





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

5

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/93

Excitação Coulombiana da RGD na Representação de
um Espaço de fase Holomórfico com a Aproximação
Eikonal

JAIME SANDRO DA VEIGA

23000003625



Orientador

Diógenes Galetti

IFT/TE
M-81

Janeiro 1993

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

EXCITAÇÃO COULOMBIANA DA RGD NA
REPRESENTAÇÃO DE UM ESPAÇO DE FASE
HOLOMÓRFICO COM A APROXIMAÇÃO
EIKONAL *

Jaime Sandro da Veiga

*Trabalho realizado sob a orientação
do Dr. Diógenes Galetti e apresen-
tada no Instituto de Física Teórica,
em preenchimento final dos requisitos
para a obtenção do título de mestre em
Física.*

São Paulo, Janeiro de 1993

*Trabalho Financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*Para o meu pai Gabriel (in memoriam) e a
minha mãe Conceição e ao meu grande irmão
Evaristo.*

Para a Cristiane e a Natasha, com amor.

Introdução

Este livro é dedicado a todos os que se interessam por conhecer a história da nossa cidade, desde os primeiros habitantes até os dias atuais.

A história da nossa cidade é rica e fascinante, com muitos fatos e personagens que moldaram o nosso presente.

Neste livro, vamos explorar a história da nossa cidade, desde os primeiros habitantes até os dias atuais.

A história da nossa cidade é rica e fascinante, com muitos fatos e personagens que moldaram o nosso presente.

Neste livro, vamos explorar a história da nossa cidade, desde os primeiros habitantes até os dias atuais.

A história da nossa cidade é rica e fascinante, com muitos fatos e personagens que moldaram o nosso presente.

Neste livro, vamos explorar a história da nossa cidade, desde os primeiros habitantes até os dias atuais.

A história da nossa cidade é rica e fascinante, com muitos fatos e personagens que moldaram o nosso presente.

Neste livro, vamos explorar a história da nossa cidade, desde os primeiros habitantes até os dias atuais.

À minha família

Agradecimentos

- Agradeço a Deus por me manter vivo e com saúde para que eu pudesse realizar e concluir este trabalho;

- Ao meu orientador e grande amigo Prof. Diógenes Galetti, por tudo o que fez por mim, por toda sua amizade que demonstrou nos momentos mais difíceis pelos quais eu passei. Jamais esquecerei das tantas coisas boas que me fez;

- Ao Prof. Gerhard Wilhelm Bund, pela boa pessoa que é e por me receber com muito carinho, desde os tempos de minha iniciação científica, há sete anos;

- Ao Prof. Bruto Max Pimentel Escobar, pelo curso que ministrou a mim como único aluno e por seus conselhos úteis;

- Ao Prof. Gastão Krein, por me aceitar como futuro orientado;

- Ao meu amigo Fernando Kokubun, pelo seu companheirismo e devoção à nossa amizade. Sem sua ajuda nos cálculos numéricos, este trabalho levaria muito mais tempo para ser terminado por mim;

- Ao meu sempre amigo Sidney dos Santos Avancini, pela amizade que já completa treze anos;

- À “família”: Cláudia Ianes Barbosa, minha irmãzinha, Marco Antonio Cândido Ribeiro, meu irmãozão e Carlos Alberto Vicari Vento, meu irmão do meio;

- Ao amigo Dimiter Radjmitcheff, pela sua amizade e gentileza ao ceder seu programa para a formatação do texto da tese;

- Ao sr. Antonio Peres Rubbi, o LORD, pela sua ajuda sempre gentil, amiga e educada;

- Aos amigos: Franscisco Eugênio da Silveira Mendonça, Antonio Amorim, Pablo De-

vecchi, Samuel Kucsbart, Maria Tijero, Eduardo Gregores, Felice Pisano, Clóvis Belbute Peres e Orlando Peres;

- Aos colegas Luiz, Tut, Lucienne, Nelson, Clisthenis, Carlos Fernando, Valter, Kwok, Ricardo, Mauro, Silvio, Miguel, Jeferson, Pedro e Tadeu;

- Aos funcionários: Alexandre, Rosane, Marcelo, Laércio, Susumo, José Francisco, Luzinete, Vilma, Laura, Zezé e à gentil Marina, um muito obrigado por tudo o que me fizeram e por tudo o quanto me ajudaram no transcorrer deste trabalho;

- A todos os professores do IFT, pela dedicação ao trabalho científico e ao ensino. A todos os que me ajudaram e contribuíram para o meu aprendizado e aprimoramento profissional, eu devo meus sinceros agradecimentos;

- Ao apoio financeiro dado pelo CNPq.

”....Minha rosa, sem dúvida um transeunte qualquer pensaria que se parece convosco. Ela sozinha é, porém, mais importante que vós todas, pois foi a ela que reguei. Foi a ela que pus sob a redoma. Foi a ela que abriguei com o pára-vento. Foi dela que eu matei as larvas (exceto duas ou três por causa das borboletas). Foi a ela que eu escutei queixar-se ou gabar-se, ou mesmo calar-se algumas vezes. É a minha rosa.

E voltou, então , à raposa:

-Adeus, disse ele...

-Adeus, disse a raposa. Eis o meu segredo. É muito simples: só se vê bem com o coração. O essencial é invisível para os olhos.

-O essencial é invisível para os olhos. repetiu o príncipezinho, a fim de se lembrar.

-Foi o tempo que perdeste com tua rosa que fez tua rosa tão importante.

-Foi o tempo que eu perdi com a minha rosa...repetiu o príncipezinho, a fim de se lembrar.

-Os homens esqueceram essa verdade, disse a raposa. Mas tu a não deves esquecer. Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas. Tu és responsável pela rosa...

-Eu sou responsável pela minha rosa...repetiu o príncipezinho, a fim de se lembrar.”

O Pequeno Príncipe.

Antoine de Saint-Exupéry

O UNIVERSO não é uma idéia minha.

A minha idéia do Universo é que é uma idéia minha.

A noite não anoitece pelos meus olhos,

A minha idéia de noite é que anoitece por meus olhos.

Fora de eu pensar e de haver quaisquer pensamentos

A noite anoitece concretamente

E o fulgor das estrelas existe como se tivesse peso.

1-10-1.917

ASSIM COMO falham as palavras quando querem exprimir

qualquer pensamento,

Assim falham os pensamentos quando querem exprimir qualquer

realidade.

Mas, como a realidade pensada não é a dita mas a pensada.

Assim tudo o que existe, simplesmente existe.

O resto é uma espécie de sono que temos.

Uma velhice que nos acompanha desde a infância da doença.

1-10-1.917

POEMAS INCONJUNTOS (1.913-1.917)

O Eu profundo e os outros Eus - Fernando Pessoa

Resumo

Nós estendemos a transformação de Weyl-Wigner de forma a incluir o formalismo da segunda quantização introduzindo o núcleo mapeador de Bargmann na transformada de Weyl. Além disso, nós construímos um espaço de fase holomórfico em que funções analíticas inteiras de duas variáveis complexas, a saber, z e w^* , representam os operadores de criação e aniquilação de bósons, respectivamente. As equações dinâmicas são obtidas pelo mapeamento da equação de movimento de Heisenberg. Assim, uma expressão holomórfica para a probabilidade de excitação é apresentada e um cálculo explícito é feito para o oscilador harmônico forçado. Finalmente, nós aplicamos a descrição holomórfica do espaço de fase a um processo de colisão particular, i.e., no estudo analítico da excitação coulombiana da ressonância gigante de dipolo elétrico isovetorial na aproximação eikonal. Comparações com resultados experimentais são apresentadas e discutidas.

Abstract

We extend the Weyl-Wigner transformation to include the second quantization scheme by introducing the Bargmann mapping kernel in the Weyl transform. Besides, we construct a holomorphic phase space in which complex entire analytic functions of two variables, namely, z and w^* , stand for the boson creation and annihilation operators representatives, respectively. The dynamical equations are obtained by the mapped Heisenberg equation of motion. So, a holomorphic expression for an excitation probability is presented and an explicit calculation is performed for the forced harmonic oscillator. Finally, we apply the holomorphic phase-space description to a particular collision process, i.e., the analytical study of the Coulomb excitation for the isovector giant electric dipole resonance in the eikonal approximation. Comparisons with experimental results are presented and discussed.

Índice

1	Introdução	1
2	Probabilidades de Transição no Espaço de Fase Holomórfico	7
2.1	Mapeamento Holomórfico	7
2.2	Mapeamento Holomórfico Inverso	9
2.3	Transformação Holomórfica de um Produto de dois Operadores	10
2.4	A Equação de Heisenberg de Evolução Temporal de um Operador na Representação Holomórfica	14
2.5	Solução do Oscilador Harmônico Forçado na Representação Holomórfica . .	15
2.6	Expressão Holomórfica para a Probabilidade de Transição	16
2.7	A Probabilidade de Transição para o Oscilador Harmônico Forçado	17
3	Descrição do Modelo	19
3.1	Cinemática	19
3.2	Aproximação Eikonal	22
3.3	Apresentação do Problema de Excitação da Ressonância Gigante de Dipolo na Aproximação Eikonal	25
4	Apresentação dos Resultados	30
5	Discussão dos Resultados e Conclusões Finais	33
5.1	Limitações quanto ao método utilizado:	33
5.2	Limitações quanto ao modelo utilizado:	34
5.2.1	Aproximação do núcleo por duas massas presas a uma mola:	35

5.2.2	Não há distribuição de cargas elétricas: as cargas elétricas do núcleo e do projétil são consideradas puntiformes:	36
5.2.3	As forças nucleares são desprezadas:	36
5.2.4	A interação com correntes elétricas é desprezada:	37
5.2.5	Não é levado em conta o recuo do núcleo no processo de colisão : .	37
5.2.6	É feita uma aproximação para $\frac{1}{ \vec{R}-\vec{r} }$ em sua expansão binomial: . .	38
5.2.7	É feita a aproximação eikonal (ou de pequenos ângulos):	39
5.2.8	O modelo não leva em conta misturas de n-pólos:	39
5.3	Limitações devidas ao cálculo numérico:	40
A	Mapeamento Holomórfico de Alguns Operadores Usuais	41
A.1	Cálculo da Função de Wigner do Oscilador Harmônico Simples	41
A.2	Mapeamento Holomórfico da Função de Wigner do Oscilador Harmônico Simples	42
A.3	Mapeamento Holomórfico do operador 1	43
A.4	Mapeamento Holomórfico de $\hat{q}$, $\hat{p}$, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$	43
A.5	Mapeamento Holomórfico da Hamiltoniana do Oscilador Harmônico Simples	44
B	Determinação da Expressão Holomórfica para a Probabilidade de Transição	45
C	Algumas Expressões do Formalismo de Bargmann	46
	Referências Bibliográficas	48

Capítulo 1

Introdução

O estudo da excitação de um núcleo alvo através da interação com um projétil pode ser realizado com a utilização de inúmeros métodos, cada qual com suas vantagens e desvantagens, mais adequados ou não a uma particular classe de problemas.

Em especial, no estudo das ressonâncias gigantes de dipolo (RGD), utilizam-se, em geral, projéteis carregados eletricamente, já que a excitação ocorre em parte através da interação carga-carga, podendo ser usado também um feixe de radiação γ quando se quer fazer um estudo de excitações a baixas energias.

Informações a respeito da estrutura nuclear já podem ser obtidas através da simples interação coulombiana entre o núcleo alvo e o projétil. Escolhendo-se a energia do projétil de tal maneira que seu comprimento de onda de de Broglie seja inferior a distância de maior aproximação, os métodos semiclássicos se tornam adequados à descrição de tais problemas de espalhamento [1].

No presente trabalho, estudaremos a excitação coulombiana das ressonâncias gigantes de dipolo elétrico (RGDE – também chamadas RGD isovetoriais) utilizando íons acelerados até energias intermediárias como projéteis que incidem contra um núcleo alvo fixo e este estudo é feito através de um método semiclássico, a saber, a descrição de Weyl-Wigner do espaço de fase [2, 3]. Nós, por comodidade, iremos nos referir a esta descrição simplesmente como o formalismo de Weyl-Wigner.

Este formalismo foi construído a partir dos trabalhos pioneiros de Weyl [4] e Wigner [5] e, alguns anos mais tarde, com o importante trabalho desenvolvido por Moyal [6]¹.

¹Veja também ref.[7]

O interesse principal do formalismo reside na representação de operadores abstratos, que atuam em um espaço de Hilbert, em termos de variáveis clássicas. Todo operador $\hat{O}$ pode ser decomposto em uma base de operadores, $\hat{\Delta}(q, p)$, com suas componentes escritas em termos de variáveis clássicas, $O_w(q, p)$, constituindo a assim chamada transformada de Weyl do operador $\hat{O}$, a qual possui toda a informação quântica a respeito do operador $\hat{O}$, conforme a expressão [2]

$$\hat{O} \equiv \int O_w(q, p) \hat{\Delta}(q, p) dq dp \quad . \quad (1.1)$$

A construção da base de operadores $\hat{\Delta}(q, p)$ pode ser feita inclusive para graus de liberdade que não têm análogos clássicos, como por exemplo para o spin [8]. O espaço de fase nesse caso é discreto e a integral da expressão (1.1) passa a ser uma soma discreta, como mostra a expressão abaixo

$$\hat{O} \equiv \sum_{m, n} O(m, n) \hat{S}(m, n) \quad . \quad (1.2)$$

Tal receita para a construção da base $\hat{S}(m, n)$ foi dada por Schwinger [10]. A função $O(m, n)$, embora função de variáveis discretas, ainda é uma transformação de Weyl do operador $\hat{O}$, sendo uma representação desse operador em um novo espaço de fase discreto. Há importantes aspectos geométricos gerais a serem considerados, seja a respeito do espaço de fase de Weyl-Wigner contínuo ou seja a respeito do discreto [9]. Contudo, o que nos chamou a atenção em tal formalismo é a maneira como ele manifesta uma estrutura de segunda quantização no espaço de fase contínuo. Assim, um dos objetivos deste trabalho é o de realçar essa estrutura de segunda quantização do espaço de fase de Weyl-Wigner de maneira a torná-la explícita.

Para se atingir tal objetivo, seguindo a mesma trilha de Weyl-Wigner, constrói-se um mapeamento – só que agora este mapeamento é holomórfico – que associa a cada operador abstrato $\hat{O}$, atuando em um espaço de Hilbert, uma função clássica de duas variáveis complexas, $O(z, w^*)$, que contém toda a informação quântica de $\hat{O}$. Denominaremos essa função de a transformada de Weyl holomórfica do operador $\hat{O}$, ou simplesmente, a transformada holomórfica de $\hat{O}$. Tal função, $O(z, w^*)$, é analítica tanto em relação à variável complexa z quanto em relação à variável complexa w^* e é inteira, isto é, não contém pólos. Essa particularidade da função ser inteira é um aspecto positivamente interessante do ma-

peamento, já que ele é obtido sempre através de uma integral e ao se executar o cálculo dessa integral não encontraremos problemas de singularidades que poderiam complicar o cálculo enormemente.

Os representantes dos operadores no formalismo holomórfico pertencem agora ao espaço de fase holomórfico, cujas variáveis dinâmicas, z e w^* , são os representantes dos operadores de criação e destruição de bósons, respectivamente. Assim, o esquema holomórfico apresenta-se mais geral que o esquema de Weyl-Wigner, por englobar não apenas as relações de comutação entre os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$, mas também as relações de comutação entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, os operadores da segunda quantização [11].

A construção desse mapeamento é feita no capítulo 2 deste trabalho graças à utilização do mapeamento desenvolvido por Bargmann [12].

