UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE UM FORMADOR DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM INÍCIO DE CARREIRA: O ENSINO A DISTÂNCIA DE DERIVADA

Daiane dos Santos Correa Cabanha

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
***Câmpus* de Rio Claro**

DAIANE DOS SANTOS CORREA CABANHA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE UM FORMADOR DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM INÍCIO DE CARREIRA: O ENSINO A DISTÂNCIA DE DERIVADA

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como requisito para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Marcus Vinicius Maltempi

Rio Claro - SP
2018

C112c

Cabanha, Daiane dos Santos Correa
Conhecimento Especializado de um Formador de professores de Matemática em início de carreira : O ensino a distância de Derivada / Daiane dos Santos Correa Cabanha. -- Rio Claro, 2018
201 p. : il., tabs., 2 v.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Marcus Vinicius Maltempi

1. EaD. 2. Derivada. 3. MTSK. 4. Revelado. 5. Formador de Professores. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

DAIANE DOS SANTOS CORREA CABANHA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE UM FORMADOR DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM INÍCIO DE CARREIRA: O ENSINO A DISTÂNCIA DE DERIVADA

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do *campus* de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como requisito para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. José Carrillo Yañez
Universidade de Huelva – Espanha

Prof(a). Dr(a). Suely Scherer
IMA/UFMS/Campo Grande (MS)

Prof. Dr. C. Miguel Ribeiro
FE/Unicamp/Campinas (SP)

Prof(a). Dr(a). Rúbia Barcelos do Amaral Schio
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, 23 de outubro de 2018

RESULTADO: APROVADA

Dedico este trabalho a todos aqueles que atuaram como professores em algum momento da minha vida. A começar pelos meus pais, esposo e demais familiares.

Graças dou sim pela vida
Que o bom Deus a mim legou
Graças dou por meu futuro
E por tudo que passou
(Música "Graças")

Os que me conhecem mais de perto sabem que enquanto escrevo estes agradecimentos não fui capaz de conter as lágrimas... Pensar que aquela menina tímida, criada na "grande" cidade de Naviraí (MS), de família humilde, conseguiu chegar até aqui, mesmo que as circunstâncias tenham sido, muitas vezes, desfavoráveis e as adversidades estiveram presentes durante grande parte desse caminho...

Deus me deu o privilégio de ter pais maravilhosos que, apesar de todas as dificuldades que viveram durante a vida, me deram sempre o melhor que puderam e me ensinaram, também, que são nossos esforços, somados ao auxílio Divino, que definem quem seremos, e não as circunstâncias. Pai (Ariovaldo) e mãe (Dileuza) obrigada por me ensinar que é possível sonhar mesmo quando tudo parece impossível! E que não basta sonhar, é preciso correr atrás e pagar o preço!

Deus também me deu o privilégio de ter alguém para chamar de amor! Meu amor (Davi)! Obrigada por me ensinar na prática o que é amor, ao dar uma pausa em seus sonhos para viver os meus, os nossos... Obrigada por estar ao meu lado, mesmo quando precisou estar ausente. Obrigada por me incentivar a continuar sonhando! Ainda temos muito a sonhar juntos!

Além destes, Deus me deu presentes, que carinhosamente chamo de irmãos! Margi, Léu, Sandy e Nando, obrigada por existirem em minha vida! Pela força, palavras de incentivo, preocupações com meu bem-estar e segurança... enfim, amo vocês! Os outros presentes de Deus chamo de sogra, avós, tios, primos, sobrinhos e cunhados. Obrigada por tudo!

Durante a realização desta pesquisa, Deus colocou em meu caminho pessoas que se tornaram muito especiais. A elas minha eterna gratidão!

A começar pelo Maltempi, que me orientou durante todo o processo da pesquisa. Professor, obrigada pela paciência, pela dedicação, pelo auxílio em todos os momentos, por me apoiar em projetos externos à pesquisa, pelas palavras sempre tão assertivas. Por me ensinar, entre tantas outras coisas, que é possível manter a calma mesmo em meio a tantas coisas a fazer e, principalmente, por provar que é possível conciliar família e pesquisa.

Pepe, meu orientador da Espanha. Muchas gracias por mi recibir tan a gusto durante mi estancia en Huelva, por las charlas y consejos sobre la investigación y otros proyectos, por aceptar mi invitación a Brasil, por los almuerzos en Aracena (José Vicente) o las cenas por la ciudad, por, mismo sabiendo de mis limitaciones, apoyarme y incentivarme a ir adelante. Por me enseñar, entre otras cosas, que el trabajo colaborativo es un regalo y que la familia es nuestro más precioso bien.

Dra. Suely, Dr. Miguel e Dra. Rúbia. Vocês sabem o quanto sou grata a cada um de vocês! Neste momento, quero agradecer pelas contribuições referentes a elaboração deste trabalho, pois as sugestões de cada um foram indispensáveis na elaboração e finalização deste trabalho. A vocês, minha eterna gratidão!

Membros do GPIMEM, muito obrigada por tantas discussões e puxões de orelha! Pelas vezes que saí desconcertada das reuniões. Cada um desses momentos, e tantos outros que envolveram outras discussões, foram importantíssimos para a constituição deste trabalho. Vocês são fera!!!

Membros do SIDM, muchas gracias por lo empeño en el desarrollo del MTSK, que nasció con el ansia de hacernos mirar y tener gana de cambiar y desarrollar nuestro propio conocimiento. Por todos los momentos de trabajo, sea em 2015 cuando estuvo con ustedes, o en los encuentros por la *web* que tenemos mensualmente. ¡Aunque no pudo estar en todos, ustedes me enseñaron la fuerza del trabajo colaborativo! Juntos podemos llegar más allá!!

Membros do CIEspMat, muito obrigada pelas discussões riquíssimas que tivemos em vários momentos! Pelas desestabilizações diárias pelo *Whatsapp*, pelo incentivo a fazer sempre o melhor e pelo privilégio de podermos desenvolver pesquisas para e com professores de Matemática. Vocês são demais!!!

Não posso deixar de citar amigos que estiveram comigo antes e durante esta caminhada. Alguns já estavam comigo antes, outros eu “encontrei” logo no início, outros, apenas no final. Juliana Alves, Vanessa de Jesus, Thais Fialho, Rocilce, Ingride, Bia, Marta, “última turma da disciplina de Análise”, “Maltempeiros”, Regis, Família GEMED. Obrigada por tudo!

Agnaldo, Viviane, Alice e João Pedro, obrigada por me fazerem sentir em família todas as vezes que tive que estar longe da minha.

Houve aqueles que, quando eu achava que não conseguiria mais andar, tornaram meus últimos passos mais leves e permaneceram ao meu lado até o fim:

Hannah, Rejane, Claudio (cunhado), Maria Francisca, Fátima Liuti e Thiago Moessa, só Deus para retribuir todo apoio! Louvo a Ele pela vida de vocês!

Ana Paula, irmã que Deus me deu. Só nós sabemos da história que escrevemos juntas. O Daniel nasceu para nos ensinar a ter fé e perseverança, mesmo que as circunstâncias sejam adversas! Obrigada por tudo! Eu cheguei aqui com teu auxílio, mas tenha certeza que estamos todos ao teu lado pra terminarmos juntas essa caminhada.

Não posso deixar de agradecer aos professores que me ensinaram por meio das disciplinas nesse período: Romulo Lins (*in memoria)*, Heloísa, Rosana Miskulin, Rosa Baroni e Maltempi. E, também aqueles que em outros momentos, tão produtivos quanto, contribuíram na minha caminhada: Paula Malheiros, Arlete, Lourdes Onuchic, Marcelo Borba, Marquinhos, Sueli Javaroni, Roger Miarka, Rúbia e todos os demais professores do programa.

Agradeço também a todos os professores que passaram pela minha vida... a começar pela tia Luzia, que ajudou minha mãe a me alfabetizar, passando pela minha professora da pré-escola (Enedina) e todas os outros dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; continuando pelos professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, em especial à professora Edna, minha primeira professora de Matemática; continuando com todos os meus professores do Ensino Médio, em especial ao professor Pedro Gallo, também professor de Matemática, Graduação e Mestrado.

E por falar dos professores da graduação, agradeço especialmente à professora Vera Corsino que me introduziu na pesquisa quando me orientou no TCC e ao Júnior, colega de curso que esteve presente em mina defesa de mestrado e plantou a semente que germinou e deu início a esta tese.

À Seção Técnica e secretárias da Pós-Graduação pela disposição sempre presente e em especial à Inajara, por sua alegria, praticidade e profissionalismo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Enfim, gostaria de citar todos, mas é inviável! Porém, se você se lembra de algum momento que compartilhou comigo durante o período do doutorado, embora seu nome não esteja aqui, saiba que ele está no meu coração! A todos vocês, o meu MUITO OBRIGADA!

Não é preciso concordar com o MCS[1] [ou MTSK] para entendê-lo. Aliás, pelo contrário, é impossível discordar propriamente dele sem entendê-lo, e o mesmo se aplica a qualquer sistematização teórica, e aqui a questão dos pressupostos é essencial. Pode-se rejeitar, logo de partida, um pressuposto de um modelo, e com isso rejeitar-se o modelo e deixá-lo de lado. Mas esta atitude não é intelectualmente saudável, pois faz com que nossas ideias, ao invés de se revigorarem na comparação com outras, vão se fossilizando em um isolamento (LINS, 1999, p. 94).

[1] MCS é a sigla do Modelo dos Campos Semânticos. Essa reflexão apresentada cabe para todos os modelos teóricos elaborados e foi escolhida como uma homenagem ao professor Rômulo Lins que tanto me marcou em vida, e que mesmo depois de sua partida continuará levando pessoas a refletirem e desenvolverem o pensamento crítico.

RESUMO

O objetivo da presente pesquisa é *caracterizar o Conhecimento Especializado revelado por um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' a distância*. Trata-se de uma pesquisa qualitativa no formato de estudo de caso, cujos dados produzidos por meio de entrevistas e de interações nos espaços de fórum do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) permitiram apresentar características do conhecimento especializado do participante que, pela primeira vez ofertou a disciplina de Cálculo I em um curso de Licenciatura em Matemática a distância, por isso é considerado como formador. A análise dos dados ocorreu sob o olhar da perspectiva teórica do Modelo denominado *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK). Entre as principais características do conhecimento especializado deste formador está o fato de que, mesmo em início de carreira, revelou conhecimentos que puderam ser relacionados a todos os subdomínios do MTSK. Como formador de professores, revelou ter se dedicado mais no desenvolvimento do conhecimento matemático de seus alunos do que no conhecimento didático da Derivada. Sua atuação como formador foi influenciada pela formação que teve durante a graduação e o mestrado, pelas conversas que teve com um professor mais experiente que ele, e por pesquisas que ele estudou ao se preparar para as aulas.

Palavras-chave: Educação a Distância. Derivada. Conhecimento Especializado. Revelado. Formador de Professor.

ABSTRACT

The goal of this research is to characterize the Specialized Knowledge revealed by a teacher educator of Mathematics, in initial career, when he/she is teaching Distance Derivative. It is a qualitative research in the form of a case study, whose data produced through interviews and interactions in the forums of the Virtual Learning Environment (AVA) allowed to present characteristics of the participant's specialized knowledge, which, for the first time offered the discipline of Calculus I in a course of undergraduate Degree in Mathematics at a distance, so it is considered as a teacher educator. The data analysis took place under the perspective of the theoretical perspective of the Model called Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Among the main characteristics of the expert knowledge of this teacher educator is the fact that, even at the beginning of his career, he revealed knowledge that could be related to all subdomains of MTSK. As teacher educator, he revealed that he had dedicated himself more to the development of mathematical knowledge of his students, than to the didactic knowledge of the Derivative. His work as a teacher educator was influenced by the training he had during his undergraduate and masters degree, by the conversations he had with more experienced teachers, and by research he studied while preparing for classes.

Keywords: Distance Education. Derived. Specialized Knowledge. Revealed. Teacher Trainer.

RESUMEN

El objetivo de la presente investigación es caracterizar el Conocimiento Especializado revelado por un formador de profesores de Matemáticas, al inicio de su carrera, al enseñar Derivada a distancia. Se trata de una investigación cualitativa en el formato de estudio de caso, cuyos datos producidos por medio de entrevistas y de interacciones en los espacios de foro del Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) permitieron presentar características del conocimiento especializado del participante que, por primera vez impartió clases de Cálculo I en un curso de Licenciatura en Matemáticas a distancia, por lo que es considerado como formador. El análisis de los datos ocurrió bajo la mirada de la perspectiva teórica del Modelo denominado el Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Entre las principales características del conocimiento especializado de este formador está el hecho de que, incluso al inicio de su carrera, reveló conocimientos que pudieron ser relacionados con todos los subdominios del MTSK. Como formador de profesores, reveló haber dedicado más en el desarrollo del conocimiento matemático de sus alumnos, que en el conocimiento didáctico de la Derivada. Su actuación como formador fue influenciada por la formación que tuvo durante la graduación y el máster, por las conversaciones que tuvo con un profesores expertos, y por investigaciones que él estudió al prepararse para las clases.

Palabras-clave: Educación a distancia. Derivada. Conocimiento Especializado. Revelado. Formador de Profesor.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MTSK – Conhecimento Especializado do Professor de Matemática
MK – Conhecimento Matemática
PCK – Conhecimento Didático do Conteúdo
KoT – Conhecimento do Tópicos (ou Temas)
KSM – Conhecimento da Estrutura da Matemática
KPM – Conhecimento da Prática da Matemática
KMT – Conhecimento do Ensino da Matemática
KFLM – Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática
KMLS – Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem da Matemática
EaD – Educação a Distância

SUMÁRIO

ANTES DO PRINCÍPIO

Tudo na vida tem um princípio. Porém, por mais incompreensível que possa parecer, nada se inicia do nada. Existe algo antes do princípio, mesmo que sem forma e vazio. É assim em vários momentos da vida e também foi antes do princípio desta tese.

No dia da minha defesa de mestrado, cuja dissertação é intitulada: “Licenciatura em Matemática a distância e a Formação de Professores para/com o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação” (CORREA, 2012), em uma conversa informal com alguns amigos antes da apresentação, um questionamento feito por um deles me incentivou a continuar pesquisando. A pergunta foi mais ou menos a seguinte: Nesse “lance” dos cursos de Licenciatura em Matemática a distância, como fica o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo)? É mesmo possível ensinar Cálculo a Distância?

No momento do questionamento, não tive a oportunidade de dar uma resposta elaborada. Recordo-me dizendo que sim, era possível ensinar Cálculo a distância, porém, não sabia ao certo como estava sendo realizado esse ensino. A única coisa da qual tinha certeza é que as tecnologias não estavam sendo utilizadas como poderiam. Disse, também, que questionamentos como esse nos levavam a perceber a necessidade de mais pesquisas sobre os cursos de Licenciatura em Matemática nesta modalidade.

E aqui estou novamente!

Embora responder à pergunta feita no dia da minha defesa de mestrado não seja o objetivo desta tese, o interesse em olhar para a disciplina de Cálculo nos cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade de Educação a Distância (EaD) permaneceu.

Sendo assim, escrevi um projeto de pesquisa a fim de concorrer a uma vaga para o doutorado junto ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, grupo este que tem tradição em pesquisar a modalidade EaD e a disciplina de Cálculo. O projeto submetido apresentava dados que eu havia conseguido por meio da minha pesquisa no mestrado, mostrando que as tecnologias eram utilizadas de forma tímida, numa abordagem instrucionista, porém não em todas as disciplinas. Além disso, o modelo que caracterizava o curso naquela época, oscilava entre a abordagem *broadcast*, onde o AVA é utilizado apenas para troca de informações, e “Virtualização da Escola Tradicional”, onde a didática proposta no AVA tenta reproduzir os movimentos que ocorrem na modalidade presencial.

Diante desse contexto, a princípio, eu propunha no projeto de pesquisa que professores da disciplina de Cálculo de cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD participassem de ações de formação que os levassem a vivenciar novas abordagens de ensino que utilizassem as tecnologias.

No decorrer do doutorado refleti sobre o que me dispunha a realizar durante este período, a partir dos inúmeros questionamentos que os colegas me fizeram, tive a esmagadora sensação de que propunha algo um tanto ousado e aparentemente impossível. Que aluno de doutorado teria a audácia de propor uma ação de formação para professores de Ensino Superior? Como os professores encarariam essa proposta? Quem participaria? A pesquisa que eu propunha era realmente exequível?

Afogada pelas disciplinas que tive que cursar concomitante à carga horária semanal de trabalho que tinha que me submeter no início do curso, me senti, muitas vezes, totalmente perdida. O tempo parecia algo impossível de se obter e, repensar a pesquisa era algo doloroso e necessário. Apesar de todas as dificuldades pontuadas, ainda permanecia o desejo de direcionar meu olhar sobre a disciplina de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática a distância.

Tinha ideia de para onde deveria olhar, o que precisava ser redefinido eram os óculos que eu utilizaria. Além disso, seria necessário um recorte dentro do universo do ensino de Cálculo, detalhando, assim, meu objeto de pesquisa. Sentia-me como quando ficamos parados por algum tempo olhando em uma direção. Estamos olhando naquela direção, mas o que realmente queremos enxergar? Naquela direção há muitos movimentos, muitas possibilidades, muitas informações que não necessariamente precisam ser desconsiderados. Mas, há a necessidade de um olhar mais focado, a fim de não apenas olhar e observar, mas enxergar algo que possa trazer informações que nos intrigue, nos motive a continuar olhando ainda com mais interesse e que, se possível, nos modifique e nos instigue a novos olhares em outras direções, com outras perspectivas e, quem sabe, com outras lentes.

Alguns desses movimentos ocorridos durante o período de doutorado são registrados nos próximos capítulos. Os questionamentos realizados durante o primeiro ano de doutorado levaram à reestruturação do projeto de pesquisa e à necessidade de elaboração de uma questão para nortear todo o processo.

No primeiro capítulo da tese apresento o movimento realizado para a constituição da questão de pesquisa, bem como do objetivo geral.

No segundo capítulo construo um panorama conceitual que envolve a compreensão sobre os elementos centrais da pergunta de pesquisa, representando, assim, o aporte teórico que norteará a análise de dados.

No terceiro capítulo, descrevo o caminho percorrido para a realização da pesquisa, ressaltando os instrumentos de produção e organização dos dados, as escolhas realizadas durante esse caminho e as categorias de análises que utilizei, a fim de realizar uma análise numa perspectiva interpretativa utilizando o estudo de caso como estratégia científica, no contexto de uma pesquisa qualitativa.

No quarto capítulo, apresentamos as análises realizadas a partir do aporte teórico constituído no capítulo dois, guiados pelo caminho descrito no capítulo três, com o intuito de responder à questão de pesquisa que foi trazida à tona no primeiro capítulo.

No quinto capítulo, finalmente, apresento conclusões e reflexões sobre o caminho percorrido durante a realização da pesquisa, e as novas questões que emergiram a partir das análises de dados, a fim de contribuir para a continuidade das discussões sobre os temas abarcados nesta tese e para a área de Educação Matemática.

Desejo a todos uma ótima leitura.

QUANDO EU PARTI...
A BUSCA POR UMA QUESTÃO DE PESQUISA

Quando eu parti partiu-se em mim meu coração
Meus pés tremeram ao pisar em outro chão
Eu disse adeus e a Deus eu disse sem razão
Que a minha companhia era a solidão
[...]
(Trecho “A Partida e o Norte” Estevão Queiroga)

1 O PRINCÍPIO

> Um dos momentos cruciais no desenvolvimento de uma pesquisa é o estabelecimento de sua *pergunta diretriz*. É ela que, como o próprio nome sugere, irá dirigir o desenrolar de todo o processo. Entretanto, como diversos pesquisadores devem saber, esse momento constitui-se, muitas vezes, como um dos mais difíceis em sua empreitada de pesquisa. (BORBA; ARAÚJO, 2004, p. 27).

É o que pretendo apresentar neste capítulo. É claro que estou consciente de que é impossível descrever as minúcias e que a constituição da questão de pesquisa permeia todo o processo. No entanto, neste capítulo quero apresentar a essência do movimento que foi realizado em direção à definição da questão da presente pesquisa.

Diferente de outras pesquisas que possam ter sido realizadas, esta não surgiu de uma questão já formulada. Inicialmente existiam alguns temas de interesse, entre eles a Licenciatura em Matemática da Educação a Distância e a disciplina de Cálculo, mas a constituição da questão de pesquisa “iniciou” ao longo do primeiro ano do doutorado e foi se aperfeiçoando durante os anos seguintes até chegar à que temos ao final deste capítulo.

Vale ressaltar que acredito que o princípio desta busca, assim como a reflexão e refinamento dos questionamentos iniciais recebem influências dos lugares onde me encontro. Esses lugares de onde falo além de influenciar as escolhas podem moldar os pensamentos. Durante o desenvolvimento da pesquisa, um desses lugares em que estava imersa era o GPIMEM, grupo que tem tradição em realizar pesquisas sobre Cálculo e Educação a Distância (EaD), pelo fato de interessar-se pelo uso de tecnologias. Ao principiarmos a busca por nossa questão de pesquisa, parto desse lugar que contém pesquisas já defendidas e conceituadas sobre as temáticas de interesse. A partir desse olhar para o lugar onde me encontrava ao iniciar o processo de pesquisa é que nossa visão foi se expandindo e percebemos outros lugares, novas perspectivas, cores, sabores e pretensões. Um desses outros lugares foi o *Seminário de Investigación em Didácticas de las Matemáticas (SIDM)* sobre o qual discorrerei com mais detalhes adiante.

Enfim, esse é um dos motivos pelos quais neste capítulo, ao descrever o movimento de constituição da questão de pesquisa, baseei-me várias vezes nas pesquisas desenvolvidas dentro desses dois grupos de pesquisa em especial.

Foi um processo longo, que demandou inúmeras reflexões, pois conforme Borba e Araújo (2004) destacam na epígrafe que abriu este capítulo, o estabelecimento da pergunta diretriz é um movimento difícil, porém necessário. E todo esse processo culminou na pesquisa que aqui apresento.

Neste primeiro capítulo apresento o que foi central nesse movimento rumo à constituição da questão de pergunta, considerados em cinco seções. Na seção 1.1 apresento informações de pesquisas desenvolvidas com o olhar na Educação a Distância a partir dos trabalhos realizados dentro do GPIMEM, lugar onde nos encontramos no início deste processo. Na seção 1.2, algumas pesquisas sobre a disciplina de Cálculo, também desenvolvidas dentro do âmbito do GPIMEM, buscando conhecer o que já havia sido pesquisado até então. Na seção 1.3, apresento algumas pesquisas que abarcam a disciplina de Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática a distância, a começar pelas pesquisas defendidas dentro do GPIMEM e continuar pelos estudos defendidos em vários outros grupos de pesquisa. É nessa seção que mostro o processo rumo à definição do participante da pesquisa. Na seção 1.4, apresento algumas pesquisas realizadas com foco no conhecimento do professor, considerando este como um objeto de análise em potencial. Por fim, na seção 1.5, apresento a questão de pesquisa que norteia todo o processo de análise de dados e constituição da presente tese.

1.1 A busca por pesquisas sobre a Educação a Distância a partir do “meu lugar”

Pesquisar sobre a EaD, tanto na formação continuada como na formação inicial, é uma ação que virou tradição dentro do GPIMEM, por ser uma modalidade de ensino que se utiliza das tecnologias para mediar processos de ensino e aprendizagem, sendo as tecnologias um dos principais interesses da maioria das pesquisas desenvolvidas dentro deste grupo.

Sobre o tema de Educação a Distância com foco na formação continuada, foram desenvolvidas, dentro do GPIMEM, as pesquisas de: Gracias (2003), que tratou da reorganização do pensamento a partir de um curso ministrado a distância; Santos (2006), que abordou o tema de Geometria Euclidiana Espacial com o olhar sobre a produção matemática realizada no Ambiente Virtual de Aprendizagem de um curso a distância; Zulatto (2007), que analisou a natureza da aprendizagem Matemática, também a partir de um curso de formação continuada a distância; Rosa (2008), que analisou a construção de identidades *online* e as relações com ensino e aprendizagem em um curso a distância; Malheiros (2008), que investigou a elaboração de projetos de Modelagem de Educação Matemática em ambientes *online*; Souto (2013), que estudou as transformações expansivas ocorridas dentro de um curso de Educação Matemática a distância, e Galleguillos (2016), que pesquisou sobre a Modelagem Matemática utilizada em um curso de formação a distância segundo a Teoria da Atividade. Embora com olhares diferentes, o que essas pesquisas têm em comum é o entorno onde a produção de dados ocorreu, ou seja, todas elas tiveram como contexto da pesquisa cursos oferecidos na modalidade EaD.

Além do interesse na formação continuada, é de costume dos membros desse grupo pesquisar, também, os cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos a distância, a começar pela pesquisa de Viel (2011), que voltou seu olhar sobre a formação de professores de Matemática na modalidade a distância oferecida pelo consórcio CEDERJ (Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro). Após suas análises, a pesquisadora ressalta a importância dos cursos na modalidade EaD, especialmente para as pessoas que estão longe dos grandes centros, mas salienta também que tais cursos precisam ser revistos a fim de garantir a qualidade na formação dos futuros professores. Heitmann (2013) propôs atividades investigativas na disciplina de Geometria de um curso de Licenciatura em Matemática a distância e, após as análises dos dados, concluiu que é possível trabalhar nessa abordagem e que a interação entre os atores privilegia a produção coletiva de conhecimento. Santos (2013), por sua vez, apresentou um retrato da Licenciatura em Matemática do consórcio CEDERJ, sob a perspectiva de seus alunos iniciantes. Entre os resultados de suas análises, a autora ressalta que embora o curso seja uma possibilidade de acesso à educação pública superior, foram identificadas fragilidades no tocante à formação docente no que refere à discussão sobre Educação Matemática, avaliação da aprendizagem, formação que privilegie o diálogo, interação e o uso de tecnologias digitas. Embora ela ressalte esses aspectos que precisam ser aprimorados, destaca que há um movimento por parte da equipe gestora em favor do aprimoramento e adequação do curso a fim de atender a atual demanda.

Zampieri (2013) pesquisou a comunicação estabelecida entre alunos, professores e tutores em uma disciplina de Introdução à Estatística de um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD. Ela conclui que é necessário propor atividades que incentivem o diálogo, interpretações de dados, para que a comunicação seja fomentada, mesmo quando há necessidade de recursos tecnológicos. Zabel (2014) analisou a disciplina de Práticas de Ensino, também de um curso de Licenciatura em Matemática da EaD. Entre suas conclusões estão o fato de que as interações ocorridas durante a disciplina possibilitaram que os estudantes refletissem sobre o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e as utilizassem para produção de material didático, entre eles *podcasts* e *screencasts*.

Com o olhar para o uso de tecnologias nos cursos da EaD, a pesquisa de Chiari (2015) se dedicou a analisar as possibilidades, limites e desafios de se utilizar tecnologias em disciplinas de Álgebra Linear de cursos de Licenciatura em Matemática a distância. Com as análises dos dados, a pesquisadora concluiu que as Tecnologias Digitais, a partir de diferentes linguagens, podem transformar materiais didáticos digitais em Material Didático Digital Interativo (MDDI). Em relação à disciplina, Chiari (2015) percebeu que há um desequilíbrio entre as representações formais, algébricas e geométricas, que ela chama de modos de descrição, e ressalta a necessidade de estimular o movimento entre elas, a partir das possibilidades do uso de tecnologias.

Foram realizadas mais duas pesquisas (ALMEIDA, 2016; VEGA, 2016) com foco na Formação Inicial na EaD, considerando a disciplina de Cálculo que descrevo na seguinte seção.

A partir das pesquisas que apresento até aqui, é possível perceber que, embora até o momento o olhar tenha sido voltado tanto para a formação inicial quanto continuada da modalidade EaD, é possível e necessário continuar, e um dos motivos se deve à constante expansão em que esta modalidade de ensino se encontra atualmente. O interesse da presente pesquisa é voltar o olhar para os cursos de formação inicial, pelo aumento exponencial de oferta e procura e pela “liberdade” em que cada instituição tem ao oferecer tal curso.

Informações gerais sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, segundo dados de Borba e Almeida (2015)[2], com base em dados do ano de 2013, indicam que 40% dos alunos matriculados nesses cursos são da EaD.

De acordo com informações presentes no portal da Universidade Aberta do Brasil (UAB), no ano de 2016 foram ofertados cursos de Ciências Naturais e Matemática em quarenta Instituições do Ensino Superior (IES). Desses quarenta cursos, sete concentram-se na região Norte do Brasil; dezessete na região Nordeste; três na região Centro-Oeste; dez na região Sudeste e três na região Sul (BRASIL, 2016).

Oliveira e Zampieri (2015), após analisarem o Projeto Político Pedagógico (PPP) de dez desses cursos, observaram duas justificativas principais para a criação dos mesmos: carência de professores de Matemática na Educação Básica e impossibilidade de suprir tal necessidade apenas com a modalidade presencial.

De acordo com as autoras, a média de vagas oferecidas por ano é de 277 por instituição, sendo que 50% das vagas são destinadas a professores da rede pública de ensino em exercício, e o restante à comunidade em geral. Segundo as informações apresentadas sobre as análises dos PPP desses dez cursos, cada instituição propõe seu modelo de ensino. Porém, em todos eles "a tutoria é exercida por três profissionais: professores especialistas, tutores locais e tutores a distância" (OLIVEIRA; ZAMPIERI, 2015, p. 54). Essa diversidade de modelos está prevista em documentos oficiais, como pode ser conferido adiante.

> Não há um modelo único de educação à distância! Os programas podem apresentar diferentes desenhos e múltiplas combinações de linguagens e recursos educacionais e tecnológicos. A natureza do curso, as reais condições do cotidiano e necessidades dos estudantes são os elementos que irão definir a melhor tecnologia e metodologia a ser utilizada, bem como a definição dos momentos presenciais necessários e obrigatórios, prevista em lei, estágios supervisionados, práticas em laboratórios de ensino, trabalhos de conclusão de curso, quando for o caso, tutorias presenciais nos polos descentralizados de apoio presencial e outras estratégias. (BRASIL, 2007, p. 7).

Isso quer dizer que cada IES tem autonomia para decidir como o curso será oferecido, a fim de atender as particularidades e necessidades de cada região

[2] Não conseguimos verificar se houve alterações nas informações devido ao site do Sistema UAB estar em manutenção no período em que escrevemos a versão final da tese.

(OLIVEIRA; ZAMPIERI, 2015). Mas será que essas particularidades realmente têm sido atendidas? A quais particularidades se referem: aos processos de ensino e aprendizagem ou à mão de obra qualificada? São alguns dos questionamentos que insistem em me incomodar.

O fato é que esses cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD fazem parte da realidade atual do Brasil no que se refere à formação de professores, por isso a importância de continuarmos fazendo pesquisa com olhar para esses cursos. Mas para onde devemos direcionar nosso olhar? Qual objeto de análise escolheremos?

Como mencionei anteriormente, olhar para esses cursos, especificamente para a disciplina de Cálculo, era um interesse anterior ao início da realização dessa pesquisa. Dessa forma, apresento algumas pesquisas que discorrem sobre a disciplina de Cálculo, a começar pelas que foram realizadas dentro do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Unesp de Rio Claro, por ser o lugar onde iniciamos nossa caminhada, a fim de continuarmos o movimento rumo à definição da questão norteadora.

1.2 A busca por pesquisas sobre a disciplina de Cálculo a partir do "meu lugar"

A princípio não tinha definido o que olharia na disciplina de Cálculo, por isso, até esse momento da pesquisa, o foco era a disciplina em si. Com esse intuito, passo a buscar, em meio as pesquisas do GPIMEM, aquelas que consideram conteúdos da disciplina de Cálculo, na modalidade presencial ou EaD, formação inicial ou continuada, por ser também um costume de longa data desse grupo.

A primeira tese defendida considerando a disciplina de Cálculo, foi a de Villarreal (1999), que tratou do pensamento matemático de estudantes de Biologia ao estudarem Cálculo com auxílio de tecnologias, focando no conteúdo de Derivada. Segundo a autora, as tecnologias influenciam no pensamento matemático e em sua reorganização, constituindo, assim, o que ela chama de *ecologia cognitiva* particular. Os pensamentos dos alunos tiveram que ser coordenados pelo professor para superar a dicotomia entre visual e algébrico, e os processos que permeavam esses pensamentos tinham característica de rede. Segundo Villarreal (1999), o ensino de

Cálculo precisa ser repensado, a fim de favorecer a visão de conhecimento como rede de significados, opondo-se à visão cartesiana atual.

Entre essas pesquisas, também encontrei a tese de Araújo (2002) que abordou discussões de alunos de Engenharia Química sobre Cálculo, Tecnologia e Modelagem Matemática. A autora, a partir de sua pesquisa, percebeu que a universidade estava aberta à incorporação das tecnologias e que abordar conteúdos de Cálculo a partir da Modelagem Matemática e uso de Tecnologias pode constituir um ambiente fértil para discussão e investigação de questões relacionadas à Educação Matemática Crítica.

No ano de 2006, foram defendidas a dissertação de Scucuglia (2006) e a tese de Olímpio-Júnior (2006). Na primeira, o autor pesquisou como alguns estudantes, que tinham calculadoras gráficas à sua disposição investigaram o Teorema Fundamental do Cálculo. Segundo Scucuglia (2006), a utilização dessa tecnologia levou os alunos a se engajarem na atividade de maneira gradativa e os resultados obtidos, de forma experimental, possibilitaram o que o autor chama de “discussões matemáticas dedutivas”. Na segunda (OLÍMPIO-JÚNIOR, 2006), foi pesquisado, a partir da integração entre oralidade, escrita e *software* (MAPLE), compreensões de alunos ingressantes em um curso de Matemática ao estudar Função, Limite, Continuidade e Derivada. Segundo o autor, surgiram alguns conflitos conceituais que derivam da limitada compreensão dos alunos sobre o conceito de função. Olímpio-Júnior (2006) ainda chama atenção para a necessidade de explorar, de forma mais intensiva, a natureza dinâmica do Cálculo Diferencial.

Dois anos depois, Rosa (2008) pesquisou sobre as relações existentes entre a construção de identidades *online* e o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida, a partir do ambiente educacional denominado *Role Playing Game* (RPG). Segundo o autor a análise dos dados mostra que a construção da identidade *online* em relação ao ensino e aprendizagem de integral definida se revela a partir de três facetas: *transformação*, *imersão*, e *em agency* (que corresponde a agir com vontade); concebendo, assim, o “ser-com”, “pensar-com” e o “saber-fazer-com”.

No ano seguinte, Barbosa (2009) defendeu sua tese sobre o conhecimento sobre função composta e regra da cadeia, produzido por alunos ao utilizarem tecnologias. Segundo a autora, as tecnologias potencializaram as conjecturas elaboradas pelos alunos por permitir que visualizassem graficamente os resultados.

Foi desenvolvida também a tese de Ochoa (2011), que focou em analisar como é desenvolvido o processo de compreensão da taxa de variação, como forma de interpretar o conceito de Derivada. A partir de suas análises, o autor afirma que esse processo possui certas “imagens arraigadas” e que essas compreensões matemáticas podem evoluir a partir da interação dos participantes com softwares como o Geogebra e o Modellus.

A maioria das pesquisas produzidas no GPIMEM sobre a disciplina de Cálculo que apresento nesta seção foi desenvolvida a partir da modalidade presencial de ensino. Eu as apresento para mostrar o quanto os integrantes do grupo estão empenhados em oferecer informações científicas acerca dessa disciplina. Além dessas, foram realizadas mais duas (ALMEIDA, 2016; VEGA, 2016) que integram os dois temas de interesse da presente pesquisa: Licenciatura em Matemática a Distância e Cálculo, que apresento a seguir, juntamente com outras que abarcam as duas temáticas.

1.3 Cálculo + Licenciatura em Matemática a distância: o olhar para o professor

Almeida (2016) analisou o uso de Tecnologias Digitais (TD) nas disciplinas de Cálculo I ofertadas em distintos cursos de Licenciatura em Matemática a distância que fazem parte do sistema UAB: CEDERJ, UFMS, UFPel e UNEB. Dentre os sujeitos participantes da pesquisa encontram-se professores, alunos e tutores. A partir da análise dos dados produzidos, foi elaborado o construto denominado “polidocentes-com-mídias” na qual professores, tutores, alunos e tecnologias atuam de maneira coletiva e colaborativa. Almeida (2016) sugere a realização de novas pesquisas sobre a disciplina de Cálculo dos cursos de Licenciatura em Matemática a Distância, no que se refere às TD ou a outras temáticas de interesse do pesquisador.

