
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
Faculdade de Ciências – Campus de Bauru

Gabriel Henrique Ricarelli de Souza

**História e modelagem matemática:
abordagens para os anos finais do ensino fundamental**

Bauru
2025

Gabriel Henrique Ricarelli de Souza

**História e modelagem matemática:
abordagens para os anos finais do ensino fundamental**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Matemática da Faculdade de Ciências da
Universidade Estadual Paulista —Júlio de
Mesquita Filho, campus de Bauru, como um
dos requisitos para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Sônia Cristina
Poltroniere Silva

Bauru

2025

S729h

Souza, Gabriel Henrique Ricarelli de

História e modelagem matemática : abordagens para os anos finais do ensino fundamental / Gabriel Henrique Ricarelli de Souza. -- Bauru, 2025

77 p.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura - Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientadora: Sônia Cristina Poltroniere Silva

1. Matemática. 2. Modelagem matemática. 3. História da matemática. 4. Ensino. I. Título.

Gabriel Henrique Ricarelli de Souza

**História e modelagem matemática:
abordagens para os anos finais do ensino fundamental**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Matemática da Faculdade de Ciências da
Universidade Estadual Paulista —Júlio de
Mesquita Filho, campus de Bauru, como um
dos requisitos para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática

Área de Concentração: Educação Matemática

Data da defesa: 17/11/2025

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Sônia Cristina Poltroniere Silva
UNESP – Faculdade de Ciências - Bauru

Prof. Dr. Guilherme Francisco Ferreira
UNESP – Faculdade de Ciências - Bauru

Prof. Dr. Tatiana Miguel Rodrigues
UNESP – Faculdade de Ciências - Bauru

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, fonte de sabedoria e força, por me iluminar e sustentar em cada etapa desta caminhada. À Nossa Senhora, pela intercessão e pelo amparo nos momentos de dificuldade, sendo sempre guia e consolo. E à minha família, pelo amor incondicional, apoio e incentivo, que foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me guiado ao longo de minha graduação e durante toda minha vida, graças a sua providência esse trabalho foi possível, agradeço também a bem-aventurada Virgem Maria por sua intercessão junto a Deus. Sob seu manto santo encontrei forças e conforto para bem enfrentar os desafios da graduação.

A minha esposa, Letícia Ricarelli, que esteve presente ao meu lado durante toda a minha graduação e durante a produção desse trabalho, dando-me apoio e encorajamento, sem seu apoio essa conquista não seria possível.

Aos meus amados pais, Luís e Elisângela Pereira de Souza, expresso o meu agradecimento por toda dedicação e sacrifício que fizeram por mim ao longo de toda minha vida, por meio de renúncias individuais, me proporcionaram oportunidades que me permitiram chegar até aqui, vocês me ensinaram, por meio do sacrifício de vocês, o verdadeiro significado de amar.

Em especial aos meus avós, Antônio e Maria Lúcia Pereira de Souza, obrigado por sempre me apoiarem e estarem comigo, cada conselho que me deram estará guardado comigo para sempre, que aí do céu, junto de Deus, vocês possam olhar e interceder por mim, para que um dia eu me torne um pouco das pessoas maravilhosas que vocês foram.

Agradeço a toda minha querida família, na pessoa da minha irmã, Thais Ricarelli, agradeço a cada encorajamento para me dedicar aos estudos desde pequeno, o apoio de cada um, de perto ou de longe, fez toda diferença na minha caminhada até aqui.

Ao escritor J.R.R Tolkien, cuja obra sempre foi fonte de inspiração para mim, graças a seus livros aprendi a não temer o desconhecido, agradeço a me ensinar que o verdadeiro valor está no caminho percorrido e não no destino final.

A minha orientadora, Profa. Sônia Poltroniere Silva, pela orientação paciente, pelo incentivo constante e por sempre abraçar as ideias que coloquei na construção desse projeto.

Por fim, aos meus colegas de classe, especialmente ao Dream Team, agradeço por cada plantão de estudos, por cada risada e acima de tudo pelo companheirismo nesses últimos quatro anos.

— A educação é coisa do coração.

—São João Bosco

RESUMO

A matemática muitas vezes é considerada pelos alunos uma disciplina abstrata e sem contexto, o que pode dificultar o processo de ensino-aprendizagem. Esse trabalho propõe uma abordagem construtivista para o ensino de equações de primeiro e segundo grau, integrando história da matemática e modelagem matemática para trazer significado ao processo de ensino-aprendizagem. Para isso, foram produzidas sequências didáticas que levam em consideração a construção do conhecimento matemático em civilizações antigas, como na Babilônia e no Egito. Buscando propiciar uma aprendizagem significativa, a produção dessas sequências didáticas se fundamenta em revisões bibliográficas e na análise de documentos históricos.

Palavras-Chave: Equações. Ensino. História da matemática. Modelagem matemática.

ABSTRACT

Mathematics is often considered by students to be an abstract and contextless subject, which can make the teaching and learning process more difficult. This work proposes a constructivist approach to teaching first- and second-degree equations, integrating the history of mathematics and mathematical modeling to bring meaning to the teaching-learning process. To achieve this, didactic sequences were developed that take into account the construction of mathematical knowledge in ancient civilizations, such as Babylon and Egypt aiming to promote meaningful learning. The production of these didactic sequences is based on bibliographic reviews and the analysis of historical documents.

Keywords: Equations. Teaching. History of mathematics. Mathematical modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Repersentação babilônica dos números de 1 a 59	20
Figura 2: Tábua babilônica	21
Figura 3: Tábua Plimpton 322	22
Figura 4: Pápiro de Rhind	25
Figura 5: Papíro de Moscou	25
Figura 6: Numerais no Antigo Egito	26
Figura 7: Exemplo de escrita em hieróglifo	26
Figura 8: Frações no Antigo Egito	28
Figura 9: Números triangulares	30
Figura 10: Números pentagonais	30
Figura 11: Representação de n^2	31
Figura 12: Mapa do vale do Indo, destacando Mohenjo Daro e Harappa	35
Figura 13: A transformação dos símbolos Indo-Arábicos	36
Figura 14: Página do livro Lilavati	37
Figura 15: Página do livro Bijaganita	38
Figura 16: Mapa da expansão islâmica entre os séculos VII e IX	40
Figura 17: Método de resolução	42
Figura 18: Completando quadrados	43
Figura 19: Exemplo para aula, representação geométrica de $x^2 + 6x = 16$	60
Figura 20: Representação geométrica do exercício em sala	61
Figura 21: Representação geométrica do exercício em sala	73
Figura 22: Representação de um campo quadrado de lado x com faixas retangulares de largura 2 m.	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Transformação dos valores identificados na tábua YBC 7289	21
Tabela 2: Representação do problema discursivo	23
Tabela 3: Interpretação do verso 77	38
Tabela 4: Interpretação do verso 77	56
Tabela 5: Interpretação do verso 77	71
Tabela 6: Interpretação dos problemas do material de pesquisa utilizado na seção 5.2	72

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	<i>Fundamentação teórica</i>	15
1.2	<i>Metodologia de pesquisa</i>	16
2	ESTUDO SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	19
2.1	<i>Matemática na Babilônia</i>	19
2.2	<i>Matemática no Egito Antigo</i>	24
2.3	<i>Matemática na Grécia Antiga</i>	29
2.4	<i>Matemática na Índia Antiga e Medieval</i>	35
2.5	<i>Matemática Islâmica</i>	40
3	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA	44
3.1	<i>Campo de Pesquisa</i>	44
3.2	<i>Trabalhos que utilizaram história da matemática como prática pedagógica</i>	45
4	MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA	49
4.1	<i>Campo de Pesquisa</i>	49
4.2	<i>Trabalhos que utilizaram modelagem matemática como prática pedagógica</i>	52
5	SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS UTILIZANDO HISTÓRIA E MODELAGEM MATEMÁTICA	54
5.1	<i>Bhaskara e a equação do segundo grau</i>	54
5.2	<i>Al-Khwarizmi e o Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala</i>	58
5.3	<i>Método da falsa posição no Egito Antigo</i>	62
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	65
	REFERÊNCIAS	66

1. INTRODUÇÃO

Considerando que grande parte dos estudantes, tanto do Ensino Básico quanto do Ensino Superior, consideram a matemática uma disciplina excessivamente abstrata, surge a necessidade de se colocar sentido ao processo de ensino-aprendizagem. Essa necessidade é amplamente discutida por Skovsmose (2000), que destaca que a aprendizagem significativa ocorre quando o estudante consegue relacionar conceitos matemáticos com situações reais e socialmente relevantes. Diante dessa problemática surge a possibilidade de se trabalhar a história da matemática no ensino, visando dar significado a aprendizagem e colocar os alunos em contextos históricos em que determinados conceitos surgiram e como resultados que hoje são considerados clássicos foram descobertos ou desenvolvidos.

Para descrever a ideia inicial do trabalho quanto a utilização da história da matemática no Ensino Básico, devemos levar em consideração o posicionamento de Mendes (2022) que quando fala a respeito do uso da história no ensino da matemática, se refere às explorações didáticas da história das ideias produzidas em contextos socioculturais diferentes e como, atualmente elas podem ser utilizadas no ensino de matemática, o presente trabalho não pretende utilizar a história da matemática como “curiosidade” para o ensino de determinado conteúdo, pretende, na elaboração das atividades, apresentar como determinado raciocínio em determinado momento histórico se desenvolveu e dessa maneira fazer com que os estudantes, utilizando desse raciocínio, modelem e resolvam problemas.

Visto que, no ensino de matemática, buscando colocar significado aos conteúdos abordados no Ensino Básico, é importante estudar diferentes metodologias, além da história da matemática, pretendemos utilizar a modelagem matemática, visando aproximar os problemas históricos dos conteúdos vistos na escola.

A modelagem matemática oferece muitas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem, despertando nos estudantes o interesse pela matemática, incentivando a pesquisa e o estudo de problemas e possibilitando a elaboração de soluções por meio de ferramentas matemáticas. Esse pensamento é ressaltado por autores que discutem a modelagem como estratégia didática, ao destacarem que ela favorece a compreensão conceitual, a contextualização e o protagonismo do estudante no processo de construção do conhecimento (Biembengut; Hein, 2014).

Este trabalho propõe atividades voltadas para o ensino de equações e funções do primeiro e segundo grau. Nessas atividades pretendemos utilizar contextos históricos como por exemplo: operações no Antigo Egito, dando ênfase na regra da falsa posição; os problemas de

segundo grau resolvidos por Bháskara; e a “álgebra” árabe, estudando matemáticos como Al-Khwarizmi e suas obras. As atividades que serão desenvolvidas tem como objetivo atender as seguintes habilidades da Base Comum Curricular:

- (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- Realizar um estudo sobre a história da matemática e o processo de ensino-aprendizagem, relacionando a modelagem matemática as situações-problema históricas, que serão propostas, a partir do estudo feito, visando elaborar atividades para serem trabalhadas no Ensino Básico.
- Investigar de que maneira determinadas civilizações pensavam a matemática, buscando compreender o raciocínio relacionado com cada método de resolução de equações de primeiro e segundo grau.

O presente trabalho apresenta sua relevância, pois a partir das sequências didáticas que serão desenvolvidas, os estudantes podem criar uma ligação atrativa com a matemática, possibilitando dessa maneira uma motivação durante as aulas. Outro ponto a destacar é que apesar da História da Matemática já ser um campo estabelecido como uma abordagem para ao ensino de matemática, ainda há uma baixa adesão dos professores em utilizar essa abordagem em suas aulas, dessa maneira a criação de sequências didáticas para a utilização em sala de aula pode ser um incentivo para que mais professores tenham contato com essa abordagem. A baixa adesão dos professores se dá também pela pouca valorização que há na sociedade brasileira da história da matemática e da história da matemática brasileira, isso fica evidente, por exemplo, em cursos de Licenciatura em Matemática que muitas vezes não têm uma disciplina de História da Matemática em sua grade curricular.

O presente trabalho propõe três sequências didáticas fundamentadas na história e na modelagem matemática, com o propósito de serem futuramente aplicadas em sala de aula. A intenção é que, em pesquisas posteriores ou em sala de aula, essas propostas possam ser utilizadas e avaliadas, permitindo verificar sua efetividade no processo de ensino-

aprendizagem.

No artigo “A Interface entre História e Matemática”, D’Ambrósio (2006) fala sobre a vertente da História da Matemática em aulas de matemática e como essa vertente é pouco utilizada no Brasil:

Uma vertente pouco cultivada é a da História Oral. Essencialmente, retratar, pelos seus próprios depoimentos, a vida e obra de matemáticos brasileiros. Além da valorização e do reconhecimento da contribuição de nossos conterrâneos à Matemática e à sua difusão aqui no Brasil, esse trabalho servirá para preservar a memória nacional, extremamente importante para os historiadores do futuro. Nos países que foram berço de desenvolvimento matemático, uma prática interessante tem sido “Excursões Matemáticas” de cunho histórico. Por exemplo, visitas à casa onde nasceu Isaac Newton, à universidade onde estudou. Outra atividade é o levantamento de monumentos dedicados a um matemático célebre e a iconografia. No Brasil esse material é paupérrimo. Mas há um pequeno museu de Malba Tahan, é muito interessante. Ou mesmo visita para reconhecimento de obras a bibliotecas públicas e privadas. (D’Ambrosio, 2006, p.11)

É importante destacar ainda que tanto a história da matemática quanto a modelagem matemática favorecem a interdisciplinaridade, permitindo a integração da matemática com outras disciplinas e áreas do conhecimento. A história da matemática possibilita conexões com conteúdos de História, Geografia e Filosofia, uma vez que o estudo do desenvolvimento de conceitos matemáticos exige, por vezes, entender os contextos socioculturais, políticos e científicos em que foram produzidos. A modelagem matemática aproxima a matemática de fenômenos reais e do cotidiano possibilitando a conexão com disciplinas como Ciências, Física, Química e Biologia, já que problemas provenientes dessas áreas podem ser representados e interpretados por meio de modelos matemáticos. Dessa maneira, ambas as metodologias promovem uma aprendizagem mais integrada e significativa, concordando com o que defendem autores que ressaltam o potencial da interdisciplinaridade no ensino e o papel das metodologias ativas na construção de conhecimentos contextualizados (Bassanezi, 2015).

1.1 Fundamentação teórica

Para a fundamentação teórica desse trabalho, foram utilizados diversos textos, principalmente o livro História da Matemática de autoria de Tatiana Roque, que surge como o primeiro livro propriamente brasileiro, como o livro traz: “este é o primeiro livro de história geral da matemática propriamente brasileiro e resultado de pesquisa original.” (ROQUE, 2012, p. 7).

O livro citado, aborda a evolução e desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos, a autora busca conectar os conceitos matemáticos de cada época com as necessidades de cada povo. Além de escrever sobre o desenvolvimento da história da matemática, esse livro

traz uma visão humana da matemática, pois leva em consideração questões filosóficas e culturais dos povos em que essa ciência foi desenvolvida. Além disso, é importante que entendamos a matemática como a ciência abstrata, porém básica.

A ideia desse trabalho foi levar em consideração trabalhos que veem sendo produzidos na área e a partir desses trabalhos, criar um trabalho novo utilizando a história da matemática e modelagem matemática no ensino de equações de primeiro e segundo grau nos anos finais do Ensino Fundamental.

As atividades que foram elaboradas no presente trabalho são sequências didáticas, se faz necessário dessa maneira que entendamos o que vem a ser sequência didática, de acordo com Zabala (2008, p.18) sequência didática se trata de: “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos”. Ou seja, uma sequência didática é um conjunto de atividades interligadas, idealizadas com o objetivo de ensinar conteúdos de forma estruturada e progressiva, evitando deixar lacunas no processo de ensino-aprendizagem. O planejamento das atividades é elaborado para atender os objetivos iniciais do professor, possibilitando dessa maneira uma aprendizagem com significado.

Para a construção das atividades, levou-se em consideração também a ideia de se organizar as atividades de maneira progressiva, de acordo com Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), as sequências didáticas devem ser planejadas com o objetivo de organizar as situações de aprendizagem de forma progressiva, permitindo que os alunos avancem na construção de conhecimentos a partir de contextos significativos.

É importante salientar que utilizar sequências didáticas pode contribuir significativamente para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem de matemática, as atividades da sequência didática podem ter um caráter investigativo, no caso investigando conceitos matemáticos em momentos históricos, promovendo assim uma construção sólida do conhecimento. Por esse motivo, o resultado desse trabalho vem a ser exatamente as sequências didáticas.

1.2 Metodologia de pesquisa

A priori, é necessário que exista uma compressão do que é pesquisa científica. Segundo Gil (2010), a pesquisa científica é o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo encontrar respostas às questões que são feitas inicialmente, ou seja, aos problemas que são propostos.

Fundamentado nessa concepção do que é pesquisa científica, é importante definirmos pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. A pesquisa quantitativa é basicamente um método numérico para coleta de dados enquanto a pesquisa qualitativa aborda temas e situações que não podem ser quantificadas, esse tipo de pesquisa busca analisar os fenômenos sociais de determinado tempo e local.