O mapeamento de Bargmann engloba o mapeamento de funções de onda e de operadores. A cada função de onda $\psi(q)$, ele associa uma função analítica inteira de variável complexa, $f(z)$, e aos operadores bosônicos, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, ele associa a variável complexa z e a derivada em relação a esta mesma variável, $\frac{\partial}{\partial z}$, respectivamente. Esse mapeamento é feito através do uso do núcleo mapeador de Bargmann, $A(z, q)$, que foi construído no trabalho original daquele autor. Um fato interessante é que, no esquema holomórfico, há o chamado núcleo reprodutor de Bargmann, $K(z, w^*)$, que possui a propriedade de integração imediata, análoga a delta de Dirac, conforme apresentamos abaixo

$$f(z) = \int d\mu(w) f(w^*) K(z, w^*) \quad , \quad (1.3)$$

onde $d\mu(w)$ é a medida de integração de Bargmann e tem sempre a forma de uma gaussiana.

Graças ao núcleo reprodutor, expressões complicadas foram integradas por nós com relativa facilidade e esforço numérico considerável foi poupado [13].

A dinâmica no espaço de fase holomórfico é construída através do mapeamento das equações de movimento, seja a equação de Schrödinger ou seja a equação de Heisenberg. Pode-se também mapear o propagador e obter um propagador holomórfico [11, 14]. Entretanto, como neste trabalho trataremos de problemas com hamiltonianas que dependem do tempo, o caminho tecnicamente mais conveniente para se obter a dinâmica é através do mapeamento da equação de Heisenberg. Aspectos interessantes do mapeamento das equações de

movimento, como o mapeamento da equação de von Neumann-Liouville, a obtenção direta das equações de Ehrenfest dos valores esperados dos operadores, a obtenção de equações de Hamilton para o pacote mínimo e o caráter de estados comprimidos (“squeezing character”) do mapeamento foram apresentados num trabalho desenvolvido por nós [11].

Aqui, nosso interesse reside no estudo particular da excitação nuclear de RGDE’s e, para a aplicação do formalismo holomórfico a esse estudo, é necessário que tenhamos uma expressão holomórfica para o cálculo de probabilidades de transição no nosso modelo específico. Com o uso do mapeamento, a obtenção dessa expressão é fácil e será apresentada no Apêndice 2.

A resolução do problema do oscilador harmônico forçado com uma interação linear em relação à posição para o cálculo das probabilidades de excitação já foi feita dentro de vários contextos como, por exemplo, no formalismo de integrais de trajetória [15], na obtenção dos estados coerentes do oscilador harmônico [16, 17, 18], no uso da matriz S no estudo de processos de espalhamento [19, 20], no formalismo de Weyl-Wigner para um espaço de fase [21], etc.. Aqui, usamos o formalismo holomórfico na resolução desse problema e obtemos, como nos casos anteriores citados, uma distribuição de Poisson para as probabilidades de excitação. No nosso caso, como tratamos de uma ressonância gigante, tal distribuição corresponde à excitações de multifônons, que é um dos assuntos mais interessantes relativos às ressonâncias gigantes e que, do ponto de vista experimental, ainda é uma incógnita [22, 23].

Pretendemos mostrar neste trabalho como calcular analiticamente a distribuição angular para a RGDE usando a abordagem semiclássica do formalismo holomórfico para as excitações coulombianas do ^{208}Pb induzidas por dêuteron e partículas alfa.

No capítulo 3, apresentamos um modelo bastante simples para o sistema colisional em questão, no qual o núcleo é tratado, dentro do modelo de Goldhaber-Teller [24], como um vibrador composto de uma mola e duas massas puntiformes, uma correspondendo à massa total de nêutrons e a outra à massa total de prótons, com o centro de massa nuclear fixo à origem do sistema de coordenadas. À aproximação do projétil, na forma de um íon carregado puntiforme, corresponderá um termo de interação dependente do tempo na hamiltoniana nuclear, e esta é a hamiltoniana do oscilador harmônico simples quando a

perturbação está desligada. Assim, com este modelo simples, o problema recai no do oscilador harmônico simples com uma perturbação dependente do tempo.

No processo de excitação foi levada em conta, no modelo usado por nós, apenas a interação carga-carga, que induz excitações longitudinais no alvo, enquanto as excitações transversais, que são induzidas por correntes, e as excitações por forças nucleares não foram levadas em consideração.

É de se esperar que este modelo tenha limitações por não levar em conta a extensão do núcleo e também por não considerar a interação nuclear, o que nos leva a supor que na região de grandes desvios angulares, onde a aproximação entre o projétil e o alvo é grande o suficiente para a atuação da força nuclear, teremos discrepâncias maiores entre os resultados calculados com o auxílio do modelo e os resultados experimentais.

Tendo em vista a possibilidade de fazer o cálculo inteiramente de maneira analítica, é feita uma aproximação adicional, a aproximação eikonal, que é uma boa aproximação para energias suficientemente altas, de forma a fazer com que a repulsão coulombiana não seja suficientemente intensa para causar grandes desvios angulares no processo de espalhamento. A aproximação eikonal clássica também é chamada aproximação para pequenos ângulos [25].

A distribuição angular de um fônon para a RGDE é calculada com o “ansatz” comumente feito de multiplicar a seção de choque de Rutherford pela probabilidade de excitação do estado fundamental para o primeiro estado excitado; não discutiremos a distribuição angular para o segundo estado excitado, no caso da ressonância gigante, apesar de termos uma expressão analítica para o cálculo, pois ainda não dispomos de dados experimentais para a comparação.

No capítulo 4, mostramos a aplicação para o caso do ^{208}Pb usando como projéteis dêuteron e partículas alfa e comparamos com a experiência. Nossa tentativa é a de mostrar que apesar das drásticas simplificações que o modelo apresenta, ainda podemos obter resultados satisfatórios como, por exemplo, a localização correta do pico predominantemente coulombiano da ressonância gigante.

Finalmente, o capítulo 5 é destinado à discussão e às conclusões finais; no apêndice 1 são apresentados os mapeados holomórficos de alguns operadores interessantes; no apêndice

2 é apresentada a dedução da expressão holomórfica para o cálculo das probabilidades de transição, enquanto no apêndice 3 são apresentadas algumas expressões do formalismo de Bargmann que são por nós usadas com frequência.

Capítulo 2

Probabilidades de Transição no Espaço de Fase Holomórfico

2.1 Mapeamento Holomórfico

A formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica recebeu grande atenção nas últimas décadas, principalmente por se apresentar adequada às considerações a respeito do limite semiclássico de um sistema quântico.

Essa formulação consiste em mapear cada operador $\hat{O}$ da Mecânica Quântica (grandeza quântica) em uma função $f_w(q, p)$ (grandeza clássica), a qual contém toda a informação quântica de $\hat{O}$. Uma apresentação didática e detalhada do formalismo foi feita por de Groot e Suttorp [2].

Bargmann [12], por sua vez, construiu um mapeamento que associa a cada função de onda $\psi(q)$, definida num espaço de Hilbert de quadrado integrável $\mathcal{L}$, uma função analítica inteira de variável complexa $f(z)$, representante de um estado do espaço de Fock $\mathcal{F}$ e aos operadores de criação e aniquilação de bósons, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, respectivamente, definidos em $\mathcal{L}$, associa os representantes z e $\frac{\partial}{\partial z}$, que atuam nos elementos de $\mathcal{F}$.

Então, utilizando o mapeamento de Bargmann na definição de transformada de Weyl, conseguimos um mapeamento – aqui chamado de holomórfico – que associa a cada função $f_w(q, p)$, obtida através da transformação de Weyl do operador $\hat{O}$, uma função $f(z, w^*)$ que é analítica inteira tanto em relação à variável complexa z quanto em relação à variável complexa w^* (o asterisco indica conjugação complexa).

Maiores detalhes sobre o mapeamento holomórfico de operadores e exemplos de aplica-

ções podem ser encontrados na referência [14].

Para se chegar à expressão do mapeamento holomórfico, vamos partir da transformação abstrata que leva o operador $\hat{O}$ para a representação holomórfica (cf. Bargmann [12])

$$\tilde{O} = A\hat{O}A^{-1} \quad . \quad (2.1)$$

Vamos introduzir as representações complexas $|z\rangle$ e $|w\rangle$, juntamente com as relações de completude para as coordenadas

$$\int d\tilde{q} |\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}| = 1 \quad (2.2)$$

na expressão (2.1), resultando em

$$\begin{aligned} \langle z|\tilde{O}|w\rangle &= \int d\tilde{q} d\tilde{q}' \langle z|A|\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|\hat{O}|\tilde{q}'\rangle\langle\tilde{q}'|A^{-1}|w\rangle \\ &= \int d\tilde{q} d\tilde{q}' A(z, \tilde{q}) O(\tilde{q}, \tilde{q}') A^*(\tilde{q}', w) \quad , \end{aligned} \quad (2.3)$$

$A(z, \tilde{q})$ é o chamado núcleo mapeador de Bargmann, que é dado pela expressão

$$A(z, \tilde{q}) = \frac{1}{\pi^{1/4} b^{1/2}} \exp \left[\sqrt{2} \frac{\tilde{q}}{b} z - \frac{z^2}{2} - \frac{\tilde{q}^2}{2b^2} \right] \quad , \quad (2.4)$$

onde b é o parâmetro do oscilador harmônico da base.

Vamos fazer as seguintes mudanças de variáveis de jacobiano um

$$\tilde{q}' + \tilde{q} = 2q \quad (2.5)$$

$$\tilde{q}' - \tilde{q} = y \quad . \quad (2.6)$$

Com essa mudança, ficamos com a eq.(2.3) na forma

$$O(z, w^*) = \int dq dy A(z, q - \frac{y}{2}) O(q, y) A^*(q + \frac{y}{2}, w) \quad . \quad (2.7)$$

Além disso, podemos ligar $O(q, y)$ com a transformada de Weyl, $O_w(q, p)$, do operador $\hat{O}$ através de uma transformada de Fourier

$$O(q, y) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-i\frac{p}{\hbar}y} O_w(q, p) dp \quad . \quad (2.8)$$

Finalmente, substituindo as expressões para os A 's dadas pela eq.(2.4) juntamente com a eq.(2.8) na eq.(2.7) temos, após a integração em y , que

$$\begin{aligned} O(z, w^*) &= \frac{e^{-zw^*}}{\pi\hbar} \int dq dp \exp \left\{ -\frac{q^2}{b^2} - \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \sqrt{2} \left[z \left(\frac{q}{b} + i\frac{b}{\hbar}p \right) + w^* \left(\frac{q}{b} - i\frac{b}{\hbar}p \right) \right] \right\} O_w(q, p) \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

A eq.(2.9) é a expressão do mapeamento holomórfico procurada. Às vezes, é conveniente expressá-la totalmente em termos de variáveis complexas. Então, lembrando que a medida de Bargmann $d\mu(\alpha)$, com $\alpha = \frac{q}{b} + i\frac{b}{\hbar}p$, é dada por

$$d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi} d\left(\frac{q}{b}\right) d\left(\frac{b}{\hbar}p\right) \exp\left\{-\frac{q^2}{b^2} - \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right\} , \quad (2.10)$$

ficamos com a eq.(2.9) posta na forma totalmente complexa

$$O(z, w^*) = e^{-zw^*} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}(z\alpha + w^*\alpha^*)} O(\alpha, \alpha^*) . \quad (2.11)$$

Essa expressão totalmente complexa é adequada para operadores que possuem a forma $\hat{O} = \sum_{n,m} C_{nm} a^{\dagger n} a^m$, onde $a^{\dagger}$ e a são os operadores de criação e aniquilação de bósons, respectivamente.

É interessante notar que o mapeamento holomórfico é mais geral que a transformada de Weyl de um operador, no sentido em que ele engloba não apenas as relações de comutação entre $\hat{q}$ e $\hat{p}$, que descrevem a primeira quantização, mas também as relações de comutação entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^{\dagger}$, que descrevem a segunda quantização. Vejamos, por exemplo, como fica o mapeamento do operador $e^{\lambda\hat{q}}$ usando o formalismo de Weyl-Wigner e o formalismo holomórfico:

$$. \text{ a)WW: } e^{\lambda\hat{q}} \longrightarrow e^{\lambda q} \quad (2.12)$$

$$. \text{ b)Holomórfico: } e^{\lambda\hat{q}} \longrightarrow e^{\lambda\frac{b}{\sqrt{2}}(z+w^*)} e^{\frac{\lambda^2}{2}} . \quad (2.13)$$

Percebe-se que a última exponencial do mapeamento holomórfico é proveniente do comutador de $\hat{a}$ com $\hat{a}^{\dagger}$ quando, antes de mapearmos segundo Weyl-Wigner, usamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff na exponencial de $\lambda\hat{q}$ com $\hat{q}$ escrito como $\hat{q} = \frac{b}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})$.

Para o cálculo do mapeamento holomórfico de $\hat{q}$, $\hat{a}$ e $\hat{a}^{\dagger}$, veja Apêndice 1.

2.2 Mapeamento Holomórfico Inverso

Vamos determinar a expressão que mapeia uma representação holomórfica de um operador $O(z, w^*)$ em sua correspondente transformada de Weyl, $O_w(q, p)$; partamos da inversa da eq.(2.1),

$$\hat{O} = A^{-1} \tilde{O} A . \quad (2.14)$$

Tomemos o elemento de matriz $\langle \tilde{q} | \hat{O} | \tilde{q}' \rangle$ no espaço das coordenadas e vamos introduzir a seguinte relação de completeza no espaço holomórfico

$$\int d\mu(z) |z\rangle \langle z| = 1 \quad , \quad (2.15)$$

onde $d\mu(z) = \frac{1}{\pi} d\text{Re}z d\text{Im}z e^{-\text{Re}^2 z - \text{Im}^2 z}$, obtendo a seguinte relação

$$\begin{aligned} \langle \tilde{q} | \hat{O} | \tilde{q}' \rangle &= \int d\mu(z) d\mu(w) \langle \tilde{q} | A^{-1} | z \rangle \langle z | \hat{O} | w \rangle \langle w | A | \tilde{q}' \rangle \\ &= \int d\mu(z) d\mu(w) A^*(z, \tilde{q}) O(z, w) A(w, \tilde{q}') \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Façamos a mesma mudança de variáveis das eqs.(2.5) e (2.6). Temos, então

$$\langle q - \frac{y}{2} | \hat{O} | q + \frac{y}{2} \rangle = \int d\mu(z) d\mu(w) A^*(z, q - \frac{y}{2}) O(z, w) A(w, q + \frac{y}{2}) \quad . \quad (2.17)$$

Já que temos do lado esquerdo da igualdade um elemento de matriz não-local, podemos usar diretamente as idéias de transformação de Weyl. Para isto, tomaremos a transformada de Fourier da não-localidade

$$\int dy \langle q - \frac{y}{2} | \hat{O} | q + \frac{y}{2} \rangle e^{i\frac{p}{\hbar}y} = \int dy d\mu(z) d\mu(w) e^{i\frac{p}{\hbar}y} A^*\left(z, q - \frac{y}{2}\right) O(z, w^*) A\left(w, q + \frac{y}{2}\right) \quad . \quad (2.18)$$

