0$, conseqüentemente, $|a_{t,t}| = 0$, que contradiz o fato de que $|a_{i,i}| > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ em (4.7). Logo, $|x_s| > 0$, escolhendo $i = s$ em (4.9), obtemos

$$|a_{s,s}||x_s| \leq r_s(A)|x_t|.$$

Multiplicando a desigualdade acima por (4.10), temos

$$|a_{t,t}||a_{s,s}||x_t||x_s| \leq r_t(A)r_s(A)|x_t||x_s|,$$

como $|x_t||x_s| > 0$, segue que $|a_{t,t}||a_{s,s}| \leq r_t(A)r_s(A)$ que contradiz (4.7). $\square$

Seja $M_n = A_n^{-1}B_n$ a matriz cujos autovalores são os zeros do polinômio $P_n(z)$, se definirmos para $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$,

$$\begin{aligned} K_{i,j}(M_n) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - m_{ii}||z - m_{jj}| \leq r_i(M_n)r_j(M_n)\}, \\ K(M_n) &:= \bigcup K_{i,j}(M_n), \end{aligned} \quad (4.11)$$

somos capazes de enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.3. *Para qualquer matriz $M_n = [m_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, e $\lambda \in \sigma(M_n)$, existe um par de naturais distintos i e j , com $i, j = 1, 2, \dots, n$, tais que $\lambda \in K_{i,j}(M_n)$. Como isso é válido para cada autovalor de (M_n) , então $\sigma(M_n) \subset K(M_n)$.*

Uma vez que os Teoremas 4.1.2 e 4.1.3 são equivalentes, não será necessário a demonstração para o Teorema 4.1.3.

Teorema 4.1.4. *Seja $M_n = [m_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, então $K(M_n) \subset G(M_n)$, em que $G(M_n)$ é definido de acordo com (3.10).*

Demonstração. Considere i e j dois naturais distintos em $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $z \in K_{i,j}(M_n)$. De (4.11), segue que

$$|z - m_{ii}||z - m_{jj}| \leq r_i(M_n)r_j(M_n).$$

Se $r_i(M_n)r_j(M_n) = 0$, então $z = m_{ii}$ ou $z = m_{jj}$. Como $m_{ii} \in G_i(M_n)$ e $m_{jj} \in G_j(M_n)$, então $z \in G_i(M_n)$ ou $z \in G_j(M_n)$ que implica $z \in G(M_n)$.

Se $r_i(M_n)r_j(M_n) > 0$, então

$$\frac{|z - m_{ii}|}{r_i(M_n)} \cdot \frac{|z - m_{jj}|}{r_j(M_n)} \leq 1.$$

Note que ambos fatores à esquerda da desigualdade acima não podem exceder uma unidade ao mesmo tempo. Logo $z \in G_i(M_n)$ ou $z \in G_j(M_n)$. Portanto,

$$K(M_n) := \bigcup_{i,j \in N, i \neq j} K_{i,j}(M_n) \subset \bigcup_{i,j \in N, i \neq j} \{G_i(M_n) \cup G_j(M_n)\} = \bigcup_{\lambda \in N} G_\lambda(M_n) := G(M_n).$$

□

Com o Teorema 4.1.4, podemos enunciar um teorema semelhante que foi adaptado para a localização dos zeros de (4.3).

Teorema 4.1.5. *Os zeros de $P_n(z)$ gerados por (4.3), para todo $n \geq 1$, estão dentro da região $R_2 = K_{max} \cup K_n$, tal que*

$$K_{max} = \{z \in \mathbb{C} : (|z - (-a_0 + b_1)|)^2 \leq \tilde{k}\},$$

com $\tilde{k} = \max \{r_i(M_n)r_j(M_n), i, j = 1 \dots, n-1, i \neq j\}$, e

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z + a_0| |z - (-a_0 + b_1)| \leq \tilde{r}\},$$

em que $\tilde{r} = \max \{r_i(M_n), i = 1 \dots, n-1\}$.

Demonstração. A demonstração consiste em definir cada um dos conjuntos $K_{ij}(M_n)$ dados em (4.11) e concluir que $K(M_n) = R_2$. Com efeito, para $i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j$, note que

$$K_{i,j}(M_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-a_0 + b_1)|^2 \leq r_i(M_n)r_j(M_n)\}.$$

Para $i = n$ e $j = 1, \dots, n-1$, como $r_n(M_n) = 1$, segue que

$$K_{n,j}(M_n) := \{z \in \mathbb{C} : |z + a_0| |z - (-a_0 + b_1)| \leq r_j(M_n)\}.$$

Analogamente, quando $j = n$ e $i = 1, \dots, n-1$,

$$K_{i,n}(M_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z + a_0| |z - (-a_0 + b_1)| \leq r_i(M_n)\}.$$

Então, escolhendo $\tilde{r}$ de tal modo que $\tilde{r} = \max \{r_i(M_n), i = 1, \dots, n-1\}$, temos

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z + a_0| |z - (-a_0 + b_1)| \leq \tilde{r}\}.$$

Além disso, escolhendo $\tilde{k}$ tal que $\tilde{k} = \max \{r_i(M_n)r_j(M_n), i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j\}$, temos

$$K_{max} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-a_0 + b_1)|^2 \leq \tilde{k}\}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} K(M_n) = \bigcup_{i,j \in N, i \neq j} K_{i,j}(M_n) &= \left(\bigcup_{i,j \in N - \{n\}, i \neq j} K_{i,j}(M_n) \right) \cup \left(K_{n,j}(M_n) \cup K_{i,n}(M_n) \right) \\ &= K_{max} \cup K_n = R_2. \end{aligned}$$

□

Perceba que o Teorema 4.1.5 é uma aplicação do Teorema 4.1.4 sobre o caso particular em que as matrizes são dadas na forma $M_n = A_n^{-1}B_n$ como apresentado anteriormente. Para finalizarmos a seção atual, vamos exemplificar o Teorema 4.1.5 utilizando o polinômio

$$P_7(z) = z^7 - 6z^6 + 8z^5 - \frac{13z^4}{4} + \frac{11z^3}{2} - \frac{3z^2}{4} + \frac{11z}{16} - \frac{3}{16},$$

que é gerado pela relação (4.3) tomando-se $a_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_0 = -0,5$, $c_1 = 1$ e $c_0 = 0.25$. Para os coeficientes escolhidos, temos

