

ANA HELENA FERNANDES GUIMARÃES

REGIÕES DE ESTABILIDADE NO SISTEMA  
PLUTÃO-CARONTE

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá,  
Universidade Estadual Paulista,  
para a obtenção do título de  
Mestre em Física na área de  
Astronomia Dinâmica.

Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá  
2006

G963r      Guimarães, Ana Helena Fernandes  
              Regiões de estabilidade no sistema Plutão-Caronte / Ana Helena  
              Fernandes Guimarães . – Guaratinguetá : [s.n.], 2006  
              88f. : il. + 1 CD-ROM  
              Bibliografia: f. 84-88

              Acompanha CD-ROM com os anexos  
              Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade  
              de Engenharia de Guaratinguetá, 2006  
              Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

              1. Sistema binário 2.Plutão I. Título

CDU 681.3.042

**“REGIÕES DE ESTABILIDADE NO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE”**

**ANA HELENA FERNANDES GUIMARÃES**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA**


**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

  
Prof. Dr. Denis Dalozzi  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER  
Orientadora / Unesp-Feg

  
Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO  
Unesp-Feg

  
Prof. Dr. RICARDO REIS CORDEIRO  
UFV

*Agosto de 2006*

## **DADOS CURRICULARES**

**ANA HELENA FERNANDES GUIMARÃES**

NASCIMENTO	15.04.1979 – GUARATINGUETÁ / SP
FILIAÇÃO	João Ferraz Guimarães Maria Aparecida Mendes Fernandes Guimarães
1998/2003	Curso de Graduação em Engenharia Civil, UNESP – Campus de Guaratinguetá
2004/2006	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, UNESP – Campus de Guaratinguetá

Aos Anjos do Céu e da Terra,  
pois as vossas luzes e paciência  
muito me valeram.

## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, *Prof.<sup>a</sup> Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter*, por todos os anos de apoio e amizade,

ao *Prof. Dr. Othon Cabo Winter* pelas sugestões e atenção durante o desenvolvimento da dissertação,

ao *Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto*, pelo apoio e prontidão em ajudar-me,

às funcionárias da Biblioteca desta instituição pelo carinho com que sempre atenderam aos meus pedidos,

aos meus colegas, *Rita de Cássia Domingos, Cláudia Celeste Celestino, Juliano de Oliveira, Marcos Allan e Décio Mourão*, por todo o apoio durante os estudos,

aos meus amigos e parentes pela compreensão que tiveram durante os momentos em que “eu estava em órbita”,

e principalmente aos meus pais, *João Ferraz Guimarães e Maria Aparecida Mendes Fernandes Guimarães*, que estiveram pacientemente ao meu lado, apoiando-me,

também ao meu tio, *Aluísio Mendes Fernandes*, por acreditar em mim.

Este trabalho contou com apoio da

FAPESP – através do processo n ° 04/05777-4

“Um dia de chuva  
É tão belo  
Como um dia de Sol.  
Ambos existem;  
Cada um como é”.

Alberto Caeiro  
(Fernando Pessoa)

GUIMARÃES, A. H. F. **Regiões de estabilidade no Sistema Plutão-Caronte**. 2006. 88f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

## **RESUMO**

Plutão e Caronte, bem como os novos satélites do sistema, Nix e Hidra, são alvos de micrometeoritos, provavelmente originários do cinturão de Kuiper. Os resíduos destes impactos permaneceriam no sistema em órbitas ao redor de Plutão ou Caronte. Este estudo analisa, através de simulações numéricas, a estabilidade das regiões ao redor do sistema binário. Esta análise deu-se através de simulações numéricas para o Problema Restrito de Três Corpos. Foram numericamente integradas órbitas para partículas ao redor de Plutão, ao redor de Caronte e ao redor do baricentro do sistema. Destas integrações numéricas foram geradas grades  $a \times e$ , definindo-se regiões: de estabilidade, de escape e de colisão. A região estável ao redor de Plutão vai até aproximadamente  $8200km$ , ao redor de Caronte se estende até  $2900km$  e ao redor do baricentro do sistema binário, órbitas Tipo-P, a região estável inicia-se a partir de  $49000km$ . Estes valores estão de acordo com a teoria de Holman e Wiegert (1999). As regiões de estabilidade de Plutão-Caronte foram também amplamente estudadas através do uso da Superfície de Secção de Poincaré (SSP). Um conjunto de cerca de 230 SSP foi obtido. Foram gerados diagramas de  $C_j \times x$ ,  $C_j$  é o valor da Constante de Jacobi, derivados das SSP para a região interna aos corpos massivos do binário e externa a eles. Estes diagramas representam a síntese da análise da estabilidade por meio das SSP. Neles ficam determinadas as regiões estáveis às partículas no sistema. Conjuntos especiais de SSP foram gerados para análise das ressonâncias 1:6 e 1:4, pois estas, em especial, estariam relacionadas aos novos satélites. Verificou-se que estes satélites estão em regiões estáveis, mas não em ressonância de acordo com os dados até hoje conhecidos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistema Binário, Plutão-Caronte, Regiões Estáveis, Superfícies de Secção de Poincaré.

GUIMARÃES, A. H. F. **Stable regions for Pluto-Charon System.** 2006. 88f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

## **ABSTRACT**

Pluto and Charon and the two new discovered satellites, named Hydra and Nix, are targets of micrometeorites which were probably originated from the Kuiper belt. A sample of particles can be generated from these collisions and be trapped in orbit around Pluto or Charon. This work analyses, through numerical simulations, the stable regions around the binary system. This analysis took into account the Restricted Three Body Problem. From these numerical simulations diagrams of  $a \times e$  were generated defining stable, escape and unstable regions. Stable regions around Pluto (width about 8200 km), around Charon (width about 2900 km) and around the baricentre of the binary system (after a semi-major axis about 49000 km) were obtained. These values are in good agreement with the work by Holman & Wiegert (1999). These stable regions were also analysed by using the technique of Poincaré Surface of Section (PSS). A sample of about 230 PSS was obtained. In all these PSS chaotic and stable regions and also the resonance locations were identified. Diagrams of  $C_j \times x$ , derived from the PSS, were obtained. They represent the synthesis of the stability region acquired from the PSS. A particular set of SSP was generated in order to analyse the evolution of 1:4 and 1:6 resonances. The new satellites, Hydra and Nix, are located in stable regions although, they are not in resonances with Charon, as can be seen in the grade  $a \times e$ .

**KEYWORDS:** Binary system, Pluto-Charon system, Stable regions, Poincaré Surface of Section

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	15
2.1	INSERÇÃO NO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE	15
2.2	ESTABILIDADE DE BINÁRIOS e PLUTÃO-CARONTE	22
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>A DINÂMICA ENVOLVIDA</b>	26
3.1	O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	26
3.1.1	<b>Problema Circular Restrito de 3-Corpos: breve recapitulação</b>	27
3.1.2	<b>A Constante de Jacobi</b>	28
3.1.3	<b>Curvas de Velocidade Zero</b>	28
3.2	SUPERFÍCIES DE SECÇÃO DE POINCARÉ	31
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>EVOLUÇÃO DAS ÓRBITAS PRÓXIMAS AOS PONTOS DE EQUÍLÍBRIO LAGRANGIANOS</b>	36
4.1	AS ÓRBITAS PRÓXIMAS AOS PONTOS DE EQUÍLÍBRIO LAGRANGIANOS	36
4.1.1	<b>Órbitas de Girino e Ferradura</b>	36
4.1.2	<b>Considerações a respeito da instabilidade do movimento ao redor dos pontos de equilíbrio triangulares para o sistema Plutão-Caronte</b>	39
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS: VARREDURA <math>a \times e</math></b>	41
5.1	A VARREDURA: PROJEÇÃO DO SISTEMA	41
5.1.1	<b>Considerações sobre o programa</b>	41
5.1.2	<b>Resultados: as grades da região interna</b>	42
5.1.3	<b>Resultado: a grade da região externa</b>	48
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>ESPAÇO DE FASE DO SISTEMA PLUTÃO- CARONTE</b>	50
6.1	CONSIDERAÇÕES	50
6.2	A REGIÃO INTERNA	50
6.2.1	<b>A Superfície de Secção de Poincaré para um mesmo valor de <math>C_j</math> e diferentes razões de massa</b>	51
6.2.2	<b>As Superfícies de Secções de Poincaré para valores de <math>C_j</math> associados às curvas de velocidade zero e aos pontos de equilíbrio Lagrangianos</b>	54

6.2.3	<b>Distintos valores de <math>C_j</math> : varredura</b> .....	56
6.2.4	<b>Centro das ilhas: trajetórias</b> .....	60
6.2.5	<b>Estabilidade e as Superfícies de Secções de Poincaré para a região interna</b> .....	66
6.3	<b>A REGIÃO EXTERNA</b> .....	69
6.3.1	<b>Regiões proibidas e as Superfícies de Secções de Poincaré</b> .....	69
6.3.2	<b>As trajetórias para o caso externo: órbitas Tipo-P</b> .....	72
6.3.3	<b>As Superfícies de Secções de Poincaré e os novos satélites Nix e Hidra</b> ....	75
6.3.4	<b>Amplitude de oscilação e o diagrama <math>C_j</math> x <math>x</math></b> .....	80
 <b>CAPÍTULO 7 DISCUSSÕES E CONCLUSÃO</b> .....		82
 <b>REFERÊNCIAS</b> .....		85
 <b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA</b> .....		89
 <b>ANEXO A (em CD-Rom)</b>		
 <b>ANEXO B (em CD-Rom)</b>		

## CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Três são os satélites conhecidos do sistema de Plutão: Caronte, que junto ao planeta compõe um sistema binário, mais Hidra e Nix, descobertos em 2005. Após um encontro de pesquisadores, realizado em 2002, pela Sociedade Astronômica do Pacífico, ficou determinado que o sistema binário Plutão-Caronte estaria entre as prioridades de estudos sobre o futuro da exploração do Sistema Solar. A descoberta destes novos objetos já sucedeu a esta determinação, assim como a efetivação do projeto da missão *New Horizons Pluto-Kuiper Belt*, cuja sonda foi lançada em janeiro de 2006 e que deve chegar a Plutão em nove anos (2015).

O objetivo do presente estudo foi a análise das regiões de estabilidade de Plutão-Caronte. A relevância da determinação dessas regiões para o binário se dá principalmente no que tange à possibilidade de haver partículas que permaneçam por longos períodos no sistema, pois isto afeta direta e indiretamente a missão *New Horizons Pluto-Kuiper Belt*. É importante não somente ter-se conhecimento do lugar onde pode haver aglomerações de partículas, mas também determinar regiões nas quais a própria sonda possa permanecer no sistema sem sofrer danos.

As partículas seriam geradas após colisões de micrometeoritos, provavelmente originários do cinturão de Kuiper, sobre a superfície de Plutão e Caronte (WEISSMAN; STERN, 1994). Também seriam alvos de colisões os novos satélites do sistema, Nix e Hidra, descobertos apenas em 2005 (STERN *et al.*, 2006). O impacto de micrometeoritos sobre as superfícies desses corpos massivos proporcionaria um imediato acúmulo de partículas de poeira ao redor de Plutão (STERN *et al.*, 2006). Busca-se entender se seria possível haver aglomerações de partículas também ao redor de Caronte e do baricentro do sistema.

É importante ressaltar que a recente descoberta dos satélites, Hidra e Nix, veio reforçar a relevância de conhecerem-se as regiões propícias a novos corpos em órbitas estáveis no sistema. No estudo da estabilidade por meio da Superfície da Secção de Poincaré foram feitas secções especialmente relacionadas a eles, mostrando que se encontram

na zona estável para a região externa aos binários e não estão em ressonância com Caronte.

Primeiramente, no Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica decorrente do levantamento sobre o sistema Plutão-Caronte e da estabilidade em sistemas binários. Segue uma recapitulação, no Capítulo 3, do problema circular restrito de três corpos e das curvas de velocidade zero, mostrando-as para o caso de Plutão-Caronte, além da apresentação do estudo acerca da Superfície da Secção de Poincaré, pois esta técnica é fundamental no entendimento dos resultados apresentados no Capítulo 6.

O Capítulo 4 compreende um estudo sobre as trajetórias das partículas inicialmente alocadas próximas a um dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos. Buscou-se identificar as órbitas de girino e ferradura determinadas pelas partículas para diferentes razões de massas, para por fim considerar a razão de massa do sistema Plutão-Caronte ( $10^{-1}$ ). O objetivo era comparar a dinâmica das partículas para diferentes sistemas. Os resultados obtidos eram esperados no que tange a não estabilidade dos pontos de equilíbrio triangulares para a razão de massa do sistema em foco (SZEBEHELY, 1967) e no que diz respeito as várias larguras da região de ferradura para diferentes razões de massa.

No Capítulo 5 — análise das regiões estáveis por varredura  $a \times e$  — foram analisadas quais as regiões onde as partículas permaneceriam no sistema por um período de aproximadamente 248 anos, que é o período orbital de Plutão. A permanência das partículas por longos períodos no sistema foi analisada considerando-as orbitando inicialmente Plutão e depois tendo como corpo central Caronte, seguindo-se então para a análise da região externa a ambos os corpos. O limite da região de estabilidade foi determinado dentro do esperado de acordo com Holman e Wiegert (1999).

No Capítulo 6, através da técnica da Superfície da Secção de Poincaré, foram analisadas as regiões interna e externa aos corpos massivos. Foram geradas mais de duzentas Superfícies de Secções de Poincaré para o espaço de fase Plutão-Caronte e, a partir delas, foram determinados dois diagramas: um para a região interna e outro para a externa, que facilitaram a visualização das regiões estáveis. A análise da estabilidade dos novos satélites foi enfatizada neste capítulo.

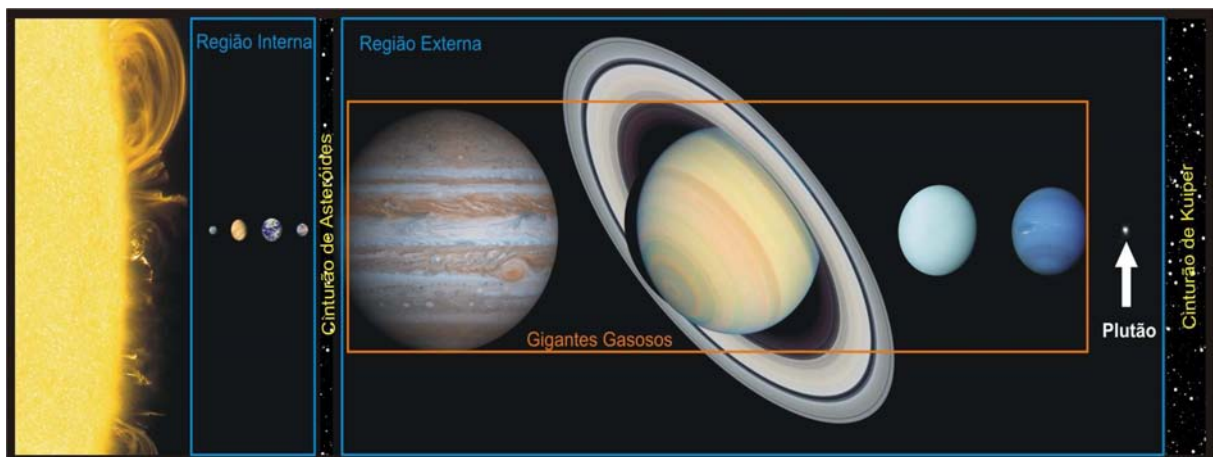
No Capítulo 7, a discussão é baseada nos resultados apresentados nos Capítulos 5 e 6, comparando-os e ressaltando os dados mais relevantes.

## CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na primeira parte deste capítulo são apresentados os artigos sobre o sistema Plutão-Caronte. A segunda parte constitui-se de referências a respeito de binários, especialmente aquelas que tratam das regiões de estabilidade em torno deste tipo de sistema.

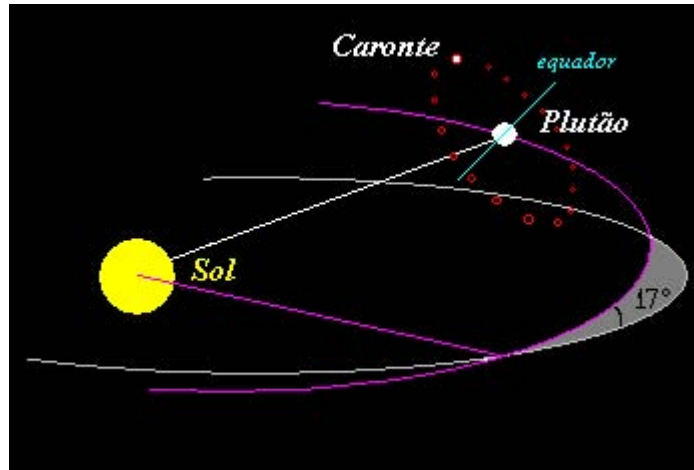
### 2.1 INSERÇÃO NO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE

Descoberto em 1930 por Clyde W. Tombaugh, Plutão ocupa a nona posição em ordem de planetas distantes do Sol, com semi-eixo maior de 39.48 U.A. — ver Figura 2.1.



**Figura 2.1:** O Sistema Solar — da esquerda para direita: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, o Cinturão de Asteróides, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão. Em destaque em azul a Região Interna (esq.) e a Região Externa (dir.), em amarelo o Cinturão de Asteróides (esq.) e o Cinturão de Kuiper (dir.), em laranja destaque aos planetas denominados gigantes gasosos. A seta aponta Plutão.

Considerando que as órbitas dos planetas no Sistema Solar são quase todas circulares e situam-se praticamente no mesmo plano, a órbita de Plutão é uma exceção dentre as dos demais planetas, pois a excentricidade apresentada por ele é de aproximadamente 0.25 e a inclinação em relação ao plano da Eclíptica é de  $17^\circ$  — ver Figura 2.2.



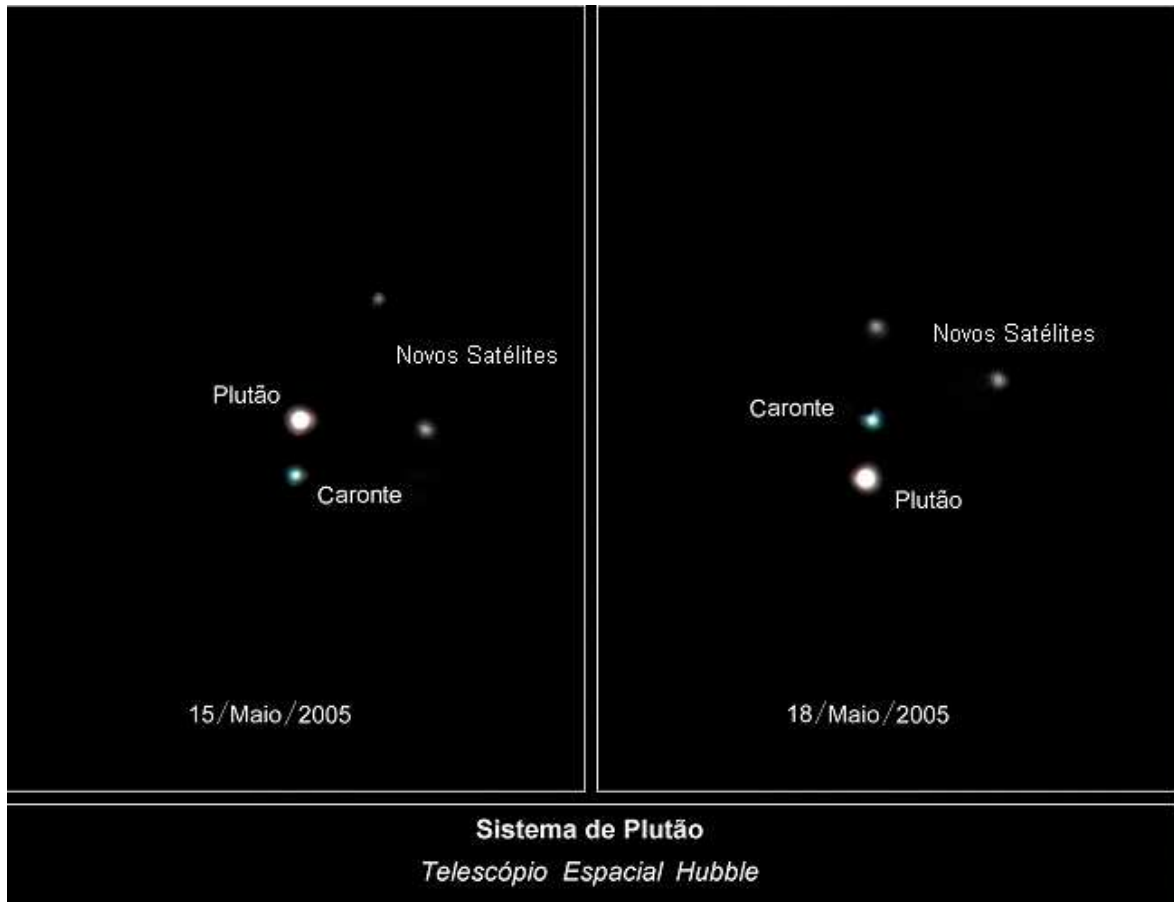
**Figura 2.2:** Sol, Plutão e Caronte. O plano da órbita de Plutão é  $17^\circ$  inclinado em relação ao plano da Eclíptica.

Até recentemente, sabia-se da existência de apenas um satélite de Plutão, Caronte, cuja descoberta deu-se em 1978 por Christy e Harrington (LITTMANN,1988), fato que mudou o modo de interpretar as informações referentes ao planeta, tornando os dados mais precisos — ver Tabela 2.1 — então, dois candidatos a satélites de Plutão foram detectados pelo Telescópio Espacial Hubble (HST) em imagens distintas datadas de 15 e de 18 de maio de 2005 — ver Figura 2.3.

**Tabela 2.1:** Plutão e Caronte (Murray & Dermott, 1999).

		Plutão (Sol)	Caronte (Plutão)
Semi-eixo maior	$a$ (km)	$5906 \times 10^6$	19636
Excentricidade	$e$	0.24880766	0.0076
Inclinação	$I$ ( $^\circ$ )	17.14175	96.163
Período	$T$	248 anos	6.387 dias
Massa	$m$ ( $10^{22}$ kg)	1.27	0.19
Raio	$R$ (km)	1137	586
Razão de massa	$\bar{\mu}$ (Plutão-Caronte)	$1.3 \times 10^{-1}$	

Segundo a União Astronômica Internacional (IAU), esses novos objetos, inicialmente designados por S/2005 P1 e S/2005 P2, agora já denominados, Hidra e Nix, têm suas distâncias em relação ao baricentro do sistema dadas por  $64700 \pm 850$  km e  $49500 \pm 600$  km, respectivamente. Essas distâncias correspondem a períodos orbitais de  $38.2 \pm 0.8$  dias para Hidra e de  $25.5 \pm 0.5$  dias para Nix, implicando em ressonâncias em movimento médio com Caronte de 6:1 e 4:1 na seqüência. Esses satélites estariam em órbitas aproximadamente circulares em relação ao centro de massa do sistema.



**Figura 2.3:** Imagens do Telescópio Espacial Hubble de maio de 2005 mostrando os novos satélites de Plutão (extraído de science.nasa.gov).

Em um reexame do arquivo de imagens de junho de 2002, estes corpos já haviam aparecido próximos ao previsto de acordo com os cálculos de suas órbitas. A estabilidade destes novos objetos é considerada nesse estudo, tratando-os como partículas a orbitar Plutão-Charonte, conforme será visto nos Capítulos 5 e 6.

Estima-se que o diâmetro de Hidra deve estar compreendido entre 64 e 200 *km* e Nix seria 20% menor; as massas dos novos satélites seriam  $5 \times 10^{-4}$  menores que a razão de massa do binário (WEAVER et al., 2006), isto assumindo que a densidade de ambos seja igual ou menor que a densidade de Plutão.

As peculiaridades em relação à órbita de Plutão são importantes, pois é válido citar que o planeta está em ressonância 3:2 com Netuno, o segundo planeta mais distante do Sol, e que as suas órbitas se interceptam; no entanto, essas características da órbita de Plutão (inclinação e excentricidade) garantem que a aproximação entre eles não seja inferior a vinte unidades astronômicas (MURRAY; DERMOTT, 1999). Segundo

Malhotra (1995), Plutão teria sido capturado nesta ressonância por Netuno durante a migração planetária que configurou o Sistema Solar, sua inclinação também seria remanescente da acomodação dos objetos do sistema. Um estudo a respeito da estabilidade de Plutão-Charonte na ressonância com Netuno também foi feito por Malhotra (1996), que apresenta as relações de ressonâncias de vários objetos do Cinturão de Kuiper com Netuno.

Uma série de observações do Telescópio Espacial Hubble (HST) mostrou que Plutão move-se oscilando em torno do centro de massa do sistema (CRUIKSHANK, 1999) e este é exterior ao planeta (comparações – ver Tabela 2.2 – somente para o sistema

**Tabela 2.2:** Posição do centro de massa para planetas e alguns satélites no Sistema Solar. A primeira coluna é referente ao corpo principal – corpo1; a segunda, ao raio deste corpo1, pois é necessário conhecê-lo para dizer se o centro de massa do sistema tem sua posição interna ao corpo1 ou não. Na terceira coluna, encontra-se o corpo secundário. Na quarta, é dado o semi-eixo maior do corpo2 (satélite). Na quinta coluna, tem-se o valor da razão de massa corpo1-corpo2. A sexta coluna dá a posição do centro de massa (CM) tendo como origem o centro do corpo1. E a sétima coluna, foi determinada de acordo com a posição do centro de massa em relação ao tamanho do raio do corpo1, ou seja, se o CM é interno ou externo ao corpo1.

Corpo 1	Raio (km)	Corpo 2	a C2 (km)	razão de massa	CM (km)	
<b>Terra</b>	6378	<i>Lua</i>	384400	$1.215 \times 10^{-2}$	4671.595	Interno
<b>Marte</b>	3394	<i>Phobos</i>	9377	$1.683 \times 10^{-8}$	0.000	Interno
	3394	<i>Deimos</i>	234963	$2.804 \times 10^{-9}$	0.001	Interno
<b>Júpiter</b>	71398	<i>Io</i>	421600	$4.705 \times 10^{-5}$	19.836	Interno
	71398	<i>Europa</i>	670900	$2.527 \times 10^{-5}$	16.951	Interno
	71398	<i>Ganymede</i>	1070000	$7.805 \times 10^{-5}$	83.515	Interno
	71398	<i>Calisto</i>	1883000	$5.667 \times 10^{-5}$	106.710	Interno
<b>Saturno</b>	60330	<i>Prometeu</i>	139350	$2.463 \times 10^{-10}$	0.000	Interno
	60330	<i>Pandora</i>	414700	$2.287 \times 10^{-10}$	0.000	Interno
	60330	<i>Epimeteu</i>	151422	$9.675 \times 10^{-10}$	0.000	Interno
	60330	<i>Janus</i>	151472	$3.483 \times 10^{-9}$	0.001	Interno
	60330	<i>Mimas</i>	185520	$6.773 \times 10^{-8}$	0.013	Interno
	60330	<i>Encelado</i>	238020	$1.284 \times 10^{-7}$	0.031	Interno
	60330	<i>Tetis</i>	294660	$1.094 \times 10^{-6}$	0.322	Interno
	60330	<i>Dione</i>	377400	$1.851 \times 10^{-6}$	0.698	Interno
	60330	<i>Rhea</i>	527040	$4.064 \times 10^{-6}$	2.142	Interno
	60330	<i>Titã</i>	1221850	$2.366 \times 10^{-4}$	289.134	Interno
<b>Urano</b>	60330	<i>Iapetus</i>	1481100	$2.797 \times 10^{-6}$	4.143	Interno
	26200	<i>Miranda</i>	129800	$7.589 \times 10^{-7}$	0.099	Interno
	26200	<i>Ariel</i>	191200	$1.558 \times 10^{-5}$	2.979	Interno
	26200	<i>Umbriel</i>	266000	$1.350 \times 10^{-5}$	3.590	Interno
	26200	<i>Titânia</i>	435800	$4.062 \times 10^{-5}$	17.701	Interno
<b>Netuno</b>	26200	<i>Oberon</i>	583600	$3.471 \times 10^{-5}$	20.256	Interno
	25225	<i>Tritão</i>	354760	$2.099 \times 10^{-4}$	74.448	Interno
<b>Plutão</b>	1137	<i>Charonte</i>	19636	$1.103 \times 10^{-1}$	2166.494	<b>EXTERNO</b>

Plutão-Caronte o centro de massa localiza-se fora do corpo principal). E Hidra e Nix, os novos satélites, também movem-se ao redor do centro de massa do binário, conforme apontado por Weaver et al.(2006).

Devido ao período de rotação de Plutão ser igual ao período de rotação e também ao de translação de Caronte — bissincrono — eles são tidos como desacelerados por maré (MURRAY; DERMOTT, 1999).

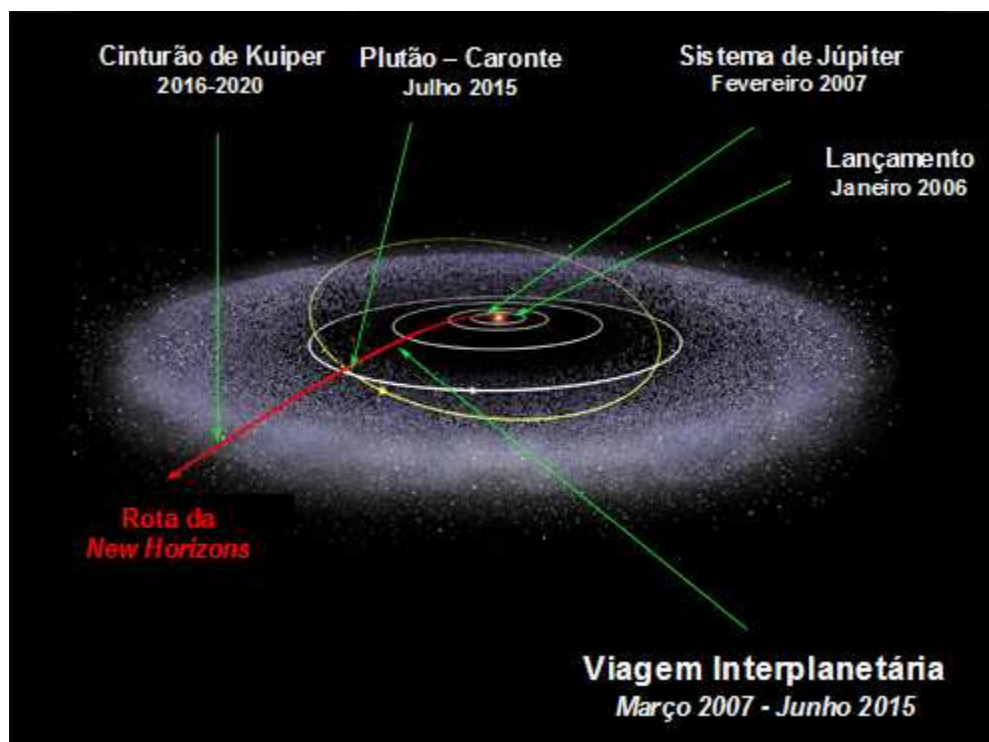
Considerando que o binário é alvo freqüente de micrometeoritos, originários principalmente do Cinturão de Kuiper e da Nuvem Interna de Oort, como concluíram Weissman e Stern (1994) após terem investigado as taxas de colisões em Plutão e Caronte, um estudo das regiões de estabilidade no sistema estaria analisando a existência de aglomerações de partículas. Com a descoberta de Hidra e Nix, Stern et al. (2006) sugerem que estes também seriam alvos freqüentes desses micrometeoritos e, logo, também os responsáveis por acúmulos de poeira ao redor do binário.