Reconhece-se o lado esquerdo de (2.18) como sendo a transformada de Weyl do operador $\hat{O}$ e no lado direito, após a integração em y , com a introdução dos A 's dados pela eq.(2.4), obtemos a expressão do mapeamento inverso

$$\begin{aligned} O_w(q, p) &= 2 \exp\left\{-\frac{q^2}{b^2} - \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right\} \int d\mu(z) d\mu(w) e^{-z^* w} O(z, w^*) \times \\ &\quad \times \exp\left\{\sqrt{2} \left[z^* \left(\frac{q}{b} - i\frac{b}{\hbar} p \right) + w \left(\frac{q}{b} + i\frac{b}{\hbar} p \right) \right]\right\} \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mais uma vez, podemos condensar a notação fazendo $\alpha = \frac{q}{b} + i\frac{b}{\hbar} p$. Então,

$$O_w(q, p) = 2e^{-\alpha\alpha^*} \int d\mu(z) d\mu(w) e^{-z^* w} O(z, w^*) e^{\sqrt{2}(z^* \alpha^* + w\alpha)} \quad . \quad (2.20)$$

2.3 Transformação Holomórfica de um Produto de dois Operadores

Vamos iniciar fazendo uso da definição da transformada de Weyl de um operador

$$\hat{O} = \frac{1}{h} \int dq dp O_w(q, p) \hat{\Delta}(q, p) \quad (2.21)$$

no produto de dois operadores

$$\hat{O}_1 \hat{O}_2 = \frac{1}{\hbar^2} \int dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 O_{1w}(q_1, p_1) O_{2w}(q_2, p_2) \hat{\Delta}(q_1, p_1) \hat{\Delta}(q_2, p_2) , \quad (2.22)$$

onde

$$\hat{\Delta}(q, p) = \frac{1}{\hbar} \int du dv e^{\frac{i}{\hbar}(q-\hat{q})u} e^{\frac{i}{\hbar}(p-\hat{p})v} e^{\frac{iuv}{2\hbar}} . \quad (2.23)$$

Usaremos novamente a eq.(2.1) e colocaremos a representação holomórfica juntamente com as relações de completeza das coordenadas [eq.(2.2)] na eq.(2.22):

$$O_{12}(z, w^*) \equiv \langle z | \hat{O}_1 \hat{O}_2 | w \rangle \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \int \prod_i dx_i O_{1w}(q_1, p_1) O_{2w}(q_2, p_2) \langle z | A | q_3 \rangle \langle q_3 | \hat{\Delta}_1 | q_4 \rangle \langle q_4 | \hat{\Delta}_2 | q_5 \rangle \langle q_5 | A^{-1} | w \rangle , \quad (2.25)$$

onde usamos a seguinte notação simplificada

$$\prod_i dx_i = dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 dq_5 dp_1 dp_2 \quad e \quad (2.26)$$

$$\hat{\Delta}_i = \hat{\Delta}(q_i, p_i), \quad i = 1, 2 . \quad (2.27)$$

Os elementos de matriz dos operadores $\hat{\Delta}$ são dados por (cf. de Groot e Suttrop [2])

$$\langle q' | \hat{\Delta}(q, p) | q'' \rangle = \delta \left(q - \frac{q' + q''}{2} \right) e^{\frac{i}{\hbar} p (q' - q'')} , \quad (2.28)$$

e os elementos de matriz dos A 's são dados pela eq.(2.4).

Agora, após a integração em q_3, q_4 e q_5 , temos

$$\begin{aligned} O_{12}(z, w^*) &= \frac{4}{\hbar^2} \int dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 O_{1w}(q_1, p_1) O_{2w}(q_2, p_2) e^{zw^*} \times \\ &\times e^{-\alpha_1 \alpha_1^* - \alpha_2 \alpha_2^* + 2\alpha_1^* \alpha_2} e^{\sqrt{2}(\alpha_1 z - \alpha_1^* w^*) + \sqrt{2}(-\alpha_2 z + \alpha_2^* w^*)} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Vamos definir núcleos mapeadores por

$$M_i(\alpha_i; z, w^*) = \frac{2}{\hbar} e^{-\alpha_i \alpha_i^* + \sqrt{2}(z \alpha_i + w^* \alpha_i^*)} . \quad (2.30)$$

Com isso, podemos reescrever a eq.(2.29) usando os núcleos mapeadores

$$\begin{aligned} O_{12}(z, w^*) &= e^{zw^*} \int d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) O_{1w}(\alpha_1, \alpha_1^*) O_{2w}(\alpha_2, \alpha_2^*) \times \\ &\times e^{2\alpha_1^* \alpha_2 - 2\sqrt{2}(\alpha_1^* w^* + \alpha_2 z)} M_1(\alpha_1; z, w^*) M_2(\alpha_2; z, w^*) . \end{aligned} \quad (2.31)$$

A exponencial dentro dessa última expressão pode ser tirada para fora da integral se usarmos as seguintes identidades

$$\sqrt{2} \alpha_i^* M_i \equiv \frac{\partial M_i}{\partial w^*} \quad (2.32)$$

$$\sqrt{2} \alpha_i M_i \equiv \frac{\partial M_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2 \quad (2.33)$$

Assim,

$$O_{12}(z, w^*) = e^{zw^*} e^{\left[\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z} - 2w^* \frac{\partial^1}{\partial w^*} - 2z \frac{\partial^2}{\partial z} \right]} \int d\mu(\alpha_1) O_{1w}(\alpha_1, \alpha_1^*) M_1(\alpha_1; z, w^*) \times \\ \times \int d\mu(\alpha_2) O_{2w}(\alpha_2, \alpha_2^*) M_2(\alpha_2; z, w^*) \quad (2.34)$$

Cada uma das integrais é igual a $O_i(z, w^*) e^{zw^*}$, $i = 1, 2$, e aprendemos, por inspeção, que todos os operadores, exceto o operador densidade, possuem mapeados holomórficos da forma $O_R(z, w^*) e^{zw^*}$, onde $O_R(z, w^*)$ é o núcleo holomórfico reduzido do operador $\hat{O}$. Dessa forma, a expressão do mapeamento do produto torna-se

$$O_{12}(z, w^*) = e^{zw^*} e^{\left[\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z} - 2w^* \frac{\partial^1}{\partial w^*} - 2z \frac{\partial^2}{\partial z} \right]} \left[O_{1R}(z, w^*) e^{2zw^*} \right]_{(1)} \left[O_{2R}(z, w^*) e^{2zw^*} \right]_{(2)} \quad (2.35)$$

Após efetuarmos as contas, percebemos que somente o termo $\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z}$ da exponencial com derivadas atuando no produto $O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*)$ é que contribui; o restante dos termos da exponencial com derivadas apenas produz exponenciais que cancelam cada uma das exponenciais do interior dos colchetes. Por conseguinte, chegamos finalmente à expressão do mapeamento holomórfico do produto de dois operadores

$$O_{12}(z, w^*) = e^{zw^*} e^{\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z}} O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \quad (2.36)$$

As derivadas na exponencial fornecem a informação a respeito da ordem em que se encontram os operadores básicos, agora representados por z e w^* , que aparecem nos termos $O_{1R}(z, w^*)$ e $O_{2R}(z, w^*)$. Assim, para efetuarmos o mapeamento do comutador $[\hat{O}_1, \hat{O}_2]$, ao invertermos a ordem dos operadores, teremos como consequência a troca $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ e, em decorrência, trocaremos também a atuação das derivadas $1 \leftrightarrow 2$. Então, o mapeamento do comutador é escrito como

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \mapsto e^{zw^*} \left[e^{\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z}} - e^{\frac{\partial^1}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial w^*}} \right] O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \quad (2.37)$$

Aqui, o sinal $\mp$ significa “é mapeado holomorficamente como”.

Às vezes, não é conveniente colocarmos a transformada de Weyl, $O_w(q, p)$, do operador $\hat{O}$ na forma complexa $O_w(\alpha, \alpha^*)$, o que nos obriga a mudar as eqs.(2.32) e (2.33) pelas seguintes equações

$$\sqrt{2} \frac{q_i}{b} M_i = \frac{\partial M_i}{\partial(z + w^*)} \equiv \partial_+ M_i \quad (2.38)$$

$$\sqrt{2} \frac{bp_i}{\hbar} M_i = \frac{\partial M_i}{\partial(z - w^*)} \equiv \partial_- M_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.39)$$

Conseqüentemente, torna-se necessário mudar as derivadas nas eqs.(2.36) e (2.37) em relação a z e w^* para ∂_+ e ∂_- . Faremos isto facilmente usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial(z + w^*)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial(z + w^*)} + \frac{\partial(z - w^*)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial(z - w^*)} \equiv \partial_+ + \partial_- \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial w^*} = \frac{\partial(z + w^*)}{\partial w^*} \frac{\partial}{\partial(z + w^*)} + \frac{\partial(z - w^*)}{\partial w^*} \frac{\partial}{\partial(z - w^*)} \equiv \partial_+ - \partial_- \quad (2.41)$$

Assim, ficamos com a expressão para o mapeamento do produto na seguinte forma

$$O_{12}(z, w^*) = e^{zw^*} e^{(\partial_+^1 + \partial_-^1)(\partial_+^2 + \partial_-^2)} O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \quad (2.42)$$

e para o mapeamento do comutador, temos

$$\begin{aligned} [\hat{O}_1, \hat{O}_2] &\mp e^{zw^*} \left[e^{(\partial_+^1 + \partial_-^1)(\partial_+^2 + \partial_-^2)} - e^{(\partial_+^1 + \partial_-^1)(\partial_+^2 - \partial_-^2)} \right] O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \\ &= 2e^{zw^*} \left[e^{\Theta_{12}} \sinh \Lambda_{12} \right] O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \quad , \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde definimos

$$\Theta_{12} \equiv \partial_+^1 \partial_+^2 - \partial_-^1 \partial_-^2 \quad e \quad (2.44)$$

$$\Lambda_{12} \equiv \partial_+^1 \partial_-^2 - \partial_-^1 \partial_+^2 \quad (2.45)$$

Note-se a estrutura semelhante a dos colchetes de Poisson que o operador Λ_{12} apresenta.

Para finalizar, é fácil ver que no mapeamento do anticomutador $\{\hat{O}_1, \hat{O}_2\}$, teremos a série do cosseno hiperbólico de Λ

$$\{\hat{O}_1, \hat{O}_2\} \mp 2e^{zw^*} \left[e^{\Theta_{12}} \cosh \Lambda_{12} \right] O_{1R}(z, w^*) O_{2R}(z, w^*) \quad (2.46)$$

2.4 A Equação de Heisenberg de Evolução Temporal de um Operador na Representação Holomórfica

A evolução temporal de um operador é dada, na Mecânica Quântica, pela equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{O}, \hat{H}] \quad . \quad (2.47)$$

Quando mapeamos a equação de Heisenberg na representação holomórfica, precisamos usar a eq.(2.43) para o mapeamento do comutador. Fazendo isso, temos

$$i\hbar \frac{d}{dt} [O_R(z, w^*) e^{zw^*}] = 2e^{zw^*} [e^{\Theta_{12}} \sinh \Lambda_{12}] O_{R1}(z, w^*) H_{R2}(z, w^*) \quad , \quad (2.48)$$

onde os operadores Θ_{12} e Λ_{12} são dados pelas eqs.(2.44) e (2.45).

Podemos simplificar essa equação usando o mapeamento holomórfico da equação de Heisenberg para o operador unidade (ou identidade), pois sabemos que ele sempre comuta com a hamiltoniana. Além disso, sua transformada holomórfica é

$$\hat{1} \mapsto e^{zw^*}; \quad (2.49)$$

então, temos que

$$\frac{d}{dt} e^{zw^*} = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Com isso, podemos suprimir de ambos os lados da eq.(2.48) o termo e^{zw^*} e ficamos com a seguinte expressão para a equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_R(z, w^*) = 2 [e^{\Theta_{12}} \sinh \Lambda_{12}] O_{R1}(z, w^*) H_{R2}(z, w^*) \quad . \quad (2.51)$$

Note-se que na expressão acima só aparecem os núcleos reduzidos dos operadores, indicando que a dinâmica encontra-se totalmente embutida nesses núcleos reduzidos.

Quando nem em $O_R(z, w^*)$, nem em $H_R(z, w^*)$ aparecerem termos com $(z + w^*)$ ou $(z - w^*)$, podemos usar a seguinte expressão para a equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_R(z, w^*) = \left[e^{\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z}} - e^{\frac{\partial^1}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial w^*}} \right] O_{R1}(z, w^*) H_{R2}(z, w^*) \quad . \quad (2.52)$$

2.5 Solução do Oscilador Harmônico Forçado na Representação Holomórfica

Vamos escrever a hamiltoniana do oscilador harmônico forçado sem a energia de ponto zero

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}\hat{q}^2 + \hat{q}f(t) - \frac{\hbar\Omega}{2} . \quad (2.53)$$

Podemos escrevê-la em termos dos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, respectivamente, fazendo $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{q}}{b} + \frac{ib\hat{p}}{\hbar} \right)$, com $b^2 = \frac{\hbar}{m\Omega}$. Dessa maneira, a hamiltoniana (2.53) passa a ser escrita como

$$\hat{H} = (\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hbar\Omega + \frac{b}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})f(t) . \quad (2.54)$$

Em conseqüência, a hamiltoniana holomórfica fica na forma

$$H(z, w^*) = \left[zw^* \hbar\Omega + \frac{bf(t)}{\sqrt{2}}(z + w^*) \right] e^{zw^*} . \quad (2.55)$$

Para a obtenção do núcleo reduzido, basta suprimirmos o termo e^{zw^*} da expressão acima.

Agora vamos obter a equação de evolução temporal para o operador de criação $\hat{a}^\dagger$, cujo mapeado holomórfico reduzido é z . Para isto, usaremos a equação de Heisenberg na forma dada pela eq.(2.52)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dz}{dt} &= \left[e^{\frac{\partial^1}{\partial w^*} \frac{\partial^2}{\partial z}} - e^{\frac{\partial^1}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial w^*}} \right] z_{(1)} \left[zw^* \hbar\Omega + \frac{bf(t)}{\sqrt{2}}(z + w^*) \right]_{(2)} \\ &= -z\hbar\Omega - \frac{bf(t)}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \quad (2.56)$$

A equação de evolução temporal da variável dinâmica z é, então

$$\frac{dz}{dt} - i\Omega z = \frac{i}{\hbar} \frac{bf(t)}{\sqrt{2}} . \quad (2.57)$$

A solução de uma equação diferencial com a seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t) \quad (2.58)$$

é dada por [26]

$$y e^{\int P(t')dt'} = \int Q e^{\int P(t')dt'} dt' + C . \quad (2.59)$$

Identificamos $P(t) = -i\Omega$, $Q(t) = \frac{i}{\hbar} \frac{bf(t)}{\sqrt{2}}$ na eq.(2.57) e determinamos C pela condição inicial $z(t=0) = z_0 = C$. Portanto, a solução da equação de movimento [eq.(2.57)] é

$$z(t) = z_0 e^{i\Omega t} + \frac{ib}{\hbar\sqrt{2}} \int_0^t f(t') e^{-i\Omega(t'-t)} dt' . \quad (2.60)$$

Analogamente, obtemos a equação de evolução temporal para o núcleo holomórfico reduzido w^* do operador de aniquilação $\hat{a}$

$$\frac{dw^*}{dt} + i\Omega w^* = -\frac{i}{\hbar} \frac{bf(t)}{\sqrt{2}} , \quad (2.61)$$

cuja solução é dada pela eq.(2.59), com a condição inicial $w^*(t=0) = w_0^*$:

$$w^*(t) = w_0^* e^{-i\Omega t} - \frac{ib}{\hbar\sqrt{2}} \int_0^t f(t') e^{i\Omega(t'-t)} dt' . \quad (2.62)$$

Lembrando que $z(t)$ e $w^*(t)$ são mapeados holomórficos das seguintes funções

$$z(t) \quad \mp \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q(t)}{b} - i \frac{bp(t)}{\hbar} \right) \quad (2.63)$$

$$w^*(t) \quad \mp \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q(t)}{b} + i \frac{bp(t)}{\hbar} \right) , \quad (2.64)$$

e somando as duas equações, obtemos $q(t)$, e subtraindo, obtemos $p(t)$, a saber

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t) + \frac{p_0}{m\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{1}{m\Omega} \int_0^t f(t') \sin\{\Omega(t-t')\} dt' \quad (2.65)$$

$$p(t) = p_0 \cos(\Omega t) - m\Omega q_0 \sin(\Omega t) - \int_0^t f(t') \cos\{\Omega(t-t')\} dt' . \quad (2.66)$$

As eqs.(2.65) e (2.66) são as conhecidas soluções clássicas do oscilador harmônico perturbado, soluções estas cujos conteúdos estão totalmente embutidos nas soluções holomórficas $z(t)$ e $w^*(t)$ [21].