Esse trabalho foi desenvolvido em campo teórico e prático, a partir de uma construção de sequências didáticas, a partir de uma abordagem qualitativa. As sequências didáticas serão projetadas com o objetivo de promover um aprendizado significativo.

- 1º Estágio: Estudo de documentos históricos:

A primeira etapa do trabalho, o foco foi o estudo de documentos históricos, essa etapa permitiu o desenvolvimento de uma base teórica para a construção das sequências didáticas nas fases posteriores do trabalho, auxiliando em uma melhor reflexão a respeito da relevância dos conteúdos em determinado momento histórico.

- 2º Estágio: Revisão bibliográfica:

Nesta etapa, foi realizada uma revisão da bibliografia que aborda a história da matemática como prática pedagógica, essa revisão teve como objetivo situar este trabalho no contexto dos trabalhos acadêmicos em andamento.

- 3º Estágio: Estudo dos conceitos de modelagem matemática como prática pedagógica e revisão de trabalhos que utilizaram modelagem matemática no ensino:

Na terceira etapa do presente trabalho, o foco foi investigar como a modelagem matemática pode ser desenvolvida em sala de aula e de que maneira os trabalhos que utilizam modelagem matemática a desenvolvem dentro do processo ensino-aprendizagem.

- 4º Estágio: Desenvolvimento de sequências didáticas:

Na última etapa do trabalho, foi realizado o desenvolvimento das sequências didáticas. Essas sequências foram elaboradas com o objetivo de propiciar um ensino de matemática que valorize a história e a contextualização dos conceitos matemáticos, tornando as aulas mais dinâmicas e significativas para os alunos.

Na elaboração das sequências, inicialmente a ideia era partir de um questionamento aberto sobre um dos temas históricos abordados, de maneira que os alunos, trabalhando em grupos, conseguissem pesquisar e propor soluções para o problema apresentado. Entretanto, ao longo do desenvolvimento desse trabalho e com base em vivências na rede pública de ensino, foi possível notar que essa abordagem demandaria muito tempo para a exploração de pouco conteúdo, o que tornaria difícil a execução prática da proposta dentro do contexto atual da

escola. Por conta disso, foi feita uma reformulação nas atividades, mantendo o caráter investigativo da modelagem matemática, porém com um direcionamento mais bem estruturado e compatível com o tempo disponível em sala de aula.

Dessa maneira, as atividades foram propostas de maneira que os alunos, ao desenvolverem em grupo um problema histórico, já tivessem anteriormente um contexto apresentado pelo professor. A história da matemática foi utilizada para possibilitar que os alunos tivessem um entendimento mais profundo e contextualizado dos conceitos, atribuindo sentido ao conhecimento desenvolvido em sala de aula.

2. ESTUDO SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O desenvolvimento da matemática se deu em diferentes regiões do mundo, respondendo a necessidades específicas de cada cultura. O conhecimento matemático foi se desenvolvendo de maneira plural, influenciado por contextos sociais, religiosos, econômicos e científicos que determinaram suas aplicações e avanços. Como destaca Roque (2012), a matemática é fruto de processos históricos diversos, marcados pela criatividade humana diante de desafios concretos.

É muito importante que o professor de matemática compreenda a matemática em seus diferentes contextos históricos, pois isso permite reconhecer que ela não é apenas um corpo de técnicas e fórmulas abstratas, mas um saber profundamente ligado ao cotidiano das sociedades. Cada povo, antigo ou contemporâneo, diante de sua realidade, produziu e desenvolveu formas originais de organizar números, calcular fenômenos, medir espaços e criar métodos de contagem. Nesse sentido, Eves (2004) ressalta que a análise histórica da matemática revela como diferentes civilizações contribuíram, de maneira complementar, para a construção dos conceitos que hoje são ensinados nas escolas.

Dessa forma, o presente trabalho destaca como diferentes civilizações colaboraram para a formação do conhecimento matemático. Portanto, exemplos provenientes da Babilônia, do Egito, da Grécia, da Índia e da matemática árabe serão abordados. A partir dessa análise, buscamos compreender como cada cultura, a partir de suas visões de mundo, desenvolveu métodos e conceitos matemáticos que, integrados, formam parte essencial da matemática utilizada atualmente.

2.1 Matemática na Babilônia

A antiga Babilônia desenvolveu uma das matemáticas mais influentes da Antiguidade. O surgimento da escrita e o da matemática, nesse povo, estão intimamente ligados. A matemática construída nessa civilização, desenvolvida aproximadamente entre 2000 a.C. e 3000 a.C., conservou-se estável ao longo dos séculos, a principal característica desta matemática é a utilização do sistema sexagesimal, de base 60, conforme a Figura 1.

1	11	21	31	41	51
2	12	22	32	42	52
3	13	23	33	43	53
4	14	24	34	44	54
5	15	25	35	45	55
6	16	26	36	46	56
7	17	27	37	47	57
8	18	28	38	48	58
9	19	29	39	49	59
10	20	30	40	50	

Figura 1: Representação babilônica dos números de 1 a 59
 Fonte: *ORTIZ, 2020*.

Um fato interessante que podemos notar é que o número sessenta é representado pelo mesmo símbolo que o número um, isso mostra que o sistema utilizado na Babilônia antiga é um sistema posicional de base sessenta combinado com um a base dez, pois os símbolos utilizados até cinquenta e nove mudam de dez em dez.

O sistema de nossa sociedade também é caracterizado como um sistema posicional. Utilizamos diferentes símbolos para representar os números de 1 a 9, o número dez, por sua vez, é representado pelo mesmo símbolo do número um, colocado em outra posição. Dessa maneira, podemos notar que utilizamos um sistema posicional de base dez.

Uma das grandes vantagens dos sistemas posicionais, é que um conjunto pequeno, limitado, de símbolos já é o suficiente para representar qualquer número que necessitamos, sendo ele inteiro ou fracionário. Os símbolos que utilizamos, chamados de algarismos – 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 – permitem escrevermos números extremamente pequenos como a espessura de um fio de cabelo humano, até valores muito grandes como a velocidade da luz.

Outro fato importante da matemática babilônica é que o sistema sexagesimal permitia uma grande quantidade de divisores exatos, como, 2,3,4,5 e 6, possibilitando dessa maneira cálculos mais fáceis e rápidos, tornando-se uma base eficiente de se trabalhar. Ainda atualmente podemos observar que a influência da utilização da base sexagesimal pelos babilônicos ainda perdura, afinal utilizamos essa base para a medição de ângulos e do tempo (BOYER, 2010).

Os registros da matemática desenvolvida pelos babilônicos chegou até os dias atuais por meio principalmente de tábuas de por meio de cuneiforme. Encontram-se, nessas tábuas, tabelas de multiplicação, divisão, algarismos para calcular raiz quadradas e cúbicas, números recíprocos e outros conhecimentos matemáticos. Um exemplo interessante é a tábua YBC 7289, vide Figura 2, que apresenta uma aproximação da raiz quadrada de 2, com uma precisão de seis

casas decimais, mostrando dessa forma a sofisticação dos métodos que eram empregados pela civilização babilônica (IFRAH, 1997).

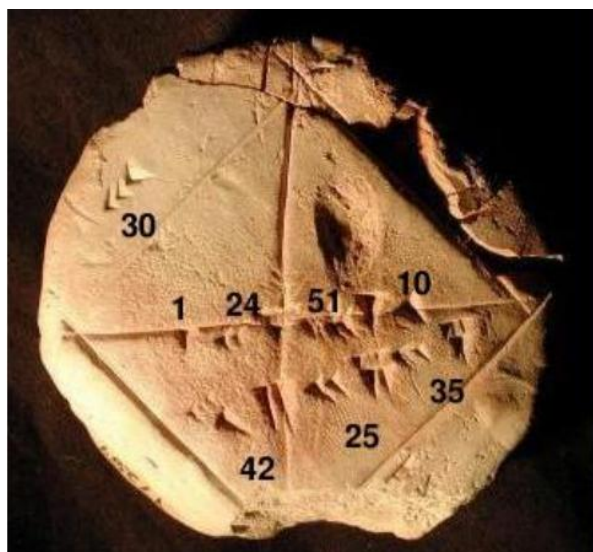


Figura 2: Tábua babilônica YBC 7289

Fonte: Extraída de: <https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html>

Essa tábua constitui o valor da diagonal de um quadrado de lado 30, em notação sexagesimal. Os valores identificados após a leitura, na linha horizontal, são indicados na Tabela 1.

Tabela 1: Transformação dos valores identificados na tábua YBC 7289

Notação sexagesimal	Transformação	Notação decimal
1	$\frac{1}{60^0}$	1
24	$\frac{24}{60^1}$	0,4
51	$\frac{51}{60^2}$	0,0141
10	$\frac{10}{60^3}$	0,00004629...

Fonte: Elaboração dos autores

Após realizarmos a soma de $\frac{1}{60^0} + \frac{24}{60^1} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ obtemos 1,41424629, sendo assim, uma das primeiras aproximações para raiz quadrada de 2. Os outros valores presentes na tábua, 42, 25 e 35 na base 60, são o valor sexagesimal da divisão de $\sqrt{2}$ por 2.

A tábua Plimpton 322, vide Figura 3, datada de cerca de 1800 a.C. é outro artefato de

grande importância para compreender a matemática babilônica, essa tábua mostra o conhecimento pelos babilônicos das relações métricas em triângulos retângulos, antecedendo em muitos séculos os registros gregos do Teorema de Pitágoras. Estudos indicam que os resultados presentes nessa tábua tinham aplicação prática em áreas como agrimensura, construção e astronomia, evidenciando a relação entre a matemática babilônica e as necessidades de sua sociedade (ROQUE,2012).



Figura 3: Tábua Plimpton 322

Fonte: Extraída de: <https://www.youtube.com/watch?v=guc1QFPtWNY&t=406s> (2022)

Além da aplicação prática, a matemática desenvolvida pelos babilônicos também se constrói como um saber escolar que era transmitido nas chamadas “casas de tábuas”, locais onde os escribas eram formados. Esses indivíduos eram responsáveis e desempenhavam papel importante na administração, no comércio e nas atividades ligadas à agricultura e à religião, mostrando assim a relevância da matemática na cultura babilônica. Desse modo, pode-se inferir que a matemática na antiga Babilônia estabeleceu bases sólidas para o desenvolvimento de conceitos que influenciaram o pensamento matemático em diversas partes do mundo (BOYER, 2010).

A álgebra desenvolvida pelos babilônios é caracterizada pela não utilização de fórmulas. Conforme destaca Roque (2012), a resolução de equações de primeiro e segundo grau se dava de forma discursiva, sem a formulação tradicional que conhecemos hoje. A placa BM 13200, que apresenta uma solução de uma equação do 1º grau, e a Placa BM 13901 que apresenta uma solução de equação do 2º grau, são exemplos da maneira com que esse povo resolvia equações e entendia a álgebra.

Exemplo extraído da Placa BM 13200 (RICIERE, 1991): “Encontrei duas pedras iguais de massa desconhecida. Quando subtraí 3 minas, restaram 17 minas. Qual é a massa de uma das pedras? Resolução: Some 3 com 17 e divida o resultado por 2.”

Em linguagem matemática utilizada atualmente:

$$2x - 3 = 17 \rightarrow 2x = 17 + 3 \rightarrow x = \frac{20}{2} = 10.$$

Exemplo extraído da Placa BM 13901 “Adicionei a superfície o lado do meu quadrado e obtive 0,45. Qual é o lado?”

Em linguagem matemática atual:

$$x^2 + x = 0,45.$$

A Tabela 2 apresenta a tradução dos procedimentos extraídos das tábuas para a resolução e também a representação em termos atuais.

Tabela 2: Representações do problema discursivo

Equação discursiva	Representação Sexagesimal	Representação em termos atuais
Tome 1	0,60	B
Quebre 1 na metade	0,30	$\frac{B}{2}$
Multiplique 0,30 por 0,30	0,15	$\left(\frac{B}{2}\right)^2$
Some 0,15 a 0,45	0,60	$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C$
1 é raiz de 1	0,60	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C}$
Subtraia 0,30 de 1	0,30	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2}$

Fonte: Elaboração dos autores

Dessa maneira, pelos procedimentos apresentados, o lado do quadrado é 0,30. Ao reescrevermos o resultado obtido, adaptando para termos atuais temos:

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

É interessante notar que a solução obtida dessa maneira se assemelha bastante com o que conhecemos hoje pela fórmula de Bhaskara.

Compreender o desenvolvimento da matemática na Babilônia é fundamental para o professor de Matemática porque essa civilização oferece exemplos concretos de como conceitos

ainda hoje ensinados surgira de necessidades práticas e problemas reais. Ao conhecer a os métodos babilônicos, como o uso do sistema sexagesimal, das tábuas de raízes e das soluções discursivas de equações, o professor pode apresentar aos estudantes que a matemática não surgiu do nada, pronta, mas foi desenvolvida historicamente como resposta a demandas sociais como comércio, agrimensura e astronomia. Essa perspectiva ajuda a quebrar a ideia de que a matemática é abstrata e descontextualizada, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

2.2 Matemática no Egito Antigo

A matemática no Egito antigo combina um pragmatismo administrativo, relacionado à organização de terras, impostos, armazenamento de grãos e arquitetura avançada, com a elaboração de conceitos abstratos, expressos, principalmente de forma retórica. Para que compreendamos a matemática antiga, precisamos considerar seus usos sociais e técnicos, estudar a matemática do antigo Egito, exige que se entenda de que maneira essa civilização se estruturou. (ROQUE, 2012).

As principais fontes do conhecimento matemático desenvolvido nessa sociedade se encontrar nos papiros matemáticos, especialmente o Papiro de Rhind (1550 a.C.), vide Figura 4 e o papiro de Moscou (1850 a.C.). Nesses papiros encontramos diversos conhecimentos de várias áreas da matemática, desde problemas de aritmética até problemas de geometria, esses problemas são sempre apresentados em forma de enunciado seguidos de um algoritmo para a resolução, fica claro o caráter prático dos problemas: cálculos para repartir alimentos, determinação de áreas em campos, volumes de celeiros, entre outros. Esses papiros deixam claro que o objetivo principal de sua escrita era oferecer procedimentos para resolver situações concretas.

O papiro de Rhind, encontrado nas ruínas de Tebas, possui 85 problemas matemáticos, se tornando assim o documento matemático mais completo do período faraônico, medindo 30 cm de largura e 512 cm de comprimento, se encontra no museu britânico. (CHACE, 1927). Ainda segundo Roque (2012), podemos afirmar que os registros presentes no papiro de Rhind foram copiados de um documento ainda mais antigo. Esse papiro leva o nome de Henry Rhind, egiptólogo que o comprou em Luxor no Egito. Esse manuscrito é conhecido também como Papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou.

O papiro de Moscou, contém 25 problemas, inicialmente era conhecido como Papiro de Golenishchev, em homenagem a V. S. Golenishev, egiptólogo que o comprou em 1893. Esse papiro foi adquirido mais tarde, em 1917 pelo Museu de Belas Artes de Moscou. Apesar de

diversos problemas aparecerem também no Papiro de Rhind, o Papiro de Moscou tem alguns problemas bastantes distintos, como um em que há o cálculo de uma superfície curva e outro que se refere à área de uma pirâmide truncada.



Figura 4: Papiro de Rhind

Fonte: Extraída de: <https://www.britishmuseum.org/collection/image/37393001>

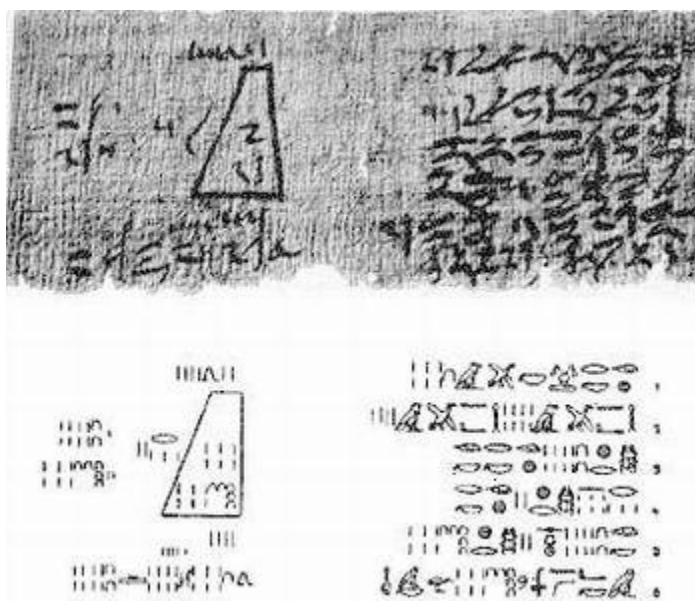


Figura 5: Papiro de Moscou

Fonte: Extraída de: <http://portalprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=26483>

De acordo com Roque (2012), a forma como os cálculos eram realizados estava vinculada às características dos sistemas de numeração utilizados por cada povo. A autora argumenta que a matemática praticada no Antigo Egito não era limitada apenas pela resolução de situações do cotidiano. Dessa forma, ela afirma:

[...] cálculos considerados difíceis em um sistema podem ser

considerados mais fáceis em outros. Isso mostra que as noções de “fácil” e de “difícil” não são absolutas e dependem das técnicas empregadas. Logo, a referência às necessidades práticas de cada um desses povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, com regras próprias. É preciso relativizar, portanto, a interpretação frequente de que a matemática nessa época se constituía somente de procedimentos de cálculos voltados para a resolução de problemas cotidianos (ROQUE, 2012, p. 38-39).