Anéis planetários circundam os quatro gigantes gasosos do Sistema Solar — Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. São formados por partículas que orbitam os planetas, do mesmo modo que estes são orbitados por seu(s) satélite(s). O tamanho destas partículas é desde a ordem de micrômetros a metros e a composição destas depende do material que as originou.

A origem das partículas que compõem os anéis planetários pode dar-se na ruptura de satélites submetidos à intensidade das forças devido à maré, e/ou por colisões entre satélites, e/ou ainda por materiais ejetados dos próprios satélites, como a teoria que envolve o satélite Encelado e o tênue Anel E no Sistema Saturniano. A permanência destas partículas no sistema é dependente da sua órbita estar ou não na região estável.

A relevância do estudo está em determinar as regiões nas quais partículas de poeira possam permanecer por longos períodos. Consiste também em mostrar onde uma sonda espacial estaria sujeita a receber estes detritos espaciais, que poderiam vir a danificar seus equipamentos.

Esse tipo de análise pode vir já a contribuir para a missão *New Horizons Pluto-Kuiper Belt*, que irá visitar o sistema e objetos do Cinturão de Kuiper, lançada em janeiro de 2006 (ver Figura 2.4), pois uma vez determinadas estas regiões de acúmulo de poeira, elas poderiam ser evitadas. Essa missão será a primeira sonda a visitar um sistema binário. Serão analisadas a atmosfera de Plutão e sua geologia, a morfologia e a composição tanto do planeta, quanto de seu satélite principal, Caronte, pois, para entender o sistema binário formado por Plutão e Caronte, é essencial conhecer-se mais a respeito do satélite (GUO; FARQUHAR, 2005). É válido lembrar que a importância da determinação das regiões estáveis para a missão vai além da previsão dos detritos, pois o conhecimento destas regiões de estabilidade será útil também para a permanência da sonda no sistema, por um período de tempo.



**Figura 2.4:** Nesta figura tem-se, em vermelho, a rota prevista para a sonda *New Horizons Pluto-Kuiper Belt*, primeiramente rumo a Júpiter, onde o campo gravitacional deste a impulsionará na direção de Plutão (órbita amarela); depois ela seguirá para o estudo de corpos do Cinturão de Kuiper (STERN, 2002).

Dos estudos acerca de Plutão e Caronte, aqueles que mencionam a dinâmica do sistema são relativos à possível origem e evolução do mesmo, como é o caso de Levison e Stern (1995). Eles, após uma série de integrações numéricas, sugeriram que a alta excentricidade e inclinação da órbita de Plutão poderiam ser resultantes das

interações anteriores do objeto, que seria o pro-Plutão, com os Gigantes Gasosos, o que teria feito com que o objeto ficasse preso na ressonância 3:2 com Netuno e numa libração do periélio similar à de Plutão atualmente. No entanto, a amplitude de libração seria muito maior que aquela apresentada pelo binário.

Para transcorrer a evolução completa do binário, isto é, uma amplitude de libração 3:2, Levison e Stern (1995) acrescentaram eventos dissipadores de energia. Isto inclui considerar a ocorrência de um impacto com um corpo de massa superior (o que teria formado o binário), ou um grande número de colisões físicas e interações gravitacionais com objetos do Cinturão de Kuiper.

Dentre estas duas possibilidades, a primeira é citada por Stern (2002) como sendo a mais aceita para a formação de um sistema como Plutão-Caronte; considerando a possibilidade de que, após um impacto de grandes proporções, grande parte dos destroços teria entrado em órbita ao redor de Plutão, formando Caronte. Stern et al. (2006) colocam que também Hidra e Nix poderiam ser corpos antigos formados na mesma era que Plutão e Caronte, fragmentos da mesma ruptura reagrupados.

No entanto, segundo o que é apontado por Sussman e Wisdom (1988), Plutão é remanescente da órbita dos asteróides com trajetórias caóticas em ressonância, o que normalmente envolve alta excentricidade e inclinação, sugerindo que o planeta deve ter sido formado com menor excentricidade e inclinação, como é característico dos demais planetas; e Plutão foi assumindo sua órbita atual no decorrer do processo dinâmico. Sussman e Wisdom (1988) mencionam também que Plutão simplesmente pode ter sido formado em uma órbita próxima a sua atual e concluem que a natureza do movimento do planeta é caótica, e assim sendo, nada se pode afirmar acerca de sua origem.

Ainda há estudos que visam extrair das imagens dados com melhor precisão em relação às características dos corpos do sistema, como, por exemplo, Tholen e Buie (1997), que focaram a órbita de Caronte. Eles analisaram sessenta imagens do sistema Plutoniano, obtidas através do Telescópio Espacial Hubble, entre maio de 1992 e agosto de 1993, e, ao contrário das expectativas em relação a um sistema sob a

evolução por maré, excentricidade de  $0.0076 \pm 0.0005$  foi encontrada. Eles propõem que essa excentricidade remanescente seja atribuída a um impacto de grandes proporções, fato também apontado por Levison e Stern (1995) para justificar a energia dissipada e também por Stern (2002, 2006) como mencionados anteriormente.

Dentre as referências mais recentes a respeito do sistema, Thiessenhuesen et al.(2002) apresentaram um estudo a respeito do movimento de partículas em órbita no sistema binário. Estas partículas seriam ejetadas de Plutão e, especialmente de Caronte, frutos de colisões de micrometeoritos originários do Cinturão de Kuiper com as superfícies destes. A dinâmica dessas partículas após a ejeção seria então determinada pela gravidade de Plutão e Caronte. Eles sugerem que as órbitas dessas partículas não seriam periódicas, no entanto ressalvam que um número de partículas poderia permanecer em uma região relativamente pequena próxima a Plutão por um período superior a setenta anos. O enfoque dos autores foi dado à densidade deste possível anel e as órbitas assumidas pelas partículas que o formam, não à estabilidade do mesmo. Eles consideraram que o anel seria denso o suficiente para ser percebido por um detector de poeira a bordo de uma sonda espacial, mesmo durante uma única passagem através do sistema Plutoniano.

O propósito do presente estudo é: verificar quais as regiões de permanência destas partículas por um intervalo de tempo de aproximadamente 20.000 períodos orbitais de Caronte, ou seja, um período orbital de Plutão, além de delimitar as zonas de escape e de colisão. É válido mencionar que a relevância na determinação destas regiões é também dada à sonda New Horizons Pluto-Kuiper Belt que visitará o sistema em 2015.

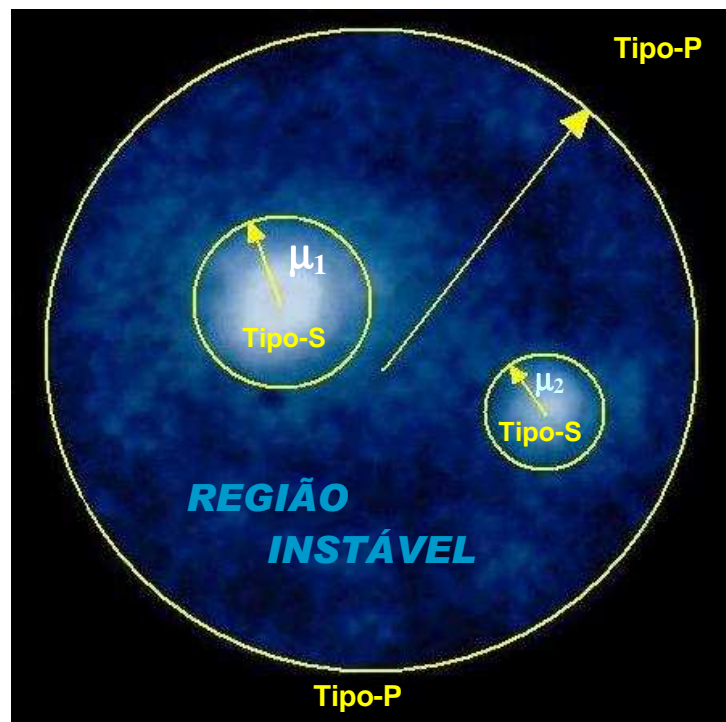
## 2.2 ESTABILIDADE DE BINÁRIOS e PLUTÃO-CARONTE

Segundo Holman e Wiegert (1999) as órbitas dos sistemas binários são divididas em três categorias. A primeira considera as órbitas planetárias ou órbitas Tipo-P, que são aquelas fora do binário, onde o terceiro corpo essencialmente orbita o centro de massa dos primários. A segunda categoria refere-se às órbitas satélites ou órbitas Tipo-S (ver

Figura 2.5). O terceiro tipo está relacionado às órbitas próximas aos pontos de equilíbrio triangulares, que não são normalmente de interesse para sistemas binários, visto que a razão de massa deve ser menor que  $\mu = m_2 / (m_1 + m_2) = 0.038$  para que o movimento ao redor destes pontos seja linearmente estável (SZEBEHELY, 1967). Um breve estudo acerca do comportamento de uma partícula nas regiões destes pontos de equilíbrio será apresentado no Capítulo 4.

O estudo de Holman e Wiegert (1999) tratou de órbitas Tipo-P e Tipo-S. Foram investigados binários com excentricidade em um intervalo de 0.0 a 0.8 e razão de massa entre 0.1 a 0.9.

O modelo por eles utilizado foi o problema elíptico restrito de três corpos e as partículas-teste consideradas estáveis foram aquelas que sobreviveram a todo o período de integração ( $10^4$  períodos orbitais do binário).



**Figura 2.5:** Órbitas Tipo-S e Tipo-P em sistemas binários, uma figura esquemática de regiões estáveis. Ao redor dos corpos massivos há regiões estáveis do Tipo-S, para além dos corpos, onde considera-se um corpo orbitando o centro de massa do sistema, há regiões estáveis para órbitas Tipo-P (DVORAK *et al.*, 1989).

Dos resultados, expressões empíricas foram determinadas para o cálculo do semi-eixo maior crítico (SMC) nos dois casos: para órbitas Tipo-S, quando o SMC a ser levado

em conta é o semi-eixo maior máximo dentro da zona estável, e, para órbitas Tipo-P onde o SMC seria aquele valor de semi-eixo maior no limite entre o que seria o fim da zona instável e o início da região estável para partículas orbitando a ambos os corpos. Contudo, os autores ressaltam no decorrer da investigação, que não existe uma demarcação para separar as regiões estáveis e instáveis. Eles acreditam ser possível que, se as simulações fossem prolongadas, a instabilidade surgiria.

Nagy et al. (2006) fizeram um estudo do espaço de fase do sistema Plutão-Caronte, considerando como parâmetros o semi-eixo maior, a excentricidade e a inclinação. Foram estudadas as regiões interna e externa ao binário, usando três diferentes métodos, os quais, segundo os autores, são complementares. Eles focaram o estudo da região externa dada à relevância na consideração das posições dos recém descobertos satélites, Hidra e Nix, únicos satélites conhecidos que têm suas órbitas descritas em Tipo-P.

Os resultados acerca da estabilidade em relação à região externa apresentados por eles estão de acordo com a previsão feita através da fórmula empírica apresentada em Holman e Wiegert (1999), cujo valor mínimo do semi-eixo maior para o início da região estável para órbitas Tipo-P é de  $\cong 40253 \text{ km}$ . Já, quanto aos resultados para a região interna, os autores comentam não terem encontrado órbita estável ao redor de Caronte, o que é discordante da fórmula de Holman e Wiegert (1999), que prevê uma região estável para órbitas Tipo-S até o valor de semi-eixo maior de  $\cong 2620 \text{ km}$  dada a razão de massa de Caronte-Plutão (0.870).

Na investigação aqui proposta, um estudo semelhante ao de Holman e Wiegert (1999) é realizado para verificar essas distintas regiões de estabilidade, de escape e de colisão, como será visto no Capítulo 5. Porém, paralelamente a esta investigação, a estabilidade do sistema também é analisada por meio da Superfície da Secção de Poincaré no Capítulo 6, análogo ao que foi feito por Winter e Vieira Neto (2002).

O trabalho de Winter e Vieira Neto (2002) explorou as regiões distantes de estabilidade ao redor da Lua. Foram numericamente pesquisados o tamanho e a localização dessas regiões. O modelo adotado foi o caso planar, circular, restrito de

três corpos — foram consideradas estáveis (permanência por longos períodos) aquelas partículas que ficam no sistema por  $10^4$  períodos orbitais. O monitoramento foi feito pelo cálculo da energia da órbita osculadora e os resultados apresentados em termos de diagramas — grades do semi-eixo maior pela excentricidade — indicando a região explorada e as condições iniciais (os outros elementos orbitais foram mantidos constantes). A partir destas grades identificaram-se duas regiões de estabilidade,  $h_1$  e  $h_2$ , que foram então estudadas fazendo uso da técnica da Superfície da Secção de Poincaré.

O próximo capítulo é dedicado a expor o modelo do problema restrito de três corpos considerado nas simulações realizadas neste estudo e demais tópicos relacionados a este. Também aí se introduz a teoria sobre a Superfície da Secção de Poincaré. Tudo isto para melhor entendimento dos resultados que compõem os Capítulos 5 e 6.

## CAPÍTULO 3 A DINÂMICA ENVOLVIDA

Este capítulo trata do estudo dos métodos empregados na investigação das regiões estáveis para o sistema Plutão-Caronte, o que possibilitará melhor entendimento dos capítulos seguintes. São tratados aqui: o Problema Restrito de Três Corpos, a Constante de Jacobi, as Curvas de Velocidade Zero e Superfície da Secção de Poincaré.

### 3.1 O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Para modelar o movimento de uma partícula, orbitando o sistema Plutão-Caronte considera-se a interação gravitacional dos três corpos dentro da dinâmica do problema restrito. No problema restrito de três corpos, negligencia-se a massa do terceiro corpo, pois a sua massa em relação aos outros dois corpos, os primários, é insignificante. Inicialmente, trata-se do problema circular restrito de três corpos, que é o modelo utilizado para estabelecer as curvas de velocidade zero e para a obtenção da Superfície de Secção de Poincaré (SSP); neste capítulo também serão analisadas a Constante de Jacobi, as Curvas de Velocidade Zero, fazendo-se uma associação para o caso Plutão-Caronte.

No presente caso, os primários estão em órbitas elípticas em torno da origem alocada no centro de massa do sistema, embora a excentricidade de Caronte em relação a Plutão seja pequena ( $e=0.0076$ ). A inclusão da excentricidade para descrição do movimento dos primários é uma generalização do caso dos três corpos: a diferença entre o Problema Circular Restrito de Três Corpos (PCR3C), o modelo adotado, e o caso do Problema Elíptico Restrito de Três Corpos (PER3C) dá-se pelo fato da distância entre os primários não mais ser constante. Ainda, quando tratado no sistema rotacional, este apresenta rotação não uniforme, pois a velocidade do primário que determina a direção do eixo  $x$  (sistema girante) apresenta variações, sendo superior no pericentro e inferior no apocentro — 2ª Lei de Kepler. No entanto, é válido frisar que embora a órbita do corpo secundário seja excêntrica, a influência desta excentricidade não é significativa (como mostrado no Capítulo 5).

### 3.1.1 Problema Circular Restrito de 3-Corpos: breve recapitulação

No Problema Circular Restrito de Três Corpos, as equações do movimento de uma partícula ao redor de um corpo central, perturbada por um segundo corpo são dadas, no sistema sinódico, rotacionando com o movimento médio do satélite, de um modo mais simplificado, pelo gradiente de uma função escalar  $U$  (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad e \quad , \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.2)$$

tendo  $U = U(x, y)$  dado por:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (3.3)$$

sendo que  $n$  é o movimento médio do segundo corpo em relação ao primeiro (normalizando o sistema em relação ao movimento do satélite o valor de  $n$  será igual a 1), e ainda:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 & e & & r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 ; \\ \mu_1 &= 1 - \mu \quad , \quad \mu_2 = \mu & e & & \mu &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

dado que  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos primários e  $r_1$  e  $r_2$  são, respectivamente, as distâncias da partícula ao primeiro corpo e ao segundo corpo.

Na equação (3.3), o termo  $x^2 + y^2$  corresponde ao potencial centrífugo do sistema e  $1/r_1$  e  $1/r_2$  são relativos ao potencial gravitacional.

Os termos  $+2n\dot{x}$  e  $-2n\dot{y}$  das equações (3.1) e (3.2) são chamados de termos da aceleração de Corioli no sistema rotacional, que é devido à correções em consideração à mudança do sistema inercial para o rotacional.

$U$  é chamado de “pseudopotencial” — função escalar — da qual algumas acelerações experimentadas por uma partícula no sistema rotacional podem ser derivadas (MURRAY; DERMOTT, 1999).

### 3.1.2 A Constante de Jacobi

Multiplicando-se a equação (3.1) por  $\dot{x}$  e a equação (3.2) por  $\dot{y}$ , e somando-as, tem-se:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU}{dt} \quad (3.4)$$

que integrada dará,  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C_j$ , sendo  $C_j$  a constante da integração.

Considerando a equação (3.3):

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (3.5)$$

lembrando que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$  (o quadrado da velocidade da partícula no sistema rotacional), reescreve-se  $v^2 = 2U - C_j$ . Com isto, sempre  $2U \geq C_j$ , caso contrário a velocidade será complexa.

Assim demonstra-se que  $C_j = 2U - v^2$  é a constante de movimento, chamada de Integral de Jacobi, ou constante de Jacobi, segundo Murray e Dermott (1999) algumas vezes também chamada de “Integral da Energia Relativa”. É importante notar que esta não é uma integral de energia, pois, no problema restrito, nem a energia, nem o momento angular são conservados.

A integral de Jacobi é a única integral do PCR3C e isto significa que o problema não pode ser resolvido analiticamente para os casos em geral, isto é, a constante de Jacobi não é suficiente para determinar uma solução exata para o movimento dos corpos, mas possibilita a determinação daquelas regiões nas quais a partícula não pode permanecer — vêm daí as Curvas de Velocidade Zero.

### 3.1.3 Curvas de Velocidade Zero

O maior uso da Constante de Jacobi dá-se na localização do espaço onde a velocidade da partícula é zero. Neste caso tem-se:

$$2U = Cj, \text{ ou,} \quad (3.6)$$

$$n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) = Cj \quad (3.7)$$

A equação (3.7) possibilita definir um conjunto de curvas no plano  $xy$ , ou seja, regiões onde a partícula pode estar confinada e regiões nas quais a partícula não estará, permitindo deste modo analisar seus possíveis movimentos como é apresentado na sub-seção 3.1.3.2 .

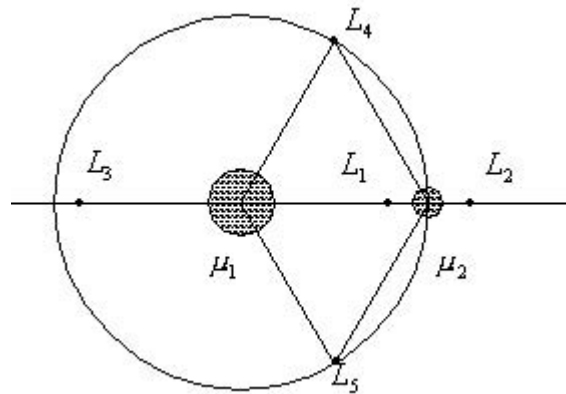
Uma ressalva deve ser feita para melhor explicar essas curvas de velocidade zero, esta observação é pertinente aos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos, sub-seção 3.1.3.1.

### 3.1.3.1 Os pontos de equilíbrio Lagrangianos

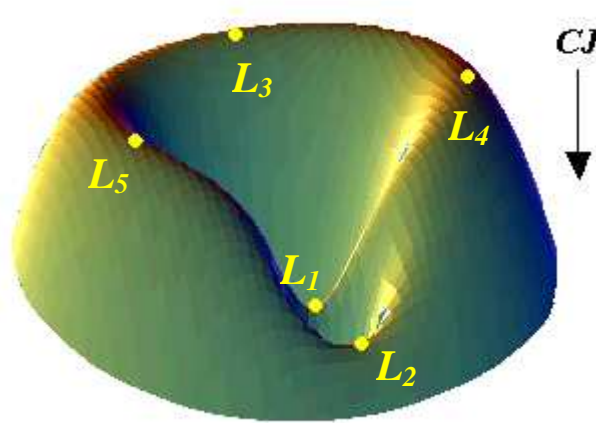
Quando no sistema sinódico forem considerados os pontos onde tanto a velocidade, quanto à aceleração da partícula são nulas, encontrar-se-ão os chamados pontos de equilíbrio Lagrangianos (MURRAY; DERMOTT, 1999).

São cinco estes pontos de equilíbrio, sendo dois pontos estáveis e três instáveis – no tocante aos pontos estáveis há a particularidade para razões de massa superiores a razão de massa crítica ( $\mu_{crítico} = 0.0385$ ), que será explanada no próximo capítulo e é relevante para o caso Plutão-Caronte. Os pontos instáveis são colineares e denotados por  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , enquanto que os pontos estáveis,  $L_4$  e  $L_5$ , estão localizados de modo a formar triângulos equiláteros com a os corpos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , os dois outros vértices. As localizações destes pontos são mostradas na Figura 3.1.

A Figura 3.2 ilustra os Pontos de Equilíbrio Lagrangianos associados à superfície de velocidade zero para uma razão de massa  $\mu_2 = 0.13$ . Os pontos  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são considerados pontos de sela na superfície e correspondem a valores críticos de  $Cj$  como será visto adiante.



**Figura 3.1:** Localização dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos: triangulares ( $L_4$  e  $L_5$ ) e colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) em relação as duas massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .



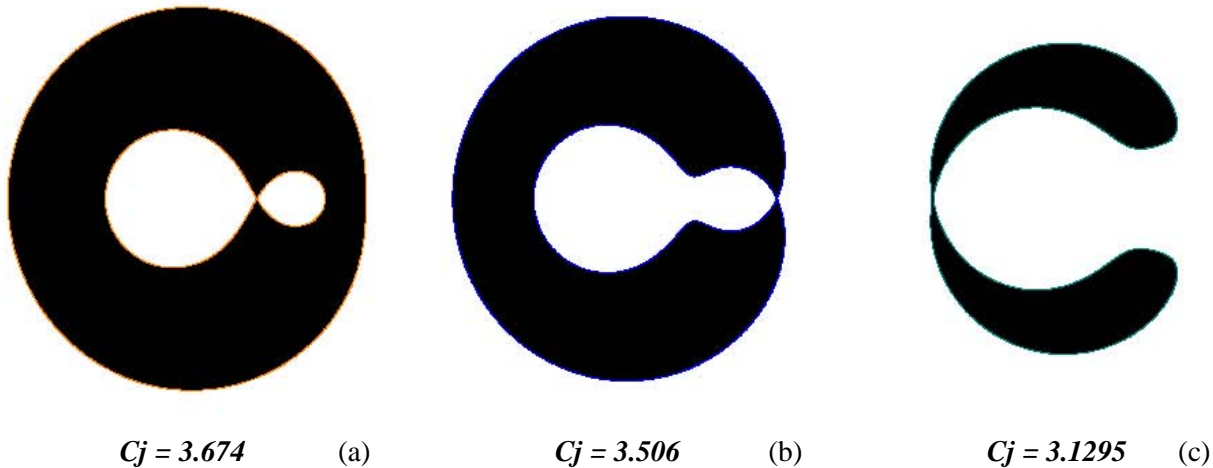
**Figura 3.2:** A superfície tri-dimensional definida por  $C_j = 2U$  e a localização dos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos para  $\mu_2 = 0.13$ , a mesma de Plutão-Caronte. Os pontos  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são todos pontos de sela na superfície.

### 3.1.3.2 Os valores de $C_j$ associados às regiões proibidas e aos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos

São apresentados três valores de  $C_j$  (3.674, 3.506, 3.1295) associados às regiões proibidas e aos Pontos de Equilíbrio Lagrangianos — ver a Figura 3.3 — isto para a razão de massa igual à de Plutão-Caronte ( $\cong 0.13$ ).

Fazendo uma análise das regiões proibidas para os diferentes valores de  $C_j$  pode-se dizer que, para valores acima de 3.674, as partículas permanecerão somente ao redor de um dos corpos, pois a Figura 3.3(a) indica justamente o ponto de valor mínimo para  $C_j$  sendo ainda restrita a região do ponto  $L_1$ . As figuras na seqüência, (b) e (c), apresentam estes valores de  $C_j$  para além dos quais será permitido a partícula vir a

orbitar também, em ordem,  $L_2$  e  $L_3$ . O valor para o qual aparece uma pequena região proibida em torno de  $L_{4,5}$  é  $C_j = 2.887$ .



**Figura 3.3:** Curvas de velocidade zero para diferentes valores de  $C_j$ , as curvas são os contornos coloridos das regiões proibidas (área escura) para razão de massa de Plutão-Caronte. Os valores de constante de Jacobi assumidos foram aqueles correspondentes à abertura das regiões proibidas para o movimento ao redor dos pontos de equilíbrio Lagrangianos.

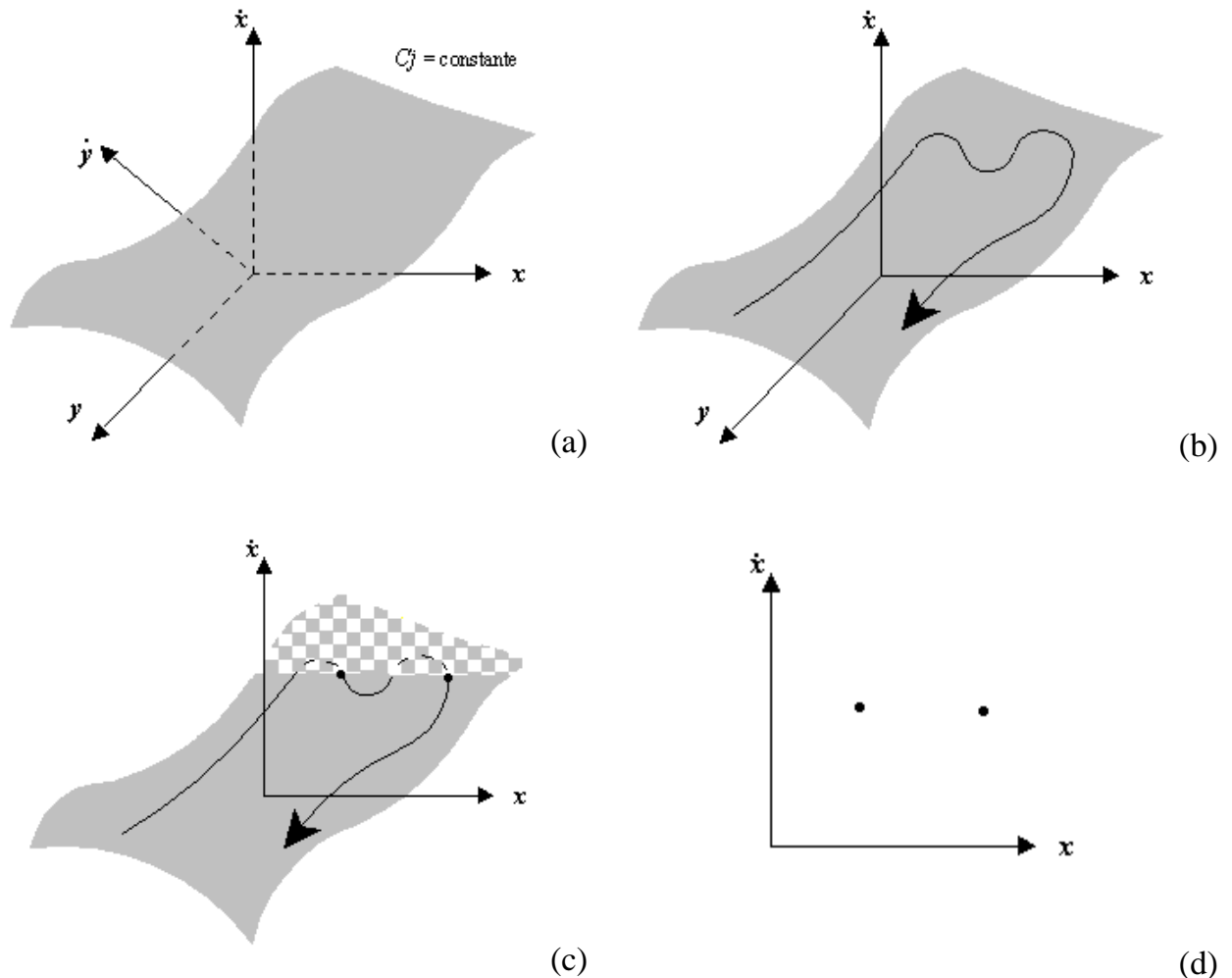
## 3.2 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ

A posição  $(x, y)$  e a velocidade  $(\dot{x}, \dot{y})$  de uma partícula teste em um instante qualquer permitem a determinação dos elementos orbitais osculadores e projetam um ponto no espaço de fase quadri-dimensional. A determinação de pontos neste espaço de fase, quando a posição e a velocidade são tomadas como coordenadas, representa o movimento desta partícula teste, permitindo prever os seus movimentos, o que não seria possível no espaço de configuração.

A existência da Constante de Jacobi no problema circular restrito de três corpos implica na existência de uma superfície tri-dimensional neste espaço de fase quadri-dimensional, ou seja, uma superfície formada por pontos de iguais valores da integral do movimento — ver superfície na Figura 3.4(a).

Para um valor fixo de  $C_j$  somente três dentre as quatro quantidades são necessárias,  $x$ ,  $y$  e  $\dot{x}$ , já que  $\dot{y}$  pode ser determinado pela equação (3.7) — ver Figura 3.4(b). Por conseguinte, definido um plano, como por exemplo  $y=0$  (Figura 3.4(c)), o resultado

no espaço de fase tri-dimensional pode ser visto cada vez que a partícula tem  $y$  de valor igual ao plano, ou seja, a cada passagem da partícula por este plano para um  $\dot{y} > 0$ , levando a determinar pontos no plano  $x \dot{x}$  (Figura 3.4(d)) que possibilitam ser dada uma interpretação às figuras conseqüentes e com o passar do tempo prever a dinâmica da partícula.