2.6 Expressão Holomórfica para a Probabilidade de Transição

A expressão que permite calcular a probabilidade de transição de um estado n do oscilador quântico para um estado k , sob a influência de uma perturbação dependente do tempo $f(t)$, fazendo uso da função de Wigner do sistema não perturbado, é dada por

$$p_{nk}(t) = \hbar \int dq dp \rho_k(q, p; t) \rho_n^{(0)}(q, p) . \quad (2.67)$$

Essa expressão deve ser usada da seguinte forma: Constrói-se a função de Wigner não perturbada no estado n , $\rho_n^{(0)}(q, p)$, e em seguida, substitui-se $q(t)$ e $p(t)$, dados pelas eqs.(2.65) e (2.66), em $\rho_k(q, p)$, obtendo-se assim $\rho_k(q, p; t)$, que é a função de Wigner evoluída no tempo. Dessa maneira, para que tenhamos a probabilidade $p_{nk}(t)$, basta que conheçamos a função de Wigner do sistema não perturbado e as soluções clássicas das coordenadas e momentos do sistema perturbado.

Agora, para a obtenção da probabilidade de transição $p_{nk}(t)$ em termos das funções de Wigner holomórficas, vamos usar a eq.(2.20) na eq.(2.67), onde facilmente obtemos

$$p_{nk}(t) = \int d\mu(z)d\mu(w)\rho_k(z, w^*; t)\left(\rho_n^{(0)}(z, w^*)\right)^* . \quad (2.68)$$

A dedução completa dessa expressão é apresentada no Apêndice 2.

2.7 A Probabilidade de Transição para o Oscilador Harmônico Forçado

A função de Wigner holomórfica para o oscilador não perturbado é dada por¹

$$\rho_n^{(0)}(z, w^*) = \frac{z^n w^{*n}}{h n!} . \quad (2.69)$$

Para facilitar, vamos usar as seguintes notações nas soluções $z(t)$ e $w^*(t)$ [eqs.(2.60), (2.62)]

$$F_{\pm\Omega}(t) = (\mp) \frac{ib}{\hbar\sqrt{2}} \int_0^t dt' e^{(\pm)i\Omega t'} f(t') \quad (2.70)$$

Note que $F_{+\Omega}^*(t) = F_{-\Omega}(t)$. Assim, vamos reescrever as eqs.(2.60) e (2.62) na seguinte forma

$$z(t) = [z_0 + F_{-\Omega}(t)] e^{i\Omega t} \quad (2.71)$$

$$w^*(t) = [w_0^* + F_{+\Omega}(t)] e^{-i\Omega t} . \quad (2.72)$$

Já dissemos anteriormente que todo operador $\hat{O}$, exceto o operador densidade, quando mapeado holomorficamente, carrega a exponencial e^{zw^*} junto ao seu núcleo reduzido, $O_R(z, w^*)$. Podemos definir o núcleo reduzido da seguinte maneira:

$$O_R(z, w^*) \equiv O(z, w^*) e^{-zw^*} . \quad (2.73)$$

¹Confira Apêndice 1.

Também já foi dito que no núcleo reduzido de um operador está contida toda a informação dinâmica a respeito da grandeza física que o operador representa; isto vale também para o operador densidade, só que melhor seria dizermos que seu núcleo é ampliado em vez de reduzido, uma vez que ele carrega a exponencial e^{-zw^*} que não desaparece como nos outros operadores.

Então, quando fazemos a evolução temporal através da função de Wigner holomórfica, a função $\rho(z, w^*; t)$ carrega o termo $e^{-z(t)w^*(t)}$, que indica que nesta representação, o operador densidade de estados anda para trás no tempo. Assim, a função de Wigner holomórfica evoluída no tempo é conseguida substituindo-se as eqs.(2.71), (2.72) na função de Wigner estacionária $\rho_n^{(0)}(z, w^*)$ juntamente com o termo $e^{-z(t)w^*(t)}$

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}(z, w^*; t) &= \frac{1}{k!} [z(t)w^*(t)]^k e^{-z(t)w^*(t)} \\ &= \frac{1}{k!} \left[z_0 w_0^* + z_0 F_{+\Omega}(t) + w_0^* F_{-\Omega}(t) + |F_{\Omega}(t)|^2 \right]^k \times \\ &\times e^{-[z_0 w_0^* + z_0 F_{+\Omega}(t) + w_0^* F_{-\Omega}(t) + |F_{\Omega}(t)|^2]} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Vamos calcular a probabilidade de transição $p_{0k}(t)$:

$$\begin{aligned} p_{0k}(t) &= \int d\mu(z) d\mu(w) \frac{1}{k!} \left[zw^* + zF_{+\Omega}(t) + w^* F_{-\Omega}(t) + |F_{\Omega}(t)|^2 \right]^k \times \\ &\times e^{-\beta[z w^* + zF_{+\Omega}(t) + w^* F_{-\Omega}(t) + |F_{\Omega}(t)|^2]} \Big|_{\beta=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \beta^k} e^{-\beta |F_{\Omega}(t)|^2} \int d\mu(z) d\mu(w) e^{-\beta[z w^* + zF_{+\Omega}(t) + w^* F_{-\Omega}(t)]} \Big|_{\beta=1} . \end{aligned} \quad (2.75)$$

A integral é igual a um, e conseqüentemente

$$p_{0k}(t) = \frac{|F_{\Omega}(t)|^{2k}}{k!} e^{-|F_{\Omega}|^2} . \quad (2.76)$$

Assim, a probabilidade de excitação para o sistema passar do estado fundamental para o k -ésimo estado excitado obedece a distribuição de Poisson no problema do oscilador harmônico forçado [16, 19, 20, 21].

Capítulo 3

Descrição do Modelo

3.1 Cinemática

O sistema colisional que trataremos aqui é do tipo

$$A + BC(0) \longrightarrow A + BC(n) . \quad (3.1)$$

O alvo BC é considerado um vibrador¹ que, preparado inicialmente em seu estado fundamental, é excitado para o estado n pela interação com o projétil A . Nós não levaremos em conta a estrutura do projétil, pois nosso maior interesse reside no estudo da excitação do alvo apenas.

O sistema de coordenadas será fixado no centro de massa do vibrador BC e seu eixo x será orientado na direção de vibração do mesmo. Deste modo, poderemos tratar o vibrador como um oscilador unidimensional.

A distância D entre o projétil e o eixo x , antes da colisão, é o parâmetro de impacto do sistema. A fig. 3.1 apresenta um esquema do sistema em questão [27].

Para podermos escrever a hamiltoniana do sistema, precisamos definir algumas quantidades [27]. Vamos definir a distância relativa entre as massas m_B e m_C do vibrador como

$$r = x_C - x_B . \quad (3.2)$$

¹Para o estudo das ressonâncias gigantes de dipolo elétrico, o tratamento do núcleo como um vibrador é considerado uma boa aproximação .

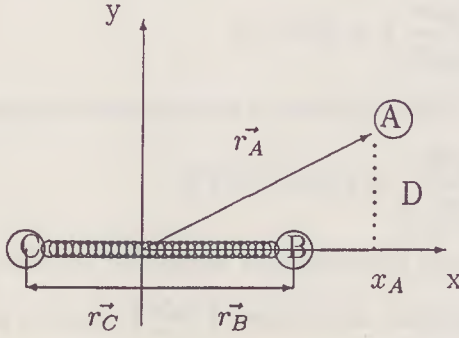


Figura 3.1: A figura mostra as coordenadas do sistema na colisão entre um projétil A e um vibrador BC.

A massa reduzida do vibrador é dada por

$$\mu = \frac{m_B m_C}{m_B + m_C} \quad (3.3)$$

enquanto que a massa reduzida do sistema vibrador + projétil é

$$\tilde{\mu} = \frac{m_A M_{BC}}{m_A + M_{BC}}, \quad (3.4)$$

onde $M_{BC} = m_B + m_C$ é a massa do vibrador.

Lembrando que fixamos a coordenada do centro de massa na origem, encontramos uma relação entre as coordenadas x_B e x_C

$$x_B = -\frac{m_C}{m_B} x_C. \quad (3.5)$$

A coordenada relativa r pode ser reescrita em termos da coordenada de uma das massas do vibrador, por exemplo de x_C , substituindo a eq.(3.5) na eq.(3.2):

$$\begin{aligned} r &= x_C - \left(-\frac{m_C}{m_B}\right) x_C \\ &= \left(\frac{M_{BC}}{m_B}\right) x_C. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A separação entre o projétil e a carga elétrica do alvo é $\vec{r}_A - \vec{r}_C$. Vamos redefinir $\vec{r}_A$ em termos de um vetor $\vec{R}$ como

$$\vec{r}_A = \left(\frac{m_B}{M_{BC}}\right) \vec{R}. \quad (3.7)$$

Com isto, a separação $\vec{r}_A - \vec{r}_C$ fica redefinida por

$$\vec{r}_A - \vec{r}_C = \left(\frac{m_B}{M_{BC}} \right) (\vec{R} - \vec{r}) \quad (3.8)$$

Assim, a interação coulombiana é escrita como

$$V(|\vec{r}_A - \vec{r}_C|) = \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\vec{R} - \vec{r}|} , \quad (3.9)$$

onde Z_1 e Z_2 são os números atômicos do alvo e do projétil e e é a carga do elétron. Percebe-se que o fator $\left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right)$ redefine a constante de acoplamento, fazendo com que o projétil sinta uma carga efetiva diferente da que sentiria se o núcleo estivesse fixo na origem do sistema de referência e não fosse tratado como um vibrador.

Agora estamos em condições de escrever a hamiltoniana do modelo de excitação. Ela consiste de três parcelas, a saber:

- i) hamiltoniana do grau de liberdade vibracional do alvo ou nuclear, que de acordo com o nosso modelo, é a hamiltoniana de um oscilador harmônico;
 - ii) energia cinética relativa do projétil em relação ao centro de massa do alvo;
 - iii) potencial de interação que, neste caso, é o potencial coulombiano dado pela eq.(3.9).
- Dessa maneira, a hamiltoniana do sistema é

$$H = H_{osc} + T_{rel} + V_{int} , \quad (3.10)$$

onde

$$H_{osc} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r_A^2} + \frac{1}{2} k r^2 , \quad (3.11)$$

$$T_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2\tilde{\mu}} \frac{\partial^2}{\partial r_A^2} \quad (3.12)$$

e V_{int} é o potencial coulombiano da eq.(3.9).

Na eq.(3.11), μ é a massa reduzida do oscilador, dada pela eq.(3.3), r é a coordenada relativa escrita na eq.(3.2) e k é a constante do vibrador; já na eq.(3.12), $\tilde{\mu}$ é a massa reduzida do sistema vibrador + projétil, dada pela eq.(3.4), e $\vec{r}_A$ é a coordenada do projétil em relação ao centro de massa do vibrador.

Com a mudança de coordenadas feita na eq.(3.7), temos de mudar a derivada na expressão de T_{rel} , eq.(3.12). Usaremos então a regra da cadeia

$$\frac{\partial^2}{\partial r_A^2} = \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} . \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, irá aparecer em T_{rel} um termo da forma $\tilde{\mu} \left(\frac{m_B}{M_{BC}} \right)^2$, que tem a dimensão de massa:

$$m = \tilde{\mu} \left(\frac{m_B}{M_{BC}} \right)^2 \quad (3.14)$$

Finalmente, a expressão da energia cinética relativa é então reescrita na forma

$$T_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial R^2} . \quad (3.15)$$

3.2 Aproximação Eikonal

Visando facilitar o cálculo analítico e adequá-lo ao esquema holomórfico, usaremos a aproximação eikonal, que pode ser considerada uma boa aproximação dentro da faixa de energia que foi usada na coleta dos dados experimentais disponíveis. Essa aproximação consiste em se ajustar o parâmetro de impacto e a energia do sistema de maneira a excitar o alvo transferindo a menor quantidade de movimento possível, fazendo com que o ângulo de espalhamento seja muito pequeno e o projétil tenha uma trajetória praticamente reta. A aproximação é tanto melhor quanto maior for a energia da partícula incidente em relação ao potencial espalhador e quanto maior for o parâmetro de impacto do sistema. Também podemos dizer que a aproximação é boa quando o potencial $V(x)$ varia pouco no intervalo x e $x + \lambda/2\pi$, onde $\lambda/2\pi$ é o comprimento de onda de de Broglie da onda incidente.

Na aproximação eikonal clássica, seguiremos de perto o texto do Landau [25] a fim de apresentar de maneira clara a idéia.

Vamos estudar a colisão de um projétil de momento $\vec{p}$ e parâmetro de impacto D contra um alvo fixo massivo, que praticamente não sofre recuo. Assim, podemos aproximar o valor absoluto do momento final do projétil p' por p :

$$p' \simeq p = m_A v_{inc} , \quad (3.16)$$

onde m_A é a massa do projétil e v_{inc} é a sua velocidade incidente.

Observe o diagrama de colisão na figura 3.2.

Da trigonometria do diagrama, temos

$$\sin \theta = \frac{p_y'}{p'} . \quad (3.17)$$

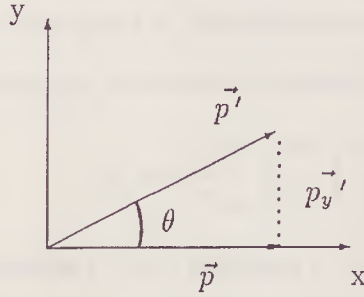


Figura 3.2: A figura mostra o diagrama vetorial da colisão. O projétil incide com momento $\vec{p}$ contra o alvo, que recua com momento $\vec{p}_y'$; o momento final do projétil é $\vec{p}'$ com um ângulo de desvio θ .