Os egípcios tinham um sistema de numeração não-posicional, diferentemente dos babilônios, isto é, a posição em que os símbolos eram escritos não importava. A grande desvantagem desse sistema de numeração é a dificuldade em se representar números grandes, pois essa tarefa se tornava muito trabalhosa por conta da repetição de símbolos.

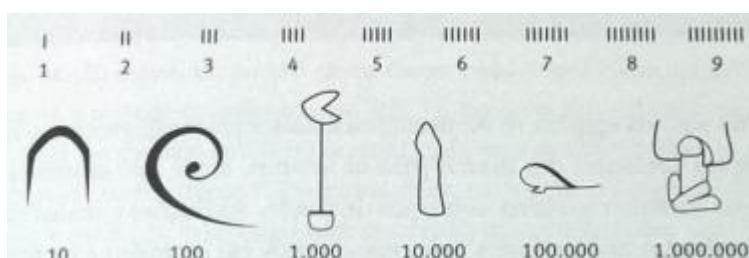


Figura 6: Numerais no Antigo Egito

Fonte: ROQUE (2012, p.73)

Conforme apresentando na Figura 6, o número 1 era indicado por um traço vertical, e esse símbolo podia se repetir até nove vezes, dessa forma, o número 8 é representado por oito barras. Os outros símbolos estão relacionados a potência de dez, dessa maneira, caracterizando o sistema como decimal. Nesse sistema, o número 10 era figurado por uma lança, o 100 por uma espiral, o 1000 por uma flor de lótus, o 10000 por um dedo, o 100000 por um girino ou por um pássaro e o 1000000 pela imagem de um deus com os braços levantados (ROQUE, 2012; MENDES, 2006).

A conversão para ler os números é utilizando a operação de adição, começamos da esquerda para a direita, os números maiores vêm na frente. A Figura 7 apresenta um exemplo.



Figura 7: Exemplo de escrita em hieróglifo

Fonte: ROQUE (2012, p.73)

Escrevendo em linguagem matemática atual, temos: $1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3244$.

No Egito Antigo, a principal operação aritmética utilizada era a adição, um exemplo é a leitura dos números, representada na Figura 7, a multiplicação e a divisão eram feitas por meio de sucessivas duplicações. Por exemplo, para multiplicar 63 por 19, somavam 63 consigo mesmo (126), após esse cálculo, duplicavam a resposta (252,504,1008) e por fim eram combinados os valores que correspondem a decomposição de 19 ($16+2+1$), ou seja, $1008 + 126 + 63 = 1197$. Para realizar a divisão, era utilizado o mesmo raciocínio, porém invertendo o processo: era duplicado o divisor ao invés de duplicar o multiplicando. Além dos antigos egípcios utilizarem a decomposição para resolver multiplicações e divisões, era comum o uso de multiplicação por dez, devido ao sistema decimal hieroglífico, e cálculos que envolviam frações unitárias (BOYER; MERZBACH, 2012).

Os egípcios também trabalhavam com frações, seu sistema consistia principalmente em frações unitárias, da forma $\frac{1}{n}$, algumas exceções eram o número $\frac{2}{3}$ que tinha uma notação própria e $\frac{1}{2}$ que eventualmente recebia um símbolo próprio. Para indicar que um número era uma fração. Os egípcios escreviam uma elipse acima de um número inteiro. Dessa forma, $\frac{1}{9}$ era representado por 9 barras verticais com o símbolo no topo. Esse modo de escrever as frações estava diretamente relacionado ao processo de divisão. Por exemplo, se é necessário dividir 5 sacos de grãos entre 8 pessoas, cada pessoa receberia metade de cada saco ($\frac{1}{2}$), restando dessa forma um saco, que então seria repartido igualmente a cada pessoa, ou seja, mais ($\frac{1}{8}$) para cada uma. Dessa maneira, o resultado era expresso sendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, diferentemente de nossa notação moderna que escreveríamos $\frac{5}{8}$, a nossa notação se comparada a egípcia, reflete um processo mais artificial, apenas para adequar a soma de frações enquanto a notação egípcia, por outro lado, representava diretamente o raciocínio prático para dividir, mostrando assim sua utilidade em situações concretas de partilha (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012). A Figura 8 representa a forma que era escrita as frações.

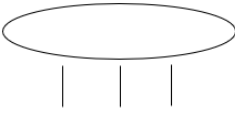
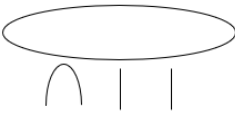
Representação egípcia	Representação atual
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{21}$

Figura 8: Frações no Antigo Egito
Fonte: Elaborado pelos autores

No papiro de Ahmes é possível notar que os antigos egípcios conheciam o procedimento equivalente a regra de três que temos atualmente, o problema 72 por exemplo, pergunta qual o número de pães de “força” 45 que são equivalentes a 100 pães de “força” 10, a resposta desse problema é apresentada como $\frac{100}{10} \times 45$ ou 450 pães. Nesse problema, a “força” é o inverso da densidade de grão, ou seja, o quociente do número de pães pela quantidade de grão.

Ainda no papiro de Ahmes, é possível encontrar problemas que podem ser classificados como algébricos, principalmente da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bc = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido, nesses problemas, a incógnita é chamada de pilha ou “aha”. Por exemplo, o problema 24 do papiro de Ahmes, pede o valor da pilha, tendo conhecimento que pilha mais um sétimo de pilha é igual a 19, ou seja, em linguagem matemática atual: $x + \frac{1}{7}x = 19$. Esse e outros problemas eram resolvidos utilizando o método da “falsa posição”, que consiste em assumir um valor para a incógnita, provavelmente falso, faz-se operações com esse resultado falso e então comparando com o resultado que se pretende e usando proporções, obtêm-se à resposta correta. Por exemplo, no problema 24, é utilizado o $x = 7$ como um primeiro chute, desse modo $7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$, como $8 \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19$, é necessário multiplicar 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, dessa forma, Ahmes obtêm a resposta $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ e a verificando substituindo no enunciado do problema.

A geometria no Egito antigo era principalmente composta de procedimentos para o cálculo de áreas e de volumes. Um exemplo é encontrado no problema número 6 do Papiro de Moscou, onde fica claro que a área de um retângulo era calculada multiplicando sua base por sua altura, exemplo 1.13, retirado de (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012):

Método para calcular um retângulo

Se lhe é dito, um retângulo de área $12 \frac{2}{4}$ do comprimento

Para o comprimento. Calcule $\frac{2}{4}$ até obter 1. Resultado $1 \frac{3}{4}$.

Calcule como estes 12, $1 \frac{3}{4}$ vezes. Resultado 16.

Calcule sua raiz. Resultado 4 para o comprimento.

$\frac{2}{4}$ é 3 para a largura.

Em linguagem moderna, temos:

$$A = lb \text{ e } b = (\frac{2}{4}) \rightarrow l \times (\frac{2}{4})l = 12$$

Assim,

$$l \times l = 12 \div (\frac{2}{4}) = 12 \times 1 \frac{3}{4} = 16.$$

Dessa maneira, obtemos que o comprimento 1 é igual a 4 e que $\frac{2}{4}$ da largura é 3.

Os egípcios também sabiam diversos outros assuntos sobre geometria, entre eles o volume de um paralelepípedo reto, o volume de um cilindro circular reto, a inclinação dos lados de uma pirâmide, o volume de um tronco de pirâmide e o volume de uma pirâmide.

É possível notar que a matemática no Egito está em grande parte relacionada aos problemas cotidianos daquela civilização, dessa maneira, é possível que o professor ao contextualizar problemas do papiro de Ahmes, por exemplo, consiga proporcionar um processo de ensino-aprendizagem com significado, mostrando que a matemática sempre esteve presente na organização dessa sociedade, não se restringindo apenas a abstrações.

Conhecer a matemática desenvolvida no Egito Antio é relevante para a formação e atuação do professor de Matemática porque evidência como diversos procedimentos hoje ensinados, como operações com frações, regra de três e cálculo de áreas e volumes, surgiram como respostas para problemas e necessidades sociais, administrativas e econômicas daquela civilização. Ao compreender o desenvolvimento dessa matemática, o professor tem a possibilidade de mostrar aos alunos como os conceitos matemáticos surgiram a partir de problemas reais, como partilhas, medições agrícolas e cálculos arquitetônicos. Dessa maneira, o professor consegue trabalhar com metodologias ativas, como a modelagem de problemas históricos, colocando contexto aos conteúdos ensinados em sala de aula.

2.3 Matemática na Grécia Antiga

Como a Grécia antiga foi marcada pela filosofia, pela retórica e principalmente pela razão como forma de entender o mundo a sua volta, a matemática desenvolvida pelos gregos carrega características diferentes das civilizações egípcia e babilônica que vimos anteriormente,

enquanto que esses povos desenvolveram a matemática principalmente a partir de problemas práticos, os gregos fizeram com que a matemática se tornasse uma ciência dedutiva, como aponta Roque (2012), é na Grécia Antiga que surge as demonstrações de teoremas partindo de axiomas, consolidando dessa forma um modelo de racionalidade que influenciou toda tradição científica do Ocidente.

Frequentemente é apontado que os pitagóricos foram os fundadores da matemática grega, porém a sua prática é muito diferente do que entendemos hoje como uma rigorosa demonstração, a aritmética dos pitagóricos foi construída de modo indutivo, tendo como base a manipulação de números figurados, ou seja, representações visuais de pontos que formam figuras como triângulos e quadrados. Utilizando essas representações, os pitagóricos formavam regras e generalizações, como os números triangulares, vide Figura 9, os números pentagonais, vide Figura 10 e n^2 , vide Figura 11.

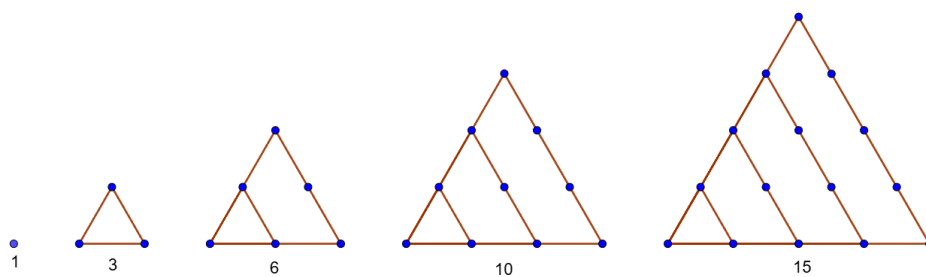


Figura 9: Números triangulares

Fonte: Elaboração dos autores

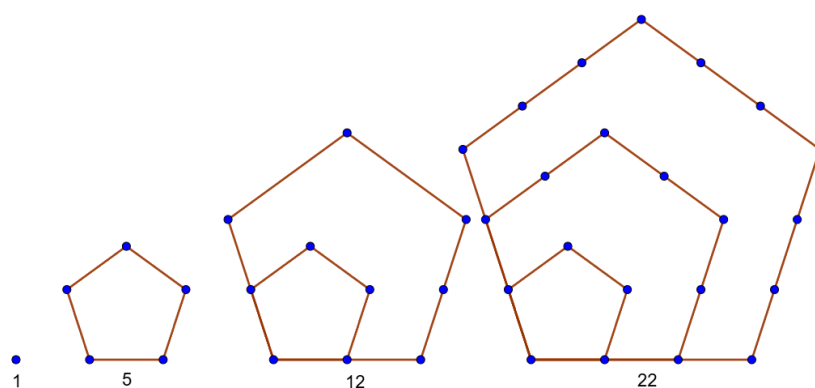


Figura 10: Números pentagonais

Fonte: Elaboração dos autores

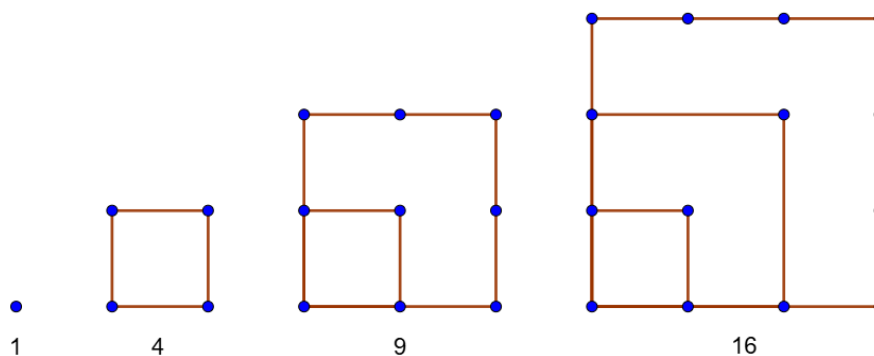


Figura 11: Representação de n^2

Fonte: Elaboração dos autores

Foi na Grécia antiga que surgiram as chamadas triplas pitagóricas, que são desafios que consistem em encontrar três números inteiros que representam os lados de um triângulo retângulo, ou seja, dois números ao quadrado que quando somados resultam em um terceiro número ao quadrado. Uma das mais conhecidas tripla pitagórica é a tripla: (3,4,5), conforme afirma Roque (2012), “Provavelmente, os pitagóricos chegaram a estas triplas por meio do *gnomon* que era sinônimo dos números ímpares, formados pelas diferenças entre números quadrados sucessivos. Os *gnomons* forneciam uma técnica para realização de cálculos”.

Porém, apesar de se atribuir a Pitágoras o famoso teorema, não há evidências confiáveis de que os pitagóricos tenham de fato apresentado uma demonstração, uma prova formal da relação. Para eles, a relação que é estabelecida no teorema não era compreendida como um resultado geométrico no triângulo retângulo, mas sim como parte de um sistema numérico e simbólico, representado por meio de figuras, utilizando os números figurados.

Outro ponto de destaque quando se fala do desenvolvimento da matemática grega é a descoberta da incomensurabilidade ao perceberem que não é sempre possível medir duas grandezas utilizando a mesma unidade, como no caso do lado e da diagonal de um quadrado. Essa observação abriu caminho para o estudo dos números irracionais, mostrando os limites dos números racionais em determinadas situações, embora haja mitos alegando que essa descoberta foi uma ruptura dramática na matemática grega, estudos recentes indicam que essa descoberta pode ser classificada na realidade como um avanço técnico da geometria grega. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

A partir da necessidade de se usar números que ainda não se tinha representação numérica, os matemáticos desenvolveram métodos como a *antifairese*, em que se fazia sucessivas subtrações recíprocas para se comparar grandezas. Esse método permitia se aproximar razões entre segmentos, mesmo quando não havia medida comum entre eles.

Posteriormente, Euclides escreveu a obra *Os Elementos*, sistematizando e consolidando o conhecimento matemático em uma estrutura lógica e rigorosa, influenciando dessa maneira a matemática como conhecemos hoje, a seguir iremos comentar de maneira mais detalhada sobre essa obra.

Um dos matemáticos mais influentes da Antiguidade foi Euclides, conhecido como Euclides de Alexandria, atuou provavelmente entre os séculos IV e III a.C. Euclides esteve ligado à Escola de Alexandria, onde elaborou obras que se tornaram referência para a matemática que temos atualmente. A principal contribuição de Euclides não está na originalidade das descobertas, mas sim na maneira rigorosa e lógica com que estruturou o conhecimento matemático disponível em seu tempo.

Boa parte das produções de Euclides se perdeu ao longo do tempo, incluindo obras que poderiam ter ampliado nossa visão sobre o desenvolvimento da matemática grega, um dos textos perdidos é um tratado sobre cônicas em quatro volumes, outro sobre *Lugares Geométricos de Superfície*, *Pseudaria* (ou falácias) e *Porismas* também foi perdido, a perda dessa obra é muito significativa, pois antigos estudiosos como Papo, descreviam o porisma como um conceito entre um teorema e um problema, podendo ser considerado como uma antiga noção de função, essas obras, apesar de atualmente serem conhecidas apenas por referências indiretas, mostram a profundidade e a amplitude das produções de Euclides (BOYER; MERZBACH, 2012).

Os Elementos, foi a obra mais importante de Euclides que sobreviveu ao tempo, dividida em treze livros, abrange geometria plana, teoria dos números, geometria espacial e a noção de incomensurabilidade. Essa obra, se caracteriza por expor de maneira sistemática a matemática elementar de sua época, tendo como base definições, postulados e axiomas, Euclides desenvolveu teoremas em sequência ordenada, criando um modelo de rigor dedutivo que estabeleceu base para diversos conceitos que conhecemos em nossa matemática atual, *Os Elementos*, se tornou referência para o ensino, sendo considerada por muitos como a obra mais influente da história da matemática (BOYER; MERZBACH, 2012).