Além dessa, foi defendida, na Colômbia, a pesquisa de Vega (2016) que também aborda a disciplina de Cálculo ofertada na modalidade EaD. Nessa pesquisa o foco principal é a análise da interação que ocorre no AVA, a partir do construto humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Como grupo, é possível observar no GPIMEM certo interesse em pesquisar Cálculo na modalidade EaD, sendo que nossa pesquisa pode dar continuidade a esse processo. Mas quem seria o sujeito participante de nossa pesquisa? O aluno? O professor? O tutor? Ou continuaríamos olhando para o uso de tecnologias como sugere Almeida (2016)?

Com esses questionamentos em mente, busquei outras pesquisas desenvolvidas no Brasil que envolvem essas duas temáticas. Não temos, no entanto, a pretensão de apresentar todas as pesquisas desenvolvidas sob essa perspectiva, mas sim, discutir informações sobre algumas que encontramos, a fim de contribuir para a escolha do participante dessa pesquisa.

Os seguintes questionamentos emergiram ao deparar-me com tais pesquisas: Quais são os sujeitos analisados? Qual o principal foco? Quais conteúdos matemáticos abordam? Na tentativa de respondê-los, apresentaremos uma síntese de cada pesquisa.

A dissertação de Forster (2007) foi realizada a partir dos seguintes objetivos: apresentar um material elaborado sobre Limite e Continuidade de Funções de uma Variável Real; analisar a produção metodológica do curso de Cálculo Diferencial e Integral II e o aproveitamento dos alunos nessa disciplina, ressaltando os pontos falhos que devem ser alterados. A análise dos dados foi baseada nas interações dos alunos no AVA e nas respostas a um questionário. Segundo a autora, as metodologias propostas para o curso tiveram boa aceitação, embora haja a necessidade de reorganização do material para ensinar o conteúdo de Continuidade, pois o apresentado foi insuficiente para a interferência na aprendizagem dos alunos. Forster (2007) constatou também que o grau de interação influencia na aprendizagem dos alunos e que, embora façam parte de um curso a distância, os alunos têm preferência pelo material impresso.

Já a dissertação de Alves (2011) analisou algumas atividades da disciplina de “Funções e Limites” de um curso de Licenciatura em Matemática a distância. Essa disciplina aborda conceitos iniciais de Cálculo, e o objetivo da pesquisa foi verificar os questionamentos levantados pelos alunos ao resolverem as atividades, as estratégias utilizadas e, ainda, o encaminhamento dos professores frente aos questionamentos dos alunos. Sendo assim, a pesquisa focou nas atividades, ao classificar os tipos de tarefas segundo Ponte (2003), mas também teve um olhar sobre o aluno, como resolutor das atividades, e sobre o professor. Os conteúdos abordados nesta pesquisa são os de Funções e Limites. Quanto aos tipos de tarefas, o autor concluiu que não foi proposta nenhuma de caráter investigativo e o mais predominante foram os exercícios. Os questionamentos dos alunos foram, em sua maioria, relacionados ao conteúdo de funções e os encaminhamentos dos professores caracterizaram-se por respostas diretas e alguns poucos questionamentos.

A pesquisa de doutorado de Faria (2012) teve como objetivo compreender o processo de transição do ensino presencial para a modalidade a distância vivenciado por uma equipe que ensinava conteúdos de Cálculo. O foco principal da tese foram os componentes presentes neste processo de transição e as estratégias adotadas no desenvolvimento das atividades, tentando, assim, verificar a relação do professor frente a situações inovadoras. A pesquisa contou com quatro professores como sujeitos, cujos dados foram produzidos por meio de entrevistas semiestruturadas, observações e documentos. A análise desses dados concluiu que, embora os professores não tivessem experiência na modalidade a distância, seus conhecimentos prévios facilitaram suas atuações. Além disso, a transposição didática do curso presencial para a modalidade a distância possibilitou o estabelecimento de relações entre a equipe.

A pesquisa de mestrado de Santos (2012) teve como objetivo analisar o processo de comunicação entre alunos, tutores e professor coordenador da disciplina de Cálculo I de um curso a distância de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Sergipe, buscando ver a influência desta comunicação nos processos de ensino e aprendizagem. A partir da análise dos dados, o autor concluiu que a comunicação entre alunos e tutores ocorreu de forma pontual, via *e-mail* ou mensagem particular, a partir da linguagem escrita. Santos (2012) observa que essa linguagem escrita não engloba a simbologia própria da Matemática, acarretando, portanto, dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem. Quanto à comunicação entre alunos e professor-coordenador, o autor destaca que foi inexistente. Segundo ele, as mensagens do professor coordenador se limitaram aos fóruns de aviso, mensagens na prova presencial, listas de exercícios e orientações existentes no material impresso. Quanto à comunicação entre os alunos, o autor pontua que ocorreram com maior frequência nos encontros presenciais.

A dissertação de Moreira (2014) teve como objetivo analisar o material didático de Cálculo elaborado para um curso de Licenciatura em Matemática semipresencial, sob a ótica do professor-tutor. Para tanto, foram realizadas análises comparativas entre livros textos da Universidade Federal do Rio de Janeiro e da Universidade de São Paulo. A autora utilizou como abordagem metodológica a pesquisa-ação, realizando entrevistas com os professores-tutores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Uma das conclusões da pesquisa é que o material didático utilizado atualmente para a disciplina de Cálculo I precisa passar por uma reformulação didática, pois foi considerado como inadequado ao público atendido.

A pesquisa de mestrado de Raymundo (2014) teve como foco o tutor da disciplina de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O objetivo foi caracterizar as intervenções realizadas pelo tutor nos fóruns de discussões, que resultaram em interações entre os participantes. Ao analisar os dados extraídos dos fóruns de discussões, o autor concluiu que as intervenções realizadas pelo tutor, em sua maioria, explicitavam procedimentos para a resolução do exercício ao qual o aluno tinha dúvida. Porém esses procedimentos indicados não apresentavam sustentações teóricas. Essas interações, em sua maioria, focaram-se em procedimentos matemáticos, apresentando poucas conexões conceituais.

Por fim, apresento a pesquisa de Lopes (2015), que analisou como se deu a aprendizagem de Derivadas em um ambiente construcionista, elaborado para oferecer a disciplina de Cálculo em formato Bimodal. A partir das análises, a pesquisadora defende a atitude de habitar o AVA, que, vivenciado a partir da abordagem “estar junto virtual”, favoreceu a aprendizagem fomentada a partir da/na interação entre os participantes dos espaços virtuais.

Essas foram algumas pesquisas encontradas sobre a disciplina de Cálculo na EaD. Elas foram buscadas em bancos de teses e dissertações com os descritores “Cálculo” e “Licenciatura em Matemática” como critérios de busca. Apresentamos, a seguir, o Quadro 1, no qual é possível visualizar o foco de cada trabalho, os sujeitos investigados, bem como os conteúdos abordados.

Quadro 1 – Pesquisas sobre Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática a Distância

Autor	Foco	Sujeito Participante	Conteúdo Matemático
Forster (2007)	Elaboração de material sobre Limite e Continuidade de Funções de uma Variável Real; análise das interações e metodologias do curso.	Alunos.	Limite e Continuidade de Função de uma variável real.
Alves (2011)	Análise de atividades para verificar os questionamentos e estratégias dos alunos e os encaminhamentos dos professores.	Alunos e professores.	Funções e Limites.
Faria (2012)	Processo de transição do ensino presencial para o ensino a distância e a atitude do professor frente a atividades desafiadoras.	Professores.	Funções, Limites e Continuidade.
Santos (2012)	Processo de comunicação entre integrantes da EaD.	Alunos, Tutores e Professor.	Não se deteve ao conteúdo.
Moreira (2014)	Análise do uso do material didático pelo tutor para o ensino de Cálculo.	Tutor	Limite, Derivada e Integral.
Raymundo (2014)	Caracterização das intervenções do tutor.	Tutor.	Equações Diferenciais (parciais separáveis); Equações Lineares .
Lopes (2015)	Aprendizagem a partir da abordagem “estar junto virtual”.	Professor e alunos.	Derivada.
Almeida (2016)	Uso de Tecnologias Digitais (TD) nas aulas de Cálculo.	Professores, Tutores e alunos.	Não se deteve a conteúdo.

Fonte: Elaborado pela autora (2016).

Como é possível observar nas informações apresentadas, essas pesquisas tiveram como sujeitos alunos, tutores e professores da EaD. As pesquisas que analisaram os alunos discutiram suas estratégias e questionamentos para resolver atividades, seus processos de aprendizagem ou o uso que fizeram das tecnologias. O tutor, quando participante, foi analisado a partir de suas intervenções nos AVA, suas opiniões sobre o material didático ou o uso das tecnologias. Já quando os professores eram o foco, as análises se deram com relação às suas atitudes frente à resolução e questionamentos de seus alunos, suas posturas frente às situações desafiadoras e o uso de tecnologias para ensinar na disciplina de Cálculo.

Com isso, vejo que as pesquisas consideram os processos de ensino e aprendizagem que acontecem na educação a distância, voltando o olhar para a interação entre os protagonistas desta modalidade (professor, aluno, tutor). No entanto, não encontrei, dentre essas pesquisas, nenhuma que considerasse o professor, com foco em seu conhecimento, sendo esse um dos elementos disparadores dos processos de ensino e aprendizagem. Vi então uma oportunidade!

Somado a isso, considero o fato de ter conhecido, no ano de 2014, um pesquisador português[3] que, enquanto realizou seu pós-doutoramento junto ao GPIMEM, fomentou várias discussões sobre o conhecimento do professor de Matemática. Esse encontro levou-me a olhar para outras direções, a princípio inimagináveis, e nos influenciou a voltar nosso olhar para o professor, nos apresentando, assim, outros lugares. Esse novo lugar permite olhar para o professor não apenas no que se refere ao uso de tecnologias ou metodologias utilizadas nos processos de ensino, mas de forma particular para o seu conhecimento.

1.4 Redirecionando o olhar para o conhecimento do professor: a escolha dos óculos

Quando se fala em conhecimento do professor, um dos primeiros referenciais que vem à mente é Shulman (1986), que foi pioneiro na classificação do conhecimento do professor. Esse autor, ao voltar seu olhar para o conhecimento do professor, o denominou como um “Paradigma Perdido”, pois pesquisas anteriores deixavam o conteúdo a ser ensinado no “ponto cego”, ou seja, o estavam desconsiderando. O autor chamou a atenção dos pesquisadores, no intuito de levá-los a perceber que quando olhassem para os professores, deveriam ser consideradas as particularidades do conteúdo que estavam ensinando.

As reflexões de Shulman (1986) expandiram a visão de outros pesquisadores, levando-os a olhar para disciplinas específicas. A partir desse novo olhar sobre o conhecimento do professor, surgiram algumas propostas de construtos teóricos que analisavam e ressaltavam o conhecimento mobilizado pelo professor de Matemática nos processos de ensino e aprendizagem.

---

[3] Dr. Carlos Miguel Ribeiro, um dos membros da banca de arguição desta pesquisa.

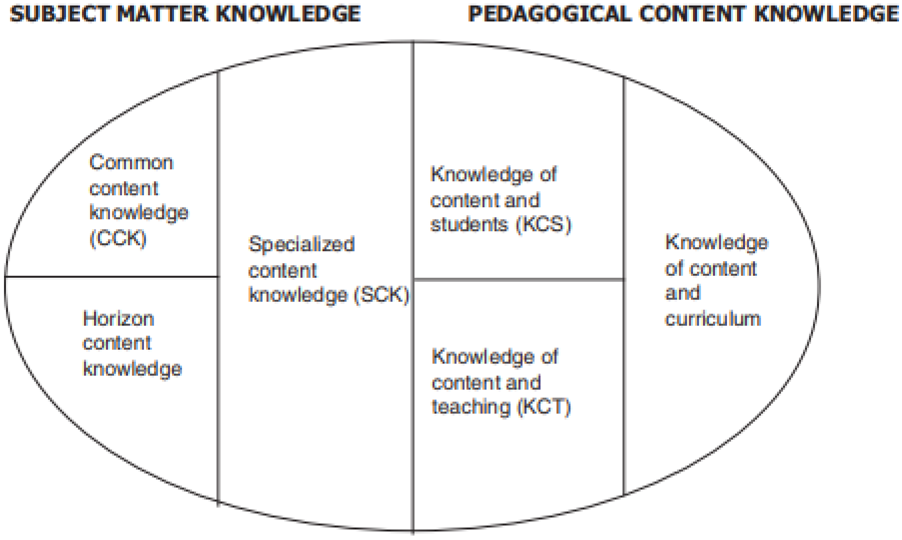
Entre essas estão: o Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) – Conhecimento Matemático para o Ensino - desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008) na Universidade de Michigan; o Knowledge Quartet (KQ) – Quarteto do Conhecimento – elaborado por Rowland, Huckstep e Thwaites (2005); e o Conhecimento Didático Matemático (CDM) – elaborado por Godino (2009).

Os três construtos teóricos foram elaborados com o olhar para o professor de Matemática. Enquanto o MKT apresentou um refinamento à proposta de Shulman, elaborando subdomínios que permitiam a análise do conhecimento do professor de matemática, o CDM propôs um refinamento do MKT, porém considerava aspectos epistemológicos, cognitivos, afetivos, interacionais e ecológicos. Já o KQ apresentou uma estrutura teórica que contempla quatro elementos necessários para analisar o desenvolvimento do ensino da Matemática: Fundação, Transformação, Conexão e Contingência.

Dessas três estruturas teóricas, a que teve maior repercussão internacional foi o MKT. Ball et al. (2008) estabeleceram seis subdomínios (Figura 2) para os domínios apresentados por Shulman (1986), sendo que três dos subdomínios emergiram do Conhecimento da Matéria (MK), com especial atenção para a Matemática; e os outros três emergiram do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK).

O MKT foi elaborado a fim de ressaltar o conhecimento mobilizado na prática, com o objetivo de compreender características específicas do conhecimento do professor e diferenciá-las do conhecimento de outros profissionais que se utilizavam da Matemática em suas profissões. Segundo Ball *et. al* (2008), por meio do MKT é possível organizar e operacionalizar o conhecimento do professor de Matemática.

Figura 1 – Domínios do conhecimento do modelo *Mathematical Knowledge for Teaching*



Fonte: Elaborado a partir de BALL et al. *(*2008, p. 403)

Dentre as maiores contribuições desse construto, segundo Carrillo, Contreras e Flores (2013), estão dois subdomínios em especial: O conhecimento do Horizonte Matemático (HCK), que envolve o conhecimento da estrutura da disciplina, as formas de conhecer, criar e produzir em Matemática e os valores centrais pertencentes à disciplina, e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), que envolve o conhecimento de identificar os erros e sua procedência e o raciocínio utilizado pelo aluno ao resolver uma atividade matemática.

Embora o MKT produzido por Ball et al. (2008) tenha trazido inúmeras contribuições, no que se refere a reflexão sobre o conhecimento do professor de Matemática, esse modelo apresentou dificuldades para a compreensão e análise a partir de seus subdomínios (serão apresentadas no capítulo seguinte). Devido a essas dificuldades, o grupo *Seminário de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM),* da Universidade de Huelva na Espanha, elaborou um marco teórico e metodológico denominado de *"Mathematics Teacher's Specialised Knowledge"* (MTSK), traduzido como "Conhecimento Especializado do Professor de Matemática" (CARRILLO et al., 2014). Esse modelo teórico também foi elaborado a partir de três domínios de conhecimento: o Conhecimento Matemático (MK[4]) que engloba o conhecimento das formas de proceder em Matemática; O Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK[5]) que aborda o conhecimento próprio do trabalho de

[4] Do inglês *Mathematical Knowledge.*
[5] Do inglês *Pedagogical Content Knowledge.*

ensino do professor; as crenças e concepções que esse docente possui e que influencia sobre todo o seu conhecimento especializado. Falaremos desses domínios e seus respectivos subdomínios no próximo capítulo.

Sete teses de doutorado foram encontradas a partir de um levantamento das pesquisas desenvolvidas com o olhar para o MTSK. Ao estudar essas teses, com o propósito de conhecer o que já foi pesquisado, bem como a disciplina ou conteúdo matemático envolvido, destaco as seguintes informações: Rojas (2014) abordou o ensino de fração oferecido por professores de Ensino Fundamental I (EF I) e Ensino Fundamental II (EF II)[6]. Essa tese tinha como objetivo compreender o conhecimento especializado de um professor de EF I e um professor de EF II, ambos considerados pela pesquisadora como experientes. Segundo ela, esse movimento de analisar o conhecimento de professores experientes pode contribuir para a compreensão da natureza do conhecimento especializado (ROJAS, 2014).

Após a análise dos dados, concluiu que o professor do EF I demonstra mais seu conhecimento didático do conteúdo no que se refere ao ensino e às características de aprendizagem. Já o professor do EF II, deixa mais evidente seu conhecimento matemático no que diz respeito ao significado do tema e à estrutura matemática relacionada a ele (ROJAS, 2014).

Moriel-Junior (2014) apresenta em sua tese a pesquisa sobre o conteúdo de frações, com o olhar para a operação de divisão. O objetivo da pesquisa foi caracterizar o conhecimento especializado mobilizado por professores e licenciandos em matemática que fizeram parte de uma ação de formação sobre o tema de divisão de frações. A partir das análises dos episódios de dois alunos e dois professores, o autor concluiu que existe um panorama de conhecimentos necessários para ensinar a divisão de fração e que esses conhecimentos englobam tanto o domínio matemático quanto o pedagógico do conteúdo.

No ano seguinte, Montes (2015) pesquisou as características do conhecimento do professor acerca do infinito, partindo da necessidade deste conhecimento para ensinar matemática. O participante da pesquisa foi um professor que lecionava, correspondente aos níveis educacionais do Brasil, no EF II e EM. O autor afirma que o conhecimento sobre o infinito é algo complexo, que normalmente é discutido apenas matematicamente. Porém defende que os três domínios do

---

[6] Vale ressaltar que na Espanha o nível de EF I é chamado de primária, o nível de EF II, secundária, e o Ensino Médio (EM), Bachillerato.

MTSK (Matemático, Didático do conteúdo e Crenças) permitem ter uma visão ampla dos diferentes aspectos presentes na cognição do professor sobre o infinito e que estes aspectos refletiram em seu trabalho, em seu desenvolvimento cognitivo e em sua compreensão sobre os conceitos em torno do tema do infinito. Os domínios influenciaram, também, na consciência das relações existentes e até nos aspectos didáticos ligados ao ensino dos conceitos relacionados ao infinito. O autor afirma, ainda, que as crenças e concepções permeiam todo o conhecimento do professor sobre os conceitos relacionados ao infinito.

Dentro do grupo SIDM, a pesquisa de Flores-Medrano (2015) caracterizou-se como de caráter teórico que abordou conteúdos e professores de níveis de ensino diferentes. Seu objetivo foi aprofundar-se nos diferentes elementos pertencentes ao MTSK a fim de confirmá-lo como um construto teórico capaz de contribuir para a análise do conhecimento do professor de Matemática. Ademais, sua pesquisa buscou analisar as relações existentes entre o conhecimento matemático do professor e suas concepções sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Outra pesquisa desenvolvida dentro do grupo foi a de Escudero-Ávila (2015), cujo objetivo foi descrever, caracterizar e compreender o conhecimento didático do conteúdo por meio do MTSK. Essa pesquisa considerou como participante um professor de EF II em contexto de formação em uma pós-graduação a distância. Em seus resultados, a autora apresenta algumas características específicas do Conhecimento Didático do Conteúdo, informações adicionais aos subdomínios do MTSK e aborda as relações entre esses subdomínios.

Já a pesquisa de Aguilar (2016) aborda o professor de EF I ao propor atividades de classificação de figuras, dentro da geometria plana. O objetivo de sua pesquisa foi caracterizar o conhecimento especializado mobilizado pela professora ao ensinar o conteúdo de polígonos. A partir das análises, o autor apresenta resultados referentes às concepções da professora relativa à Matemática Escolar, à metodologia na aula de Matemática, aprendizagem e sobre o papel do aluno e da professora. Com respeito aos conhecimentos mobilizados, o autor ressalta que ficaram destacados especialmente aqueles relativos ao conhecimento didático do conteúdo.

Até aqui, as pesquisas desenvolvidas nos entornos do SIDM focavam especialmente nos professores atuantes da Educação Básica, porém, não ficaram apenas nesses níveis de ensino.

Com intuito de abarcar o Ensino Superior, a pesquisa de Vasco (2016), desenvolvida no Equador, considerou o professor universitário que lecionava a disciplina de Álgebra Linear em cursos de Engenharia. O objetivo dessa pesquisa foi compreender e caracterizar o conhecimento especializado mobilizado por professores que ensinam matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares.

Por último, sendo a mais recente defendida dentro do grupo, a pesquisa de Garcia (2017) investigou o Conhecimento Especializado de um professor de EF I ao ensinar Geometria para seus alunos. Segundo a autora sua pesquisa se difere das outras de forma substancial, uma vez que não tem a intenção de listar os conhecimentos mobilizados pela professora, mas sim de ressaltar os conhecimentos que são evocados a partir da ação da professora em sala de aula. Em suas análises, a autora destaca que esse tipo de análise pode favorecer o desenvolvimento do conhecimento especializado de formadores de professores, e contribuir para pensar sobre o conhecimento especializado necessário para promover processos de ensino e aprendizagem sobre geometria.

Para termos um panorama das pesquisas apresentadas até aqui, elaborei o Quadro 2 que apresenta os níveis de atuação dos sujeitos das pesquisas sobre MTSK, bem como os conteúdos ou disciplinas contempladas.

Quadro 2 – Sujeitos e conteúdos das teses defendidas sobre o MTSK

Autor	Nível de atuação do professor	Disciplina ou Conteúdo
Rojas (2014)	EF I e II	Fração
Moriel-Junior (2014)	EF I e Licenciandos	Divisão de fração
Montes (2015)	EF II e EM	Infinito
Flores-Medrano (2015)	EF I, II, EM	Geometria e Álgebra
Escudero-Avila (2015)	Alunos de Mestrado	Conteúdos diversos
Vasco (2015)	Ensino Superior	Álgebra Linear
Aguilar (2016)	EF I	Geometria
Garcia (2017)	EF I	Geometria

Fonte: Elaborado pela autora (2015).

Conforme o Quadro 2, há pesquisas que envolvem professores desde o EF I até professores do Ensino Superior. A maioria delas analisaram professores experientes, que possuem vários anos de carreira no magistério. Entre as pesquisas desenvolvidas dentro do grupo, apenas a de Vasco (2015) se voltou para o professor universitário.

A partir dessas informações e fazendo relações com as temáticas de interesse desta pesquisa, surgiu-me as seguintes indagações: e quanto ao professor que leciona nos cursos de Licenciatura em Matemática a distância, qual o conhecimento mobilizado por ele ao ensinar os conteúdos da disciplina de Cálculo? Quanto ao conhecimento especializado, ele é desenvolvido apenas pela experiência docente (qual o papel da formação inicial)? Que tipo de conhecimento possui um professor em início de carreira? Essas indagações contribuíram para a elaboração da questão de pesquisa que propomos na próxima seção.

Destaco o MTSK como um construto teórico em desenvolvimento, elaborado para analisar o conhecimento que o professor usa para e no ensino de um conteúdo matemático. Considerando que o olhar para um professor que ensina a disciplina de Cálculo em um curso de Licenciatura em Matemática a distância é interessante para essa pesquisa, escolhi um professor como participante deste estudo, sobretudo por considerar que ele me ajudará a apresentar resultados que contribuirão para refletirmos sobre o tema da Educação Matemática.

1.5 Um problema emergente das buscas

A princípio, havia o interesse em continuar olhando para um curso de Licenciatura em Matemática a distância, considerando o grande avanço desta modalidade no Brasil. E, como vimos por meio das pesquisas realizadas, ainda são necessárias pesquisas que considerem esses cursos.

Inicialmente, também, já tinha o interesse de olhar para a disciplina de Cálculo com a intenção de contribuir com algo pouco explorado. Ao apresentar as pesquisas que encontramos sobre a disciplina de Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática a distância, observei que os processos de ensino e aprendizagem, e os protagonistas da EaD (professor, tutor e aluno) têm sido foco dessas pesquisas. Avaliando tais informações, percebi que uma possibilidade seria olhar para o conhecimento dos professores que atuam nesses cursos.

Sendo assim, o *lócus* escolhido desta pesquisa foi a disciplina de Cálculo de um curso de Licenciatura em Matemática a distância e o meu olhar foi voltado para o conhecimento especializado desse professor.

Consciente de que olhar para o conhecimento do professor é algo que exigirá mais foco, atenção e detalhe, optei por analisar os conhecimentos referentes apenas ao conteúdo de Derivada, cuja justificativa apresento no capítulo três.

Vale ressaltar que depois que um professor foi convidado a participar da pesquisa, descobri que ele estava em início de carreira docente, então, me propus a olhar o conhecimento especializado de um professor em início de carreira. Embora as pesquisas apresentadas sobre o MTSK, em sua maioria, considerem o conhecimento de professores experientes, compreendemos ser importante olhar para o professor em início de carreira, a fim de compreender os conhecimentos desenvolvidos até esse período de atuação docente bem como suas possíveis influências. Além do que, essa direção pode nos levar a refletir sobre os conhecimentos fomentados durante a formação inicial dos professores.

Algo que a princípio não considerei foi o fato de que o professor da Licenciatura atua, principalmente, como formador de professores de Matemática, todavia como esse fator foi considerado *a posteriori*, e por ainda não existir um modelo teórico que analise o Conhecimento Especializado do formador de professores de Matemática (porém, já está sendo estudado e em fase inicial de elaboração), utilizaremos como óculos o MTSK.

Sendo assim, a partir de todas as informações apresentadas, ressaltando as indagações que foram surgindo, e outras que apresentaremos nos próximos capítulos, construí a seguinte questão de pesquisa: *Que conhecimento especializado revela um Formador de professores, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' a distância?*

Para responder essa questão, temos, nesta tese, o objetivo de *caracterizar o conhecimento especializado revelado por um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' a distância.*

Mas, o que é Conhecimento Especializado? Em que aspectos o conhecimento do formador pode se diferenciar do professor de Matemática? Quantos anos consideramos como início de carreira? O que consideramos como ensino de Derivada a distância? Essas e outras perguntas serão respondidas no próximo capítulo.

POR SOBRE A ESTRADA...
COMPREENSÃO DOS ELEMENTOS CENTRAIS DA PESQUISA

[...]
Por sobre a estrada anoiteceu e amanheceu
E eu vi que os dias mais sombrios também são Teus
[...]
(Trecho "A Partida e o Norte" Estevão Queiroga)

2 COMPREENSÃO DOS ELEMENTOS CENTRAIS DA PESQUISA

No capítulo anterior foi sintetizado o movimento realizado até chegar à questão de pesquisa. Foi exposto o interesse inicial e apresentei o movimento de busca por pesquisas sobre Educação a Distância e Cálculo como focos isolados, e sobre essa disciplina em cursos de Licenciatura em Matemática a Distância. Discorri sobre como foi a escolha do conteúdo de Derivada. Explicitei o surgimento da oportunidade de voltar um olhar para o conhecimento do professor e justificar que o participante da pesquisa além de professor, atuou como formador de professores de Matemática na disciplina em que as informações foram produzidas. Embora dentro do Seminário de *Investigación em Didáctica de las Matemáticas (SIDM)*, ambiente em que o MTSK foi desenvolvido, ainda não haja pesquisas concluídas sobre o conhecimento especializado do formador de professores, não se pode desconsiderar sua atuação. Sendo assim, foi questionado "*que conhecimento especializado revela um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' a distância?"* A partir desta questão, o objetivo da presente pesquisa é *caracterizar o conhecimento especializado revelado por um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar o conteúdo de Derivada a distância.*

Neste capítulo apresento o que foi compreendido dos elementos centrais que constituem a questão de pesquisa e exemplos para os subdomínios do modelo, a fim de, no capítulo 3, explicitar o planejamento e o caminho metodológico percorrido para sua realização.

2.1 O que foi compreendido por "Caracterizar"

Compreendo o verbo caracterizar como o ato ou ação de apresentar as características de algo ou alguém. Segundo Abbagnano (2007) esta palavra vem do latim *Characteristicà.* O autor conta que Leibniz, a princípio, chamava de arte combinatória entendendo-a como "a arte de formar e de ordenar os caracteres de modo que se refiram aos pensamentos, isto é, de modo que tenham entre si a mesma relação que existe entre os próprios pensamentos" (ABBAGNANO, 2007, p.115), e posteriormente passou a chamar de característica ou característica universal. Esses caracteres, segundo o autor, são sinais que podem estar escritos, desenhados ou esculpidos.

Quando me proponho a *caracterizar,* a intenção é descrever as particularidades que um formador de professores de Matemática revela de seu conhecimento sobre Derivada, sem nenhuma pretensão de generalizar. Por meio da ordenação dessas características particulares será possível construir uma ideia do conhecimento especializado revelado por este formador de professores, em início de carreira, ao ensinar o conteúdo de Derivada a distância.

2.2 O que foi compreendido sobre "Conhecimento"

No modelo MTSK, que será apresentado em detalhes na próxima seção, o conhecimento do professor é a essência, o foco principal. E para conceituar o que o grupo compreende por conhecimento, Carrillo et al. (2014) apresentam uma revisão de várias definições. Há quem o caracterize como algo instável (SCHÖN, 1983), que relacione conhecimento com compreensão (SKEMP, 1978; TIROSH, 2000), com entendimento (LLINARES, 1998) e que o conceba como uma rede de vários outros elementos (PAJARES, 1992). Para defini-lo são utilizadas ideias de Schoënfeld (2010, p. 25, tradução feita pela autora) que caracteriza:

> Eu defino o conhecimento de um indivíduo como a informação que ele ou ela tem potencialmente disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas, ou desenvolver qualquer atividade. Nota-se que, de acordo com esta definição, o conhecimento de uma pessoa não é necessariamente correto!

Na definição apresentada acima, existem três elementos a serem ressaltados: informação disponível; usar para; correto (CARRILLO et al*.,* 2014). Quando o autor discorre sobre as informações que tem disponíveis, são consideradas as ações do professor e sua compreensão que impulsiona tais ações, ou seja, as informações que o professor acumula no decorrer de toda sua vida e que influenciam diretamente sua ação. Carrillo et al*.* (2014) dialoga sobre compreensão a partir das ideias de Skemp (1978) que vê o professor como alguém adaptável às diferentes situações cotidianas. Quando Shöenfeld (2010) utiliza o termo "usar para", descarta as informações que não tenham sentido dentro da tarefa do ensino, e quando afirma que “não é necessariamente correto”, é porque o foco está na informação que utiliza para um fim (conhecimento).

Sobre isso Carrillo et al. (2014) acrescentam que se o objetivo do pesquisador é saber o que o professor conhece, diferenciar conhecimento correto ou incorreto pode ser desnecessário, pois o foco é ressaltar o que o professor apresenta. Essa classificação entre correto e incorreto pode ser pertinente quando a intenção é avaliar a natureza do conhecimento do professor. Porém, eles ressaltam que o termo incorreto não deve ser entendido como algo negativo, mas sim como algo que não condiz com o que é considerado verdade.

Sendo assim, tudo depende do que se espera obter por meio da pesquisa. Se o objetivo é saber o que o professor conhece, como nesta pesquisa, é irrelevante destacar os conhecimentos “incorretos” do professor (CARRILLO et al., 2014). Porém, se os participantes da pesquisa forem alunos de graduação, por exemplo, e o objetivo for avaliar o que o aluno conhece (nível de conhecimento), para fomentar novos conhecimentos, talvez a ação de analisar os conhecimentos “incorretos”, do ponto de vista do referencial teórico do pesquisador, seja algo pertinente para fomentar ações mais diretas para alcançar os resultados desejados.

Voltando à compreensão do conhecimento dentro do MTSK, além das ideias de Schoenfeld (2010), é considerado a de Pajares (1992), que entende o conhecimento como “uma ampla rede de conceitos, imagens e habilidades inteligentes que um ser humano possui” (CARRILLO et al., 2014, p. 10 – tradução da autora).

Sendo assim, o conhecimento, a partir desses dois autores, e conforme se compreende nesta pesquisa, *é a ampla rede de informações, conceitos, imagens e habilidades que o professor tem disponível e utiliza para e nos processos de ensino, sem considerar se são certos ou errados, pois retratam o conhecimento que o professor revela naquele momento* (SHOËNFELD, 2010; PAJARES, 1992). Esse conhecimento é revelado na ação do professor ao ensinar o conteúdo aos seus alunos.

Compreender o conhecimento desta forma nos permite olhar para ele não como algo estático, mas como algo em movimento e que vai se modificando a cada dia, por isso Schön (1983) chama atenção para o fato de que assim como o conhecimento está em constante movimento, a definição adotada para o conhecimento também deve estar em constante revisão. Destarte, a definição que se utiliza nesta tese é atual para este momento e para este trabalho, mas sou consciente de que existem outras definições que consideram outros aspectos e outras perspectivas do conhecimento.

2.3 O que foi compreendido do desenvolvimento do conceito de Derivada

As respostas a vários questionamentos referentes aos conceitos de Matemática podem ser buscadas por meio da História, que retrata a construção das noções conceituais de temas, dentre eles a Derivada, foco desta pesquisa, cuja conceitualização faz parte das ideias gerais do Cálculo (GAVILÁN, 2010). Segundo Kleiner (2001), são essas ideias que possibilitam que compreendamos a Matemática atualmente, sendo a Derivada um dos conceitos de fundamental importância (APOSTOL, 1979).

Derivada, para Anton, Bivens e Davis (2014, p. 131):

> é a ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra". Segundo eles, "o coroamento das realizações do Cálculo é a sua habilidade em capturar matematicamente o movimento contínuo, permitindo que seja analisado instante a instante.

Foi preciso percorrer um longo caminho até se chegar à compreensão de derivada como apresentada acima, e consequentemente a definição atual e os algoritmos que utilizamos (GAVILÁN, 2010). Essa trajetória, segundo o autor, teve sua gênese na Grécia Clássica, quando surgiram alguns problemas matemáticos impossíveis de serem solucionados com os conhecimentos construídos até então, e perdurou até o século XIX, quando utilizou-se a definição épsilon-delta e se elaborou o conceito com Limite (GAVILÁN, 2010).

Entre os problemas emergentes dos estudos realizados nessa época, estavam os relacionados à tangente, quadratura e velocidade em um momento (SIMONS, 1987; LEME, 2003; GAVILÁN, 2010), denominados de problemas de diferenciação (GAVILÁN, 2010). O autor realça que nesse período da Grécia Clássica não existia algoritmo geral para o cálculo dessas diferenciações, apenas uma variada quantidade de métodos particulares de resolução. Por esse motivo Arquimedes (287 a.C – 212 a.C), mesmo tendo desenvolvido trabalhos considerados de natureza "diferencial" ainda na antiguidade (como os relativos à tangente de espiral), não recebeu o título de responsável pela gênese do Cálculo, pois além de não desenvolver métodos gerais, não relacionou problemas de tangente com cálculo de áreas (EDWARDS, 1979 *apud* GAVILÁN, 2010).

Gavilán (2010), citando as obras de Durán (1996) e Katz (1993), complementa afirmando que o conceito de Derivada, juntamente com a Integral, faz parte do chamado Cálculo Infinitesimal, cujas características principais que marcam sua gênese foi essa busca por métodos gerais que dessem conta de resolver os problemas que vieram à tona na época, e a percepção da correspondência existente entre o cálculo de quadratura, a determinação de tangentes e a importância destas ideias para continuarem progredindo nas conceitualizações.

Continuando o processo histórico da construção do conceito de Derivada, para Lehmann (2011), após os gregos antigos, foram os matemáticos do século XVII que passaram a se interessar pelos estudos relacionados à tangente, porém,

> [...] com o passar do tempo, o tratamento foi se tornando cada vez mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros tópicos relacionados ao Cálculo (LEHMANN, 2011, p. 29).