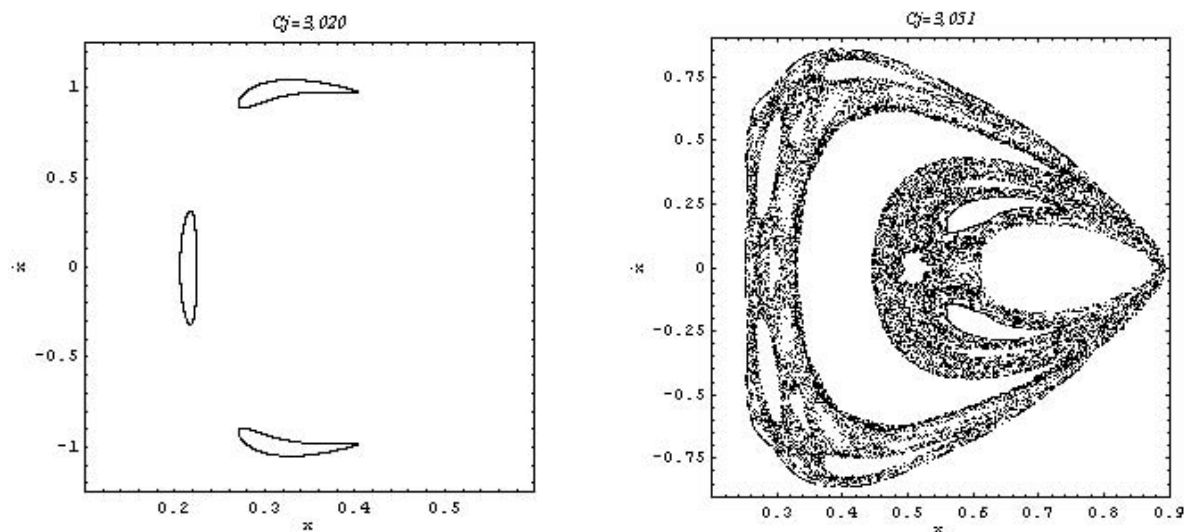


**Figura 3.4:** Determinando a Secção de Poincaré. (a) A superfície tri-dimensional formada de pontos de iguais  $C_j$  no espaço de fase quadri-dimensional. (b) A existência da  $C_j$  significa que a trajetória da partícula teste está sobre esta superfície particular no espaço de fase; é necessário que se conheçam apenas  $x$ ,  $y$  e  $\dot{x}$ , já que  $\dot{y}$  pode ser determinado através do valor de  $C_j$ . (c) Um ponto é desenhado cada vez que a trajetória cruza o plano que passa em  $y=0$  com um sinal fixo para  $\dot{y}$ . (d) O resultado é uma seqüência de pontos no plano  $x \dot{x}$  (adaptado de WINTER; MURRAY, 1994).

Esse é o método da Superfície da Secção de Poincaré, ou Mapa de Poincaré, e essa é a técnica usada para ilustrar regiões regulares e caóticas para o caso do problema circular restrito de três corpos (WINTER; MURRAY, 1994). Normalmente o mapa da Secção de Poincaré é determinado através de cálculos numéricos ou através de

métodos analíticos aproximados (MONTEIRO, 2002) e tem sido amplamente utilizado para determinar a localização e o tamanho das regiões regulares e caóticas no espaço de fase do problema circular restrito de três corpos (WINTER; VIEIRA NETO, 2002).

A superfície para a determinação do Mapa de Poincaré é uma escolha. Neste estudo, as constantes de Jacobi consideradas até então para integração e produção destes mapas, foram aquelas referentes aos valores apresentados em 3.1.3.2. Os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  são computados cada vez que a trajetória atravessa o plano  $y=0$  com  $\dot{y} > 0$ . A técnica da superfície da secção é eficiente para determinar a natureza regular ou caótica da trajetória. Abaixo são mostrados mapas que representam uma secção estável e uma caótica — Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Mapas de Poincaré. (a) Para  $C_j = 3,02$  e  $x_0 = 0,205$  a órbita é estável, quase-periódica. (b) Para  $C_j = 3,051$  e  $x_0 = 0,445$  a órbita é caótica (reprodução de WINTER;MURRAY, 1994).

Na Secção de Poincaré, órbitas quase-periódicas aparecem como curvas fechadas bem definidas e as órbitas periódicas são pontos isolados dentro dessas “ilhas”. Qualquer espalhamento de pontos na secção implica que a trajetória é caótica.

É importante salientar que o uso da Secção de Poincaré só é possível quando o caso for considerado como sendo um problema restrito circular planar de três corpos. Se for assumida a excentricidade do segundo corpo como diferente de zero, deverá ser realizado um trabalho analítico antes do emprego do método, como realizado por Roig e Ferraz-Mello (1999).

O capítulo seguinte é sobre a estabilidade de uma partícula na região próxima aos pontos de equilíbrio triangulares. É feita uma análise das trajetórias das partículas próximas ao satélite (órbitas de ferradura) e próximas aos pontos de equilíbrio triangulares, mostrando a influência da razão de massa na estabilidade do terceiro corpo.

## CAPÍTULO 4 EVOLUÇÃO DAS ÓRBITAS PRÓXIMAS AOS PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS

Anteriormente à determinação das regiões nas quais as partículas seriam candidatas a apresentarem-se estáveis no sistema Plutão-Caronte, onde a razão de massa é de  $10^{-1}$ , o presente capítulo vem apresentar os tipos de trajetórias na proximidade dos pontos de equilíbrio triangulares e nas proximidades do satélite, considerando diferentes razões de massa, isto para salientar a influência da proporção entre as massas dos corpos massivos na dinâmica das partículas que os orbitam.

### 4.1 AS ÓRBITAS PRÓXIMAS AOS PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS

#### 4.1.1 Órbitas de Girino e Ferradura

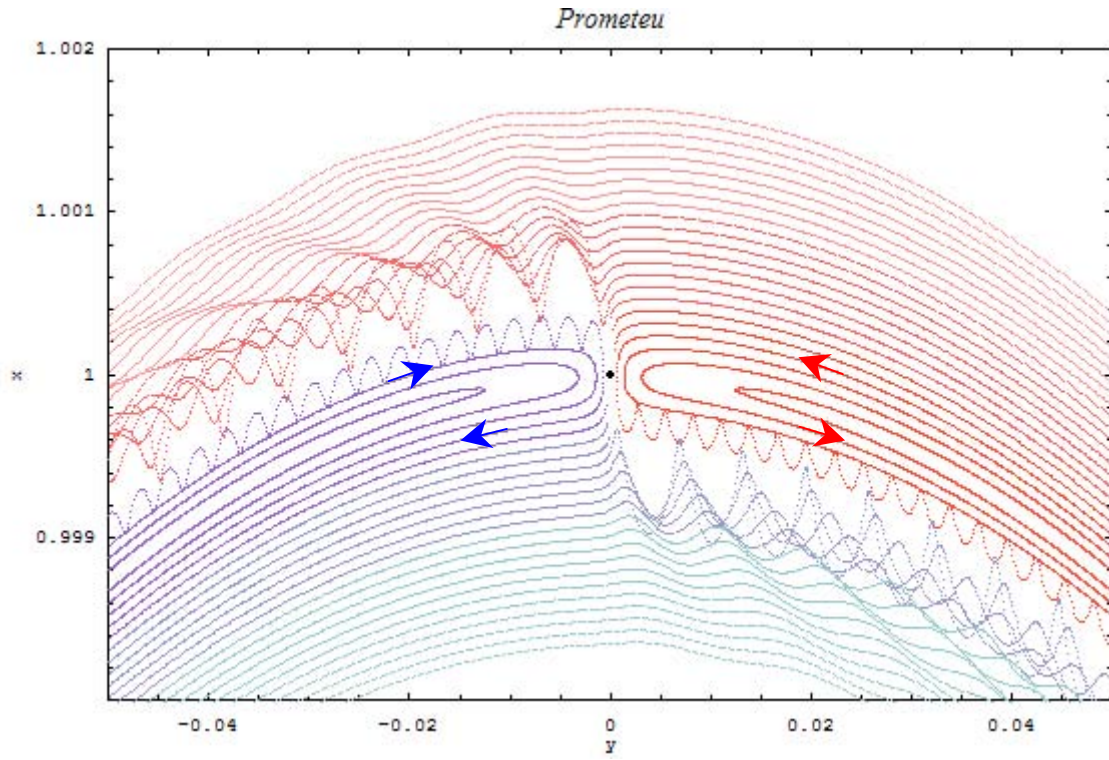
Os regimes de órbitas de girino e ferradura são tidos como mecanismos de confinamento de partículas (MURRAY; DERMOTT, 1999). Diz-se que uma partícula está em órbita de ferradura quando seu movimento, no sistema sinódico, dá-se ao redor dos pontos  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ . Quando o seu movimento é somente ao redor de um dos pontos triangulares diz-se que a partícula está em órbita de girino.

De acordo com a referência feita a Brown<sup>1</sup> (1911 *apud* DERMOTT; MURRAY, 1981), é possível ter órbitas de girino quando  $C_j = 3 + \beta\mu$ , sendo que  $3 \leq \beta \leq 5$ . As órbitas de ferradura são possíveis quando  $C_j = 3 + \alpha\mu^{2/3} + O(\mu)$ , sendo que  $0 \leq \alpha \leq 3^{4/3}$ . No entanto, a configuração destas órbitas está relacionada à estabilidade dos pontos de equilíbrio.

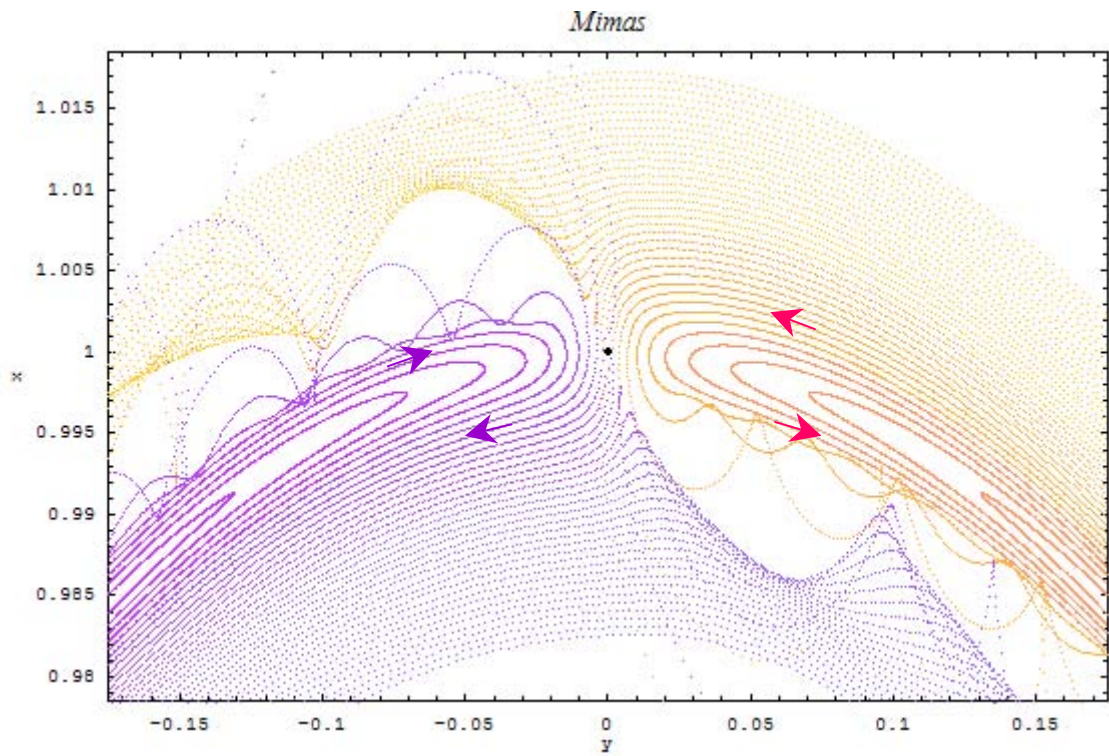
Em Murray e Dermott (1999) consta que para pequenos valores de  $\mu_2$ , a largura radial para o movimento de uma partícula que descreve órbita de ferradura, é dada por:

---

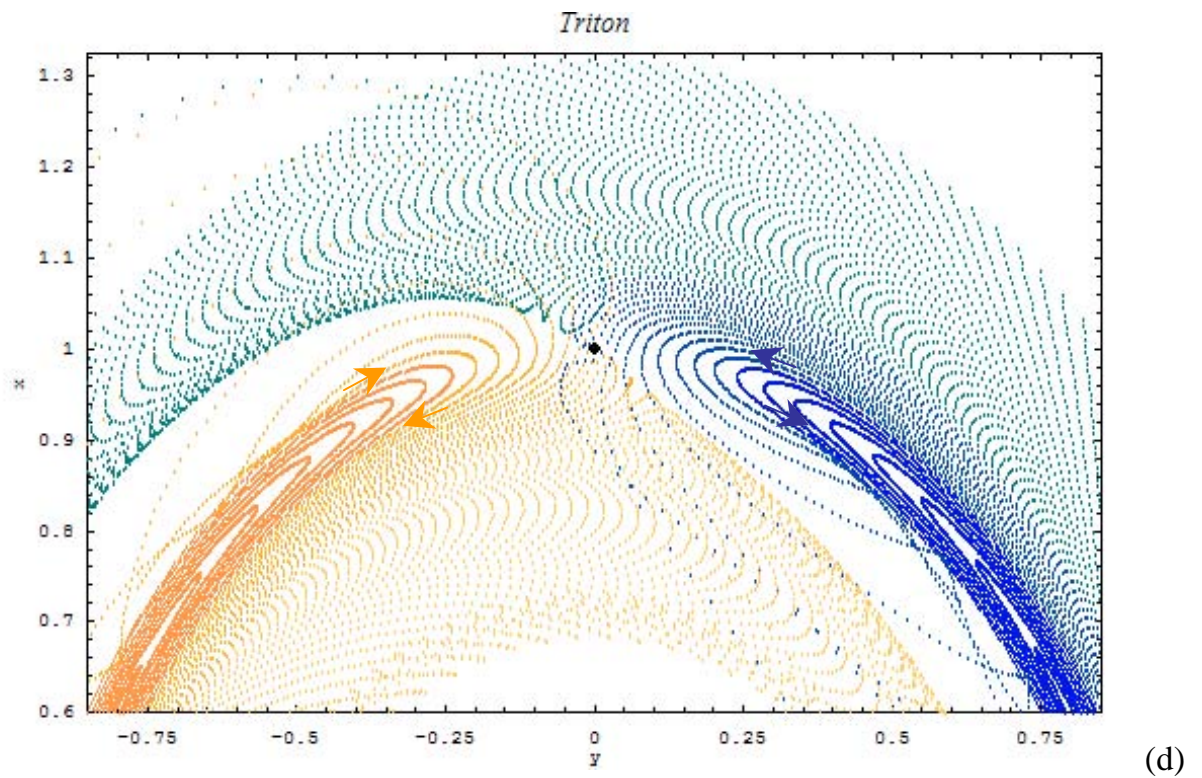
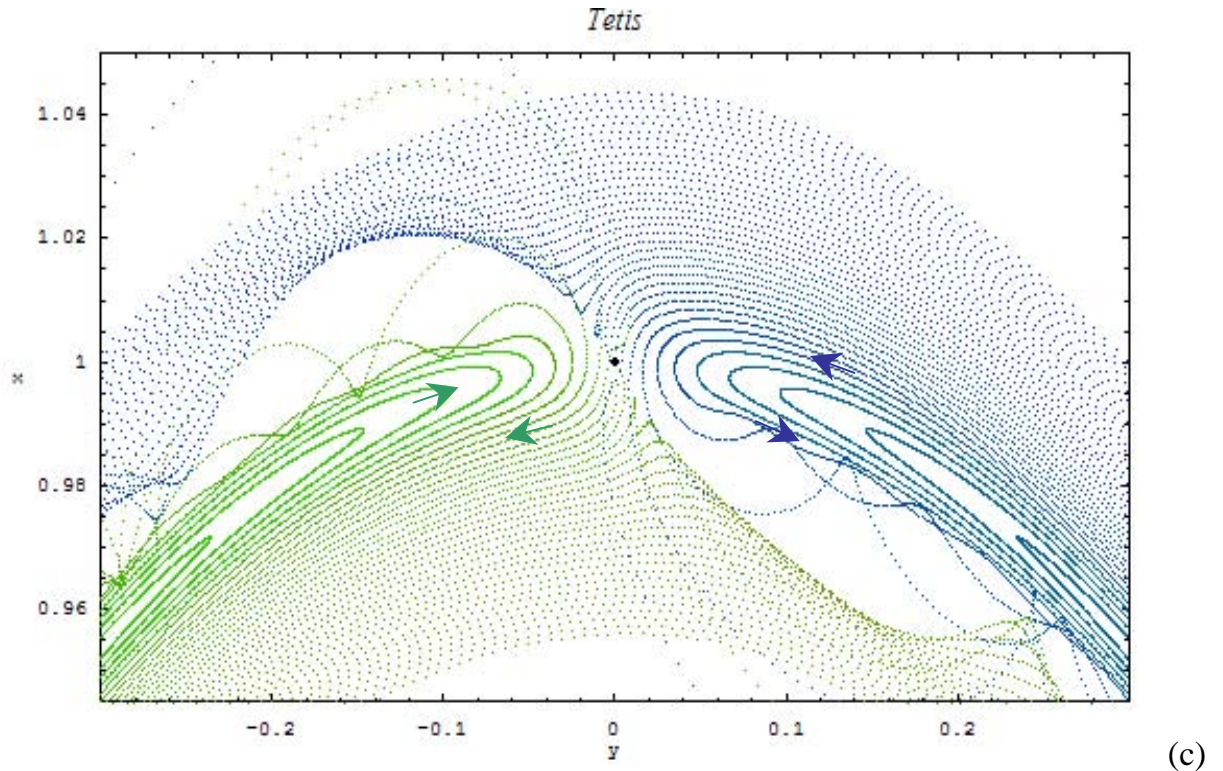
<sup>1</sup> BROWN, E.W. On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies. **Monthly Notices Royal Astronomical Society**. V.71, p. 438, 1911 *apud* DERMOTT; MURRIA, 1981.



(a)



(b)

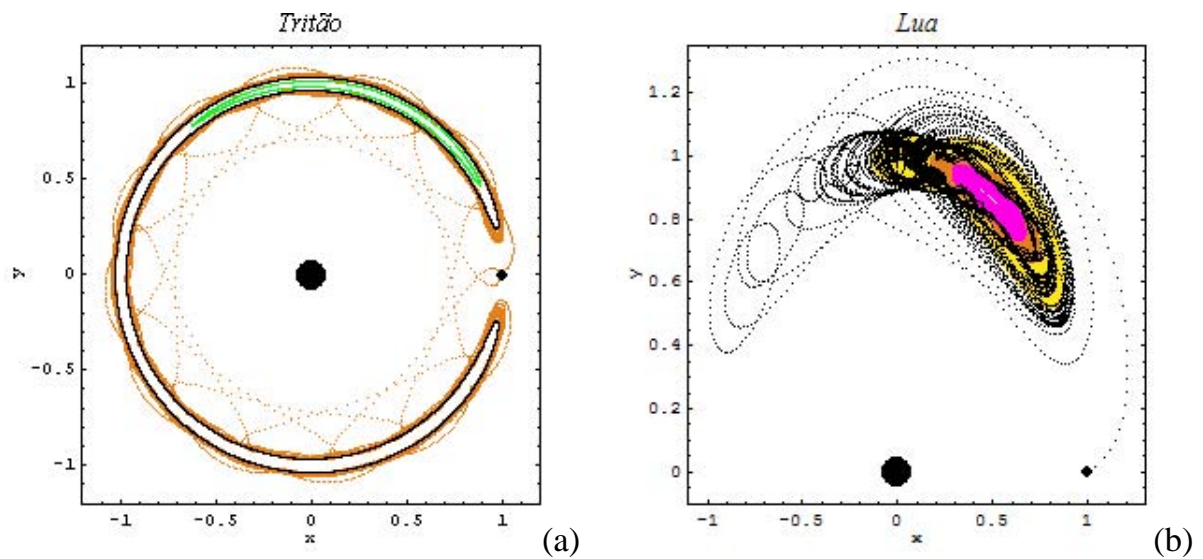


**Figura 4.1:** Detalhes das trajetórias de partículas próximas aos satélites (a) *Prometeu*, (b) *Mimas*, (c) *Tetis*, no sistema Saturniano, e (d) *Tritão* no sistema de Netuno – eixo invertido:  $y \times x$ . As setas indicam o sentido das trajetórias das partículas em órbita de ferradura. As ondas são devidas a perturbação do segundo corpo.

$$\delta r_f = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\mu_2^{1/3} \quad (4.1)$$

onde  $\delta r$  é a largura radial. O limite inferior de  $\alpha$  corresponde aos valores de  $C_j$  no ponto  $L_3$  e o limite superior corresponde aos valores nos pontos  $L_4$  e  $L_5$ .

Quando as partículas orbitam um sistema onde órbitas de ferradura apresentam-se sem grandes oscilações, sua permanência é possível por longos períodos — ver caso da Figura 4.1(a, b, c) para as razões de massa de  $10^{-10}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-6}$ , respectivamente, equivalentes aos sistemas: Saturno-Prometeu, Saturno-Mimas, Saturno-Tétis. Mas para razões de massa maiores foi verificado que as órbitas estáveis por longos períodos são aquelas ferraduras sem oscilações (Figura 4.1(d), Netuno-Tritão).



**Figura 4.2:** (a) Sistema Netuno-Tritão; em verde, órbita de girino, em preto, órbita de ferradura, ambas estáveis para  $10^4$  períodos orbitais. A linha laranja representa uma órbita inicialmente estável (lançada a 13400km além do semi-eixo maior do satélite, aproximadamente na metade da distância entre o semi-eixo maior do satélite e do limite da largura da ferradura dada de acordo com a equação 4.1, entretanto, a partícula colide com o satélite. (b) No sistema Terra-Lua são apresentadas três órbitas de girino, sobrepostas por uma órbita inicialmente estável que também colide.

Na Figura 4.2(a) é apresentado um detalhe do caso Netuno-Tritão, onde ainda consegue-se órbita de ferradura estável por um tempo de integração de  $10^4$  períodos orbitais. Na Figura 4.2(b) é mostrado o caso Terra-Lua, onde vê-se órbitas quase-periódicas estáveis por  $10^4$  períodos orbitais e uma trajetória que inicialmente seria

estável, mas que colide ao longo da integração. Para estes casos já não mais se encontram órbitas estáveis que passem por  $L_3$ .

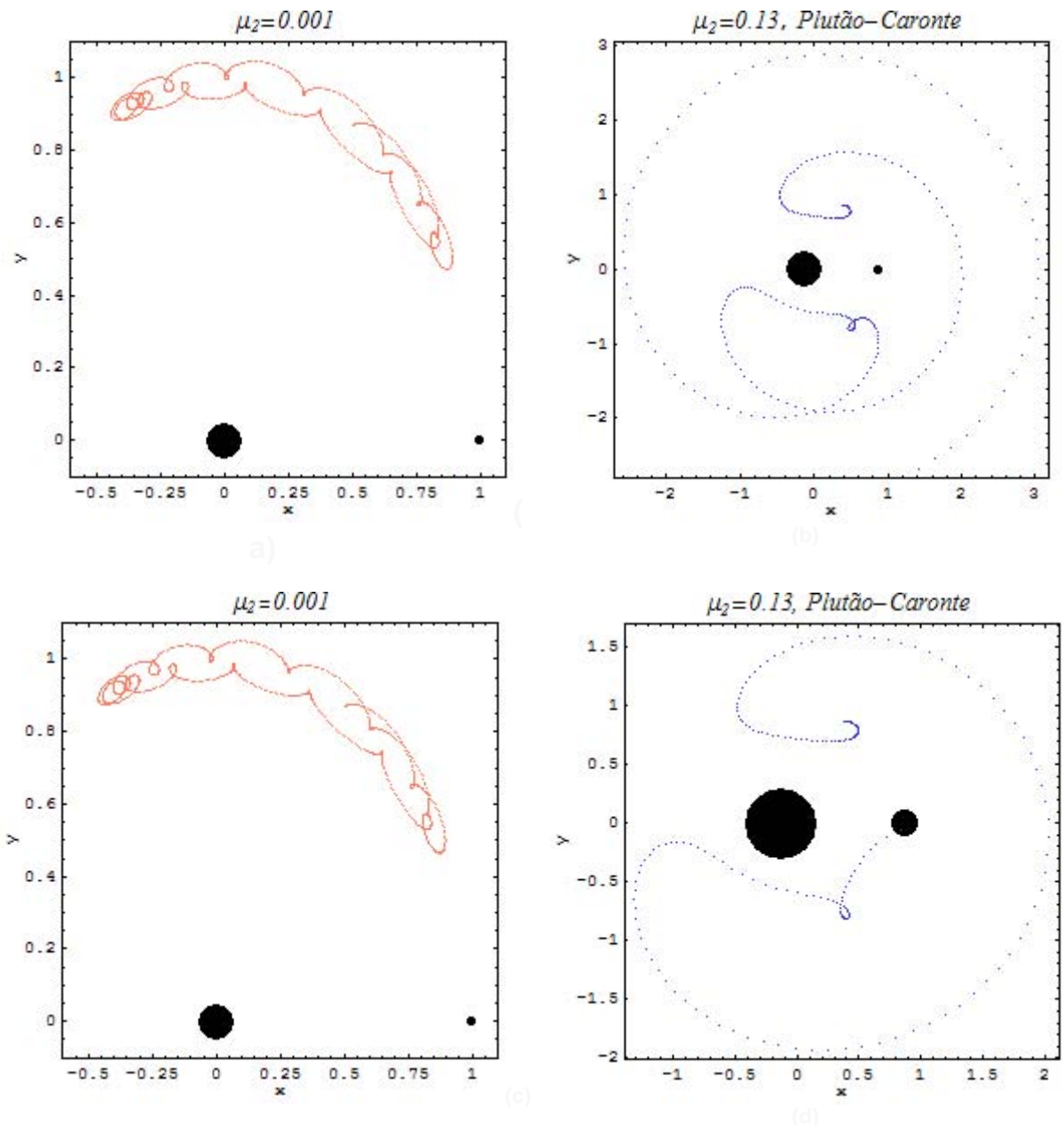
Em relação a estabilidade ao redor dos pontos  $L_4$  e  $L_5$  é apresentado em Szebehely (1967) que a permanência de uma corpo próximo aos pontos de equilíbrio triangulares é separada em diferentes faixas de acordo com a razão de massa do sistema, tendo-se que para o intervalo de  $0.0385 \leq \mu < 0.5$  o movimento é instável. A razão de massa do sistema Plutão-Caronte ( $\mu = 0.13$ ) recai nesta faixa de instabilidade ao redor dos pontos de equilíbrio triangulares. Na próxima seção serão vistas, como por exemplo, a trajetória de uma partícula no sistema Plutão-Caronte e uma comparação com a trajetória de uma partícula orbitando corpos com razão de massa de 0.001.

#### **4.1.2 Considerações a respeito da instabilidade do movimento ao redor dos pontos de equilíbrio triangulares para o sistema de Plutão-Caronte**

Fazendo uma comparação entre a trajetória de uma partícula-teste inicialmente ao redor de um sistema com  $\mu = 0.001$  e uma ao redor do sistema de Plutão-Caronte, considerando os movimentos circulares e baricêntricos (ver Figura 4.3(a, b, c, d)), vê-se que quando a partícula-teste é colocada no ponto  $L_4$ , é notória a instabilidade para o caso Plutão-Caronte. Pois, um pequeno deslocamento de 0.0001 (Figura 4.3(b, d)) o resultado do movimento apresentado pela partícula difere completamente, no caso (b) escapa e no caso (d) colide.

A instabilidade das trajetórias ao redor de Plutão-Caronte era esperado e justifica o que Holman e Wierget (1999) propuseram: que órbitas próximas aos pontos de equilíbrio triangulares não são normalmente de interesse para sistemas binários devido à razão de massa destes serem sempre superiores a 0.038.

Assim sendo, a região próxima aos pontos de equilíbrio triangulares (que são estáveis para a maior parte dos corpos do Sistema Solar) que normalmente seria de interesse a permanência das sondas e poderia conter aglomerados de partículas, não é de interesse devido a instabilidade da região para o caso em questão, o sistema Plutão-Caronte.



**Figura 4.3:** Trajetória de partícula-teste para um sistema com a razão de massa igual a  $\mu = 0.001$  (a) e (c) e para Plutão-Charonte,  $\mu = 0.13$ , (b) e (d), sendo que (a) e (b) apresentam as condições iniciais iguais a  $x = (1/2 - \mu_2) + 0.0065$ ,  $y = \sqrt{3}/2 + 0.0065$  e  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  e (c) e (d) diferente em x e y por uma acréscimo de 0.0001.

Os capítulos seguintes são dedicados à apresentação dos resultados. Sendo que o Capítulo 5 é dedicado a varredura *a x e*, que mostra, através de simulações numéricas de trajetórias, as regiões de estabilidade, de escape e de colisão para um dado intervalo de tempo.

## **CAPÍTULO 5 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS: VARREDURA $a \times e$**

Em 2.2 foi comentado o trabalho de Holman e Wiegert (1999) sobre binários e as órbitas definidas como Tipo-P e Tipo-S para este tipo de sistema. Eles estudam a estabilidade dos corpos a orbitar um dos corpos massivos ou ambos. No presente capítulo, são apresentadas simulações numéricas do movimento de partículas, para o sistema Plutão-Caronte, fazendo analogia com o trabalho por eles desenvolvido, isto para intervalos de semi-eixo maior e de excentricidade para órbitas Tipo-S e Tipo-P.

### **5.1 A VARREDURA: PROJEÇÃO DO SISTEMA**

#### **5.1.1 Considerações sobre o programa**

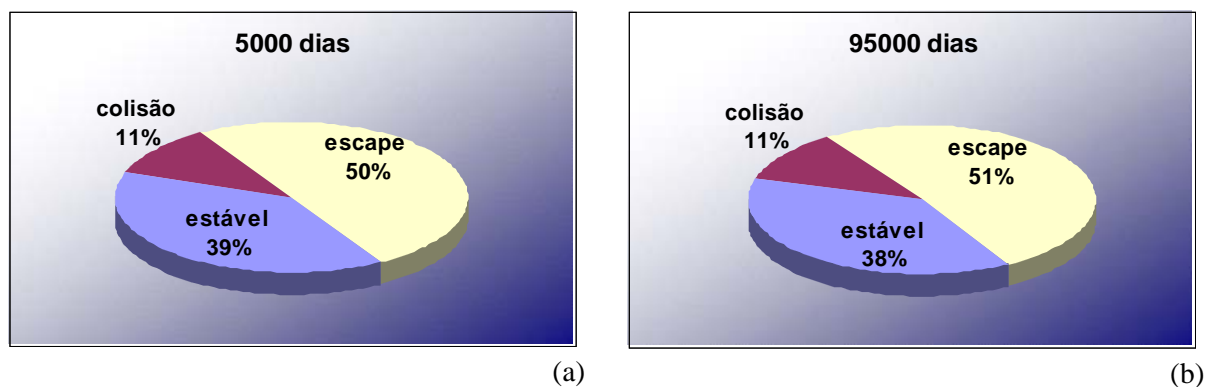
O programa utilizado para a determinação das grades de  $a$  por  $e$  (Programa de N-Corpos, por Vieira Neto e Winter (2001), integrador Radau 15 (EVERHARD, 1985)), permite que seja estabelecido qual corpo será orbitado pelas partículas-teste e qual o corpo perturbador, isto é, podem ser testadas partículas em órbitas Tipo-S tanto para Plutão quanto para Caronte.