A matemática grega, após Euclides, foi marcada pela busca de soluções para problemas que não encontravam solução utilizando apenas régua e compasso, questões como por exemplo, a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo estimularam a criação de novos métodos e o uso de curvas singulares, como a espiral de Arquimedes, a conchoide de Nicodemos e a quadratriz de Hipias (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

Nesse contexto, se destaca as obras de Arquimedes de Siracusa, ele ficou conhecido principalmente por suas invenções militares do que pela complexidade da sua produção

científica. Na obra *Sobre o equilíbrio de planos*, Arquimedes formulou a lei da alavanca, estabelecendo matematicamente as condições para que se tenha equilíbrio. De acordo com (BOYER; MERZBACH, 2012), foi Arquimedes quem primeiro enunciou a lei da alavanca em termos claros, deduzindo-a a partir de princípios estáticos e geométricos. Sua famosa frase “Dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra” é até hoje conhecida e ilustra a aplicação universal da matemática.

Além dessa obra, sobre lei da alavanca e o princípio de empuxo, Arquimedes de Siracusa desenvolveu outras obras como *Quadratura da parábola* onde aplicou o método da exaustão, antecipando o que temos hoje como cálculo integral. Esse matemático se dedicou também à astronomia e a aritmética, como na obra *O contador de areia*, onde elaborou um sistema para trabalhar com números muito grandes. As obras de Arquimedes demonstram que a produção dele transitava entre aplicações técnicas e conjecturas matemáticas (BOYER; MERZBACH, 2012).

Um dos episódios mais famosos ligados a Arquimedes, que merece destaque, é o da coroa do rei Hierão II, a história, registrada por Vitrúvio no século I a.C., afirma que Arquimedes teria descoberto a fraude na coroa ao perceber o transbordamento de água durante um banho. Porém, como indicia Roberto de Andrade Martins, esse relato não é plausível do ponto de vista físico, uma vez que, medir o volume de água derramado seria mais impreciso devido a tensão superficial do líquido. Estudos mais precisos, indicam que Arquimedes teria utilizado uma balança hidrostática, aplicando o princípio de empuxo para comparar pesos no ar e na água, instrumento esse que de fato permitiria detectar a mistura de prata ao ouro. Logo, a essa clássica lenda, embora muito famosa, coloca uma visão equivocada da prática científica, reduzindo a genialidade de Arquimedes a um acaso, quando na realidade ele tinha sólida base teórica e experimental para resolver o problema (MARTINS, 2000).

Outro matemático importante do período helenístico é Apolônio de Perga, conhecido por sua obra *As Cônicas*, onde reuniu resultados já consolidados e introduziu concepções novas sobre essas curvas. Os predecessores de Apolônio concebiam as cônicas como interseções específicas de cones com diferentes aberturas, em *As Cônicas*, Apolônio apresentou uma abordagem unificada, tratando a elipse, a parábola e a hipérbole como seções distintas de um mesmo cone. Como aponta Roque e Pitombeira (2012, p. 126), “Apolônio foi o primeiro a conceber as cônicas como interseções de uma mesma superfície cônica circular, não necessariamente reta, cortada por planos de inclinações diferentes”. Esse pensamento foi importante para dar às cônicas o status de uma família de curvas intimamente relacionadas.

Apesar de até agora, o presente trabalho apresentar nome bastante conhecidos da

matemática desenvolvida na Grécia Antiga, como Euclides, Arquimedes, Pitágoras e Apolônio, é importante destacar que ela não foi um corpo homogêneo de conhecimento. Como ressaltam Boyer e Merzbach (2012, p. 121), “usamos a frase convencional ‘matemática grega’ como se indicasse um corpo de doutrina homogêneo e bem definido. Tal visão pode ser muito enganosa, no entanto”. Mas um conjunto bastante diverso que se desenvolveu ao longo de séculos e em diversas regiões. Um matemático notável que muitas vezes fica de fora do conhecimento comum sobre história da matemática é Eratóstenes, matemático que ficou conhecido por calcular a circunferência da Terra com grande precisão e criou o “crivo de Eratóstenes” para identificar números primos. Outro matemático menos conhecido é Hiparco de Niceia, considera o “pai da trigonometria” por ter organizado tabelas de cordas.

Além desses matemáticos, outros nomes menos famosos também foram fundamentais para a consolidação do pensamento matemático, entre eles Menelau de Alexandria que contribui para o estudo da trigonometria esférica, enquanto Ptolomeu, em sua obra *Almagesto*, desenvolveu aplicações, fórmulas trigonométricas e tabelas que influenciaram a astronomia por mais de mil anos.

Quando se fala sobre o declínio da matemática grega, pode-se entender, em parte, pelo afastamento entre a teoria e a prática. Enquanto na época de Euclides, predominava uma busca pela construção de sistemas dedutivos e demonstrações rigorosas, nos séculos que seguiram, a ênfase se voltou para aplicações imediatas, com foco prático, como astronomia e geografia. Esse fato fez com que a criatividade entrasse em declínio, limitando o surgimento de teorias com um maior foco em abstração.

Outro fator que impactou foi o “sopro frio de Roma”, como alguns autores descrevem, foi a ascensão do Império Romano, a cultura romana dava bastante relevância pela engenharia, pela organização administrativa e pelo direito, mas por outro lado dava pouca relevância a investigação matemática abstrata. A matemática começou a ser vista como uma simples ferramenta para cálculos técnicos do que como ciência em si mesma.

É importante observar, porém, que esse declínio não significou o desaparecimento total da matemática grega, mas uma mudança no papel histórico dela. Apesar de em forma de compilações, comentários e aplicações práticas, o conhecimento foi preservado e transmitido. Essa herança grega, mesmo que de certo modo, distante, em relação a era helenística, seria fundamental para os estudiosos hindus e árabes, que a reinterpretaram e expandiram, servindo como ponto entre a matemática antiga e a matemática do mundo moderno.

Por fim, estudar a matemática da Grécia Antiga é compreender as origens de ideias e métodos que utilizamos até hoje. Para a formação de um professor, esse estudo é fundamental,

afinal ao conhecer e compreender as raízes do pensamento matemático ocidental, o professor compreende melhor a lógica, a linguagem e os problemas que deram origem a conceitos que até hoje estão em sala de aula. Como afirma Miguel (1997, p. 45), “a história da matemática pode desempenhar um papel fundamental na formação do professor, pois lhe permite compreender o caráter dinâmico e humano do conhecimento matemático”.

Como destacado, foi na Grécia Antiga que se consolidou a abordagem dedutiva que fundamenta grande parte da matemática ensinada atualmente, especialmente no que diz respeito às demonstrações, ao raciocínio lógico e à organização axiomática do conhecimento. Por conta disso, conhecer a matemática desenvolvida nessa civilização é essencial para o professor. A compreensão de como os gregos passaram de práticas empíricas para métodos rigorosos permite ao professor mostrar aos estudantes que a matemática não é apenas um conjunto de regras prontas, mas uma construção histórica que envolve debates, rupturas e avanços conceituais.

2.4 Matemática na Índia antiga e medieval

O desenvolvimento da matemática na Índia antiga e medieval se deu com uma relação estreita com os contextos sociais e culturais desse povo. Descobertas arqueológicas em cidades como Mohenjo Daro e Harappa evidenciam a existência de sistemas estruturados de pesos e medidas nessa matemática, além de sinais de numeração decimal já nos períodos iniciais da civilização do Vale do Indo, indicado na Figura 12. (BOYER; MERZBACH, 2012). Essas evidências demonstram que o conhecimento matemático estava entrelaçado a vida cotidiana, com aplicações nas organizações de mercados, construção civil e em rituais religiosos.

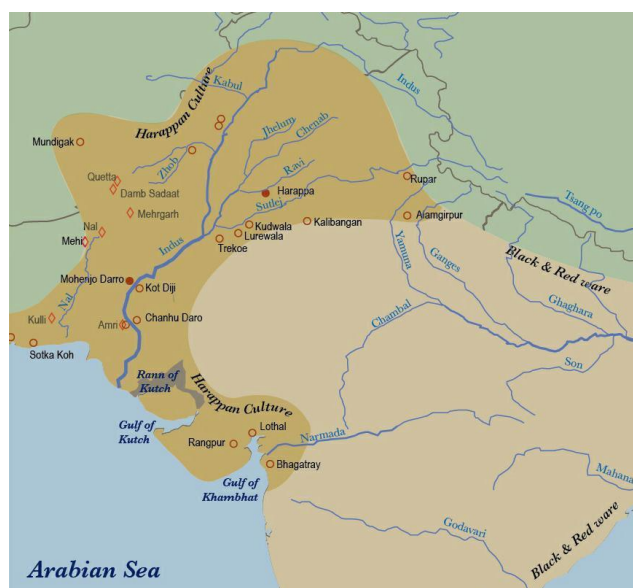


Figura 12: Mapa do vale do Indo, destacando Mohenjo Daro e Harappa

Fonte: Extraída de: <https://ensinarhistoria.com.br/a-misteriosa-civilizacao-de-harappa/>

O sistema numérico indiano foi uma das maiores contribuições da Índia antiga à matemática mundial, esse sistema se caracteriza pelo uso de numeração decimal posicional e pela introdução do zero como um numeral. O desenvolvimento de notações numéricas na Índia parece ter seguido um caminho semelhante ao da Grécia, mas com originalidade ao associar a posição de cada símbolo ao seu valor numérico (BOYER; MERZBACH, 2012). A inovação feita pelos antigos indianos, permitiu cálculos aritméticos mais complexos, facilitou operações como multiplicação e divisão e influenciou diretamente na matemática árabe e europeia. Estudos recentes mostram ainda que os numerais hindus e o conceito de zero foram fundamentais para o avanço da álgebra e da trigonometria, transformando a matemática em um sistema organizado e aplicável em diferentes áreas (JOSEPH, 2011).

Indiano séc. III a.C.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Indiano séc. IV-VI	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Árabe Oriental séc. IX	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Árabe Ocidental séc. XI	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Europeu séc. XVI	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Atual	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Figura 13: A transformação dos Símbolos Indo-Árabicos

Extraída de: <https://matematicasimplificada.com/sistema-numeracao-indo-arabico-decimal/>

Documentos históricos, como os Sulbasutras, que foram uma das primeiras manifestações sistemáticas da matemática indiana em formato de versos, apresentam regras geométricas para a construção de altares de fogo e traçados de ângulos retos, utilizando ternas pitagóricas e formas de resolução que lembram a geometria egípcia. Por exemplo os textos indicam que $3^2 + 4^2 = 5^2$, $8^2 + 15^2 = 17^2$ e $12^2 + 35^2 = 37^2$. A produção desses textos revela como a matemática se entrelaçava com práticas sociais e religiosas, mostrando sua função prática além da abstração teórica (JOSEPH, 2011).

Após o período dos Sulbasutras, surgiram compêndios de astronomia e matemática aplicada chamados de Siddhantas, documentos como o Surya Siddhanta e o Paulisha Siddhanta registram cálculos de posições planetárias, movimentos do sol e da lua, e apresentam tabelas de senos que eram uma abordagem diferente a abordagem grega que se baseava em cordas de círculos. Esses compêndios mostram que os matemáticos indianos buscavam compreender

melhor o tempo, prever eclipses e calcular datas de festivais religiosos.

Durante o século VI, Aryabhata e Brahmagupta consolidaram o conhecimento matemático da Índia, criando tratados que combinavam aritmética, álgebra e trigonometria. A obra Aryabhatiya, produzida por Aryabhata, apresenta diferentes métodos para o cálculo de raízes quadradas e cúbicas, cálculo de áreas e volumes, e introduz progressões aritméticas e geométricas, aplicadas à contagem de tempo e a astronomia. Um dos exemplos dessa obra é a estimativa de um círculo de diâmetro 20.000 como aproximadamente 62.832, equivalente a $\pi = 3,1416$ (BOYER; MERZBACH, 2012).

Quando se fala sobre a álgebra indiana, logo pensamos na fórmula de Bhaskara, porém a álgebra indiana desenvolveu-se como uma continuação das práticas de cálculo, sistematizadas desde os Sulbasutras. Essa tradição de se resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas, muitas vezes eram apresentadas em forma retórica em versos. Técnicas como completar o quadrado, já apreciam em obras indianas do século VII, essas técnicas foram de grande importância para a resolução de equações quadráticas. A álgebra indiana se construiu em torno de regras gerais de resolução de equações, sem utilizar letras para os coeficientes, mas formulando procedimentos sistemáticos em forma retórica (ROQUE, 2012).

O autor matemático que melhore representa toda tradição algébrica da Índia Medieval é Bhaskara II (1114-1185). Há registro de duas obras escritas por ele, Lilavati (Figura 14), uma obra voltada à aritmética e a problemas recreativos e Bijaganita (Figura 15), uma obra voltada ao estudo da álgebra, cujo nome quer dizer: “semente do cálculo”, ambas as obras consolidaram métodos para tratar equações de primeiro e segundo grau, além de equações indeterminadas com várias incógnitas. Bhaskara mesmo não utilizando o simbolismo algébrico como conhecemos atualmente, abordava os problemas de forma retórica e desenvolveu procedimentos claros para reduzir equações para forma quadrática e assim resolvê-las de maneira geral.

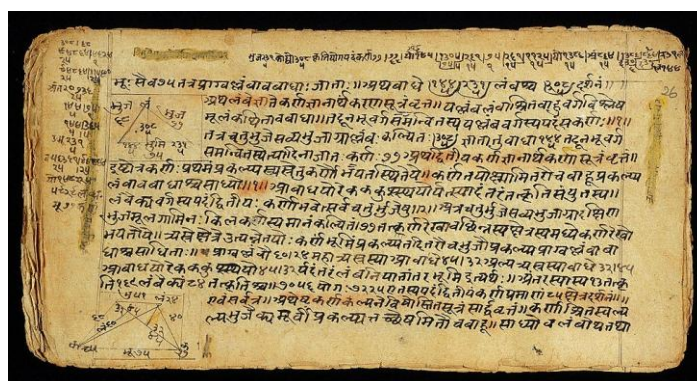


Figura 14: Página do livro Lilavati

Extraída de: <https://matematicaparafilosofos.pt/lilavati-matematica-e-poesia-juntas/>

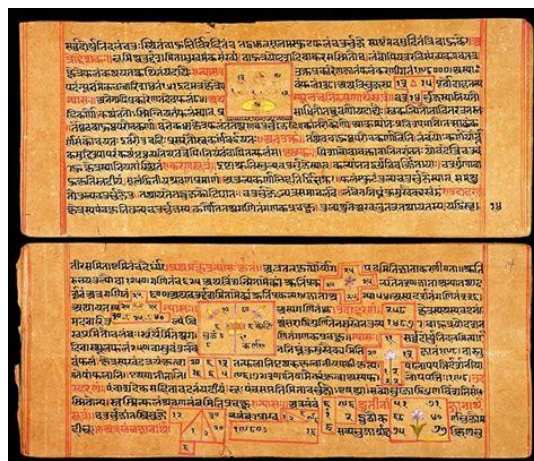


Figura 15: Página do livro Bijaganita

Extraída de:

https://www.rarebooksocietyofindia.org/postDetail.php?id=196174216674_10152963932466675

Um dos aspectos principais da matemática indiana é o fato de os problemas serem apresentados em forma de verso, como visto anteriormente no presente trabalho, a seguir um exemplo traduzido de um problema encontrado no *Lilavati* ilustrando a forma poética da matemática indiana:

“De um enxame de abelhas, a metade e a raiz voam em busca do pólen nos jasmins; oito nonos do todo pairam no céu; e uma solitária descansa numa flor de lótus, enquanto seu macho aprisionado permanece na noite. Quantas eram as abelhas?”

Uma possível tradução para a álgebra moderna e resolução são dadas na Tabela 3.

Tabela 3: Interpretação do verso 77:

Poema	Matemática moderna (tradução atual)
“enxame de abelhas”	$2x^2$
“de um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz”	x
“oito nonos do topo flutuam pelo céu”	$\frac{8}{9}2x^2$
“uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus”	2

Fonte: Elaborado pelos autores

Logo, temos que a quantidade total dos enxames de abelha é representada pela equação:

$$x + \frac{8}{9}2x^2 + 2 = 2x^2$$

Reescrevendo a equação temos:

$$\frac{2}{9}x^2 - x = 2$$

$$2x^2 - 9x = 18$$

Agora, com a equação nesse formato, deve-se resolver pelas regras retóricas:

Utilizando uma das regras retóricas, temos de multiplicar ambos os elementos por 4 vezes o número de quadrados, nós temos nesse caso 2 quadrados então a equação fica:

$$8 * (2x^2 - 9x) = 18 \times 8$$

$$16x^2 - 72x = 144$$

Utilizando agora a outra regra retórica temos que a quantidade do número primitivo de quantidades desconhecidas simples é 9, logo demos adicionar $9^2 = 81$.

$$16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81$$

$$16x^2 - 72x + 81 = 225$$

Eliminando o termo médio temos:

$$(4x - 9)^2 = 15^2$$

$$4x - 9 = 15$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

Logo, a representação do número de abelhas no enxame é $2x^2$ e, portanto, com $x = 6$ temos que o enxame contém 72 abelhas.