Oliveira (2011) ao apresentar algumas informações históricas, conta que Fermat e Descartes, dois matemáticos franceses, organizaram um grupo de estudos onde eles pudessem, juntamente com outros colaboradores, apresentar e solucionar problemas matemáticos. Entre os problemas que esse grupo se dedicou a resolver, "[...] estavam a determinação da reta tangente a uma curva qualquer e o cálculo de máximos e mínimos de curvas polinomiais" (OLIVEIRA, 2011, p. 21). O autor complementa afirmando que os métodos utilizados por eles foram norteados pela ideia de "infinitamente pequeno".

Contudo, apesar do reconhecimento de que Cavalieri (1598-1647), Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) tenham realizado descobertas importantes que hoje são utilizadas no Cálculo, o título de criadores do conceito geral de derivada é atribuído a Newton e Lieibniz (KLEINER, 2001), pois "[...] reconhecem a diferenciação e integração como operações inversas, [e] desenvolvem notações e algoritmos que fazem do cálculo um poderoso instrumento computacional"

(GAVILÁN, 2010, p. 13). As notações dx, dy, y e dy/dx que ainda hoje são utilizadas foram elaboradas por Lieibniz (GAVILÁN, 2010).

Sobre a construção do conceito de derivada, Leme (2003, p. 32) chama atenção para duas informações: “a história revela que a gênese da noção de Derivada constituiu-se na busca de processos para resolução de problemas, caracterizando-se um modo predominantemente *operacional*”, enquanto que, a derivada tratada pela maioria dos livros didáticos possui caráter estrutural. Essa mudança, inclusive, tem influenciado a maneira como o conceito de derivada é ensinado atualmente, como será exemplificado ao falar sobre os subdomínios do MTSK.

O Quadro 3, conforme ilustrado na próxima página, apresenta a síntese de momentos históricos relacionados à construção do conceito da derivada supramencionada.

Quadro 3 – Síntese histórica da construção do conceito de derivada

<table>
<tr><th>Grécia Clássica</th><th colspan="3">Século XVII</th><th colspan="2">Meados Século XVIII</th><th colspan="2">Século XVIII</th><th colspan="2">Século XIX</th></tr>
<tr><td>Princípio da busca pelas ideias de Derivada</td><td>Cavalieri (1598-1647)</td><td>Descartes (1596-1650)</td><td>Fermat (1601-1665)</td><td>Newton (1643-1727)</td><td>Leibniz (1646-1716)</td><td>Euler (1707-1783)</td><td>D'Alambert (1717-1783)</td><td>Lagrange (1736-1813)</td><td>Cauchy (1798-1857)</td></tr>
<tr><td>Marcado pelos problemas de tangente e cálculo de áreas e volumes.</td><td rowspan="3">Trabalhos sobre indivisíveis</td><td rowspan="3">Juntamente com Fermat contribuiu especificamente para as ideias de Geometria Analítica ao concluir que a equação $f(x,y)=0$ é uma curva.</td><td rowspan="3">Elaborou um método algébrico para calcular máximos e mínimos da reta tangente a uma curva. Segundo Lehmann (2011, p.29) "Ele encontrava geometricamente os pontos nos quais a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero [...]".</td><td rowspan="2">Ao estudar as órbitas do planeta, teve a ideia de calcular a reta tangente da curva; para isso utilizou a ideia de momento infinitamente pequeno de tempo. Estabeleceu o Teorema Fundamental do Cálculo.</td><td rowspan="2">Inventou as notações dx, dy, y, $\frac{dy}{dx}$

Que são utilizadas ainda hoje.</td><td rowspan="3">Introduziu o conceito de função, muito importante para o progresso da conceitualização atual de derivada, pois até então, a base do cálculo eram as curvas a partir da equação $f(x,y)=0$ elaborada por Descartes e Fermat. Introduz uma nova forma de calcular derivadas: por meio de quantidades infinitamente pequenas que ao aproximar-se do seu limite, poderão ser consideradas zero.</td><td rowspan="3">Criticou os fundamentos de cálculo elaborados por Newton e Euler. Define derivada a partir do limite de quocientes incrementáveis, desconsiderando a ideia de quantidades infinitamente pequenas. Mas ainda não apresenta uma definição precisa para o conceito de limite.</td><td rowspan="3">Introduziu a notação de derivada e a definiu como quociente de h no, deixando o limite de lado e recorrendo a séries de $f(x+h)$ possível de se obter para qualquer função.</td><td rowspan="3">Definiu o conceito de limite.

Definiu "a derivada de uma função em um ponto x como o limite da razão de diferenças

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quando h é infinitamente pequena".</td></tr>
<tr><td>Arquimedes (287a.C - 212a.C) Trabalhos relativos a tangente da espiral (natureza diferencial)</td></tr>
<tr><td>Não é denominado inventor do Cálculo por seus métodos não serem gerais e por não relacionar os problemas de tangente e área.</td><td colspan="2">São considerados os criadores do conceito geral da derivada, por reconhecerem a relação inversa entre a diferenciação e a integração e por elaborarem notações e algoritmos gerais para o Cálculo.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Gavilán (2010) e Lehmann (2011)

2.4 O que foi compreendido sobre o modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK[7])

O MTSK é um modelo elaborado a partir e para a análise do conhecimento do professor que ensina Matemática. Foi elaborado coletivamente ao longo das pesquisas desenvolvidas no grupo SIDM, cada uma delas acrescentando elementos novos permitindo, assim, um aprofundamento na conceitualização dos domínios e subdomínios do MTSK, ao olhar para o conhecimento especializado do(s) professor(es), participante(s) das pesquisas.

Sendo assim, nesta seção apresento o que se compreende do modelo MTSK construído até o momento, sem a intenção de apresentar algo rígido e acabado, e com alguns exemplos relacionados à Derivada em cada um dos subdomínios.

O MTSK emergiu de algumas dificuldades encontradas na utilização do modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) elaborado por Ball et al*.* (2008) sob influência do trabalho de Shulman (1986), que apresentou elementos gerais do conhecimento do professor para ensinar.

No que se refere às dificuldades na utilização do MKT, Carrillo, Contreras e Flores (2013) ressaltam os seguintes: (1º) problemas de localização do subdomínio denominado de Conhecimento do Horizonte Matemático (HCK); e (2º) problemas de delimitação entre subdomínios [Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) *versus* Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK); Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) *versus* Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK)].

Em relação ao primeiro problema, quando Ball e Bass (2009) apresentaram novamente o subdomínio HCK, acrescentaram a ele mais três "categorias", denominando-as HCK(T), referindo-se aos temas; HCK(P), referindo-se às práticas; e HCK(V), referindo-se aos valores. De maneira geral, estão inclusos dentro destes subdomínios: o conhecimento das ideias principais e da estrutura da disciplina (neste caso, a Matemática); o conhecimento das conexões existentes entre

---

[7] Nesta pesquisa utilizou-se a nomenclatura e siglas em inglês, conforme Carrillo; Climent; Contreras; Muñoz-Catalán (2013), para evitarmos possíveis desvios de atenção devido às diferentes possíveis traduções. Entende-se que a tradução dos termos para o português pode prejudicar o sentido utilizado pelo grupo de pesquisa que elaborou o modelo teórico.

elementos da Matemática; o conhecimento das formas de conhecer, criar e produzir em Matemática (raciocínio, prova, definição, relações, representações, generalização e exploração); o conhecimento dos valores centrais da disciplina (precisão, linguagem, coerência e exatidão) (CARRILLO; CONTRERAS; FLORES, 2013).

A dificuldade, segundo Carrillo, Contreras e Flores (2013) está em identificar quais aspectos do conhecimento matemático ficam de fora do subdomínio HCK, pois segundo a definição, abarcam, além das ideias principais da disciplina, a sua estrutura. Sendo assim, os autores propuseram uma reorganização do subdomínio HCK de Ball et al*.* (2008) dando origem aos subdomínios que contemplam o conhecimento da *estrutura* da Matemática e da *prática* da Matemática, conforme detalhes nas seções 2.4.1.2 e 2.4.1.3.

Em relação ao segundo problema, este envolve especificamente três subdomínios do MKT: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK); Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK); Conhecimento do Conteúdo e do Estudante (KCS).

O Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), de acordo com Ball et al*.* (2008), é o conhecimento que uma pessoa instruída possui. Já o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) é um conhecimento mais amplo do que CCK. Os questionamentos que Carrillo, Contreras e Flores (2013) ressaltam ao trabalhar com esses dois subdomínios são: Qual o “nível” de instrução de uma pessoa de Conhecimento Comum (CCK)? Eles afirmam que para saber se determinado conhecimento é comum ou especializado há a necessidade de comparações hipotéticas e ressaltam que, sendo assim, o conhecimento especializado seria algo projetado a partir de parâmetros e planos de ensino, como um ideal a ser alcançado. Segundo Carrillo, Contreras e Flores (2013) é mais aceitável caracterizar o conhecimento comum sem a necessidade de compará-lo com outros profissionais.

Além do mais, como diferenciar CCK de SCK? O que delimita cada um deles? Até onde pode ser considerado conhecimento comum, e a partir de onde conhecimento especializado?

Continuando no segundo problema pontuado por Carrillo, Contreras e Flores (2013), segundo eles o Conhecimento do Conteúdo e dos estudantes (KCS) contempla o conhecimento do professor sobre as dificuldades dos alunos e sobre onde normalmente cometem mais erros, enquanto que acrescenta ao Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) o conhecimento da procedência dos erros que permeiam o raciocínio dos alunos ao desenvolver uma atividade. A dificuldade encontrada na delimitação desses dois subdomínios, se deve ao fato de ambos abarcarem o conhecimento dos erros dos alunos. Um propõe contemplar a procedência (SCK) e o outro as dificuldades que levam ao erro (KCS). Como ambas as situações são muito parecidas, Carrillo, Contreras e Flores (2013) propuseram uma junção desses conhecimentos em um único subdomínio do MTSK, que será apresentado na seção 2.4.2.1.1.

Vale ressaltar, portanto, que o objetivo de Carrillo et al. (2014) não é apenas apresentar críticas em relação ao MKT, mas propor uma reformulação deste construto teórico a partir das potencialidades apresentadas, a fim de auxiliar na análise do conhecimento do professor de Matemática mobilizado na prática.

Outro aspecto a ser ressaltado é o termo “conhecimento especializado”. Em MKT o que é considerado especializado é o conhecimento do professor sobre o conteúdo. Já no MTSK, especializado é o conhecimento que o professor utiliza no e para ensinar Matemática (CARRILLO; CONTRERAS; CLIMENT, 2018, no prelo). Embora o modelo MTSK seja apresentado de forma fragmentada, para auxiliar nas análises, é o conjunto desses conhecimentos que configura a natureza especializada do conhecimento do professor. É considerado especializado por ser um conhecimento apenas de interesse do trabalho docente (CARRILLO et al., 2013).

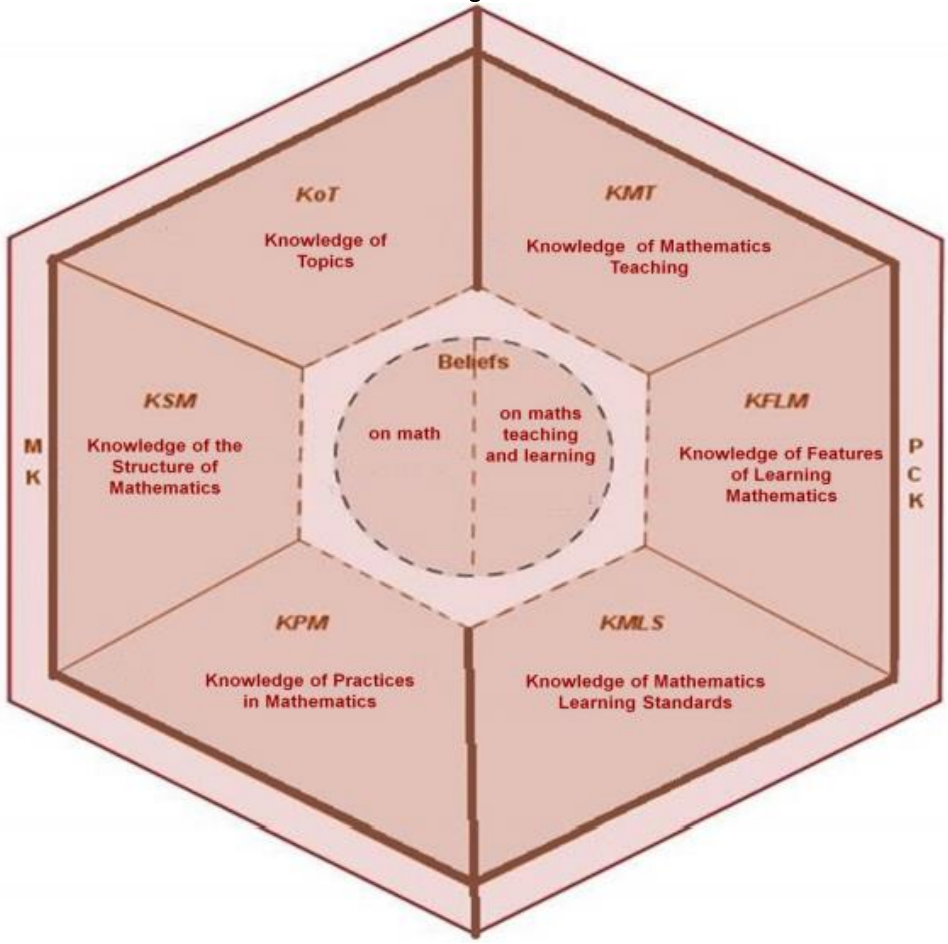
Sendo assim, o MTSK é representado por três domínios: as crenças[8]; o Conhecimento Matemático (MK); e Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK). Os domínios MK e PCK são compostos de subdomínios. Cabe ressaltar que embora haja essa fragmentação em domínios e subdomínios, o conhecimento no MTSK é considerado algo integrado e essa decomposição é feita para auxiliar a análise do

[8] Considera-se de igual maneira as concepções, sem objetivo de diferenciar entre crença e concepção. Portanto, todas as vezes que é utilizada a palavra crença, refere-se referindo tanto às crenças quanto às concepções.

conhecimento do professor de Matemática. Feitas as análises, todos os subdomínios são relacionados a fim de representar a rede integrada que constitui o conhecimento especializado do participante da pesquisa.

A partir da reorganização dos conceitos apresentados por Ball et al. (2008), de estudos teóricos e das análises de conhecimento de professores que atuaram em vários níveis de ensino (Educação Básica e Ensino Superior), ensinando vários temas dentro da Matemática, o grupo SIDM estruturou um modelo (Figura 2) para analisar o conhecimento especializado de professores que ensinam Matemática.

Figura 2 – Representação geométrica do modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge



Fonte: Montes; Carrillo (2015, p. 321)

Carrillo et al. (2014, p. 6 – tradução da autora) complementa afirmando que há a necessidade de considerar o MTSK:

> [...] como um conjunto de elementos do **conhecimento** do professor que podem ser detectados, considerando a necessidade de ser consciente de que tais elementos, inter-relacionados e condicionados uns com os outros, são o que denominamos “conhecimento especializado do professor de matemática.

Ou seja, especializado não é apenas um dos subdomínios do conhecimento, mas sim o conjunto desses elementos do conhecimento.

Embora o MTSK tenha sido elaborado com o objetivo de criar um modelo para análise do conhecimento do professor, é possível utilizá-lo como modelo teórico para pensar no ensino da Matemática, considerando todos os subdomínios apresentados. Carrillo, Contreras e Flores (2013), consideram o MTSK com caráter duplo, pois, de um lado, trata-se de uma proposta teórica que tem como objetivo apresentar o “conhecimento núcleo” do conhecimento profissional do professor de Matemática, que permite analisar o conhecimento especializado de qualquer professor que ensine qualquer conteúdo dentro da Matemática, independentemente do nível de atuação (Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Superior) e em qualquer modalidade (presencial, semipresencial, a distância). Com esse termo os autores querem dizer que dentro do MTSK, do ponto de vista cognitivo, está contido o conhecimento central de todo o conhecimento que um professor mobiliza ao atuar como professor de Matemática, sendo que os demais conhecimentos (como por exemplo, técnicas de comunicação, mediação, organização da sala, etc), denominados de conhecimentos pedagógicos gerais, são considerados auxiliares ou secundários. Desta maneira, o conhecimento incluído no MTSK é o que realmente fará diferença para/no trabalho do professor de Matemática, em relação ao conhecimento matemático.

Por outro lado, também, o MTSK é considerado como uma ferramenta metodológica que apresenta elementos (domínios, subdomínios e categorias) que favorecem a análise do conhecimento revelado na prática do professor (FLORES, ESCUDERO-AVILA, AGUILAR, 2013).

Escudero-Ávila (2015, p. 24 – tradução da autora) considera o MTSK como um modelo “[...] desenhado a partir da pesquisa e para a pesquisa [...]” que permite, além de identificar o conhecimento de um professor, descrever suas características. Nesse sentido, a intenção deste modelo é indagar sobre a natureza própria do conhecimento, e, embora já haja um movimento de utilizá-lo como modelo teórico em formações (iniciais e continuadas) a fim de nortear o conhecimento que o professor deveria possuir, nesta pesquisa o objetivo é ressaltar o conhecimento que o professor mobiliza (CARRILLO et al., 2014), mas, para além disso, o que ele revela, ou seja, o que deixa explícito em seu processo de ensinar Matemática.

Como foi mencionado anteriormente, embora o modelo MTSK considere o conhecimento como uma rede complexa e articulada, a fim de nortear as análises, ele é dividido em domínios, subdomínios e categorias que passo a apresentar a partir de agora.

2.4.1 *O que foi compreendido do domínio Mathematical Knowledge (MK)*

Este domínio do conhecimento é a base de todos os modelos teóricos que analisam o conhecimento do professor de Matemática (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). Montes (2015) ressalta que Shulman (1986) o chamava de Conhecimento do Conteúdo a fim de possibilitar uma utilização genérica do termo, permitindo assim ser utilizado independentemente da disciplina que o professor ministrasse. No MTSK a nomenclatura muda para *Mathematical Knowledge* (MK), pois são relativos especificamente (e em alguns momentos, exclusivamente) à Matemática (MONTES, 2015).

Em Ball et al. (2008) esse domínio de conhecimento era subdividido em três subdomínios: *Common Content Knowledge* (CCK); *Specialized Content Knowledge* (SCK); e *Horizon Content Knowledge* (HCK). Como dissemos anteriormente, o conhecimento especializado considerado no modelo MKT é diferente do considerado no MTSK. Enquanto o primeiro classifica como especializado o conhecimento apresentado por pessoas instruídas, considerado mais profundo do que o conhecimento comum, no modelo MTSK especializado é o conjunto de conhecimentos que o professor mobiliza no e para o ensino de Matemática.

Na organização do modelo MTSK a partir do MKT de Ball et al. (2008), o domínio MK é mantido pela importância do professor conhecer o conteúdo matemático que irá ensinar com consistência e profundidade (ESCUDERO-ÁVILA, 2015), ponderando aspectos que muitas vezes são deixados por alto.

Esse conhecimento para ser considerado caracterizado, possui distintos componentes que são organizados em três subdomínios, onde são contemplados o conhecimento (profundo) do conteúdo matemático em si (*Knowledge of Topics - KoT*), o conhecimento da estrutura deste conteúdo matemático (*Knowledge of the Structure of Mathematics - KSM*) e, o conhecimento de como proceder e produzir em Matemática (*Knowledge of the Practice of Mathematics - KPM*) (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). Discorrendo analogamente sobre esses três subdomínios, Carrillo, Contreras e Planas (2018 – no Prelo) consideram que o *KoT* pode ser representado por moléculas de uma estrutura molecular, enquanto que conhecer a *Estrutura Matemática* (KSM) corresponde a conhecer as conexões existentes entre essas moléculas, e o KPM diz respeito ao conhecimento sobre as regras de funcionamento de tal estrutura.

Apresento-os em detalhes a seguir.

2.4.1.1 O que foi compreendido do subdomínio *Knowledge of Topics* (KoT)

Esse subdomínio é traduzido como conhecimento dos temas, ou dos tópicos matemáticos. Independentemente de considerá-lo como temas ou tópicos, o que Carrillo et al. (2014, p. 73 – tradução da autora) pretende com esse subdomínio é abarcar o conhecimento que o professor revela sobre "[...] os conteúdos provenientes dos blocos de conhecimento tradicionalmente considerados em matemática". Eles acrescentam que esses tópicos podem variar dependendo de cada país.

Montes (2015) ao falar sobre o KoT ressalta a importância de o professor conhecer muito além daquilo que vai ensinar. Não basta saber o tema em si, como algo isolado e rígido, pois, como professor, é responsável por seu conhecimento, que se espera que seja eficiente para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem e, além disso, é responsável por mediar os conhecimentos que seu aluno venha a construir, úteis para resolver problemas relacionados ao seu dia a dia.

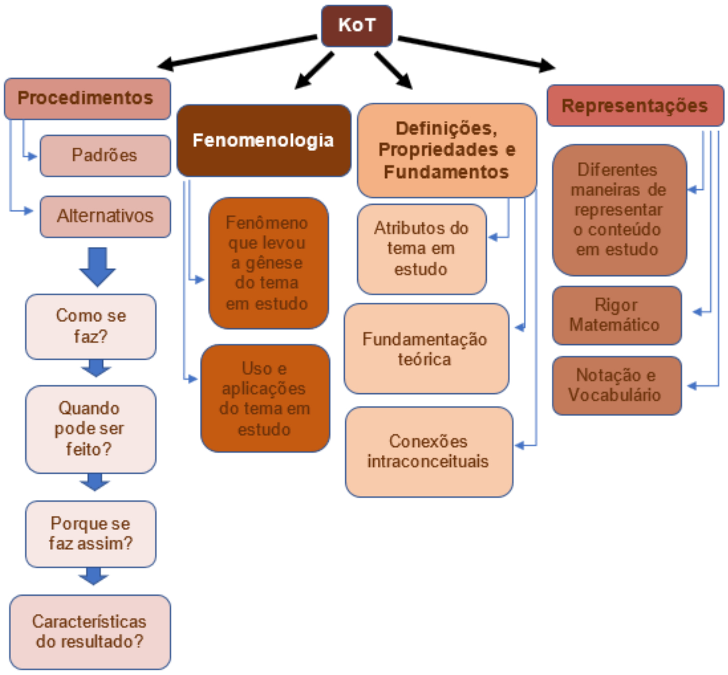
Sendo assim, o KoT contempla o conhecimento que o professor tem sobre um determinado tema e do que ele quer que seu aluno aprenda, abarcando a fundamentação e o aprofundamento teórico com que se está ensinando.

> [...] a compreensão do professor de Educação Primária [correspondente aos anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil] sobre a adição pode incluir significados de combinação, comparação e de trocas com situações correspondentes (o total de objetos existentes entre duas pessoas, o total de objetos que uma pessoa terá ao acrescentar uma nova quantidade), assim como conhecer sua fundamentação (compreender a adição como uma operação binária sobre conjuntos numéricos, com suas propriedades correspondentes). (CARRILLO et al., 2014, p. 73 – tradução da autora)

A partir desse exemplo é notório que, embora o professor queira apenas ensinar os procedimentos relacionados à adição, ele mobiliza vários outros conhecimentos que o auxiliarão em seu processo de ensino e que poderão contribuir para a compreensão do conteúdo por parte de seus alunos. Estas informações "a mais" são contempladas nas categorias provenientes deste subdomínio e que emergiram, em sua maioria, nas primeiras pesquisas com o olhar sobre MTSK.

Tentando entender esse movimento de constituição das categorias provenientes do subdomínio KoT, voltando-se às pesquisas que deram origem ao MTSK, é possível perceber que Rojas (2014), por exemplo, considerava dentro deste subdomínio conceitos, fenomenologia, procedimentos matemáticos, representações, aspectos da comunicação e as tarefas matemáticas relacionadas ao tema que se estava ensinando. Já Montes (2015), quando analisa o conhecimento de um professor sobre o infinito, considera parte de KoT a fenomenologia, os significados, linguagens e erros conceituais. A partir de Escudero-Ávila (2015) as categorias consideradas dentro desse subdomínio, e que se considera nesta pesquisa, são as que contemplam os conhecimentos do professor relativos aos *procedimentos matemáticos*, *fenomenologia*, *propriedades e fundamentos* e *registros de representação*, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Organograma das categorias e subcategorias do subdomínio KoT



Fonte: Elaborado pela autora (2017), baseado nas referências do MTSK.

Fazendo uma analogia com o papel do professor ao "ensinar o aluno a pescar", o tema considerado em KoT diz respeito a espécie de peixe que o professor quer ensinar seu aluno a pescar. Os demais exemplos de cada uma das categorias de KoT são apresentadas a seguir.

Antes, porém, vale reiterar que, nesta pesquisa, ao descrever cada subdomínio e suas categorias com exemplificações, de maneira alguma foi pretensão apresentar o conhecimento ideal para o professor, mas sim de elucidar em qual subdomínio serão alocados determinados conhecimentos, caso sejam revelados pelo professor participante da pesquisa.

2.4.1.1.1 O que foi compreendido por Procedimentos Matemáticos associados à Derivada

Um dos conhecimentos considerados como parte do KoT são os que se referem aos *procedimentos matemáticos* relacionados a um tema. Os procedimentos, dentro deste subdomínio, se referem aos caminhos trilhados para se resolver uma questão matemática, que podem ou não se resumir à utilização de algoritmos. Esses algoritmos podem ser tanto aqueles que são comumente utilizados ao se ensinar determinado conteúdo (procedimentos “padrões”), quanto aqueles utilizados apenas em certas situações (procedimentos “alternativos”).

Para o cálculo de Derivada, atualmente é utilizado um procedimento elaborado a partir de sua definição, cuja notação sofre algumas variações dependendo de como a Derivada é vista: limite de uma função; inclinação da reta tangente; ou taxa de variação. O Quadro 4 apresenta os algoritmos associados a cada uma dessas interpretações.

Quadro 4 – Procedimentos da Derivada a partir de sua definição

Derivada como limite de uma função	$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ ou $f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ (STEWART, 2001, p. 158)
Derivada como inclinação da reta tangente	[...] considere um ponto $Q(x, f(x))$ na curva que seja distinto de P e calcule a inclinação m_{PQ} da reta secante por P e Q: $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014, p. 131)
Derivada como taxa de variação	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (STEWART, 2001, p. 158)

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Stewart (2001) e Anton; Bivens; Davis (2014).

É possível perceber que embora a notação tenha algumas diferenças, a ideia que circunda as três definições é a mesma: a variação. Por isso a derivada é conhecida como cálculo diferencial.

Em relação ao MTSK, o conhecimento revelado pelo professor ao utilizar tais algoritmos já é parte do KoT, porém, como dissemos anteriormente, existem conhecimentos “além” do mero uso, que também são atribuídos ao KoT. Utilizar tais procedimentos revela o conhecimento do professor sobre “*como se faz?*”, mas além disso, o professor pode revelar seu conhecimento sobre “*quando pode ser feito?*”, “*porque se faz assim*”, e as “*características dos resultados*” (CARRILLO et al*.,* 2014).

O “*como se faz?*” é possível de encontrar em todos os livros que trate o tema de derivada e se refere a explicar a própria manipulação do algoritmo, ou do procedimento alternativo que utiliza. Essas manipulações são ensinadas e exemplificadas em livros-textos redigidos com a pretensão de ensinar o conceito de Derivada para os alunos. Abaixo é apresentado um exemplo de como derivar uma função a partir do algoritmo da derivada como limite de uma função.

Quadro 5 – Exemplo de resolução da derivada como limite de uma função

Exemplo 1. Encontre a derivada da função $f(x)$= $x^2 - 8x + 9$ em um número a.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{[(x+h)^2 - 8(x+h) + 9] - [x^2 - 8x + 9]}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 9 - x^2 + 8x - 9}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{2xh + h^2 - 8h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{h(2x + h - 8)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h - 8)$$

$$= 2x - 8$$

Fonte: (STEWART, 2001, p. 158)

Nota-se que o “*como se faz?*”, neste caso, se restringe apenas a substituir a função no algoritmo e realizar as manipulações matemáticas possíveis. Em atividades como esta, as manipulações só são possíveis de “*serem feitas quando*” é apresentada uma função.

Mas, “*porque se faz assim?*”

Diferentemente da resposta ao questionamento anterior, a resposta ao “*porque se faz assim?*” nem sempre é fácil de se encontrar. Embora haja uma intenção de mostrar ao aluno como se faz, essa explicação, muitas vezes, se resume a justificar a manipulação algébrica por traz do algoritmo. Justificar a utilização de tal algoritmo vai muito além da explicação da manipulação, tem a ver com a fundamentação por trás da construção do conceito estudado.

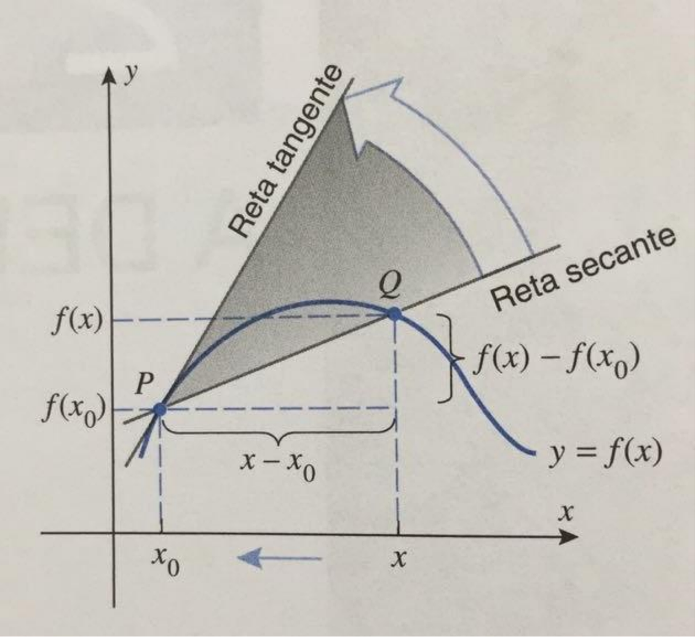
Conforme mostramos anteriormente no movimento histórico, Cauchy (1798-1857) na tentativa de dar rigor a tudo o que já haviam descoberto até então, algebrizou as ideias que permeavam a manipulação geométrica das variações. Para compreender a justificativa do porquê se faz assim atualmente, é preciso compreender as ideias por trás do conceito de derivada, que podem ser conferidas na figura 4.

Na figura 4 é possível visualizar a representação gráfica de uma função (representada por uma curva) em um intervalo. Nela foi traçada uma reta secante que passa pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$. Mantendo a reta fixa no ponto P, move-se ela no sentido anti-horário, até que o único ponto da curva que ela toque seja o P. Ao fazer esse movimento de reta secante para reta tangente o x ficou mais próximo de x_0 (por isso $\lim\limits_{h \to 0}$).

Dando rigor algébrico a essa ideia que Cauchy representou:

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Figura 4 – Interpretação da ideia de derivada



Fonte: Anton; Bivens; Davis (2014, p. 131).

Denomina--se a variação que ocorre de x a x_0 de h. Sabendo que $x - x_0 = h$, o x pode ser representado como $x = x_0 + h$. Substituindo essas notações ao algoritmo apresentado acima, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x)$ é uma das notações criadas por Leibniz para se referir à derivada e muito utilizada atualmente.

Em relação à “*característica do resultado”* da derivada como limite de uma função em um ponto, a derivada da função sempre terá um grau a menos do que a função proposta. Por exemplo, dada a função $f(x)$= $x^2 - 8x + 9$, sua derivada será $f'(x)$= $2x - 8$, ou seja, a função derivada possui um grau a menos em relação a função dada.

Voltando a analogia da pesca, os *procedimentos* se referem ao que o aprendiz de pescador tem que fazer para conseguir pescar esse peixe, sejam elas atitudes frequentemente utilizadas ou não por outros pescadores, sempre ciente das justificativas por traz dessas ações.

2.4.1.1.2 O que foi compreendido por Definições, Propriedades e Fundamentos atribuíveis à Derivada

Ao deparar-se com o título dessa categoria, a atitude quase instintiva é tentar conceituar e diferenciar cada uma das palavras que compõem o título: definição, propriedades, fundamentos. Por *propriedades* entende-se serem os atributos específicos do tema que se está trabalhando e por *fundamentos*, as bases matemáticas que dão sustentação e significado ao tema estudado. Mas, qual a diferença entre definição e propriedades?

Garcia (2017) fala um pouco sobre o assunto ressaltando que a linha que diferencia definição de propriedade é tênue. Relembra que antigamente, ao se falar de um tema, definições, propriedades e fundamentos eram consideradas de forma isolada, porém, por meio das pesquisas desenvolvidas dentro do SIDM para analisar o MTSK passou-se a olhar como informações complementares, sem a intenção de diferenciar definição de propriedades e fundamentos.

Sendo assim, são atribuídos à categoria *Definições, Propriedades e Fundamentos* os conhecimentos que o professor revela sobre o agrupamento de propriedades que possibilitam definir um tema e atribuir significado a ele (GARCIA, 2017). Vale ressaltar que *Definições* e *Propriedades* dentro do modelo MTSK são considerados informações diferentes, porém, que se complementam. As definições são compostas de propriedades, com uma série de características que a tornam uma definição. Porém, isso não quer dizer que se tratam da mesma coisa, mas que são informações complementares que muitas vezes se torna impossível dissociá-las, por isso são consideradas na mesma categoria.

Vale ressaltar, também, que neste subdomínio é considerado o conhecimento da definição do tema em si, ou seja, o conhecimento da definição de Derivada, por exemplo. Já o conhecimento das características da definição de Derivada ou o porquê pode ser considerado uma definição de Derivada é um conhecimento considerado no subdomínio que apresento na seção 2.4.1.3. É importante que essa diferenciação seja apontada para que o leitor perceba a estreita relação que existe entre os conhecimentos considerados em cada um dos subdomínios do MTSK.

Escudero-Ávila (2015) ressalta que as propriedades devem ser específicas do tema que se está considerando. São elas que possibilitam a definição do objeto de estudo, pois normalmente para se chegar a uma definição matemática é apresentado um conjunto de propriedades. Conhecendo as propriedades que compõem a definição de um tema matemático e a fundamentação (ou seja, as ideias conceituais) que as sustentam, tem-se maiores possibilidades de compreender o sentido e o significado do tema que se estuda.

A definição de derivada é dada por Stewart (2001, p. 158 – grifos do autor) como "A **derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ em um número $\boldsymbol{a}$,** denotada por $f'(a)$ é

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se o limite existe". Com essa definição, é possível encontrar a derivada de qualquer função cujo limite exista. Porém, a possibilidade de encontrar a derivada de funções por meio deste algoritmo não significa que este caminho seja mais fácil ou mais rápido de ser percorrido para derivar qualquer função.

Sendo assim, a fim de buscar caminhos mais rápidos e tão eficazes quanto derivar pela definição, foram-se buscando padrões de resultados de derivadas de funções e assim, surgiram o que conhecemos como propriedades ou teoremas.

Por exemplo: Quais as derivadas das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$?

Utilizando a definição de Derivada, obtêm-se as seguintes resoluções e respostas:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$g(x) = x^3$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(x+h)(x+h) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)(x+h) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$f'(x) = 2x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + x^2h + 2x^2h + 2xh^2 + xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$g'(x) = 3x^2$$

Os exemplos acima possuem uma característica em comum: ambos são funções potenciais. Ao derivar tais funções pela definição, tem-se para $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$; e para $g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$. É possível perceber pelas resoluções acima que existe uma relação entre a derivada e sua função. O grau da potência no início passa a ser o coeficiente angular após a função estar derivada. Além disso, o grau é diminuído em uma unidade. A função que antes era $g(x) = x^3$, ao derivá-la, passou a ser $g'(x) = 3x^2$.

Devido a essa relação ser existente em todas as derivadas de funções potenciais, foi elaborada uma propriedade denominada “Derivada de uma potência” cuja definição apresentada por Anton, Bivens, Davis (2014, p. 156) é “*Se n for um número inteiro positivo, então* $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$”. Essa propriedade resultou no procedimento padrão para se derivar funções que apresentem potências.