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_7^{-1}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_7} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,75 & 4,25 & 7 & 11,25 & -2,75 \\ 1 & 1 & 1,5 & 2,75 & 4,25 & 7 & -1,75 \\ 0 & 1 & 1 & 1,5 & 2,75 & 4,25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & 2,75 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1,5 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_7}. \end{aligned}$$

Calculando-se $r_i(M_7)$, $1 \leq i \leq 7$, temos

$$r_1(M_7) = 29,5, \quad r_2(M_7) = 18,25, \quad r_3(M_7) = 10,5, \quad r_4(M_7) = 6, \quad r_5(M_7) = 2,75$$

$$r_6(M_7) = 1,5, \quad \text{e} \quad r_7(M_7) = 1,$$

consequentemente, $\tilde{r} = r_1(M_7) = 29,5$ e $\tilde{k} = r_1(M_7)r_2(M_7) = 538,375$. Conhecendo-se $\tilde{r}$, $\tilde{k}$ e os demais raios dos círculos de Geršgorin podemos determinar o conjunto de Geršgorin e R_2 . Dada a estrutura da matriz M_7 , podemos notar que existem seis círculos concêntricos no ponto $C = (1, 0)$, logo basta considerar apenas aquele com o maior raio, ou seja, a região $|z - 1| \leq r_1(M_7)$. A última região é referente a última linha de M_7 e é dada por $|z| \leq 1$. Uma vez que o círculo maior contém o menor, concluimos que o conjunto de Geršgorin é dado pelo conjunto

$$G(M_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq r_1(M_7)\}.$$

Além disso, $K_7 = \{z \in \mathbb{C} : |z||z - 1| \leq \tilde{r}\}$ e $K_{max} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1|^2 \leq \tilde{k}\}$, logo $R_2(M_7) = K_7 \cup K_{max}$. As figuras a seguir ilustram os zeros de $P_7(z)$, os conjuntos determinados acima e uma comparação entre R_2 e $G(M_7)$.

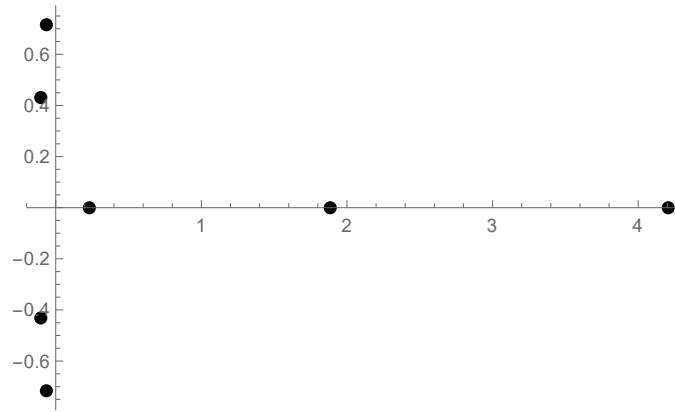


Figura 4.2: Zeros de $P_7(z)$.

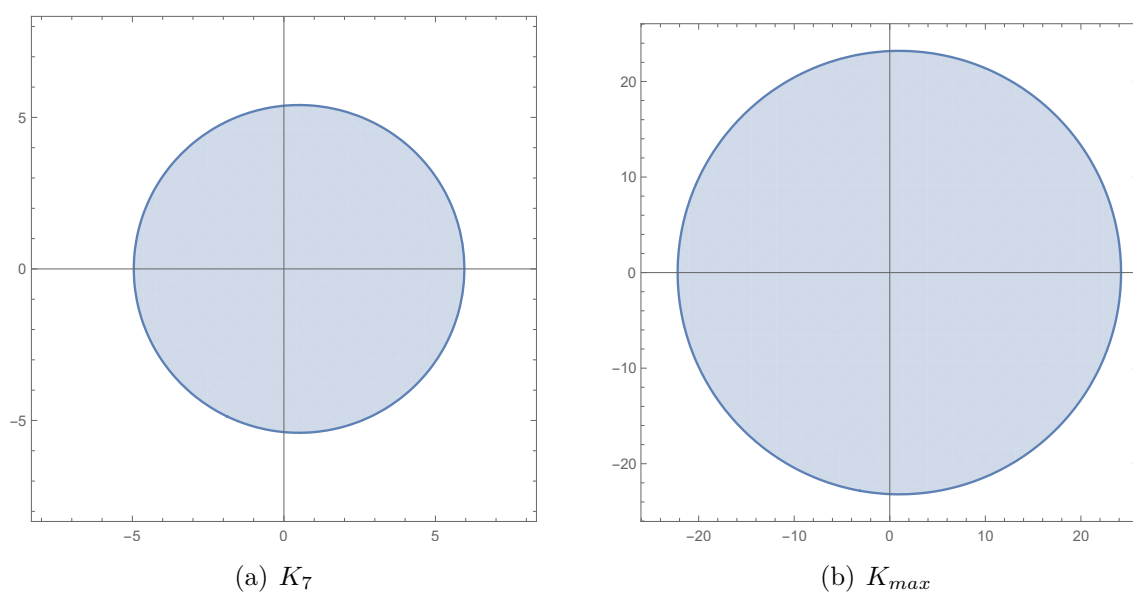


Figura 4.3: Representação dos conjuntos K_7 e K_{max} referentes a matriz M_7 .

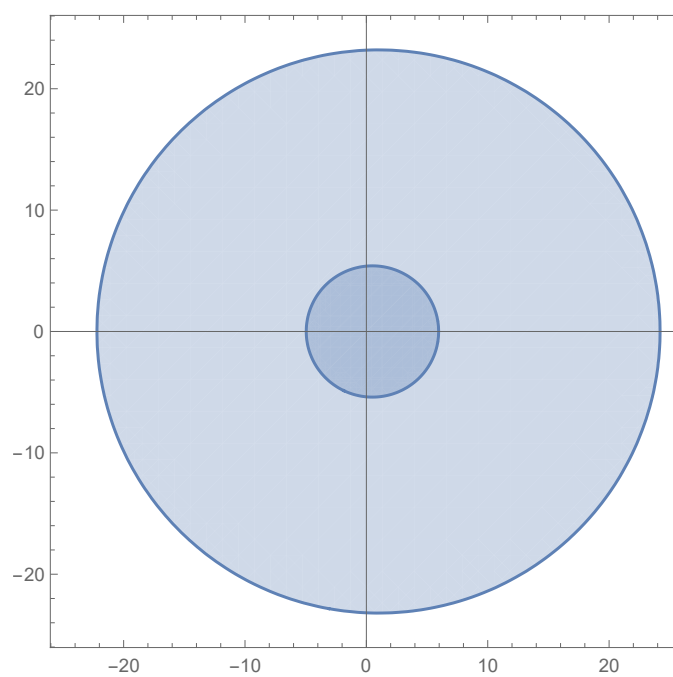


Figura 4.4: $R_2(M_7) = K_7 \cup K_{max}$.