A escola de keralesa, liderada por Madhava, foi um grupo que surgiu no final do século XIV e se destacou por avanços na análise matemática, principalmente nas expansões em séries de funções trigonométricas, como seno e cosseno, trabalhos esses que séculos depois foram creditados a Isaac Newton. Embora poucos versos originais de Madhava terem sido preservados, suas ideias foram conservadas por meio de alunos matemáticos posteriores da escola de keralesa, essa escola demonstra que a tradição matemática indiana se manteve viva durante os séculos que se seguiram, influenciando o desenvolvimento de métodos que tempo depois seriam atribuídos a matemáticos europeus. (BOYER; MERZBACH, 2012).

Entender de que maneira a matemática foi desenvolvida na Índia antiga e medieval é importante para o professor de Matemática porque muitos conceitos fundamentais da matemática atual, sistema decimal, origem do 0, têm origem nessa tradição. Ao compreender como esses conhecimentos foram construídos em diálogo com necessidades sociais,

astronômicas e religiosas, o professor tem a possibilidade de apresentar aos estudantes que a matemática é fruto de diferentes culturas e não uma criação exclusiva do pensamento ocidental. Além disso, problemas em forma de versos, como os presentes no *Lilavati*, oferecem boas possibilidades didáticas, permitindo integrar criatividade, interpretação textual e resolução de problemas, colocando dessa maneira mais significado no processo de ensino-aprendizagem.

2.5 Matemática Islâmica

A matemática árabe e todo o seu desenvolvimento esteve estritamente ligado ao contexto histórico da expansão islâmica, que teve início no século VII. A anexação de grandes territórios fez com que a circulação de tradições culturais fosse favorecida, desde a Mesopotâmia até o norte da África. Ou seja, o ambiente científico que se criou por meio das diversas culturas foi crucial para o desenvolvimento da matemática árabe.

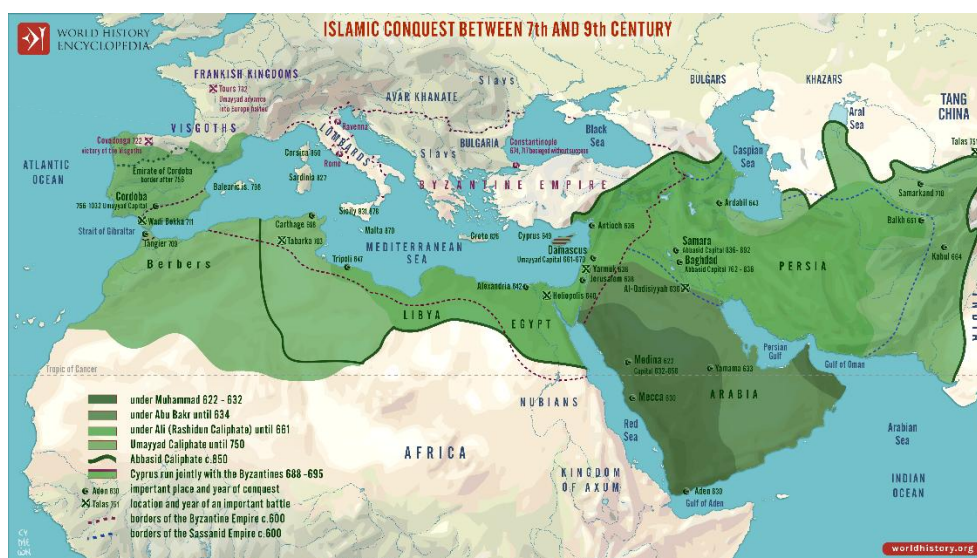


Figura 16: Mapa da expansão islâmica entre os séculos VII e IX

Extraída de: <https://www.worldhistory.org/uploads/images/14212.png?v=1756912085-1756802660>

Outro ponto muito importante durante o desenvolvimento da matemática árabe foi a fundação da Casa da sabedoria na cidade de Bagdá, no século IX, instituição essa responsável por reunir e traduzir diversas obras de origens diferentes. O processo de reunir e traduzir obras não foi apenas um processo para conservar o conhecimento, mas sim para reelaborá-lo, pois de acordo com a autora, as traduções eram acompanhadas de comentários e adaptações, de modo que o resultado era muitas vezes um texto novo, adequado às necessidades do contexto islâmico. De certa forma, podemos afirmar que a tradução se tornou também um espaço de criação intelectual, onde matemáticos árabes reviam conceitos já estabelecidos e integravam em novas

estruturas de pensamento (ROQUE, 2012).

Al-Khwarizmi, foi um dos principais nomes da matemática árabe, seu tratado, intitulado, *Al-jabr wa'l-muqabala* foi marcante por consolidar a álgebra como disciplina independente, foi com Al-Khwarizmi que a álgebra se emancipou da aritmética e da geometria, adquirindo um método próprio de investigação. (BOYER; MERZBACH, 2012). A ruptura com a tradição grega foi muito importante pois ao entender a álgebra como uma disciplina por ela mesma, foi possível que se desenvolvesse métodos diferentes de resolução a importância do *Al-jabr wa'l-muqabala* está em ter criado um corpo de conhecimento autônomo, com regras próprias e aplicáveis a situações diversas, que iam desde problemas práticos de herança até cálculos teóricos (JOSEPH, 2010).

A matemática árabe, embora sem símbolos algébricos como conhecemos hoje, criou uma linguagem precisa para lidar com quantidades desconhecidas, linguagem essa de que certa maneira se assemelha com a linguagem retórica da matemática na Índia Medieval, termos como ‘raiz’, ‘quadrado’ e ‘coisa’ davam corpo àquilo que ainda não possuía notação simbólica, permitindo um raciocínio abstrato sem precedentes. (ROQUE, 2012). Podemos afirmar que Al-Khwarizmi, ao transformar a incógnita em uma entidade manipulável contribui de maneira significativa para a matemática moderna, que temos atualmente.

Um exemplo clássico abordado por Al-Khwarizmi foi equações do tipo $ax^2 + bx = c$, onde a , b e c eram conhecidos. Um exemplo de equação e método de solução baseado no método árabe:

Exemplo 1: $x^2 + 10x = 39$.

Resolução:

- 1) tomar metade de 10 = 5;
- 2) Elevar ao quadrado = 25;
- 3) Somar a 39 = 64;
- 4) Extrair a raiz quadrada = 8;
- 5) Subtrair 5 = 3;
- 6) Obtém-se dessa forma $x = 5$.

A solução algébrica de Al-Khwarizmi, embora descrita de forma retórica e geométrica, já continha a essência do que hoje chamamos de fórmula quadrática (JOSEPH, 2010).

Quando falamos sobre o tratado intitulado *Al-jabr wa'l-muqabala*, de autoria de Al-Khwarizmi, podemos destacar que nele foram “criados” dois termos, o *al-jabr* que remete a ideia de “restauração”, ou seja, o reajuste de termos para deixar as equações positivas e o termo *al-muqabala* que significa “balanceamento”, ou seja, a redução de termos semelhantes em

ambos os lados da igualdade.

Em seu tratado, Al-Khwarizmi expôs seis formas de enunciar os termos usados como padrão, a seguir, em parênteses a representação algébrica atual:

- Quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$);
- Quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$);
- Raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$);
- Raízes iguais a um número ($bx = c$);
- Quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$);
- Quadrado iguais a raízes ($ax^2 = bx$);

A Figura 17 apresenta a relação entre a língua realizada por Al-Khwarizmi e a notação algébrica atual para o Exemplo 1: $x^2 + 10x = 39$.

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de <i>Jidhr</i>	$10/2 = 5$	$b/2$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(b/2)^2$
Some no resultado os <i>Adad</i>	$25 + 39 = 64$	$(b/2)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(b/2)^2 + c}$
Subtraia desse resultado a metade dos <i>Jidhr</i> , encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$

Figura 17: Método de resolução

Fonte: Roque (2012)

Interessante destacar que apensar da álgebra ter adquirido um método próprio de investigação, *Al-Khwarizmi* acrescentava uma justificação geométrica para explicar a validade do método acima descrito. Ele propunha a construção de um quadrado representando x^2 , somados a dois retângulos correspondentes a $10x$. A área resultante da figura seria equivalente ao número dado, no caso, 39. Por fim, ele adicionava um quadrado de lado 5, formando dessa maneira um quadrado maior com área 64. A raiz desse quadrado, que mede 8, representava a soma da incógnita com 5, e, portanto, subtraindo-se esse valor, obtinha-se $x = 3$. A seguir, a Figura 18 representa essa explicação geométrica.

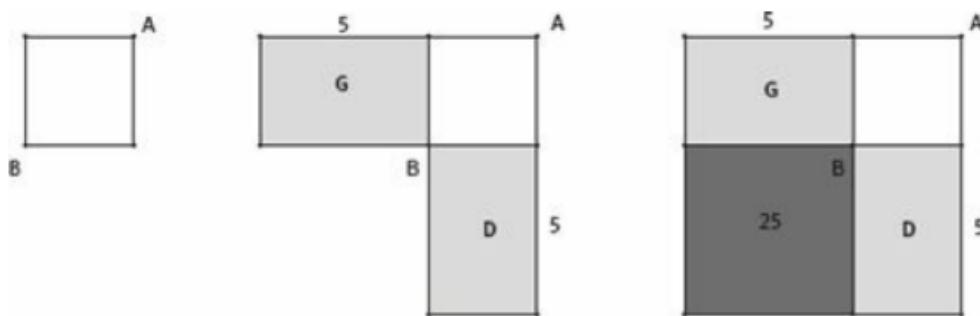


Figura 18: Completando quadrados
Fonte: Roque (2012)

Roque (2012, p.200), destaca, “essa justificativa geométrica não servia apenas para garantir a verdade do algoritmo, mas para explicar sua causa: a necessidade de completar o quadrado”. Ou seja, a argumentação geométrica não era um adorno, mas parte essencial da demonstração.

Conhecer a matemática islâmica é importante para o professor porque uma boa parte da álgebra que temos hoje foi sistematizada por matemáticos árabes, especialmente Al-Khwarizmi. Esse estudo permite mostrar aos alunos que a matemática é fruto da contribuição de diferentes culturas e que conceitos atuais nasceram de necessidades práticas e de esforços de tradução, reelaboração e criação intelectual nas casas da sabedoria. Fora isso, a justificativa geométrica que os árabes usavam para fundamentar métodos algébricos oferece ao professor recursos didáticos para tornar o ensino significativo.

3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA

A escolha do tema para a construção de sequências didáticas foi assegurada por uma revisão bibliográfica que evidenciou a importância de se utilizar a História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem. A pesquisa envolveu primeiramente autores já consolidados que falam sobre como utilizar história da matemática em sala de aula e então foi feita uma revisão bibliográfica dos trabalhos recentes sobre a temática, essa pesquisa envolveu principalmente as bases de dissertações do PROFMAT e a consulta a bases acadêmicas de pesquisa, como o Google Acadêmico.

3.1 Campo de pesquisa

D'Ambrósio (1996) salienta que a História da Matemática tem diversas finalidades pedagógicas, ela permite compreender a matemática como uma manifestação cultural presente em diferentes épocas em diferentes povos, como os costumes e crenças. Também proporciona a percepção de que a matemática trabalhada na escola é apenas uma das diversas formas matemáticas desenvolvidas ao longo do tempo. O autor destaca ainda que a incorporação da matemática nos currículos escolares reflete processos sociais, culturais e econômicos. Para D'Ambrosio, ensinar por meio da História da Matemática deve ser valorizado principalmente por seu potencial motivador, que desperta interesse nos estudantes e deixa, conseqüentemente, a aprendizagem mais significativa.

Quando se fala sobre a importância de os professores terem conhecimento sobre história da matemática para o ensino, destacamos que a compreensão filosófica do ensino da Matemática é fundamental para desenvolver práticas pedagógicas significativas, permite que os professores também entendam a matemática como uma construção humana. De acordo com Ernest (1991), A matemática é uma atividade humana, uma construção social e cultural, e deve ser ensinada de maneiras que reconheçam seu contexto histórico e social. Ou seja, assim como Roque (2012) e D'Ambrósio (1996) destacaram, considerar a matemática como uma prática social e histórica permite ao professor adotar estratégias de ensino que valorizem a construção de conhecimento pelos alunos, estimulando o pensamento crítico e a compreensão profunda dos conceitos.

Ainda que História da Matemática seja uma ferramenta pedagógica bastante importante, sua implementação em sala de aula enfrenta diversos desafios. Um dos grandes desafios, se não o maior deles é a falta de capacitação dos docentes, os professores muitas vezes não têm formação específica nessa área para atuar, inclusive há diversos cursos de Licenciatura em

Matemática que não têm uma disciplina sobre História da Matemática. Segundo Silva (2022), muitos docentes não possuem o conhecimento necessário para utilizar aspectos históricos de maneira eficaz em suas práticas pedagógicas. Ademais, o currículo escolar tradicionalmente e coloca foco a matemática de maneira abstrata e descontextualizada, dificultando a utilização de narrativas históricas que tornariam o aprendizado mais significativo.

Outro desafio significativo é a resistência de alguns educadores em adotar formas diferentes que envolvem a História da Matemática em sua prática docente, como destaca Mota (2024). Muitas atribuições podem ser dadas a essa resistência, entre elas a pressão por resultados em avaliações padronizadas, a falta de recursos didáticos adequados e também a sobrecarga de conteúdo programático nas bases curriculares.

Portanto, diante das visões apresentadas, é possível concluir que a História da Matemática é uma ferramenta muito relevante, capaz de tornar o ensino significativo e contextualizado. Porém, ao mesmo tempo, os desafios apontados evidenciam que a aplicação de sequências didáticas utilizando História da Matemática exige planejamento por parte do professor e apoio da escola.

Miguel (1997) destaca que a História da Matemática não deve ser utilizada como uma mera ilustração, mas sim, como um recurso que possibilita ao estudante compreender a gênese dos conceitos e os diferentes caminhos que a história percorreu para consolidar o conhecimento atual. Enfatiza ainda que, quando os estudantes entram em contato com problemas históricos e tentam resolvê-los, não apenas desenvolvem habilidades matemáticas, mas compreender também, a matemática como um processo permeado por erros, reformulações e descobertas. Dessa maneira, o ensino se torna um lugar para reconstruir o percurso da matemática ao invés de apenas reproduzir resultados prontos.

Nesse mesmo contexto, Dias e Saito (2009) mostram que documentos históricos podem ser ferramentas para propostas didáticas inovadoras, pois possibilitam relacionar a matemática escolar com práticas culturais de diferentes épocas. Os autores enfatizam que, “a história da matemática pode contribuir para uma mudança de concepção sobre a própria matemática, permitindo ao aluno compreendê-la como produção histórica e não como verdade absoluta” (DIAS; SAITO, 2009, p. 16). Essa concepção expande a visão dos estudantes sobre a matemática como disciplina e enriquece o desenvolvimento de olhar crítico, que reconhece a matemática como uma construção social que está sempre em transformação.

3.2 Trabalhos que utilizaram História da Matemática como prática pedagógica

O objetivo principal dessa seção é apresentar diferentes trabalhos da área e realizar uma análise de cada trabalho, para auxiliar no desenvolvimento das sequências didáticas, levando em consideração três questionamentos principais, obtidos a partir de reflexões a respeito da fundamentação teórica:

- A História da Matemática é utilizada de forma contextualizada, de modo a favorecer a construção de conhecimentos pelo estudante?
- Como se estabelece o envolvimento dos alunos nas atividades, os estudantes fazem a matemática de determinado povo ou a história é utilizada como recurso motivacional?
- Quais as potencialidades e possíveis dificuldades que as sequências didáticas de cada trabalho apresentam, tendo como base a perspectiva de um professor do Ensino Básico?

O primeiro trabalho que analisamos é o trabalho de Reis (2023), intitulado: “Uma proposta de sequência didática com a utilização da história da matemática no ensino de matrizes”, esse trabalho foi realizado no PROFMAT e busca articular aspectos históricos das matrizes com práticas pedagógicas baseadas em jogos, produzindo uma sequência didática voltada para o Ensino Médio.

A autora inicia sua pesquisa realizando um panorama histórico do conceito de matrizes, desde registros antigos como os *Nove Capítulos da Arte Matemática* na China até a formalização das matrizes por Cauchy, Cayley e Sylvester. O trabalho também faz uma análise crítica de livros didáticos do Ensino Médio, mostrando que a presença da história da matemática nesses materiais se restringe apenas a aparecer como curiosidade, sem aprofundamento epistemológico de como a matemática foi desenvolvida em determinado momento histórico.

A sequência didática proposta em (Reis, 2023), utiliza a História da Matemática de maneira introdutória e motivacional, sendo uma base para a construção de atividades lúdicas voltadas ao ensino de matrizes. Apesar de não haver um detalhamento do fazer matemático em determinado momento histórico, o trabalho procura ascender o interesse dos estudantes, mostrando que as matrizes possuem origens históricas relacionadas à resolução de problemas da sociedade.