Além desta, existem outras propriedades da Derivada que podem ser conferidas em Anton, Bivens, Davis (2014) e outros autores que abordam esse tema. Outro fator a se considerar dentro dessa categoria é que embora a reta tangente e a taxa de variação sejam muitas vezes estudadas de forma dissociada da derivada, existe uma conexão delas com a derivada e entre elas. Embora as conexões sejam consideradas em outro subdomínio do MTSK (o KSM), as conexões desse tipo, denominadas de intraconceituais, são consideradas nesta categoria do subdomínio KoT.

Fazendo alusão novamente à analogia da pesca, as principais características desse peixe (físicas e genéticas) que se quer pescar e de outros que pertencem a mesma “família” relacionam-se às *definições, propriedades e fundamentos*. São essas características que, consideradas juntamente, levam à criação de “padrões de pesca”.

2.4.1.1.3 O que foi compreendido sobre os *Registros de Representação* associados à Derivada

Outro conhecimento que quando revelado pelo professor é considerado dentro do subdomínio KoT, é o que se refere aos diferentes registros possíveis de serem utilizados para representar um conceito dentro da Matemática (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). A necessidade de consideração desta categoria emergiu inspirada nos trabalhos de Duval (1995).

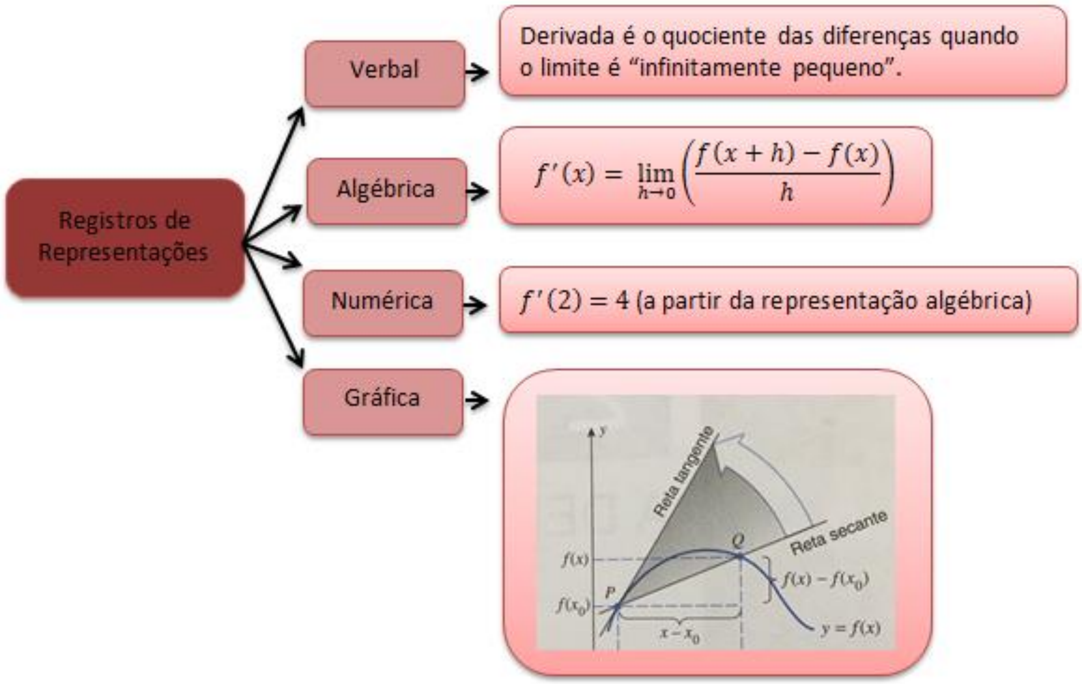
Essa autora exemplifica essa categoria com os registros de representações numérico, algébrico, analítico, gráfico, verbal e acrescenta os conhecimentos do professor sobre o rigor matemático, entre eles, a notação e vocabulário correspondentes a tais representações (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Ao fazer uma análise histórica sobre a gênese do conceito de Derivada, Leme (2003) percebeu que o enfoque dado para solucionar o problema das tangentes era sempre *gráfico*, por isso, na época, para os pesquisadores matemáticos caracterizarem o máximo e mínimo de uma função

> [...] parecia natural utilizar retas tangentes à curva. A generalização de encontrar as retas tangentes em qualquer ponto da curva levou ao procedimento em que para se determinar a inclinação da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$, dava-se um incremento h a x_0 e traçava-se uma reta secante à $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. A posição limite das secantes quando h → 0 determinava uma reta que se denominou reta tangente (LEME, 2003, p. 31).

Neste excerto, Leme (2003) utiliza a representação verbal, ou língua materna, para representar parte do conceito de derivada. Outras representações podem ser conferidas na Figura 5.

Figura 5 – Exemplos de registros de representações relacionados à Derivada



Fonte: Elabora pela autora, baseado em Anton; Bivens; Davis (2014); Stwart (2006); Gavilán (2010)

Nestes exemplos apresentados na figura é possível visualizar a representação verbal, algébrica, numérica e gráfica da derivada, sendo estas as mais utilizadas ao ensinar o conceito de derivada.

Castro e Castro (1997) afirmam que as representações tratam-se de diferentes expressões de um mesmo conceito, onde cada uma delas tem a possibilidade de ressaltar uma característica diferente deste conceito. Os autores complementam lembrando que a complexidade das relações existentes em um conceito matemático é impossível de ser esgotada em uma única representação (CASTRO; CASTRO, 1997).

As representações a partir da analogia da pesca apresentadas anteriormente dizem respeito às diferentes maneiras de como esse peixe que se quer pescar é conhecido e caracterizado em distintos lugares, podendo se referir ao seu nome científico ou simplesmente às diferentes formas como o enxergam e o interpretam.

2.4.1.1.4 O que foi compreendido sobre a *Fenomenologia* associada à Derivada

Além dos conhecimentos apresentados até o momento, são atribuídos também ao KoT o conhecimento da *Fenomenologia* do tema matemático, considerada a partir de duas perspectivas: a primeira é específica do tema, “[...] vistas como fenômenos que podem servir para gerar conhecimento matemático, entre eles, os que aparecem na gênesis do próprio conceito” (CARRILLO et al., 2014, p. 69 – Tradução da autora). Essa perspectiva é exemplificada pelo autor como “[...] o conhecimento que o professor tem sobre o tipo de problemática *ad hoc* a cada algoritmo para resolver uma divisão de fração [...]” (CARRILLO et al., 2014, p. 70– Tradução da autora). No caso da Derivada, seria o tipo de problemática que levou à gênese desse conteúdo e à elaboração dos algoritmos utilizados para estudar esse conteúdo matemático.

A segunda perspectiva considerada nesta categoria se refere ao conhecimento que um professor tem sobre os usos e aplicações de um determinado tema (CARRILLO et al., 2014). Esses podem relacionar-se a diversos e variados contextos e culturas. Por exemplo, como o tema de Derivada pode ser ensinado em um contexto indígena? Quais aplicações o professor poderia fazer?

A utilização e aplicabilidade de um tema matemático podem variar não apenas por etnias diferentes, mas também pela situação social dos estudantes. O professor precisa desse conhecimento para que aquilo que ele ensina tenha sentido para seus alunos na realidade em que ele está inserido.

Sobre a gênese do conceito de derivada já explicada na seção 2.3, no que se refere à aplicabilidade da derivada, é possível apresentar como exemplo, a utilização deste conceito para determinar a velocidade média percorrida ao ir de carro de Rio Claro a Campinas, aplicando assim o conceito de variação. Quando se faz necessário saber, por exemplo, a velocidade que o carro estava em um momento específico, utilizar-se-á o conceito de velocidade instantânea, que é uma aplicação da derivada como taxa de variação instantânea. A representação figural da fenomenologia pode ser conferida na Figura 6.

Figura 6 – Exemplos de fenomenologia da Derivada

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em STEWART (2001).

Analogicamente falando, o conhecimento relativo à gênese da pesca desta espécie de peixe bem como a utilidade desta variedade à culinária local e mundial se refere à *fenomenologia*.

Por fim, como se procurou mostrar até o momento, o KoT é um dos conhecimentos fundamentais para os processos de ensino e aprendizagem, porém, não é o único a ser buscado. A seguir passarei a descrever e a exemplificar os demais conhecimentos alocados dentro do domínio *Mathematical Knowledge,* bem como aqueles pertencentes ao domínio *Pedagogical Content Knowledge.*

2.4.1.2 O que foi compreendido sobre o subdomínio Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM)

O subdomínio KSM teve sua gênese em HCK (subdomínio no modelo MKT). Como disse anteriormente, Ball e Bass (2009) apresentaram HCK dividido em três partes. O KSM é elaborado a partir de HCK(T), que se refere aos conhecimentos das conexões contempladas dentro da estrutura Matemática (CARRILLO;

CONTRERAS; FLORES, 2013). As conexões intramatemáticas já foram contempladas em KoT.

Quando buscamos o significado da palavra “estrutura” é possível encontrá-la relacionada a um contexto físico, palpável, na qual é considerada como o que possibilita a sustentação de algo (por exemplo, a estrutura de uma casa). E está relacionada também ao contexto organizacional na qual dispõe e ordena os elementos componentes de um corpo (por exemplo, uma equipe de trabalho) (FERREIRA, 2009).

O termo “estrutura” dentro do subdomínio KSM nos influencia a olhar a Matemática não apenas como unidades separadas, mas como um grande sistema no qual vários temas estão relacionados, e aqueles que não estão, podem servir, no mínimo, de auxiliar. Dentro desse subdomínio são considerados os elementos que permitem essas relações, ou seja, as conexões. Conhecer a estrutura implica em conhecer as relações existentes entre diferentes conteúdos (MONTES et al*.,* 2013).

Vale ressaltar que essa palavra, de forma alguma, dentro do MTSK, se refere a uma estrutura única, pré-fixada, rígida, mas se trata do conhecimento que o professor possui e revela sobre a rede de relações entre os entes matemáticos. Ao apresentarem este subdomínio, os autores nos chamam a atenção para a importância de não se considerar os temas da Matemática de maneira isolada, mas como elementos integrados dentro de um sistema de conexões. Esse olhar favorecerá a compreensão de inúmeros conceitos presentes na Matemática (MORIEL JUNIOR, 2014).

Sendo assim, o conhecimento envolvido neste subdomínio possibilita o estabelecimento de relações com conteúdos estudados anteriormente, além de servir como fundamentação para temas que serão trabalhados posteriormente.

Montes (2015) considera o KSM como um construto desenvolvido pelo próprio professor, para conectar e sequenciar os tópicos matemáticos. Essas conexões pessoais, realizadas pelo professor, contêm conhecimentos de caráter elementar, mas também de caráter avançado (MONTES, 2015). É essa condição que permite o professor trabalhar a Matemática de maneira integral e estruturada (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Carrillo et al. (2014) reforçam que é preciso considerar que uma estrutura matemática possui uma organização em duplo sentido: horizontal e vertical, sendo o último o que mais se associa a uma organização hierárquica, ao passo que a horizontal se refere às relações e conexões que podem possuir o mesmo nível de complexidade matemática. Essas relações (conceitos, procedimentos, fórmulas, etc.) podem necessitar apoiar-se em outras, consideradas intermediárias. Por isso, quanto mais complexo é o enredo de relações, mais factível é o trânsito entre eles. É como a rede de neurônios que todos nós temos, que permite que conexões gerem outras, que por sua vez, geram outras, e assim, falando de maneira simplista, nos permite construir novas aprendizagens.

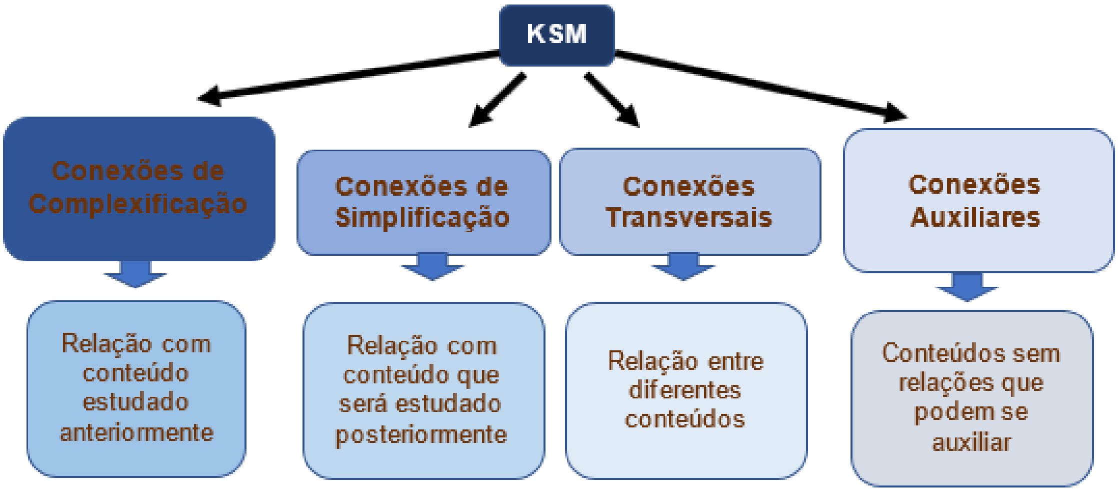
Os conhecimentos envolvidos em KSM permitem ao professor realizar uma autoanálise sobre o desenvolvimento de sua construção matemática (MONTES, 2015). No que se refere a sua relação com o aluno, possibilita ao professor organizar sua explicação, de maneira a apresentar sua construção pessoal do conteúdo, além de compreender as tentativas de conexões utilizadas por eles ao se depararem com um problema matemático (MONTES, 2015).

Nesta pesquisa, portanto, serão considerados dentro de KSM, os conhecimentos revelados pelo professor sobre as relações existentes entre a Derivada e conteúdos ou conceitos estudados anteriormente (*conexão de simplificação*) e entre a Derivada e conteúdos que serão estudados posteriormente (*conexão de complexificação*). Além desses, os conhecimentos das relações realizadas entre diferentes conteúdos (*conexões transversais*), e ainda, entre diferentes conteúdos que embora não tenham relação direta, podem servir como auxiliares a outros (*conexões auxiliares*).

Utilizando a mesma analogia utilizada em KoT, sobre “ensinar o aluno a pescar”, a partir das ideias de Carrillo; Contreras; Climent (2018 no prelo), enquanto o KoT pode ser representado pelo peixe que se pretende pescar, KSM se relaciona com os conhecimentos das conexões existentes entre as várias espécies de peixes, ou ainda, de outros peixes em relação à espécie específica que se quer aprender (ou ensinar) a pescar.

Apresentamos a seguir a Figura 7 que representa as categorias que delimitam os conhecimentos que são alocados em KSM e posteriormente passamos a falar em detalhes sobre cada uma delas.

Figura 7 – Subdomínio KSM e suas categorias



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

2.4.1.2.1 O que foi compreendido por *Conexões de Complexificação* relacionadas à Derivada

As *Conexões de Complexificação* dizem respeito às relações que existem entre o conteúdo ensinado no momento com aqueles que serão ensinados posteriormente, quer seja na mesma disciplina ou em disciplinas posteriores. Neste caso, o conteúdo ensinado é visto como potencializador para aprendizagens de conteúdos futuros, o que os autores consideram como “[...] uma visão da matemática elementar a partir de um ponto de vista avançado [...]” (CARRILLO et al., 2014, p. 76 – tradução da autora).

Na tentativa de exemplificar a partir da analogia utilizada neste capítulo, é possível visualizar essa conexão desde duas perspectivas: A primeira em relação ao desenvolvimento do peixe em si, sendo que essa conexão de complexificação pode ser observada ao considerar as relações existentes quando o peixe é bem pequeno em comparação à sua fase adulta e maior. A segunda perspectiva tem a ver com o estudo de peixes seguindo uma ordem crescente, por exemplo, baseada nos tamanhos dos peixes, em que primeiro estuda-se os peixes menores até chegar aos maiores peixes existentes. Nesse sentido, as conexões de complexificação poderiam ser vistas como o conhecimento revelado pelo professor sobre as relações existentes entre o peixe que se está estudando no momento com aqueles maiores que serão estudados posteriormente.

Seguindo essa linha de raciocínio, o ensino de Integral, por exemplo, normalmente é feito após o ensino de Derivada. Um exemplo de conhecimento que pode ser considerado como *conexão de complexificação* é compreender a integral como o Inverso da Derivada.

Sendo assim, nesta pesquisa, todos os conhecimentos que o professor revelar sobre relações existentes entre a Derivada e conteúdos ou temas que serão estudados posteriormente serão considerados dentro desta categoria.

2.4.1.2.2 O que foi compreendido por *Conexões de Simplificação* relacionadas à Derivada

As *Conexões de Simplificação* são entendidas como o conhecimento que o professor tem sobre as relações existentes entre o conteúdo que está ensinando com aqueles ensinados anteriormente. Os conteúdos ensinados são vistos como retrospectivos daqueles ensinados anteriormente, considerados pelos autores como “uma visão da matemática avançada a partir de um ponto de vista elementar [...]” (CARRILLO et al*.*, 2014, p. 76 – tradução da autora).

Em relação à Derivada, seguindo a ordem cronológica de como ocorre o ensino de Cálculo atualmente, podemos exemplificar a conexão de simplificação pela relação existente entre o Limite e a Derivada, como normalmente é feito. Mas, essa conexão não é possível de ser vista apenas entre Limite e Derivada. Nos anos finais do Ensino Fundamental, por exemplo, quando o professor ensina o conceito de variação por meio de análise de sequências recursivas, para se chegar a uma lei de formação, pode (e deve) ser um princípio para a compreensão da variação que ocorre quando se estuda o conteúdo de Derivada

Falando analogicamente, considerando o estudo de peixes seguindo a ordem de tamanhos, seria a relação existente entre o peixe que se está estudando com peixes de espécies menores, estudados anteriormente.

2.4.1.2.3 O que foi compreendido por *Conexões Transversais* que perpassa a Derivada

A palavra transversal significa cruzar ou atravessar algo (DICIONÁRIO ONLINE). Sendo assim, a transversalidade da conexão está no fato de perpassar conteúdos com qualidades e características comuns. Por isso que as *Conexões Transversais* tratam das relações existentes entre conteúdos que podem se complementar.

No caso da Derivada, o próprio Limite pode ser considerado como uma conexão transversal existente entre a Derivada, a Continuidade e a Integral (CARRILLO et al., 2014). Além disso, essa transversalidade pode ser vista a partir das diferentes maneiras de interpretar o próprio conceito de Derivada, ou seja, como: taxa de variação instantânea; inclinação da Reta Tangente; e Limite de uma função, quando x tende a zero. A relação que perpassa todas essas interpretações é o estudo da variação existente, que também pode ser visto como o estudo de funções, que pode ser considerada como uma conexão que perpassa além da Derivada, outros conteúdos matemáticos. O conceito de variação é um exemplo de conexão transversal entre a Derivada e outros conteúdos.

Falando analogicamente dessa categoria, essas *conexões transversais* poderiam ser representadas pelas relações existentes (ou características comuns) entre diferentes tipos de peixes.

2.4.1.2.4 O que foi compreendido por *Conexões Auxiliares* relacionadas à Derivada

A última categoria associada à KSM apresenta as *Conexões Auxiliares*. Os conteúdos não necessariamente se relacionam, mas a despeito disso, eles podem funcionar como auxiliares um do outro. Por exemplo, para determinar as raízes de uma função, utilizam-se equações. Não existe uma relação direta entre uma função e uma equação. Na função, o estudo está focado na variação e, na equação, o estudo está focado na incógnita. Embora não exista essa relação direta entre função e equação, o uso de equações pode auxiliar no encontro das raízes de uma função (CARRILLO et al*.*, 2014).

No caso da definição de Derivada, utiliza-se uma função. Mas, quando se afirma que $x_0 - x = h$, utiliza-se uma equação para refinar o conceito de Derivada.

Falando analogamente, embora não exista relação direta entre um peixe e um quadrúpede, utilizar-se de alguns conhecimentos sobre quadrúpedes pode auxiliar em uma compreensão mais refinada sobre os peixes.

E assim encerra-se a apresentação sobre o subdomínio que contempla as possíveis conexões dentro e fora do conteúdo de Derivada. Caso o participante da pesquisa revele algum conhecimento que possa ser relacionado às conexões, ele será alocado dentro deste subdomínio.

2.4.1.3 O que foi compreendido do subdomínio *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM)

Continuando a falar sobre os conhecimentos matemáticos considerados em MTSK, iniciamos a apresentação deste subdomínio lembrando que a palavra "prática", dentro do MTSK, nada tem a ver com a ação do professor em sala de aula (comumente chamado de prática de sala de aula), uma vez que este subdomínio encontra-se no domínio do Conhecimento Matemático (MK). Esta palavra dentro do subdomínio KPM está relacionada ao conhecimento do professor sobre o "caminho" para se chegar a resultados matemáticos (CARRILLO; CONTRERAS; FLORES, 2013).

Segundo estes autores, o subdomínio emergiu da consideração do Conhecimento do Horizonte Matemático (HCK - P) de Ball e Bass (2009), mas também recebeu influências dos trabalhos de Schwab (1978), Ball (2005) e Rowland et al*.* (2009).

KPM seria o conhecimento do professor de como fazer Matemática. Isto vai ao encontro do que Carrillo, Contreras e Flores (2013) apresentam, pois, para eles, o professor precisa saber raciocinar matematicamente e a partir dos distintos raciocínios que conhece, saber os contextos mais propícios para a utilização de cada um.

Enquanto em KSM são considerados os conhecimentos sobre as conexões possíveis entre diferentes temas (ou temas similares), em KPM são considerados os conhecimentos da maneira como essas conexões são estabelecidas (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

A autora complementa afirmando que a inclusão deste subdomínio ao MTSK se deve ao fato da pretensão de

> [...] enfatizar a necessidade de que o professor conheça as formas de proceder para se chegar aos resultados matemáticos e as características do trabalho matemático como disciplina científica, ainda que somente nos interesse os que tem relação com a matemática escolar. Trata-se de considerar o conhecimento sobre como é possível explorar e gerar conhecimento em matemática, como se estabelecem relações, correspondências e equivalências, como se argumenta, raciocina e generaliza [...] que características tem alguns dos elementos que se faz matemática (como uma definição ou uma demonstração), além do conhecimento do professor sobre a lógica proposicional, dos modos de proceder (o conhecimento de heurísticos na resolução de problemas, por exemplo) e a sintaxe da própria matemática (ESCUDERO-ÁVILA, 2015, p. 33 – tradução da autora).

Como pontuam Flores-Medrano e Aguilar-González (2017) os conhecimentos contemplados em KPM são tidos como um metaconhecimento que possibilita ao professor perceber as minúcias presentes nos processos de construção do pensamento Matemático. É ele que permite ao professor diferenciar a proximidade entre uma demonstração e uma possível demonstração, por exemplo.

Embora desde o princípio se reconheça a importância de se contemplar tal conhecimento no modelo MTSK, é um dos subdomínios mais trabalhosos se referindo à categorização para as análises, cujo sistema de categorização não se encontra definido como os outros subdomínios. A princípio havia apenas uma lista de indicadores, conforme Quadro 6.

Quadro 6 – Indicadores do subdomínio KPM

Subdomínio	Indicadores
KPM	*Hierarquização e planejamento como forma de proceder em resolução de problemas matemáticos*
	Formas de validação e demonstração
	Papel dos símbolos e uso da linguagem formal
	Processos associados a resolução de problema como forma de produzir Matemática
	Práticas particulares do fazer matemática (por exemplo, modelação)
	Condições necessárias e suficientes para gerar definições

Fonte: Carrillo et al. (2016)

Enquanto em KoT o professor se utiliza da demonstração, da definição, de símbolos, etc., em KPM o professor precisa conhecer o que está “por trás” dessa utilização.

Esses indicadores possibilitaram a construção de um sistema de categorias de KPM apresentada em Flores-Medrano e Aguilar-González (2017). Os autores exemplificam a construção e natureza do pensamento científico, constituído por condições e argumentos culminando, assim, em uma organização das ideias para se chegar a uma “generalização”, neste caso representada pelas categorias. É essa construção do Pensamento Matemático que é prevista como parte do conhecimento matemático do professor e considerada em KPM. As categorias e subcategorias organizadas por eles podem ser conferidas no Quadro 7.

Quadro 7 – Categorias propostas ao subdomínio KPM

Categorias	**Subcategorias**	**Elementos para descritores**
Demonstrar	Tipos	Esquema de prova experimental
		Esquema de prova indutivo de um caso
		Esquema de prova indutiva de vários casos
		Esquema de prova indutiva sistemática
		Esquema de provas pre-formal
		Esquema de prova axiomática
		Esquema de prova gráfica
		Esquema de prova numérica
		Esquema de prova de indução completa
	Funções	Validação
		Explicação

		Comunicação
		Descobrimento
		Sistematização
Definir	Características	Precisão na terminologia – hierarquização
		Não circularidade
		Não ambígua
		Não contraditória – estruturalmente inequívoca
		Invariante sob mudança de representação
		Equivalência
		Elegância
		Minimalidade
		Degeneração

Fonte: Flores-Medrano e Aguilar-González (2017, p. 41-42 – tradução da autora)

Embora tenham apresentado esse sistema de categorias e subcategorias, Flores-Medrano e Aguilar-González (2017) conseguem destacar algumas críticas, considerando o fato desse sistema estar em construção. Entre elas o fato da possibilidade de sobreposição entre dois ou mais tipos de demonstrações; a sensação de que faltam elementos a serem considerados dentro deste subdomínio; e a necessidade de um refinamento da própria definição do que é prática dentro do subdomínio KPM.

Além dessas críticas, são pontuados pelos autores supracitados alguns desafios a serem alcançados para um sistema de categorias mais funcional que auxilie na análise do KPM do professor que ensina Matemática. Entre esses desafios encontram-se o fato de que a própria caracterização e categorização deste subdomínio é um desafio em si mesmo, além da escolha de uma metodologia para ascender ao conhecimento da prática revelado pelo professor. Junto a esses, pontuam o desafio de propor categorias que sejam “suficientes” para abarcar todo conhecimento da prática que o professor revela em seus processos de ensino, o desafio de sistematizar informações contidas em literaturas cujo enfoque seja a “prática matemática” e transpor para o professor quando focar-se em conhecimentos de estudantes, além de contrastar a “prática matemática” de matemáticos com aqueles referentes ao educador matemático (FLORES-MEDRANO; AGUILAR-GONZÁLEZ, 2017).

Fechando a apresentação dos subdomínios e categorias relacionados ao conhecimento matemático do professor, vale relembrar a metáfora utilizada por

Carrillo, Contreras e Climent (2018 – no prelo), se referindo à dimensão de cada subdomínio do conhecimento matemático, em que o KoT pode ser entendido como as moléculas de uma estrutura molecular, o KSM como as conexões existentes entre essas moléculas e o KPM como as regras de funcionamento desse sistema composto por moléculas.

2.4.2 O que foi compreendido do domínio *Pedagogical Content Knowledge* (PCK)

Este domínio engloba o caráter prático do conhecimento profissional do professor de Matemática (CARRILLO; CONTRERAS; FLORES, 2013). Prático não no sentido de construção, apresentado no subdomínio KPM, mas no sentido de ação, representado pelo exercício de ser professor. Faz parte deste subdomínio o conhecimento que o professor tem acerca das formas de pensamento de seus estudantes ao realizarem as atividades. Está intimamente ligado aos aspectos relacionados ao conteúdo matemático como agente ativo dos processos de ensino e aprendizagem (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Foi proposto inicialmente por Shulman (1986) e aborda um conhecimento que é próprio da ação principal do professor, que é o ensino. Conforme Carrillo et al. (2014), os aspectos do PCK foram acrescentados ao MTSK para que o professor compreenda o conteúdo matemático a partir de três pontos de vista: como algo a ser ensinado; como algo a ser aprendido; e como parâmetros de aprendizagem que se pretende alcançar.

Embora no MTSK seja utilizada a mesma nomenclatura dos trabalhos que se referem ao PCK, fazendo alusão às bases teóricas que diferenciam o conhecimento disciplinar do conhecimento da disciplina, sua tradução dentro do modelo é feita como *Conhecimento Didático do Conteúdo*, no sentido de abarcar o conhecimento que possibilita uma mediação didática de maneira fundamentada (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

A autora acrescenta afirmando que esse conhecimento didático embora advenha do conhecimento matemático, possui uma entidade própria a partir de fontes e referenciais diferentes pois seu objetivo principal é o ensino da Matemática que integra em torno de si, várias fontes de conhecimento (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

A autora ainda apresenta uma diferenciação entre didático e pedagógico, sendo que o primeiro se refere à prática do professor, no sentido de estruturar e gerenciar os conteúdos, e o segundo se refere à gestão e controle dos acontecimentos da sala de aula em si (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). Por isso que no MTSK deixam-se de lado alguns fatores considerados na pedagogia geral, como por exemplo, psicossociais, socioculturais e humanos, não pelo fato considerá-los de menor importância, mas pela especificidade de centrar-se especificamente na estrutura e gerenciamento dos conteúdos matemáticos, ou seja, na didática relacionada à disciplina de Matemática e seus conteúdos (CARRILLO et al., 2014; ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

O domínio PCK é considerado complementar ao conhecimento matemático e necessário para o trabalho docente. Embora sejam apresentados de maneira separada, “é precisamente a integração destes dois tipos de conhecimento o que conforma o conhecimento especializado” (ESCUDERO-ÁVILA, 2015, p. 36).

É possível compreender o domínio PCK, exemplificado por meio da analogia do peixe utilizada anteriormente, como o conhecimento que o professor revela sobre “como ensinar o aluno a pescar”.

Assim como o MK, ele é dividido em três subdomínios no sentido de permitir um olhar mais específico sobre os elementos que fazem parte do conhecimento especializado do professor de Matemática. Neste domínio do conhecimento o tema matemático é visto como algo a ser aprendido (KFLM), como algo a ser ensinado (KMT) e como parâmetro de aprendizagem que se pretende que o aluno aprenda (KMLS).

As pesquisas desenvolvidas até então, possibilitaram a elaboração de categorias que permitem um olhar mais focado, permitindo perceber características mais específicas do conhecimento do professor, cujas particularidades serão apresentadas adiante.

2.4.2.1 O que foi compreendido do subdomínio *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM)

A partir da perspectiva de que o conteúdo matemático é algo a ser aprendido é que se considera esse subdomínio de conhecimento dentro do MTSK. Ele foi elaborado, como já citado anteriormente, a partir dos problemas de delimitação entre os subdomínios de MKT denominado conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), que inclui conhecer as dificuldades que levam os alunos a cometer erros, e conhecimento especializado do conteúdo (SCK), que abrange o conhecimento da procedência dessas dificuldades e erros (CARRILLO et al*.,* 2014). A partir disso, decidiu-se agrupar todos esses elementos em um único subdomínio, que englobam os conhecimentos sobre as características da aprendizagem de Matemática, o KFLM.

Escudero-Ávila (2015) lembra que, normalmente, quando se fala em características de aprendizagem, a tendência das pesquisas é focar no discente, porém, o conhecimento abordado em KFLM é diferente. Não se olha para o estudante como foco principal do processo, mas sim para o conteúdo matemático como objeto de aprendizagem (FLORES-MEDRANO, 2015). Trata-se de focar na perspectiva do professor em relação a um conteúdo matemático a ser aprendido. É o

> [...] conhecimento que o professor tem sobre o conteúdo matemático como objeto de aprendizagem, em lugar de colocar no centro o conhecimento sobre o estudante, coloca-se o processo de aprendizagem conduzido pelo conteúdo matemático (FLORES-MEDRANO, 2015, p. 175 – tradução da autora)

Flores-Medrano (2015) ressalta que o aluno continua tendo um papel importante, porém, no MTSK, o foco principal é o conhecimento do professor em relação à interação do aluno com o conteúdo matemático, ou seja, o conhecimento que o professor coloca em jogo ao enfrentar situações em que precisa refletir sobre os processos de aprendizagens de seus alunos (ESCUDERO AVILA, 2015).

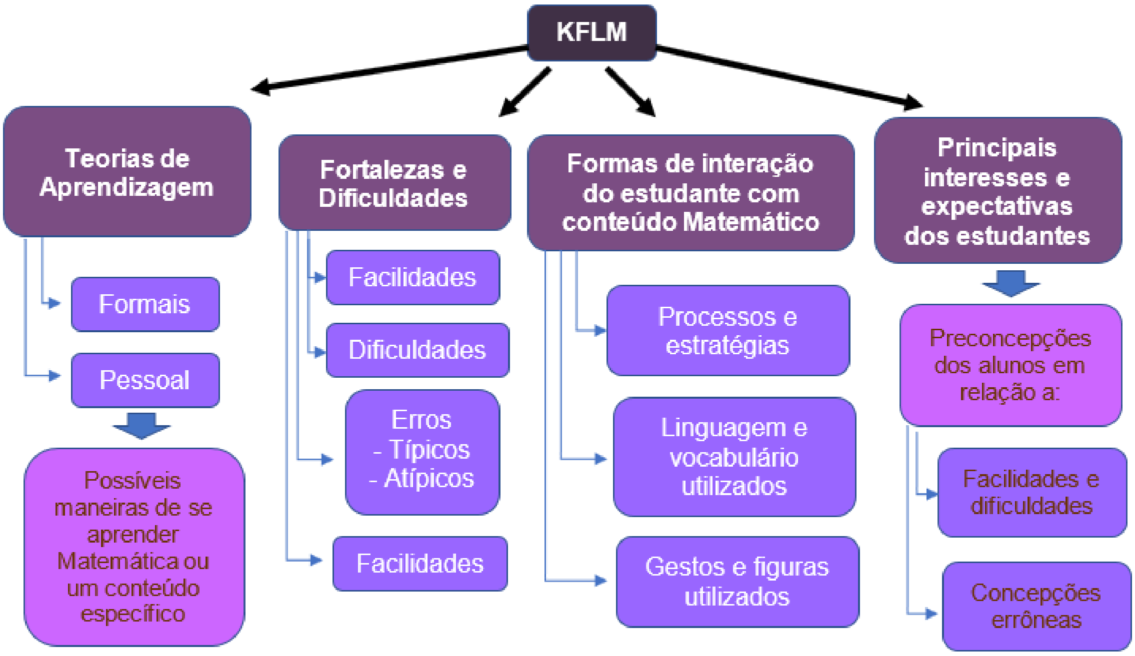
Considerar o conhecimento do professor sobre as características de aprendizagem da Matemática, segundo Flores-Medrano (2015, p. 174)

> [...] permite entender, entre outras coisas, que elementos o professor precisa para antecipar-se aos modos de pensamento de seus alunos, como interpreta suas produções e linguagem matemática, assim como a maneira na qual identifica, aproveita e devolve as oportunidades de aprendizagem que surgem a partir da atividade matemática dos estudantes.

Segundo Moriel-Junior (2014), o acréscimo deste subdomínio ao MTSK se deu pelo reconhecimento de que há necessidade de o professor entender como seus alunos pensam quando são envolvidos com conteúdos matemáticos específicos. Montes (2015) acrescenta que se o professor quer organizar sua aula de maneira a auxiliar seus alunos a desenvolver seu conhecimento sobre determinado conteúdo matemático ele deverá prever como seus alunos construirão tais conhecimentos.

As categorias que apresentamos na Figura 8 possibilitam olhar com mais detalhes para o conhecimento do formador de professores no que se refere às características de aprendizagem.

Figura 8 – Categorias do Subdomínio KFLM



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Para que seja identificado o conhecimento que o professor revela sobre as características de aprendizagem e conseguir relacioná-lo a uma das categorias abrangidas nesse subdomínio, é necessário considerar as especificidades que serão apresentadas a seguir.

2.4.2.1.1 O que foi compreendido sobre *Teorias de Aprendizagem* associadas à Derivada

Essa categoria contempla o conhecimento do professor sobre as possíveis maneiras de se aprender Matemática em geral, ou um conteúdo matemático em específico (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). Ao falar sobre isso, Montes (2015) acrescenta que a forma como os professores organizam as aulas nas quais ensinarão um determinado conteúdo, nos ajudam a observar como o professor prevê que seus alunos irão aprender o conteúdo que ele irá ensinar.