Para energias suficientemente altas, o ângulo de espalhamento θ é pequeno. Então, uma boa aproximação é fazer $\sin \theta \sim \theta$, pois os erros são menores que 1% para ângulos até 14° , de forma que podemos escrever

$$\theta \simeq \frac{p_y'}{m_A v_{inc}} . \quad (3.18)$$

Precisamos calcular p_y' e faremos isto usando a 2ª lei de Newton, $\dot{p}' = F_y$:

$$p_y' = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt . \quad (3.19)$$

A força F_y é calculada a partir do potencial $V(r)$ com o simples uso da regra da cadeia

$$F_y = - \left(\frac{y}{r} \right) \frac{dV}{dr} \quad (3.20)$$

Supondo que o movimento do projétil seja linear na direção x , com $y = D$, e que seja também uniforme, com $v_{inc} = \frac{dx}{dt}$, temos

$$p_y' = - \frac{D}{v_{inc}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r} . \quad (3.21)$$

Mas,

$$r^2 = x^2 + D^2 \quad (3.22)$$

e, por conseguinte

$$dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - D^2}} . \quad (3.23)$$

Agora, na mudança de variável de x para r , os limites de integração $-\infty$ e $+\infty$ para x , passam a ser de D a $+\infty$ para r , observando-se ainda que a integral deve ser multiplicada por 2. Obtemos finalmente o momento transferido p_y'

$$p_y' = -\frac{2D}{v_{inc}} \int_D^{+\infty} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - D^2}} . \quad (3.24)$$

Usando agora a expressão (3.18), obtemos a expressão para o ângulo incidente

$$\theta = -\frac{D}{T_{inc}} \int_D^{+\infty} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - D^2}} , \quad (3.25)$$

onde

$$T_{inc} = \frac{m_A v_{inc}^2}{2} . \quad (3.26)$$

Para o caso coulombiano

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} . \quad (3.27)$$

Então, usando a eq.(3.25), temos

$$\theta = \frac{D\alpha}{T_{inc}} \int_D^{+\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - D^2}} . \quad (3.28)$$

Integra-se facilmente a expressão acima fazendo a mudança de variável $u = \frac{D^2}{r^2}$. Assim, o ângulo de espalhamento no caso coulombiano fica

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\alpha}{T_{inc} D} \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{1-u}} \\ &= \frac{\alpha}{T_{inc} D} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para um campo da forma

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^n} , \quad (3.30)$$

com $n > 0$, o ângulo de espalhamento é dado por

$$\theta = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{T_{inc} D^n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . \quad (3.31)$$

A seção de choque no sistema de laboratório é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{dD}{d\theta} \right| \frac{D(\theta)}{\theta} . \quad (3.32)$$

Lembrando da eq.(3.29) que

$$D(\theta) = \frac{\alpha}{T_{inc}\theta} \quad (3.33)$$

então, a seção de choque para o campo $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ recai na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{T_{inc}^2} \frac{1}{\theta^4} \quad (3.34)$$

que é a fórmula de espalhamento de Rutherford no caso particular de pequenos ângulos de espalhamento .

Para o modelo aqui apresentado, α é dado pela eq.(3.9)

$$\alpha = \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right) Z_1 Z_2 e^2 . \quad (3.35)$$

Então, para o campo coulombiano, a seção de choque é escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right)^2 \frac{(Z_1 Z_2 e^2)^2}{T_{inc}^2} \frac{1}{\theta^4} . \quad (3.36)$$

3.3 Apresentação do Problema de Excitação da Ressonância Gigante de Dipolo na Aproximação Eikonal

Vamos estudar o modelo apresentado na fig. 3.1, onde o projétil é lançado contra um alvo que é fixado na origem e que possui uma carga positiva que vibra ao longo do eixo x próxima à origem.

Se o projétil incide com uma energia suficientemente alta, seu movimento é semiclássico e praticamente não será mudado pela interação com o alvo. Nós podemos então assumir que o projétil se move numa trajetória reta e com velocidade constante.

Podemos escrever o potencial implicitamente dependente do tempo fazendo uso do diagrama apresentado na figura 3.3.

O potencial no nosso modelo é dado por

$$V(t) = \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\vec{R}(t) - \vec{r}(t)|} , \quad (3.37)$$

onde $\vec{R}(t) = (vt, D, 0)$, $\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0)$ e $\vec{R}(0) = (0, D, 0) = R_{min}$.

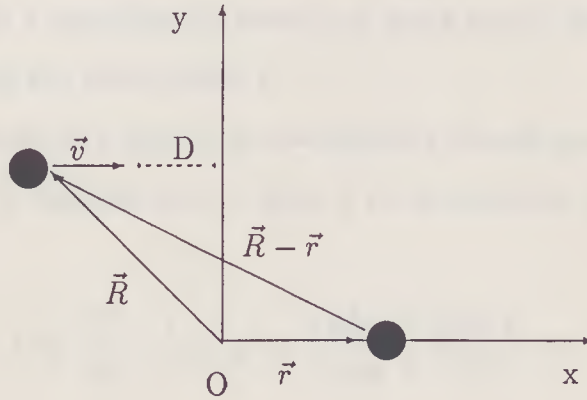


Figura 3.3: Diagrama vetorial mostrando a posição do projétil, $\vec{R}$, e do alvo, $\vec{r}$, no instante t .

Como $|\vec{r}| \ll |\vec{R}|$, que é válida mesmo para $R = R_{min}$, já que sempre podemos escolher o parâmetro de impacto D , faremos uma aproximação para $\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|}$. Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}(t) - \vec{r}(t)|} &= \frac{1}{[R^2 - 2vtx + x^2]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{2vtx}{R^2} + \frac{x^2}{R^2} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

e, desprezando o termo x^2/R^2 , expandiremos $(1 - \epsilon)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}(t) - \vec{r}(t)|} &\simeq \frac{1}{R} \left(1 + \frac{vtx}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{R} + \frac{vtx}{R^3} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dessa maneira, o potencial da eq.(3.37) pode ser expandido na forma

$$V(t) \simeq \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} + \left(\frac{M_{BC}}{m_B} \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R^3} vtx . \quad (3.40)$$

Dessa forma, o potencial de interação fica separado num primeiro termo, $\frac{\alpha}{R}$, correspondente ao espalhamento coulombiano do projétil, mais um segundo termo, $\frac{\alpha}{R^3} vtx$, que é o responsável pela excitação do alvo e, que nessa ordem, é uma contribuição do tipo dipolar.

Deve-se observar que esse termo é da forma $\frac{R_x(t)x}{R^3}$; assim, mesmo que a trajetória não seja uma reta, onde a aproximação eikonal se torna exata, ainda podemos escrever a equação de $\vec{R}(t)$ e tomar sua componente x .

Dessa maneira, assumindo a trajetória coulombiana eikonal para o projétil e o modelo apresentado no início do capítulo para o alvo, a parte relevante da hamiltoniana para a excitação do alvo fica

$$H = \frac{P^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + \left(\frac{M_{BC}}{m_B}\right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R^3} v t x \quad (3.41)$$

ou, de forma mais geral,

$$H = H_{OH} + \lambda f(t) x, \quad (3.42)$$

onde H_{OH} é a hamiltoniana do oscilador harmônico referente ao núcleo que é tratado como um vibrador e

$$f(t) \equiv \frac{t}{v^2 R^3(t)} = \frac{t}{v^2 (t^2 + a^2)^{3/2}}, \quad (3.43)$$

com $a = \frac{D}{v}$.

O parâmetro λ é dado por

$$\lambda = \left(\frac{M_{BC}}{m_B}\right) Z_1 Z_2 e^2. \quad (3.44)$$

Lembremos que a probabilidade de excitação do alvo de passar do estado fundamental para o n -ésimo estado excitado já foi calculada [eq.(2.76)] e é dada por

$$p_{0n} = \frac{[\lambda^2 |F(\omega)|^2]^n}{n!} e^{-\lambda^2 |F(\omega)|^2} \quad (3.45)$$

onde

$$F(\pm\omega) = (\mp) \frac{ib}{\hbar\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{(\pm)i\omega t} f(t) \quad (3.46)$$

A integração foi adaptada ao problema de espalhamento, onde o tempo passa de $t = -\infty$ até $t = +\infty$, graças às condições $f(\pm\infty) = 0$.

Vamos calcular $F(\pm\omega)$; para isto, precisamos fazer algumas considerações a respeito da paridade de $f(t)$.

De acordo com a eq.(3.43), $f(t)$ é escrita na forma

$$f(t) = \frac{t}{v^2(t^2 + a^2)^{3/2}} . \quad (3.47)$$

Trocando t por $-t$, a função f troca de sinal, ou seja, f é uma função ímpar. Assim, podemos usar a conhecida propriedade da transformação de Fourier de funções ímpares, a saber

$$\mathcal{F}[f(t); \omega] = i\mathcal{F}_s[f(t); \omega] , \quad (3.48)$$

onde o índice s indica a definição de transformada de Fourier que usa o seno.

Assim, a função $F(\pm\omega)$ da eq.(2.70) recai na seguinte forma, já fazendo uso da expressão da $f(t)$ de (3.43):

$$F(\pm\omega) = (\pm) \frac{b}{\hbar\sqrt{2}v^2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} \sin(\omega t) dt . \quad (3.49)$$

A integral está tabelada [28] na seguinte forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m+1} \sin(ax)}{(\beta^2 + x^2)^{n+\frac{1}{2}}} dx = \frac{(-1)^{m+1} \sqrt{\pi}}{2^n \beta^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^{2m+1}}{da^{2m+1}} [a^n K_n(a\beta)] , \quad (a > 0, Re\beta > 0, -1 \leq m \leq n) \quad (3.50)$$

onde K_n é a função modificada de Bessel de 2^a espécie de ordem n .

Identificamos $m = 0$, $a = \omega$, $\beta = a$, $n = 1$ com as condições abaixo satisfeitas:

$$\omega > 0, Re a > 0, -1 \leq m = 0 \leq n = 1 . \quad (3.51)$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} \sin(\omega t) dt = \frac{(-1)\sqrt{\pi}}{2a\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{d}{d\omega} [\omega K_1(\omega a)] . \quad (3.52)$$

Usaremos agora outra expressão [26] para a derivada que aparece entre os colchetes, que é uma relação de recorrência para $K_n(x)$, a saber,

$$\frac{d}{dx} [x^n K_n(x)] = -x^n K_{n-1}(x) . \quad (3.53)$$

Particularizando para $K_1(\omega a)$, temos

$$\frac{d}{d\omega} [\omega K_1(\omega a)] = -\omega a K_0(\omega a) . \quad (3.54)$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} \sin(\omega t) dt = \omega K_0(\omega a) . \quad (3.55)$$

Com este resultado, $F(\pm\omega)$ fica na forma

$$F(\pm\omega) = (\pm) \frac{b\omega}{\hbar\sqrt{2}v^2} K_0(\omega a) . \quad (3.56)$$

Finalmente, a probabilidade de excitação do estado fundamental para o estado n fica escrita como

$$p_{0n} = \frac{1}{n!} \left[\frac{\lambda^2 \omega}{2\mu\hbar v^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega D}{v} \right) \right|^2 \right]^n e^{-\frac{\lambda^2 \omega}{2\mu\hbar v^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega D}{v} \right) \right|^2} , \quad (3.57)$$

onde μ é a massa reduzida do vibrador, dada pela eq.(3.3).

A seção de choque de excitação de multifônons é dada pelo “ansatz” comumente feito nos cálculos de excitação coulombiana, a saber, o produto da seção de choque de Rutherford pela probabilidade de excitação

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{exc} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \times p_{0n} . \quad (3.58)$$

Usando as expressões (3.36), (3.33) e (3.57), obtemos a seção de choque de excitação coulombiana na aproximação eikonal para o modelo apresentado no início deste capítulo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{exc} = \frac{\lambda^2}{T_{inc}^2 \theta^4} \left[\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\lambda^2 \omega}{2\mu\hbar v^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega \lambda}{v T_{inc} \theta} \right) \right|^2 \right\}^n e^{-\frac{\lambda^2 \omega}{2\mu\hbar v^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega \lambda}{v T_{inc} \theta} \right) \right|^2} \right] . \quad (3.59)$$

Para o caso que nos interessa, que é a excitação coulombiana de dipolo elétrico, o valor de n é tomado igual a um.

No próximo capítulo, usaremos o modelo aqui apresentado no cálculo da seção de choque de excitação das ressonâncias gigantes de dipolo para diversos projéteis.

Capítulo 4

Apresentação dos Resultados

Nosso objetivo principal neste capítulo é apresentar os gráficos da distribuição angular nos processos de espalhamento inelástico, tendo como alvo núcleos de ^{208}Pb e usando como projéteis partículas alfa a 172 MeV e 218 MeV de energia no sistema de laboratório e dêuterons a 108 MeV [29, 30].

Para o cálculo da seção de choque diferencial, vamos usar a eq.(3.59) do capítulo 3, que será transcrita a seguir, apenas com a importante ressalva de que estamos interessados na excitação coulombiana de um fônon de dipolo elétrico apenas ($n=1$), deixando de lado a excitação de multifônons (n qualquer), pois para tal excitação nos é desconhecida a existência de dados experimentais para comparação com os resultados teóricos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exc} = \frac{\lambda^4 \omega}{2\mu \hbar v^4 T_{inc}^2 \theta^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega \lambda}{v T_{inc} \theta} \right) \right|^2 e^{-\frac{\lambda^2 \omega}{2\mu \hbar v^4} \left| K_0 \left(\frac{\omega \lambda}{v T_{inc} \theta} \right) \right|^2}. \quad (4.1)$$

As quantidades T_{inc} e v precisam ser corrigidas por um fator cinemático proveniente do modelo usado, a saber

$$T_{inc} = \left(\frac{M_{BC}}{m_A + m_B + m_C} \right) E_{lab}, \quad (4.2)$$

onde E_{lab} é a energia de laboratório do projétil incidente, M_{BC} é a massa do vibrador, m_A é a massa do projétil, m_B é a massa total de nêutrons no alvo e m_C é a massa total de prótons no alvo. Obteremos facilmente esse fator cinemático escrevendo explicitamente a energia cinética relativa do projétil em termos da velocidade

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}_A^2 = \left(\frac{M_{BC}}{m_A + m_B + m_C} \right) E_{lab}. \quad (4.3)$$

Vamos usar os seguintes valores para a massa do nêutron, m_n , e para a massa do próton, m_p [31],

$$m_n = 939.56563(28) \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad (4.4)$$

$$m_p = 938.27231(28) \text{ MeV} \cdot c^{-2} . \quad (4.5)$$

Com isso, as energias com que trabalhamos ficam redefinidas como

$$\text{dêuteron: } E_{lab} = 108 \text{ MeV} \quad T_{inc} = 106.97143 \text{ MeV} \quad (4.6)$$

$$\text{alfa: } E_{lab} = 172 \text{ MeV} \quad T_{inc} = 168.75472 \text{ MeV} \quad (4.7)$$

$$\text{alfa: } E_{lab} = 218 \text{ MeV} \quad T_{inc} = 213.88679 \text{ MeV} . \quad (4.8)$$

A massa reduzida do vibrador, μ , é dada pela eq.(3.3) e para o ^{208}Pb , $m_B = 126 m_n$ e $m_C = 82 m_p$, resultando em

$$\mu = 46632.17814 \text{ MeV} \cdot c^{-2} . \quad (4.9)$$

A massa de cada um dos projéteis fica também redefinida pela eq.(3.14) e apresentamos os valores para o dêuteron e para a partícula alfa abaixo:

$$\text{dêuteron: } m = 683.26418 \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad (4.10)$$

$$\text{alfa: } m = 1353.645626 \text{ MeV} \cdot c^{-2} . \quad (4.11)$$

As cargas também precisam ser redefinidas e a constante λ dá conta disso:

$$\text{dêuteron: } \lambda = 194.9210006 \text{ MeV} \cdot fm \quad (4.12)$$

$$\text{alfa: } \lambda = 389.8420012 \text{ MeV} \cdot fm . \quad (4.13)$$

A velocidade v é igual a $\dot{R}$, que é dado em termos da energia corrigida, T_{inc} , e da massa reduzida do sistema, m ,

$$v = \sqrt{\frac{2T_{inc}}{m}} \quad (4.14)$$

$$\text{dêuteron: } E_{lab} = 108 \text{ MeV} \quad v = 0.3131188 c \quad (4.15)$$

$$\text{alfa: } E_{lab} = 172 \text{ MeV} \quad v = 0.243337 c \quad (4.16)$$

$$\text{alfa: } E_{lab} = 218 \text{ MeV} \quad v = 0.3160159 c . \quad (4.17)$$

O ângulo θ é corrigido por um fator muito próximo de 1, a saber

$$f_c = 1 + \frac{m_A}{M_{BC}} , \quad (4.18)$$

$$\text{dêuteron: } f_c = 1.0158621 \quad (4.19)$$

$$\text{alfa: } f_c = 1.019228 . \quad (4.20)$$

A ressonância gigante de dipolo elétrico é centrada em $\hbar\omega = 13.5 \text{ MeV}$ e tomamos o valor experimental de $\hbar c = 197.327053(59) \text{ MeV.fm}$ [31].