Todas as grades apresentadas contam com a integração de aproximadamente oito mil partículas para a região interna (Tipo-S) e de 17850 partículas para a região externa (Tipo-P) com diferentes condições iniciais. Cada uma das partículas sofre interações gravitacionais com Plutão e Caronte (problema restrito de três corpos). Aquelas que permanecem em órbita no domínio dos corpos massivos são ditas estáveis para o período estabelecido; para aquelas que apresentam energia relativa igual ou superior a zero, é dito que escaparam do sistema, e, se a distância da partícula for inferior ao raio do corpo perturbador ou do planeta, é considerada colisão.

Para os limites da varredura da região interna, considerou-se o valor do semi-eixo maior entre 1137 e 19050  $km$ , que é exatamente a distância entre os corpos massivos

subtraídos os raios de cada um deles, e, a excentricidade foi considerada entre 0.0 e 0.5.

O *tempo ótimo* de integração para a região interna, cinco mil dias, foi estabelecido após comparação entre a diferença do número de partículas estáveis para este período de integração e para um período igual a 95 mil dias (um período orbital de Plutão, 248 anos). A variação ficou em torno de um por cento para partículas orbitando Plutão (Figura 5.1) e foi nula para partículas orbitando Caronte.



**Figura 5.1:** Comparação entre o sucedido às partículas na órbita de Plutão para diferentes períodos de integração. Visto que a variação é pequena, igual a 1%, fica estabelecido que 5000 dias pode ser considerado o tempo ótimo para integração.

Para a região externa os limites considerados para os valores de semi-eixo maior estão entre  $38000\text{ km}$  e  $\approx 100000\text{ km}$  (considere 1.5 e 5.5 quando normalizados pela distância Plutão-Caronte), permanecendo o mesmo intervalo na análise quanto à excentricidade. O tempo de integração para essas órbitas Tipo-P foi de 1.5 vezes o período orbital de Caronte, ou seja, cerca de  $95000\text{ dias}$ .

### 5.1.2 Resultados: as grades da região interna

São apresentados primeiramente os resultados para partículas orbitando Plutão. As grades foram montadas para partículas inicialmente no pericentro, desconsiderando e considerando a excentricidade de Caronte (Figura 5.2 (a, b), e também, para partículas inicialmente no apocentro, com e sem excentricidade (Figuras 5.2 (c, d)).

A grade mostra que, para partículas orbitando Plutão, a região estável (vermelha), independentemente da excentricidade, ocorre até um semi-eixo maior de  $8204\text{ km}$  do

planeta; contudo, para excentricidades até 0.2 esta região vai até 9376 *km*. Estes resultados conferem com o valor dado pela fórmula empírica obtida por Holman e Wiegert (1999), a aplicação da fórmula para o caso de Plutão-Caronte leva a um valor de semi-eixo maior crítico (órbitas Tipo-S) de aproximadamente 8200 *km*, para além do qual a estabilidade para  $10^4$  períodos orbitais inexistente. A inclusão da excentricidade de Caronte pouco influi na região estável.

A estabilidade que se dá para excentricidade entre 0.3 e 0.5 e semi-eixo maior entre 10548 e 12306 *km* pode corresponder a partículas capturadas em ressonância.

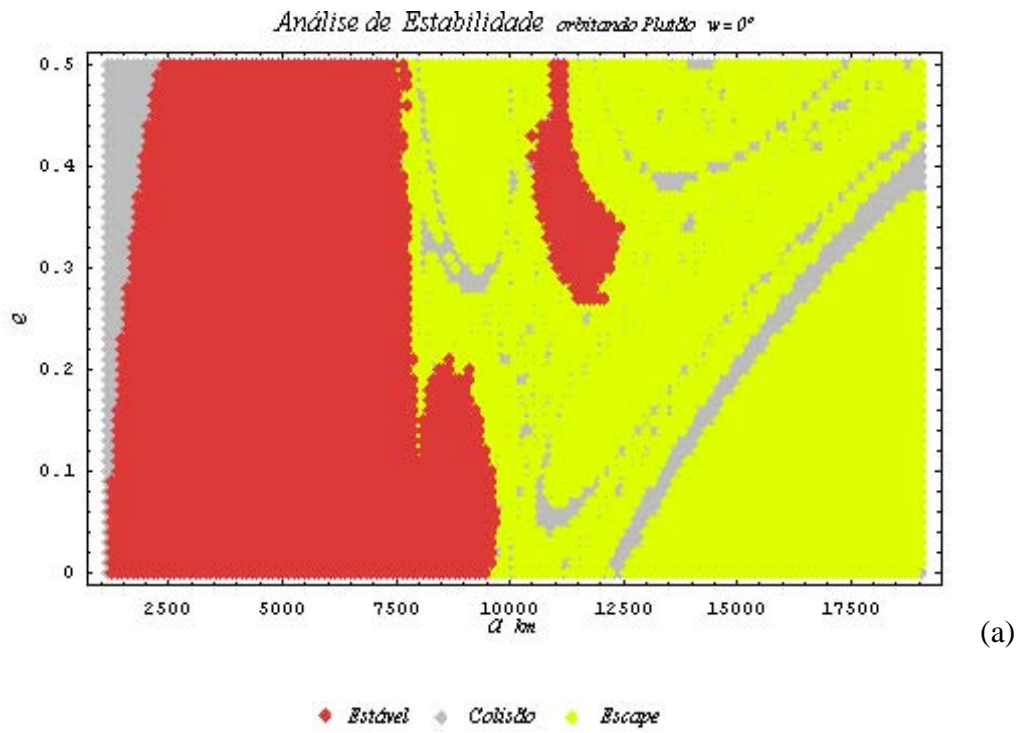
Quanto às colisões apresentadas (região cinza) pode-se considerar colisões com o planeta devido a sua atração gravitacional para os menores valores de semi-eixo maior e certamente o mesmo ocorre para valores de semi-eixo maior em torno de 19000 *km*, próximos a Caronte.

Os resultados a seguir (Figura 5.3) são para partículas orbitando Caronte, neste caso a razão de massa considerada nos cálculos é de 0.87, pois o sistema agora está centrado em Caronte e o segundo corpo passa a ser Plutão.

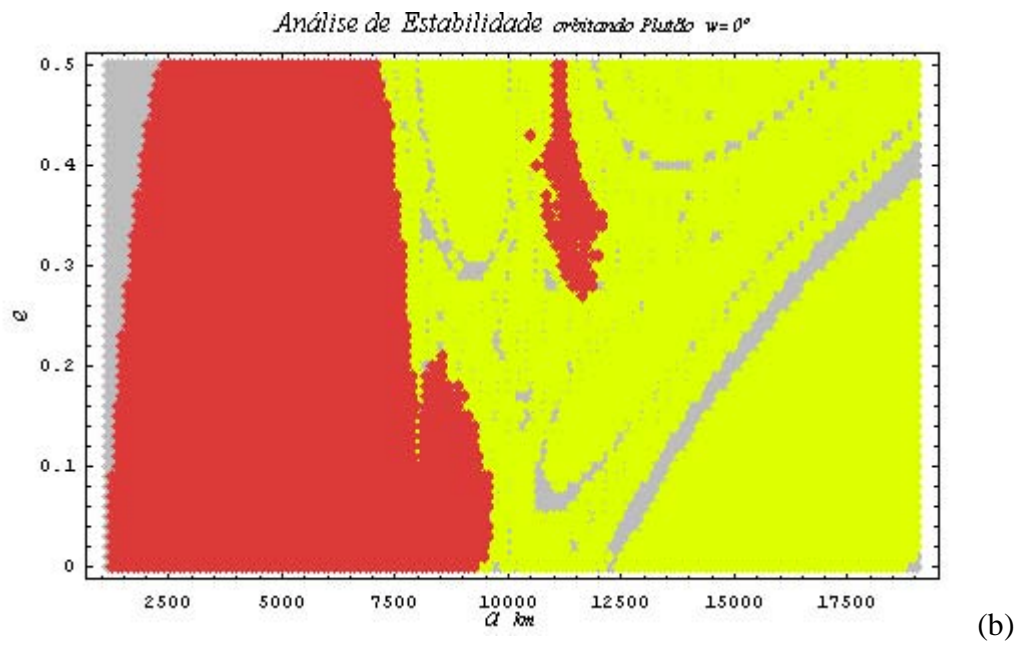
Novamente as grades foram montadas para partículas inicialmente no pericentro, desconsiderando e considerando a excentricidade de Caronte (Figura 5.3 (a, b), e também, para partículas inicialmente no apocentro, com e sem excentricidade (Figura 5.3 (c, d)).

Nas grades relacionadas a Caronte há pouca alteração com a inclusão da excentricidade. As partículas que permanecem estáveis por longos períodos (região em azul) são aquelas que orbitam Caronte a até 2929 *km* de distância, conferindo com a fórmula empírica de Holman e Wiegert (1999), sendo que esta região estável iria até um valor de semi-eixo maior crítico de 2600 *km*. O resultado de Nagy *et al.* (2006) de órbita Tipo-S para Caronte não apresentou região estável.

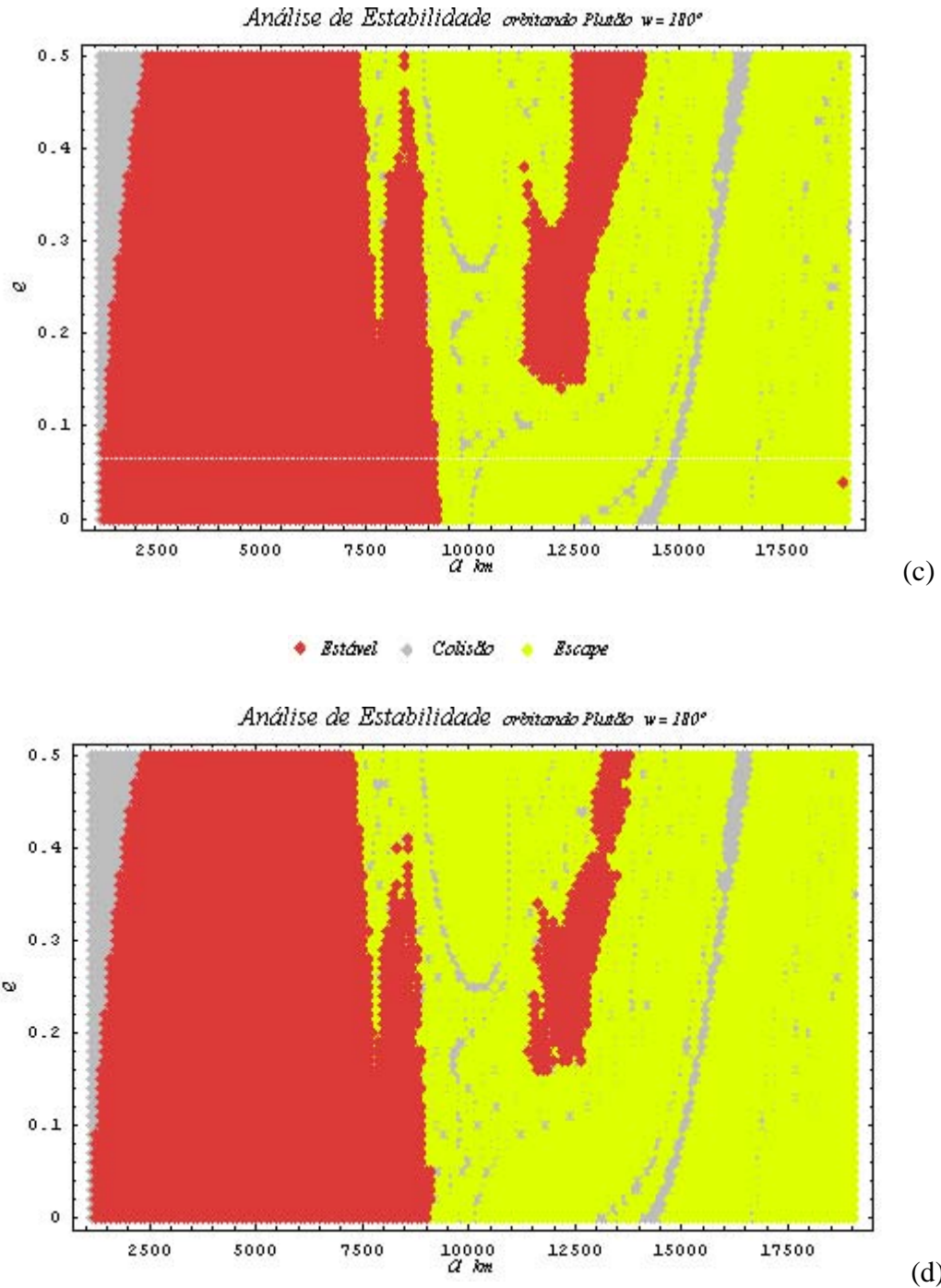
Também para partículas tendo como corpo central Caronte pode-se colocar que as colisões (cinza) para os menores valores de semi-eixo maior estão relacionadas a atração gravitacional exercida pelo satélite (menor que à de Plutão) sobre elas.



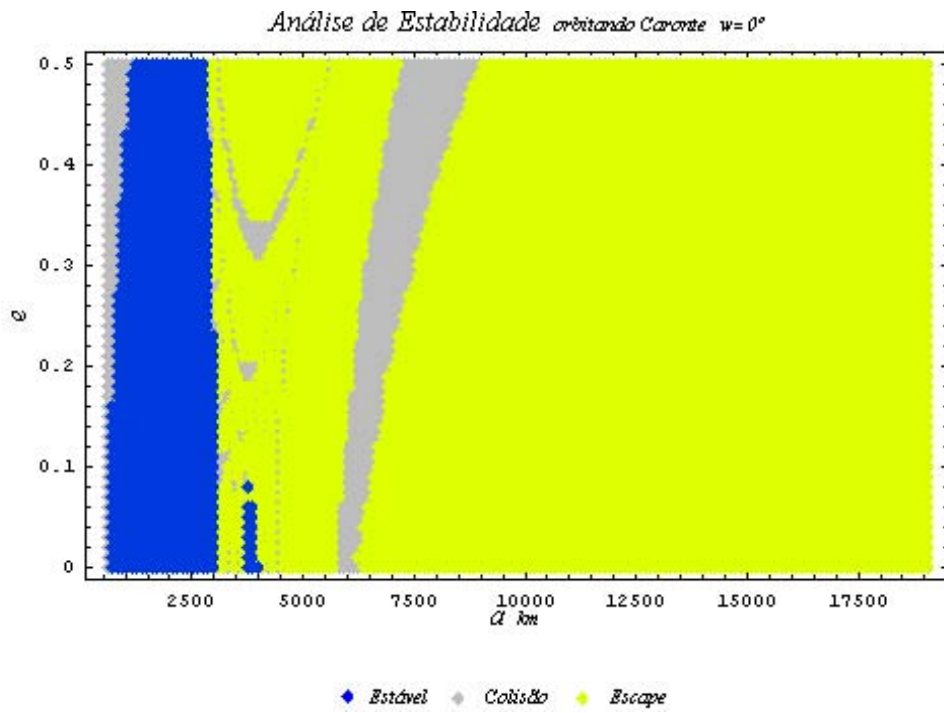
(a)



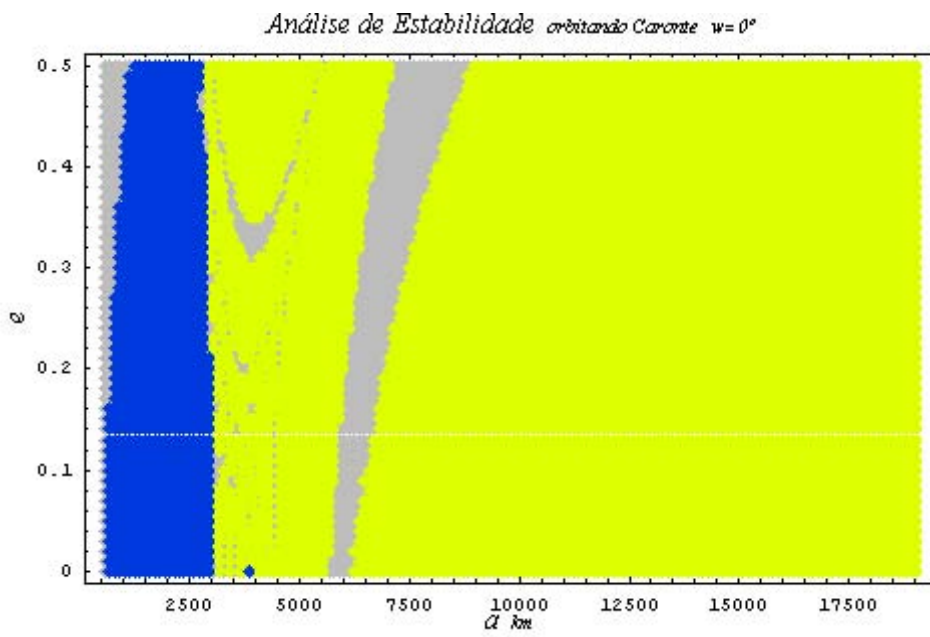
(b)



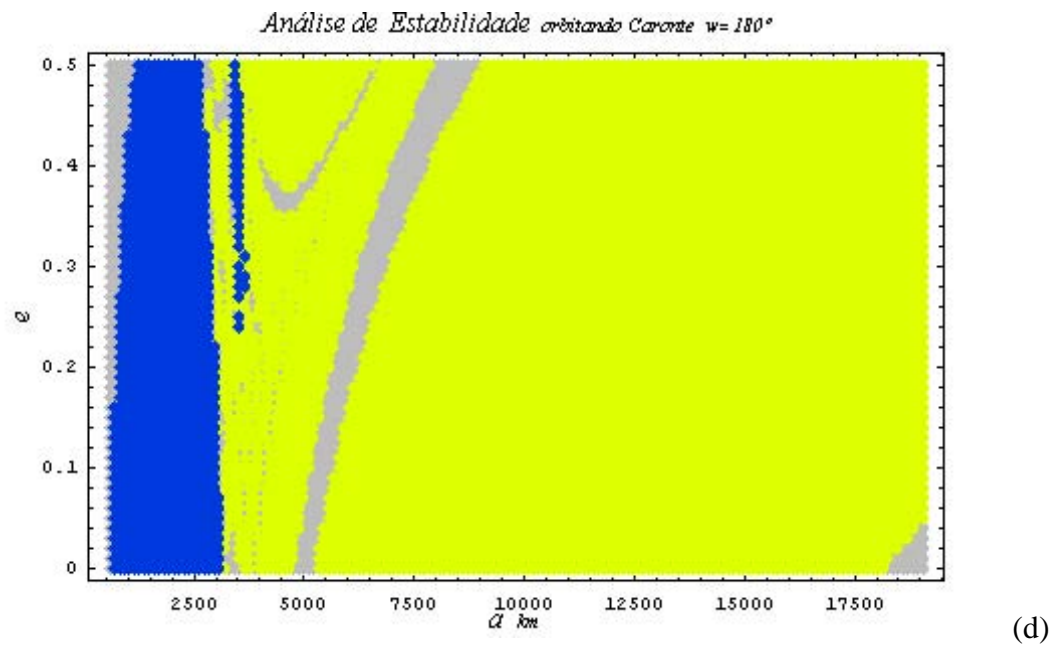
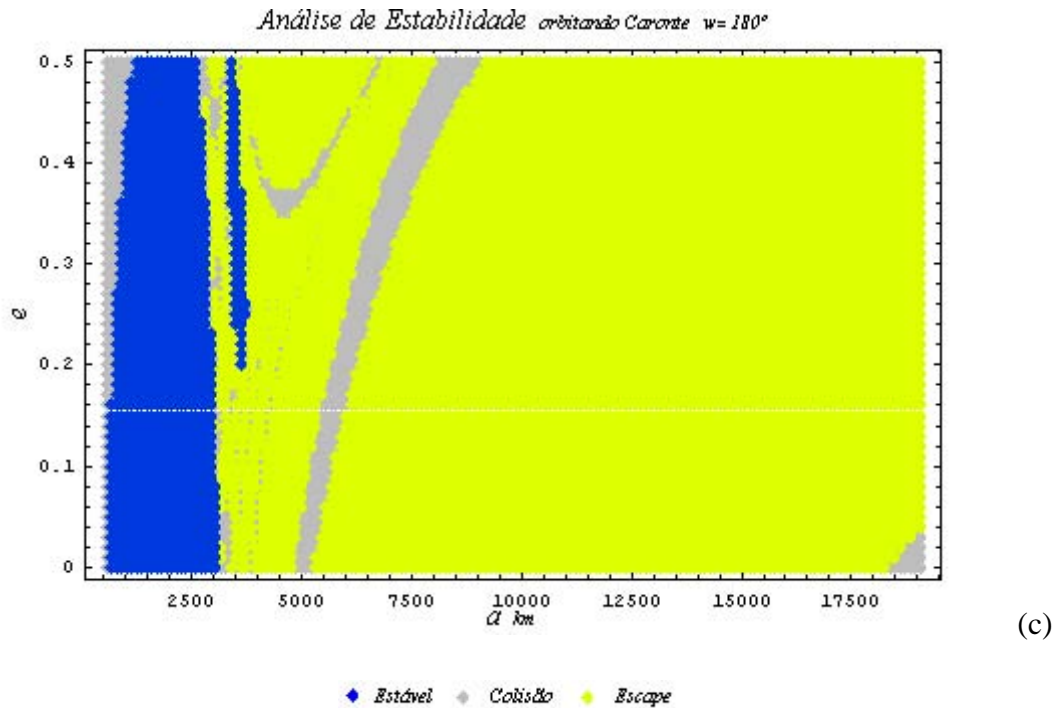
**Figura 5.2:** Varredura para partículas orbitando Plutão, com  $a$  entre 1137 e 19050 km e  $e$  entre 0.0 e 0.5 (a) Partículas inicialmente no pericentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte como nula. (b) Partículas inicialmente no pericentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte igual a 0.0076. (c) Partículas inicialmente no apocentro, cálculos considerando  $e$  de Caronte como nula. (d) Partículas inicialmente no apocentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte.



(a)



(b)



**Figura 5.3:** Varredura para partículas orbitando Caronte, com  $a$  entre 1137 e 19050 km e  $e$  entre 0.0 e 0.5. (a) Partículas inicialmente no pericentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte como nula. (b) Partículas inicialmente no pericentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte igual a 0.0076. (c) Partículas inicialmente no apocentro, cálculos considerando  $e$  de Caronte como nula. (d) Partículas inicialmente no apocentro, cálculos considerando a excentricidade de Caronte.

Observa-se ao se comparar os resultados das grades que as regiões estáveis para partículas orbitando inicialmente Plutão (Figura 5.2(a)) são tidas como regiões de escape para partículas orbitando inicialmente Caronte (Figura 5.3(c)), o que é plausível, pois embora se trate da mesma região interna aos corpos massivos, as condições iniciais das partículas diferem quanto ao corpo central.

### 5.1.3 Resultado: a grade da região externa

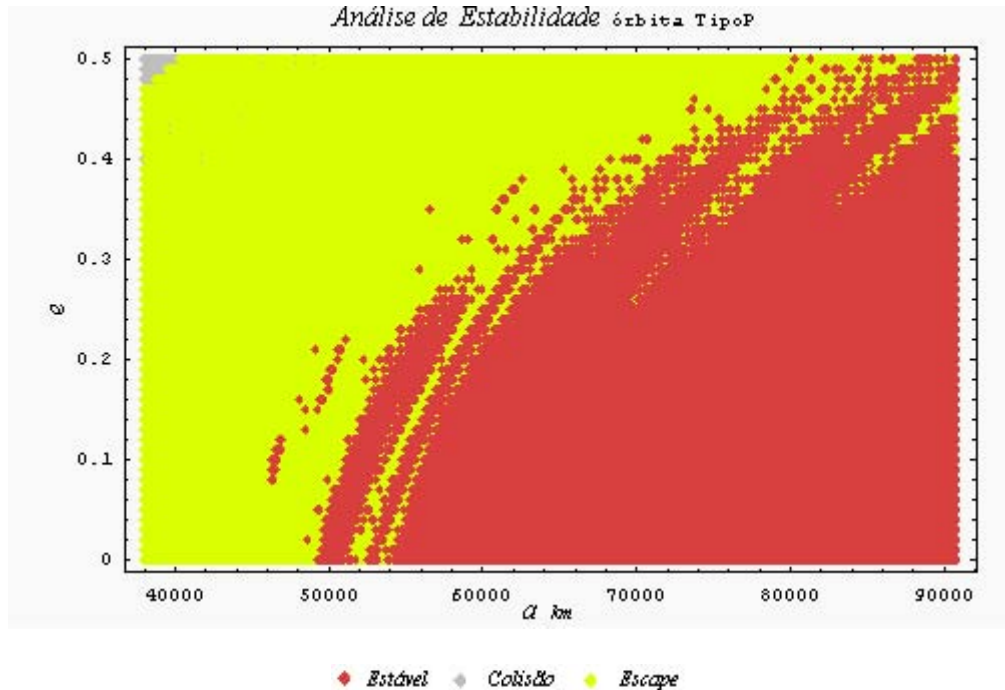
Em relação à região externa, de acordo com a fórmula de Holman e Wiegert (1999), esperava-se encontrar região estável a partir de  $40250 km$ , que é o valor do semi-eixo maior crítico para esta região. É válido lembrar que os autores ressaltam que o limiar entre a estabilidade e a região de instabilidade não é bem definido, e, que se fosse prolongado o período da simulação, a instabilidade poderia surgir para além do binário.

Na Figura 5.4 é apresentado o resultado obtido para a região externa ao sistema Plutão-Caronte. Algumas considerações devem ser feitas. Segue que a simulação foi realizada para partículas tendo como corpo central, Caronte, e o corpo de captura, Plutão. Considerar Caronte como corpo central implica em resultados não precisos, mas se for levado em conta que o tipo de órbita em teste é o Tipo-P, isto é, distante, para partículas orbitando ambos os corpos, os resultados podem ser considerados aproximados.

Há ainda o fato do teste em relação ao escape implicar em imprecisão quanto à região de escape e, por conseguinte, para a região de estabilidade, pois foi tomado Plutão como referência ao escape do sistema.

Considerando que, para a simulação, o escape ocorre quando a órbita ao redor da referência torna-se hiperbólica, pode-se estar a diminuir a região estável ao considerar o teste para apenas um dos corpos, pois há partículas orbitando ora um corpo, ora outro. Essas partículas estariam no limiar da esfera de influência para o Tipo-S. Assim sendo, a primeira faixa de escape não seria totalmente verdadeira, mas para o caso em

questão, estudo de órbitas Tipo-P, o resultado é representativo e confere com o resultado obtido por Nagy *et al.* (2006) para o mesmo sistema.



**Figura 5.4:** Varredura para a região externa – partículas orbitando Caronte, com  $a$  entre 38000 e  $\approx 120000$  km e  $e$  entre 0.0 e 0.5.

O estudo de Nagy *et al.* (2006) deu enfoque à região externa para o sistema Plutoniano; sendo que os resultados apresentados por eles são bastante próximos ao aqui obtido.

O próximo capítulo aborda a estabilidade no sistema Plutão-Caronte através da técnica da Superfície da Secção de Poincaré. A combinação dos dois resultados assegura a determinação da estabilidade ao redor do sistema.

## CAPÍTULO 6 ESPAÇO DE FASE DO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE

*“Um cientista, digno deste nome, especialmente se é um matemático, experimenta em seu trabalho a mesma impressão que um artista: seu prazer é tão grande e da mesma natureza.”*  
Henri Poincaré

O objetivo deste capítulo é analisar as regiões de estabilidade através da Superfície da Secção de Poincaré. Primeiramente, são apresentados os resultados competentes à região interna aos corpos massivos e, na sequência, os referentes à região externa.

### 6.1 CONSIDERAÇÕES

Em 3.1.1 o problema planar circular restrito de três corpos foi estudado. Este modelo é utilizado para estabelecer as curvas de velocidade zero e as Superfícies de Secções de Poincaré que serão apresentadas neste capítulo em acordo com a teoria do Capítulo 3.

Para gerar as Superfícies de Secções de Poincaré, foram utilizados os programas *CRISS.f (Chaotic Regions of the Inner Solar System)* e *CROSS.f (Chaotic Regions of the Outer Solar System)* por Winter e Murray (1994a,b), próprios ao estudo da região entre os corpos primários e da externa a eles.

Em ambos os programas, a integração do problema restrito de três corpos é feita utilizando o método de Burlisch-Stoer (PRESS *et al.*, 1989). A precisão da integração é verificada através do monitoramento da variação da Constante de Jacobi, sendo desconsiderados os dados gerados para uma variação de  $C_j$  superior a  $10^{-8}$ . O método de Newton-Raphson (PRESS *et al.*, 1989) foi utilizado para se saber quando a trajetória da partícula atravessa o plano  $y = 0$  com uma precisão de  $10^{-10}$ .

Os resultados e análises das Superfícies de Secções de Poincaré (SSP) geradas são apresentados a seguir.

## 6.2 A REGIÃO INTERNA

Define-se como região interna, aquela região compreendida entre os corpos massivos do sistema, ou seja, para  $-0.13 < x_0 < 0.87$ . As primeiras Superfícies da Secção de Poincaré (SSP) para esta região foram traçadas para  $C_j=3.020$  (um valor já conhecido na literatura) e diferentes razões de massa. O intuito era verificar as precisões e a variação da estabilidade com a mudança da razão de massa do sistema.