Vale ressaltar que a palavra teoria, não necessariamente se refere àquelas denominadas como “formais”, por terem sido validados por um corpo científico. Essas teorias de aprendizagem que fazem parte do conhecimento do professor podem ser pessoais, advindas das vivências do professor durante sua vida profissional.

Dentro da área da Matemática existem algumas teorias de aprendizagem que podemos apresentar para exemplificar o que podemos considerar como parte deste conhecimento (QUADRO 8).

Quadro 8 – Exemplos de Teorias de Aprendizagem relacionadas a Matemática

Skemp, 1978	Diferencia aprendizagens matemáticas (mecânico ou com significado)
Sfard, 1991	Processo percorrido para o aluno aprender Matemática
Asiala et al., 1997	Processo e aprendizagem APOS

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Vasco (2015); Carrillo et al. (2014).

As teorias apresentadas no quadro acima são exemplos que, caso sejam revelados pelo professor participante da presente pesquisa, serão alocados a essa categoria do subdomínio KFLM.

No caso da Derivada, Asiala et al. (1997) apresenta resultados de uma pesquisa sobre o desenvolvimento da compreensão gráfica por alunos que estudaram o conteúdo de derivada em diferentes cursos de nível superior. Nessa pesquisa eles sugerem que o ensino seja feito a partir da ideia de construção conceitual, por um caminho que favoreça o desenvolvimento da noção gráfica e analítica. Todo esse processo é influenciado pela teoria APOS em que o aluno vai sendo estimulado a compreender um conceito matemático seguindo a espiral *Action-Process-Object-Schema*.

Os autores concluíram que a perspectiva teórica APOS permitiu descrever o desenvolvimento da compreensão gráfica dos alunos tanto da função quanto de sua derivada. Além disso, defendem que quando a aprendizagem é fomentada dessa forma os alunos compreendem mais do que no modelo tradicionalmente utilizado para o ensino dos conteúdos de Cálculo.

A pesquisa de Pinto (2008) analisou a compreensão da representação gráfica da Derivada dos alunos e suas concepções em relação a Derivada. Para tanto, elaborou uma lista de exercícios, que foi aplicada a alunos de Licenciatura em Matemática, Química e Física. Os temas abordados na lista de exercícios podem ser conferidos no Quadro 9.

Quadro 9 – Atividades para verificar a compreensão gráfica da Derivada

Atividades	Ação	Objetivo
T2	Construção de gráfico	“[...] verificar a capacidade do aluno em construir um gráfico a partir de sua descrição simbólica, interpretando os dados apresentados” (PINTO, 2008, p. 49)
T3	Análise de um gráfico	Avaliar a capacidade de interpretação do gráfico, considerando: - compreensão dos zeros da Derivada; - lei algébrica; - solução pra equação $f(x) = 0$.
T5	Estudo do gráfico	Verificar se o aluno utiliza a regra da cadeia para resolução e se relaciona a Derivada a inclinação da reta tangente.
T6	Utilização de regras de derivação	Verificar a compreensão do aluno sobre a regra da cadeia

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Pinto (2008)

Na análise dos dados ela utilizou as provas dos alunos, um questionário e entrevistas. A partir das análises ela concluiu que os alunos que participaram de sua pesquisa apresentaram certa flexibilidade em passar de uma representação à outra, porém, afirma que pelo fato de os estudantes não conseguirem compreender a Derivada a partir da representação gráfica, que caracteriza a compreensão deles como “falha e insuficiente” (PINTO, 2008, p. 3).

Já a pesquisa de Lopes (2015) analisa um curso que foi oferecido com aulas presenciais e a distância, a partir de um ambiente construcionista, com atividades propostas para serem resolvidas com o auxílio do Geogebra. A sequência com tema e objetivos trabalhados pode ser conferida no Quadro 10.

Quadro 10 – Resumo dos encontros sobre Derivada na EaD

1º Encontro (2 aulas em EaD)	Regra de L’Hospital.	“Compreender a Regra de L’Hospital e seu uso em cálculo de Limites que apresentam indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$” (LOPES, 2015, p. 53).
2º Encontro (2 aulas em EaD)	Máximos e Mínimos Locais e Globais e Teorema de Fermat.	“Relacionar os pontos de máximos e mínimos de uma função com a derivada dessa função nesses pontos” (LOPES, 2015, p. 54).
3º Encontro (1 aula	Gráficos de funções de uma	“Compreender algumas propriedades gráficas da $f(x)$, a partir do estudo da derivada primeira e a derivada

presencial)	variável.	segunda da $f(x)$" (LOPES, 2015, p. 55).
4º Encontro (2 aulas em EaD)	Teste da Derivada segunda	"Determinar pontos de máximo e de mínimo identificando o sinal da derivada segunda e os pontos críticos de funções" (LOPES, 2015, p. 56).

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Lopes (2015)

A partir das análises, Lopes (2015) confirma que a aprendizagem se deu devido à interação realizada pelos alunos, proporcionada pelas atividades e pelo ambiente construcionista. Nessa interação entre os participantes do ambiente, aqueles que aprenderam, tiveram uma atitude de "habitar" os espaços, pois "[...] a aprendizagem do aluno está diretamente relacionada à atitude por ele assumida no espaço virtual" (LOPES, 2015, p. 142).

A pesquisa ressalta, também, que as ações da professora promoveram "[...] momentos de reflexão, estudo, investigação e questionamentos de suas certezas." Afirmando que esta atitude de "[...] não fornecer respostas e desafiá-los para o levantamento e confirmação de conjecturas e proposições, oportunizou que eles aprendessem em uma perspectiva de construção de conhecimento" (LOPES, 2015, p. 143).

Com as pesquisas de Pinto (2008) e Lopes (2015) é possível acompanhar distintas formas de ensinar 'Derivada' em cursos à distância, a fim de favorecer a aprendizagem de seus alunos. Porém, para se alcançar sucesso nos processos de ensino e aprendizagens é necessário considerar um conjunto de fatores que devem funcionar de maneira relacionada: atividades que promovam a investigação; material didático articulado com os outros espaços de interação; recursos virtuais que contribuam para a aprendizagem do aluno; AVA que permita que os alunos sejam ativos em seus processos de aprendizagens; professor que leve o aluno a refletir sobre o conteúdo estudado; e alunos que se responsabilizem por sua aprendizagem (LOPES, 2015).

Retomando a analogia da pesca apresentada anteriormente, os conhecimentos relacionados a esta categoria seriam aqueles referentes às teorias utilizadas pelos professores para auxiliar seus alunos a aprender a pescar de maneira geral, ou para aprender a pescar um peixe em particular. Essas teorias de pesca podem ser tanto aquelas comprovadas cientificamente (formais) quanto aquelas construídas pela experiência de pescador (pessoais).

2.4.2.1.2 O que foi compreendido sobre as *Fortalezas e Dificuldades* advindas da aprendizagem de Derivada

Essa é outra categoria dentro do subdomínio destinada a atentar-se para o conhecimento do professor de Matemática sobre as características de aprendizagem de seus estudantes. Nela são contemplados conhecimentos do que potencializa ou fragiliza a aprendizagem de um tema matemático e, também, o conhecimento das preconcepções ou concepções errôneas sobre o conteúdo em estudo. Lembrando que esses conhecimentos (do que potencializa ou fragiliza) podem estar associados a um conceito específico ou à Matemática em geral.

No caso da aprendizagem de Derivada, um exemplo que é possível utilizar tanto para o que potencializa quanto o que fragiliza pode estar relacionado à imagem construída de um único conceito: Função. Se os alunos têm uma imagem conceitual de função construída, conforme o que se espera, esses conhecimentos funcionarão como potencializadores para a aprendizagem de Derivada (ASIALA et al., 2001).

Do contrário, ou seja, se a imagem conceitual de função for aquém do esperado, poderá agir como um fragilizador para a aprendizagem de Derivada. Asiala et al. (2001) ressalta que um dos grandes erros cometidos pelos professores que ensinam Derivada é partir da premissa que seus alunos já desenvolveram a compreensão do conceito de função necessária.

Além dessas construções conceituais prévias, segundo Asiala et al. (2001) a perspectiva teórica utilizada no e para o ensino de Derivada pode agir como um potencializador ou fragilizador na aprendizagem de um conteúdo ou de Matemática em geral. Sendo assim, esses autores propõem a teoria APOS para o ensino de Derivada, conforme apresentamos na categoria anterior, sugerindo que existem pelo menos dois caminhos que, relacionados, podem favorecer a construção da imagem conceitual de Derivada, sendo eles o gráfico e analítico.

Entre os fragilizadores da aprendizagem encontram-se as dificuldades dos alunos ao aprender um conteúdo, os erros conceituais cometidos e até mesmo os obstáculos epistemológicos que atrapalham a construção de um conceito.

Embora essas três características estejam relacionadas, é possível encontrar algumas diferenças entre elas.

Em se tratando da Derivada, pesquisas como Orton (1993), Azcárate (1990), Tall; Vinner (1981) Contreras et al. (2000), Giraldo et al. (2003), Asiala et al. (2001), entre outros, ressaltam algumas dificuldades que os alunos têm ao aprender este conteúdo. Por exemplo, uma dificuldade que os alunos podem enfrentar para aprender Derivada segundo Asiala et al. (2001) é a necessidade que eles desenvolveram de utilizar fórmulas algébricas. Tall e Vinner (1981), falando sobre isso, ressaltam que o método tradicionalmente utilizado ao ensinar 'Derivada' fortalece as dificuldades dos alunos em lidarem com outras representações, por exemplo, a gráfica. Asiala et al. (2001) corrobora observando que o uso predominante de uma única representação restringe a imagem conceitual construída pelo aluno ao aprender um tema matemático.

Ao tratar também das dificuldades relacionadas à compreensão de Derivada, Leme (2003) as diferencia em dois momentos. Segundo ele, essas dificuldades podem surgir no processo de conceitualização da Derivada, no momento em que os alunos precisam relacionar os conhecimentos prévios com os novos. Outro momento em que as dificuldades surgem com mais frequência é na resolução de problemas, quando o uso de regras e cálculos são priorizadas e quando a representação mais utilizada é a simbólica (ou algébrica), sem relacionar com as demais.

Pinto (2008) ao falar das dificuldades em relação à representação gráfica, pontua que os alunos não só tem dificuldades na representação em si, mas também em ler, interpretar e extrair informações necessárias para compreensão do exercício. Ela complementa dizendo que tais dificuldades acontecem porque os alunos enxergam o gráfico apenas como um interligado de pontos sem relacioná-lo à representação algébrica e aos dados da tabela que foi necessária para sua representação. Segundo ela, essas dificuldades são inerentes à compreensão limitada e até mesmo concepções errôneas ou incompletas sobre funções (PINTO, 2008).

Um exemplo que podemos chamar de erro conceitual citado por Amit; Vinner (1990) é a confusão que o aluno pode fazer ao pensar que a Derivada de uma função é a mesma coisa que a Reta Tangente ao gráfico da função em um ponto. Orton (1983) descobriu, por meio da pesquisa desenvolvida, que cerca de 20% de seus alunos fizeram confusão entre a derivada em um ponto com o valor de y do ponto de tangência. Essas confusões ou erros conceituais podem se tornar obstáculos epistemológicos, além do exemplo que já citamos anteriormente, ou seja, uma construção conceitual equivocada sobre função.

Como vimos, as dificuldades dos alunos ao estudarem o conteúdo de Derivada podem ser inúmeras. Elas podem estar relacionadas às questões conceituais, devido a fragilidades na compreensão do aluno sobre funções, reta tangente, coeficiente angular, taxa de variação, mas, também relacionadas às questões de manipulações, relacionadas às diferentes representações e às manipulações algébricas. Pela experiência adquirida ao longo dos anos de trabalho, ou, no início de carreira, pelas informações apresentadas nas pesquisas científicas e por sua experiência como aluno, o professor pode prever em seu planejamento pontos deste conteúdo que poderão agir como facilitadores aos alunos (*facilidades)* e outros que podem dificultar (*dificuldades).* Ao conhecer as facilidades e dificuldades dos alunos, é possível serem conhecidos, também, os possíveis erros conceituais e recorrentes, e até mesmo alguns obstáculos epistemológicos que podem levar a esses erros (FLORES MEDRANO, 2015).

Escudero-Ávila (2015), ao discorrer sobre os erros, obstáculos e dificuldades, acrescenta que estes podem ser típicos ou atípicos, e que todos estão relacionados às características e processos de aprendizagem. A autora ressalta, também, que dessas características são consideradas apenas as próprias de conteúdos matemáticos, deixando de lado as características pedagógicas do conteúdo.

Montes (2015) complementa afirmando que o professor capaz de antecipar erros e dificuldades de seus alunos, bem como conhecer o desenvolvimento cognitivo e as estratégias que normalmente são utilizadas por seus alunos, demonstra consciência do contexto em que está atuando. Essa consciência pode favorecer o planejamento de sua aula e contribuir para se preparar para lidar com situações variadas e inesperadas. Além do mais, pode oferecer um ensino personalizado a seus alunos, voltado a atender as necessidades do contexto em que atua.

Utilizando a analogia da pesca, quando o professor revelar conhecer aquilo que pode potencializar ou fragilizar a aprendizagem de seu aluno sobre pescar um determinado tipo de peixe, e ainda, sobre as principais dificuldades enfrentadas por ele ao pescar esse peixe, esses conhecimentos serão considerados dentro desta categoria.

2.4.2.1.3 O que foi compreendido sobre *Formas de interação* dos alunos com a Derivada

Para prever essas *facilidades* e *dificuldades* ou aquilo que pode potencializar ou fragilizar a aprendizagem de seus alunos, o professor pode dar evidências do que conhece sobre as *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático* que vai ensinar. Essas *formas de interação* podem ser caracterizadas pelos processos e estratégias dos estudantes relacionados ao conteúdo estudado, à linguagem e vocabulário utilizados e os gestos ou figuras utilizadas normalmente por eles (FLORES-MEDRANO, 2015; ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Asiala et al*.* (2001) observa e registra que os alunos apresentam uma certa dependência de utilizar fórmulas algébricas ao lidar com funções ou Derivada. Esse é um exemplo de interação dos alunos com o conteúdo. Leinhardt et al. (1990) ao falar sobre função, conceito diretamente relacionado a Derivada, diz que há uma tendência de construir gráficos a partir de fórmulas algébricas, porém, raramente ocorre o inverso, ou seja, construir fórmulas ou tabelas a partir de gráficos.

Ramos (2009, p. 9) constatou em sua pesquisa foi que “[...] os alunos manipulam bem as representações algébricas, mas muitos deles não conseguem identificar os procedimentos necessários, nem fazer uso do conceito de Derivada, para a resolução de uma determinada situação de aplicação”.

É claro que normalmente a forma como o aluno vai interagir com o conteúdo está diretamente influenciada pela forma como o professor ensina o conteúdo para seu aluno.

Utilizando a analogia da pesca, essa categoria se refere ao conhecimento do professor sobre como seu aluno interage com o peixe que pretende pescar. O fato dessa “interação” ser feita sempre de um jeito, a depender do peixe que se pretende pescar, pode ser influenciado pela forma como o aluno de pesca foi ensinado a desempenhar esta atividade.

2.4.2.1.4 O que foi compreendido sobre os *Interesses e expectativas* dos alunos sobre a Derivada

Dentro deste subdomínio é considerado, também, o conhecimento do professor sobre os *interesses e expectativas* que os alunos têm em relação ao conteúdo que está aprendendo e as preconcepções dos alunos em relação às facilidades e dificuldades que terão (FLORES MEDRANO, 2015; ESCUDERO ÁVILA, 2015).

O fato de a disciplina de Cálculo ser uma das que apresentam maior índice de reprovação no Ensino Superior (DALL’ANESE, 2000; MEYER, 2003; LOBO, 2012; GODOY, 2004; LEME, 2003) já sugere uma possível expectativa dos alunos em relação aos conteúdos abordados. Selden et al*.* (1994) acrescentam que os estudantes consideram difícil utilizar os conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo pois ao mesmo tempo que vão bem ao resolver problemas rotineiros, enfrentam grandes dificuldades ao lidarem com problemas não frequentes.

O conhecimento do professor sobre os interesses e expectativas de seus alunos ao aprenderem a Derivada, poderá, também, ajudá-lo a planejar suas aulas de forma a suprir tais necessidades.

Retomando à analogia do peixe, se o professor de pesca, por exemplo, sabe que seu aprendiz tem a expectativa de pescar tilápia utilizando moscas como iscas, ele precisará agir de forma a ensiná-lo que para este tipo de peixe as melhores iscas são minhocas ou massinhas de pão, por exemplo. A ação do professor de pesca deve ser de forma a romper com as concepções errôneas e utilizar seu conhecimento sobre as expectativas e interesses de seu aprendiz a fim de proporcionar um ensino que produza aprendizagens mais consistentes.

Todos as categorias contempladas no subdomínio KFLM têm a intenção de assegurar a aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo que o professor se dispõe a ensinar. E é sobre esse ensino que falaremos no subdomínio a seguir.

2.4.2.2 O que foi compreendido sobre o subdomínio *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT)

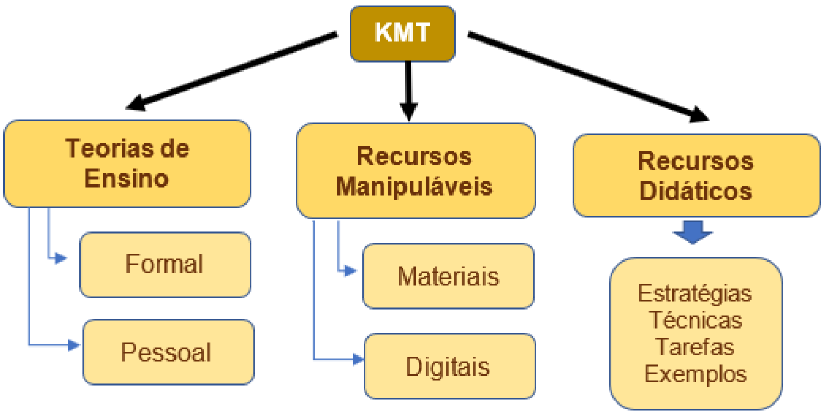
Este subdomínio surgiu da reformulação do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) do modelo de Ball et al. (2008). O conhecimento do conteúdo já é abrangido dentro dos subdomínios do Conhecimento Matemático (MK), além do mais, sentiu-se a necessidade de acrescentar elementos, alguns de caráter teórico (ROJAS, 2014), que não eram considerados no KCT, a saber, conhecimento das estratégias de ensino, de recursos (virtual e materiais), de estratégias e técnicas relacionadas a um conteúdo matemático que podem auxiliar no ensino dos alunos, e de teorias de ensino de Matemática (CARRILLO et al., 2014).

KMT, de acordo com sua denominação, refere-se ao ensino. Segundo Escudero-Ávila (2015) o ensino se refere ao principal trabalho do professor em sala de aula e Aguilar (2016) complementa, lembrando que não se trata de qualquer ensino, mas do ensino intencional de um conteúdo matemático.

Nesse ensino o professor pode utilizar alguns instrumentos com a intenção de favorecer tal processo. KMT envolve o conhecimento do professor sobre o uso didático de tais instrumentos e estratégias para consolidar tal ensino. O conhecimento desse uso didático será influenciado pelas características matemáticas que tais instrumentos e estratégias apresentam. Sobre isso, Bosch e Gascón (2001) complementam ressaltando que as escolhas realizadas pelo professor sobre como vai ensinar determinado conteúdo matemático, os recursos e estratégias eleitos, influenciam diretamente no nível de ensino oferecido aos seus alunos e poderá influenciar, também, na aprendizagem. Por isso devem ser decisões planejadas, com objetivos bem definidos sobre o que se pretende com as aulas ministradas.

Por considerar as características matemáticas dos recursos e estratégias é que esse subdomínio considera a integração entre Matemática e o ensino (ESCUDERO AVILA, 2015), não de maneira isolada. Considera o processo no qual o conteúdo matemático condicione o ensino (FLORES MEDRANO, 2015). Montes (2015) afirma que o objetivo deste é ressaltar as habilidades demonstradas pelo professor ao selecionar e utilizar variados canais comunicativos para ensinar um conteúdo matemático, além de ter consciência da maneira e do momento de utilizá-los.

Figura 9 – Categorias do Subdomínio KMT



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Nesta pesquisa consideramos como KMT toda informação sobre teorias de ensino, recursos e estratégias utilizadas no processo de ensino do conteúdo de Derivada. Como são professores que estão iniciando sua carreira docente, acreditamos que essas teorias, estratégias e recursos sejam influenciados pela formação inicial a qual cada um se submeteu, assim como pontua Montes (2015).

Voltando à analogia do peixe, o KMT do professor seria considerado a partir dos conhecimentos do professor de pesca sobre a ação de ensinar seu aluno a pescar. Além disso, são contemplados conhecimento sobre uso de recursos e estratégias ligadas ao conteúdo matemático que podem auxiliar nesse ensino.

2.4.2.2.1 O que foi compreendido sobre Teorias *de Ensino* associadas à Derivada

Quando um professor ensina um conteúdo de Matemática para seus alunos, sua atitude de ensinar é influenciada por alguma *teoria* que foi aprendida durante a sua formação (teoria científica ou formal) ou que ele foi desenvolvendo ao longo de sua experiência (teoria pessoal), assim como citamos ao apresentar o subdomínio KFLM.

Um exemplo de teoria de ensino para a Matemática é a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2007) que segue a sequência didática de ação, formulação, validação e institucionalização.

Todas as teorias de ensino (quer sejam formais ou pessoais) têm uma única intenção: favorecer a aprendizagem dos alunos no que se refere ao conteúdo matemático que está sendo ensinado.

Utilizando a analogia da pesca, a teoria de ensino utilizada pelo pescador pode ser visualizada no próprio processo de ensinar o aluno a pescar. Essa teoria pode ser influenciada por uma sequência didática a ser seguida.

2.4.2.2.2 O que foi compreendido sobre *Recursos Manipuláveis* para ensinar 'Derivada'

A fim de alcançar melhores resultados com seus alunos, o professor, muitas vezes, pode buscar *recursos* que os auxiliem a compreender com mais clareza o conceito estudado.

Esta categoria é denominada nos trabalhos que se referem ao MTSK como *recursos materiais ou virtuais*, mas nesta pesquisa foi denominada como *recursos manipuláveis* que envolve tanto aqueles *recursos físicos*, denominados de concretos pois são possíveis de serem manipulados fisicamente, quanto aos *recursos digitais* que são manipulados virtualmente.

Vale ressaltar que esta categoria não se refere ao conhecimento de recursos simplesmente, mas sim ao conhecimento do professor sobre as características particulares de um recurso (concretos ou digitais) que pode favorecer os processos de ensino e aprendizagens de um conceito Matemático (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

A autora complementa exemplificando que o conhecimento do Geoplano em si não faz parte desta categoria, mas sim o conhecimento de como este recurso pode servir para representar figuras planas.

Ao reconhecer as características matemáticas de um recurso quer seja ele físico (concreto) ou digital, o professor deverá considerar as potencialidades e limitações do mesmo e escolherá para utilizar nos processos de ensino de um tema matemático aquele que melhor se adequar aos objetivos de ensino que ele pretende alcançar com seus alunos.

Uma das limitações do Geoplano, por exemplo, ao representar figuras planas é a impossibilidade de construir triângulos equiláteros (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Em se tratando da Derivada, por exemplo, várias pesquisas citam a potencialidade do *software* Geogebra para o ensino e compreensão deste conceito. E a pesquisa de Lopes apresentada anteriormente exemplifica os motivos que levaram a tal escolha.

2.4.2.2.3 O que foi compreendido sobre *Recursos Didáticos* relacionados ao ensino da Derivada

Para auxiliar seus alunos nesse processo de ensino, além da possibilidade de utilizar *recursos manipuláveis*, o professor desenvolve ou segue *estratégias* e *técnicas* que acredita favorecer a compreensão Matemático de seus alunos. Nesse processo, ele propõe *tarefas* para que os alunos realizem, e para não deixar dúvida, pode-se utilizar de exemplos dos mais variados possíveis.

Embora as pesquisas sobre o MTSK denominem esta categoria como *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos,* na presente pesquisa a mesma recebe a denominação de *recursos didáticos* que engloba todas essas ações que são realizadas a fim de certificar que está realizando tudo o que está ao seu alcance para efetivar o ensino do conteúdo matemático.

Asiala et al. (2001) apresenta uma estratégia baseada na teoria APOS para ensinar ‘Derivada’ seguindo uma sequência de oito ações que inicia-se com a construção de uma reta secante a uma curva, perpassa pelo cálculo da taxa de variação, desenho da reta tangente a partir da taxa instantânea, até chegar à definição de Derivada de uma função em um ponto como o limite do quociente da diferença. Essa estratégia não para por aí. Após definir a Derivada, propõe atividades que relacione a definição encontrada com outras interpretações para, por fim, reconstruir tal definição por meio da interpretação gráfica, fazendo relações entre função e derivada. Essa é uma estratégia que se pode utilizar como exemplo, pois foi elaborada a partir do conhecimento que se pretendia que o aluno construísse, ou seja, de Derivada.

Utilizando a analogia da pesca, essa categoria engloba, também, os conhecimentos do professor sobre, por exemplo, a estratégia que ele utilizará para ensinar seu aluno a aprender a pescar o peixe tilápia. Uma dessas estratégias pode ser, por exemplo, olhar como o professor de pesca joga a isca dentro do rio, ou quais lugares são mais propícios para que este peixe esteja e ainda, como ele pode fazer para garantir que conseguirá tirar o peixe do rio quando sentir a fisgada na isca.

2.4.2.3 O que foi compreendido sobre o subdomínio *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS)

Ao olhar para o conteúdo deste subdomínio, tem-se a tendência de pensar que ele se resume ao conhecimento do currículo prescrito, ou dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Internacionais (NCTM, por exemplo) ou Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Embora os conhecimentos desses documentos oficiais façam parte do KMLS, eles não representam tudo.

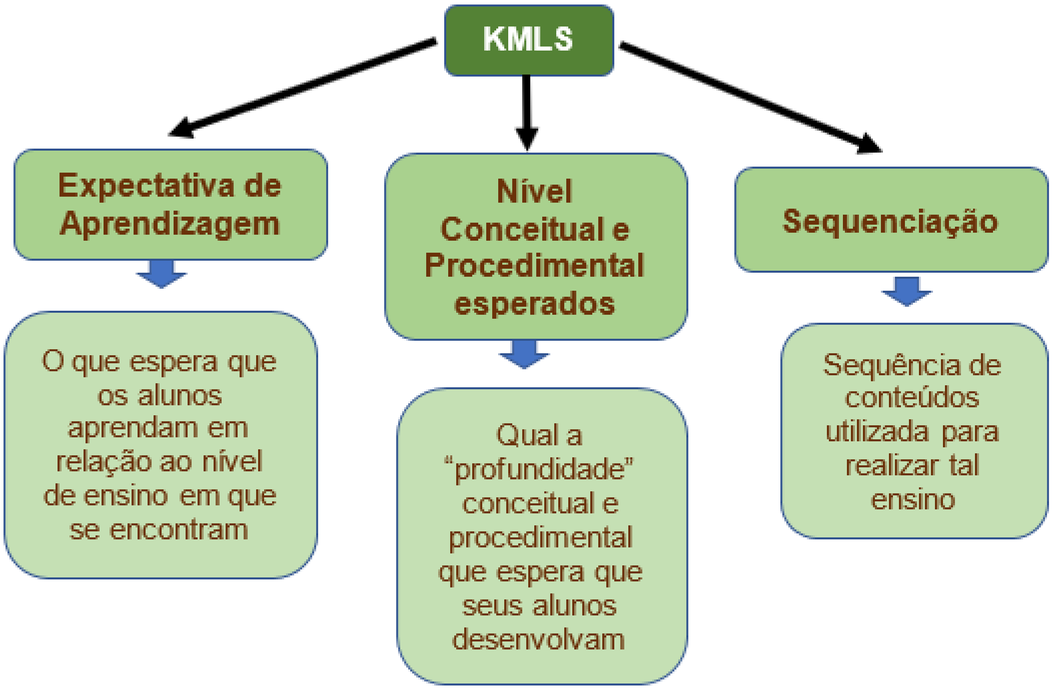
O conhecimento curricular já havia sido considerado por Shulman (1986) e Ball et al. (2008). Então, o que este subdomínio tem a acrescentar, tornando-o diferente dos anteriores?

Carrillo et al. (2014, p. 80 – Tradução da autora) afirmam entender parâmetro de aprendizagem como “[...] aquele que indica o nível de capacidade – atribuível aos estudantes em determinado momento escolar – para entender, construir e saber matemática”. Complementam dizendo que neste subdomínio é incluído o currículo, mas, também, o que as associações de professores, as pesquisas e os professores experientes propõem. KMLS, portanto, trata-se do conhecimento do professor de Matemática sobre os condicionantes que influenciam o ensino que ele vai oferecer a seus alunos, sendo que a fonte desses condicionantes, embora possa ser influenciada pelos documentos oficiais, é a sua própria construção do conhecimento.

Segundo Escudero-Ávila (2015), este conhecimento permite ao professor considerar as informações de documentos normativos, atentando-se ao que é proposto para ser ensinado de determinado conteúdo matemático em cada nível de ensino. Além disso, podem ser considerados os conhecimentos advindos da própria experiência do professor e das pesquisas realizadas com foco no conteúdo matemático em questão.

Inclui-se neste subdomínio as *expectativas* do professor em relação ao que o aluno deve aprender no nível de ensino que está cursando. Além disso, é considerado o conhecimento do professor sobre o *nível de desenvolvimento conceitual e procedimental* esperado pelos alunos, ou seja, “até que ponto” ou qual a profundidade conceitual que o aluno deve desenvolver no nível de ensino que ele está. Por último, o conhecimento do professor sobre uma *sequenciação* considerando temas anteriores e posteriores.

Figura 10 – Categorias do Subdomínio KMLS



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

2.4.2.3.1 O que foi compreendido sobre Expectativas *de Aprendizagem* dos alunos em relação à Derivada

Conforme sintetizado na Figura 10, acima, essa categoria engloba os conhecimentos que o professor vier a revelar sobre a aprendizagem que o professor espera que seus alunos construam sobre um tema matemático a partir das aulas ministradas por ele.

Escudero-Ávila (2015) ressalta que o conhecimento do professor sobre tais expectativas pode ser construído ao estudar, por exemplo, documentos normativos que apresentam quais conteúdos a serem ensinados em determinado nível escolar e as habilidades específicas que devem ser trabalhadas a fim de serem desenvolvidas pelos alunos.

O que se espera que os alunos aprendam em relação ao conteúdo de Derivada em um curso de Licenciatura em Matemática é que ele compreenda as principais ideias envoltas nesse conceito, como taxa de variação, Reta Tangente, etc. Mas, considerando o objeto de análise desta pesquisa que é um formador de professores, o que se espera de seus alunos é que, além de compreenderem tais conceitos, consigam ensinar seus alunos a construir tais conceitos. Ou seja, não se espera que estes professores deem peixe a seus alunos, mas sim que ensinem seus alunos a pescar. Seguindo esta analogia, nesta categoria são considerados os conhecimentos que o professor de pesca tem em relação a aprendizagem de seus alunos.

2.4.2.3.2 O que foi compreendido sobre *Nível de Desenvolvimento Conceitual ou procedimental esperado*

Nesta categoria são considerados os conhecimentos do professor sobre o grau de profundidade que espera que seja desenvolvido por seus alunos, tanto no que diz respeito ao conceito em si, quanto aos procedimentos utilizados nos processos de ensino e aprendizagem deste conceito.

Podemos colocar como exemplo em termos conceituais, uma das compreensões que se espera dos alunos que estudam Derivada que é percepção da diferença e relação entre a Derivada de uma função em um ponto (f’(a)) e a função Derivada (f’(x)) (BADILLO, 2003), que inclusive pode ser uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Utilizando a analogia da pesca, essa categoria abarca o conhecimento do professor de pesca sobre até que ponto ele espera que seu aluno aprenda a pescar tilápia, por exemplo.

2.4.2.3.3 O que foi compreendido sobre *Sequenciação com temas anteriores e posteriores*

Como o próprio nome sugere, esta categoria engloba o conhecimento do professor sobre a sequência utilizada para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagens. De acordo com Escudero-Ávila (2015), esta sequência pode ser considerada dentro de uma única disciplina, que abarca o conteúdo que está sendo ensinado, ou pode ser analisada inclusive considerando outras disciplinas.

Ela ressalta também que há uma certa tendência em confundir tal sequência com as conexões de simplificação e complexificação contempladas no subdomínio KSM, porém, assegura que a sequência utilizada para o ensino de um tema matemático não necessariamente condiz com as conexões entre conteúdos.

Um exemplo de sequência para ensinar o conteúdo de Derivada pode ser a utilizada por Asiala et al*.* (2001), onde inicia com Reta Secante a uma curva, depois, Taxa de variação, Reta Tangente, definição de Derivada de uma função em um ponto e definição de Derivada de uma função.

Voltando à analogia da pesca, esse conhecimento refere-se à sequência de conhecimentos ensinados ao aluno, podendo iniciar esse ensino com a pesca de peixes pequenos com iscas naturais, passando a pesca de peixes maiores com outros tipos de iscas, para por fim, ensinar o aluno a pescar grandes peixes no mar, por exemplo. Embora o objeto de ensino seja a pesca de tilápia, por exemplo, iniciar com a pesca de lambaris e continuar com pesca de peixes de mar pode dar uma visão mais ampla e profunda dos conhecimentos envolvidos na pesca.

2.5 *O que foi compreendido sobre Crenças e Concepções relacionadas à Derivada*

As crenças e concepções também são consideradas dentro do Conhecimento Especializado do professor de Matemática. Embora não seja objeto de análise durante esta pesquisa, é válido apresentar nesta seção algumas informações para que o leitor da tese consiga ter uma visão integral do modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*.

O conhecimento que um professor possui é influenciado por suas crenças e concepções acerca dos processos de ensino e aprendizagem (CARRILLO et al., 2014), por isso, as crenças e concepções são consideradas como um domínio do MTSK. Além dos conhecimentos do professor, sua prática em sala de aula também recebe influência direta das crenças e concepções que ele foi desenvolvendo ao logo de toda a sua vida, intervindo também na escolha dos conteúdos, metodologias e recursos utilizados (CARRILLO et al*.,* 2013).

Os autores acrescentam ainda que essas crenças e concepções levam os professores a, algumas vezes, apresentarem informações aos seus alunos que eles próprios se sentem inseguros, porém, agem baseados no que acreditam. Além do que essas crenças e concepções podem agir como potencializadoras ou entraves para o desenvolvimento profissional do professor (CARRILLO et al*.,* 2013). Continuando essa ideia das influências recebidas, Carrillo et al. (2013, p. 98 – Tradução da autora) afirmam que

> A visão que os alunos têm da Matemática como disciplina, sua finalidade no ensino, a consciência de sua capacidade para aprendê-la, os valores socioculturais, que são atribuídos, o significado e sentido dos problemas, dependem em grande parte das mensagens que recebe do professor, mensagens que são elaboradas a partir de suas concepções.

O MTSK considera as crenças como parte do conhecimento. Para caracterizá-las se baseia em algumas, não todas, ideias de Ponte (1994), considerando-as

> [...] como verdades pessoais, sustentadas individual e/ou coletivamente, derivadas da experiência ou do próprio pensamento, com certo componente afetivo e avaliativo, sobre o que se pode ter diferentes graus de convencimento, assim como podendo ser justificadas baseadas em argumentos que não sigam critérios [...] de evidência [...]. (CARRILLO et al., 2014, p. 11 – Tradução da autora)

Já o termo concepção no MTSK é definido de acordo com Thompson (1992), como "estruturas mentais gerais, que abarcam significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, etc." (CARRILLO et al., 2014, p. 11 – tradução da autora).

Embora o MTSK reconheça o caráter afetivo e emocional das crenças e o caráter racional das concepções, reconhece que a relação entre crenças e concepções e a integração destas no conhecimento são campos que necessitam ser ainda explorados (CARRILLO et al., 2014), por isso, na análise do conhecimento do professor não é feita a diferenciação de quando são crenças ou concepções, pois considera essa ação de pouca utilidade até o momento. No Quadro 11 podemos encontrar um resumo dos tipos de concepções citadas por Ernest (1989; 1991).