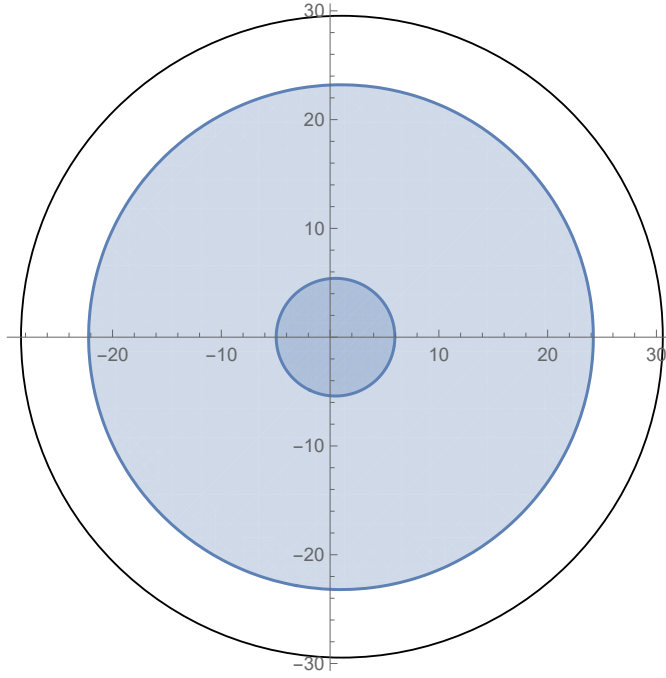


Figura 4.5: Comparação entre os conjuntos de $R_2(M_7)$ e $G(M_7)$.

A Figura 4.5 evidencia que a região determinada pelo Teorema 4.1.5 é menor que o conjunto de Geršgorin e portanto, fornece uma região no plano mais refinada.

4.2 Polinômios pares e ímpares

O caso especial que foi apontado durante a Introdução, trata-se de um subcaso da relação de recorrência (4.3), pois conta com uma nova restrição sobre os polinômios $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$. Considere $a_0 = b_1 = c_0 = 0$, assim temos os polinômios $A(z) = -z$, $B(z) = b_0$ e $C(z) = c_1 z$. Segue diretamente de (4.3) que

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - b_0S_{n-2}(z) - c_1zS_{n-3}(z), \quad (4.12)$$

com $b_0, c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $S_0(z) = 1$ e $S_{-n}(z) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $a_0 = b_1 = c_0 = 0$, então os elementos da primeira linha de M_n são da forma

$$\begin{aligned} m_{1,1} &= 0 \\ m_{1,2} &= b_0 + c_1 \\ m_{1,j} &= b_0 a'_{1,j-1} + a'_{1,j+1}, \text{ para } j = 3, \dots, n-1 \\ m_{1,n} &= b_0 a'_{1,n-1} \end{aligned}$$

e para as próximas linhas, temos

$$\begin{aligned} m_{i+1,j+1} &= m_{i,j}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \text{ e } j = 1, \dots, n-2 \\ m_{i,n} &= b_0 a'_{i,n-1}, i = 2, \dots, n \\ m_{j+1,j} &= 1, \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\ m_{i,j} &= 0, \text{ para } i \geq j+2, j = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Assim, se n é par, M_n é da forma

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & b_0 + c_1 & 0 & c_1(b_0 + c_1) & 0 & \dots & 0 & b_0 c_1^{(n-2)/2} \\ 1 & 0 & b_0 + c_1 & 0 & c_1(b_0 + c_1) & \dots & c_1^{(n-3)/2}(b_0 + c_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_0 + c_1 & 0 & \dots & 0 & b_0 c_1^{(n-4)/2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e para n ímpar, M_n é dado por

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & b_0 + c_1 & 0 & c_1(b_0 + c_1) & 0 & \dots & c_1^{(n-3)/2}(b_0 + c_1) & 0 \\ 1 & 0 & b_0 + c_1 & 0 & c_1(b_0 + c_1) & \dots & 0 & b_0 c_1^{(n-3)/2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que qualquer que seja n , temos $K_{max} = \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq \tilde{k}\}$ e $K_n = \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq \tilde{r}\}$. Isto é, os zeros de $S_n(z)$ estão contidos na região

$$\bar{R}_2 = \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq \bar{k}\}, \quad \bar{k} = \max\{\tilde{k}, \tilde{r}\}. \quad (4.13)$$

A primeira propriedade que enunciamos sobre a sequência de polinômios $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ gerada por (4.12) é quanto a paridade do polinômio e seu grau.

Lema 4.2.1. *Se n é par (ímpar), então o polinômio $S_n(z)$ é par (ímpar).*

Demonstração. De fato, temos que $S_1(z) = z$ é uma função ímpar e $S_2(z) = z^2 - b_0$ é uma função par. Para n par, suponha que $S_n(z)$ e $S_{n-2}(z)$ são funções polinomiais pares e $S_{n-1}(z)$ uma função polinomial ímpar. Assim, de (4.12) seque que

$$\begin{aligned} S_{n+1}(-z) &= -zS_n(-z) - b_0S_{n-1}(-z) + c_1zS_{n-2}(-z) \\ &= zS_n(z) - b_0S_{n-1}(z) - c_1zS_{n-2}(z) \\ &= -(zS_n(z) - b_0S_{n-1}(z) - c_1zS_{n-2}(z)) = -S_{n+1}(z), \end{aligned}$$

ou seja, $S_{n+1}(z)$ é uma função polinomial ímpar. Analogamente, para n ímpar, suponha que $S_n(z)$ e $S_{n-2}(z)$ são funções polinomiais ímpares e $S_{n-1}(z)$ uma função polinomial par. Logo,

$$\begin{aligned} S_{n+1}(-z) &= -zS_n(-z) - b_0S_{n-1}(-z) + c_1zS_{n-2}(-z) \\ &= zS_n(z) - b_0S_{n-1}(z) - c_1zS_{n-2}(z) = S_{n+1}(z), \end{aligned}$$

que é uma função polinomial par. □

O Lema 4.2.1 é extremamente relevante para obter informações sobre os zeros destes polinômios. Note que se $\bar{z}$ é zero de $S_n(z)$, então seu oposto também o é. Assim, para os zeros reais, temos uma simetria em relação à origem do eixo real. Para os zeros da forma $\bar{z} = \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$, uma simetria em relação à origem no eixo imaginário. Por fim, para os zeros da forma $\bar{z} = \alpha + \lambda i$ em que $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, uma simetria em relação às bissetrizes dos quadrantes pares ou ímpares do plano complexo.