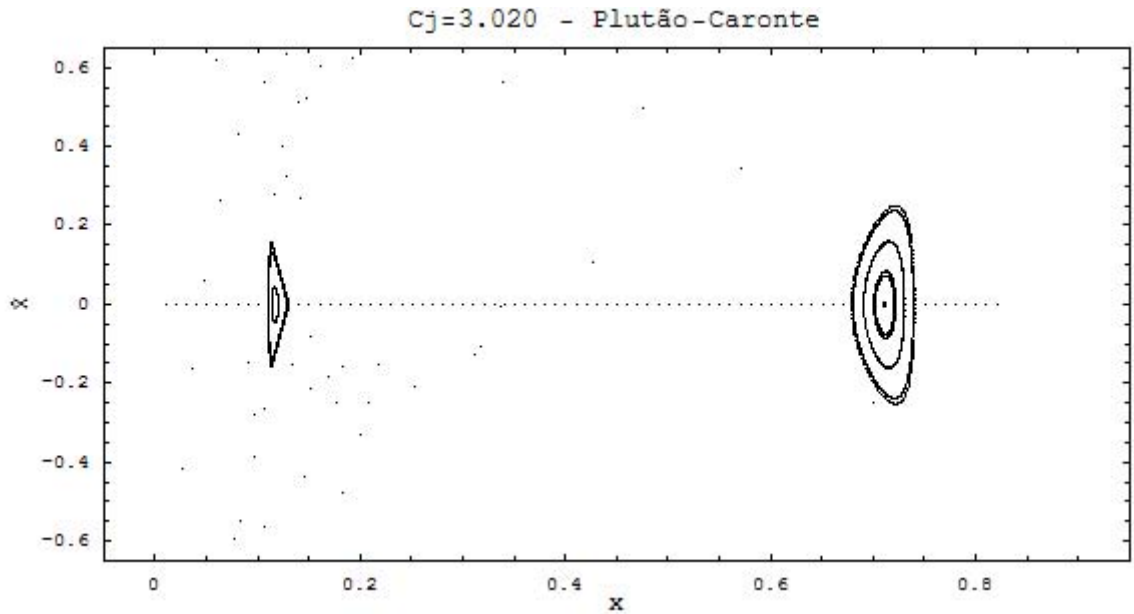
Para o estudo do sistema Plutoniano, as SSP foram traçadas para os valores das  $C_j$  iguais a: 3.674, 3.506, 3.130 e 2.887, apresentados no Capítulo 3, que são os valores da constante de Jacobi relacionados às curvas de velocidade zero e aos pontos de equilíbrio Lagrangianos. Foram dadas 82 condições iniciais para  $x$  na linha de conjuntura as partículas, isto é, para  $\dot{x}=0$ , isto para gerar cada uma das SSP, sendo que, em todas elas, as velocidades iniciais eram nulas; algumas secções foram geradas com mais condições iniciais onde as velocidades iniciais foram diferentes de zero, isto porque para estas secções as regiões de estabilidade estavam fora da linha de conjuntura. O intervalo para os valores de  $x$  foi de 0.01 para  $x$  variando de 0.01 a 0.82, varrendo a região entre os corpos massivos.

### 6.2.1 A Superfície da Secção de Poincaré para um mesmo valor de $C_j$ e diferentes razões de massa

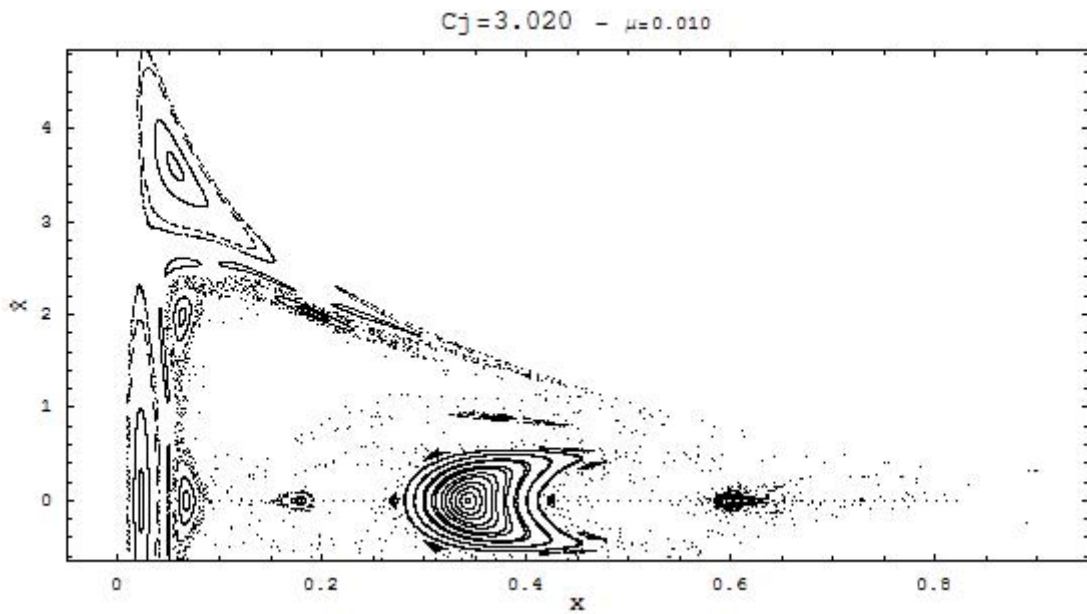
Para ressaltar a diferença que sucede entre as regiões de estabilidade apresentadas para uma mesma constante de Jacobi, quando a razão de massa é aumentada, foram geradas as SSP apresentadas a seguir na Figura 6.1 (a, b, c).

Além das SSP são apresentadas as Curvas de Velocidade Zero (CVZ) na Figura 6.2 (a, b, c) para este mesmo valor de  $C_j$  e as sucessivas razões de massa, que são iguais a 0.001, 0.01 e 0.13 (Plutão-Caronte). O conhecimento das CVZ possibilita que sejam analisadas as regiões permitidas à partícula.

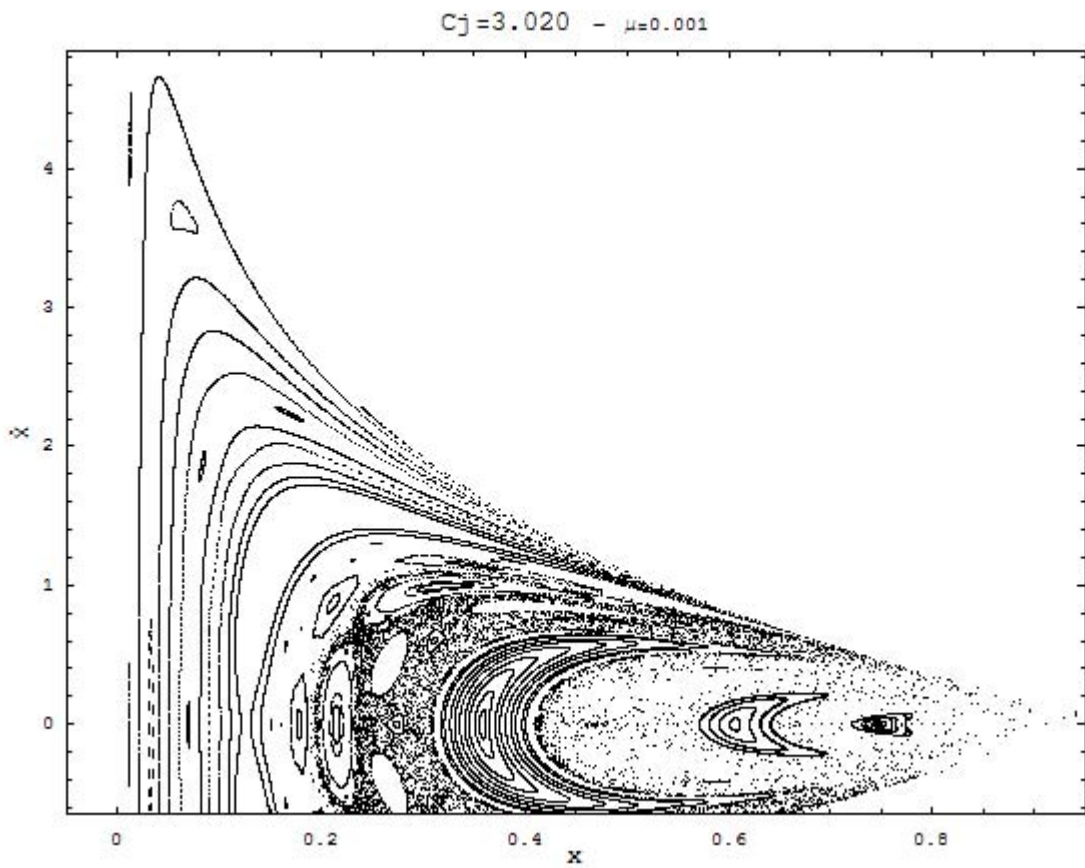
Comparando as Figuras: 6.1(a) e 6.2(a), 6.1(b) e 6.2(b), 6.1(c) e 6.2(c), verifica-se, para a mesma  $C_j$ , que para maiores razões de massa menor a região permitida à partícula.



(a)



(b)

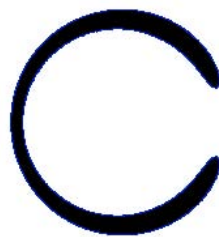


(c)

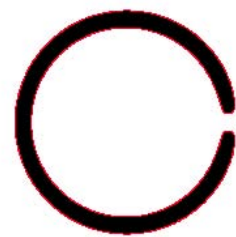
**Figura 6.1:** Superfícies de Secção de Poincaré com  $C_j = 3.020$  e (a)  $\mu = 0.13$  (Plutão-Caronte), (b)  $\mu = 0.01$  (Terra-Lua) e (c)  $\mu = 0.001$  (Sol-Júpiter).



(a)



(b)

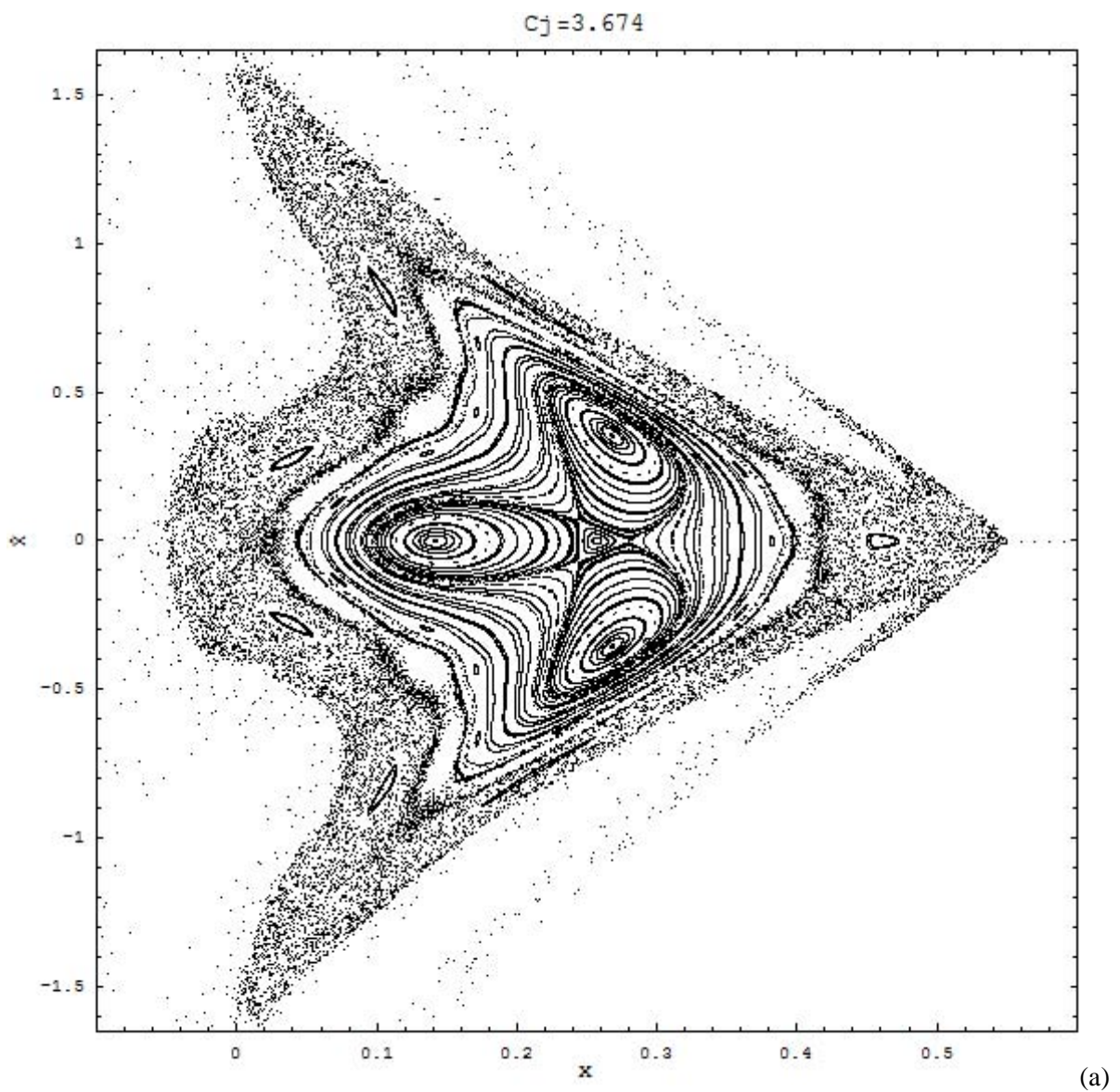


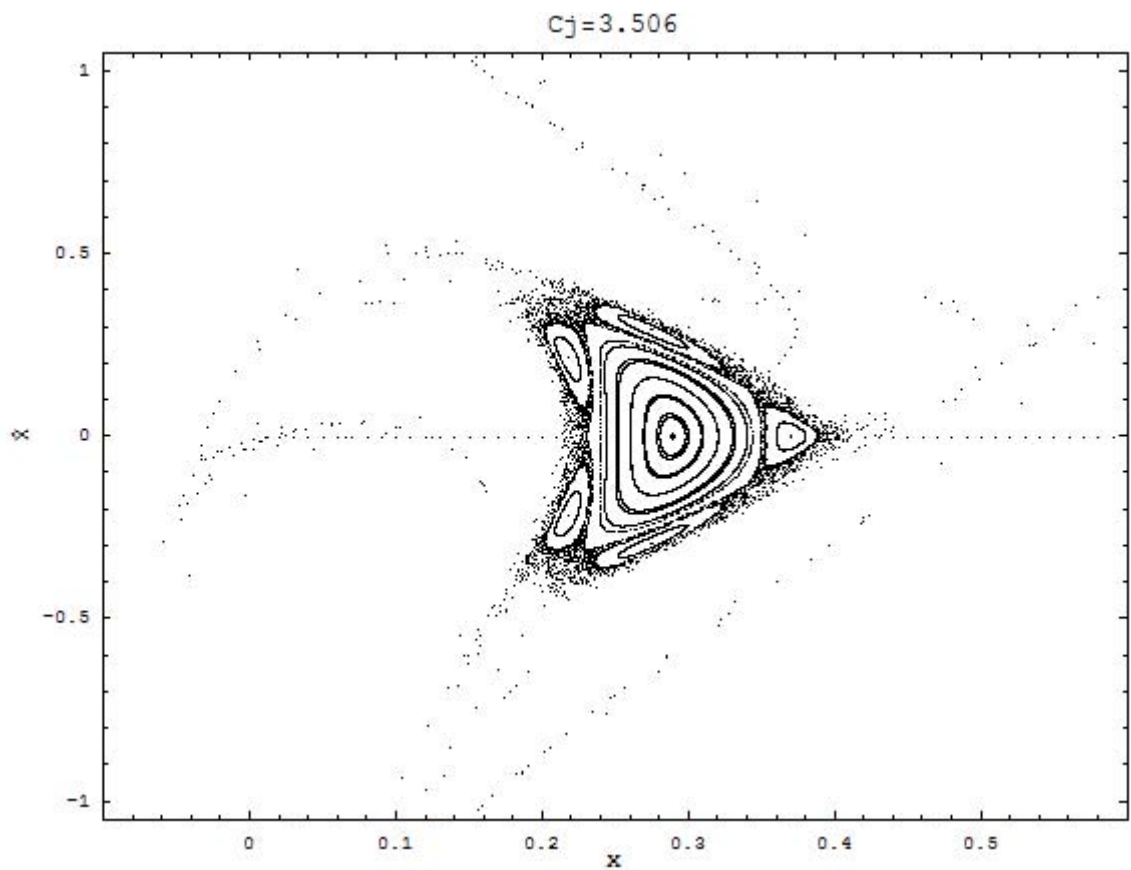
(c)

**Figura 6.2:** Regiões proibidas para um  $C_j = 3,020$  e razão de massa igual a: (a) 0.13 (Plutão-Caronte), (b) 0.01 e (c) 0.001.

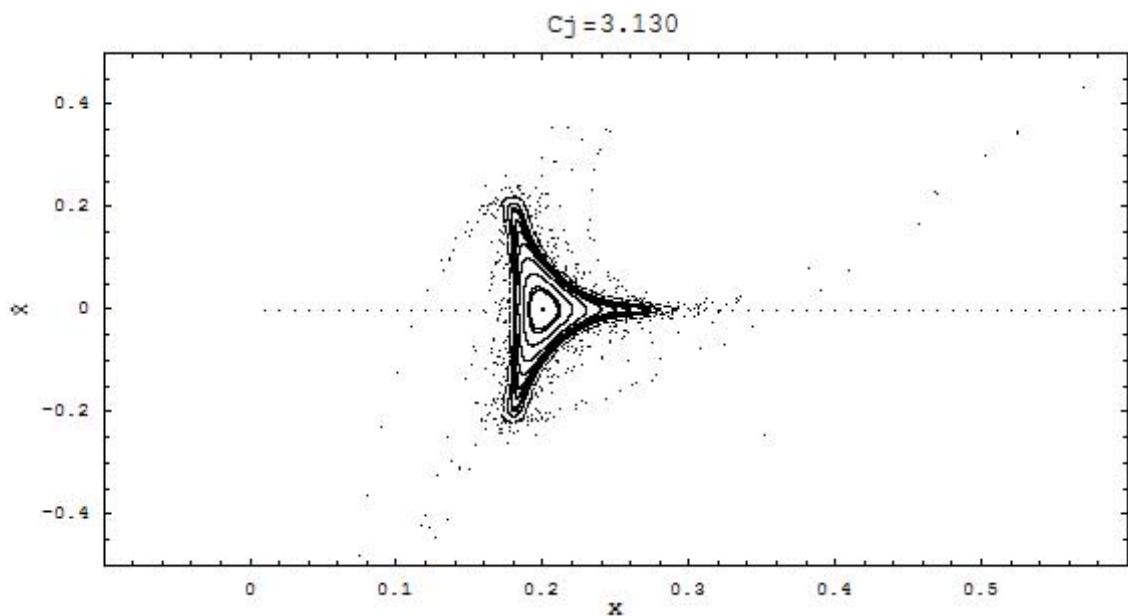
### 6.2.2 A Superfícies da Secção de Poincaré para valores de $C_j$ associados às curvas de velocidade zero e aos pontos de equilíbrio Lagrangianos

As SSP de Plutão-Caronte para os valores de  $C_j$  associados aos pontos de equilíbrio Lagrangianos, cujas curvas de velocidade zero foram apresentadas na seção 3.1.3, estão apresentados na Figura 6.3 (a,b,c). Conforme dito anteriormente, quanto maior a liberdade da partícula, menos significativas são as regiões estáveis.





(b)



(c)

**Figura 6.3:** Superfícies da Seção de Poincaré do sistema Plutão-Caronte para  $C_j$  iguais a: (a) 3.674 -  $L_1$ , (b) 3.506 -  $L_2$  e (c) 3.130 -  $L_3$ .

É válido complementar que, conforme se aumenta a área proibida à partícula, ou seja, conforme seu movimento é restringido, o número de ressonâncias decresce e sua estabilidade apresentar-se-á nas Superfícies de Secção de Poincaré como órbitas periódicas e quase-periódicas (ver Capítulo 3 definição de periódicas e quase-periódicas). A amplitude de libração irá decaindo até que, para determinados valores de constante de Jacobi, a partícula já não tenha liberdade alguma em relação a órbitas próximas a um dos corpos. Isto ficará mais claro na próxima seção, onde se fala das seqüências das diversas Superfícies de Secções de Poincaré geradas para a região interna – todas as secções geradas para a região interna aos corpos encontram-se no Anexo A.

### **6.2.3 Distintos valores de $C_j$ : varredura**

Inicialmente, com o intuito de melhor entender a estabilidade indicada pelas SSP, geradas a partir dos valores de  $C_j$  relacionados aos Pontos Lagrangianos, diversas outras secções para constantes de Jacobi compreendidas entre 2.066 e 7.010 foram simuladas. Por conseguinte, desta varredura de  $C_j$  foi gerado o diagrama apresentado na seção 6.2.5, que concentra as indicações das regiões de estabilidade para partículas originalmente na região interna.

Uma observação deve ser feita quanto às partículas com condições iniciais na região interna do sistema binário cujas SSP indicam periodicidade ou quase-periodicidade: elas descrevem em sua maioria órbitas Tipo-S (definição para órbitas Tipo-S no Capítulo 5).

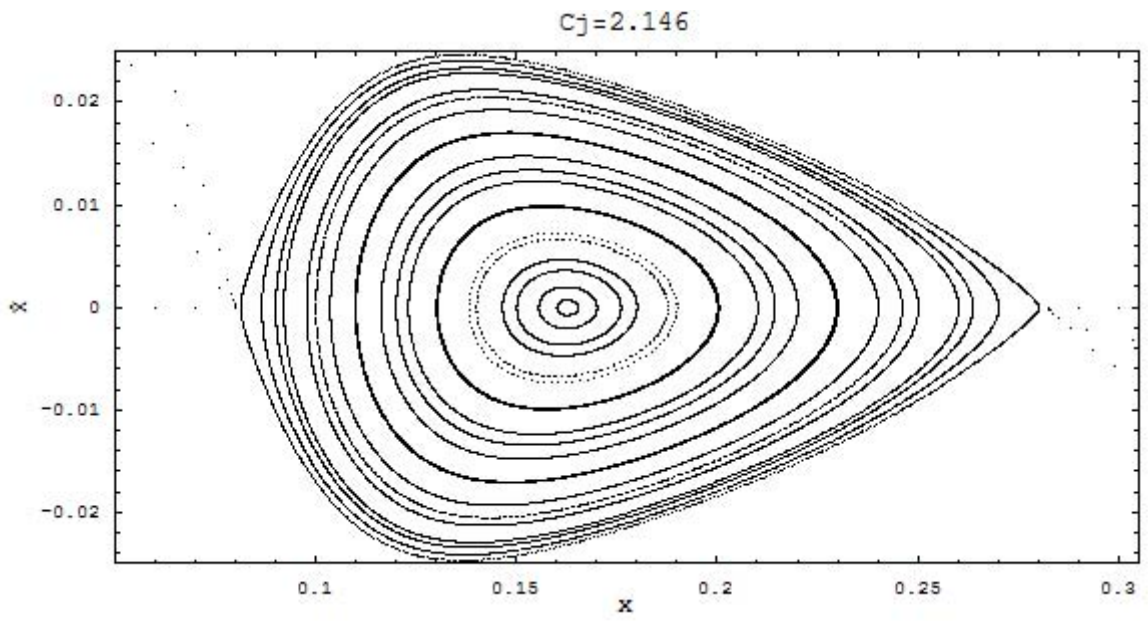
É válido colocar que, nas secções apresentadas para o caso Plutão-Caronte, o planeta está sempre no limite à esquerda do diagrama e o satélite, no extremo direito. Abaixo as mudanças de comportamento observadas nas SSP geradas para o caso interno (Anexo A) são descritas, mas serão melhor entendidas e justificadas no estudo das órbitas a ser apresentado na sub-seção 6.2.4, onde se comentará a respeito das Famílias de órbitas periódicas.

O primeiro resultado dentro do intervalo de  $C_j$  que apresentou ilhas de estabilidade ocorreu para 2.146, como pode ser visto na Figura 6.4 (a). O centro da ilha está em  $x_0 \cong 0.15$  para velocidade nula. A periodicidade indicada nesta secção corresponde à órbita periódica ao redor de Caronte e, a esta mesma família (Família I) de órbitas periódicas, correspondem as ilhas que se deslocam à direita a cada crescente valor de  $C_j$  e desaparecem, quando o valor da constante é igual a 2.386. Mas dentro da evolução das SSP uma nova família de órbitas periódicas (Família II) surge (ver SSP para  $C_j$  igual a 2.369 e anteriores para o entendimento da seqüência) também a orbitar Caronte. São órbitas periódicas indicadas nas SSP com valores de  $C_j$  entre 2.369 e 3.226.

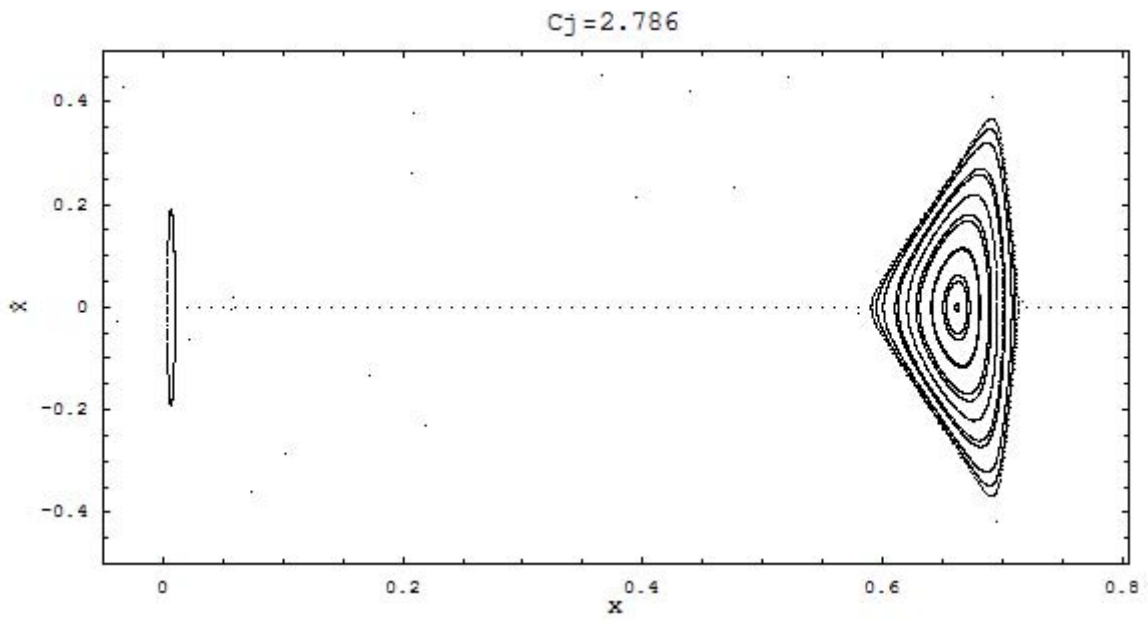
Já para o valor de 2.786 (ver Figura 6.4 (b) ), dois centros de ilhas, um em zero e outro próximo a 0.7, ficam claramente definidos. O segundo, mais à direita, é a evolução da periodicidade mencionada anteriormente (Família II); o primeiro, à esquerda, é uma nova família de órbitas periódicas (Família III) agora a orbitar Plutão. Na seqüência, os centros das ilhas se deslocam (Figura 6.4(c),  $C_j=3.186$ ) novamente. Seguindo em ordem crescente dos valores para  $C_j$  é percebida a degenerescência das estruturas, que voltam a se formar para o valor de  $C_j$  igual a 3.506 (Família IV) — já apresentado acima — só que agora a órbita dá-se somente para Plutão.

Além das famílias foram identificadas ressonâncias — estas serão comentadas também na sub-seção 6.2.4. Um exemplo seria a Figura 6.3(a): nota-se que as ilhas entre  $x$  igual a 0.1 e 0.4 podem representar uma região em que se tem uma ressonância de terceira ordem que persiste até um valor anterior a 3.698 — ver Figura 6.4(d).

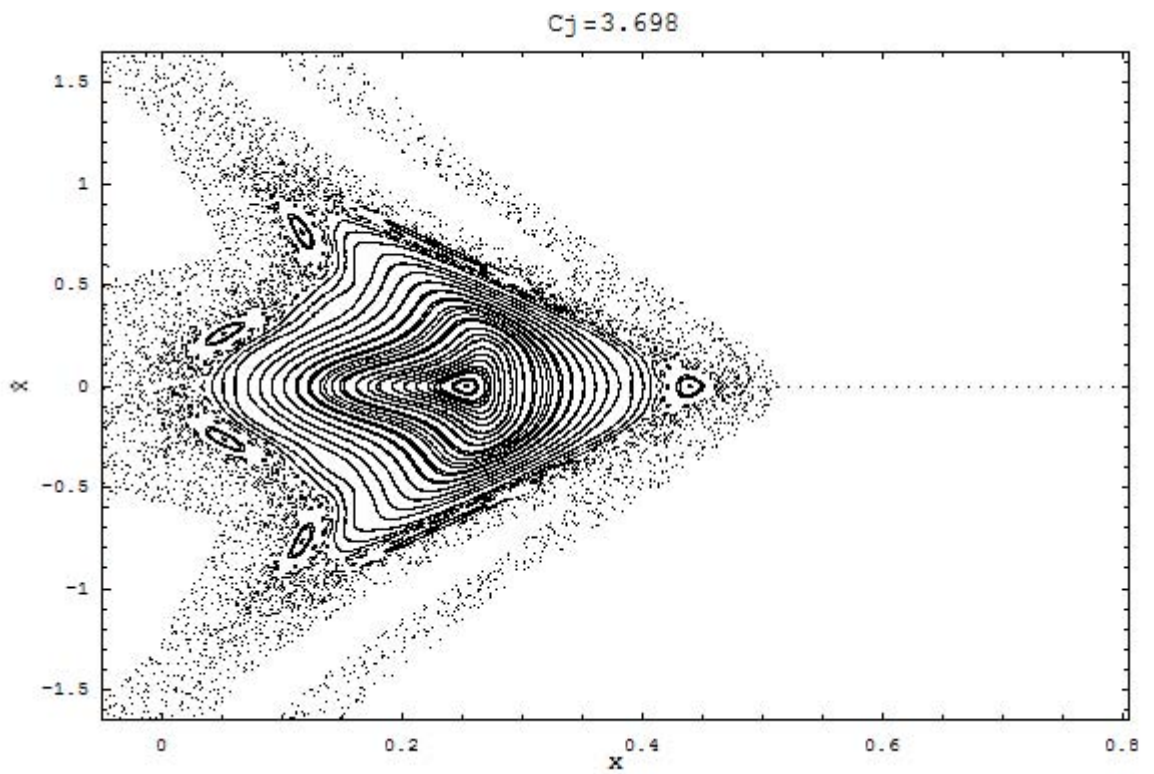
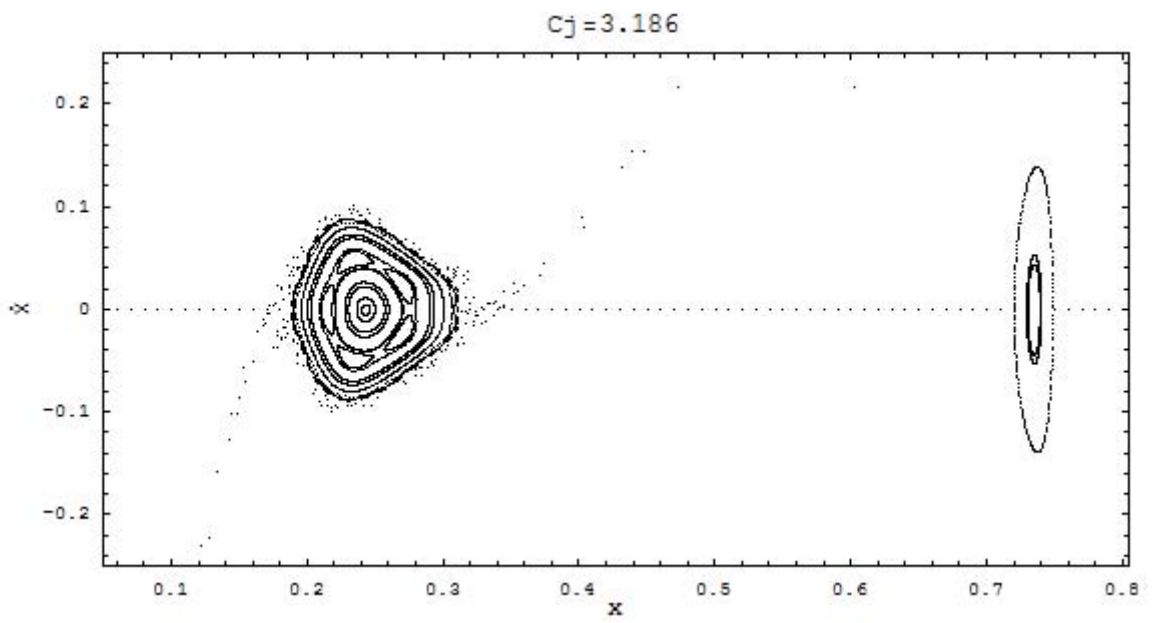
Como dito anteriormente, a seqüência para os diferentes valores de  $C_j$  gerados compõe o Anexo A. Obtidas essas SSP, foi possível determinar o diagrama  $C_j$  por  $x$  — apresentado na próxima seção, relacionando-o ao critério de estabilidade sugerido por Winter (2000), que de acordo com o início da seção, representa a síntese das SSP quanto à estabilidade.