Obviamente, o termo θ^4 , como é proveniente de uma expansão, é dado numericamente em radianos, porém não entra nas unidades da seção de choque. Finalmente, para o cálculo de $K_0(x)$, a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero, calcularemos primeiro $I_0(x)$, a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem zero, usando as seguintes expansões em série [32]

$$t = \frac{x}{3.75}$$

$$-3.75 \leq x \leq 3.75$$

$$\begin{aligned} I_0(x) = & 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4 + 1.2067492t^6 + 0.2659732t^8 + \\ & + 0.030768t^{10} + 0.0045813t^{12} + \epsilon , \quad |\epsilon| < 1.6 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$0 < x \leq 2$$

$$\begin{aligned} K_0(x) = & -\ln(x/2)I_0(x) - 0.57721566 + 0.42278420(x/2)^2 + 0.23069756(x/2)^4 + \\ & + 0.03488590(x/2)^6 + 0.00262698(x/2)^8 + 0.00010750(x/2)^{10} \\ & + 0.00000740(x/2)^{12} + \epsilon , \quad |\epsilon| < 1 \times 10^{-8} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$(4.23)$$

Com a adaptação dos resultados numéricos ao cálculo da distribuição angular, foram gerados três gráficos que se encontram nas próximas páginas.

O capítulo a seguir destina-se a discussão dos resultados e conclusões finais.

Gráfico 1: Distribuição angular
no caso do espalhamento dêuteron + ^{208}Pb
a 108 MeV com a ressonância gigante
centrada em 13.5 MeV.

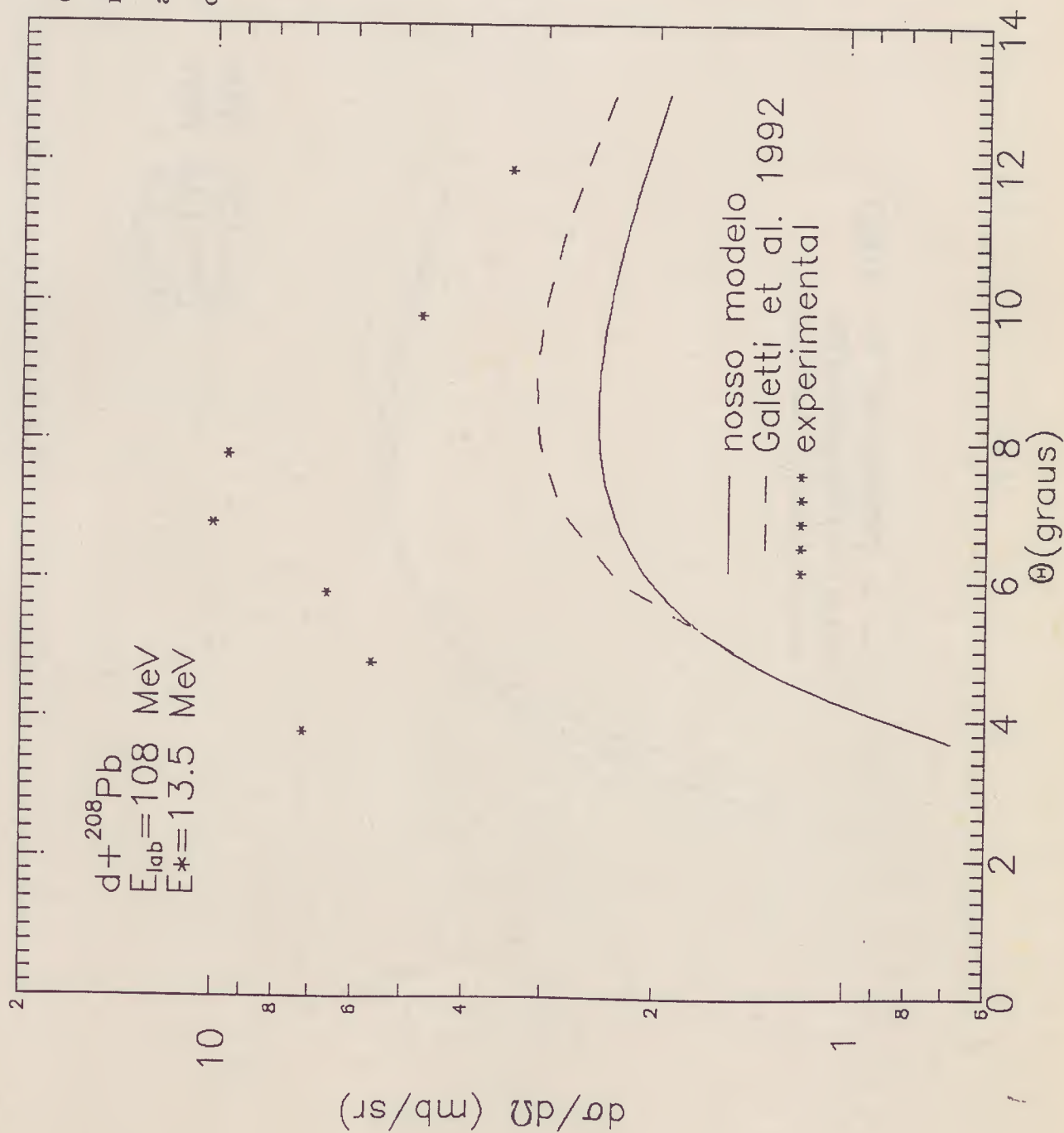


Gráfico 2: Distribuição angular
no caso do espalhamento alfa + ^{208}Pb
a 172 MeV com a ressonância gigante
centrada em 13.5 MeV.

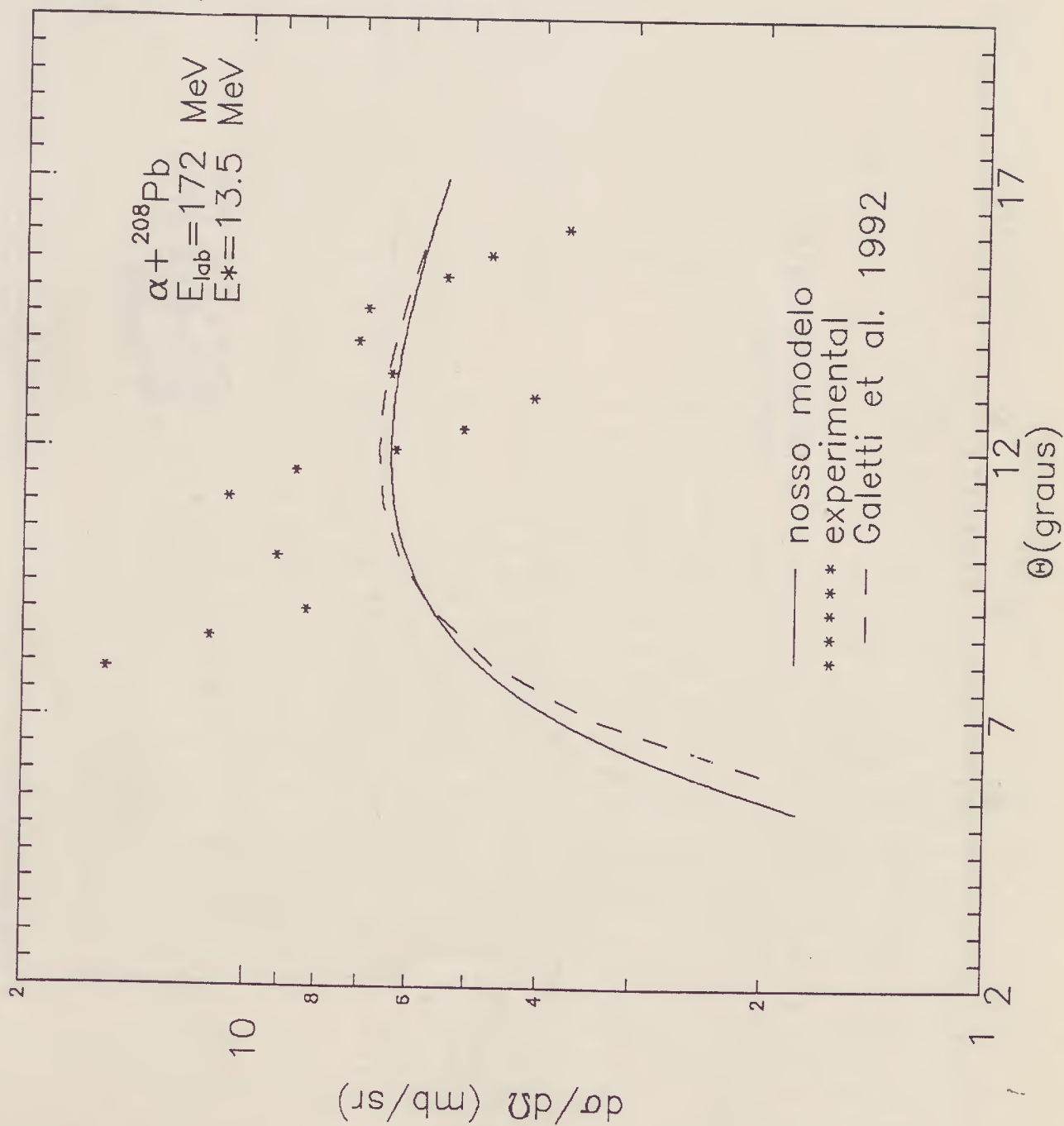
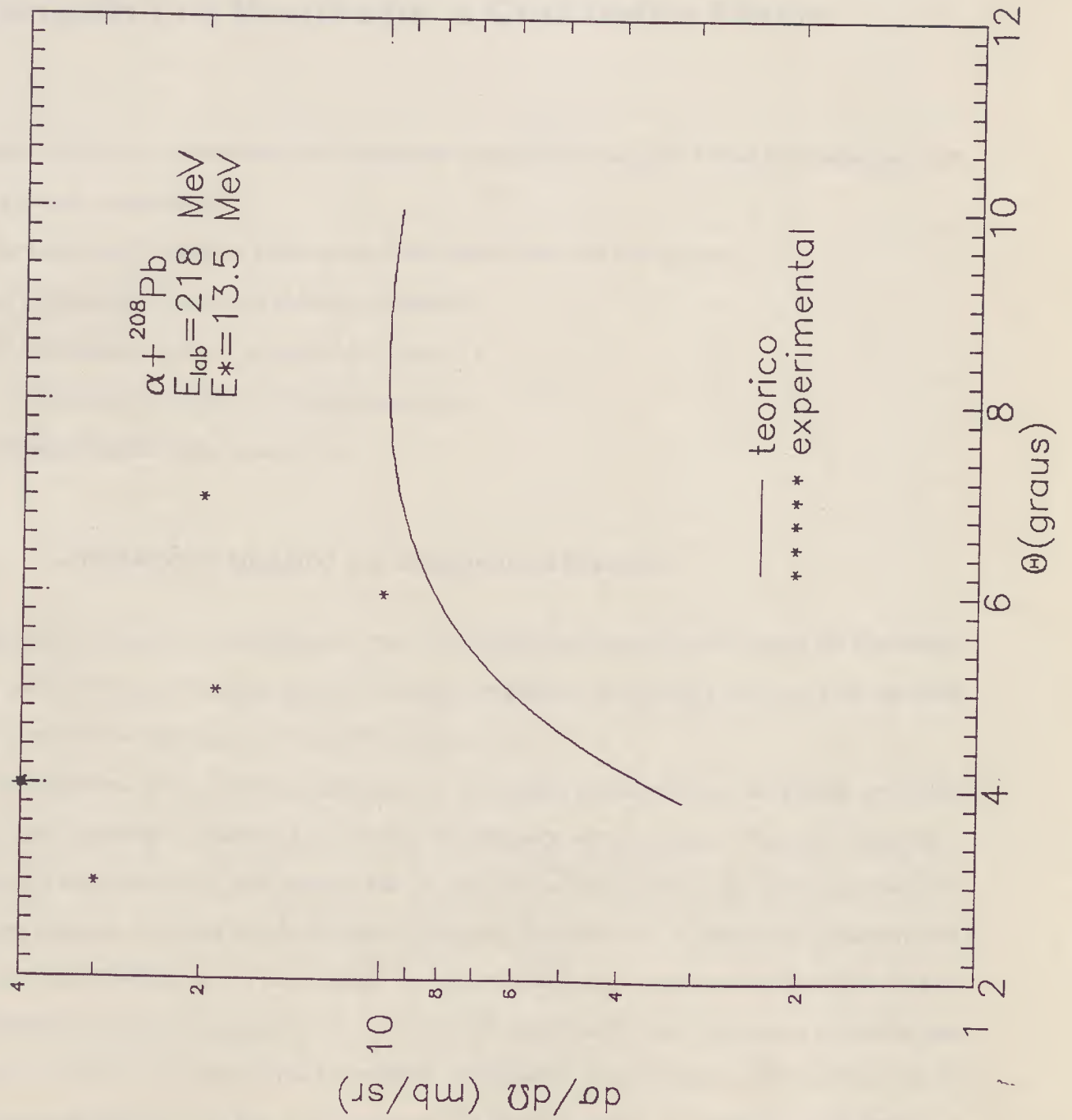


Gráfico 3: Distribuição angular
no caso do espalhamento alfa+²⁰⁸Pb
a 218 MeV com a ressonância gigante
centrada em 13.5 MeV.



Capítulo 5

Discussão dos Resultados e Conclusões Finais

Vamos identificar as possíveis limitações nos resultados e analisar todas elas para cada um dos gráficos levantados.

As possíveis limitações podem ser classificadas em três categorias:

- a) Limitações quanto ao método utilizado;
- b) Limitações quanto ao modelo utilizado; e
- c) Limitações devidas ao cálculo numérico.

Vamos discutir cada uma delas.

5.1 Limitações quanto ao método utilizado:

O método utilizado é o semiclássico, com a descrição da dinâmica do espaço de fase sendo feita pela evolução temporal das coordenadas relevantes do sistema colisional em questão com o auxílio do operador de Liouville clássico [11].

Tal maneira de descrever a dinâmica é, em geral, aproximativa, de forma que erros já podem aparecer a partir da utilização de métodos semiclássicos. Pode-se testar se a descrição semiclássica é mais apropriada ou não que a aproximação de Born, comparando o comprimento de onda de de Broglie, $\lambda/2\pi$, do projétil com a dimensão característica das órbitas clássicas, que é a distância de maior aproximação, $2a$, em uma colisão frontal (parâmetro de impacto zero) [1]. Se $\lambda/2\pi \ll 2a$, pode-se formar um pacote de ondas que se move ao longo de uma órbita hiperbólica exatamente igual a uma partícula clássica. Se por outro lado $\lambda/2\pi \gg 2a$, a aproximação de Born se aplica. É conveniente introduzir a

razão entre a e $\lambda/2\pi$ como parâmetro que mede a intensidade da interação coulombiana, a saber

$$\eta = \frac{a}{\lambda/2\pi} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} . \quad (5.1)$$

Aqui, Z_1 e Z_2 são os números atômicos do projétil e do núcleo alvo, enquanto v é a velocidade do projétil no instante inicial, a grandes distâncias.