Lema 4.2.2. *Se n é ímpar, $z = 0$ é um zero de $S_n(z)$. Além disso, se $\text{sgn}(b_0) = \text{sgn}(c_1)$, $z = 0$ é um zero simples. Para n par, $S_n(0) \neq 0$.*

Demonstração. Note que se n é par,

$$S_n(0) = (-b_0)S_{n-2}(0) = (-b_0)(-b_0)S_{n-4}(0) = \cdots = (-b_0)^{n/2}S_0(0) = (-b_0)^{n/2} \neq 0.$$

Se n é ímpar,

$$S_n(0) = (-b_0)^{(n-1)/2}S_1(0) = 0.$$

Com isso, mostramos que $z = 0$ é zero do S_n quando n é ímpar, mas não é zero de S_n se n é par. Mostremos agora que $z = 0$ é zero simples quando b_0 e c_1 coincidem em sinal. Derivando (4.12), temos

$$S'_n(z) = S_{n-1}(z) - b_0S'_{n-2}(z) - c_1S_{n-3}(z) + z(S'_{n-1}(z) - c_1S'_{n-3}(z)),$$

que ao ser avaliada em 0, se reduz a

$$S'_n(0) = S_{n-1}(0) - b_0S'_{n-2}(0) - c_1S_{n-3}(0).$$

Veja que para n par,

$$S'_n(0) = -b_0S'_{n-2}(0) = \cdots = (-b_0)^{n/2}S'_2(0) = 0.$$

Quando n é ímpar, temos

$$\begin{aligned} S'_1(0) &= 1 > 0; \\ S'_3(0) &= -(2b_0 + c_1) \begin{cases} > 0 \text{ se } b_0 < 0 \text{ e } c_1 < 0 \\ < 0 \text{ se } b_0 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \end{cases}; \\ S'_5(0) &= 3b_0^2 + 2b_0c_1 > 0 \text{ se } \text{sgn}(b_0) = \text{sgn}(c_1); \\ S'_7(0) &= -(4b_0^3 + 3b_0^2c_1) \begin{cases} > 0 \text{ se } b_0 < 0 \text{ e } c_1 < 0 \\ < 0 \text{ se } b_0 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo, suponha como hipótese indutiva que para todo $n > 1$, n ímpar:

$$S'_n(0) > 0 \text{ se } \frac{n-1}{2} \text{ é par e } \operatorname{sgn}(b_0) = \operatorname{sgn}(c_1)$$

e

$$S'_n(0) \begin{cases} > 0 \text{ se } b_0 < 0 \text{ e } c_1 < 0 \\ < 0 \text{ se } b_0 > 0 \text{ e } c_1 > 0 \end{cases} \text{ se } \frac{n-1}{2} \text{ é ímpar}.$$

Logo, para $n+2$,

$$\begin{aligned} S'_{n+2}(0) &= S_{n+1}(0) - b_0 S'_n(0) - c_1 S_{n-1}(0) \\ &= (-1)^{(n+1)/2} b_0^{(n+1)/2} - b_0 S'_n(0) - (-1)^{(n-1)/2} b_0^{(n-1)/2} c_1. \end{aligned}$$

Se $\frac{n+1}{2}$ é ímpar, $(n+1)$ é par, que implica em n ímpar e consequentemente, $(n-1)$ par e $\frac{n-1}{2}$ par. Sabendo disso, temos

$$S'_{n+2}(0) = -b_0^{(n+1)/2} - b_0 S'_n(0) - b_0^{(n-1)/2} c_1 = -(b_0^{(n+1)/2} + b_0 S'_n(0) + b_0^{(n-1)/2} c_1).$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$S'_{n+2}(0) < 0 \text{ se } b_0 > 0 \text{ e } c_1 > 0$$

e

$$S'_{n+2}(0) > 0 \text{ se } b_0 < 0 \text{ e } c_1 < 0.$$

Para $\frac{n+1}{2}$ par, temos $\frac{n-1}{2}$ ímpar e

$$S'_{n+2}(0) = b_0^{(n+1)/2} - b_0 S'_n(0) + b_0^{(n-1)/2} c_1,$$

tal que

$$S'_{n+2}(0) > 0 \text{ se } \operatorname{sgn}(b_0) = \operatorname{sgn}(c_1).$$

Logo, se n é ímpar, $S'_n(0) \neq 0$ e, consequentemente, $z = 0$ é um zero simples de $S_n(z)$, para todo $n \geq 1$. □

Vamos denotar os zeros do polinômio $S_n(z)$ de grau n por $z_{1,n}, z_{2,n}, \dots, z_{n,n}$.

Lema 4.2.3. *Para todo $n > 1$, se $\text{sgn}(b_0) = \text{sgn}(c_1)$, então os três polinômios consecutivos S_n, S_{n-1} e S_{n-2} não possuem zeros em comum.*

Demonstração. Primeiramente, note que

1. $S_1(z) = z$ e então $z_{1,1} = 0$;
2. $S_2(z) = z^2 - b_0$, $z_{1,2} = \sqrt{b_0}$ e $z_{2,2} = -\sqrt{b_0}$;
3. $S_3(z) = -z(2b_0 + c_1 - z^2)$ e então $z_{1,3} = \sqrt{2b_0 + c_1}$, $z_{2,3} = 0$ e $z_{3,3} = -\sqrt{2b_0 + c_1}$.

Assim, se $\text{sgn}(b_0) = \text{sgn}(c_1)$, é evidente que S_1, S_2 e S_3 não possuem zeros em comum.

Para a hipótese de indução, considere $\text{sgn}(b_0) = \text{sgn}(c_1)$, e suponha que S_n, S_{n-1} e S_{n-2} não possuem zeros em comum.