(a)



(b)



**Figura 6.4:** Superfícies da Seção de Poincaré do sistema Plutão-Caronte para  $C_j$ s iguais a: (a) 2.146 , (b) 2.786, (c) 3.186 e (d) 3.698.

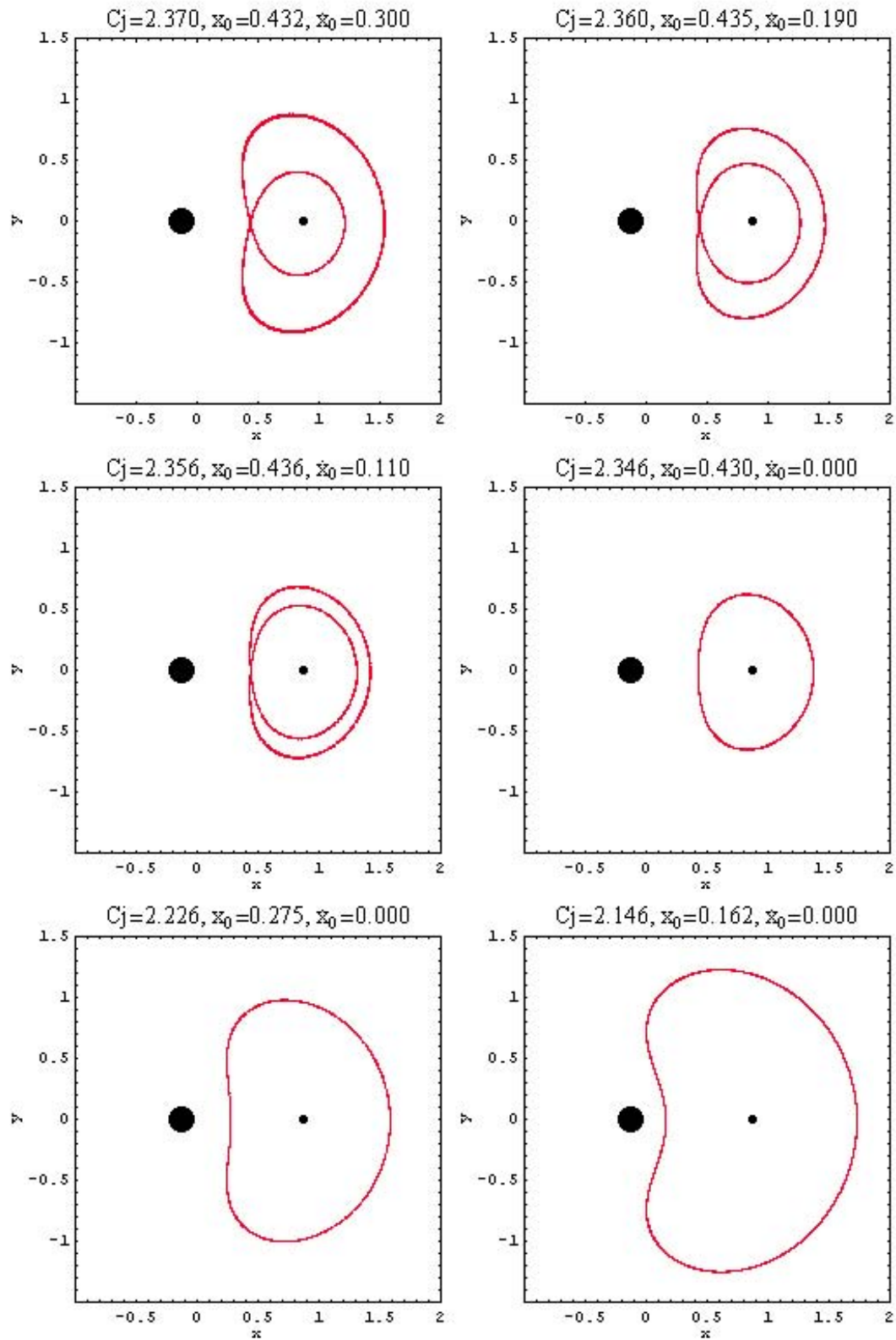
#### 6.2.4 Centro das ilhas: trajetórias

Os centros das ilhas nas SSP correspondem às órbitas periódicas, podendo ser estas órbitas ressonantes. Alguns centros de ilhas foram escolhidos como condições iniciais das partículas na integração de trajetórias. Estas trajetórias foram separadas por famílias de órbitas periódicas, seguindo a evolução das ilhas, ou por ordem de ressonância, quando a seqüência analisada não cobria grandes intervalos de  $C_j$ . As órbitas classificadas em famílias podem ser ou não ressonantes. Para razões de massa maiores, os centros das ilhas já indicariam ressonâncias de primeira ordem (WINTER; MURRAY, 1997; CELESTINO, 1999), enquanto que, para este caso em estudo, nenhuma ressonância desta ordem foi encontrada. As órbitas separadas são facilmente identificadas no diagrama de  $C_j \times x$  a ser apresentado na seção 6.2.5.

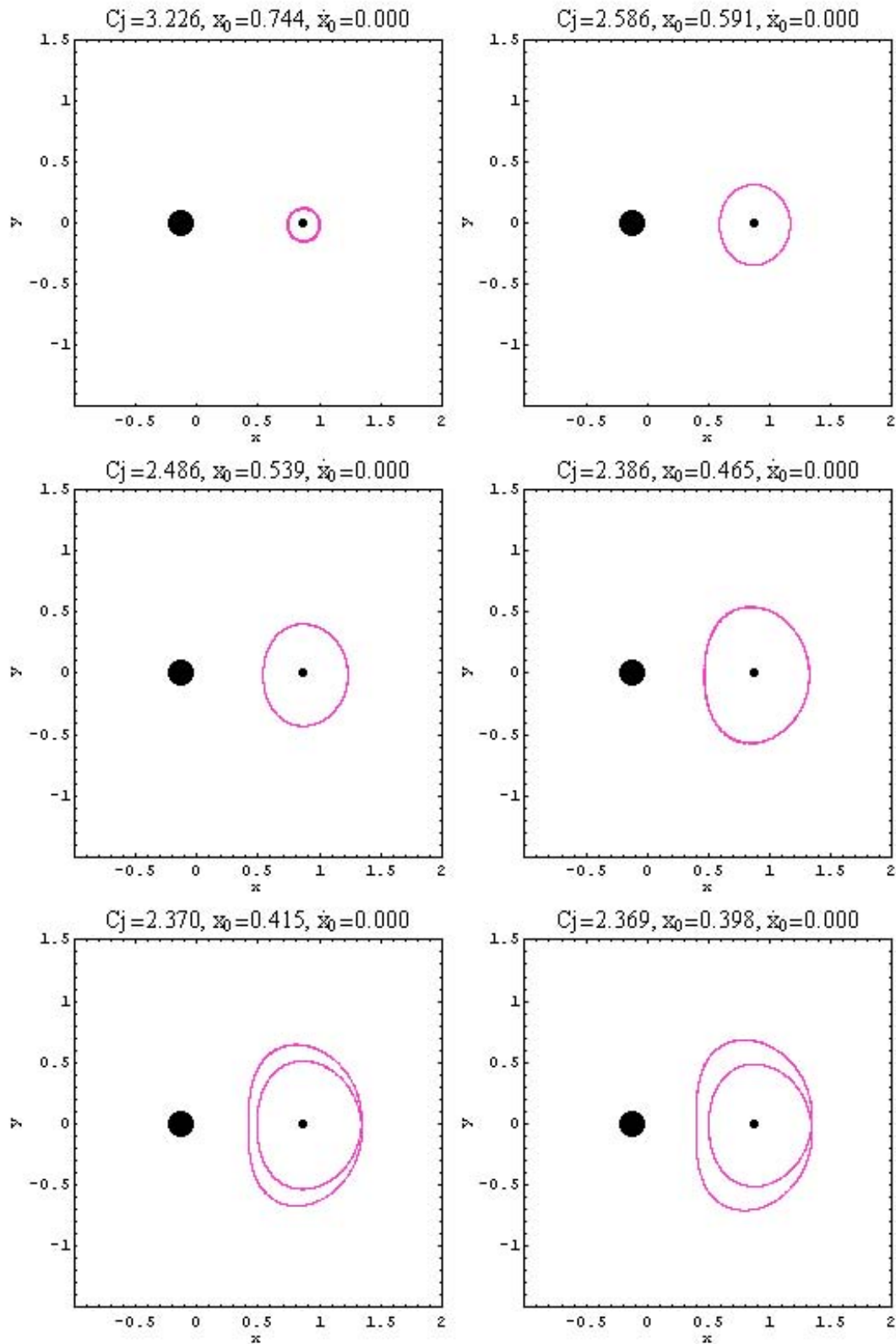
A identificação das famílias de órbitas periódicas teve por base a nomenclatura utilizada por Broucke (1968) desenvolvida para Terra-Lua, um dos trabalhos mais completos para o caso de razão de massa próxima ao valor crítico. Para a razão de massa de Plutão-Caronte, que está acima do valor de razão de massa crítica (0.0385 – ver Capítulo 4), um trabalho do gênero é ainda desconhecido, por isso algumas das famílias não encontram classificação na literatura.

As famílias de órbitas periódicas foram separadas de acordo com as suas características; a distinção entre elas para classificação foi feita principalmente segundo a evolução dos centros das ilhas na seqüência das SSP. Também foram obtidos os períodos destas órbitas para verificar se a periodicidade não seria por ressonância.

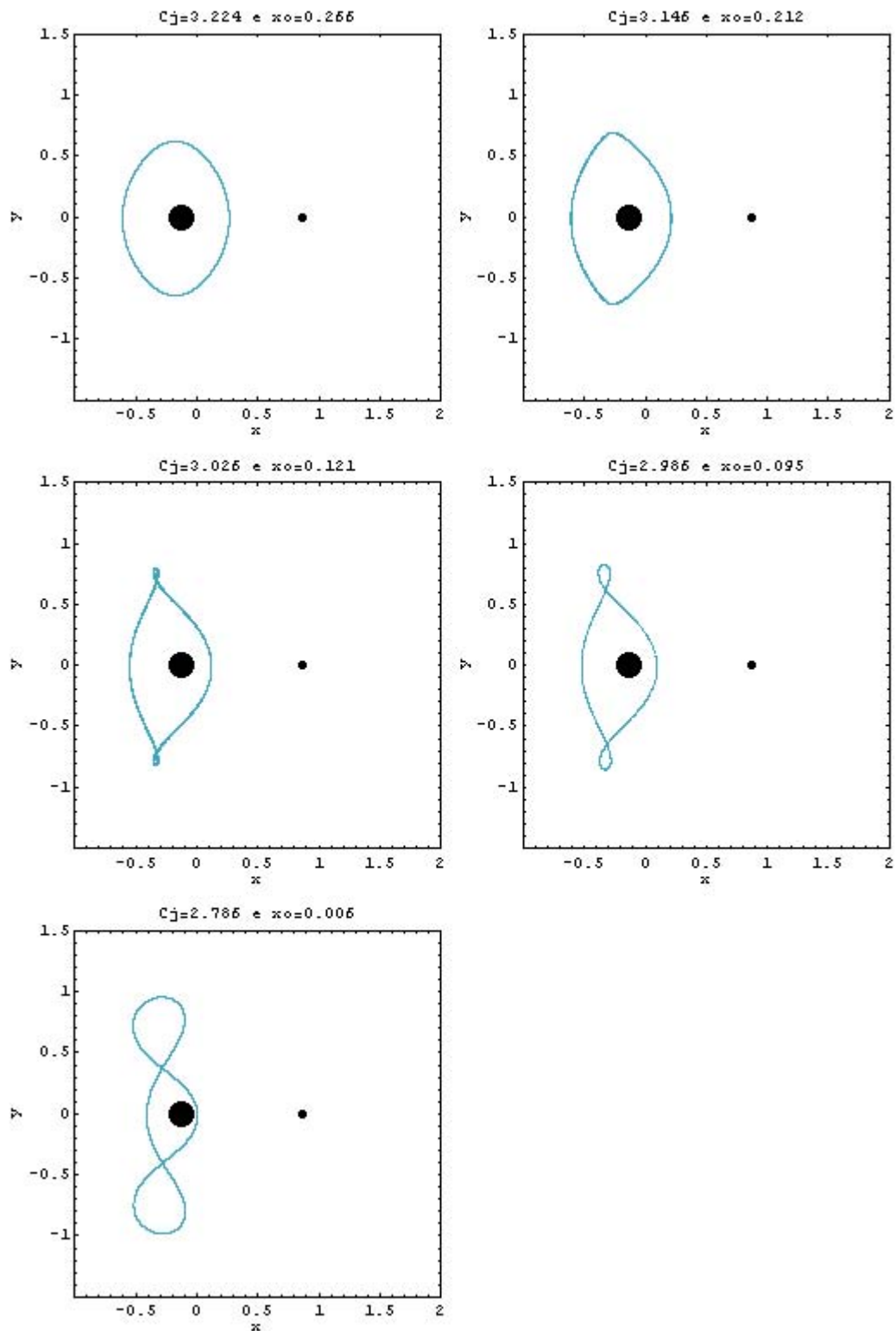
A Figura 6.5 mostra a Família I – órbitas periódicas retrógradas ao redor de  $m_2$ , Caronte, pertencentes à Família C de acordo com a classificação de Broucke (1968). O centro da ilha na linha de conjuntura, que compõe o conjunto das ilhas que correspondem a esta família, foi seguido dentro do intervalo de  $2.146 \leq C_j \leq 2.386$  (as condições iniciais da partícula para cada órbita estão indicadas em cada quadro da figura).



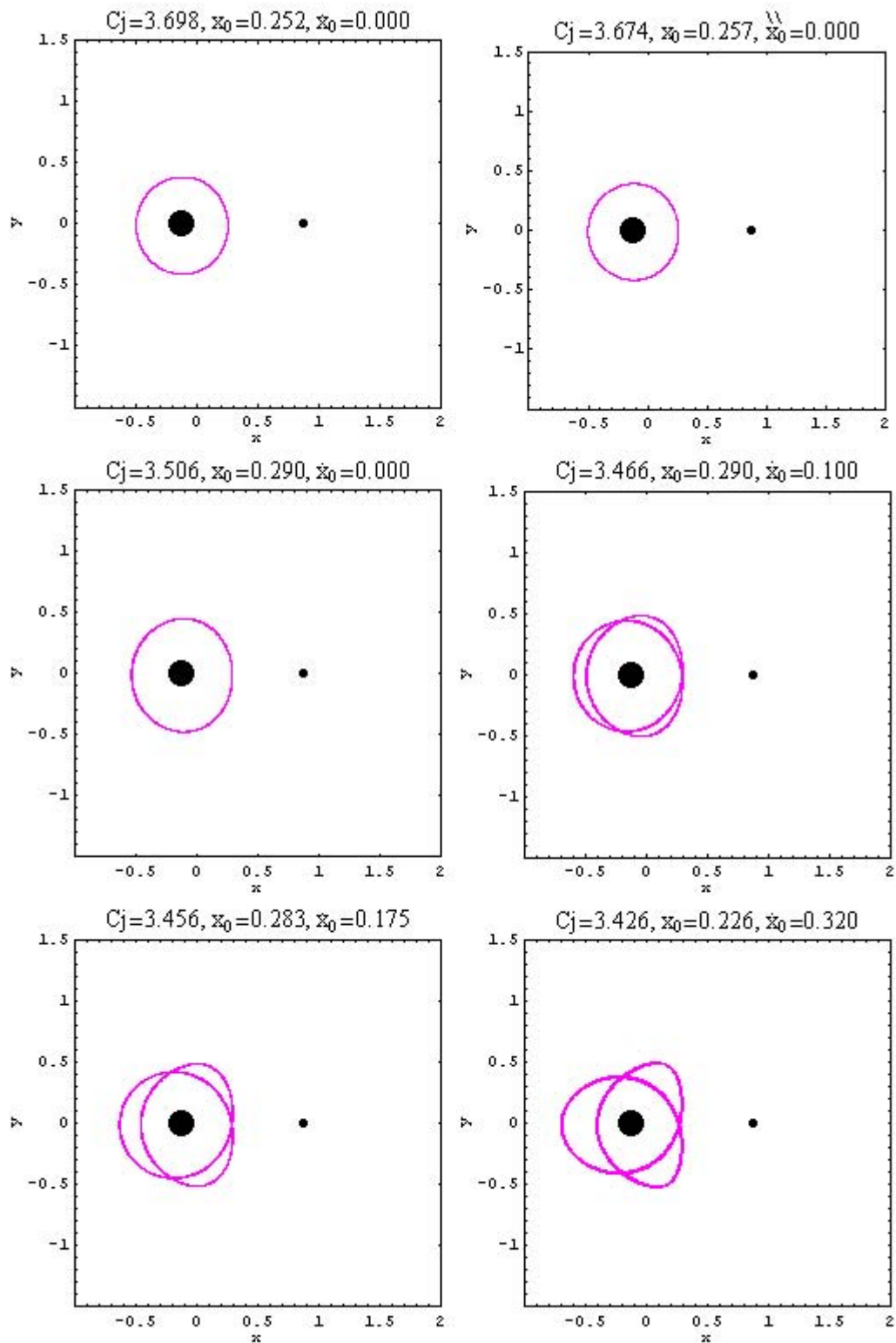
**Figura 6.5:** Família I – órbitas periódicas retrógradas ao redor de Caroté. Segundo Broucke (1968) estas seriam órbitas da Família C. As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da Figura. Este tipo de órbitas são os centros das ilhas da SSP no intervalo de  $2.146 \leq C_j \leq 2.386$ .



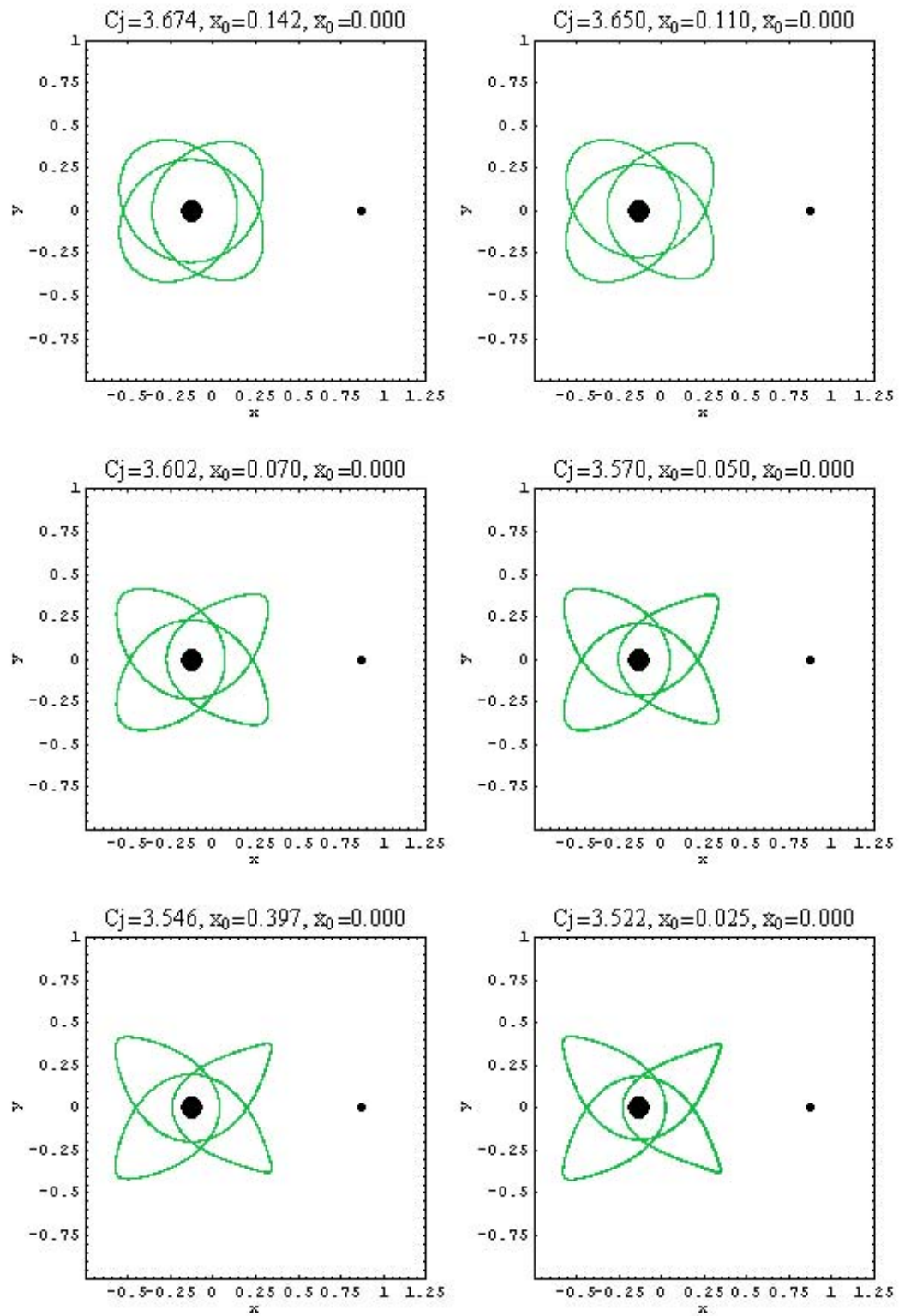
**Figura 6.6:** Família II – órbitas periódicas ao redor de Caronte. Este tipo de órbitas são os centros das ilhas das SSP no intervalo de  $2.369 \leq C_j \leq 3.226$  segundo as condições iniciais apresentadas em cada quadro da figura.



**Figura 6.7:** Família III – órbitas periódicas diretas ao redor de Plutão. Segundo Broucke (1968) estas seriam órbitas da Família BD. A diferença entre Terra-Lua e Plutão-Caronte é a assimetria em  $y$ . As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da figura. Este tipo de órbitas são os centros das ilhas à esquerda das SSP no intervalo de  $2.786 \leq C_j \leq 3.226$ .



**Figura 6.8:** Família IV – órbitas periódicas diretas ao redor de Plutão. O intervalo investigado é  $3.426 \leq C_j \leq 3.698$ . As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da figura. Para os valores mais baixos de  $C_j$  acima as órbitas apresentam ressonância de segunda ordem, 3:1.



**Figura 6.9:** Ressonância de terceira ordem 4:1– órbitas diretas ao redor de Plutão. O intervalo investigado é  $3.522 \leq C_j \leq 3.674$  . As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da figura.

Na Figura 6.6 encontra-se a Família II – órbitas periódicas ao redor de Caronte e também retrógradas, no entanto sem classificação em Broucke (1968). O intervalo desta família intersecede ao da Família I sendo  $2.369 \leq C_j \leq 3.226$ ; são famílias próximas nas SSP, o sumidouro do centro das ilhas é comum às duas, isto é, elas tendem ao mesmo ponto na SSP. Fica clara a proximidade e a interseção no diagrama  $C_j \times x$  a ser apresentado na próxima seção.

A Figura 6.7 apresenta a Família III – órbitas diretas periódicas ao redor de Plutão para  $2.786 \leq C_j \leq 3.226$ , segundo Broucke (1968) pertencentes à Família BD. O desacordo com as apresentadas no caso Terra-Lua dá-se por conta da assimetria em  $y$  devida ao fato da atração de Caronte sobre a partícula ser mais intensa, dada a razão de massa da ordem de  $10^{-1}$ .

A Família IV – Figura 6.8 – cobre o intervalo de  $3.426 \leq C_j \leq 3.698$ . Os valores mais baixos de  $C_j$  correspondem à ressonância de ordem 2. Na SSP é facilmente identificada a ressonância, pois para o valor de  $x_0$  considerado vê-se a simetria em  $x$  da ilha correspondente, duas ilhas indicam a ressonância de ordem 2. Calculando o período da órbita foi possível determinar que a ressonância era 3:1. Na seqüência dos quadros da figura, para os valores crescentes de  $C_j$ , as órbitas periódicas correspondem à circulação.

A Figura 6.9 apresenta órbitas periódicas ressonantes de ordem 3; também para este caso são facilmente identificadas as três ilhas nas SSP correspondentes aos valores de  $C_j$  dos quadros. O período também foi calculado e a ressonância em questão é a 4:1.

Da faixa de  $3.698 \leq C_j \leq 7.010$  as órbitas periódicas são apenas circulação ao redor do primeiro corpo.

## **6.2.5 Estabilidade e as Superfícies de Secções de Poincaré para a região interna**

### **6.2.5.1 Um critério para o grau de estabilidade**

De modo geral, as regiões regulares da Superfície da Secção de Poincaré são definidas por uma órbita periódica envolvida por órbitas quase-periódicas. No sistema dinâmico

a maior órbita quase-periódica corresponde à máxima amplitude de oscilação ao redor da órbita periódica. As regiões regulares podem ser interpretadas como regiões de estabilidade, visto que, fora delas, o movimento é certamente instável (caótico) e, dentro delas, o movimento é em geral regular, exceto quando há uma pequena configuração caótica (Winter, 2000), desprezada quando  $\Delta x$  é inferior a 0.01.

É sugerido por Winter (2000) que a máxima amplitude de oscilação pode ser tomada como um parâmetro para medir o grau de estabilidade de uma órbita periódica em relação à região ao seu redor no espaço de fase: “a órbita periódica é tão estável quanto o tamanho da representação no espaço de fase  $(x, \dot{x})$  da maior órbita quase-periódica ao seu redor”.

#### 6.2.5.2 Amplitude de oscilação

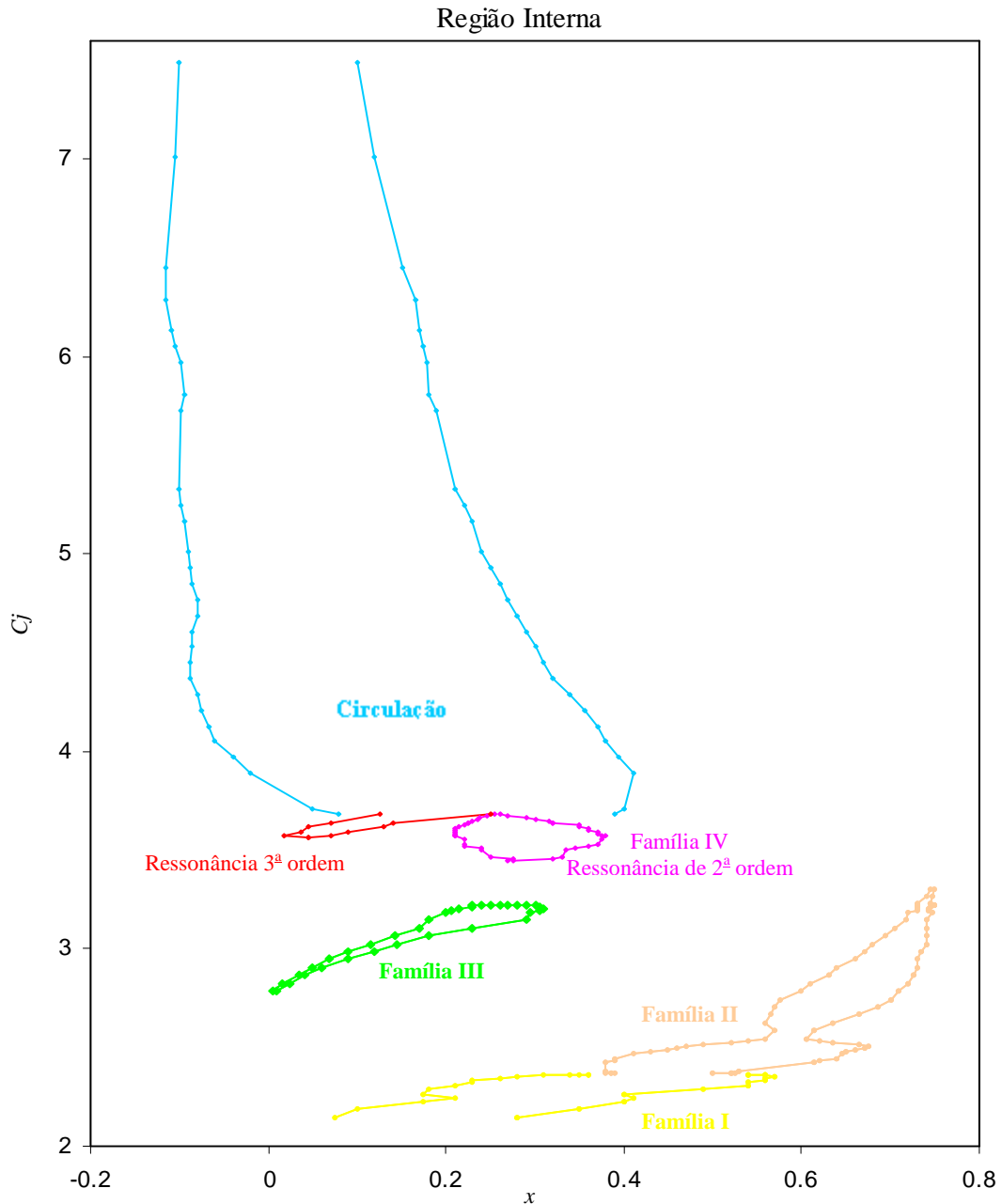
Em 6.2.5.1 foi estabelecido que o tipo de órbita periódica pode ser medido em termos da máxima amplitude de oscilação ao seu redor. Winter (2000) quantifica esta amplitude de oscilação a partir das Superfícies de Secções de Poincaré, considerando para cada constante de Jacobi o tamanho da maior ilha (órbitas quase-periódicas) na linha de conjuntura (valores de  $x$  quando  $\dot{x} = 0$ ).