O fato que apenas o campo coulombiano pode assegurar que o projétil não penetrará no núcleo mostra que o limite inferior do parâmetro η é maior que 1. Na prática, é visto da eq.(5.1) que o limite real é aproximadamente 2.

No limite $\eta \gg 1$, onde a descrição semiclássica da órbita do projétil permanece válida, a excitação nuclear é causada pelo campo eletromagnético dependente do tempo, que atua no núcleo enquanto o projétil se move ao longo da órbita hiperbólica clássica.

Vamos utilizar as eqs.(4.15),(4.16) e (4.17) que nos dão os valores de v para os três espalhamentos. Também lembremos que a carga é dada em termos da constante de estrutura fina [31]

$$e^2 = \alpha \hbar c [4\pi\epsilon_0] = 1/137.0359895(61) \quad e \quad (5.2)$$

$$v = \beta c , \quad (5.3)$$

temos que

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{\beta} . \quad (5.4)$$

Com isso, os valores de η são :

$$\text{dêuteron (108 MeV): } \eta = 1.9110413 \quad (5.5)$$

$$\text{alfa (172 MeV): } \eta = 2.459071 \quad (5.6)$$

$$\text{alfa (218 MeV): } \eta = 1.8935217 . \quad (5.7)$$

Os resultados obtidos para η mostram que a aproximação semiclássica é razoável em todos esses casos e que a melhor aproximação se dá para alfa 172 MeV, depois para o dêuteron a 108 MeV e, por último, alfa a 218 MeV.

5.2 Limitações quanto ao modelo utilizado:

Identificamos as seguintes possíveis limitações quanto ao modelo utilizado por nós:

- 1) Aproximação do núcleo por duas massas presas a uma mola;
- 2) Não há distribuição de cargas elétricas; as cargas elétricas do núcleo e do projétil são consideradas puntiformes;
- 3) As forças nucleares são desprezadas;
- 4) A interação com a corrente elétrica é desprezada;
- 5) Não é levado em conta o recuo do núcleo no processo de colisão ;
- 6) É feita uma aproximação para $\frac{1}{|R-r|}$ em sua expansão binomial;
- 7) É feita a aproximação eikonal (ou de pequenos ângulos);
- 8) O modelo não leva em conta misturas de n-pólos.

São oito as possíveis fontes de desvios devidas ao modelo que foram identificadas por nós. Vamos discutir cada uma delas.

5.2.1 Aproximação do núcleo por duas massas presas a uma mola:

Este modelo é uma adaptação de um modelo colisional para moléculas [27] que tem por finalidade excitar apenas o grau de liberdade vibracional longitudinal à incidência do projétil. No presente caso, há uma troca de fótons virtuais que tendem a colocar a carga positiva nuclear na direção oposta à aproximação do projétil; contudo, uma força restauradora, proveniente da energia de simetria da fórmula de massa, faz com que a carga positiva volte no sentido oposto e o núcleo acabe vibrando em um estado excitado.

Esse é o modelo de Goldhaber-Teller [24] das RGD's isovetoriais e é baseado no movimento coletivo de núcleons, obtendo bastante sucesso na explicação do fenômeno das ressonâncias.

Para ver apenas esse modo de excitação o modelo é bastante razoável; porém, se os dados experimentais contiverem misturas de estados de momentos de multipolo diferentes como, por exemplo, $L = 1$ (dipolo) com $L = 2$ (quadrupolo) ou $L = 4$ (hexadecapolo), o modelo certamente incorrerá em desvios. Como, em geral, há misturas de multipolaridades nos dados experimentais, pois é difícil o isolamento experimental de apenas um n-pólo, neste aspecto o modelo sempre é limitado. Mas como a interferência de pólos superiores a $L = 1$, apesar de quase sempre existir, é pequena na faixa de energia entre 43 e 54.5 MeV/núcleon [23], podemos dizer que o modelo ainda é razoável.

5.2.2 Não há distribuição de cargas elétricas; as cargas elétricas do núcleo e do projétil são consideradas puntiformes:

É difícil pensar que é uma boa aproximação tratar a colisão de uma partícula alfa com um núcleo de ^{208}Pb quando pensamos neste núcleo como sendo um “ensemble” composto de oitenta e duas partículas carregadas, pois ao passar próxima o suficiente, a partícula alfa não sente a presença de uma única carga elétrica, mas de oitenta e duas iguais a ela. Entretanto, quando tratamos o núcleo como um objeto extenso e colocamos uma densidade de carga na expressão do potencial, ainda podemos expandir a fração $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$ na região em que $|\vec{R}| > |\vec{r}|$, dando uma série em termos de harmônicos esféricos, a qual, no nosso caso, paramos em $L = 1$ (dipolo), de forma que se a intenção é apenas a de ver a excitação de dipolo e a amplitude de excitação é pequena comparada à distância de maior aproximação, que no caso da RGD é verdade, podemos aproximar a distribuição de carga elétrica nuclear por um dipolo disposto longitudinalmente à direção do movimento. É o caso em que se trata a interação apenas como um campo externo que excita modos vibracionais no núcleo.

5.2.3 As forças nucleares são desprezadas:

Em cada gráfico, quando acompanhamos os pontos experimentais, percebemos picos alargados. A boa localização angular do pico correspondente à excitação coulombiana semiclássica foi um dos resultados interessantes obtidos usando o nosso modelo, pois para o dêuteron a 108 MeV, o pico experimental está localizado em 8.0° e o previsto teoricamente está em 8.1° ; para a alfa a 172 MeV, a localização do pico experimental é 11.0° , enquanto o pico previsto está localizado em 11.5° . Para a alfa a 218 MeV, o pico experimental não está bem definido devido a escassez de dados, mas de qualquer forma, um primeiro pico está localizado entre 4.0° e 5.0° , enquanto o teórico está em 8.0° , não concordando tão bem quanto os outros. Contudo, não podemos ser conclusivos a esse respeito, pois os dados experimentais não descartam a possibilidade de haver um segundo pico localizado, por exemplo, em 8.0° , concordando com a previsão teórica.

A avaliação da seção de choque de excitação coulombiana pura dá os seguintes valores do pico teórico em relação ao pico experimental:

a) dêuteron (108 MeV): 62%

b) alfa (172 MeV): 28%

c) alfa (218 MeV): 25% .

Percebe-se que próxima ao pico, a contribuição coulombiana é dominante (podemos afirmar com certeza, pelo menos para o dêuteron) e isto explica a boa concordância obtida por este cálculo, mesmo estando as forças nucleares presentes e não sendo levadas em consideração .

O fato de termos desprezado as forças nucleares, que são de curto alcance, faz com que a região de maiores ângulos de espalhamento seja a menos favorecida para trabalhar com o nosso modelo, pois para essa região, grandes ângulos significam parâmetros de impacto pequenos, ou melhor dizendo, os choques são frontais de forma a ter intensa atuação das forças nucleares, acarretando a limitação no modelo.

5.2.4 A interação com correntes elétricas é desprezada:

À passagem de um íon carregado próximo ao núcleo corresponde uma corrente, gerando um campo eletromagnético, que irá interagir com os spins e cargas nucleares; também há correntes que surgem em consequência do movimento de cargas nucleares, sejam píons carregados ou núcleons, que interagem com os spins e cargas do projétil. Tais correntes, entretanto, induzem modos de vibração transversais em relação a direção de movimento do projétil que não são tratados pelo nosso modelo, uma vez que ele só permite estudar vibrações longitudinais.

5.2.5 Não é levado em conta o recuo do núcleo no processo de colisão :

O fato de não se levar em conta o recuo do núcleo mantendo o centro de massa fixo na origem, pode ser uma fonte considerável de desvios, principalmente quando utilizamos projéteis mais pesados, com massas significativas em relação ao núcleo alvo.

Dizer que o alvo está fixo na origem, não sofrendo recuo, significa dizer que o sistema de centro de massa e o sistema de laboratório coincidem. Para tal situação , a relação entre o ângulo medido no sistema de laboratório ϑ e o ângulo medido no sistema de centro de massa Θ é dada por [33]

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \rho} \quad , \quad (5.8)$$

onde ρ é tão mais próximo de 1 quanto mais próximo estiver o valor da massa do projétil em relação ao do núcleo alvo. Assim, o ângulo ϑ pode chegar a ser, no caso extremo das duas massas serem iguais, igual a $\Theta/2$ ($\rho = 1$). Contrariamente, para projéteis muito leves comparados ao núcleo alvo, como é o caso do dêuteron, ρ é muito pequeno e os dois ângulos praticamente coincidem, de forma a não ter o pico calculado da distribuição angular desviado em relação ao valor experimental de centro de massa. Por conseguinte, temos uma boa concordância no caso do dêuteron.

5.2.6 É feita uma aproximação para $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$ em sua expansão binomial:

A expansão binomial de $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$ é justificada quando $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$, ou seja, quando a amplitude de vibração da ressonância é muito pequena comparada à distância de máxima aproximação do projétil. Vamos fazer a suposição de que não haja sobreposição de matérias nucleares, melhor dizendo, que tanto o projétil quanto o núcleo alvo sejam suficientemente duros para que não troquem matéria além de fótons virtuais e píons. Assim, a máxima aproximação entre os centros do projétil e do núcleo alvo, agora não mais tratados como partículas pontuais, é dada pela soma dos raios nucleares das duas partículas. Se quisermos, podemos até desprezar o raio do projétil, pois apenas o do ^{208}Pb já é suficiente para o raciocínio. O raio do ^{208}Pb é um pouco maior que 7 fm, enquanto a amplitude máxima de vibração se dá com a energia de excitação $\hbar\omega = 13.5 \text{ MeV}$. Assim, a amplitude pode ser calculada por meio da expressão da energia potencial de uma mola, que no caso é 13.5 MeV:

$$E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2, \quad (5.9)$$

$$\mu = 46632.17814 \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad (5.10)$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega\mu}}\hbar c = 0.35 \text{ fm}. \quad (5.11)$$

O fator $f = \frac{A}{R(\text{Pb})} = 0.05$ garante que teremos um erro muito pequeno ao truncarmos a série logo no termo linear, como foi feita por nós.

O motivo dessa aproximação é o mesmo da aproximação eikonal: permitir que o problema seja resolvido analiticamente nos casos em que tenhamos projéteis com energia suficiente para isso, o que é o presente caso.

5.2.7 É feita a aproximação eikonal (ou de pequenos ângulos):

A aproximação eikonal é tanto mais adequada quanto mais o seno de um ângulo se aproxima de seu argumento, que é o caso de pequenos ângulos, justificando então o outro nome da aproximação .

Um cálculo rápido nos mostra que para ângulos até 14° , teremos um erro máximo na aproximação do seno pelo seu argumento de 2%, que é bastante pequeno. Na faixa de 7° , onde nossos resultados tiveram boa concordância, o erro cai para 0.2%. Assim, a faixa onde a aproximação é boa é a do espalhamento para frente, onde os desvios angulares são pequenos. Claro que para isso ocorrer, a energia tem de ser suficientemente alta para que a repulsão coulombiana, que faz com que a trajetória clássica seja uma hipérbole, cause um desvio tão pequeno, que essa hipérbole se torne praticamente uma reta.

Vamos testar essa situação usando uma expressão dada por Galetti et al. [13], para o dêuteron a 108 MeV:

$$\sin \theta_{peak}^{lab} = \left[\left(\frac{M_{BC} Z_t e^2}{4m_B} \right) \left(\frac{Z_p D}{E} \right) \right] . \quad (5.12)$$

Para o parâmetro de ajuste $D = 0.328$, que não é o parâmetro de impacto, a aproximação $\sin \theta \sim \theta$ é boa dentro de um erro de 0.02%, o que é bastante razoável. Podemos concluir então que a aproximação eikonal na região em torno do pico é boa.

5.2.8 O modelo não leva em conta misturas de n-pólos:

Como já foi dito anteriormente e não nos alongaremos mais aqui, não há como prever com o modelo usado a existência de excitações de multipolos, pois estes requerem que haja uma distribuição de cargas que não é levada em conta no modelo.

Há ainda o problema da mistura das ressonâncias de monopolo com a de dipolo, que também não dá para prever com o modelo. Casos em que encontramos uma mistura com alta proporção de monopolo fazem com que grandes erros na previsão da seção de choque ocorram [34, 35].

Não obstante, o nosso modelo pode prever a contribuição de dipolo para a seção de choque medida.

5.3 Limitações devidas ao cálculo numérico:

A principal limitação devida ao cálculo numérico nós atribuímos ao cálculo da função de Bessel, $K_0(x)$. Na expansão dada pelas eqs.(4.21) e (4.22), o intervalo de validade no qual a expansão tem um erro pequeno é $0 < x \leq 2$. Saindo desse intervalo, o valor calculado da função começa a diferir muito do valor real, às vezes até em duas ou três ordens de grandeza, fazendo com que a função, que é monotonicamente decrescente, apresente um mínimo em seu gráfico, o que é matematicamente um absurdo. Fisicamente, isso implicaria numa excitação que, aliada ao crescimento da seção de choque de Rutherford, tem um pico explosivo para ângulos muito pequenos ($< 1.9^\circ$). Assim, precisamos restringir o intervalo de validade dos cálculos para não incorrer nessa falha numérica no cálculo da função de Bessel; contudo, de posse de valores tabelados dessa função que sejam confiáveis, podemos seguir para menores ângulos caso queiramos ou montamos expressões apropriadas para intervalos maiores. Felizmente, dentro do intervalo dos dados experimentais disponíveis, não ocorreram desvios significativos.

Como conclusão final, queremos realçar o bom caráter técnico do mapeamento holomórfico e da dinâmica descrita pelo espaço de fase holomórfico.

Tentamos reproduzir as mesmas condições do esquema computacional feito por Galetti et al. [13] usando a abordagem semiclássica de Weyl-Wigner, a fim de comparar o poder de cada método. Usando o mesmo modelo, fazendo a aproximação eikonal e trabalhando com o esquema holomórfico chegamos, de maneira totalmente analítica, a basicamente os mesmos resultados, conforme podem ser comparados em dois dos três gráficos, obtidos por meios de cálculo numérico. Assim, esforço numérico foi poupado por nós.

O modelo, apesar de ser muito simplificado, fornece boas estimativas da distribuição angular em torno do pico semiclássico e fornece com pouca margem de erro a posição angular do pico, mostrando que na faixa de energia trabalhada (considerada intermediária), a excitação coulombiana é dominante.