A participação dos estudantes acontece de maneira bastante ativa, afinal as sequências didáticas utilizam diferentes jogos, como o bingo de matemáticos e o jogo da memória da história de matrizes.

Entre as potencialidades do trabalho de (Reis, 2023) está o protagonismo dos estudantes, a articulação com as competências da BNCC e a possibilidade de se utilizar diferentes

estratégias ao invés do ensino tradicional, deixando dessa maneira as aulas mais dinâmicas e significativas. Entretanto, um apontamento de possível limitação é reduzir a história a um elemento apenas introdutório, deixando de explorar as transformações do conceito de matriz da matemática em diferentes contextos históricos.

Outro trabalho recente que utiliza história da matemática no processo de ensino-aprendizagem é: *Uma proposta para o ensino de equações do 1º grau utilizando a história da matemática* (Anjos, 2023) que foi desenvolvido no âmbito do PROFMAT e tem como objetivo principal elaborar e aplicar uma sequência didática que integre a História da Matemática ao ensino de equações do primeiro grau.

O autor justifica a escolha do tema, explicando que frequentemente, o conteúdo de equações do primeiro grau é apresentado de maneira algorítmica e mecânica em livros didáticos e no Ensino Básico como um todo e a partir dessa constatação, o autor propõe o uso de problemas históricos para introduzir e trabalhar o tema em sala de aula.

A dissertação aborda vários momentos históricos das equações do primeiro grau, desde a presença dessas equações nos *Nove Capítulos da Arte Matemática* na China até em textos árabes de Al-Khwarizmi. Após essa análise, o autor propõe uma sequência didática desenvolvida a partir de situações-problema inspiradas em registros históricos buscando, dessa maneira, os estudantes da matemática enquanto prática social que está em transformação constante.

Analisando esse trabalho por meio dos três questionamentos, é possível notar que a História da Matemática é desenvolvida de maneira contextualizada pois os problemas históricos são adaptados e trabalhados em sala de aula para introduzir e consolidar o estudo das equações do 1º grau. Não se trata apenas de motivação, mas de recurso para que os estudantes compreendam os conceitos levando em consideração como se desenvolveu em determinado momento histórico. Podemos destacar também que o envolvimento dos estudantes é favorecido pois permite que os estudantes pratiquem a matemática de maneira semelhante a maneira com que a matemática era utilizada em contextos históricos, propondo aos estudantes que resolvam as equações à maneira chinesa ou árabe, antes de resolvê-las de acordo com os métodos algébricos atuais.

Em relação as potencialidades e possíveis dificuldades que um professor pode ter ao utilizar a sequência didática, a proposta apresenta contribuições relevantes, como a promoção de uma aprendizagem mais significativa, a valorização do raciocínio sobre a simples aplicação de regras e a integração com as competências previstas pela BNCC. Entretanto, também exige do professor preparo teórico e metodológico para conduzir discussões históricas de forma

crítica, evitando reduzir a história a um exercício de curiosidade ou mera transposição de problemas antigos.

Um trabalho que utiliza a História da Matemática de forma inovadora é a pesquisa realizada por Bonfim (2017), a autora apresenta uma proposta para a introdução do ensino de Álgebra, utilizando a história da criptografia como recurso pedagógico. Em seu trabalho é utilizado o filme *O jogo da Imitação* (2014), que mostra a atuação de Alan Turing na quebra da máquina Enigma, o filme é utilizado como motivador, despertando o interesse dos estudantes e estabelecendo uma conexão entre matemática, cultura e história, a autora ainda destaca que a motivação do trabalho é promover uma aprendizagem com significado, de maneira contextualizada.

As atividades práticas de Bonfim (2017) são sequências didáticas em que os estudantes investigam diferentes cifras, como a Cifra de César e a Cifra de Vigenère, e, a partir dessas experiências, entram em contato com noções fundamentais da álgebra. Os estudantes são levados a formular generalizações, organizar algoritmos de codificação e decodificação em linguagem algébrica pois trabalham com regras de substituição de letras, deslocamentos e padrões para resolver a criptográfica do problema.

O trabalho de Bonfim (2017) mostra ainda como a interdisciplinaridade pode enriquecer o ensino de matemática, deixando o ensino mais atrativo e o relacionando com obras culturais e históricas. A pesquisa ainda mostra a importância de utilizar a História da Matemática como instrumento de contextualização e a Modelagem Matemática como caminho para colocar sentido no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Ao analisar e refletir sobre o trabalho de Bonfim (2017) podemos ver que a História da Matemática é utilizada de forma contextualizada, pois a autora não se limita a apresentar fatos históricos isolados, mas os integra ao processo de ensino, favorecendo a construção do conhecimento pelos alunos. O caráter investigativo das sequências didáticas faz com que os estudantes façam papéis de investigadores, construindo dessa forma o conhecimento e sendo protagonistas dessa construção. Ainda, é possível destacar que do ponto de vista de um professor do Ensino Básico, a proposta apresenta grande potencial por tornar o aprendizado mais significativo, articulando cinema, história e matemática; contudo, pode trazer dificuldades relacionadas ao tempo necessário para a aplicação das sequências didáticas e à preparação docente para lidar com temas interdisciplinares.

4. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PRÁTICA PEDAGÓGICA

4.1 Campo de pesquisa

Uma obra muito importante quando se fala de Modelagem Matemática como prática pedagógica é o livro, *Modelagem em educação matemática*, pertencente a coleção *Tendências em Educação Matemática*, escrito por João Frederico da Costa De A. Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros (2011), que discute a modelagem matemática por uma ótica educacional. O livro coloca em reflexão o conceito de modelagem no contexto escolar, suas possibilidades de aplicação em sala de aula, suas conexões com outras tendências e a relação entre teoria e prática.

Uma discussão que os autores da obra levantam e bem importante: a ideia frequentemente repetida, de que "precisamos trazer o cotidiano dos alunos para a sala de aula". Nesse ponto, os autores questionam: quem nos concedeu o direito de retirar o cotidiano dos alunos para, em seguida, tentar reinseri-lo? O cotidiano não se afasta do estudante, pois está sempre presente em sua vida escolar. Ao entrar na escola, cada aluno leva consigo suas vivências, interesses, receios e experiências, que inevitavelmente influenciam seu aprendizado. Assim, é imprescindível que os conteúdos de matemática se relacionem tanto com situações do cotidiano pessoal quanto com as realidades da escola e da comunidade. Um ponto interessante, ressaltado pelos autores é que as situações reais dificilmente possuem respostas únicas, incentivando, dessa maneira, a exploração, a investigação e o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes.

Conforme Burak (1992) destaca, a Modelagem Matemática não deve ser entendida apenas como uma técnica, mas sim como uma metodologia de ensino, com etapas bem definidas para permitir a construção do conhecimento matemático a partir de situações reais. Dessa maneira, Burak afirma que a modelagem consiste em “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”.

Outro ponto importante que se pode destacar é o caminho inverso que a Modelagem propõe em relação ao ensino tradicional. Enquanto no modelo usual os conteúdos determinam os problemas, na Modelagem são os problemas que orientam a escolha dos conteúdos a serem trabalhados. Como afirmam Brandt, Burak e Klüber (2016, p. 44): “No trabalho com a Modelagem faz-se um caminho inverso daquele utilizado no ensino mais usual. Nesse, apenas os conteúdos determinam os problemas, na Modelagem os problemas podem determinar os

conteúdos a serem usados para resolver as questões oriundas da etapa anterior”. A inversão lógica abre espaço para uma aprendizagem com mais significado, pois promove uma relação orgânica entre a teoria e a prática, diferente do ensino tradicional em que se tem o ensino de maneira engessada, deixando muitas vezes de estabelecer relações entre teoria e prática de determinado conhecimento.

Um ponto relevante dessa obra é a maneira com que os autores dividem um problema real em **cinco etapas**:

1. Identificar a situação;
2. Estabelecer hipóteses simplificadoras;
3. Resolver o problema matemático originado;
4. Validar as soluções diante da situação inicial;
5. Tomar decisões com base nos resultados obtidos.

As sequências didáticas elaboradas neste trabalho foram estruturadas de acordo com essas cinco etapas, garantindo que os estudantes percorressem todo o processo de compreensão, modelagem e validação de situações reais. Ao adotar essa organização, buscou-se promover um aprendizado mais significativo, no qual o aluno não apenas resolve operações matemáticas, mas compreende o contexto do problema, levanta hipóteses e então toma decisões fundamentadas.

Conforme Santos et al. (2016) destaca, ao assumirmos a matemática como parte da realidade, perspectiva proposta pela modelagem matemática, adotamos uma postura que leva em consideração a matemática presente em diferentes práticas culturais, produzida e utilizada por grupos sociais específicos. É relevante aqui destacar que nas sequências didáticas que serão produzidas nesse trabalho, a modelagem matemática será utilizada como ponto de partida para resolver determinado problema histórico, buscando dessa maneira que os estudantes pesquisem, explorem e encontrem resoluções possíveis para o problema.

Outro trabalho, bastante relevante é o de “*Contribuições do pensamento vygotskiano para a modelagem matemática*”, de Silva, Braga & Giordano (2021), que explora como ideias de Vygotsky podem fortalecer o ensino da matemática por meio da modelagem. Eles destacam que a modelagem, ao partir de problemas reais e alinhados com as vivências dos estudantes, possibilita o desenvolvimento das funções psicológicas mediadas socialmente; durante esse processo, a interação entre os próprios estudantes e o professor tem um papel muito importante. O trabalho ainda destaca que mais do que aplicar modelos prontos, é essencial permitir que os alunos participem ativamente na construção desses modelos, contribuindo assim para uma aprendizagem significativa e para a autonomia intelectual dos alunos.

Além do Mais, Silva, Braga & Giordano (2021) destacam que a modelagem matemática, ao ser entendida a partir da perspectiva histórico-cultural, quebra com a visão de um processo de ensino-aprendizagem centrado apenas na transmissão de conteúdo. Para os autores, quando os alunos contribuem na formulação, investigação e análise de problemas contextualizados, eles não apenas aplicam conceitos matemáticos já aprendidos, mas também constroem novos significados em colaboração com seus colegas e professores. Esse contexto e resolução potencializa o desenvolvimento de habilidades críticas e criativas, aproximando a matemática das situações concretas de situações históricas e reais.

O trabalho de Bergamim e Kato (2024) apresenta uma revisão sistemática da literatura com o objetivo de investigar como pesquisadores da área da Educação Matemática têm articulado a História da Matemática e a Modelagem Matemática no ensino. As autoras analisam diferentes publicações, identificando concepções, abordagens e finalidades atribuídas a essa junção. O estudo aponta que, embora existam avanços, ainda há poucos trabalhos que exploram diretamente essa integração, o que revela tanto a relevância quanto a necessidade de ampliar pesquisas nesse campo.

No que se refere ao campo da Modelagem Matemática, o artigo mostra que ele se consolidou como uma vertente da Educação Matemática que busca aproximar o ensino dos contextos sociais, culturais e históricos dos estudantes. A modelagem é entendida como um processo investigativo, no qual os alunos exploram problemas, constroem representações matemáticas e interpretam os resultados obtidos. A modelagem matemática favorece a construção de significados pelos estudantes, conectando conceitos matemáticos à realidade e ao contexto histórico (BERGAMIM; KATO, 2024). Dessa forma, a prática da modelagem em sala de aula vai além da simples aplicação de fórmulas, pois envolve a formulação de hipóteses, análise crítica e tomada de decisões, características que a tornam uma metodologia rica para a aprendizagem.

A integração entre História da Matemática e Modelagem Matemática, como evidenciam as autoras, se apresenta como uma possibilidade para tornar o ensino mais significativo. A História da Matemática oferece um pano de fundo que revela como certos conceitos surgiram diante de problemas concretos, enquanto a Modelagem Matemática permite ao estudante vivenciar esse processo de construção do conhecimento, simulando situações reais ou inspiradas em contextos históricos. Assim, ao serem usadas juntas, essas abordagens proporcionam tanto uma compreensão mais humana e cultural da matemática, quanto uma oportunidade de aplicação prática, favorecendo a aprendizagem crítica e reflexiva (BERGAMIM; KATO, 2024).

4.2 Trabalhos sobre modelagem matemática como prática pedagógica

A dissertação de Oliveira (2024) aborda a modelagem matemática por meio do campo de pesquisa em otimização linear, inicialmente a autora aborda os problemas clássicos, como o Problema da Mistura, Problema de Corte e o Problema de Transporte, a autora apresenta a formulação matemática desses problemas e fala sobre a importância no contexto do Ensino Médio. A autora então aplica atividades com as turmas de Ensino Médio para explorar esses problemas de otimização linear de maneira prática. Nas atividades propostas, são trabalhados problemas com apenas duas variáveis de decisão, bem como problemas maiores.

Para auxiliar nas resoluções, a autora utilizou o software GeoGebra para realizar a abordagem gráfica em casos de problemas com duas variáveis e o solver do Excel para problemas de maior complexidade, com mais variáveis. Além do mais, a autora aprofunda o estudo do problema de corte unidimensional e destaca que nesse problema ao gerar um padrão de corte, é necessário que se resolva um problema da mochila. Finalmente, a autora propõe uma atividade com uma possível aplicação futura utilizando o problema de corte de estoque unidimensional.

Um trabalho interessante foi a tese de mestrado de Martins (2024), a autora inicia fazendo um estudo sobre a história e o desenvolvimento da Modelagem Matemática, destaca seu papel como metodologia que aproxima a Matemática da sala de aula a situações reais que os alunos vivenciam, a autora ainda enfatiza que essa abordagem favorece a aprendizagem com significado e a formação crítica dos alunos.

No desenvolvimento do trabalho, é apresentado o conceito de modelo matemático, compreendido como uma representação simbólica de determinada situação real, elaborada utilizando cálculos, tabelas e gráficos que auxiliam na compreensão de fenômenos do cotidiano, a autora ainda destaca que a construção de modelos matemáticos auxilia na promoção do raciocínio lógico e na autonomia dos alunos, pois há uma participação ativa no processo de investigação.

A autora apresenta diversos exemplos de problemas e os modelos correspondentes a cada um deles em sala de aula, após essa apresentação, a autora questionou os estudantes sobre problemas do dia a dia e a partir desse questionamento, foi escolhido que os estudantes iriam trabalhar o tema sobre o desperdício de merenda escolar, um problema que vários estudantes relataram vivenciar.

O tema escolhido propiciou um processo de reflexão dos alunos sobre o desperdício de alimentos, as causas do desperdício e suas consequências sociais. Conforme as etapas do projeto

avançavam, foram conduzidas atividades investigativas que envolveram a coleta e a análise de dados, a construção de gráficos e tabelas e a formulação proposta para reduzir o desperdício de merendas. É interessante que o texto destaca que as discussões feitas em sala de aula aumentaram a compreensão dos estudantes sobre a origem dos alimentos, do impacto da fome no mundo e da importância da boa nutrição para que haja um bom desempenho escolar, mostrando, dessa maneira, o potencial social e educativo da modelagem.

A autora realizou na etapa de avaliação, uma avaliação formativa dos estudantes, bem como uma autoavaliação das suas aulas. A avaliação dos estudantes considerou os conhecimentos prévios, o engajamento nas atividades e a capacidade de reflexão demonstrada nas discussões, na autoavaliação, a autora comenta que ao final do projeto, os alunos levantaram uma discussão a respeito do motivo de não terem outras aulas dessa maneira, utilizando a modelagem matemática, investigando e pesquisando e também destaca a importância de se considerar a situação dos alunos de classe sociais mais baixas durante as aulas, muitos dos quais enfrentam dificuldades financeiras.

Por fim, o trabalho conclui que a Modelagem Matemática é uma ferramenta valiosa para o ensino de matemática, que despertou a curiosidade dos alunos, promoveu discussões, novas descobertas e percepções, o que ajudou a criar uma conexão mais forte entre os estudantes e as questões sociais.

5. SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS UTILIZANDO HISTÓRIA E MODELAGEM MATEMÁTICA

Como salientado anteriormente, as propostas que são apresentadas nesse trabalho consistem em sequências didáticas. Dessa maneira, é fundamental compreender o significado desse termo. Segundo Zabala (2008), uma sequência didática corresponde a um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim que é conhecido pelo professor e também pelos alunos.

A organização das sequências foi estruturada a partir de cinco etapas que orientam o desenvolvimento de problemas em contextos de Modelagem Matemática. Inicialmente, cada atividade foi planejada para favorecer a identificação da situação apresentada, permitindo ao estudante compreender o problema descrito. Na etapa seguinte, são propostas ações que favorecem o estabelecimento de hipóteses simplificadoras, por meio da seleção e análise dos elementos relevantes do enunciado. A terceira etapa é a resolução do problema matemático formulado, conduzindo a destacar os procedimentos utilizados. Posteriormente, os resultados obtidos são confrontados com a situação inicial, caracterizando o processo de validação. Por fim, as sequências culminam na reflexão e tomada de decisões a partir das soluções produzidas. Essa organização segue a perspectiva metodológica discutida por Brandt, Burak e Klüber (2016, p. 44), que destacam a importância dessa estrutura para orientar o desenvolvimento investigativo do estudante.