Quadro 11 – Tipos de concepções

	Tipos de Concepção	Significado	Finalidade
Em Matemática	Instrumentalista	“[...] o núcleo da matemática está composto de resultados cuja veracidade e existência não estão sujeitas a discussão.”	Desenvolvimento de outras ciências e seu modo de evolução está baseado na criação e uso de algoritmos gerados como relações causa-efeito.
	Platônica	O núcleo está nos conceitos e valores racionais, no marco de um corpo de conhecimento preexistente.	Desenvolvimento da própria ciência matemática e emerge como explicação a problemas da própria matemática e de outras ciências.
	Matemática como Resolução de problema	A essência está nas estruturas conceituais, que formam um conhecimento submetido a revisão constante.	Desenvolvimento de capacidades intelectuais do ser humano, sua evolução é dinâmica, baseada na resolução de problemas

Fonte: elaborado a partir de Carrillo et al. (2014) e Ernest (1989; 1991).

Carrillo et al. (2014) afirmam que embora existam essas três concepções para se conceber a Matemática, os trabalhos realizados sobre o MTSK são embasados a partir da concepção da Matemática como Resolução de Problemas.

Esses autores ressaltam, ainda, a necessidade de mais pesquisas focadas nas crenças e concepções dos professores para que se possam mostrar as relações existentes entre essas e os conhecimentos contemplados em cada um dos subdomínios do MTSK, ou seja, como determinada forma de entender Matemática influencia no conhecimento do professor, e como determinado conhecimento influencia suas crenças e concepções.

Vale lembrar, porém, que assim como é necessária a revisão constante da definição de conhecimento (SCHÖN, 1983), as definições de crenças e concepções podem sofrer alterações a partir dos ambientes que forem exploradas.

2.6 O que se considerou como conhecimento especializado “revelado”

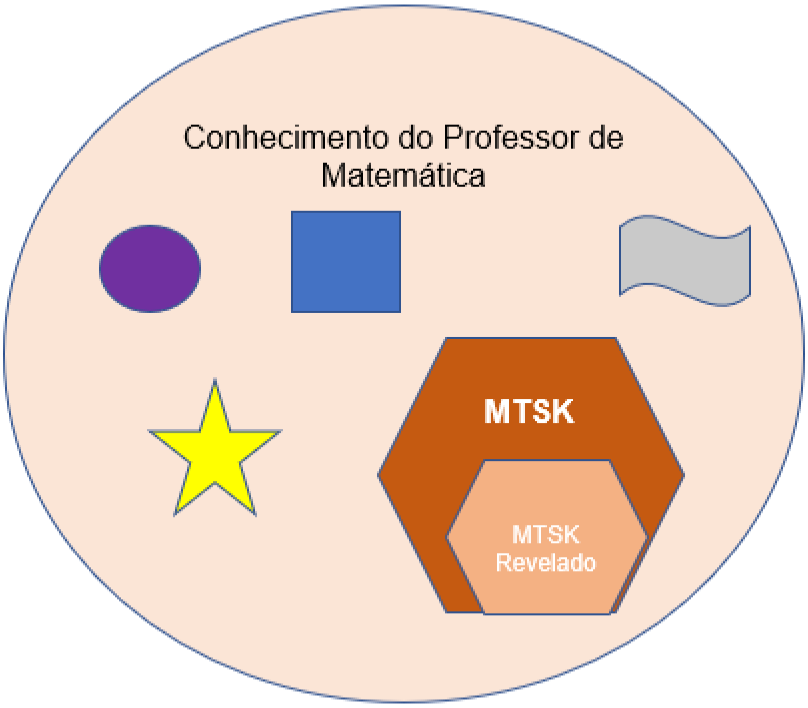
Retomando o que foi apresentado no início deste capítulo, compreendeu-se o conhecimento como uma ampla rede de informações, conceitos, imagens e habilidades que o professor tem disponível para usar para e nos processos de ensino, sem considerar se são certos ou errados, pois retratam aquilo que o professor possui naquele momento (PAJARES, 1992; SHOENFELD, 2010; CARRILLO *et al*, 2018 no prelo).

O conhecimento é algo complexo e composto por várias vertentes que podem ou não influenciar nos processos de ensino, independentemente da área de atuação, mas que faz parte da ampla rede que o professor tem a sua disposição. Podem fazer parte do conhecimento do professor aquilo que ele conhece sobre organização de sala de aula, sobre a afetividade, sobre como alunos do século XXI aprendem, e etc. Todos esses fazem parte de seu conhecimento, e em se tratando do professor que ensina Matemática, acrescenta-se o MTSK, que é o conhecimento que o professor utiliza para ensinar Matemática.

A Figura 11 representa como foi compreendido o conhecimento de um professor de Matemática, independentemente de atuar como formador de professores ou não.

Nesta figura a parte maior representa a ampla rede de informações, conceitos, imagens e habilidades que fazem parte do conhecimento do professor. Esse conhecimento é composto por aspectos pedagógicos, sociais, psicossociais, etc (representados na Figura 11 pelas formas geométricas não nomeadas). O MTSK é um desses conhecimentos, cujas informações, conceitos, imagens e habilidades são diretamente relacionadas ao ensino da Matemática. O MTSK é o conhecimento que o professor possui, onde nem sempre será explicitado em sua totalidade em seus processos de ensinos.

Figura 11 – Representação do conhecimento de um professor



Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Tem-se a consciência de que é impossível apresentar todas as características do conhecimento especializado de um professor em sua amplitude. Sendo assim, os esforços serão voltados para o conhecimento *revelado*, que se entende ser aquele que o professor permite que se possa ver ao ensinar Matemática aos seus alunos, não sendo necessariamente igual ao conhecimento que ele possui, pois o MTSK de um professor pode ou não ser proporcional ao que ele revela (Quadro 12).

Quadro 12 – Diferença entre MTSK e MTSK revelado

MTSK	Conhecimento que o professor utiliza no e para ensinar Matemática
MTSK revelado	Conhecimento utilizado no e para ensinar Matemática que o professor deixa transparecer

Fonte: Elaborado pela autora

É possível que um professor não consiga deixar transparecer seu conhecimento especializado em sua amplitude devido a *n* fatores, enquanto outro consiga explicitar mais particularidades. Sendo assim, compreendemos que o conhecimento que ele revela ao ensinar Matemática é parte de seu conhecimento especializado. Por isso, nesta pesquisa, nos debruçamos a caracterizar o conhecimento especializado revelado por um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar ‘Derivada’ a distância.

2.7 O que foi considerado como “Formador de Professores de Matemática”

Formador de professor é aquele que atua como professor de professores ou de futuros professores de Matemática, no caso desta pesquisa.

Embora, a princípio, possa parecer que a atribuição seja a mesma, pois tanto o professor quanto o formador de professores têm a missão de ensinar, quando considerada de maneira particular é possível perceber diferenças significativas quanto à ação de cada um.

Papert (2008, p. 125) ao versar sobre processos de ensino e aprendizagens afirma que “[...] se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar”. Seguindo essa ideia e aplicando-a na realidade desta pesquisa, enquanto o melhor que um professor de Matemática precisa fazer é ensinar seu aprendiz a pescar, ou seja, desenvolver seu pensamento matemático e suas habilidades para utilizá-la a fim de resolver problemas, o formador de professores precisa ensinar seu aluno, professor ou futuro professor de Matemática, a ensinar seu aluno a pescar. Sendo assim, não basta ao formador de professores saber ensinar, é necessário que ele seja capaz de ensinar a ensinar.

Contreras et al. (2017) apresentam algumas reflexões a fim de fundamentar teoricamente um modelo sobre o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática. Eles iniciam o texto remetendo ao fato de que a preocupação da primeira década do século XXI ser a de caracterizar o conhecimento do professor de Matemática, principalmente influenciado pelos trabalhos de Shulman (1986) e que atualmente há uma crescente preocupação em compreender o conhecimento do formador de professores (quer seja de Matemática ou de outras disciplinas). Eles ressaltam que o questionamento sobre a tipologia que caracteriza o conhecimento especializado do formador de professores vai depender da formação de quem irá responder, pois há que considerar que é possível respondê-la a partir da perspectiva do Matemático, do professor de Matemática e daqueles que trabalham com didática da Matemática.

Porém, independentemente desta perspectiva, uma coisa é certa para Contreras et al. (2017):

> [...] um formador de professores que ensinarão matemática deve ter uma imagem muito clara do conhecimento que pretende que seus estudantes construam. Este conhecimento pode estar modelado informalmente pela experiência, ou formalmente por um modelo de conhecimento profissional, em nosso caso o MTSK, pois sua intenção é desenvolver os conhecimentos que este modelo contempla, a partir da formação inicial até a continuada. (CONTRERAS et al., 2017, p. 2)

Embora ainda não haja um modelo para análise do conhecimento do formador de professores, é possível observar que há um movimento em direção a essa elaboração, e uma das ações que pode favorecer tal movimento, segundo Contreras et al. (2017) é a observação e análise das práticas de formadores de professores de Matemática.

Embora tal modelização não seja o objetivo da presente pesquisa, não podemos desconsiderar o fato de que o sujeito participante atuou como formador de futuros professores de Matemática, sendo assim, embora o objetivo seja analisar o conhecimento desse formador a partir do modelo MTSK, é possível que surjam reflexões sobre o conhecimento do formador de professores.

2.8 O que foi considerado como “início de carreira”

Como já foi dito anteriormente, as pesquisas realizadas relacionadas ao MTSK consideraram o professor experiente, com mais de dez anos de docência, quer seja na Educação Básica, Tecnológica ou Ensino Superior.

Rojas (2014) caracteriza o professor experiente como aquele que, por meio dos anos de docência, conseguiu desenvolver seu conhecimento matemático e didático do conteúdo, sendo capaz de utilizar esses conhecimentos para ensinar

Matemática. Segundo ela, os professores experientes devem ser selecionados para participar de pesquisas a partir de características estabelecidas pelos pesquisadores.

A presente pesquisa se propõe a olhar o professor em início de carreira, compreendendo que, embora a especialização do conhecimento vá se aperfeiçoando e desenvolvendo ao longo da carreira docente, existem alguns elementos do conhecimento especializado já no início desta docência.

O início da carreira docente é um período de grandes desafios para o professor e várias pesquisas têm sido desenvolvidas para tentar descrever as dificuldades e tensões vivenciadas por aqueles que decidem se colocar na posição de formador.

Cancherini (2009, p. 9) ao escrever sobre o início da carreira docente, afirma que “[...] o professor iniciante, ainda que tenha acumulado conhecimentos teóricos, tem dificuldades para enfrentar a complexidade da realidade escolar que se descortina diante de seus olhos”.

Aires (2015), que analisa professores com formação em bacharéis que iniciaram a carreira docente, afirma que entre as principais dificuldades enfrentadas estão: ausência de formação específica para atuar como docente; dificuldades de relacionamento com outros professores e alunos e a carga horária excessiva.

E na EaD, como seria esse início da docência?

Melillo (2011) analisa um professor com experiência no ensino presencial, que teve que iniciar carreira na modalidade EaD. Segundo ela, “[...] o docente não se torna professor a distância repentinamente, mas, que esta transição se dá de forma processual que, por vezes, é lenta” (MELILLO, 2011, p. 13). Ela relata que normalmente esses professores desenvolvem um estilo híbrido de ensino no qual mesclam práticas e recursos utilizados nas duas modalidades.

Brito (2014) analisa, em sua pesquisa de mestrado, o que ela chama de “processo de aprendizagem da docência virtual”. Segundo ela, “o que se observa na EaD é uma nova forma de organização do trabalho docente, o que, de um lado, produz uma precarização do trabalho do professor e, de outro, possibilita um trabalho colaborativo e em equipe” (BRITO, 2014, p. 9).

Os dilemas enfrentados pelos professores, segundo Brito (2014), são chamados de “choque de realidade”, caracterizados pelas seguintes dificuldades: planejar as atividades sem conhecer o público alvo; perda da autonomia da disciplina, pela padronização ocasionada pela “construção” coletiva da disciplina; relação entre professor e tutor; conflito entre concepção de educação do professor e do tutor e gestão de tempo de trabalho (BRITO, 2014). Esse choque pode ser minimizado caso o professor tenha sido aluno de um curso de Licenciatura em Matemática a distância.

Dos sete professores que participaram da pesquisa de Brito (2014), apenas um relatou não ter passado pelas dificuldades características do “choque de realidade”. Esse professor não teve experiência com a docência no ensino presencial.

Essa é uma característica dos sujeitos da presente pesquisa, pois iniciaram sua carreira docente já na modalidade EaD. Esse fator pode evitar o “choque de realidade” citado por Brito (2014), e levá-los a desenvolver um estilo particular de ensino a distância. Porém não ter atuado no ensino presencial não evita as tentativas de utilizarem práticas características dessa modalidade, devido à formação que tiveram durante o curso de Licenciatura e Mestrado.

Sobre a aprendizagem da docência, Brito (2014, p. 41) afirma que

> [...] é um processo contínuo que não acontece somente na formação inicial. A profissionalização dos professores é resultado do processo de aquisição de competências que são construídas ao longo da trajetória profissional. A prática impõe situações singulares e específicas, e a teoria aprendida nos cursos de formação se torna insuficiente para o seu enfrentamento.

O que significa que não apenas os bacharéis apresentados na pesquisa de Aires (2015) enfrentaram dificuldades no início da docência, mas também aqueles que receberam uma formação para a docência. Isso se deve ao fato das situações ocorridas, em sala de aula, serem singulares (BRITO, 2014) e, às vezes, impossíveis de serem previstas no início da carreira. Porém, como vimos nas seções anteriores, aprender a ensinar (conhecimento didático) é um dos conhecimentos imprescindíveis para “ensinar o aluno a pescar”.

O que professores precisam ter em mente, ao atuarem em cursos de Licenciaturas, é o seu papel como formadores de professor. Sua atuação não deve se resumir à mera “[...] transposição da teoria para a prática [...] [mas, perceber] que a própria prática e reflexão sobre ela são fundamentais para seu processo formativo” (BRITO, 2014, p. 41) e, consequentemente, para a formação dos futuros professores sob responsabilidade deles, sejam eles experientes ou em início de carreira docente.

Na pesquisa de Rojas (2014), são considerados professores experientes aqueles que atuam há mais de 10 anos em sala de aula. Nesta pesquisa, considera-se o participante como estando em início de carreira docente, por sua atuação, como Formador de Professores, ser menor que cinco anos e por essa ser a primeira vez que leciona a disciplina de Cálculo, de onde foram colhidas as informações para analisar seu conhecimento especializado revelado sobre Derivada.

Terminadas as apresentações do que se compreende sobre os principais elementos considerados na questão de pesquisa, no próximo capítulo será apresentado como se deram o planejamento e o desenvolvimento da mesma, desde o contato com o sujeito participante, coleta de informações até a forma como planejamos desenvolver as análises de tais informações.

A CAMINHADA FABRICOU UM NOVO EU...

O PLANEJAMENTO

[...]
O homem que eu parti de casa se perdeu
E a caminhada fabricou um novo eu
[...]
(Trecho “A Partida e o Norte” Estevão Queiroga)

3 DELINEAMENTOS DA PESQUISA

> O que determina como trabalhar é o problema que se quer trabalhar: só se escolhe o caminho quando se sabe aonde se quer chegar (GOLDEMBERG, 2011, p. 14)

No capítulo anterior foram apresentados os conceitos teóricos escolhidos para serem utilizados durante esta pesquisa e que me auxiliaram a *caracterizar o Conhecimento Especializado de um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' a distância*. Este objetivo foi apresentado ao final do primeiro capítulo da tese com o intuito de responder à questão: *que conhecimento especializado revela um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada a distância'?*

Com a questão de pesquisa já definida e certa de onde queria chegar, como pontua Goldemberg (2011), posso, então, relatar sobre a rota planejada e as estradas que percorri ao longo desse processo.

Desta forma, neste capítulo, são apresentados o caminho metodológico percorrido e as escolhas que empreendi para planejar e desenvolver a presente pesquisa de maneira que fosse possível acompanhar os delineamentos utilizados durante sua realização.

3.1 A escolha da abordagem qualitativa

> A pesquisa qualitativa é outra coisa. No meu entender, é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos. (D'AMBROSIO, 2004, p. 21)

Quando me propus a caracterizar o Conhecimento Especializado de um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar 'Derivada' à distância, minha intenção não era apresentar uma representação numérica sobre esse conhecimento, mas sim dar voz ao professor participante da pesquisa

(D’AMBROSIO, 2004) que está iniciando sua carreira, ressaltando os conhecimentos que ele revela.

Pela essência do objeto de análise, que é o Conhecimento Especializado deste formador de professores em particular e pela intenção no processo de investigação, a abordagem qualitativa, a partir do paradigma interpretativo, foi utilizada no formato de estudo de caso (sobre o qual discorrerei adiante) por acreditarmos que ela seja a abordagem mais adequada para tratar o problema trabalhado nesta tese (ALVEZ-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 1998), pois nos permite aprofundar na compreensão do conhecimento do professor, sendo esta uma das principais características das pesquisas qualitativas (GOLDEMBERG, 2000).

A partir dos resultados produzidos por meio desta pesquisa, tenho possibilidades de refletir sobre o conhecimento especializado que está sendo desenvolvido em cursos de formação inicial, bem como buscar alternativas para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática e, assim, contribuir para as discussões no campo da Educação Matemática.

É claro que não basta declarar que esta pesquisa é qualitativa. É necessário olhar para ela como um todo, observando o processo de investigação. Pires (2009) afirma que o que caracteriza se uma pesquisa é qualitativa ou quantitativa não é a posição epistemológica adotada, nem as técnicas de produção de dados, muito menos a finalidade da pesquisa. O autor apresenta cinco características que definem a pesquisa como sendo de caráter qualitativo, a saber: 1) flexibilidade na construção da investigação; 2) possibilidade de olhar para “objetos complexos” como instituições, grupos, etc.; 3) pluralidade de instrumentos para coletar os dados; 4) possibilidade de descrição minuciosa da vida social; e 5) abertura para novas descobertas. Segundo Pires (2009, p. 91) a abordagem qualitativa “[...] tende a valorizar a criatividade e a solução de problemas”.

Sendo assim, o que caracteriza a pesquisa como qualitativa é o “[...] fato de se constituir fundamentalmente a partir de um material empírico qualitativo, isto é, não tratado sob a forma de números” (PIRES, 2009, p. 91).

Dentro dessa perspectiva, a seguir descrevo os delineamentos e as decisões que fui tomando ao longo do desenvolvimento da presente pesquisa a fim de endossar o que me propus a realizar.

3.2 A escolha do estudo de caso como um formato da pesquisa qualitativa

> Partindo do princípio de que não há metodologias “boas” ou “más” em si, e sim metodologias adequadas ou inadequadas para tratar um determinando problema, recomenda-se que, antes de iniciar a descrição dos procedimentos, o pesquisador demonstre a adequação do paradigma adotado ao estudo proposto. Essa argumentação deverá fazer referências aos pressupostos daquele paradigma, quer discutindo-os explicitamente, quer remetendo o leitor para textos especializados no assunto. A pertinência do formato utilizado – estudo de caso, etnografia, histórias de vida, ou outros – ao objetivo de pesquisa deve também ser mencionada. (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 1998, p. 160)

Partindo do conselho descrito acima, optei por apresentar mais algumas informações metodológicas antes de descrevermos os dados produzidos durante a pesquisa. Na seção anterior, justifiquei a adequação da abordagem qualitativa para a pesquisa realizada. Nesta seção passo a falar um pouco sobre a estratégia que escolhi para auxiliar na realização da mesma, a saber, o estudo de caso. Minha intenção ao apresentar esta seção não é fornecer informações exaustivas acerca do estudo de caso, mas sim, apresentar informações que demonstrem a adequação desta estratégia a esta pesquisa.

Segundo Yin (2005, p. 32), “o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real”. Entre as principais características do estudo de caso, Cohen et al. (2011) destacam a presença de particularidades nos dados produzidos, considerando-as facilitadoras na compreensão do objeto investigado; em relação aos dados, falam que estes são produzidos a partir da realidade do participante, ou seja, ponderando a sua prática e experiência, considerando assim a complexidade da vida social. Em relação aos resultados das análises desses dados, Cohen et al. (2011) opinam que, por estarem mais próximos do cotidiano, possibilitam uma melhor compreensão por parte dos leitores; e ainda, é possível continuar as análises dos dados produzidos em momentos posteriores, como foi possível de ocorrer na pesquisa de Aguilar (2016) que analisou dados produzidos para uma pesquisa qualitativa realizada dez anos antes.

Sendo assim, a partir da definição do que se trata um estudo de caso e das principais características que a circundam, e considerando que nesta pesquisa conto com apenas um participante (sobre o qual também discorrerei adiante), essa estratégia de pesquisa torna-se adequada para nos auxiliar a caracterizar o Conhecimento Especializado de um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar ‘Derivada’ a distância.

Esclarecidos esses posicionamentos metodológicos, passo a descrever os procedimentos adotados na produção dos dados da pesquisa.

3.3 A descrição da produção dos dados da pesquisa

> Dados servem como base para um estudo de pesquisa. Em pesquisa qualitativa, os dados relevantes derivam de quatro atividades de campo: entrevistas, observações, coleta e exame (de materiais) e sentimentos. (YIN, 2016, p. 115).

Nesta seção passo a descrever as atividades de campo utilizadas para a produção dos dados. Como disse anteriormente, realizar pesquisa sobre o curso de Licenciatura em Matemática à distância da UFMS foi uma escolha feita por mim ainda durante o mestrado. Para o doutorado, optei por dar continuidade ao trabalho realizado em parceria com a UFMS, graças à disposição dos integrantes da equipe do curso de Licenciatura em Matemática à distância dessa instituição em continuar fornecendo informações.

As certezas que tinha, a princípio, eram: Vou fazer pesquisa sobre a disciplina de Cálculo I e II (como explicitado anteriormente), porém não tinha bem definido para o que iria olhar. Pensei que uma possibilidade seria voltar nosso olhar para os professores dessa disciplina (conforme exposto no capítulo 1).

No entanto, qual seria o foco desse olhar? A atuação dos professores? A maneira como “ensinam” na modalidade EaD? Influenciados pelas descobertas teóricas da época (CARRILLO et al., 2013), penso que focar no Conhecimento Especializado desses professores de Matemática, que atuavam como formadores, seria uma boa oportunidade para contribuir com o campo da Educação Matemática, uma vez que essa temática carece de mais pesquisas.

Nesse ponto, já tinha decidido quem seriam os participantes da pesquisa e qual seria o foco. As questões que surgiam no momento eram: Por onde começar? O que fazer para conseguir olhar para o Conhecimento Especializado desses professores?

A partir desses questionamentos, decidi iniciar a produção de dados com nossos participantes por meio de entrevistas (antes e após o oferecimento da disciplina), instrumento comum em pesquisas qualitativas (YIN, 2016) e nas pesquisas que haviam utilizado o MTSK como aporte teórico. Considerando que o Conhecimento Especializado é aquele que o professor usa para ensinar Matemática (CARRILLO et al., 2018, no prelo) e que o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) é um dos espaços, dentro da modalidade EaD, em que esse ensino ocorre, decidi que também olharia para os espaços de fórum onde as discussões voltadas para o ensino dos conteúdos da disciplina ocorreram.

Optei por focar apenas no ensino realizado pelo professor à distância, realizados nos fóruns de discussões, por considerar esse um espaço singular da modalidade EaD.

Os professores escolhidos como participantes da pesquisa foram, *a priori*, o professor de Cálculo I, a professora de Cálculo II e a tutora que atuou nas duas disciplinas. Sendo assim, conversei inicialmente, com os três. No entanto, após essa conversa e uma análise inicial das discussões no AVA, escolhi apresentar nesta tese apenas as informações referentes à disciplina de Cálculo I, pelos seguintes motivos: as interações no AVA de Cálculo II não ofereceram informações suficientes para analisar o Conhecimento Especializado do professor, pelo fato de sua presença no ambiente não ser muito frequente. Sendo assim, a primeira escolha foi focar no professor e na tutora de Cálculo I. Porém, ao analisarmos as interações no AVA, percebi que a tutora participou apenas de um dos fóruns da disciplina de Cálculo I, ou seja, suas interações também não foram suficientes para analisarmos seu Conhecimento Especializado, sendo este o segundo motivo pelo qual foquei apenas no professor de Cálculo I; e, por fim, ao reduzirmos a quantidade de participantes, teria mais chance de analisar os dados de forma minuciosa, sendo essa uma das características das pesquisas qualitativas, pontuadas por Pires (2009).

Desta forma, escolhi o professor de Cálculo I por ser ele quem lecionou a disciplina no semestre em que entrei em contato, pelo AVA da disciplina fornecer informações para caracterizarmos seu conhecimento especializado e por ele estar disposto a oferecer informações para a pesquisa.

Esclarecidas essas decisões, que foram cruciais para a pesquisa, narro a seguir a primeira entrevista, considerada como conversa.

3.3.1 *Uma conversa inicial*

> Fazer entrevistas qualitativas é provavelmente o modo esmagadoramente dominante de entrevistar em pesquisa qualitativa. (YIN, 2016, p. 119).

A entrevista é um dos procedimentos utilizados na pesquisa qualitativa, como afirma Yin (2016) na epígrafe acima. Mas o que ela tem de singular a oferecer às pesquisas qualitativas?

Alves-Mazzotti (1998) justifica o uso de entrevista por possuir uma natureza interativa e por dar a possibilidade de pesquisar temas mais complexos, e afirma que os questionários, por exemplo, não dariam conta.

Poupart (2012) afirma ser este um dos instrumentos mais utilizados nas pesquisas sociais, e apresenta a dicotomia que existia no século passado entre utilizar ou não a entrevista. Ele destaca que uns defendiam que ela possibilitava, por meio das palavras, compreender a realidade; outros, porém, pensavam exatamente o contrário, defendendo que as interpretações das palavras ditas poderiam confundir a verdadeira realidade.

Polêmicas à parte, o autor apresenta três argumentos (epistemológico, ético-político e metodológico) para a utilização de entrevistas na pesquisa qualitativa, que apresento, respectivamente, a seguir.

> [...] a entrevista do tipo qualitativo seria necessária, uma vez que uma exploração em profundidade da perspectiva dos atores sociais é considerada indispensável para uma exata apreensão e compreensão das condutas sociais. [...], porque ela abriria a possibilidade de compreender e conhecer internamente os dilemas e questões enfrentados pelos atores sociais. [...] [porque] se imporia entre as "ferramentas de informação" capazes de elucidar as realidades sociais, mas, principalmente, como instrumento privilegiado de acesso à experiência dos atores. (POUPART, 2012, p. 2016)

O que o autor chama de atores sociais corresponde ao nosso sujeito participante. A partir desses argumentos, escolhi iniciar com a entrevista por considerarmos o conhecimento do professor um tema de grande complexidade e por pretender explorar as minucias desse conhecimento, considerando as informações expressas pelo professor antes mesmo de iniciar sua ação de ensinar, sem, porém, ter a pretensão de generalizar os resultados obtidos.

No entanto, não basta escolher iniciar com uma entrevista, é preciso decidir o tipo da entrevista a realizar. Alves-Mazzotti (1998) classifica as entrevistas como: livre, semiestruturada, estruturada, mista, história oral e história de vida. Goldenberg (2011) classifica as entrevistas (e questionários) como: abertas, fechadas, assistemáticas e projetivas. Yin (2016), por sua vez, classifica as entrevistas em apenas duas classes: estruturadas e qualitativas, sendo que na primeira, a interação que ocorre é roteirizada e, na segunda, pode haver um roteiro, mas o pesquisador não o segue de maneira rígida. Nas qualitativas "o pesquisador terá uma concepção mental das perguntas do estudo, mas as perguntas especificamente verbalizadas, propostas a qualquer participante, vão diferir de acordo com o contexto e o ambiente da entrevista" (YIN, 2016, p. 119).

Segundo a classificação de Alves-Mazzotti (1998), a entrevista realizada foi de tipo semiestruturada. Na classificação de Goldenberg (2011), entrevista de tipo aberta. E, segundo a classificação de Yin (2016), foi do tipo qualitativa. Embora cada um desses autores proponha uma classificação, identifiquei elementos comuns em suas ideias e percebi que a intenção de todos é proporcionar momentos em que o participante fale livremente sobre o tema proposto. E nessa liberdade de expressão, são trazidos à tona seus conhecimentos, crenças, concepções e visões de mundo.

A partir dessas concepções de entrevistas, tinha à mão um roteiro (Quadro 13) das principais temáticas que queria discutir, mas a entrevista ocorreu em forma de conversa, na qual as questões foram apresentadas ao participante não necessariamente na sequência das temáticas apresentadas abaixo:

Quadro 13 – Roteiro da primeira conversa com o professor

- Histórico Acadêmico e profissional; **- Planos para a disciplina que vai lecionar;** **- Gerenciamento entre as aulas presenciais e à distância;** **- Ações que pretende desenvolver no AVA (interações, *feedback, etc*);** **- Expectativa em relação a seus alunos;** **- Previsões de possíveis dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos;** **- Contato e troca de informações com demais professores;** **- Preparação e estudo para oferecer essa disciplina;** **- Relação da disciplina com outras a serem ofertadas posteriormente.**

Fonte: Dados da pesquisadora (2014).

Essa primeira conversa, guiada pelas principais temáticas apresentadas no roteiro acima, foi realizada por Skype e gravada pelo aplicativo “gravador de voz” do celular, disponível gratuitamente no *App Store*, e ocorreu, como denomina Yin (2016), de “modo conversacional”. Nela, desenvolvi “[...] uma espécie de relacionamento social” (YIN, 2016, p. 119), em que o participante, algumas vezes, também dirigiu perguntas à pesquisadora.

O intuito dessa conversa foi conhecer o histórico acadêmico e profissional do participante, tentar compreender seus objetivos e aspirações ao oferecer a disciplina de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática à distância, informações essas que já poderiam dar indícios de seu Conhecimento Especializado.

Vale ressaltar que no momento em que realizei esta primeira conversa, ainda não tinha definido que a pesquisa focaria apenas no conteúdo de Derivada. Então, seu roteiro foi elaborado com objetivo de compreender a disciplina como um todo. Por isso, na discussão que segue serão encontradas informações gerais.

Os trechos da conversa que são analisados na tese são denominados de Unidades de Informação (UI) e foram enumerados seguindo a sequência da conversa, conforme o exemplo a seguir.

Bem, eu entrei na Universidade Federal (UFMS) [no curso presencial] em 2004 e no final de 2007 foi a minha formatura. Durante esse período, eu fiz dois cursos de verão na USP, foi em 2005-2006. No último ano de graduação, fui convidado a participar da EaD, [ou seja], no primeiro curso oferecido pela Matemática na Educação a Distância eu já estava trabalhando. Depois que fui convidado a trabalhar na EaD, eu fiz alguns cursos de especialização relacionados a Mídias, Educação e, terminando a graduação, eu já comecei a lecionar na prefeitura, passei no concurso e estou na prefeitura desde então. Por causa do Mestrado, que eu entrei em 2012, me afastei da EaD, então, desde 2008 até 2012, eu fiquei trabalhando na EaD. Foi um período bem longo, mas proveitoso para minha carreira. Por conta do Mestrado eu me afastei, mas, agora, estou retornando. (Professor. UI 1 - Entrevista 1 – 04/09/2014).

Esta é a primeira Unidade de Informação oferecida pelo Professor na primeira entrevista. Me informa sobre sua trajetória acadêmica e profissional, importantes para conhecermos o professor com quem conversava na pesquisa. Utilizei, para as transcrições das entrevistas, uma fonte (Times New Roman), diferente da que escrevi durante a tese, para que os leitores possam facilmente percebê-las ao longo do texto.

Aproveitando a UI 1 apresentada anteriormente, na próxima seção descreverei algumas características acadêmicas e profissionais do professor participante da pesquisa.

3.3.1.1 O professor com quem conversei

Como é possível acompanhar na UI 1, o professor cursou Licenciatura em Matemática (presencial) na UFMS e iniciou a sua atuação na modalidade EaD na primeira turma, ou seja, em 2008. Ele afirma que na época, para trabalhar na EaD, fez alguns cursos e sua atuação variou entre professor e tutor durante quatro anos (2008-2011), como pode ser acompanhado na UI 2, a seguir:

Então, no começo eu acho que não tinha bem específico qual era a função. Eu trabalhava como professor, que hoje tem nome de professor pesquisador 1 e 2. Na época, não tinha era tutor e, às vezes, eu colaborava como professor também. (Professor. UI 2 - Entrevista 1 – 04/09/2014).

Sendo assim, nesses pouco mais de três anos, atuou como professor em algumas disciplinas, tutor em outras, se constituindo como o professor da Educação a Distância que conversei no momento (2014).

Durante a conversa, ele afirma nunca ter atuado como professor no Ensino Superior da modalidade presencial, apenas na EaD. Durante o período de 2008 a 2014, trabalhou também como professor concursado da Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande (MS) ministrando aulas para as séries finais do Ensino Fundamental. Ele se afastou da EaD nos anos de 2012 e 2013 pelo fato de ter cursado o Mestrado em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. Já no ano em que nossa primeira conversa ocorreu (2014), ele iria atuar apenas na EaD da UFMS, no polo de Bela Vista, que neste ano acomodou a 13ª turma do curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFMS.

Há algumas coisas que já é possível considerar sobre o participante desta pesquisa. Era um professor que atuava na sala de aula há poucos anos (na educação básica desde 2008, no Ensino Superior também), tendo interrompido durante o período do Mestrado, diferente da maioria das pesquisas que foram desenvolvidas dentro do grupo SIDM considerando o MTSK. Além disso, ele não atuava como professor de Matemática, mas como formador de futuros professores de Matemática. Embora ele também seja considerado um professor de Matemática, sua função excede essa ação. Além de ensinar Matemática, como formador, precisa ensinar seus alunos, futuros professores, a ensinar Matemática.

Aqui cabem parênteses para explicitarmos as diferenças que considerei entre o professor de Matemática e o formador de professores de Matemática. Papert (2008, p. 125) afirma que “[...] se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar”. Seguindo essa ideia e aplicando-a na realidade dessa pesquisa, enquanto o melhor que um professor de Matemática precisa fazer é ensinar seu aluno a pescar, o formador de professores precisa ensinar seu aluno, futuro professor de Matemática, a ensinar seu aluno a pescar. Sendo assim, não basta ao formador de professores saber ensinar, é necessário que ele seja capaz de ensinar a ensinar.

Feitos esses esclarecimentos, como disse no capítulo anterior, no momento em que a pesquisa foi pensada, não foi considerado o fato de o participante ser um formador de professores. Embora ainda não haja pesquisas que comprovem as possíveis diferenças entre o Conhecimento Especializado do professor e do formador, penso que elas existem, pelo fato de que o formador de professores precisa ensinar a ensinar. Porém, embora essas diferenças possam existir, um dos conhecimentos que o formador deve ter é o Conhecimento Especializado, por isso que nesta pesquisa a análise de seu conhecimento foi na perspectiva do MTSK. Vale ressaltar, porém, que entre os elaboradores do MTSK já existe um movimento voltado para a análise do Conhecimento Especializado do Formador de Professores de Matemática (CONTRERAS et al., 2018).

Voltando ao fato de que o participante desta pesquisa atuava como professor há pouco tempo, Rojas (2014) traz uma conceitualização do que ela considera como professor experiente, a partir de vários autores (LI; KAISER, 2011; CHI, 2011; SHOENFELD, 2011, entre outros). Entre as características de um professor experiente, ela destaca que ele possui um conhecimento desenvolvido, tanto no que se refere ao conhecimento do conteúdo quanto ao conhecimento didático do conteúdo. Para a autora, um dos fatores que leva o professor a desenvolver esse conhecimento é a experiência adquirida pelos anos de trabalho em sala de aula. Em sua pesquisa, ela desenvolve um trabalho com professores que considera experientes, um deles que lecionava há 34 anos e o outro há 13 anos.

Nesta pesquisa, denominei o professor participante como professor em início de carreira, pelo fato de atuar como professor universitário apenas nas disciplinas de Prática e Análise (uma vez em cada uma delas) e por ser a primeira vez que lecionou a disciplina de Cálculo I. Considero como importante o fato de analisar o Conhecimento Especializado de um professor em início de carreira por considerar que as informações que serão apresentadas a partir das análises dos dados produzidos podem fomentar discussões e reflexões sobre o Conhecimento

Especializado que tem sido construído e incentivado na formação inicial (e continuada) de professores de Matemática.