Apêndice A

Mapeamento Holomórfico de Alguns Operadores Usuais

A.1 Cálculo da Função de Wigner do Oscilador Harmônico Simples

A definição da função de Wigner é dada por

$$\rho_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{i\frac{pv}{\hbar}} \psi_n^*(q + \frac{v}{2}) \psi_n(q - \frac{v}{2}) . \quad (\text{A.1})$$

A função de onda do oscilador harmônico normalizada é dada em termos de polinômios de Hermite

$$\psi_n(x) = [\sqrt{\pi} b 2^n n!]^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) . \quad (\text{A.2})$$

A função de Wigner agora pode ser escrita em termos dos polinômios de Hermite

$$\rho_w(q, p) = [2\pi \hbar \sqrt{\pi} b 2^n n!]^{-1} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \int dv e^{-\frac{v^2}{4b^2} + i\frac{pv}{\hbar}} H_n\left(\frac{q - v/2}{b}\right) H_n\left(\frac{q + v/2}{b}\right) . \quad (\text{A.3})$$

Vamos então substituir os hermites por suas respectivas funções geratrizes [26]

$$H_n(x) = \frac{d^n}{dt^n} G(t, x)|_{t=0} , \quad (\text{A.4})$$

onde

$$G(t, x) = e^{-t^2 + 2tx} . \quad (\text{A.5})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \rho_w(q, p) &= \left[2\pi \hbar \sqrt{\pi} b 2^n n! \right]^{-1} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-t^2 - s^2 + 2\frac{q}{b}(t+s)} \times \\ &\times \int dv e^{-\frac{v^2}{4b^2} + v\left(\frac{ip}{\hbar} + \frac{s-t}{b}\right)} \Big|_{s=t=0} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Após a integração, obtemos a função de Wigner escrita em termos de uma nova função geratriz, $D(t, s; \alpha)$:

$$\rho_w(q, p) = \frac{1}{\pi \hbar 2^{n-1} n!} e^{-\alpha \alpha^*} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} D(t, s; \alpha) \Big|_{t=s=0} , \quad (\text{A.7})$$

com

$$D(t, s; \alpha) = e^{-2st + 2(t\alpha^* + s\alpha)} \quad (\text{A.8})$$

e

$$\alpha = \frac{q}{b} + \frac{ibp}{\hbar} . \quad (\text{A.9})$$

Fazendo um cálculo simples, chegamos ao resultado

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} D(t, s; \alpha) \Big|_{t=s=0} = (-1)^n 2^n n! L_n(2\alpha\alpha^*) . \quad (\text{A.10})$$

Percebe-se de (A.8) e (A.9) que $D(t, s; \alpha)$ é uma função geratriz complexa para os polinômios de Laguerre $L_n(2\alpha\alpha^*)$.

Finalmente, a função de Wigner para o oscilador harmônico simples é escrita em termos dos polinômios de Laguerre

$$\rho_w(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\alpha \alpha^*} L_n(2\alpha\alpha^*) . \quad (\text{A.11})$$

A.2 Mapeamento Holomórfico da Função de Wigner do Oscilador Harmônico Simples

Usando a função de Wigner do oscilador harmônico simples dada pela eqs. (A.7, A.8) na eq.(2.11), encontramos

$$\rho(z, w^*) = \frac{e^{-zw^*}}{\pi \hbar 2^{n-1} n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}(z\alpha + w^*\alpha^*)} e^{-\alpha \alpha^* - 2st + 2(t\alpha^* + s\alpha)} \Big|_{t=s=0} . \quad (\text{A.12})$$

Fazendo a mudança de variável $\sqrt{2}\alpha = \xi$ e usando o núcleo reprodutor de Bargmann, obtemos

$$\rho(z, w^*) = \frac{e^{-zw^*}}{\pi \hbar 2^{n-1} n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-2st + (w^* + \sqrt{2}t)(z + \sqrt{2}s)} \Big|_{t=s=0}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, após a derivação, chegamos à função Wigner holomórfica para o oscilador harmônico simples

$$\rho(z, w^*) = \frac{z^n w^{*n}}{h n!}. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Mapeamento Holomórfico do operador 1

A transformada de Weyl do operador 1 é a constante 1. Assim, a expressão do mapeamento holomórfico fica na seguinte forma

$$1(z, w^*) = e^{-zw^*} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}z\alpha} e^{\sqrt{2}w^*\alpha^*}. \quad (\text{A.15})$$

Agora, como uma delta de Dirac, usamos o núcleo reprodutor de Bargmann e simplesmente trocamos α^* por $\sqrt{2}z$, obtendo

$$1(z, w^*) = e^{zw^*}. \quad (\text{A.16})$$

A.4 Mapeamento Holomórfico de $\hat{q}$, $\hat{p}$, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$

Partamos da eq.(2.9) rearranjada

$$q(z, w^*) = \frac{e^{zw^*}}{\pi} b \int d\left(\frac{q}{b}\right) e^{-\frac{q^2}{b^2} + \sqrt{2}\frac{q}{b}(z+w^*)} \left(\frac{q}{b}\right) \int d\left(\frac{bp}{\hbar}\right) e^{-\frac{p^2}{\hbar^2} + i\sqrt{2}\frac{bp}{\hbar}(z-w^*)}. \quad (\text{A.17})$$

A integração é imediata, pois são duas integrais de gaussianas, e resulta em

$$q(z, w^*) = \frac{b}{\sqrt{2}}(z + w^*)e^{zw^*}. \quad (\text{A.18})$$

Analogamente para $\hat{p}$, obtemos

$$p(z, w^*) = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}b}(z - w^*)e^{zw^*}. \quad (\text{A.19})$$

Para o mapeamento de $\hat{a}$, vamos utilizar a eq.(2.10), que é adequada às transformadas de Weyl na forma totalmente complexas

$$a(z, w^*) = e^{-zw^*} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}(z\alpha + w^*\alpha^*)} \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.20})$$

Agora, com o auxílio do núcleo reprodutor de Bargmann, basta trocarmos α por $\sqrt{2}w^*$, obtendo

$$a(z, w^*) = w^* e^{zw^*} . \quad (\text{A.21})$$

Da mesma maneira, o operador $\hat{a}^\dagger$ é mapeado facilmente em ze^{zw^*} .

A.5 Mapeamento Holomórfico da Hamiltoniana do Oscilador Harmônico Simples

A hamiltoniana do oscilador harmônico simples sem a energia de ponto zero é dada por

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 \hat{q}^2 - \frac{1}{2}\hbar\Omega . \quad (\text{A.22})$$

Quando é feita sua transformada Weyl, recaímos numa expressão dada em termos de $\alpha = q/b + ibp/\hbar$, a saber

$$H(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{2}\alpha\alpha^* - \frac{1}{2}\hbar\Omega . \quad (\text{A.23})$$

Usando a fórmula do mapeamento , eq.(2.11), obtemos

$$\begin{aligned} H(z, w^*) &= e^{-zw^*} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}(z\alpha + w^*\alpha^*)} (\alpha\alpha^* - 1) \frac{\hbar\Omega}{2} \\ &= e^{-zw^*} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} \int d\mu(\alpha) e^{\sqrt{2}(z\alpha + w^*\alpha^*)} \alpha^* \frac{\hbar\Omega}{2} - e^{zw^*} \frac{\hbar\Omega}{2} \\ &= e^{-zw^*} \frac{\partial}{\partial z} (e^{2zw^*} z) \frac{\hbar\Omega}{2} - e^{zw^*} \frac{\hbar\Omega}{2} \\ &= zw^* e^{zw^*} \hbar\Omega . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Apêndice B

Determinação da Expressão Holomórfica para a Probabilidade de Transição

A fórmula que conhecemos de Bartlett e Moyal [21] para a probabilidade de transição de um estado k para um estado excitado n , fazendo uso da função de Wigner de um sistema, é a seguinte

$$p_{kn}(t) = h \int dq dp \rho_k(q, p; t) \rho_n^0(q, p) \quad (\text{B.1})$$

Vamos substituir cada $\rho(q, p)$ por seu mapeado holomórfico

$$\begin{aligned} p_{kn}(t) &= h \int dq dp \frac{2}{h} e^{-\alpha \alpha^*} \int e^{\sqrt{2}(z^* \alpha^* + w \alpha) - z^* w} \rho_k(z, w^*; t) d\mu(z) d\mu(w) \times \\ &\times \frac{2}{h} e^{-\alpha \alpha^*} \int d\mu(z_0) d\mu(w_0) e^{\sqrt{2}(z_0^* \alpha^* + w_0 \alpha) - z_0^* w_0} \rho_n^0(z_0, w_0^*) . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Teremos um pedaço da expressão na forma

$$= \frac{4\hbar}{h} \int d(q/b) d(bp/\hbar) e^{-2\alpha \alpha^*} \dots, \quad (\text{B.3})$$

onde $\alpha = q/b + ibp/\hbar$. Fazendo a mudança de variável $\xi = \sqrt{2}\alpha$, a integração recai na medida de Bargmann, $d\mu(\xi)$. Executando-se a integração em ξ com o auxílio do núcleo reprodutor de Bargmann, recaímos na seguinte expressão

$$p_{kn}(t) = \int d\mu(z) d\mu(w) \rho_k(z, w^*; t) \int d\mu(z_0) d\mu(w_0) \rho_n^0(z_0, w_0) e^{z^* w_0} e^{z_0^* w} . \quad (\text{B.4})$$

Novamente, usando o núcleo reprodutor de Bargmann, basta trocar z_0 por w e w_0 por z , para finalmente obter a expressão holomórfica para a probabilidade de transição

$$p_{kn}(t) = \int d\mu(z) d\mu(w) \rho_k(z, w^*; t) \left(\rho_n^0(z, w) \right)^* . \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C

Algumas Expressões do Formalismo de Bargmann

Define-se o produto interno de duas funções , f e g , no espaço de Bargmann-Fock, por

$$(f, g) = \int_C f(z)^* g(z) dz \rho(z) . \quad (\text{C.1})$$

onde C é a região de integração ,

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad (\text{C.2})$$

$$dz = dx dy . \quad (\text{C.3})$$

A medida $\rho(x, y)$ é dada por

$$\rho(x, y) = \frac{e^{-zz^*}}{\pi} . \quad (\text{C.4})$$

Dessa forma, o produto interno pode ser escrito como

$$(f, g) = \int f(z)^* g(z) d\mu(z) , \quad (\text{C.5})$$

onde

$$d\mu(z) = e^{-zz^*} \frac{dz}{\pi} . \quad (\text{C.6})$$

É construído um núcleo mapeador, $A(z, q)$, que mapeia cada função de onda $\psi(q)$, pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{L}$, para uma função de variável complexa $f(z)$, pertencente ao espaço de Bargmann-Fock $\mathcal{F}$. O núcleo mapeador é definido por

$$f(z) = \int A(z, q) \psi(q) dq \quad (\text{C.7})$$

Da mesma maneira, os operadores bosônicos da segunda quantização são mapeados como

$$a\psi \rightarrow zf(z) \quad (\text{C.8})$$

$$a^\dagger \psi \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} f(z) . \quad (\text{C.9})$$

A expressão que é construída para o núcleo mapeador é dada por

$$A(z, q) = \frac{1}{\pi^{1/4} b^{1/2}} e^{\sqrt{2} \frac{q}{b} z - \frac{z^2}{2} - \frac{q^2}{2b^2}} \quad (\text{C.10})$$

Uma propriedade interessante do núcleo mapeador de Bargmann é a seguinte

$$\int A(z, q) A^*(w, q) dq = e^{zw^*} . \quad (\text{C.11})$$

A função e^{zw^*} é o núcleo reprodutor de Bargmann, análogo à delta de Dirac

$$f(z) = \int d\mu(w) f(w^*) e^{zw^*} . \quad (\text{C.12})$$

O espaço de Fock-Bargmann possui uma base $u(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ com a relação de ortonormalidade

$$\int d\mu(z) \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}} = \delta_{nm} . \quad (\text{C.13})$$

Finalmente, a norma de um vetor nesse espaço possui a seguinte propriedade

$$\|f\| = \int e^{-zz^*} |f(z)|^2 d\mu(z) . \quad (\text{C.14})$$

Assim, o espaço de Bargmann-Fock é um espaço de Hilbert de funções analíticas inteiras $f(z)$ satisfazendo a condição (C.14). Uma interpretação “física” da eq.(C.14) é considerá-la como uma média estatística da função $f(z) \equiv f(q, p)$ sobre o espaço de fase (q, p) , $z = q + ip$, para um sistema com a hamiltoniana clássica do oscilador $H = (q^2 + p^2)/2 = z^2/2$, em $\beta = 1/kT = 2$, a distribuição sendo $e^{-\beta H}$ [37].

Referências Bibliográficas

- [1] K. Alder e A. Winther *Coulomb Excitation* (Academic Press, NY, 1966).
- [2] S.R. de Groot e L.G. Suttrop *Foundations of Electrodynamics* (North Holland, Amsterdam, 1972).
- [3] N.L. Balazs e B.K. Jennings, Phys. Rep. **104** (1984)347.
- [4] H. Weyl, Zeits. Phys. **46** (1927)1; *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, NY, 1950)p. 272.
- [5] E. Wigner, Phys. Rev. **40** (1932)749.
- [6] J.E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949)99.
- [7] B. Leaf, J. Math. Phys. **9** (1968)65,769.
- [8] D. Galetti e A.F.R. Toledo Piza, Physica **149A** (1988)267; **186** (1992)513.
- [9] R. Aldrovandi e D. Galetti, J. Math. Phys. **31** (1990)2987; R. Aldrovandi *Discrete Weyl-Wigner Transformations*, contribuição oral no II International Wigner Symposium, Gostar, Alemanha, julho de 1991.
- [10] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **46** (1960)570,893,1401; **47** (1961)1075.
- [11] D. Galetti e J.S. da Veiga, PREPRINT IFT-P.031/92.
- [12] V. Bargmann, Communications on Pure and Applied Mathematics vol. **XIV** (1961)215.
- [13] D. Galetti, A. Eiras, F.F. de Sousa Cruz, J.R. Marinelli, M.M.W. de Moraes, PREPRINT IFT-P.056/92.

- [14] J.S. da Veiga *Sobre uma Representação Holomórfica para um Espaço de Fase Quântico*, monografia do curso de MFT do IFT-UNESP- 1989.
- [15] R.P.Feynman, Rev.Mod.Phys., **20** (1948)267.
- [16] P.Carruthers e M.M.Nieto, Am.J.Phys., **33** (1965)537.
- [17] J.R.Klauder e E.C.G.Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (W.A. Benjamin, NY, 1968).
- [18] R.J.Glauber, Phys.Rev. **84** (1951)395; **131** (1963)2766.
- [19] L.M.Scarfone, Am.J.Phys. **32** (1964)158.
- [20] R.W.Fuller, S.M.Harris e E.L.Slaggie, Am.J.Phys. **31** (1963)537.
- [21] M.S.Bartlett e J.E.Moyal, Proc.Cambridge Phil.Soc. **45** (1949)545.
- [22] A.van der Woude PREPRINT KVI-583 A review on Electric Giant Ressonances, prepared for Progress in Particle and Nuclear Physics.
- [23] F.E. Bertrand e J.R.Beene *Proceedings of International Nuclear Physics Conference* São Paulo, Brasil (1989).
- [24] M.Goldhaber e E.Teller, Phys.Rev. **74** (1948)1046.
- [25] L.Landau e E.Lifchitz, *Mécanique*, (MIR, Moscou,1966).
- [26] M.R.Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas* (McGraw-Hill, São Paulo,1973) fórmula 18.2, p.104; fórmula 24.56, p.139; fórmula 27.11, p.151; fórmula 28.2, 153.
- [27] D.Secretst e B.R.Johnson, Journ.Chem.Phys. **45** (1966)4556.
- [28] I.S.Gradshteyn e I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* second edition (Academic Press, NY, 1981), fórmula 3.773-3, p.429.
- [29] C.Djalali et al., Zeits.Phys. **A298** (1981)79.

- [30] P.Decowski e H.Morsh, Nucl.Phys. **377** (1982)261.
- [31] S.S.M.Wong *Introductory Nuclear Physics* (Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, NJ, 1990).
- [32] M.Abramowitz e I.A.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, NY, 1965), fórmula 9.8.1, p.378; 9.8.5, p.379.
- [33] H.Goldstein, *Classical Mechanics* , second edition (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980).
- [34] R.J.Peterson, Phys.Rev.Lett. **57** (1986)1550; **57** (1986)2771 (E), **59** (1987)1055.
- [35] S.Schlomo et al., Phys.Rev. **C36** (1987)1317.
- [36] G.R.Satchler, Nucl.Phys. **A472** (1987)215.
- [37] A.Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer-Verlag,Heidelberg, 1986).