É importante destacar que usar sequências didáticas no ensino de Matemática contribui para organizar as aulas de forma mais dinâmica e contextualizada, permitindo que o estudante compreenda a matéria abordada a partir de situações históricas. Quando as atividades utilizam investigação, elas promovem uma aprendizagem interdisciplinar muitas vezes, e também aprofundada do tema em questão.

Sendo assim, os resultados desse trabalho foram a elaboração de sequências didáticas que articulam história da matemática com modelagem matemática, voltada para a investigação e a pesquisa, possibilitando, dessa maneira, a compreensão de conceitos por meio desse processo contextualizado.

5.1 Bhaskara e a equação do segundo grau

Objetivo:

Resolver os problemas da forma que eram resolvidos por Bhaskara e fazer uma ligação epistemológica entre a matemática daquela época com a matemática moderna.

Público-alvo:

Alunos do 9º ano.

Duração:

Sugestão: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos:

- Verso 77 (impresso, um para cada grupo);
- Material de pesquisa utilizado na seção 5.1;
- Quadro branco e canetas;
- Equações do segundo grau elaboradas pelo professor (impressas).

Avaliação:

- Formativa: Observar a participação dos alunos nos grupos, clareza durante a apresentação para a turma e argumentação nas discussões.
- Somativa: Analisar a resolução dos problemas pelo método histórico e o problema proposto pelos grupos a partir da equação em matemática moderna.

Competências:

- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Habilidades:

- (EF09MA09): “Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.”

Desenvolvimento:

Etapa 1: identificar a situação:

Essa etapa é a etapa de Identificar a Situação, é o momento em que o professor deve realizar a apresentação inicial do problema as estudantes, permitindo que eles tenham o primeiro contato com o contexto histórico e compreendam o que está sendo proposto. O professor lê o seguinte

poema para a turma:

Verso 77: “De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?”

Promover os seguintes questionamentos para a turma:

- O que vocês entenderam pelo que acabei de ler?
- Vocês acham que esse é um problema matemático?

Fazer uma breve discussão com a turma e definir que esse se trata de um problema matemático e que era dessa maneira que os matemáticos na época de Bhaskara representavam problemas matemáticos, contextualizando as atividades que seguem.

Em seguida, resolver na lousa o verso 77, explicitando a passagem da linguagem retórica para a matemática moderna (ver Tabela 4).

Tabela 4: Interpretação do verso 77

Poema	Matemática moderna (tradução atual)
“enxame de abelhas”	$2x^2$
“de um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz”	x
“oito nonos do todo flutuam pelo céu”	$\frac{8}{9}2x^2$
“uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus”	2

Fonte: Elaborado pelos autores

Logo, temos que a quantidade total dos enxames de abelha é representada pela equação:

$$x + \frac{8}{9}2x^2 + 2 = 2x^2.$$

Reescrevendo a equação temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}x^2 - x &= 2, \\ 2x^2 - 9x &= 18.\end{aligned}$$

Agora, com a equação nesse formato, deve-se resolver pelas regras retóricas:

Utilizando a regra (1), temos de multiplicar ambos os elementos por 4 vezes o número

de quadrados, nós temos nesse caso 2 quadrados então a equação fica:

$$8 * (2x^2 - 9x) = 18 \times 8,$$

$$16x^2 - 72x = 144.$$

Utilizando agora a regra retórica (2) temos que a quantidade do número primitivo de quantidades desconhecidas simples é 9, logo demos adicionar $9^2 = 81$.

$$16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81,$$

$$16x^2 - 72x + 81 = 225.$$

Eliminando o termo médio temos:

$$(4x - 9)^2 = 15^2 \Leftrightarrow$$

$$4x - 9 = 15 \Leftrightarrow$$

$$4x = 24 \Leftrightarrow$$

$$x = 6.$$

Logo, a representação do número de abelhas no enxame é $2x^2$ e, portanto, com $x = 6$ temos que o enxame contém 72 abelhas.

Etapa 2: estabelecer hipóteses simplificadoras:

Nessa etapa os alunos devem estabelecer hipóteses simplificadoras, pois começam a analisar o problema escolhido discutindo coletivamente quais elementos da situação são essenciais e como podem ser representados.

Pedir para que os alunos formem grupos com 4 integrantes em cada e disponibilizar para os estudantes o material de pesquisa utilizado na seção 5.1 (em anexo). Solicitar que cada grupo escolha um dos problemas disponíveis para resolver e utilizem o material para pesquisar, nessa etapa, os grupos devem discutir entre si o que o problema pede, quais são as grandezas envolvidas, o que pode ser considerado “todo”, “parte”, “diferença”, “produto” etc., levantando hipóteses sobre a melhor maneira de traduzir o enunciado em expressões e relações matemáticas, à semelhança do que foi feito com o verso 77.

Etapa 3: Resolver o problema matemático originado:

Solicitar que os estudantes modelem e resolvam o problema utilizando a matemática moderna e o método retórico, dessa maneira, os alunos podem comparar os resultados e verificar se o procedimento histórico conduz aos mesmos resultados obtidos pelos métodos atuais.

Etapa 4: Validar as soluções diante da situação inicial:

Solicitar que cada grupo apresente o problema que resolveu para toda turma, é interessante solicitar que cada grupo fique com um problema diferente. Nessa etapa, as

apresentações e discussões coletivas permitem validar as soluções obtidas, comparando estratégias, conferindo se o resultado faz sentido diante do contexto do problema histórico e analisando a coerência entre a resolução retórica e a resolução em matemática moderna.

Etapa 5: Tomar decisões com base nos resultados obtidos:

Pedir que cada grupo crie um problema a partir de uma equação representada de maneira moderna que deve ser entregue pelo professor, ou seja, cada grupo deve ficar com uma equação pronta e, a partir dela, criar um problema em verso. Nesse momento, é importante que cada grupo fique com uma equação diferente dos demais grupos e que os grupos não conversem entre si. Cada grupo deve ler o poema que criou e então entregar para outro grupo. Os grupos devem, então, resolver o problema de maneira retórica e modelar o problema em matemática moderna. Os grupos apresentam o trabalho que fizeram e conversam entre si para decidirem se a resolução está correta ou não. O professor deve deixar que os grupos resolvam; caso haja um momento de impasse, o professor deve agir e mostrar, utilizando o material de pesquisa, a maneira certa de resolver como Bhaskara resolvia e, então, modelar em linguagem atual.

Nessa última etapa, ao criarem e resolverem novos problemas, os alunos tomam decisões sobre como representar situações por meio de equações, como transformar equações em enunciados em verso e como ajustar suas estratégias diante de eventuais erros ou impasses, consolidando a articulação entre história da matemática, modelagem e linguagem algébrica.

É importante que os grupos utilizem o material de pesquisa para resolverem a equação da mesma maneira que os indianos antigos resolviam, ou seja, não é interessante que os grupos primeiro modelem a equação de maneira moderna e então resolvam como já sabem, o passo a passo da resolução deve seguir o que está no material de pesquisa, resolver o problema em forma de poema de maneira retórica e nesse processo relacionar com a representação que temos atualmente para equações dessa forma.

5.2 Al-Khwarizmi e o Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala

Objetivo:

Compreender de que forma os matemáticos árabes modelavam e resolviam equações do segundo grau a partir de figuras geométricas, conectando a figura com a linguagem algébrica moderna e reconhecendo dessa maneira a origem do método de completar o quadrado.

Público-alvo:

Alunos do 9º ano.

Duração:

Sugestão: 3 aulas de 50 minutos cada.

Recursos:

- Material de pesquisa utilizado na seção 5.2;
- Quadro branco e canetas;
- Papel quadriculado e régua.

Avaliação:

Formativa: Observar a participação dos alunos nos grupos, clareza durante a apresentação para a turma e argumentação nas discussões.

Somativa: Analisar a resolução dos problemas, a modelagem em linguagem arábica e a representação geométrica.

Competências:

- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Habilidades:

- (EF09MA09): “Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.”

Desenvolvimento:

Etapa 1: Identificar a situação:

Apresentar Al-Khwarizmi, um dos grandes matemáticos do século IX, criador do que chamamos hoje de “álgebra”, explicar brevemente os termos com exemplos (disponível no material de pesquisa utilizado na seção 5.2):

- Al-jabr: recompor, completar, restaurar termos.
- Al-muqabala: equilibrar, reduzir e simplificar.

Etapa 2: Estabelecer hipóteses simplificadoras:

Relembrar brevemente o que é um quadrado perfeito e apresentar a Figura 19, fazer os seguintes questionamentos:

- O que falta para essa figura virar um quadrado?
- Que área essa figura representa?

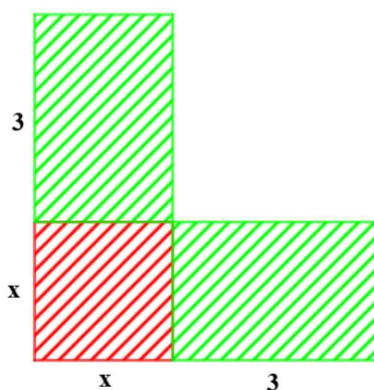


Figura 19: Exemplo para a aula, representação geométrica de $x^2 + 6x = 16$

Fonte: Elaborada pelos autores

Escrever a equação $x^2 + 6x = 16$ na lousa e explicar a relação entre essa equação e a área da Figura 19, incentivando os alunos a refletirem sobre a conexão entre a geometria e a álgebra.

Etapa 3: Resolver o problema matemático originado:

Explicar o passo a passo geométrico para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, destacar que era dessa maneira que Al - Khwarizmi resolvia esse tipo de problema, segue o passo a passo:

1. Desenhar o quadrado com lado x e área x^2 ;
2. Acrescentar dois retângulos de área $\frac{b}{2}x$ cada;
3. Completar o quadrado com um quadrado de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$;
4. Rescrever a equação original na forma $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$;
5. Extrair a raiz quadrada de ambos os lados e encontrar o valor de x .

Realizar junto a turma o seguinte exemplo:

Exemplo de exercício:

Um homem deixou uma herança de 39 moedas. Ele desejava que seu filho recebesse um

número de moedas igual ao quadrado de um número, e que ele próprio (antes de falecer) guardasse 10 vezes esse número de moedas. Quantas moedas caberiam ao filho? Represente esse problema em notação arábica (adad, jidhr e mal) e então resolva o problema utilizando a demonstração geométrica.

Resolução:

“39 moedas”: 39 adad;

“número de moedas igual ao quadrado de um número”: mal;

“número”: jidhr;

“10 vezes esse número de moedas”: 10 jidhr;

Logo, temos:

$$\text{mal} + 10\text{jidhr} = 39 \text{ adad.}$$

Demonstração geométrica:

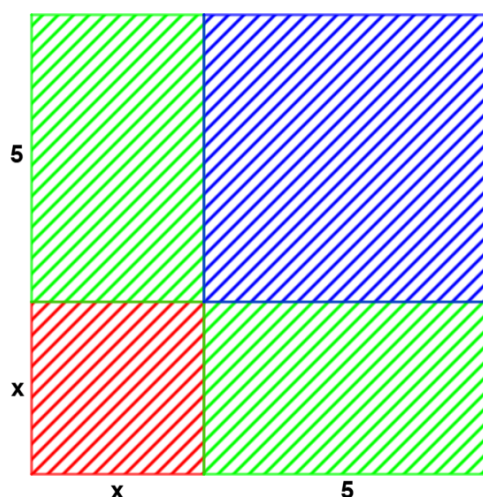


Figura 20: Representação geométrica do exercício em sala
Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio da Figura 20, podemos notar que a área em azul é 25 e que a soma das áreas em verde e vermelho é 39 pelo que temos na equação do problema. Temos então que ao somar essas duas áreas obtemos a área do quadrado de lado $5 + x$, logo temos a seguinte equação:

$$(5 + x)^2 = 25 + 39 \Leftrightarrow$$

$$(5 + x)^2 = 64.$$

E logo, obtemos que:

$$5 + x = 8 \Rightarrow x = 3.$$

Etapla 4: Validar as soluções diante da situação inicial:

Dividir a turma em grupos de 4 alunos, onde cada grupo recebe uma cartolina, o material

de pesquisa utilizado na seção 5.2 e uma equação que pode ser representada após manipulação algébrica pela forma: $ax^2 + bx = c$, os grupos devem então realizar os procedimentos de al-jbr e al-muqabala para manipular a equação e representar a equação utilizando as palavras árabes. Cada grupo deve representar x^2 como um quadrado grande e bx como dois retângulos de lados x e $\frac{b}{2}$, a partir dessas representações, os alunos devem completar o quadrado da peça que falta, encontrar a área total da figura, deduzir a equação resultante e encontrar o valor de x . Dessa forma permitindo que os alunos validem se a construção e o cálculo feito forma coerentes com o método histórico.

Etapas 5: Tomar decisões com base nos resultados obtidos

Nessa etapa os alunos devem realizar uma prova individual curta, resolvendo os exercícios que estão em anexo, o professor então deve realizar com a turma uma roda de conversa e levantar os questionamentos:

- O que mais chamou atenção nessa forma de resolver equações completando quadrados?
- O que significa “al-jabr” e “al-muqabala” no contexto da álgebra moderna?

Nessa etapa, os alunos consolidam o aprendizado e refletem sobre a relação do método histórico e a álgebra moderna e a partir dessa reflexão podem tomar decisões sobre a interpretação e a aplicação dos conceitos aprendidos.

5.3 Método da falsa posição no Egito Antigo

Objetivo: Compreender o raciocínio e a lógica aritmética utilizada pelos antigos egípcios, relacionar o método da falsa posição com conceitos modernos de equação do 1º grau.

Público-alvo: 9º ano do Ensino Fundamental.

Duração: Sugestão: 2 aulas de 50 minutos.

Recursos:

- Material de pesquisa utilizado na seção 5.3;
- Quadro branco e canetas.

Avaliação:

Formativa: Observar a participação dos alunos nos grupos, clareza durante a apresentação para a turma e argumentação nas discussões.

Somativa: Analisar as respostas discursivas da avaliação, o estudante entendeu como funciona o método da falsa posição? Compreendeu as semelhanças e diferenças entre a maneira

moderna de resolver equações do tipo $ax = b$ e a forma com que os egípcios resolviam?

Competência:

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, representar e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.

Habilidades:

- EF07MA18: Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- EF08MA13: Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Desenvolvimento:

Etapa 1: Identificar a situação:

Primeiramente, o professor faz uma contextualização e explica brevemente o método da falsa posição, fala que era um método utilizado pelos egípcios para resolver problemas que hoje denominamos de equação do primeiro grau. É importante destacar que antes da álgebra simbólica como tempos hoje, os cálculos eram feitos por meio de raciocínios proporcionais. O método da falsa posição consistia em supor um valor e, com base no resultado, ajustar proporcionalmente até chegar no valor certo. Utilizar o exemplo a seguir:

Exemplo:

“Uma quantidade e seu quinto somam 21. Qual é a quantidade?”

O escriba poderia fazer dessa maneira:

1. Escolhia um valor simples, por exemplo, 5.
2. Calculava $5 + \frac{1}{5} \times 5 = 5 + 1 = 6$
3. O resultado que queremos é 21. Então, multiplicamos o número falso encontrado por $\frac{21}{6}$, obtemos assim: $5 \times \frac{21}{6} = 17,5$
4. A resposta correta é 17,5.

Ou seja, o método consiste em encontrar um certo valor que dá um resultado “falso” e então ajustar o valor inicial na mesma proporção do erro. Nessa etapa os alunos identificam a situação-problema, reconhecendo que o método consiste em encontrar um

valor “falso” e então ajustá-lo proporcionalmente para obter a resposta correta.

Etapa 2: Estabelecer hipóteses simplificadoras:

Dividir os alunos em grupos com 4 integrantes, atribuir a cada integrante uma função diferente conforme o material de pesquisa da seção 5.3. Entregar os problemas para cada grupo resolver. Nesse momento os estudantes devem levantar hipóteses sobre os valores iniciais e então discutir estratégias para ajustar proporcionalmente esses valores até encontrarem a resposta correta.

Etapa 3: Resolver o problema matemático originado:

Cada grupo aplica o método da falsa posição para resolver os problemas propostos, calculando o valor inicial, identificando o resultado “falso” e ajustando proporcionalmente até encontrar a resposta correta. Esta etapa permite que os alunos pratiquem o raciocínio egípcio antigo e compreendam a lógica proporcional por trás do método.

Etapa 4: Validar as soluções diante da situação inicial:

O escriba de cada grupo apresenta um dos problemas resolvidos para toda a turma, preferencialmente escolhendo problemas diferentes dos já apresentados. Os alunos validam suas soluções comparando os resultados obtidos com os dos colegas, refletindo sobre a coerência do método e a relação com a resolução moderna de equações do primeiro grau.