Continuando a descrição dos procedimentos utilizados na produção dos dados, a seguir passo a dialogar sobre o Ambiente Virtual de Aprendizagem.

3.3.2 *O Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)*

Iniciei a produção de dados a partir das interações no AVA quatro meses após o fim da disciplina[9], devido ao fato estar finalizando as disciplinas obrigatórias do Doutorado e pelas burocracias necessárias para a mudança para a Espanha a fim de realizar o estágio sanduíche no exterior.

Segundo Anjos, Alonso e Maciel (2016, p. 96)

> é importante analisar as informações contidas no AVA [...] sobretudo quando o seu uso se institui no contexto educativo, uma vez que [...] aglutina, em sua essência, recursos técnicos, mas com significados pedagógicos e que podem reconfigurar as práticas educativas e seus contíguos.

Esse foi o principal fator que me levou a optar por olhar os espaços de interação do AVA. Isso porque compreendo que, como se trata de um curso à distância, as discussões realizadas sobre os conteúdos da disciplina estariam nesse ambiente.

Anjos, Alonso e Maciel (2016) apontam que a análise (ou avaliação) do AVA normalmente é feita para compreender o uso das tecnologias ou para verificar a incorporação destas nas práticas educacionais. Nesse artigo, os autores apresentam resultados de 12 pesquisas que abordam a temática de avaliação do AVA com o intuito de indicar os instrumentos e modelos utilizados durante esse processo.

Embora considere o AVA um ambiente importante a ser analisado, minha intenção não foi a mesma apontada pelos autores. Busquei analisá-lo de forma que consiga ressaltar informações sobre o conhecimento especializado do professor

---

[9] A disciplina de Cálculo I iniciou no dia 05/09/2014 e encerrou no dia 24/10/2014.

participante da pesquisa. Para isso, olhei as interações por meio das postagens no AVA, que ocorreram durante a disciplina.

Sendo assim, ao iniciarmos o trabalho com as informações do AVA, as postagens e anexos no W*ord* foram copiadas, incluindo as do professor, alunos e tutor, dos espaços de fóruns abertos para a discussão, a fim de considerar todo o contexto das postagens do professor.

Terminada essa organização, passei a lê-las no intuito de decidir em qual tema matemático focaria durante as análises. A disciplina de Cálculo I abarcava os conteúdos de Limite e Derivada. O fato de que, a princípio, analisaria também o conhecimento da tutora, me levou a optar pelo conteúdo de Derivada, com foco apenas no fórum 4. Porém ao olharmos com profundidade os dados produzidos, percebi que o conteúdo de Derivada era discutido também nos fóruns 5 e 6. Como disse anteriormente, o fato de a tutora ter participado apenas de um dos fóruns me levou a focar apenas no Conhecimento Especializado do professor.

Voltando a falar sobre a organização das discussões do AVA, essa ação foi necessária, porque quando analisei um fórum, foi preciso considerar seu contexto. Isso porque a maioria das postagens realizadas pelo professor participante da pesquisa, foi motivada pelas postagens dos alunos e do tutor. Dessa forma, considerar o movimento no AVA é tão importante quanto a descrição que fazia de uma aula gravada no presencial a fim de entender a estrutura e sequência que o professor utilizou. As postagens nos fóruns de Cálculo I podem ser acompanhadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de postagens referentes a cada espaço de fórum da disciplina de Cálculo I.

Fórum (F)	Espaço (E)	Postagens (P)
F1	E1	17
	E2	32
	E3	9
	E4	4
	E5	2
	E6	2
	E7	2
F2	E1	18
	E2	69
	E3	20
F3	E1	85
F4	E1	1

	E2	63
	E3	58
	E4	36
	E5	32
F5	E1	1
	E2	3
	E3	26
	E4	22
	E5	7
	E6	11
F6	E1	1
	E2	22
	E3	17
	E4	17
F7	E1	7
	E2	5
	E3	4
	E4	5

Fonte: Elaborado pela autora a partir das informações do AVA (2015).

Antes, porém, de continuarmos falando sobre as escolhas que fiz ao trabalhar com as informações do AVA, cabem algumas observações. Há quatro maneiras de visualizar os fóruns de discussão na plataforma *Moodle*. Uma delas é "Mostrar respostas aninhadas" que permite ver as postagens que os alunos fizeram após lerem o comentário de outro aluno, professor ou tutor. Dessa forma, é possível perceber a interação que ocorreu sobre determinado assunto e quais alunos participaram da interação independentemente da data, pois as postagens são mostradas de maneira agrupada.

Outra possibilidade de visualização é "Mostrar respostas começando pela mais antiga", isso me permite acompanhar a constituição do fórum, desde a proposta da atividade até a última postagem, seguindo sua a ordem de data e horário. Uma maneira contrária é a de "Mostrar resposta começando pela mais recente", nesta, as respostas são listadas da mais recente para a mais antiga. Esta forma pode ajudar o tutor ou professor a acompanhar as últimas postagens nos fóruns e avaliá-las se for o caso.

Uma quarta maneira é a de "Listar respostas", na qual os nomes dos cursistas aparecem de forma aninhada, conforme eles foram postando suas respostas no ambiente, porém é possível visualizar somente o nome do cursista e a data em que a mensagem foi enviada. Essa forma é útil para acompanhar de maneira rápida quais pessoas participaram da discussão e a frequência de suas participações. Todas essas possibilidades são válidas para serem utilizadas na organização e análise das postagens do AVA, o que precisa ser considerado é o objetivo pelo qual se utilizará das informações nele disponibilizadas.

Se uma pesquisa apresenta uma perspectiva quantitativa, de discutir a quantidade de postagens de cada sujeito, a opção “Listar resposta” pode ser suficiente. No entanto, se uma pesquisa tem um caráter qualitativo, de acompanhar a interação que foi se constituindo, “Mostrar respostas aninhadas” pode ser uma das alternativas. Porém, às vezes é necessário compreender o movimento de postagens que foram realizadas, sendo necessário utilizar “Mostrar respostas começando pela mais antiga”.

Nesta pesquisa, iniciei a organização das informações do AVA por meio da opção “Mostrar respostas aninhadas”. Entretanto, ao fazer a leitura dos dados, muitas dúvidas surgiram e não foi possível compreender o movimento ocorrido e nem a constituição de tais discussões. Devido a essa falta de compreensão, decidi (re)organizar as postagens, por ordem cronológica, utilizando a opção “Mostrar respostas começando pela mais antiga”. Essa reorganização das informações do AVA nos permitiu codificar todas as informações extraídas de maneira que, quando lidas de forma aninhada, era possível saber a data, a hora e qual o número na sequência de postagem do espaço de fórum, conforme o exemplo abaixo.

Olá Ana Flávia! Os exemplos usam as mesmas expressões. No Teorema 5. $f(x) = 3.x^4 + 2x$
E no Teorema 6. deveria ser $f(x) = 3.x^4.\ 2x$, ok? (Professor – 9 de outubro 2014, 19:31 - F4_E5_ Post. 12).

O exemplo apresentado acima trata-se de uma postagem do professor feita no espaço 5 do 4º fórum de discussão da disciplina. Na sequência de postagens desse espaço, essa foi a 12ª.

Utilizar essa codificação tanto nas conversas que tive com o participante, quanto nas interações no AVA, permitiu explicitar o movimento que fiz durante as análises das informações, bem como a constituição da triangulação dessas informações. Durante a análise dos dados, a partir da codificação já estabelecida, houve um movimento complementar entre as opções de respostas aninhadas e as apresentadas em ordem cronológica de postagem.

Esclarecidos esses movimentos, passo a descrever as escolhas que fiz em relação ao conteúdo a ser considerado nas análises. Durante a disciplina analisada, Cálculo I, foram trabalhados os conteúdos de Limites e Derivadas. Como, a princípio, teria como participantes o professor e a tutora da disciplina, decidi escolher um fórum que tivesse a participação dos dois, como pode ser acompanhado na Tabela 2, na página seguinte.

A partir dessa organização, a primeira escolha que tomei e mantive até a qualificação foi a análise do fórum 4 que discutia o conteúdo de Derivada. No entanto, após uma leitura mais dedicada, percebi que a discussão sobre Derivada continuava nos fóruns 5 e 6. Foi então que surgiram os seguintes questionamentos: apresento informações sobre o conhecimento especializado do professor e da tutora, baseando-nos apenas nas interações do fórum 4? Ou, tento compreender o conhecimento especializado apenas do professor considerando também os fóruns 5 e 6, nos quais não houve a participação da tutora?

Optei, então, por considerarmos as informações dos fóruns 5 e 6 e analisarmos apenas as informações referentes ao professor, uma vez que compreendo que fazer pesquisa qualitativa é ser flexível, a ponto de ter que abrir mão de decisões tomadas anteriormente para avançar sempre aberto a novas descobertas (YIN, 2016).

Apresentadas essas escolhas, passei a descrever o conteúdo dos fóruns que serão foco das análises com a atenção voltada para a participação do professor.

Tabela 2 – Quantidade de postagens do professor e da tutora em cada espaço de fórum da disciplina de Cálculo I

Fórum	Espaço	Publicações
F1	E1	P – 1
	E2	P – 4
	E3	P – 1
	E4	
	E5	
	E6	

	E7	
F2	E1	P – 6
	E2	P – 16
	E3	P – 5
F3	E1	P – 9
F4	E1	P – 1
	E2	P – 3 T – 17
	E3	P – 2 T – 18
	E4	P – 4 T – 6
	E5	P – 3 T – 7
F5	E1	P – 1
	E2	P – 1
	E3	P – 4
	E4	P – 7
	E5	
	E6	P – 2
F6	E1	P – 1
	E2	P – 3
	E3	P – 1
	E4	P – 3
F7	E1	
	E2	
	E3	P – 1
	E4	P – 1

Fonte: Elaborado pela autora a partir das informações do AVA (2015).

3.3.3.1 O Fórum 4

Este fórum foi criado pelo professor para a discussão da terceira lista de exercícios da disciplina de Cálculo I (as duas primeiras listas foram dedicadas à discussão do conteúdo de Limites) cuja descrição e objetivo encontram-se na Figura 13.

Figura 12 – Imagem da mensagem de abertura do fórum “Lista 3 e Fórum 4” da disciplina de Cálculo I.

Lista 3 e Fórum 4

Período para realização da lista 3 e participação do Fórum 4: de 26/09 a 10/10.

A lista 3 será formada por exercícios sobre a **Parte 2a** do conteúdo. Assim como as demais listas, essa não deverá ser entre. Recordamos que o nosso objetivo é que a lista 3 seja estudada, realizada e discutida por meio do fórum de discussão 4. Por isso, os alunos devem participar efetivamente deste fórum, pois as participações nos fóruns de discussão serão avaliadas pelo professor e as notas dessas participações vão entrar no cálculo das médias dos alunos.

Observação:

Parte 2: Derivada

a) Definição de Derivada; Reta Tangente; Regras de Derivação e Derivadas de uma Função Composta.

Fonte: Dados do Ambiente Virtual de Aprendizagem (março de 2015)

Neste fórum, foram criados cinco espaços de discussões, sendo que o primeiro deles foi aberto pelo professor a fim de disponibilizar a primeira lista de exercícios (Figura 14) sobre o conteúdo Derivada.

Os outros quatro espaços foram abertos pelos alunos para que cada questão da lista fosse discutida separadamente. O total de postagens do professor nos espaços deste fórum, desconsiderando a postagem da lista de exercícios, foram 11. Nas análises, as postagens referentes a este fórum estarão referenciadas com o código F4. De acordo com a mensagem de abertura do fórum (Figura 13), a lista tinha como objetivo discutir com os alunos a definição de Derivada, Reta Tangente, regras de Derivação e Derivada da função composta.

Figura 13 – Imagem da primeira lista de exercício sobre Derivada a ser discutida no AVA (fórum 4)

Lista 3 de Cálculo Diferencial e Integral I – Parte 2a

1. Calcule $f'(x_0)$ nos casos abaixo:

a) $f(x) = -8x^2 + x$ em $x_0 = 0$
b) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 1$ em $x_0 = -\sqrt{2}$
c) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3x$ em $x_0 = 9$
d) $f(x) = 7/(x^5) + 2x^3 - (\sqrt[3]{2})x + \pi$ em $x_0 = 1/2$
e) $f(x) = |x + 1|$ em $x_0 = -1$

2. Com base no exercício anterior, determine a equação da reta tangente ao gráfico de cada função f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

3. Sabendo que $(\text{sen}\, x)' = \cos x$ e que $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$, calcule:

a) $f'(\pi/4)$, onde $f(x) = 2\,\text{sen}\, x + \cos x$
b) $g'(\pi/6)$, onde $g(x) = x^4 - 3\cos x + (\text{sen}\, x)/2$
c) $h'(0)$, onde $h(x) = -x + (\sqrt[4]{3})\,\text{sen}\, x - (\pi \cos x)/5$

4. Calcule $f'(x_0)$ nos casos abaixo:

a) $f(x) = x\cos x - 2\,\text{sen}\, x$ e $x_0 = \pi/3$
b) $f(x) = (2x + x^3 - 5)/(8x^3 + \sqrt{x})$ e $x_0 = -1$
c) $f(x) = (\cos x - \text{sen}\, x)/x^2$ e $x_0 = \pi/2$
d) $f(x) = 3\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ e $x_0 = 0$

Fonte: Ambiente Virtual de Aprendizagem – Cálculo I (2015).

3.3.3.2 O Fórum 5

Segundo a mensagem de abertura do professor (Figura 15), este fórum foi aberto com objetivo de discutir Derivadas sucessivas, aplicações e Regras de L'Hospital.

Figura 14 – Imagem da mensagem de abertura "Fórum 5 da Lista 4 – Cálculo 1"

Lista 4 e Fórum 5

Período para realização da lista 4 e participação do Fórum 5: de 10/10 a 23/10.

A lista 4 será formada por exercícios sobre a **Parte 2b** do conteúdo. Os alunos não deverão entregá-la. Assim como as demais listas, essa não deverá ser entre. Recordamos que o nosso objetivo é que a lista 4 seja estudada, realizada e discutida por meio do fórum de discussão 5. Por isso, os alunos devem participar efetivamente deste fórum, pois as participações nos fóruns de discussão serão avaliadas pelo professor e as notas dessas participações vão entrar no cálculo das médias dos alunos.

Observação:

Parte 2: **Derivada**
b)Derivadas Sucessivas; Aplicações e Regra de L'Hospital.

Fonte: Dados do Ambiente Virtual de Aprendizagem (2015).

Nele foi disponibilizada a lista de exercícios (Figura 16) proposta pelo professor para ser discutida e resolvida pelos alunos.

Figura 15 – Imagem da segunda lista de exercício sobre Derivada a ser discutida no AVA (fórum 5)

Lista 4 de Cálculo Diferencial e Integral I – Parte 2b

1. Calcule

a) f '(x) sendo f(x) = f(x) = $-x^3\cos(5x+2)$

b) f "(x) sendo f(x) = $\sqrt[3]{\text{sen } x}$

c) $f^{(3)}$ sendo f(x) = sen x + cos x

d) $f^{(4)}$ sendo f(x) = $\sqrt{x}$ – xsen x

2. Esboce o gráfico de

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Suponhamos que uma partícula se desloque com função de posição *f(t)*. Isso significa que função *f* fornece a cada instante *(t)* a posição ocupada pela partícula na reta.
A *velocidade* da partícula no instante t é definida como sendo a derivada (se ela existe) de *f* em *t*, ou seja, $v(t) = f'(t)$.
A *aceleração* no instante *t* é definida como sendo a derivada em *t* da função $v(t)$, isto é $a(t) = f''(t)$.

3. Com essas informações considere que uma partícula se desloque sobre um reta de modo que no instante t a posição da partícula é dada por f(t) = t^2+2t, $t \geq 0$ onde f(t) é dado em metros e t em segundos.

a) Determine as posições ocupadas pela partícula nos instantes t = 0, t = 1 e t = 5

b) Qual a velocidade no instante t = 2?

c) Qual a aceleração no instante t = 3?

d) Esboce o gráfico da função posição.

4. Calcule

a) $\lim_{x\to-1}\frac{4x^3+x^2+3}{x^5}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$

Fonte: Ambiente Virtual de Aprendizagem – Cálculo I (2015).

Além desta lista de exercícios, foi disponibilizado pelo professor (Espaço 2) um arquivo contendo o conteúdo de Assíntotas Oblíquas, como pode ser conferido na Figura 17. Segundo a mensagem escrita pelo professor neste espaço, o intuito dele era que os alunos lessem o conteúdo apresentado e tentassem verificar se, na lista de exercícios, continha alguma questão que contemplasse Assíntotas Oblíquas.

Figura 16 – Imagem do conteúdo sobre Assíntotas Oblíquas disponibilizada pelo professor no segundo espaço do fórum 5

Um Resumo sobre Assíntotas

Bacharelado de Administração - FEA - 1o. sem.2009 - Noturno
Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

Falando de uma forma bastante informal, diz-se que uma reta r de equação $y = ax + b$ é uma assíntota para uma função $y = f(x)$ (no infinito) se o gráfico de f "se aproxima" da reta r no infinito (no $+\infty$ ou no $-\infty$).

De outro lado, também de uma forma informal, uma reta vertical $x = p$, com $p \notin$ Dom f, é uma assíntota para uma dada função f se seu gráfico "se aproxima arbitrariamente" de tal reta, quando x se aproxima de p (pela direita ou pela esquerda ou por ambos).

1. Assíntotas horizontais e oblíquas

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função cujo domínio contém o intervalo $]b, +\infty[$, para $b \in \mathbb{R}$.
A reta $y = mx + n$ é **uma assíntota**(no $+\infty$) para a função $y = f(x)$ se o limite $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$.

Em outras palavras, a função f admite a reta $y = mx + n$ para assíntota (no $+\infty$) se ela "fica arbitrariamente próxima" de tal reta, quando x tende a $+\infty$.

- Se $m \neq 0$, a reta $y = mx + n$ é dita uma **assíntota oblíqua**.
- Se $m = 0$, a reta $y = n$ é dita uma **assíntota horizontal**.

Note que neste último caso, pode-se dizer que f admite uma assíntota horizontal $y = n$ se se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = n \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga define-se a condição para que uma função f, cujo domínio contém um intervalo $]-\infty, a[$, tenha a reta s, de equação $y = m_1x + n_1$, como assíntota (no $-\infty$): é que o limite $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (m_1x + n_1)\big) = 0$.

Como acima, se $m_1 \neq 0$, a reta s é dita uma assíntota oblíqua para f (no $-\infty$); caso $m_1 = 0$, então diz-se que $y = n_1$ é uma assíntota horizontal para f (no $-\infty$).

2. Assíntotas verticais

Definição: Sejam $y = f(x)$ uma função e $p \in \mathbb{R}$. Suponhamos que o domínio da f contenha um dos intervalos do tipo $]a, p[$ ou $]p, b[$. Dizemos que a reta vertical $x = p$ é uma **assíntota vertical** para f se um dos limites indicados estiver verificado:

a. $\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$ ou **b.** $\lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty$ ou **c.** $\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty$ ou

d. $\lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty$ ou **e.** $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ ou **f.** $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$.

Utilidade das assíntotas: Quando se deseja fazer um esboço do gráfico de uma certa função f é necessário ter algumas informações a respeito dela para que tal esboço seja feito com uma maior precisão. Uma dessas informações é o estudo da existência de assíntotas.

Como verificar a existência de assíntotas

Conforme as definições dadas anteriormente, a verificação de existência de **assíntotas horizontais e assíntotas verticais** para uma função f depende de verificação de alguns limites da própria f. Para relembrar:

I) Assíntota horizontal

- Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = n \in \mathbb{R}$, então $y = n$ é uma assíntota horizontal para f.

Analogamente,

- se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = n_1 \in \mathbb{R}$, então $y = n_1$ é também uma assíntota horizontal para f.

II) Assíntota vertical

- Se p $\in \mathbb{R}$ e um dos seguintes limites é verificado:

a. $\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$, ou **b.** $\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty$, ou **c.** $\lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty$, ou

d. $\lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty$, ou **e.** $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$ ou **f.** $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$,

então $x = p$ é uma assíntota vertical para f.

III. Assíntota oblíqua

Existe um procedimento para a determinação de existência de uma assíntota oblíqua para $x \to +\infty$ (i. é, se existem $m \neq 0$ e $n \in \mathbb{R}$, tais $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (mx+n)\big) = 0$) que é o seguinte.

Passo 1. Verificar se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$.
Caso exista tal m, ir para o passo seguinte.

Passo 2. Verificar se existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = n$.

Observação: um procedimento análogo deve ser seguido para a verificação de existência de assíntota oblíqua no $-\infty$.

Um Exemplo: Verifique se a função $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ admite assíntotas.

I) Tem assíntota horizontal???

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (verifique!) e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (verifique!), então f não admite assíntotas horizontais (uma vez que nenhum dos limites mencionados, quando x tende a $+\infty$ ou x tende a $-\infty$, são números reais.

II) Tem assíntota vertical???

Observe primeiramente que $x = 0$ não pertence ao domínio de f.
Como $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ (verifique!), então $x = 0$ é uma assíntota vertical.
Como $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$(verifique!), então $x = 0$ é uma assíntota vertical.
Logo, a reta vertical $x = 0$ (eixo y) é uma assíntota vertical para f.

III) Tem assíntota oblíqua???
Passo 1: Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ (verifique!), seja $m = 2$ e vai-se ao passo 2.
Passo 2: Calculando o $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2x^2+1}{x} - 2x)$, obtem-se que:
$\lim_{x\to+\infty} (\frac{2x^2+1}{x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2x^2+1-2x^2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Portanto, tomando $n = 0$, resulta que a reta $y = 2x$ é uma assíntota oblíqua para f.

Pergunta: A função dada no exemplo acima tem também uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$?

Fonte: Ambiente Virtual de Aprendizagem – Cálculo I (2015).

Os demais espaços deste fórum foram dedicados à discussão e resolução das quatro questões da lista, sendo que o professor fez intervenções, por meio de suas postagens, 13 vezes.

3.3.3.3 O Fórum 6

Este sexto fórum foi aberto para que a avaliação sobre Derivada fosse discutida pelos alunos após sua realização presencial. A mensagem de abertura pode ser conferida a seguir.

Figura 17 – Imagem da mensagem de abertura do fórum 6 – Cálculo 1.

Período para participação do Fórum 6: de 25/10 a 30/10.

Nosso objetivo é que a **Segunda Avaliação Presencial** seja discutida por meio desse fórum de discussão. A participação nesse fórum também será avaliada pelo professor e a nota dessa participação irá entrar no cálculo das médias dos alunos.

Fonte: Dados do Ambiente Virtual de Aprendizagem (março de 2015).

Para que essas discussões ocorressem, foram abertos quatro espaços, um contendo a avaliação e os outros três para discutir cada uma das questões propostas. As questões da avaliação podem ser conferidas na Figura 18.

Para a discussão das questões da avaliação, foram abertos três espaços de discussões e o professor esteve presente, por meio de suas postagens, sete vezes.

Figura 18 – Imagem da avaliação sobre Derivada do curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFMS – Turma 13.

Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Licenciatura em Matemática – Modalidade a Distância
Aluno_____________________________ Data: ___/___/2014

Prova 2 de Cálculo 1

Questão 1 – Considere a função $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

a) Calcule a derivada de f.
b) Determine f '(2) e em seguida determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (2, f(2)).
c) Esboce o gráfico de f destacando as raízes, o ponto onde o gráfico corta o eixo y e as coordenadas do vértice.
d) Faça um esboço da reta tangente encontrada na letra b) no gráfico de f do item anterior.

Questão 2 – Para cada função f e para cada x_0,

a) Calcule $f'(x_0)$, onde $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$ e $x_0 = \pi/6$.
b) Calcule $f''(x_0)$, onde $f(x) = \frac{x^2+6x-3}{x-1}$ e $x_0 = 0$.
c) Calcule $f'(x_0)$, onde $f(x) = \cos(2x)$ e $x_0 = \pi/8$.

Questão 3 – Considere $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$ para responder os seguintes itens:

a) Determine f '(x) e f ''(x).
b) Descubra as raízes de f(x), f '(x) e f ''(x).
c) Estude o sinal de f(x), f '(x) e f ''(x).
d) Indique, se existir, os pontos de máximo, mínimo e de inflexão?
e) A função em questão possui assíntota? Qual?
f) Com base nas informações dos itens anteriores esboce o gráfico de f(x).

Pontuação total da prova: **10,0**

Questão 1: A letra a) vale 0,5; a letra b) vale 1,0; as letras c) e d) valem 0,75.

Questão 2: Cada item vale 1,0.

Questão 3: A letra a) vale 1,0; a letra b) vale 0,5; a letra c) vale 0,75; a letra d) vale 0,5; a letra e) vale 0,5 e a letra f) vale 0,75.

Regras de Derivação:
Sejam f e g deriváveis, então as funções f + g, f.g, e f/g são deriváveis e têm-se:

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

Fonte: Ambiente Virtual de Aprendizagem – Cálculo I (2015).

Após organizadas todas as postagens realizadas nestes três fóruns de discussão, fiz uma leitura, juntamente com a primeira conversa, a fim de encontrar indícios do conhecimento do professor ou oportunidades nas quais pudesse focar na segunda conversa que teria com ele. Vale ressaltar que esse trabalho com os dados do AVA, juntamente com a primeira conversa, durou pouco mais de um ano, pelo fato das várias escolhas que tive que fazer durante o caminho. Durante esse processo, continuei estudando os conceitos teóricos envolvidos no MTSK.

> Antes de mais nada, por mais que pareça óbvio, é preciso conhecer bem o assunto, examinar as pesquisas e as reflexões já feitas sobre o tema para então estabelecer um roteiro [de entrevista]. O estudioso precisa estar muito bem preparado antes de abordar o grupo pesquisado, saber o máximo possível e não fazer perguntas desnecessárias cujas respostas poderiam ser encontradas em outras fontes (jornais, revistas, livros, etc). O pesquisador deve ser o maior conhecedor do tema estudado. (GOLDENBERG, 2011, p. 90).

Deparar-se com uma citação dessas é um tanto assustador. Foi assim que me senti diante do fato de termos uma quantidade considerável de informações em mãos e saber que precisava conversar novamente com o participante a fim de aprofundar informações que não tinham ficado muito claras na primeira conversa e nas interações do AVA.

Sabia que seria necessária uma nova conversa com o participante da pesquisa, no entanto, as afirmações “conhecer bem o assunto” e “estar muito bem preparados” pesaram muito, uma vez que o estudo do modelo teórico MTSK ainda estava no início. Além disso, eu também me considerava uma professora de Matemática em início de carreira docente. Esses fatores me levaram a permanecer pouco mais de um ano trabalhando na organização dos dados e na elaboração de um novo roteiro de entrevista. Parafraseando Freire (1995), que afirma que ninguém começa a ser professor de uma hora para outra, compreendo que tornar-se pesquisador não está no resultado, mas no processo que enfrentei ao fazer pesquisa.

Esclarecidos os motivos que tardaram a segunda conversa, passarei a falar mais especificamente sobre ela, que foi realizada no dia 18 de março de 2016, presencialmente, na biblioteca do Horto Florestal, em Campo Grande (MS), com início às 13h e duração de uma hora e vinte cinco minutos.

A segunda conversa teve um caráter diferente da primeira. A classifiquei como qualitativa, sob a perspectiva de Yin (2016), pelo fato de ocorrer de forma conversacional, com um protocolo (roteiro) em mãos, mas sem seguir rigidamente sua sequência. Sob a perspectiva de Alves-Mazzotti (1998), a entrevista foi semiestruturada. Porém sob a perspectiva de Goldenberg (2011), em vez de classificar como aberta, conforme a primeira, classifiquei como projetiva, por utilizarmos algumas interações do AVA e alguns extratos da primeira conversa como recursos para introduzir alguns pontos que gostaria de discutir com o participante. Não utilizei essas interações para direcionar sua resposta, mas sim para tentar compreender em detalhes os processos ocorridos durante as interações no AVA.

Iniciei a conversa abordando um pouco sobre o doutorado e sobre o Estágio no exterior que eu havia feito no ano anterior. O entrevistado manifestou interesse em ingressar no doutorado da UFMS e, inclusive, citou que na semana da entrevista havia conversado com sua orientadora do mestrado, sobre produções futuras que auxiliariam no seu ingresso.

O professor me contou que continuava atuando como professor da rede Municipal de ensino e afirmou que não estava mais atuando na EaD, porque havia tido um corte nos recursos e todas as aulas desta modalidade foram repassadas para os professores do Instituto Federal. Ele me informou que, logo no início, quando essas aulas foram repassadas, ocorreram alguns problemas, pois os novos professores não estavam acostumados com a modalidade. “O pessoal achou que seria igual dar aula para o presencial, mas não é… é diferente! E pelo que ouvi falar, agora a EaD vai se dedicar apenas a cursos de especialização, não mais graduação. Por esse motivo não abriu vestibular, não abriu mais nada” (Professor. UI I - Entrevista 2 – 18/03/2016). Isso ocorreu, segundo ele, não apenas com o curso de Matemática, mas com todos os cursos de graduação da modalidade EaD.

Essa conversa continuou, de maneira fluida, influenciada pelo roteiro que tinha em mãos, que apresentei no Quadro 14, que segue abaixo. Vale ressaltar que, durante a conversa, novas questões foram surgindo tanto da parte da pesquisadora quanto do participante.

Quadro 14 – Roteiro utilizado durante a segunda conversa com o participante da pesquisa:

- A disciplina de Cálculo com foco na Derivada;
- Sequência utilizada;
- Lista de exercícios;
- Relações da Derivada com outros conceitos;
- Recursos utilizados;
- Alunos (dificuldades, estratégias e expectativas);
- Possíveis situações de classe.

Fonte: Elabora pela autora sob influência das informações do AVA (2016).

O roteiro desta segunda conversa foi influenciado, principalmente, pelo conceito de evidências, indícios e oportunidades apresentados em pesquisas sobre o MTSK sobre o qual tratarei na próxima seção.

Como fechamento dessa seção, em que foi apresentado o processo de produção e organização dos dados, trouxe o Quadro 15 que resume as etapas da pesquisa.

Quadro 15 – Etapas da produção dos dados da pesquisa

<table>
<tr><th>Etapa 1</th><th colspan="4">Etapa 2</th><th>Etapa 3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">1ª conversa com o professor</td><td colspan="4">Postagens do Ambiente Virtual de Aprendizagem</td><td rowspan="5">2ª conversa com professor</td></tr>
<tr><th>Fase 1</th><th>Fase 2</th><th colspan="2">Fase 3</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Cópia das interações dos fóruns</td><td rowspan="3">Organização das postagens dos Fóruns</td><td colspan="2">Codificação das postagens</td></tr>
<tr><th>Ação A</th><th>Ação B</th></tr>
<tr><td>Escolha do tema matemático</td><td>Pré-análise</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora (2016).

3.4 Outros aspectos da pesquisa a esclarecer...

O processo de organizar os dados para realizar as análises exigiu “[...] criatividade, disciplina, organização e modéstia [...]” (GOLDENBERG, 2011, p. 13) a fim de apresentar minha interpretação à luz do referencial teórico escolhido.

Realizei uma primeira tentativa de compreensão por meio da pré-análise apenas das interações do fórum 4 (pois os demais fóruns foram adicionados posteriormente) e das informações apresentadas na primeira entrevista, que me ajudou na elaboração da segunda, que tive com o professor. Tanto esse momento de pré-análise quanto as idas e vindas realizadas para analisar e triangular os dados que tinha em mãos foram feitos sob a luz do MTSK, com o objetivo inicial de classificar as falas e postagens do participante de pesquisa em indícios, evidências ou oportunidades de conhecimento, conforme o Quadro 16. Essa classificação é uma característica recorrente em algumas pesquisas que utilizam o MTSK (MORIEL-JUNIOR, 2014; ESCUDERO-ÁVILA, 2015; FLORES-MEDRANO, 2015) e me auxiliou a olhar o conhecimento do professor em detalhes, ressaltando as informações que davam evidências do conhecimento dele e selecionando indícios que davam a oportunidade de seguir indagando (FLORES-MEDRANO, 2015).

Quadro 16 – Significado de evidência, indício e oportunidade dentro do MTSK

Classificação	Significado
Evidência	Quando as informações fornecem elementos suficientes para afirmar sobre o conhecimento do professor.
Indício	Quando as informações levantam suspeitas sobre elementos do conhecimento do professor, porém não são suficientes para inferir sobre tal conhecimento.
Oportunidade	São informações ou ações que permitem continuar explorando sobre o conhecimento do professor.

Fonte: Baseado em Flores-Medrano (2015).

Os indícios e oportunidades encontrados nas informações da primeira conversa e nas interações nos fóruns influenciaram a elaboração do roteiro da segunda conversa. Após sua realização, foi feita a transcrição e os dados passaram a ser analisados a partir das dimensões de análises que apresento a seguir.

3.5 As dimensões de análise

Como apresentado no capítulo anterior, para o MTSK o Conhecimento Especializado é o conhecimento relacionado à Matemática, que o professor usa para/no ensino de Matemática, no caso desta pesquisa, o conteúdo de Derivada. Quando me propus a caracterizar o Conhecimento Especializado de um formador de professores em início de carreira ao ensinar ‘Derivada’ a distância, queria olhar para seu Conhecimento Matemático e para seu Conhecimento Didático. Portanto, é assim que surgem as dimensões de análise dessa investigação, estando diretamente relacionadas aos objetivos da mesma.

A primeira dimensão, chamada de “Conhecimento Matemático”, tem como objetivo *caracterizar o conhecimento matemático do professor.* Para tanto, utilizei as informações disponíveis a fim de caracterizar o conhecimento que o professor revela sobre o tema (KoT) de Derivada, sobre as conexões (KSM) que revela conhecer, bem como, os caminhos que apresenta para se chegar a resultados matemáticos (KPM).

Chamei a segunda dimensão de análise de “Conhecimento Didático do Conteúdo”. A partir dela tenho como objetivo caracterizar o conhecimento que o professor revela sobre a interação do aluno com o conteúdo de Derivada (KFLM), sobre sua atuação, condicionada a este conteúdo (KMT) e sobre os parâmetros de aprendizagem da Derivada (KMLS).

Definidas as dimensões de análise, passei a olhar os dados constituídos com mais atenção. O movimento de análise de dados será discutido na próxima seção.

3.5.1 *O movimento de análise de dados*

Quando foco no MTSK estruturado de forma teórica, tenho um olhar direcionado para: Domínios → Subdomínios → Categorias → Indicadores. Isso é possível devido às diversas pesquisas já realizadas que contribuíram para essa construção teórica.

O foco principal dessa pesquisa, no entanto, não é a construção teórica do MTSK, embora saiba que seus resultados podem trazer contribuições nesse sentido. A proposta, aqui, é a utilização deste modelo teórico como uma lente para analisar os dados produzidos.

Utilizando o MTSK como óculos durante as análises, ao olharmos para os dados tentando enxergar neles os domínios, subdomínios e categorias, estou avaliando o conhecimento que o professor apresenta, fugindo do objetivo principal dessa pesquisa, que não é avaliar, e sim apresentar as características do conhecimento que o professor revela.

Sendo assim, a partir de uma abordagem interpretativa, olhei para os dados constituídos de maneira contrária: Indicadores → Categorias → Subdomínios → Domínios. Desta forma, a partir das informações que tinha em mãos, separei UI potenciais de possibilitar informações sobre o conhecimento do professor. A partir dessas UI, busquei indicadores de conhecimento, relacionei esses indicadores com alguma categoria já estabelecida no MTSK, relacionei os indicadores entre si (triangulação), relacionei essas informações com os subdomínios do MTSK e, assim, constituímos um rol de informações que permitem caracterizar o Conhecimento Especializado que esse professor, em início de carreira, revela ao ensinar ‘Derivada’ à distância.

Encerradas as apresentações sobre os delineamentos da pesquisa, no próximo capítulo passo a apresentar as análises em detalhes.