Para mostrar que essa propriedade ainda vale para os polinômios S_{n+1}, S_n e S_{n-1} , basta supor que existe $z_0 \neq 0$ tal que z_0 é zero de S_{n+1}, S_n e S_{n-1} . Segue de (4.12) que

$$0 = S_{n+1}(z_0) = -c_1 z_0 S_{n-2}(z_0).$$

Como $c_1 \neq 0$, então $S_{n-2}(z_0) = 0$, que é uma contradição, pois S_n, S_{n-1} e S_{n-2} não compartilham zeros. Portanto, não existe $z_0 \neq 0$ tal que z_0 é zero de S_{n+1}, S_n e S_{n-1} , o que prova o resultado. $\square$

Utilizaremos a volta do Teorema 4.0.1, citado no início deste capítulo e disponível em [1], para demonstrar o próximo resultado. Vale lembrar que os zeros de $S_n(z)$ são simétricos em relação a origem da reta real e por isso, basta considerar somente os zeros positivos $z_{1,n} > z_{2,n} > \dots > z_{[n/2],n} > 0$ em ordem decrescente na prova do teorema a seguir.

Teorema 4.2.1. *Se $b_0 > 0$ e $c_1 > 0$ em (4.12), $S_n(z)$ possui n zeros reais e distintos $z_{1,n} > z_{2,n} > \dots > z_{n,n}$ tal que*

- se n é par,

$$\begin{aligned} z_{1,n} &> z_{1,n-1} > z_{1,n-2} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > z_{2,n-2} > \dots \\ &> z_{n/2,n} > z_{n/2,n-1} = 0; \end{aligned} \tag{4.14}$$

- se n é ímpar,

$$\begin{aligned} z_{1,n} &> z_{1,n-1} > z_{1,n-2} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > z_{2,n-2} > \dots > z_{[n/2],n} \\ &> z_{[n/2],n-1} > z_{[n/2],n-2} = 0 = z_{[n/2]+1,n}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que $z_{1,n-1}, z_{2,n-1}, \dots, z_{n-1,n-1}$ e $z_{1,n-2}, z_{2,n-2}, \dots, z_{n-2,n-2}$ são os zeros de $S_{n-1}(z)$ e $S_{n-2}(z)$, respectivamente.

Além disso, os zeros de $S_n(z)$ estão no intervalo $(-\delta, \delta)$, em que $\delta = \sqrt{\hat{k}}$, com $\hat{k} = r_1(M_n)r_2(M_n)$.

Demonstração. Primeiramente, analisaremos o comportamento dos zeros dos polinômios S_1, S_2, S_3 e S_4 :

1. $S_1(z) = z$ e $z_{1,1} = 0$.

2. $S_2(z) = z^2 - b_0$, $z_{1,2} = \sqrt{b_0}$ e $z_{2,2} = -\sqrt{b_0}$. Consequentemente,

$$z_{1,2} > z_{1,1} > z_{2,2}.$$

3. $S_3(z) = zS_2(z) - (b_0 + c_1)z = z[(z - z_{1,2})(z - z_{2,2}) - (b_0 + c_1)]$. Note que $S_3(0) = 0$, $S_3(z_{1,2}) < 0$ e $S_3(z_{2,2}) > 0$. Então, $z_{1,3} \in (z_{1,2}, \infty)$ e $z_{3,3} \in (-\infty, z_{2,2})$. Logo,

$$z_{1,3} > z_{1,2} > z_{1,1} = 0 = z_{2,3} > z_{2,2} > z_{3,3}.$$

4. $S_4(z) = z[(z - z_{1,3})(z - z_{2,3})(z - z_{3,3}) - c_1S_1(z)] - b_0(z - z_{1,2})(z - z_{2,2})$. Note que $S_4(z_{3,3}) < 0$, $S_4(z_{2,3}) > 0$ e $S_4(z_{1,3}) < 0$. Então, $z_{1,4} \in (z_{1,3}, \infty)$, $z_{2,4} \in (z_{2,3}, z_{1,3})$, $z_{3,4} \in (z_{2,3}, z_{3,3})$ e $z_{4,4} \in (-\infty, z_{3,3})$. Além disso, $S_4(z_{1,2}) < 0$ e $S_4(z_{2,2}) < 0$. Consequentemente,

$$z_{1,4} > z_{1,3} > z_{1,2} > z_{2,4} > z_{2,3} = 0 > z_{3,4} > z_{2,2} > z_{3,3} > z_{4,4}.$$

Para a hipótese de indução, qualquer que seja $n \geq 3$, considere que os zeros dos polinômios S_n, S_{n-1} e S_{n-2} satisfazem as relações a seguir:

- se n é par,

$$\begin{aligned} z_{1,n} &> z_{1,n-1} > z_{1,n-2} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > z_{2,n-2} > \dots \\ &> z_{n/2,n} > z_{n/2,n-1} = 0; \end{aligned}$$

- se n é ímpar

$$\begin{aligned} z_{1,n} &> z_{1,n-1} > z_{1,n-2} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > z_{2,n-2} > \dots > z_{[n/2],n} \\ &> z_{[n/2],n-1} > z_{[n/2],n-2} = 0 = z_{[n/2]+1,n}. \end{aligned}$$

Para mostrar a validade das desigualdades acima para os polinômios S_{n+1} , S_n e S_{n-1} , devemos notar que

$$S_{n+1}(z) = z \prod_{j=1}^n (z - z_{j,n}) - b_0 \prod_{j=1}^{n-1} (z - z_{j,n-1}) - c_1 z \prod_{j=1}^{n-2} (z - z_{j,n-2}). \quad (4.16)$$

- se $n+1$ é par, segue de (4.16) que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(S_{n+1}(z_{k,n})) &= (-1)^k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \operatorname{sgn}(S_{n+1}(z_{k,n-1})) &= \begin{cases} (-1)^k, & k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}, \\ (-1)^{k+1}, & k = \frac{n+1}{2}, \dots, n-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Além disso, $\lim_{z \rightarrow \infty} S_{n+1}(z) > 0$ e $\lim_{z \rightarrow -\infty} S_{n+1}(z) > 0$. Com isso, temos a existência de $(n+1)/2$ zeros reais de $S_{n+1}(z)$ tal que

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &> z_{1,n} > z_{1,n-1} > z_{2,n+1} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > \dots \\ &> z_{(n+1)/2,n+1} > z_{(n+1)/2,n} = 0, \end{aligned}$$

o que prova o resultado para $n+1$ par.