Etapa 5: Tomar decisões com base nos resultados obtidos:

Cada aluno deve resolver individualmente duas questões discursivas que estão disponíveis no material de pesquisa da seção 5.3. O professor realiza então uma roda de conversa com toda a turma para discutir respostas e levantar reflexões sobre o funcionamento do método da falsa posição, tirando dúvidas a respeito da maneira de realizar o método e as semelhanças e diferenças entre a resolução egípcia e os métodos modernos de equações do 1º grau. Nessa etapa, os alunos consolidam o aprendizado, tomando decisões sobre a aplicação do método e a sua interpretação em contextos matemáticos em que o método era e pode ser utilizado.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

O propósito desse trabalho foi investigar e propor possibilidades para o ensino, articulando história e modelagem matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Para elaborar as sequências didáticas, buscou-se levar em consideração o ambiente escolar em que grande parte dos docentes está inserido, um ambiente com limitações de tempo e recursos.

Os trabalhos do Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional (PROFMAT), foram muito importantes para entender de que maneira os professores do Ensino Básico têm abordado a história e a modelagem no ensino de matemática. Esses trabalhos forneceram referências teóricas e práticas, orientando na elaboração das sequências e fortalecendo o embasamento pedagógico do trabalho.

O objetivo, quando se refere a modelagem matemática utilizada nesse trabalho, foi incorporar um carácter investigativos às atividades, estimulando o raciocínio, a criatividade e a autonomia dos alunos, apenas de nas sequências o professor explicar previamente e colocar um exemplo, ainda assim é possível que, utilizando os materiais de pesquisa, o carácter investigativo permaneça. Logo, foi possível concluir que a elaboração de sequências didáticas fundamentadas em História da Matemática e na Modelagem Matemática apresenta grande potencial para o ensino e aprendizagem da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Apesar das propostas não terem sido aplicadas em sala de aula, a construção permitiu identificar que essas abordagens contribuem para tornar o ensino mais contextualizado, investigativo e significativo, aproximando os conteúdos matemáticos da realidade e do interesse dos alunos.

Como perspectivas futuras, espera-se que as propostas sejam aplicadas e aprimoradas em sala de aula, permitindo dessa maneira que haja novas reflexões sobre a eficiência e a adaptabilidade das sequências, além disso, este trabalho pode contribuir para reflexões sobre o ensino de matemática contextualizado historicamente, incentivando debates e que outros docentes possam explorar a integração entre história e modelagem matemática para ensinar de maneira significativa, contextualizada e interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

ANJOS, L. F. dos. *Uma proposta para o ensino de equações do 1º grau utilizando a história da matemática*. 2023. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2023.

BASSANEZI, R. C. *Modelagem Matemática: uma disciplina emergente*. São Paulo: Contexto, 2015.

BERGAMIM, E. G. J.; KATO, L. A. *Articulações entre história da matemática e modelagem matemática: algumas compreensões a partir de uma revisão sistemática de literatura*. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 29, n. 1, p. 1–22, 2024. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/59872>. Acesso em: 25 set. 2025.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BONFIM, F. S. *História da matemática e cinema: o caso da criptografia na introdução do ensino de álgebra*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Tradução da 3ª edição americana. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. 4ª reimpressão, 2018.

BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (org.). *Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

BURAK, D. *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CHACE, A. B. *The Rhind Mathematical Papyrus*. Vol. 1. Oberlin, Ohio (U.S.A): Mathematical Association of America, 1927.

D'AMBROSIO, U. *Ethnomathematics: link between traditions and modernity*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

DIAS, M. S.; SAITO, F. *Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica*. In: *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. SBEM, 2009.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. *Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de uma metodologia*. Campinas: Mercado de Letras, 2004.

ERNEST, P. *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press, 1991.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 6. ed. São Paulo: Unicamp, 2004.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção*. 2. ed. São Paulo: Globo, 1997.

JOSEPH, G. G. *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 2011.

MARTINS, F. P. M. *A modelagem matemática no ensino fundamental: uma proposta para o 8º ano*. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Curso PROFMAT, Universidade Federal de Viçosa – Florestal, 14 set. 2024.

MARTINS, R. A. *Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos*. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, v. 17, n. 2, p. 115–121, 2000.

MEIRELLES, E. *Como organizar sequências didáticas*. *Revista Nova Escola*, v. 1, 2014.

MENDES, I. A. *Números: o simbólico e o racional na história*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MENDES, I. A. *História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas*. *Revista Cocar*, n. 14, 2022.

MIGUEL, A. *As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão*:

argumentos reforçadores e questionadores. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 5, p. 35–50, 1997.

MOTA, E. B.; FIORENTINI, D. *Resistências à utilização da história da matemática no ensino: análise de práticas docentes. Revista Paradigma*, v. 26, n. 2, p. 1–17, 2024.

OLIVEIRA, T. H. de. *Modelagem matemática, otimização linear e o problema de corte unidimensional: abordagens para o ensino*. 2024. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2024.

REIS, T. S. *Uma proposta de sequência didática com a utilização da história da matemática no ensino de matrizes*. 2023. 60 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2023.

RICIERE, A. P. *Arqueologia matemática: a origem da matemática nas civilizações antigas*. São Paulo: Parma, 1991.

RODRIGUES, C. T. *Matemática como ciência mais geral: forma da experiência e categorias. Cognitio-Estudos: Revista Eletrônica de Filosofia*, v. 4, n. 1, 2007.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SANTOS, J. R.; ALMEIDA, L. M. W.; BISOGNIN, E. *Modelagem matemática e etnomatemática: uma aproximação possível. Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 495–517, 2016.

SANTOS, P. dos. *Modelagem em educação matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SILVA, A. A.; BRAGA, C. A.; GIORDANO, C. C. *Contribuições do pensamento vygotskiano para a modelagem matemática*. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, Araraquara, v. 16, n. 4, p. 2912–2929, 2021. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/15305>. Acesso em: 25 set. 2025.

SILVA, D. *Desafios na formação docente e o ensino da história da matemática*. *Revista Educação Matemática*, v. 14, n. 2, p. 45–60, 2022.

SKOVSMOSE, O. *Paisagens de investigação: a ideia de educação matemática crítica*. 2. ed. Campinas: Papirus, 2000.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2008.

ANEXOS

Anexo 1: Material de pesquisa utilizado na Seção 5.1

Problemas para escolha dos grupos:

1. Verso 75: “De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada foram para o lago de Manasa, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando.”

2. Verso 76b: (Este verso está no Mahabharata) “Enraivecido numa batalha, Arjuna disparou uma quantidade de setas para matar Karna. Com metade das setas desviou as setas do seu adversário; com quatro vezes a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo; com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta, cortou a sua cabeça. Quantas setas Arjuna disparou?”

3. “Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alto da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total?”

4. “O quadrado da quinta parte do número de macacos de um bando, subtraída de 3 macacos, entra numa caverna; e um macaco fica fora pendurado numa árvore. Diga quantos são os macacos”

Regras retóricas:

“É por unidade iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros” (1)

“É a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar” (2)

Resolução do verso 77: “De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo estrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?”

Tabela 5: Interpretação do verso 77

Poema	Matemática moderna (tradução atual)
“enxame de abelhas”	$2x^2$
“de um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz”	x
“oito nonos do topo flutuam pelo céu”	$\frac{8}{9}2x^2$
“uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus”	2

Fonte: Elaborado pelos autores

Logo, temos que a quantidade total dos enxames de abelha é representada pela equação:

$$x + \frac{8}{9}2x^2 + 2 = 2x^2$$

Reescrevendo a equação temos:

$$\frac{2}{9}x^2 - x = 2$$

$$2x^2 - 9x = 18$$

Agora, com a equação nesse formato, deve-se resolver pelas regras retóricas:

Utilizando a regra (1), temos que multiplicar ambos os elementos por 4 vezes o número de quadrados, nós temos nesse caso 2 quadrados então a equação fica:

$$8 \times (2x^2 - 9x) = 18 \times 8$$

$$16x^2 - 72x = 144$$

Utilizando agora a regra retórica (2) temos que a quantidade do número primitivo de quantidades desconhecidas simples é 9, logo demos adicionar $9^2 = 81$.

$$16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81$$

$$16x^2 - 72x + 81 = 225$$

Eliminando o termo médio temos:

$$(4x - 9)^2 = 15^2$$

$$4x - 9 = 15$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

Logo, a representação do número de abelhas no enxame é $2x^2$ e, portanto, com $x = 6$ temos que o enxame contém 72 abelhas.

Anexo 2: material de pesquisa utilizado na Seção 5.2

Tabela 6: Interpretação dos problemas do material de pesquisa utilizado na Seção 5.2

Palavra	Significado árabe	Significado nos problemas	Noração atual
Adad	Quantidade ou número de dinheiro	Número conhecido	C
Jidhr	Raiz	Número desconhecido	X
Mal	Tesouro ou riqueza	Quadrado do número desconhecido	x^2

Fonte: Elaborado pelos autores

Procedimento de Al-jbr: “restaurar”, mover termos negativos para o outro lado da igualdade.

Exemplo: “Um mal é igual a quarenta e cinco adad menos cinco jidhr”

$$x^2 = 40 - 5x$$

Fazendo a operação de Al-jbr, temos que somar $5x$ de ambos os lados para “restaurar” o equilíbrio:

$$x^2 + 5x = 40$$

Procedimento de Al-muqabala: “balancear”, simplificar termos iguais em ambos os lados.

Exemplo: “Um mal e dez jidhr são iguais a trinta e cinco adad e cinco jidr”

$$x^2 + 10x = 35 + 5x$$

Utilizando a operação de Al-muqabala, temos que subtrair $5x$ para balancear os dois lados da igualdade:

$$x^2 + 5x = 35$$

Exemplo de exercício:

1. Um homem deixou uma herança de 39 moedas. Ele desejava que seu filho recebesse um número de moedas igual ao quadrado de um número, e que ele próprio (antes de falecer) guardasse 10 vezes esse número de moedas. Quantas moedas caberiam ao filho?

Represente esse problema em notação árabe (adad, jidhr e mal) e então resolva o problema utilizando a demonstração geométrica.

Resolução:

“39 moedas”: 39 adad

“número de moedas igual ao quadrado de um número”: mal

“número”: jidhr

“10 vezes esse número de moedas”: 10 jidhr

Logo, temos:

$$\text{mal} + 10\text{jidhr} = 39 \text{ adad}$$

Demonstração geométrica:

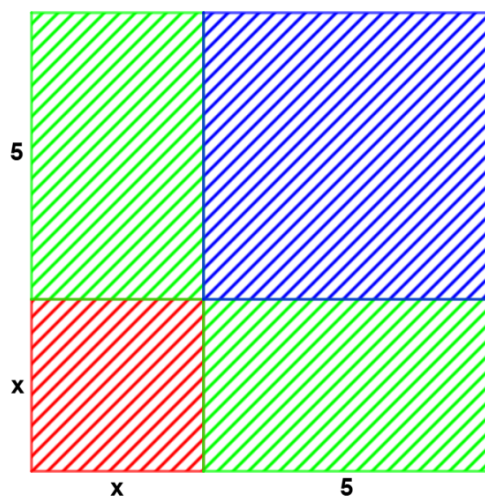


Figura 21: Representação geométrica do exercício em sala
Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio da Figura 21, podemos notar que a área em azul é 25 e que a soma das áreas em verde e vermelho é 39 pelo que temos na equação do problema. Temos então que ao somar essas duas áreas obtemos a área do quadrado de lado $5 + x$, logo temos a seguinte equação:

$$(5 + x)^2 = 25 + 39$$

$$(5 + x)^2 = 64$$

E logo, obtemos que:

$$5 + x = 8$$

$$x = 3$$

Exercícios para os grupos resolverem utilizando a cartolina:

1. $2x^2 + 8x - 10 = 0$
2. $2x^2 = 42 - 8x$
3. $-80 + 12x = -2x^2$
4. $3x^2 = 60 - 24x$
5. $4x^2 = 140 - 8x$
6. $-6x + x^2 + 5 = 0$
7. $2x^2 + 6x - 80 = 0$
8. $4x^2 + 10x - 96 = 0$
9. $x^2 + 3 = 6x + 4$
10. $x^2 = 84 - 8x$

Atividade individual para ser aplicada:

1. Um mercador tem uma bolsa com moedas. Se multiplicarmos o número de moedas por ele mesmo e somarmos 6 vezes o mesmo número, o total é igual a 91. Quantas moedas há na bolsa?
2. Um ourives tinha uma fortuna de 180 moedas. Ele destinou a cada um dos dois filhos uma quantidade igual ao quadrado de um número e guardou para si doze vezes esse número. Quantas moedas couberam a cada filho?
3. Um rei prometeu ao guerreiro vencedor de uma batalha, uma quantidade de moedas igual ao quadrado de um número, fora isso, ele também daria 10 vezes esse número de moedas ao mensageiro que levou a notícia da vitória, sabendo que o total entregue foi de 144 moedas, quantas moedas o guerreiro recebeu? E o mensageiro?
4. A Figura 22 representa um campo quadrado de lado x onde foram acrescentadas faixas retangulares de largura 2 metros em dois lados adjacentes, sabendo que a área total, somando o quadrado de lado x e as faixas acrescentadas é $60m^2$, quanto mede o lado x ? Mostre a equação do segundo grau que pode ser representada por essa questão.

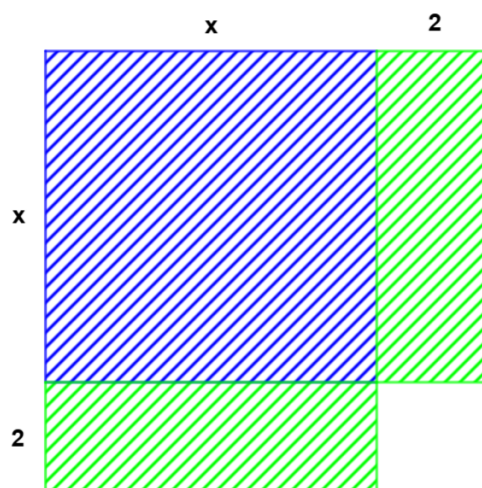


Figura 22: Campo quadrado de lado x com faixas retangulares de largura 2m.

Fonte: Elaborado pelos autores

Anexo 3: material de pesquisa utilizado na seção 5.3

O método da falsa posição era uma forma de resolver problemas matemáticos usando raciocínios proporcionais e tentativas controladas. Esse método consiste em escolher um valor qualquer para um valor desconhecido, uma incógnita e, a partir do resultado obtido, mudar esse valor proporcionalmente até chegar na resposta certa.

Exemplo:

“Uma quantidade e seu quinto somam 21. Qual é a quantidade?”

O escriba poderia fazer dessa maneira:

5. Escolhia um valor simples, por exemplo, 5.
6. Calculava $5 + \frac{1}{5} \times 5 = 5 + 1 = 6$
7. O resultado que queremos é 21. Então, multiplicamos o número falso encontrado por $\frac{21}{6}$, obtemos assim: $5 \times \frac{21}{6} = 17,5$
8. A resposta correta é 17,5.

Ou seja, o método consiste em encontrar um certo valor que dá um resultado “falso” e então ajustar o valor inicial na mesma proporção do erro.

Cada integrante do grupo ficará responsável por ser um personagem:

- i. O escriba real: Você é o matemático que está responsável por resolver problemas de comércio e impostos do faraó. Você deve propor um valor inicial, realizar os cálculos e corrigir proporcionalmente o erro.
- ii. O mercador: Você deve apresentar e explicar o problema para os outros personagens além de conversar com o escriba para discutir se o resultado encontrado é justo.
- iii. Ajudante do escriba: Você deve anotar todos os cálculos que o escriba faz e então elaborar um relatório final falando sobre o problema proposto e como ele foi resolvido.
- iv. Conselheiro: Você deve sempre questionar escriba e seu ajudante para garantir que os números escolhidos estão corretos, faça perguntas como: “Por que escolheu esse número?”, “Como sabe que o resultado está correto?”

Problemas para os grupos:

1. Uma quantidade e seu $\frac{1}{4}$ é igual a 15. Qual é a quantidade?

2. (Problema 30 do papiro de Ahmes) Qual a quantidade de que $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$ são iguais a 10?

3. Uma quantidade é somada com seus $\frac{2}{3}$, é subtraído $\frac{1}{3}$ do resultado e resta 10. Qual é a quantidade?

4. Problema das ânforas: O número de ânforas que vendi, somado ao seu quinto e a 3 ânforas quebradas, é igual a 38. Quantas ânforas foram vendidas?

5. Problema do lavrador: Se eu somar à quantidade de sacos de trigo que colhi a metade dessa mesma quantidade e mais 6 sacos, tenho 51 sacos. Quantos sacos foram colhidos?

Questões para a avaliação:

1. Explique, com suas palavras, como funciona o método da falsa posição utilizado pelos escribas do Egito Antigo. Destaque as etapas do passo a passo e comente por que esse método era eficaz.

2. Compare a resolução de uma equação da forma $ax = b$ pelo método que aprendemos em aula. O que você consegue perceber de semelhante e diferente em cada resolução?