Para o caso Plutão-Caronte foram medidas essas amplitudes de oscilação para cada uma das Superfícies de Secções de Poincaré geradas. O resultado é apresentado na Figura 6.10.

Neste diagrama de  $C_j$  por  $x$  pode ser vista a evolução da estabilidade das órbitas periódicas para diferentes valores de constante de Jacobi e de  $x$ . Ele é a síntese da análise das regiões estáveis através da técnica da Superfície da Secção de Poincaré para a região entre os corpos massivos, isto é, para a região interna.

A identificação de cada uma das regiões está indicada conforme as órbitas apresentadas na seção anterior. As regiões apontadas como Família I e Família II se complementam, embora não estejam ligadas, o que é meramente devido ao modo como se dá a medida da amplitude de libração, pois, nesta faixa, as ilhas de

estabilidade encontram-se para  $\dot{x} \neq 0$  e não é assim que se consideram os dados para o diagrama em questão – as ilhas nas SSP são justamente referentes à ressonância de ordem 2.



**Figura 6.10:** Diagrama de  $C_j$  por  $x$  — as áreas entre linhas determinam as regiões estáveis. A maior variação de  $x$  representa a maior amplitude de oscilação das órbitas *quasi*-periódicas. Os dados foram gerados a partir da Superfície de Secção de Poincaré, considerando, para cada Constante de Jacobi, o tamanho da maior ilha (órbita *quasi*-periódica) na linha de junção (valores de  $x$  quando  $\dot{x} = 0$ ). A identificação de cada uma das regiões está em acordo com as separações das órbitas na seção anterior.

A maior faixa de estabilidade é para a região de circulação, onde as órbitas estão ao redor do corpo primário, Plutão.

A ressonância de terceira ordem vem ligar a Família IV com a Circulação à esquerda do diagrama e talvez outras ressonâncias não analisadas fechassem esta região à direita, assim como pode haver casos que complementarizam o espaço entre a Família III e a Família IV ou a ressonância de terceira ordem. Uma relação das Famílias I e II com as demais regiões seria devida à estabilidade para corpos a orbitar ora o primário, ora o secundário, caso não identificado; isto, visto que as Famílias I e II estão para partículas ao redor de Caronte e as demais regiões para partículas ao redor de Plutão.

### 6.3 A REGIÃO EXTERNA

A região externa é aquela localizada além dos corpos massivos, ou seja, para  $x > 1.0$ . As condições iniciais das partículas a serem integradas para gerar a SSP tiveram seu início em  $x = 1.5$  indo até o valor de dez vezes a distância Plutão-Caronte, portanto já fora da influência de apenas um dos corpos. A esfera de Hill, normalizada, para Caronte é de 0.351, e, para Plutão é de  $\approx 0.662$ .

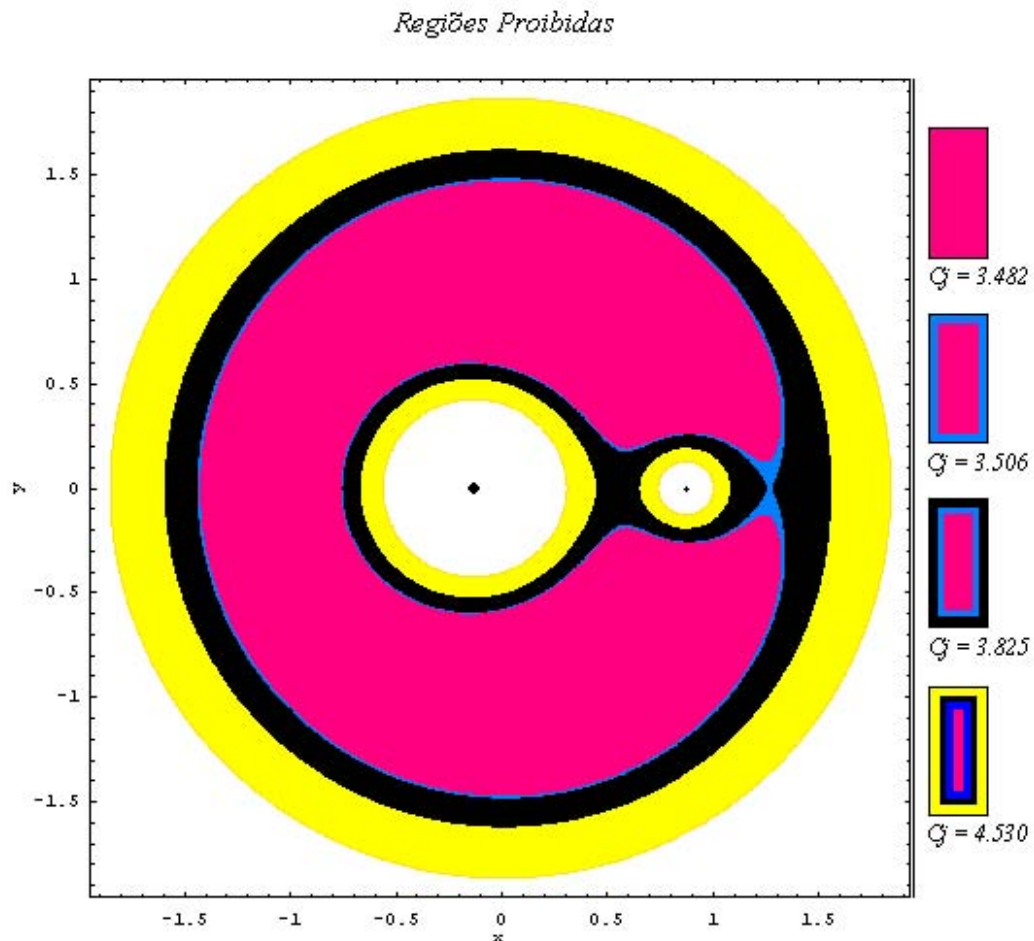
#### 6.3.1 Regiões proibidas e as Superfícies de Secções de Poincaré

Dos estudos das curvas de velocidade zero é conhecido que: para valores de  $C_j \geq 3.506$  uma partícula que tiver sua órbita inicial exterior ao corpo perturbador não poderá chegar na proximidade deste para além de um certo limite, o qual é determinado pela extensão da região proibida — são exemplos de regiões proibidas à partícula as áreas apresentadas na Figura 6.11 para quatro valores de  $C_j$ .

É importante conhecer a região proibida que separa a partícula do corpo perturbador, para melhor entender as Superfícies de Secções de Poincaré para o caso externo. Nas simulações numéricas, utilizando o programa CROSS.f de Winter & Murray (1994b), as condições iniciais dadas foram:  $y = \dot{x} = \dot{y} = 0$  e valores de  $x_0$  compreendidos entre 1.5 e 10.0, considerando o centro de massa de Plutão-Caronte como a origem. Foram consideradas constantes de Jacobi compreendidas entre 3.194 e 7.010. A variação entre as constantes de Jacobi foram, em sua maioria, de 0.08, no entanto, secções

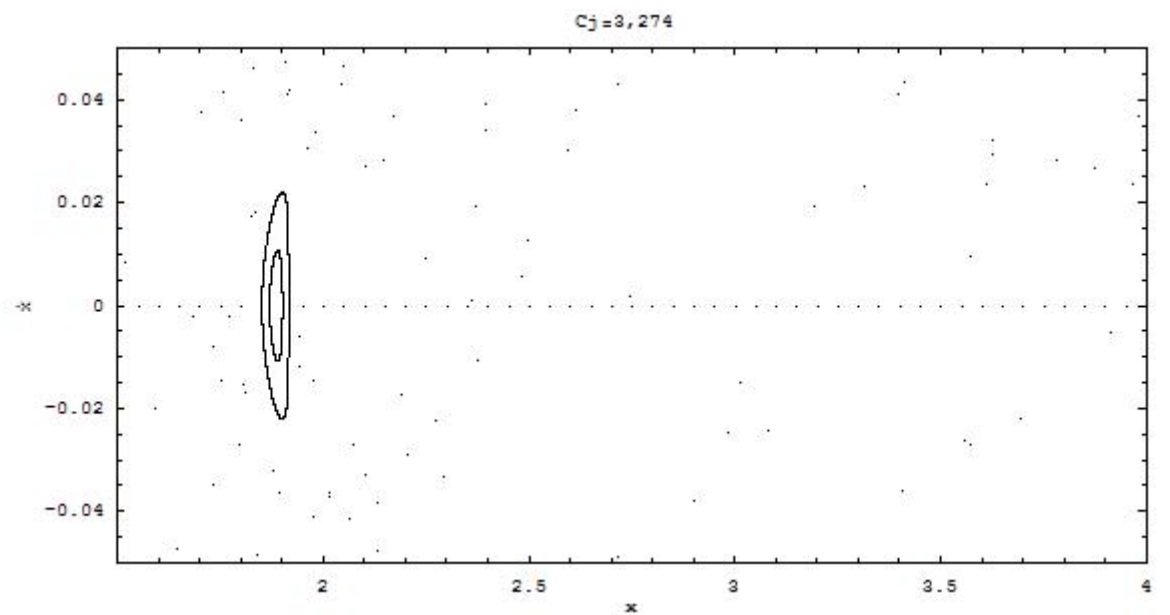
intermediárias foram geradas segundo a necessidade de acompanhar a evolução de certos centros de ilhas.

Para  $C_j = 3.274$  há estabilidade em torno de  $x \approx 1.850$  — ver Figura 6.12(a), a partir deste valor de  $C_j$ , há a evolução desta região e o deslocamento no sentido positivo do eixo  $x$  do centro das ilhas, como pode ser visto na Figura 6.12(b) para o valor de  $C_j = 3.506$ , que está relacionado à curva de velocidade zero e à região proibida apresentada na Figura 6.11.

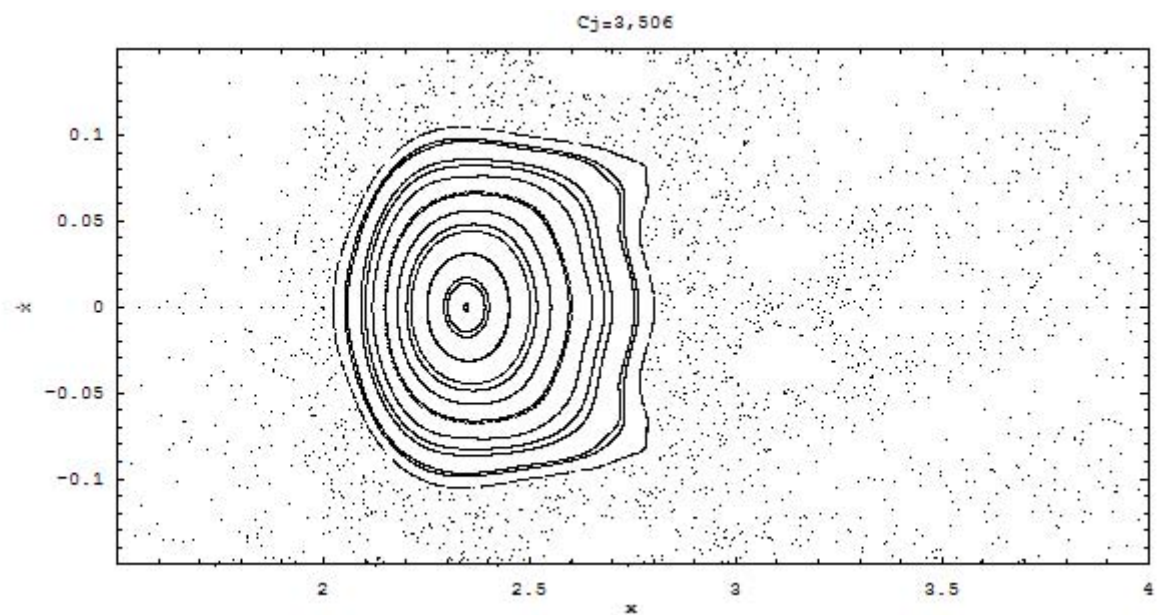


**Figura 6.11:** Regiões proibidas — considerando as cores como planos sobrepostos tem-se que, para o valor de 3.482, a partícula tem maior liberdade de movimento, enquanto que para valores superiores a 3.506 uma partícula externa nunca virá a adentrar o sistema. E toda a região delimitada pelas cores correspondentes aos valores de  $C_j$  especificados compreende uma linha imaginária no eixo  $x$ , a distância limite entre o corpo perturbador e a partícula.

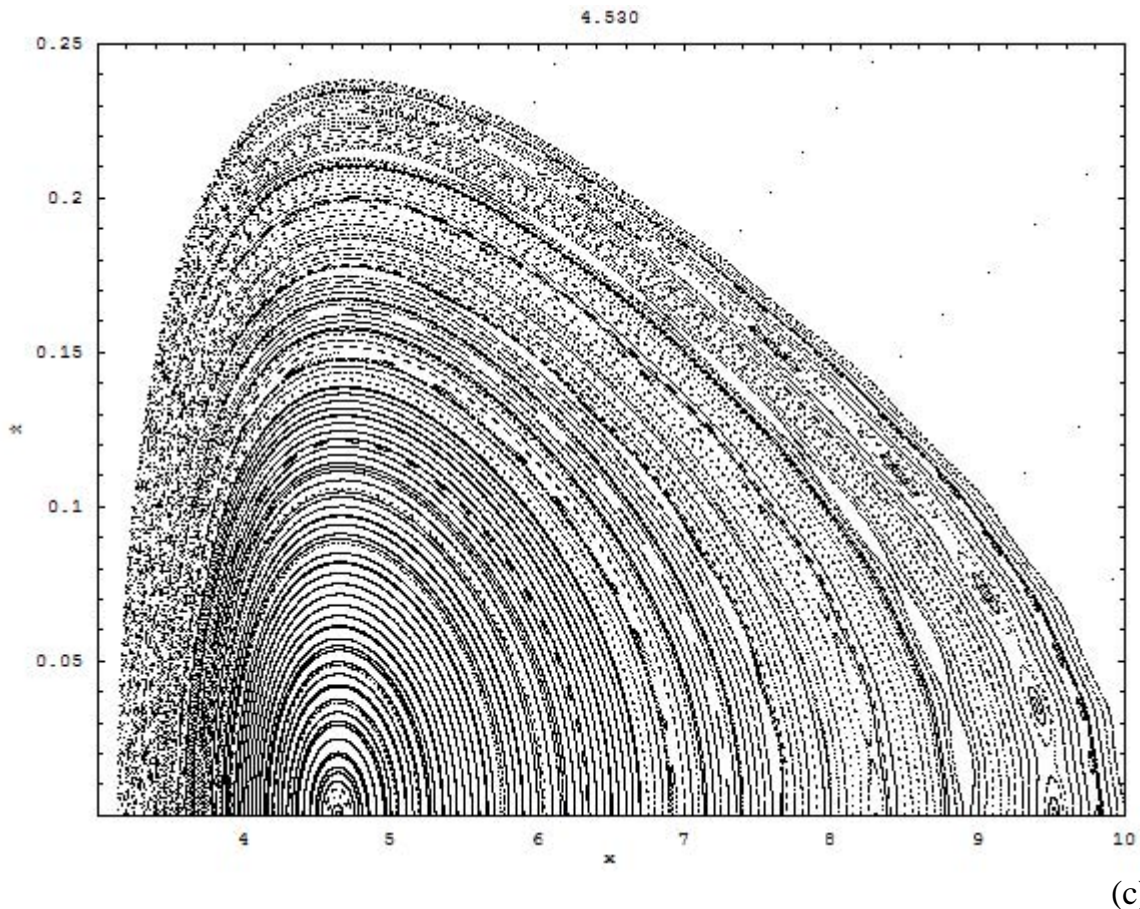
A Figura 6.12(c) é apresentada, na seqüência das constantes para o intervalo considerado, como a primeira SSP a não mais mostrar regiões de caos bem delimitadas, isto é, caos entre as ilhas. A partir do valor de  $C_j$  de 4.530, as ilhas diminuem e os centros destas continuam a se deslocar até atingirem dez vezes a distância Plutão-Caronte (é válido lembrar que a região de estabilidade para partículas orbitando a ambos os corpos inicia-se, segundo Holman e Wiegert (1999), em 40250 *km*, o que equivale a duas vezes a distância Plutão-Caronte).



(a)



(b)



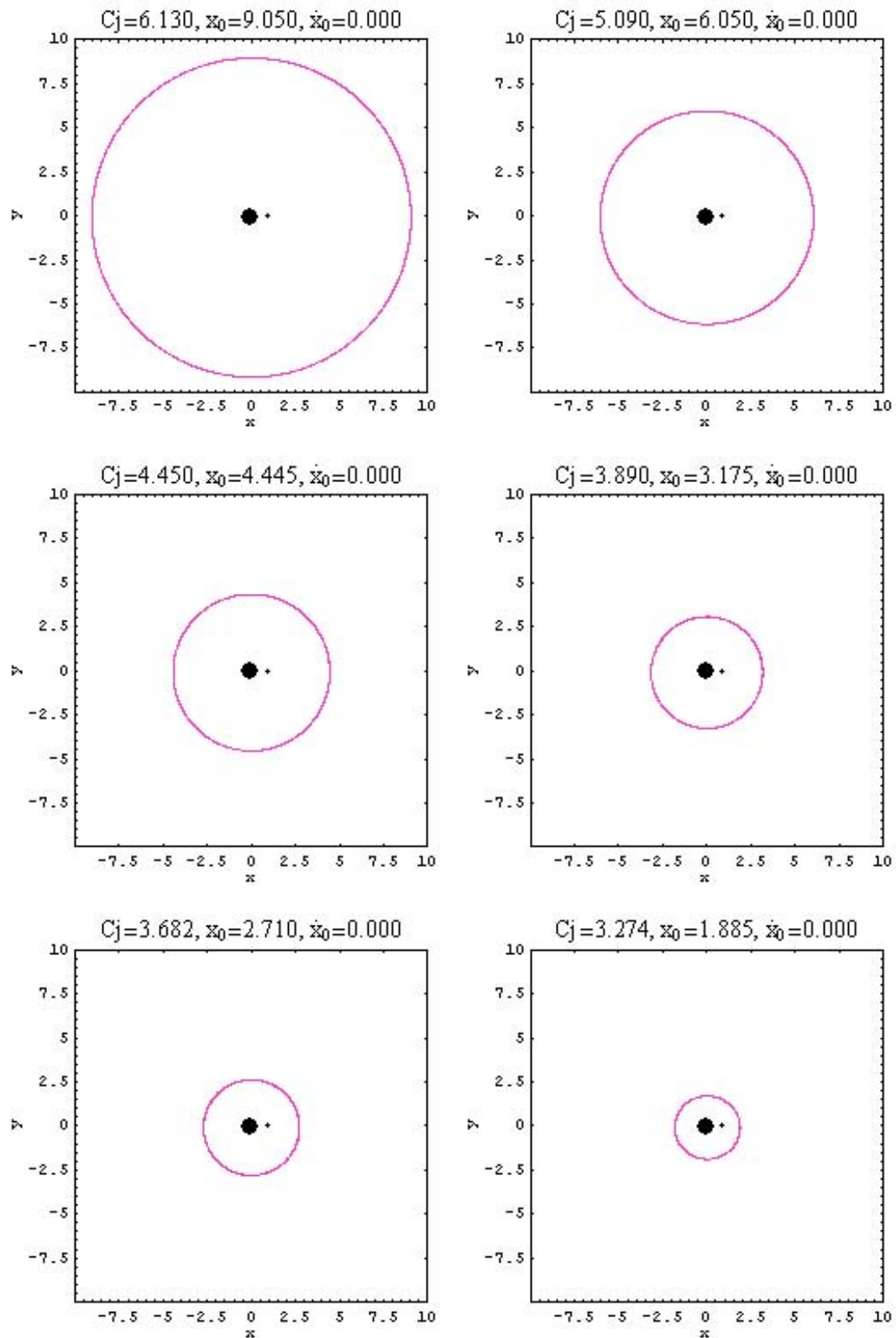
**Figura 6.12:** Superfícies de Secções de Poincaré: evolução da região de estabilidade, (a) valor de  $C_j = 3.274$  — primeira ilha apresentada para o intervalo estudado. (b)  $C_j = 3.506$  — deslocamento e aumento da região estável. (c) valor de  $C_j = 4.530$  — ausência de pontos difusos completamente desordenados.

Todas as Superfícies de Secções de Poincaré para o intervalo estudado estão apresentadas no Anexo B. O centro de cada ilha principal foi acompanhado desde o início das SSP para a verificação da amplitude de oscilação (ver Seção 6.2).

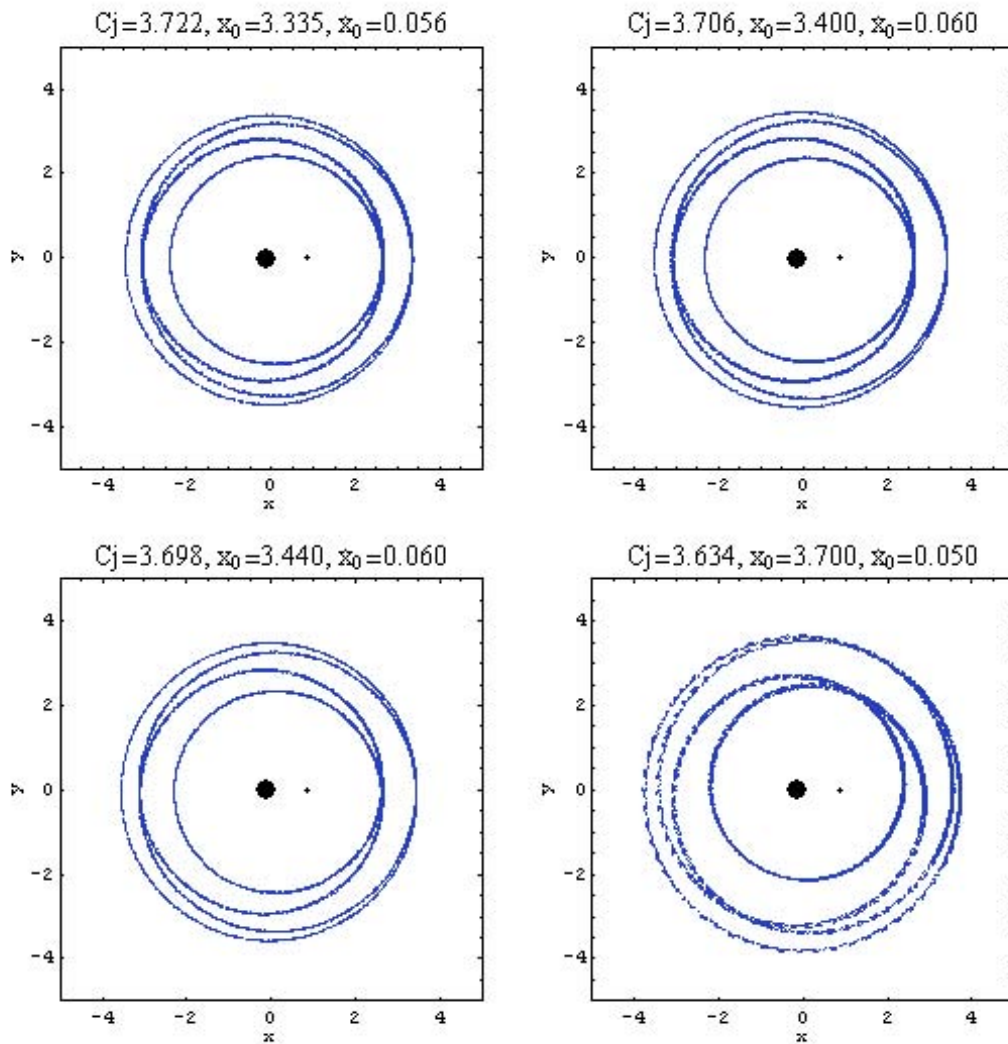
### 6.3.2 As trajetórias para o caso externo: órbitas Tipo-P

Como dito na sub-seção 6.2.4, as órbitas periódicas são os centros das ilhas das superfícies das SSP e podem corresponder ao centro de ressonâncias. Algumas órbitas foram determinadas para os centros das ilhas SSP para o caso externo.

Um exemplo das órbitas periódicas é a Figura 6.13, na qual verificou-se que há a continuidade do comportamento da trajetória para os diversos valores de  $C_j$  compreendidos na zona estável apresentada na Figura 6.18 na sub-seção 6.3.4. E essas



**Figura 6.13:** Família eI - órbitas periódicas retrógradas ao redor do binário. Segundo Broucke (1968) estas seriam órbitas da Família F. As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da figura. Este tipo de órbita é o centro principal de cada uma das ilhas das SSP no intervalo de  $3.274 \leq C_j \leq 7.010$ .



**Figura 6.14:** Órbitas retrógradas em ressonância 1:5 ao redor do binário. As condições iniciais das órbitas estão apresentadas em cada quadro da Figura. Este tipo de órbita foi obtido dadas as condições iniciais de uma ilha do conjunto de quatro (ordem 4 de ressonância) para as SSP no intervalo de  $3.634 \leq C_j \leq 3.730$ .

órbitas, retrógradas, segundo a classificação de Broucke (1968) seriam pertencentes à Família F.

A análise das ilhas menores, fora do centro da libração, levou a órbitas ressonantes como o exemplo da Figura 6.14, onde dado o centro de uma das ilhas do conjunto determinou-se a trajetória para cada uma das condições iniciais dos quadros da figura. Então, considerando o tempo que a órbita ressonante leva para começar a se repetir no sistema girante, foi determinada a ressonância 1:5. Mais a respeito de órbitas ressonantes para o caso externo será dito na próxima seção referente aos novos satélites do sistema Plutão-Caronte.

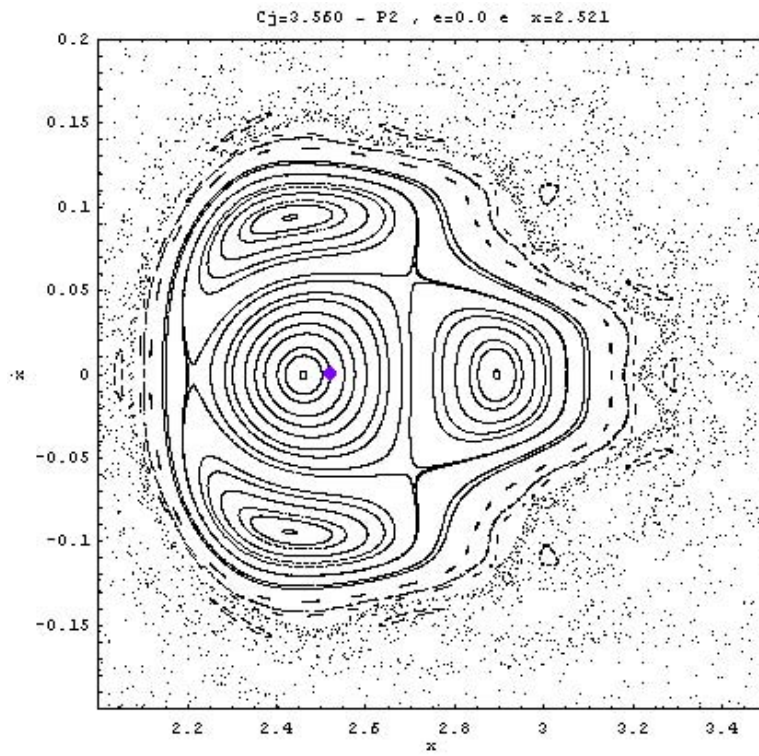
### 6.3.3 As Superfícies de Secções de Poincaré e os novos satélites Nix e Hidra

Os novos satélites do sistema Plutoniano, Nix e Hidra, descobertos 27 anos após Caronte, têm períodos, respectivamente, iguais a  $25.5 \pm 0.5$  dias e  $38.2 \pm 0.8$  dias. A distância de Nix ao baricentro é de  $49500 \pm 600 \text{ km}$  e de Hidra é de  $64700 \pm 850 \text{ km}$ , conforme citado no Capítulo II. Como já dito naquele capítulo, de acordo com os movimentos médios dos satélites e o movimento médio de Caronte cada um destes satélites poderia estar em ressonância com o secundário, 1:4 para Nix e 1:6 para Hidra.

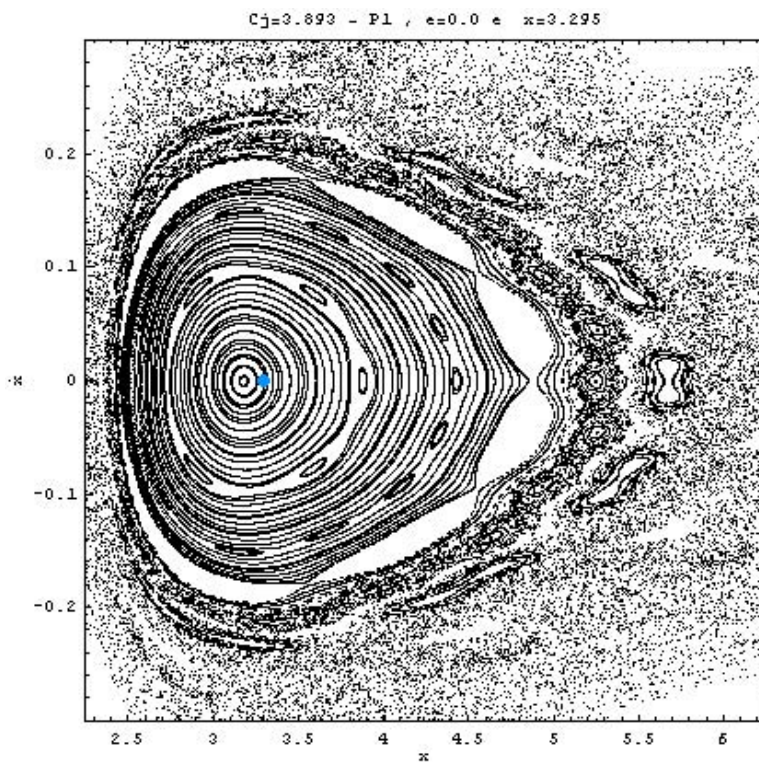
Para verificar a possibilidade destes satélites estarem nessas ressonâncias com Caronte, foram determinados intervalos de valores de  $C_j$  para os quais as SSP correspondem aos planos em que se dão as localizações dos satélites no espaço de fase  $x \times \dot{x}$ . O primeiro valor de  $C_j$  considerado para cada um dos satélites foi determinado a partir do valor de suas distâncias do baricentro,  $r$ , para  $e = 0.0$  (Figura 6.15(a) – Nix, Figura 6.15(b) – Hidra). Os objetos foram considerados partículas e as constantes de Jacobi (do problema circular planar restrito de três corpos) foram calculadas para a posição inicial no pericentro.