- se $n + 1$ é ímpar, segue de (4.16) que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(S_{n+1}(z_{k,n})) &= (-1)^k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \operatorname{sgn}(S_{n+1}(z_{k,n-1})) &= \begin{cases} (-1)^k, & k = 1, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1, \\ (-1)^{k+1}, & k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1, \dots, n-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Além disso, $\lim_{z \rightarrow \infty} S_{n+1}(z) > 0$ e $\lim_{z \rightarrow -\infty} S_{n+1}(z) < 0$. Com isso, temos a existência de $\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1$ zeros reais de $S_{n+1}(z)$ tal que

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &> z_{1,n} > z_{1,n-1} > z_{2,n+1} > z_{2,n} > z_{2,n-1} > \dots \\ &> z_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+1} > z_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n} > z_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n-1} = 0 = z_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1, n+1}. \end{aligned}$$

Dada a simetria dos zeros, temos que a mesma propriedade se estende aos zeros negativos. Finalmente, do Teorema 4.1.5 e da estrutura da matriz M_n , segue que os zeros de $S_n(z)$ estão contidos no intervalo $(-\delta, \delta)$, em que $\delta = \sqrt{\hat{k}} = r_1(M_n)r_2(M_n)$. $\square$

Observe que o Teorema 4.2.1 além de estabelecer condições para que os zeros de $S_n(z)$ sejam reais para todo n , também nos mostra que os zeros destes polinômios cumprem a propriedade de entrelaçamento assim como vimos anteriormente quando tratamos sobre os polinômios ortogonais.

Corolário 4.2.1.1. *Se $b_0 < 0$ e $c_1 < 0$ em (4.12), então todos os zeros de $S_n(z)$ são distintos, imaginários puros e se entrelaçam no eixo y imaginário.*

Demonstração. Considere a sequência de polinômios $\{\tilde{S}_n(z)\}_{n=0}^\infty$ gerada por

$$\tilde{S}_n(z) = z\tilde{S}_{n-1}(z) + b_0\tilde{S}_{n-2}(z) + c_1z\tilde{S}_{n-3}(z),$$

com $b_0, c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\tilde{S}_0(z) = 1$ e $\tilde{S}_1(z) = z$. Note que se n é par (ímpar), o polinômio $\tilde{S}_n(z)$ é par (ímpar).

Utilizando a transformação $z = -iz'$, isto é, $z' = iz$ e observando que

$$S_n(z') = (-1)^{n/2}\tilde{S}_n(z), \quad \text{para } n \text{ par},$$

e

$$S_n(z') = (-1)^{(n-1)/2} i \tilde{S}_n(z), \text{ para } n \text{ ímpar},$$

a prova segue diretamente do Teorema 4.2.1. $\square$

Teorema 4.2.2. *Se $b_0 > 0$ e $c_1 > 0$ em (4.12), cada zero positivo de $S_n(z)$ é uma função crescente de b_0 . Além disso, cada zero negativo de $S_n(z)$ é uma função decrescente de b_0 .*

Demonstração. Para os zeros positivos, considere $\epsilon \geq 0$ e

$$S_{n_\epsilon}(z) = zS_{n-1}(z) - (b_0 + \epsilon)S_{n-2}(z) - c_1zS_{n-3}(z)$$

com n zeros reais $z_{1,n_\epsilon} > z_{2,n_\epsilon} > \dots > z_{n,n_\epsilon}$. Observe que $z_{k,n} = z_{k,n_0}$, $k = 1, \dots, n$. Além disso,

$$S_{n_\epsilon} = S_n(z) - \epsilon S_{n-2}(z)$$

e $S_{n_\epsilon}(z_{k,n}) = -\epsilon S_{n-2}(z_{k,n})$, $k = 1, \dots, n$.

Logo, para $\epsilon > 0$ e das relações (4.14) e (4.15), segue que

$$\text{sgn}(S_n(z_{k,n})) = (-1)^k, k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor. \quad (4.17)$$

Como os zeros de $S_{n_\epsilon}(z)$ são reais e $\lim_{z \rightarrow \infty} S_n(z) > 0$, temos de (4.17) que $z_{k,n} < z_{k,n_\epsilon}$. A segunda parte do teorema segue diretamente da propriedade de simetria dos zeros em relação a origem. $\square$

Para finalizarmos esta seção, vamos exemplificar alguns dos resultados apresentados. Para isso, considere os polinômios $A(z) = -z$, $B(z) = 0,01$ e $C(z) = z$. Assim, obtemos a seguinte relação

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - 0,01S_{n-2}(z) - zS_{n-3}(z), \quad (4.18)$$

com $S_0(z) = 1$ e $S_{-n}(z) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da relação (4.18), segue que para $n = 5, 6$ e 7 ,

$$\begin{aligned} S_5(z) &= z^5 - \frac{76}{25}z^3 + \frac{203}{10000}z, \\ S_6(z) &= z^6 - \frac{81}{20}z^4 + \frac{5303}{5000}z^2 - 10^{-6}, \\ S_7(z) &= z^7 - \frac{253}{50}z^5 + \frac{3121}{1000}z^3 - \frac{19}{62500}z. \end{aligned}$$

Suas matrizes de Hessenberg superior são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} M_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 \\ 1 & 0 & 1,01 & 0 & 0,01 \\ 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 & 0,01 \\ 1 & 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 \\ 1 & 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 & 0,01 \\ 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 & 1,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando as somas dos elementos de cada linha, excluindo-se o elemento na diagonal principal, obtemos facilmente os raios dos círculos de Geršgorin e, com isso, podemos determinar as regiões $\bar{R}_2$, definidas em (4.13), para cada uma das matrizes acima. Isto é,

$$\begin{aligned} \bar{R}_2(M_5) &= \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq 4,0804\}, \quad \bar{k} = \max\{4,0804; 2,02\}, \\ \bar{R}_2(M_6) &= \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq 6,1306\}, \quad \bar{k} = \max\{6,1306; 3,02\}, \\ \bar{R}_2(M_7) &= \{z \in \mathbb{C} : (|z|)^2 \leq 9,1809\}, \quad \bar{k} = \max\{9,1809; 3,03\}. \end{aligned}$$

A seguir, ilustramos cada uma das regiões $\bar{R}_2(M_5)$, $\bar{R}_2(M_6)$ e $\bar{R}_2(M_7)$ em uma única figura, haja vista que $\bar{R}_2(M_5) \subset \bar{R}_2(M_6) \subset \bar{R}_2(M_7)$.