Na Figura 6.15(a) é mostrado o espaço de fase para o valor de  $C_j = 2.560$ . O ponto lilás para o par ordenado  $(x, \dot{x}) \rightarrow (2.521, 0.0)$  é referente à posição de Nix. A ilha na linha de conjuntura pertencente ao conjunto de ilhas de ressonância de ordem 3 (1:4), esperada para este satélite, está para  $2.7 \leq x \leq 3.1$ . Na Figura 6.15(b), SSP para  $C_j = 3.893$ , o ponto azul  $(3.295, 0.0)$  é Hidra e a ressonância de ordem 5 (1:6) está para  $3.85 \leq x \leq 3.9$ . Portanto, ambos os satélites estão, para estas constantes de Jacobi, fora da localização das ressonâncias.

As órbitas para partículas-teste com condições iniciais dos centros das ilhas foram determinadas: no sistema rotacional – Figura 6.16 (a,b), e , no sistema inercial – Figura 6.16 (c,d). Os períodos das órbitas foram determinados e para a ressonância de terceira ordem o período é de aproximadamente  $25 \text{ dias}$  o que indica que a ressonância é 1:4.; para a ressonância de quinta ordem o período determinado foi de  $38 \text{ dias}$ , assim, a ressonância deste caso é de 1:6.

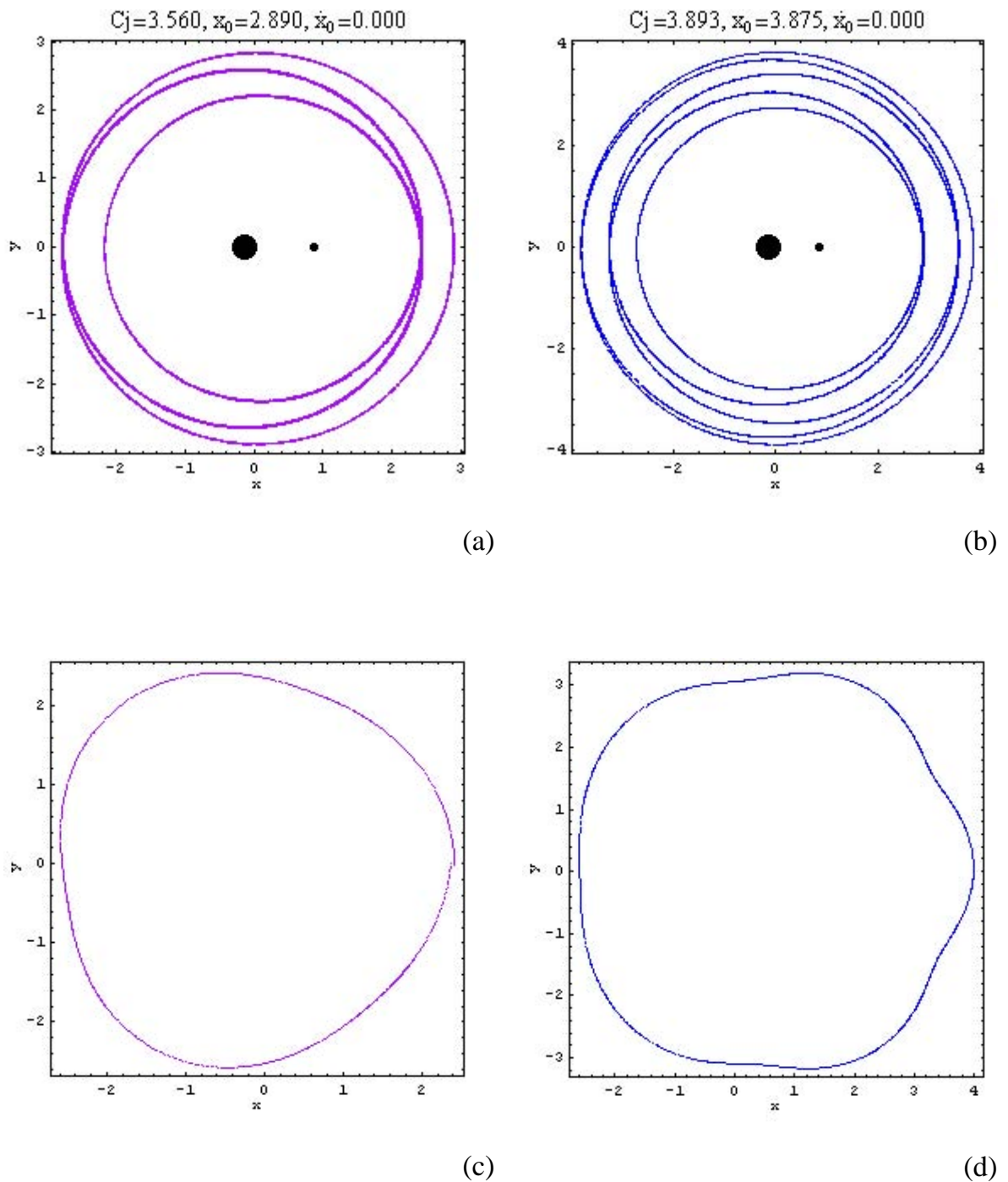


(a)



(b)

**Figura 6.15:** Secções de Poincaré: (a) valor de  $C_j = 3.560$  — o ponto lilás corresponde à posição do satélite Nix; observa-se que as ilhas da ressonância de ordem 3, na linha de conjuntura, está em  $2.7 \leq x \leq 3.1$ . (b) valor de  $C_j = 3.893$  — o ponto azul corresponde a posição do satélite Hidra; observa-se que as ilhas de ressonância de ordem 5, na linha de conjuntura, está em  $3.85 \leq x \leq 3.9$ .



**Figura 6.16:** Trajetórias para as condições iniciais segundo os centros das ilhas ressonantes nas respectivas Superfícies de Seções de Poincaré. Para o valor de  $C_j = 3.560$  — trajetória para uma partícula-teste em ressonância 1:4 com Caronte, respectivamente, (a) no sistema rotacional e (c) no inercial. Para o valor de  $C_j = 3.893$  — trajetória para uma partícula-teste em ressonância 1:6 com Caronte, respectivamente, (b) no sistema rotacional e (d) no inercial.

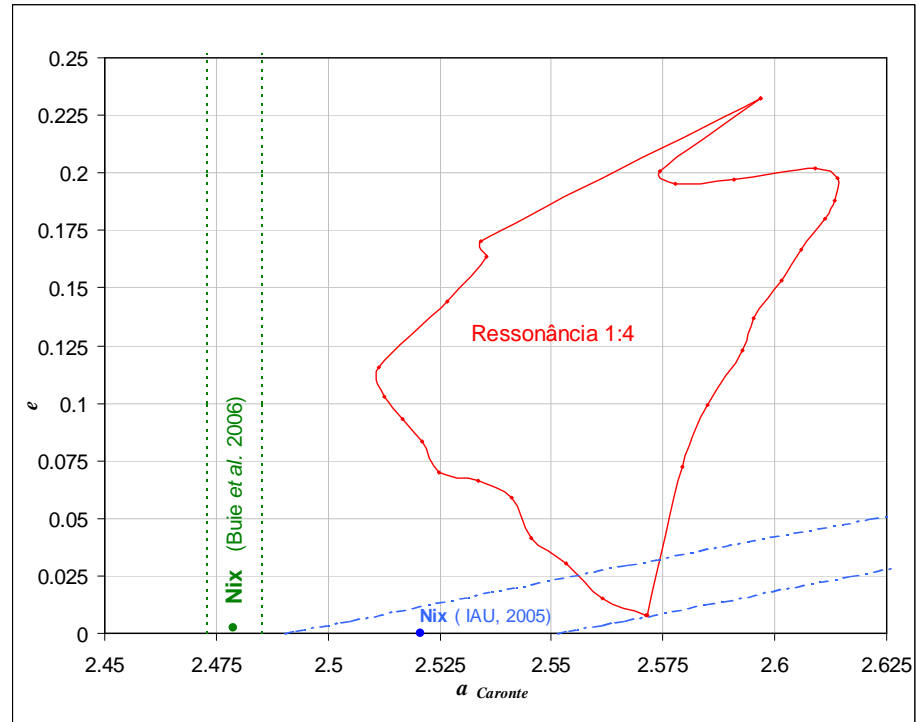
Aprofundando no espaço de fase  $(x, \dot{x})$  com o intuito de seguir essas ressonâncias foram geradas SSP para os intervalos de:  $3.515 \leq C_j \leq 3.590$ , para acompanhar a

ressonância 1:4, e,  $3.750 \leq C_j \leq 3.938$ , para acompanhar a ressonância 1:6. Estas SSP encontram-se no Anexo B.

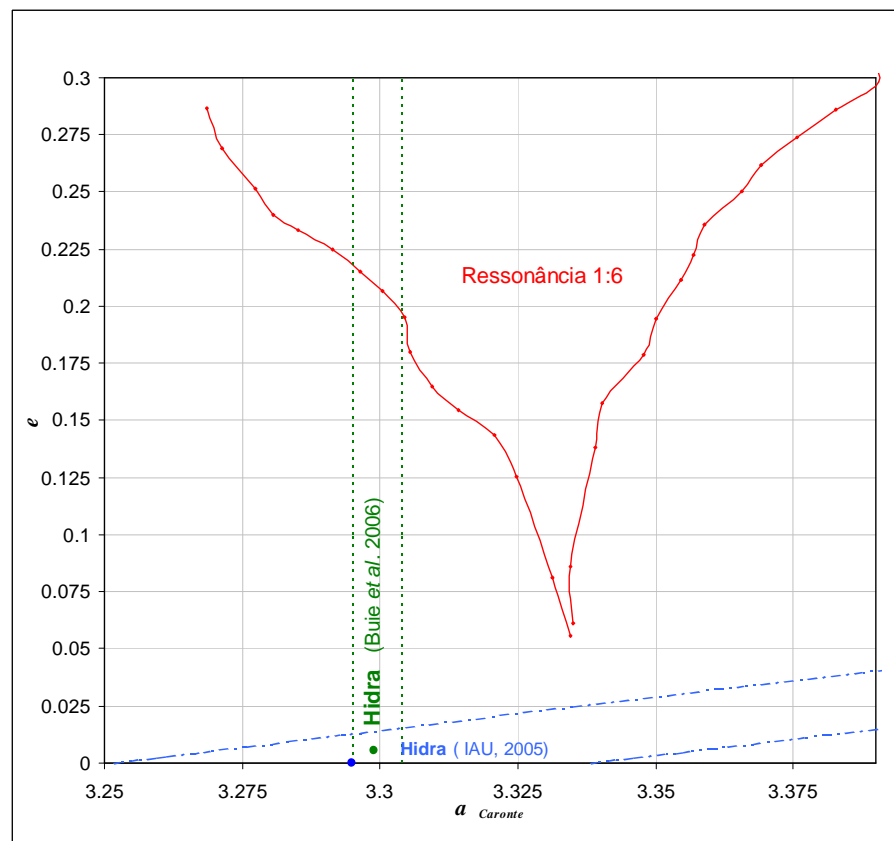
Dadas as SSP foram medidos os valores de  $x$  correspondentes às amplitudes de libração para cada ilha ressonante na linha de conjuntura até que as ilhas desaparecessem. Destes valores de  $x$  foram encontrados valores de  $a$  e  $e$  para que fossem então gerados os diagramas da Figura 6.17(a,b). A amplitude de libração fornece a região estável vinculada à respectiva ressonância. Para a ressonância 1:4 a região estável foi fechada; acima do maior valor de  $C_j$  do diagrama (Figura 6.17(a)) as ilhas, nas SSP correspondentes à essa ressonância, se bifurcam e não mais poderiam ser representadas junto a estes dados. Para o diagrama da ressonância 1:6 (Figura 6.17(b)), a seqüência para excentricidades muito altas não foi seguida. Ambos os diagramas se fecham quando as respectivas ilhas de ressonância desaparecem nas seqüências das SSP consideradas, geralmente indicam baixos valores para excentricidade. As áreas entre as linhas azuis e verdes são referentes às zonas onde possivelmente os satélites se encontrariam (Nix – Figura 6.17 (a) e Hidra – Figura 6.17(b)) segundo os dados fornecidos pela IAU e por Buie *et al.* (2006), respectivamente. Cada um dos valores de semi-eixo maior é normalizado por 19636 km (distância Plutão-Caronte).

Os dados fornecidos pela IAU (2005) para os novos satélites são os raios ( $r$ ) medidos destes corpos em relação ao baricentro de Plutão-Caronte. Buie *et al.*(2006) aprimoraram os dados para os novos satélites e determinaram que o semi-eixo maior e a excentricidade para Hidra são de  $64780 \pm 88$  km e  $0.0052 \pm 11$ , respectivamente. Para Nix os valores são  $a = 48675 \pm 121$  km e  $e = 0.0023 \pm 21$ .

As linhas que se iniciam à esquerda, dadas as incertezas das medidas, correspondem aos valores mínimos e aquelas mais à direita, aos valores máximos. Os pontos representam a localização do satélite quando não considerada a incerteza, para a representação segundo os dados de Buie *et al.*(2006) a excentricidade considerada em cada caso foi o valor exato fornecido, e, para os dados referentes a IAU, o ponto foi gerado para  $e = 0.0$ .



(a)



(b)

**Figura 6.17:** Diagrama  $a$  x  $e$  para as ressonâncias (a) 1:4 e (b) 1:6. As linhas verdes são referentes aos dados de Buie *et al.*(2006) e as azuis correspondem ao valor de  $r$  (distância Plutão-satélite) variando a excentricidade.

No diagrama da Figura 6.17(a) a região da ressonância 1:4 está distante dos valores considerados pelas medidas mais recentes apresentadas por Buie *et al.* (2006). Quando

é considerado o valor de  $r$  em relação ao baricentro e variada a excentricidade, a área entre as linhas (azuis) chega a atravessar a região determinada pela ressonância para excentricidades entre 0.015 e 0.035, com valores de semi-eixo maior entre 2.55 e 2.57 aproximadamente. Apenas dentre estas condições o satélite se encontraria em ressonância com Caronte.

No diagrama da Figura 6.17(b) a região da ressonância 1:6 também não engloba o satélite Hidra na área segundo os dados de Buie *et al.* (2006) (linhas verdes), a não ser para excentricidades acima de 0.2. Para o valor de  $r$  com a variação da excentricidade, a região delimitada não se aproxima da área determinada pela ressonância. Para este caso, está excluída a possibilidade de ressonância 1:6 do satélite com Caronte.

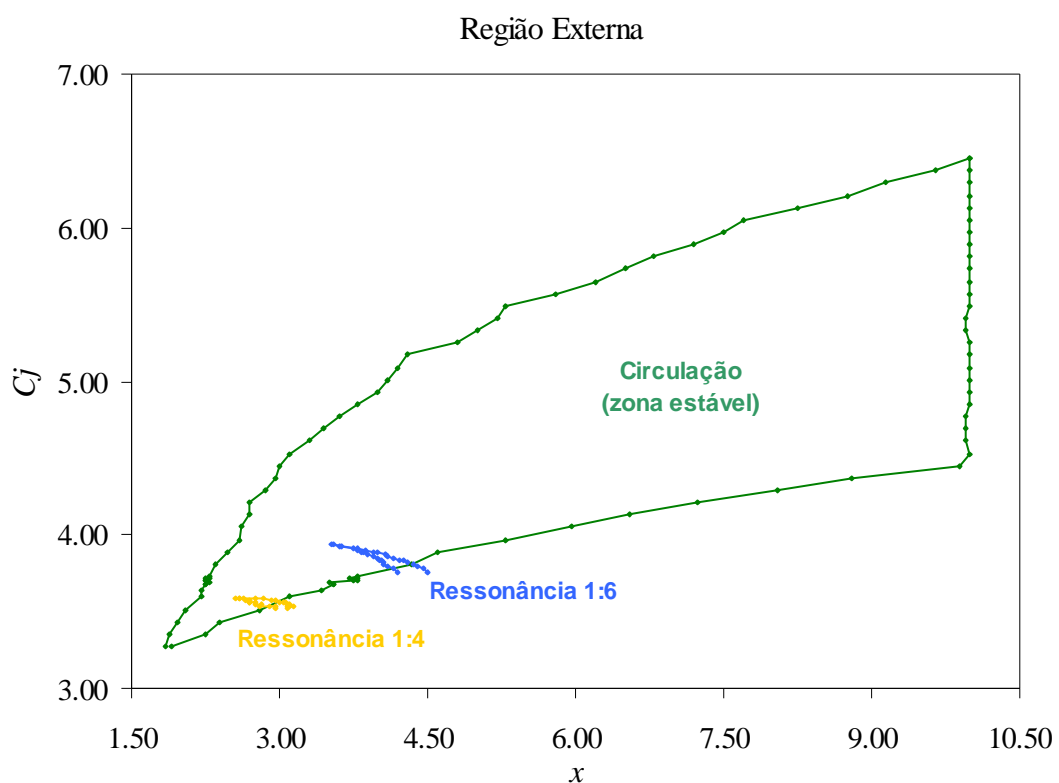
Pode ser dito que a estabilidade dos satélites não é devida a ressonâncias com Caronte. De acordo com as SSP, os satélites estão localizados em zonas de órbitas quase-periódicas ao redor do baricentro do sistema.

#### **6.3.4 Amplitude de oscilação e o diagrama $C_j$ x $x$**

Após a análise das amplitudes de oscilação, obtém-se também para a região externa o diagrama  $C_j$  por  $x$  — ver Figura 6.18. Este diagrama apresenta a síntese da análise da região de estabilidade para a região externa aos corpos massivos, cujos dados advêm das amplitudes de libração para diferentes valores de constantes de Jacobi.

A área delimitada na Figura 6.18 determina a região estável para os valores de constante de Jacobi num certo intervalo de  $x$ . A região estável começa para  $x$  em torno de 1.75, o que é coincidente com o valor estipulado por Holman e Wiegert (1999) (referido no Capítulo 5). Eles determinaram que a região estável para a área externa aos corpos massivos começaria para um valor de semi-eixo maior superior a aproximadamente 40200 *km*, que normalizado equivale a dois, próximo do valor apresentado no diagrama.

As ressonâncias indicadas 1:4 e 1:6 foram aquelas estudadas na sub-seção anterior. É percebido, para ambos valores de ressonâncias, que suas representações de estabilidade já se encontram dentro da área compreendida pela circulação apresentada nas SSP. Assim, partículas presas ao sistema por ressonância naquela região poderiam estar descrevendo órbitas periódicas não-ressonantes, se o  $x$  fosse alterado o suficiente para tirá-las de dentro da maior amplitude descrita ao redor do centro da ilha ressonante.



**Figura 6.18:** Diagrama  $C_j$  por  $x$  — a área determina a região estável. A maior variação de  $x$  representa a maior amplitude de oscilação das órbitas quase-periódicas. É percebido que as ressonâncias 1:4 e 1:6 já se encontram dentro da região estável, pois estão englobadas pela circulação apresentada nas SSP.

Pode-se dizer que o estudo do espaço de fase do sistema Plutão-Caronte, através da técnica das SSP, é significativo e determinante quanto à estabilidade. E embora o modelo considerado seja o Problema Circular Restrito de Três Corpos, a inclusão da excentricidade de Caronte no Capítulo 5 mostrou-se pouco significativa diante da atração mútua do binário sobre os corpos, o que reforça a validade dos resultados. No próximo capítulo, seguem as conclusões do estudo.

## CAPÍTULO 7 DISCUSSÕES E CONCLUSÃO

Este estudo visou a determinação das regiões estáveis para o nono planeta do Sistema Solar: Plutão, que junto ao seu maior satélite, Caronte, compõe na verdade um sistema binário.

Plutão-Caronte, a partir da descoberta de Hidra e Nix, passou a ser o único sistema binário conhecido a ter corpos orbitando o baricentro em órbitas do tipo planetária (Tipo-P). A descoberta destes corpos deu-se já no decorrer do estudo, vindo a enfatizar os resultados obtidos para a região externa aos corpos massivos, que assim como a região interna foi estudada tendo como modelo o Problema Restrito de Três Corpos.

Foram feitas integrações numéricas para partículas por períodos equivalentes a  $1.5 \times 10^4$  períodos orbitais de Caronte, determinando-se uma grade  $a \times e$  onde se distinguem as regiões estáveis das de colisão ou escape – Capítulo 5. Estas grades foram simuladas para partículas orbitando cada um dos corpos massivos – órbitas tipo satélite (Tipo-S). Os resultados obtidos mostram regiões de estabilidade ao redor de cada um dos corpos massivos, para semi-eixos maiores de até aproximadamente  $8200\text{km}$  para Plutão e  $2900\text{km}$  para Caronte, o que confere com as fórmulas de Holman e Wiegert (1999), mas é distinto dos valores obtidos por Nagy *et al.* (2006), que não encontraram regiões estáveis para órbitas ao redor de Caronte. Para a simulação de órbitas Tipo-P, o início da região estável deu-se a  $48500\text{km}$  sendo superior ao valor de Holman e Wiegert (1999) que apontava para um semi-eixo maior crítico para  $40200\text{km}$ . Mas considerando que os autores afirmam ser o limiar entre a região estável e instável diretamente dependente do período de integração, sendo que o período de simulação neste estudo foi superior em 30%, o resultado é válido.

Neste trabalho as regiões de estabilidade foram também determinadas através do uso das Superfícies de Secções de Poincaré (SSP) – Capítulo 6, que especialmente,

indicaram regiões estáveis ao redor de Caronte, confirmando os resultados obtidos anteriormente para a região interna.

Nas SSP geradas, encontra-se uma infinidade de ressonâncias de diversas ordens; entretanto, não foram determinadas ressonâncias de primeira ordem para nenhum dos casos analisados, fato que seria uma peculiaridade da razão de massa da ordem de  $10^{-1}$ . As ilhas centrais (os sumidouros) correspondem a órbitas periódicas não ressonantes.

A partir das SSP foram determinadas as amplitudes de oscilação para os principais centros de ilhas. Tal determinação possibilitou a elaboração dos diagramas  $C_j \times x$  que sintetizam as regiões estáveis à partícula no sistema. Estes resultados apontam para regiões estáveis para valores de semi-eixo maior de: para órbitas ao redor de Plutão inferior a  $10000\text{ km}$ , para órbitas ao redor de Caronte até  $15000\text{ km}$  (o que não coincide com o resultado obtido anteriormente, segundo a teoria de Holman e Wiegert (1999), pois tratam-se de órbitas retrógradas) e para a região externa o início da região estável está em  $40000\text{ km}$ , indo até  $130000\text{ km}$ , ainda dentro da esfera de Hill do sistema.

Para o caso externo foram especialmente analisadas as ressonâncias 1:4 e a 1:6, com o intuito de verificar a possibilidade dos satélites Nix e Hidra estarem em ressonância com Caronte, pois o período de cada um deles apontava para isto. Obteve-se o diagrama  $a \times e$  através das amplitudes de oscilação do grupo das ilhas correspondentes a cada uma das ressonâncias e concluiu-se que: para que os satélites estejam em ressonância certamente o erro das medidas deve ser maior que o considerado, principalmente quando se trata dos últimos dados de Nix e Hidra apresentados por Buie *et al.* (2006).

Foi realizada uma breve análise das regiões próximas aos pontos de equilíbrio triangulares, levando em conta a formação de órbitas de ferradura e girino. Simulações numéricas de trajetórias foram feitas com diferentes razões de massa, para comparação com o sistema Plutão-Caronte. Como era esperado, os pontos de equilíbrio triangulares são instáveis e as trajetórias para o sistema em questão são imprevisíveis dados um pequeno deslocamento.

## REFERÊNCIAS

BROUCKE, R.A. **Periodic orbits in the restricted three-body problem with Earth-Moon masses.** 1968. 92f. Technical report 32-1168 – Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena.

BUIE, M.W., GRUNDY, W.M. Orbits and photometry of Pluto's satellites: Charon, S/2005 P1 and S/2005 P2. **Astronomical Journal**, v.132, p.290-298, 2006.

CELESTINO, C.C. **Um estudo do espaço de fase do problema restrito de três corpos.** 1999. 127f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

CRUIKSHANK, D.P. Triton, Pluto, and Charon. In: Beatty, J.K., Pertersen, C.C., Chainkin, A. (Eds.). **The new Solar system.** 4<sup>th</sup> ed. Cambridge: Sky Publishing Corporation, 1999, c.21, p.285-296.

DERMOTT, S.F., MURRAY, C.D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits I: theory. **Icarus**, New York, v.48, p.1-11, 1981.

DVORAK, R., FROESCHLÉ, CH., FROESCHLÉ, CL. Stability of outer planetary orbits (P-types) in binaries. **Astronomy and Astrophysics**, v.226, p.335-342, 1989.

EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. In: COLLOQUIUM OF THE INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION: Dynamics of comets: their origin and evolution, 83, 1984, Rome-Italy. **Proceedings...**Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1985.

GUO, Y., FARQUHAR, R.W. New Horizons Pluto-Kuiper Belt mission: design and simulation of the Pluto-Charon encounter. **Acta Astronautica**, Elmsford, v.56, n.3, p.421- 429, 2005.

HOLMAN, M.J. , WIEGERT, P.A. Long-term stability of planets in binary systems. **Astronomical Journal**, Albany, v.117, p.621-628, 1999.

LEVISON, H.F., STERN, S.A. Possible origin and early dynamical evolution of the Pluto-Charon binary. **Icarus**, New York, v.116, p.315-339, 1995.

LITTMANN, M. **Planets Beyond: discovering the outer Solar system**. New York: Wiley Science Editions, 1988.

MALHOTRA, R. The origin of Pluto's orbit: implications for the Solar system beyond Neptune. **Astronomical Journal**, Albany, v.110, p.420-432, 1995.

MALHOTRA, R. The phase space structure near Neptune resonances in the Kuiper Belt. **Astronomical Journal**, Albany, v.111, p.504-516, 1996.

MURRAY, C.D., DERMOTT, S.F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

NAGY, I. , SÜLI, A., ÉRDI, B. A stability study of Pluto's moon system. **Monthly Notices of the Royal Astronomic Society: Letters**, London, v.370, n.1, p.L1-L93, 2006.

OLKIN, C.B., WASSERMAN, L.H. The mass ratio of Charon to Pluto from Hubble space telescope astrometry with the fine guidance sensors. **Icarus**, New York, v.164, p.254-259, 2003.

PRESS, W.H., et al. Integration of Ordinary Differential Equations. In: **Numerical Recipes in Fortran version: the art of scientific computing**, Cambridge: Cambridge University Press, 1989 .

ROIG, F., FERRAZ-MELLO, S. A symplectic mapping approach of the dynamics of the Hecuba gap. **Planetary and Space Science**, London, v.47, n.5, p.653-664, 1999.

STERN, S.A., et al. Giant impact origin for Pluto's small moons and satellite multiplicity in the Kuiper belt. **Nature**, London, v.439, p.946-948, 2006.

STERN, S.A. Jornada ao planeta mais distante. **Scientific American Brasil**, São Paulo, v.1, p.46-53, 2002.

SUSSMAN, G. J., WISDOM, J. Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic. **Science**, Washington, DC, v.241, p.433-437, 1988.

SZEBEHELY, V. **Theory of orbits: the restricted problem of three bodies**. New York: Academic Press, 1967.

THIESSENHUSEN, K.-U., KRIVOV, A.V., KRÜGER, H., GRÜN, E. A dust cloud around Pluto and Charon. **Planetary and Space Science**, London, v.50, p.79-87, 2002.

THOLEN, D.J., BUIE, M.W. The orbit of Charon. **Icarus**, New York, v.125, p.245-260, 1997.

VIEIRA NETO, E., WINTER, O.C. Time analysis for temporary gravitational capture: satellites of Uranus. **Astronomical Journal**, Albany, v.122, p.440-448, 2001.

WEAVER, H. A., et al. Discovery of two new satellites of Pluto. **Nature**, London, v.439, p.943-944, 2006.

WEISSMAN, P.R., STERN, S.A. The impactor flux in the Pluto-Charon system. **Icarus**, New York, v.111, p.378-386, 1994.

WINTER, O.C., MURRAY, C. D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem**. I. Internal orbits. London: School of Mathematical Sciences, Queen Mary and Westfield College, 1994a.

WINTER, O.C., MURRAY, C. D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem**. II. External orbits. London: School of Mathematical Sciences, Queen Mary and Westfield College, 1994b.

WINTER, O.C., MURRAY, C. D. Resonance and chaos I: first-order interior resonances. **Astronomy and Astrophysics**, v.319, p.290-304, 1997.

WINTER, O.C. The stability evolution of a family of simply periodic lunar orbits. **Planetary and Space Science**, London, v.48, p.23-28, 2000.

WINTER, O.C., VIEIRA NETO, E. Distant stable direct orbits around the Moon. **Astronomy and Astrophysics**, v.393, p.661-671, 2002.

## **BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

BENEST, D. Planetary orbits in the elliptic restricted problem: V. **Astronomy and Astrophysics**, v.400, p.1103-1111, 2003.

CANUP, R. M. A giant impact origin of Pluto-Charon. **Science**, Washington, DC, v.307, p.546-550, 2005.

COWELL, J.E. A general formulation for the distribution of impacts and ejecta from small planetary satellites. **Icarus**, New York, v.106, p.536-548, 1993.

DURDA, D.D., STERN, S.A. Collision rates in the present-day Kuiper Belt and Centaur regions: applications to surface activation and modification on comets, Kuiper Belt objects, Centaurs, and Pluto-Charon. **Icarus**, New York, v.145, p.220-229, 2000.

GRUNDY, W.M., et al. Probing The Solar System's outermost frontier: the future of Kuiper Belt studies. **In: The future of Solar System exploration, 2003-2013**. Chelsea: Sheridan Books Press, 2002 .

HÉNON, M.. Numerical exploration of the restricted problem V: Hill's case: periodic orbits and their stability. **Astronomy and Astrophysics**, v.001, p.223-238, 1969.

MARCHAL, C. **The three-body problem**. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1990.

PILAT-LOHINGER, E., FUNK, B., DVORAK, R. Stability limits in double stars: a study of inclined planetary orbits. **Astronomy and Astrophysics**, v.400, p.1085-1094, 2003.