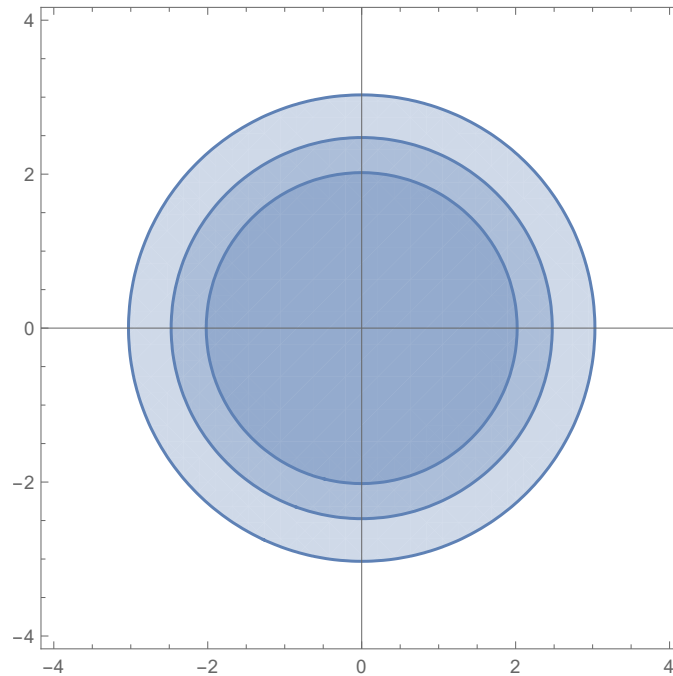


Figura 4.6: $\bar{R}_2(M_5) \subset \bar{R}_2(M_6) \subset \bar{R}_2(M_7)$.

A próxima figura nos mostra que os zeros dos polinômios $S_5(z)$, $S_6(z)$ e $S_7(z)$ se entrelaçam, como previsto no Teorema 4.2.1 e estão representados pelas cores verde, azul e vermelho, respectivamente.

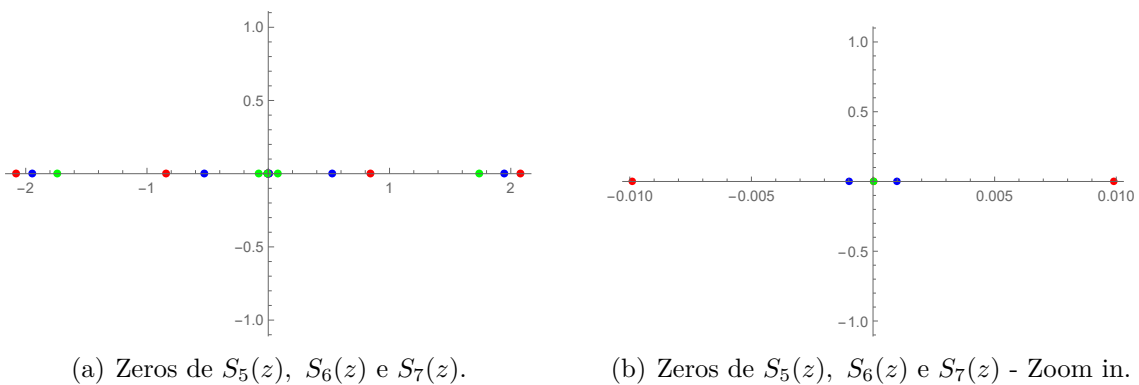


Figura 4.7: Representação do entrelaçamento dos zeros de $S_5(z)$, $S_6(z)$ e $S_7(z)$.

Observe que ao realizar a contagem dos zeros de cada polinômio na Figura 4.7 à esquerda, podemos sentir a falta de três zeros de $S_7(z)$, dois zeros de $S_6(z)$ e um zero de $S_5(z)$. Essa má impressão é esclarecida ao ampliar a figura numa vizinhança suficientemente próxima da origem, como na figura à direita. Os zeros que não podemos

ver com clareza, devido a escala da Figura 4.7 à esquerda são

$$z_{3,7} \approx 0,0099, \quad z_{4,7} = 0 \text{ e } z_{5,7} \approx -0,0099, \text{ zeros de } S_7(z),$$

$$z_{3,6} \approx 0,001 \text{ e } z_{4,6} \approx -0,001, \text{ zeros de } S_6(z),$$

$$z_{3,5} = 0, \text{ zero de } S_5(z).$$

Note que a origem é zero simples dos polinômios $S_5(z)$ e $S_7(z)$.

Considerações finais

Desenvolvemos este trabalho com a intenção de investigar um caso particular da relação de recorrência de quatro termos citada em (4.3), ampliando a literatura existente neste assunto. Fomos capazes de estabelecer propriedades interessantes sobre nosso objeto de estudo que assemelham-se a resultados já conhecidos em outro tipo de relação. Essa semelhança poderá servir como motivação para novas pesquisas e aprofundamento no assunto.

É evidente que ainda existe um vasto horizonte a ser explorado quando o assunto é acerca de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de quatro termos. Com a intenção de contribuir de alguma forma nesta área, nos esforçamos para compreender como é o comportamento dos zeros de polinômios em um caso particular desse tipo de relação. Concluímos que, dadas as condições necessárias sobre os coeficientes dos polinômios lineares que compõe a RRQT, teremos zeros reais, distintos e simétricos em relação a origem do eixo real ou ainda, zeros imaginários puros, distintos e simétricos no eixo imaginário.

No que diz respeito à localização destes zeros, incluímos uma abordagem matricial, representando-os por autovalores, como feito para os polinômios ortogonais na reta real em (3.1) e para a sequência de polinômios da em (3.11). Com isso, expandimos nossas ferramentas para determinar regiões onde estão localizados, seja na reta ou no plano complexo, utilizando-se apenas de operações aritméticas elementares para definir os conjuntos $G(M)$ ou $K(M)$, sendo M uma matriz.

Em suma, é uma teoria muito linda de ser estudada e ainda há muito para ser escrito. Esperamos que este trabalho sirva como motivação para novas descobertas nesta área.

Bibliografia

- [1] R. Adams. On hyperbolic polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. *Calcolo*, 57(3):1–24, 2020.
- [2] J. T. do Amaral. Método de Viète para resolução de equações do 2.º grau. Disponível em: [https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm#:~:text=Vamos%20descrever%20o%20m%C3%A9todo%20de,c%20%3D%200%2C%20a%20.&text=a\(u%20%2B%20uv%20%2B,v\)%20%2B%20c%20%3D%200..](https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm#:~:text=Vamos%20descrever%20o%20m%C3%A9todo%20de,c%20%3D%200%2C%20a%20.&text=a(u%20%2B%20uv%20%2B,v)%20%2B%20c%20%3D%200..) Acesso em: 31 de out. 2022.
- [3] G. Birkhoff; S. Mac Lane. *A Survey of Modern Algebra*. Macmillan, New York, 5th edition, 1996.
- [4] B. Bojanov. On an estimation of the roots of algebraic equations. *Applicationes Mathematicae*, 11(2):195–205, 1970.
- [5] V. A. Botta; C. F. Bracciali; J. A. Pereira. Some properties of classes of real self-reciprocal polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 433(2):1290–1304, 2016.
- [6] N. Bourbaki. *Topologie générale*. Hermann, Paris, 2nd edition, 1955.
- [7] A. I. de S. Costa. Uma demonstração do teorema fundamental da álgebra. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, out. 2016.

-
- [8] E. Coussement; J. Coussement; Van Assche, W. Asymptotic zero distribution for a class of multiple orthogonal polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(10):5571–5588, 2008.
- [9] B. Datt; N. K. Govil. On the location of the zeros of a polynomial. *Journal of Approximation Theory*, 24(1):78–82, 1978.
- [10] E. X. L. de Andrade; C. F. Bracciali; F. R. Rafaeli. *Introdução aos polinômios ortogonais*, volume 64. SBMAC, São Carlos, SP, 2012.
- [11] L. L. Dines. On convexity. *The American Mathematical Monthly*, 45(4):199–209, 1938.
- [12] W. B. Jones; W. J. Thron; H. Waadeland. A strong Stieltjes moment problem. *Transactions of the american mathematical society*, 261(2):503–528, 1980.
- [13] I. Lankham; B. Nachtergaele; A. Schilling. The fundamental theorem of algebra. Disponível em: <https://www.math.ucdavis.edu/~anne/WQ2007/mat67-Ld-FTA.pdf>. Acesso em: 31 de out. 2022.
- [14] E. L. Lima. *Curso de Análise Real*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1976.
- [15] G. V. Milovanović; D. S. Mitrinović; T. M. Rassias. *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*. World Scientific, 1994.
- [16] J. J. O'Connor; E. F. Robertson. Albert Girard. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Albert/. Acesso em: 31 de out. 2022.
- [17] G. Pólya; G. Szego. Problems and theorems in analysis ii: theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry. *Grundl. Math. Wiss*, 216, 2004.
- [18] A. P. da Silva; A. Sri Ranga. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros. *Linear algebra and its applications*, 397:299–324, 2005.

-
- [19] S. C. Theodore. *An introduction to orthogonal polynomials*. Courier Corporation, 2011.
- [20] K. Tran; A. Zumba. Zeros of polynomials with four-term recurrence. *Involve, a Journal of Mathematics*, 11(3):501–518, 2018.
- [21] K. Tran; A. Zumba. Zeros of polynomials with four-term recurrence and linear coefficients. *The Ramanujan Journal*, 55(2):447–470, 2021.
- [22] R. S. Varga. *Gershgorin and his circles*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2010.
- [23] J. L. Walsh. An inequality for the roots of an algebraic equation. *Annals of mathematics*, 25(2):285–286, 1924.

Apêndice

Abaixo está uma cópia em do algoritmo implementado no MATLAB que determina os polinômios pertencentes a sequência gerada por

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - S_{n-2}(z) - zS_{n-3}(z).$$

Obviamente, pode ser ajustado de acordo com os polinômios $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$.

Entradas: Inserir os dados referentes a ordem da matriz A_n e os coeficientes dos polinômios $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ que são entradas das matrizes A_n e B_n .

$n = 10$; $a0 = 0$; $b1 = 0$; $b0 = 1$; $c1 = 1$; $c0 = 0$;

Condições iniciais

if $n < 3$ || $b1^2 + b0^2 == 0$ || $c1^2 + c0^2 == 0$

disp('Condições iniciais não satisfeitas')

return

end

Algoritmo para obter a inversa de A_n

$An = \text{diag}(\text{ones}(1, n)) + \text{diag}((-b1) * \text{ones}(1, n-1), 1) + \text{diag}((-c1) * \text{ones}(1, n-2), 2)$;

$I = \text{eye}(n)$;

for $k = (n-1) : -1 : 1$

```

if k == (n - 1)
    I(k, :) = I(k, :) + b1 * I(k + 1, :);
else
    I(k, :) = I(k, :) + b1 * I(k + 1, :) + c1 * I(k + 2, :);
end
end
Ainversa = I;
if An * Ainversa == eye(n) & Ainversa * An == eye(n)
    disp('A inversa de An é dada por')
    Ainversa
end

```

Produzindo a matriz M_n

```

Bn = diag(ones(1, n - 1), -1) + diag((-a0) * ones(1, n)) + diag(b0 * ones(1, n - 1), 1) +
    diag(c0 * ones(1, n - 2), 2);
Mn = Ainversa * Bn;
disp('Mn é dado por')
Mn

```

Construindo P_n e determinando seus zeros

```

syms z
P = (z * eye(n) - Mn);
Pn = det(P, 'Algorithm', 'minor - expansion')
coefs = input('Vetor com os coeficientes do polinômio Pn da maior para menor potência');
polinomio = coefs;
zeros = roots(polinomio)
autovalores = eig(Mn)

```

Calculando os raios dos discos de Geršgorin, $\tilde{r}$ e $\tilde{k}$.

```

for i = 1 : (n - 1)
    R(i) = norm(Mn(i, :), 1) - abs(Mn(i, i));
end

```

```
[tioR,j] = max(R);  
Raux = R;  
Raux(j) = 0;  
disp('k~')  
tioK = tioR * max(Raux)  
disp('r~')  
tioR
```

Plotando os zeros de P_n ou S_n

```
figure(1)  
plot(real(zeros),imag(zeros),'b*')  
legend('zeros')  
title('Título')  
grid  
xlabel('Eixoreal')  
ylabel('Eixoimaginário')
```