... NO CAMINHO, MAIS IMPORTA O DURANTE:

AS ANÁLISES

[...]
O caminho muda, e muda o caminhante
É um caminho incerto, não o caminho errado
Eu, caminhante, quero o trajeto terminado
Mas no caminho, mais importa o durante.
[...]
(Trecho “A Partida e o Norte” Estevão Queiroga)

4 UM “DURANTE” CHAMADO ANÁLISE

Neste capítulo apresento a análise dos dados que foram produzidos ao longo do estudo. Como disse no capítulo em que apresento o planejamento da pesquisa (capítulo três), embora o MTSK seja um modelo constituído e apresentado iniciando pelos domínios, seguido dos subdomínios, categorias e indicadores, o movimento de análise ocorreu de forma contrária. A partir das transcrições das conversas e das informações contidas nos Fóruns 4, 5 e 6, passei a buscar informações ou indicadores que pudessem ser relacionados a alguma categoria pertencente a um subdomínio que constitui os domínios de conhecimentos considerados no MTSK. Vale ressaltar que realizei esse movimento de análise com o objetivo de *caracterizar o conhecimento especializado revelado por um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar ‘Derivada’ a distância.*

O que o leitor precisa considerar é que o movimento utilizado nas análises não precisa ser necessariamente o mesmo escolhido para apresentá-las. Sendo assim, embora as análises tenham seguido a ordem que mencionei anteriormente, opto por apresentá-las seguindo a organização dos subdomínios e categorias do MTSK, a fim de contribuir para uma leitura de informações sintetizadas e organizadas.

4.1 O conhecimento matemático da Derivada revelado pelo formador de professores

Como apresento no capítulo 2, o conhecimento matemático que o professor revela é parte de seu conhecimento especializado. Nesta seção apresento informações que revelam o conhecimento do formador sobre: o tema que ele ensinou (KoT), ou seja, a Derivada; a estrutura desse tema (KSM); e a sintaxe matemática a ele relacionada (KPM).

4.1.1 O conhecimento da Derivada como um tema Matemático (KoT) revelado pelo formador

Na primeira entrevista com o professor, não houve muitas revelações no que diz respeito a seu KoT, uma vez que, como dito anteriormente, nesse momento não havia sido decidido que o foco das análises seria o tema de Derivada. No entanto, classifico algumas informações em seu discurso como oportunidades para buscar informações sobre seu conhecimento revelado no que diz respeito a este subdomínio.

O formador, ao falar sobre seu planejamento para a disciplina, compartilhou um pouco de sua experiência como discente de graduação, ressaltando que o ensino foi baseado em técnicas, seguindo a ordem de Limite, Derivada, sem nenhuma justificativa por parte de seu professor.

> [...] ver como a gente poderia iniciar, porque eu percebi que a minha graduação, no início, já foi dada a definição, o que era limite, Derivada e todas aquelas técnicas, *e não existia um porquê* [...]. (Formador. UI 6 - Entrevista 1 – 04/09/2014)

Adiante, ele citou que gostaria de auxiliar seus alunos a desenvolverem um espírito de investigação, de compreender as justificativas e aplicabilidades por trás das técnicas, além, é claro, de aprender a utilizá-las.

> Então, eu quero tentar desenvolver neles um espírito de investigação, de busca, de curiosidades, não apenas de pegar uma técnica, isto é, de derivação e ficar aplicando. Mas de fazer pensar: *por que isso dá certo? Por que isso funciona? Onde eu posso aplicá-lo?* Porque eles vão ser professores futuramente. A ideia é essa, serem professores. Logo, eles devem ter a preocupação de saberem o *porquê existe esse conceito*, no que ele nos ajuda, *onde e como aplicá-lo*. Assim, se eu conseguir desenvolver isso nos alunos, penso que estarei satisfeito como professor. Mas eu quero que eles tenham a aprendizagem ***dessas técnicas*** que vão usar futuramente também. Eis a razão de eu achar que isso pode ser trabalhado aos poucos [...]. (Formador. UI 12 - Entrevista 1 – 04/09/2014)

Continuando a nossa conversa, ele cita que terá que dar uma atenção especial aos seus alunos no que diz respeito a interpretações gráficas e manipulações algébricas, pois, segundo as pesquisas que ele havia estudado, essas eram algumas das dificuldades previstas.

> Têm dificuldades em *interpretação de gráficos*, essas coisas. E aí também, na manipulação dessas *expressões algébricas*. Acho que isso pode ser uma coisa que nós temos que ter um cuidado a mais [...]. (Formador. UI 13 - Entrevista 1 – 04/09/2014)

Embora nenhum desses excertos nos remetem às características do conhecimento especializado do formador, eles são vistos como oportunidade de continuarmos buscando informações que possam revelar o conhecimento do formador sobre os *procedimentos* relacionados à Derivada, aos *fundamentos* que dão sustentação a tal conceito, à *fenomenologia* de forma a descrever a gênese do conceito da Derivada e sua aplicabilidade e, também, sobre seus conhecimentos em relação aos diferentes *registros de representação* da Derivada.

Desta forma, busquei informações nos fóruns do AVA e na segunda entrevista que realizei com o formador, a fim de poder apresentar as análises que faço em forma de narrativa, perpassando por todas as informações e sintetizando aquelas que revelam o conhecimento do formador em cada um dos subdomínios e categorias.

4.1.1.1 Conhecimentos revelados sobre procedimentos relacionados à Derivada

O conhecimento dos procedimentos relacionados à Derivada foi um dos que o formador de professores mais quis que seus alunos desenvolvessem. Isso pode ser conferido ao olhar para as listas de exercícios propostas sobre Derivada e para Avaliação sobre este tema.

Na primeira lista, por exemplo, três dos quatro exercícios propostos foram para que os alunos encontrassem a Derivada (de funções; ou derivada de funções em um ponto) dos mais variados tipos (quadrática, polinomial, modular, trigonométrica, etc). Para tanto, os alunos teriam que utilizar distintos procedimentos (padrões) normalmente utilizados ao ensinar ou aprender o conteúdo de Derivada, entre eles: derivada da Soma, derivada da diferença, regra do produto, regra do quociente, regra da cadeia, etc.

O professor revela seu conhecimento sobre **Regra do Produto** nas seguintes postagens dos fóruns

Ana, lembra que observei esse erro de digitação na nossa aula presencial. (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) é o correto.

(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) é correto Ok? (Formador - 8 out. 2014, 18:40 - F4_E5_ Post. 8).

O formador se refere a uma dúvida da estudante quanto ao teorema 5 (Derivada da Soma) e ao teorema 6 (Regra do Produto) apresentados no livro. Por um equívoco na digitação, ambas as funções utilizadas para exemplificar a diferença entre os dois teoremas se referiam a funções constituídas por soma, sendo que o exemplo do teorema 6 deveria ser uma função constituída por um produto.

Nesse excerto o professor corrige um erro de digitação, apresentando a *Regra do Produto* para derivar a função proposta na lista de exercício. Outra correção em relação à utilização da Regra do Produto, dessa vez em relação ao processo de derivação realizado pela aluna, pode ser conferida no excerto abaixo.

Olá, Ana Flávia!
Item a)
1º você diz que f'(x) = y'.u', mas na verdade é f'(x) = g'(x).y + g(x)y'..., correto?
2º Na penúltima linha de onde surgiu o (-x^3)???
3º Na última linha confira o (-) em (-5x^3)
No mais, está quase tudo certo. Veja a resolução do Alison.
Item b)
1º *no início do f''(x), de onde saiu aquele (.cosx)?*
2º Confira sua penúltima passagem (-cosx....), quando você faz g'(x).f(x)...
Item c) ???? O que você acha???
Item d)
Ocorreu um erro que comprometeu todo o resto... em f'(x).... O que representa cosx.x????
R1: cos x^2
R2: x.cosx
Muito bem, vamos lá... Abraços e bons estudos... (Formador - 23 out. 2014, 17:37 - F5_E3_ Post. 6).

O formador primeiramente corrige um equívoco da aluna ao resolver a letra a do primeiro exercício da segunda lista. A aluna utiliza o procedimento $f'(x) = y'.u'$ quando deveria utilizar a *Regra do Produto* ($f'(x) = g'(x).y + g(x)y'$). Além disso, comete equívocos no processo de resolução, acarretando em um erro de sinal ao apresentar resposta a resolução. Ao realizar tais pontuações o professor revela seus conhecimentos sobre o *procedimento* que deve ser utilizado para derivar tal função e, ao corrigir a resolução da aluna, revela conhecer *como se faz* (manipula) tal procedimento.

Conhecimento semelhante é revelado pelo formador na seguinte postagem:

Nina, tudo bem? Item a. *Sua f(x)=g(x).h(x) onde g(x) = -x³ e h(x) = cos (5x+2) assim f'(x)= g'(x).h(x)+g(x).h'(x)....* Usando um daqueles teoremas. OK? Qualquer dúvida, olhe as resoluções dos colegas. Ana F. e Alison, ou entre em contato Abraços (Formador - 23 out. 2014, 17:40 - F5_E3_ Post. 7).

Nesse excerto o formador chama a atenção da aluna para o fato de ter uma função do tipo f(x)=g(x).h(x) e a ajuda identificar o que são g(x) e h(x). Feitos esses esclarecimentos, ele apresenta a Regra do Produto. A forma como ele explicou permite que seus alunos percebam *como se faz* quando se tem uma função a derivar que é representada por um produto de funções e, ao mesmo tempo, *quando pode ser* utilizado tal teorema. Considerando as postagens apresentadas até o momento, essas são informações que classifico como uma **evidência** do conhecimento do formador sobre o procedimento denominado **Regra do Produto** (*como se faz?*; *quando pode ser feito?*)

Em relação ao excerto apresentado anteriormente (Formador - 23 out. 2014, 17:37 - F5_E3_Post. 6), sobre o item b, o formador também faz uma correção sobre o processo de resolução ao realizar a *segunda derivada* de uma função. Chama atenção para o fato de que um equívoco cometido ao princípio da resolução comprometeu todo o processo. Finaliza questionado a aluna sobre como deve ser representado a relação $\cos x\, x$ e apresenta duas alternativas para que a aluna possa refletir: $cos\, x^2$ ou $xcosx$.

Na segunda conversa que tive com o formador, apresentei a ele a seguinte simulação: “Se o aluno perguntasse a você: ‘*professor, para eu calcular a Derivada eu preciso de uma função, né?! Então, qual seria a Derivada da função* $f(x) = -2x + 4$*. Como eu sei que é possível calcular ou não a Derivada de uma função*?’ O que você responderia a esse aluno?” Ao observar o questionamento e a função o professor relatou o seguinte:

> É que na Derivada *o limite precisa existir*, vamos pensar assim primeiro. Isso que deveria ser considerado, pois *o limite é um fator necessário* e como *aqui não tem um ponto,* efetivamente, daria para calcular. E aí você pergunta como que eu calcularia? Aqui é uma função do primeiro grau no caso ela seria simples para calcular a Derivada, então... [pensou um pouco e escreveu no papel]. Aqui no caso não usaria propriedade nenhuma, e o resultado seria $f'(x) =$ -2. (Formador. UI 26 – Parte 1 – Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

O formador, ao responder à simulação apresentada, revela os seguintes conhecimentos: o cálculo da derivada de uma função pode ser feito quando existir o limite, segundo ele, isso é um fator necessário; para calcular a Derivada, às vezes, é dado um ponto, mas mesmo que não seja dado um ponto, é possível derivar; o cálculo da Derivada de uma função do primeiro grau é algo simples de se fazer e não necessariamente precisa de uma propriedade; a Derivada da função proposta é -2.

Ao solicitar ao formador que justificasse sua resposta, ele relatou o seguinte:

Bom, ele poderia usar, *pois ele tem duas funções*. Poderia calcular a Derivada da soma. Mas aí que 'tá', depende o nível do conhecimento que ele tem. Se ele está com dúvida de calcular a Derivada, se ele quer usar alguma propriedade ou não [precisa verificar]. Porque eu poderia pedir para ele calcular conforme essa propriedade da soma. Então, *calculo a Derivada da primeira mais a Derivada da segunda, que como é uma constante, pela definição e pelas propriedades, a Derivada de uma constante seria zero*. (Formador. UI 27 – Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

O professor sugere que o discente poderia usar a Derivada da soma para resolver a questão proposta, pois ela era composta por duas funções, mas, que isso dependeria do nível de conhecimento do estudante. E então explica como se faz para calcular a derivada por essa propriedade.

Nos últimos dois excertos apresentados, o formador revela seu conhecimento sobre Derivada, ressaltando *quando pode ser feito*, *como se faz*, *porque se faz assim* e *características do resultado*. Todas essas informações são classificadas como **evidência** do conhecimento do formador sobre o cálculo da Derivada de uma função, ou seja, $f'(x)$, sendo também consideradas como **evidências** do conhecimento do formador do procedimento denominado **Derivada da Soma**.

Além disso ele cita que, embora não tenha um ponto, é possível derivar. Assim, nos demonstra *indícios* de seu conhecimento sobre a derivada da função em um ponto, ou seja, $f'(x_0)$.

Sobre Derivada da função em um ponto, existem as seguintes postagens nos espaços de fórum:

Olá, Ana Flávia! Na letra c, *observe que a partir da segunda linha de resolução não é mais h'(x), e sim h'(0),* ok? Bons estudos. (Formador – 7 out. 2014, 13:51 – F4_E4_ Post. 17).

Esta questão 'c' faz parte do terceiro exercício da primeira lista sobre Derivada, cuja proposta do professor era que os alunos *calculassem* $f(x_0)$ de algumas funções dadas a partir dos x_0, também dados. Nesta postagem o professor realiza uma correção no processo de resolução dos alunos. Ação similar pode ser vista no excerto abaixo:

Muito bem Ana Maia, Nina e Wesley... Ana Maia. e Nina... *acho que vocês cometeram um pequeno erro de sinal na letra a*. Em algum momento está escrito x. - cos x e depois esse (-) vira (+)... Abraços! (Formador - 3 nov. 2014, 19:27 - F6_E3_ Post. 12).

Esse exercício a faz parte da segunda questão da avaliação, onde a proposta do professor era que os alunos calculassem $f'(x_0)$ a partir do x_0 indicado no enunciado. Nessa postagem o professor corrige o processo de resolução dos alunos. Embora tal correção seja em relação a um “jogo de sinal” esse é um procedimento matemático que faz parte dos processos de derivações de funções.

Nos últimos dois excertos apresentados o formador revela seu conhecimento sobre *como se faz* para calcular $f'(x_0)$. Embora sejam inferências realizadas a partir de correções, compreende-se que não é possível corrigir um processo de resolução sem o conhecimento de, ao menos, *como se faz.* Sendo assim, essa informação é classificada como uma **evidência** de conhecimento no que se refere ao cálculo de $f'(x_0)$ (*como se faz?*).

Em relação ao conhecimento que o professor revela sobre a segunda derivada, presente no excerto (F5_E3_ Post. 6) apresentado anteriormente, o que podemos inferir a partir das informações é que a correção do professor em relação ao processo de resolução dos estudantes revela seu conhecimento sobre *como fazer*, a partir dos argumentos apresentados anteriormente sobre a ação de corrigir. Sendo assim, classificamos essa informação também como uma **evidência** do conhecimento do professor sobre *como se faz* para calcular a segunda derivada de uma função $f''(x)$.

No mesmo exercício em que se propõe o encontro da segunda derivada de uma função, são apresentadas mais duas questões de derivadas de “alta ordem” ou “ordem superior”, ou seja, a terceira derivada de uma função e a quarta derivada de outra função. Porém, não houve informações que revelassem o conhecimento do formador sobre tais conceitos.

A ação de correção por parte do formador é recorrente nos fóruns de discussão. Ele realiza correções sobre processos de resoluções para encontrar a Equação da Reta tangente.

Muito bem, Ana Flávia. As resoluções para os dois itens (d e e) estão corretos. *No item d tem um (raiz de 2) que não está como (raiz cúbica de 2), mas só uma distração.* Abraços... (Formador – 6 out. 2014, 20:50 – F4_E3_ Post. 41).

Ambas questões (*d* e *e*) diziam respeito a um exercício da primeira lista sobre Derivada em que os alunos teriam que *determinar a equação da reta tangente* (α), baseado nas funções e resoluções do exercício anterior. Nesta postagem, o formador, mais uma vez, corrige o processo de resolução da aluna.

Outra discussão em relação a esse conceito pode ser conferida no excerto abaixo:

Olá Nina tudo bem? Com relação a sua questão, o único problema foi na hora de esboçar a reta tangente... *no mais está tudo ok*... abraços!! (Formador – 3 nov. 2014, 19:09 – F6_E2_ Post. 14).

Nesta postagem o formador afirma que a resolução da aluna estava correta e ressalta um equívoco cometido em relação à representação gráfica.

Nos dois últimos excertos apresentados o formador apresenta uma postura de corrigir um erro cometido no processo de resolução para encontrar a equação da reta tangente e de verificar, em outra questão, que as manipulações estavam corretas, porém, sua representação gráfica não. Essas informações revelam algo sobre o conhecimento do professor quanto ao procedimento utilizado para encontrar a equação da reta tangente, no sentido de saber como se faz. Porém, sente-se a necessidade de mais informações para inferir sobre seu conhecimento em relação a esse procedimento. Sendo assim, classifico tal informação como um ***indício*** de conhecimento no que diz respeito a *como se faz* para encontrar a **equação da reta tangente**. O fato de que o professor identificou que a representação gráfica estava incorreta será discutido na seção 4.1.1.3 deste capítulo.

Sobre a ideia de assíntotas foi possível encontrar algumas informações:

Muito bem Ana. Gráfico item a. O esboço do seu gráfico ficou bom. *Você poderia aproximar mais, a representação da função de sua assintota*, (isso nas pontas...) *entendeu?* Abraços!! (Formador - 26 out. 2014, 11:20 - F5_E4_ Post. 10).

Nesta postagem o formador estava comentando a resolução que a aluna apresentou para a letra a do exercício 2 da última lista de exercício sobre Derivada. Ele orienta a aluna a aproximar a representação da função de sua assíntota. Não foi possível visualizar a resolução da aluna anexada no ambiente. Ao corrigir tal resolução ele revela algo de seu conhecimento sobre assíntota, porém, não o suficiente para inferirmos. Sendo assim, essa informação é classificada como um ***indício*** de conhecimento sobre *como faz* para representar a assíntota de uma função. Ao questionar a aluna se ela havia entendido a observação feita por ele, parece que ele considera a possibilidade de não ter entendido. Essa informação é classificada como um ***indício*** do conhecimento do professor sobre possíveis dificuldades (KFLM) que seus alunos tinham ao aprenderem o conceito de **assíntotas**.

Outra publicação sobre assíntota que o formador faz ao ambiente revela outro conhecimento que será apresentado adiante.

4.1.1.2 Conhecimentos revelados sobre fenomenologia da Derivada

Na primeira entrevista o professor foi questionado sobre o que pretendia ressaltar ao ensinar seus alunos e ele respondeu o seguinte:

> Então, eu quero tentar desenvolver neles um espírito de investigação, de busca de curiosidades [...] não apenas de pegar uma técnica, sei lá, de derivação e ficar aplicando. Mas, de fazer pensar porque que isso dá certo, porque isso funciona, *onde que eu aplico.* Porque eles vão ser professores futuramente. A ideia é essa, ser professores. Então, [eles devem] ter essa preocupação [de saber] *porque que existe esse conceito*, no que ele me ajuda, *onde que eu aplico*. Então, se eu conseguir desenvolver isso nos alunos eu acho que estou satisfeito como professor. Mas, eu quero que eles tenham aprendizagem dessas técnicas que eles vão usar futuramente também, então acho que isso pode ser trabalhado aos poucos [...]. (Formador. UI 13 - Entrevista 1 – 04 set. 2014)

Neste excerto o formador fala da gênese do conceito e de sua aplicabilidade como conhecimentos importantes que os professores precisam buscar saber. Em outro momento, na segunda entrevista, ele cita a disciplina de Física como exemplo de onde o conceito de Derivada pode ser aplicado

> É, de física eu me lembro muito. Lembro que, antigamente, realizava uns macetes. *Quando você deriva a função movimento você tem espaço, não lembro a ordem*. Estuda na física, pois eu lembro de que, quando eu estava fazendo vestibular, uns colegas meus faziam cursinho, e

eu lembro que a “moralzinha” que eles tinham lá, *a resposta era Derivada*. Aí eles *derivavam uma vez, derivavam duas*. Por exemplo, *pegavam uma equação do Segundo Grau que era um movimento, derivavam e eles achavam a velocidade*, uma coisa assim. Depois eles achavam a aceleração. Acho que é isso! Então, eles sabiam fazer, mas se perguntasse o porquê disso, eles não sabiam explicar**,** pois era macete. A explicação matemática seria a Derivada, e eu acho que daí, talvez, no caso poderia ser uma aplicação da Derivada no Ensino Médio. Eu pensava dessa maneira. (Formador. UI 37 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Apesar de mencionar a Física e tentar explicar como seria a aplicabilidade da Derivada, as informações reveladas pelo formador não são suficientes para inferirmos sobre seu conhecimento.

Embora ele cite a importância de tais conhecimentos, nas informações produzidas durante a pesquisa seu conhecimento não foi revelado. Isso não significa, porém, que o professor não o tenha.

4.1.1.3 Conhecimentos revelados sobre os registros de representação da Derivada

Nas listas de exercício e na Avaliação, o formador propôs que seus alunos realizassem a representação gráfica de algumas funções. Durante as discussões nos fóruns foram extraídos alguns excertos que podem revelar algo sobre o conhecimento do professor, conforme é possível visualizar abaixo:

Olá Nina tudo bem? Com relação a sua questão, *o único problema foi na hora de esboçar a reta tangente*... no mais está tudo ok... abraços!! (Formador - 3 nov. 2014, 19:09 - F6_E2_ Post. 14).

Neste momento o professor chama atenção da estudante para o erro cometido na hora de esboçar o gráfico da função e ressalta, posteriormente, afirmando que:

Acho q não me expressei bem... a reta tangente é y=2... A Nina está correta desde a primeira postagem... *só o esboço que estava errado*... Abç (Formador - 4 nov. 2014, 20:26 - F6_E2_ Post. 18).

A correção realizada pelo professor sobre a representação gráfica da reta tangente esboçada de forma errada não é suficiente para inferirmos sobre seu conhecimento quanto aos registros de representação. Porém, essa informação foi vista como **oportunidade** para questioná-lo durante a segunda entrevista. Ao discorrer sobre as “teorias” que ele se utilizou para embasar suas aulas, o formador citou a teoria de Duval, que trata dos Registros de Representação Semiótica:

Bom, a questão de Derivada que nós vimos, basicamente, foi tentar vinculá-la a essa questão de reta tangente. Para isso, nós utilizamos essa *representação geométrica*. Demos também bastante enfoque na *representação algébrica*. Quando estávamos falando de reta tangente, quando nós usamos o limite para definir, então usamos um pouco de *representação tabular*. Então, acho que basicamente foram essas três. Com isso eu acho que pode ter um pouco também da questão da *língua materna*, que é até uma dúvida que eu tenho que tirar com [uma professora do mestrado], se é considerado um registro de representação semiótica. Falarmos em Derivada, talvez dependendo da pergunta, por exemplo, se fôssemos pedir para analisar os pontos críticos da função, talvez essa pergunta fosse uma ideia que poderia estar vinculada, que está vinculado, mas eu não saberia direito te dizer. Mas, basicamente, foram essas três. (Formador. UI 48 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

Nesta fala o professor cita quatro tipos de representação: geométrica, algébrica, tabular e língua materna. Adiante ele cita:

Olha, eu acho que a Teoria das Situações Didáticas sugere que nós temos que propor situações que levem a esta aprendizagem, situações adidáticas. Nós propomos a situação que leve em consideração o que os alunos já têm de conhecimento e, com isso, eles consigam buscar solução para aquele problema. E é nesse sentido, o de construir as situações que favoreçam o desenvolvimento desta aprendizagem e essa *ideia de trabalhar os vários Registros* é para que não façamos cálculo apenas em cima de *linguagem algébrica*. Porque se não pode pensar: “Ah, a Derivada...”, mas *o que seria a representação desta Derivada no gráfico*? O que seria esse movimento das retas no gráfico? Para pegar naquele ponto que toca a *Representação Gráfica* da função. Então, a ideia era que o aluno conseguisse enxergar o conceito que nós estávamos trabalhando em *diferentes registros, tanto na algébrica, no gráfico*, etc. Nós até - eu não vou me recordar agora - mas eu acho que coloquei questões que era para eles interpretarem alguns gráficos. Acho que foi na avaliação. (Formador. UI 57 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

No excerto acima o professor revela informações sobre seu conhecimento. Explica que a ideia de trabalhar vários registros é para não focar apenas na linguagem algébrica e ressalta a importância de seus alunos conseguirem visualizar a Derivada no próprio gráfico. Quando o professor menciona registro geométrico e gráfico, ele está se referindo à mesma coisa.

Apesar de afirmar que sua proposta era trabalhar vários tipos de registros, admite que esse trabalho foi mais comum nas aulas presenciais, pois nos fóruns ele se ateve às listas de exercícios que favoreciam mais a representação algébrica da Derivada.

Então, *nas aulas eu procurei mostrar os vários registros [de representação]*, mas daí nos fóruns eu acabei me focando na lista. *Nela eu usei muita linguagem algébrica* e as respostas também algébricas. *Poucas vezes foram feitas representações gráficas*. E, muito poucas vezes, nós trabalhamos com problemas. Um problema que eu modelasse, saísse uma função, que pudesse derivar ou não. *(*Formador. UI 81 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

Partindo desses excertos, relacionando-os às postagens que evidenciam o conhecimento do formador sobre como se utiliza as propriedades da Derivada (linguagem algébrica) e considerando correções que ele fez de representações gráficas (Formador - 4 nov. 2014, 20:26 - F6_E2_ Post. 18), é possível perceber que o formador revela seu conhecimento sobre diferentes registros de representação. Na entrevista ele cita quatro tipos de registros: algébrico, gráfico (geométrico), tabular e linguagem materna. E, durante as discussões nos fóruns, por meio das correções que ele faz dos processos de resolução dos estudantes, revela seu conhecimento principalmente sobre o **registro algébrico** e **gráfico da Derivada**. Classificamos essas informações como **evidências**.

4.1.1.4 Conhecimentos revelados sobre as propriedades e fundamentos da Derivada

O professor, durante as discussões nos fóruns, revela seu conhecimento sobre algumas propriedades relacionadas à Derivada, porém, os fundamentos de tais propriedades não ficam tão evidentes. Abaixo são apresentados alguns desses momentos:

Sim Wesley... *esse é o único local onde uma curva pode cortar a assíntota*... (Formador - 3 nov. 2014, 19:29 - F6_E4_ Post. 11).

O estudante ao qual o formador se dirige havia apresentado a seguinte dúvida no ambiente sobre a resolução de uma das questões da avaliação:

Oi Ana, tudo bem? A Assíntota horizontal, é o limite quando a função tende ao infinito, calculando o limite da função f(x) $(x+2)/x^2$, tanto para o menos infinito quanto para o mais infinito, temos que y tende a zero, portanto o limite horizontal é zero. *A minha dúvida é se o gráfico da função pode cortar a assíntota horizontal*, pois temos que a raiz da função f é -2, portanto existe $y = 0$, pergunto ao professor e aos colegas, nesta função a assíntota horizontal é realmente zero? E o gráfico pode cortar a assíntota horizontal? (Wesley - 1 nov. 2014, 15:09 - F6_E4_ Post. 5).

Referindo-se à resposta apresentada pelo professor para essa questão, observa-se que o professor revela seu conhecimento sobre uma propriedade da assíntota, em que esse zero é o único local onde a curva pode cortar sua assíntota. Embora neste excerto o formador não revela seu conhecimento sobre o fundamento que sustenta tal propriedade, essa informação é classificada como **evidência** do conhecimento sobre uma **propriedade** da **assíntota**.

Outro momento em que o formador revela parte de seu conhecimento sobre algumas propriedades presentes ao estudar Derivada é no excerto abaixo:

Boa noite, Ana F. O estudo de Sinal da letra b está correto? Pontos críticos (máximo e mínimo) $f'(x)=0$
Se $f'(x)=0$ e $f''(x)>0$ então x é ponto de mínimo local,
Se $f'(x)=0$ e $f''(x)<0$ então x é ponto de máximo local,
Ponto de Inflexão:
Se $f''(x)=0$ então x é ponto de inflexão... Abraços e boa noite!!! (Formador - 27 out. 2014, 22:47 - F5_E4_ Post. 18).

Ele apresenta a propriedade que comprova quando x pode ser considerado ponto mínimo, máximo ou ponto de inflexão, revelando assim seu conhecimento sobre propriedades desses conceitos. Essas informações, embora não revelem o conhecimento do formador sobre os fundamentos de tais propriedades, são classificadas como **evidência** do conhecimento do professor sobre **propriedades** de **máximos**, **mínimos** e **ponto de inflexão**.

Outro momento que revela informações sobre o conhecimento do professor é no excerto abaixo:

Olá W, com relação a sua argumentação para o item e, acredito que *sua argumentação seja suficiente*. E os colegas compreenderam a resolução? (3 out. 2014, 17:00 - F4_E2_ Post. 45).

O professor se referia aqui a seguinte publicação do aluno Wesley:

Olá professora, fiz uma correção na letra e, pude concluir que, *como as Derivadas laterais são diferentes, não existe Derivada quando $x = -1$*. peço por gentileza que de uma verificada, se a observação que fiz no anexo é suficiente para eu chegar a esta conclusão. (2 out. 2014, 21:32 - F4_E2_ Post. 43).

Figura 19 - Resolução do aluno Wesley a letra e do primeiro exercício da lista 3

e) f(x) = $|x+1|$ em $x_0 = -1$

f(x) = $|x+1|$ $\qquad \begin{cases} x+1 & se\ x \geq -1 \\ -x-1 & se\ x < -1 \end{cases}$

f'(x) = $\qquad \begin{cases} 1, & se\ x \geq -1 \\ -1, & se\ x < -1 \end{cases}$

Como esta função tem um caso particular, pois seu gráfico forma um "bico" quando x=-1, e ao observar que as derivadas de f(x) = $|x+1|$, são diferentes para valores próximos ao -1, podemos concluir que não existe derivada quando x = -1.

Fonte: AVA – Cálculo I (2015).

O formador, ao afirmar que a argumentação do aluno é suficiente, demonstra conhecer uma condição para a existência da Derivada de uma função, revelando seu conhecimento sobre um dos atributos para a não existência de Derivada.

Quando o formador foi questionado sobre essa informação na segunda conversa, ele relatou:

> Pelo que a gente discutiu lá [no fórum], a *Derivada existiria em um ponto se as Derivadas laterais daquele ponto fossem iguais*. E aí ele concluiu que eram diferentes. A gente havia discutido isso em aula, não me lembro se foi na presencial ou se foi na web, então, ele usou o que a gente havia argumentado pra dizer se sim ou não. Esse "suficiente" que eu falei foi em relação ao conceito, porque *a Derivada em um ponto, ela vai existir se as Derivadas laterais forem iguais*. E aí é como ele comentou aqui. (Formador. UI 37 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016 – Grifo nosso)

Nesse excerto observamos que o professor revela seu conhecimento sobre uma **condição para existência ou não da Derivada em um ponto**. A relação dessas informações é considerada como uma **evidência** do conhecimento do professor sobre a propriedade que define que a **Derivada da função em um ponto** vai existir quando as Derivadas laterais forem iguais.

Outro momento em que o professor apresenta algumas propriedades da Derivada é na avaliação, quando disponibiliza as seguintes regras de Derivação:

Figura 20 – Propriedades da Derivada apresentadas pelo professor na Avaliação

Regras de Derivação:

Sejam f e g deriváveis, então as funções f + g, f.g, e f/g são deriváveis e têm-se:

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \,.\, g(x))' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

Fonte: AVA – Cálculo I (2015).

A apresentação de tais propriedades da Derivada em si não revela nada sobre o conhecimento do formador, pois apenas as cita como um “suporte” para auxiliar seus alunos na hora de resolverem a avaliação. Porém, quando essa informação é relacionada às que são analisadas na seção 4.1.1.1, onde fica evidente o conhecimento do professor sobre os procedimentos para derivar funções de distintas naturezas, pode-se inferir que o conhecimento do professor fica **evidente**.

Vale ressaltar que propriedades se referem às características específicas do tema que está sendo estudado. É o conjunto de propriedades que permite chegar à definição do tema (ESCUDERO-ÁVILA, 2015). Características comuns levam à elaboração de procedimentos feitos com propósito de serem úteis e otimizar a resolução de situações. No entanto, o conhecimento das propriedades e dos procedimentos não necessariamente estão relacionados ao conhecimento de seus fundamentos.

Pelas informações apresentadas até agora (desde a seção 4.1.1.1) é possível inferir que o professor conhece as propriedades e procedimentos relacionados: a **derivada da soma**, a **derivada do produto**, a **derivada do quociente**, a **derivada de uma constante,** porém, os conhecimentos do formador sobre os fundamentos de tais propriedades não são revelados.

4.1.2 O conhecimento da Derivada a partir de sua estrutura Matemática (KSM) revelada pelo formador

Como dito anteriormente, o KSM se refere ao conhecimento do professor (formador) sobre as conexões existentes dentro da Matemática. Essas contemplam as relações entre os conteúdos estudados anteriormente e a Derivada (conexão de simplificação); as relações entre a Derivada e conteúdos que serão estudados posteriormente (conexões de complexificação); relações comuns entre conteúdos distintos (conexões transversais); e entre conteúdos que não se relacionam, mas que servem como auxiliares (conexões auxiliares).

A partir dos instrumentos utilizados para a produção dos dados, são encontradas informações que revelam o conhecimento do formador.

Logo na primeira entrevista, enquanto o formador relatava sobre como ele havia preparado a disciplina ele citou:

> [...] E eu fui buscar pesquisas que falam sobre o ensino de *cálculo até lá no Ensino Médio*, pois o cálculo está presente desde o *Ensino Fundamental*. Aí já dá para se ter uma ideia dele no Ensino Médio depois. [...] ver como a gente poderia iniciar, porque eu percebi que a minha graduação, no início, já foi dada a definição, o que era limite, Derivada e todas aquelas técnicas, e não existia um porquê. Exemplo, *onde que aparece o cálculo no Ensino Médio? Onde que aparece o Cálculo no Ensino Fundamental? E quais são as ideias que estão presentes lá?* [...] (Formador. UI 6 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Neste excerto o formador revela achar importante considerar a relação entre conceitos estudados no Ensino Superior, dentre eles a Derivada, e conceitos do Ensino Fundamental e Médio. Porém, não deixa explícito quais seriam essas relações.

Ainda na primeira entrevista, o formador discorre sobre a pesquisa que desenvolveu durante o mestrado que:

> Foi sobre o *ensino e a aprendizagem do conceito de função* por alunos do nono ano do Ensino Fundamental. (Professor. UI 5 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Ao explicitar como foi a experiência de ter ensinado Derivada a distância ele relatou:

> Olha, eu tive bastante tempo para preparar as aulas. O pessoal tinha me passado, com bastante antecedência, que eu iria ser o professor, então eu tive tempo para prepará-las. *Como envolve o conceito de função*, e pelo fato de já haver trabalhado isso na minha pesquisa, então isso ajudou bastante. Assim eu tentei trabalhar bastante essa ideia de várias representações. Nas aulas e nas atividades, eu buscava atingir isso: Propor várias atividades que eles pudessem transitar nesses registros. (Formador. UI 6 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

O formador cita haver uma relação entre sua pesquisa, que foi sobre função, e a derivada, porém, não revela seu conhecimento de quais relações seriam. Adiante, nesta segunda conversa, ele foi questionado sobre quais seriam essas relações do ensino da Derivada com o que é ensinado na Educação Básica, e ele então citou:

As *funções*, os *conjuntos numéricos* que eles estudam, a questão de *Reta numérica*, coisas que nós acabamos não comentando, mas é o cálculo de área. Essa ideia de aproximações, de infinito que é muito importante. Porque, às vezes, fala: Ah, tem muito! Mas muito quanto? São *noções de infinito*. O fato de você tentar chegar tão próximo de uma coisa quanto você queira, chegar tão perto do zero, tão perto do número 1. Essas ideias de *proximidade*. (Formador. UI 31 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Ele menciona funções, conjuntos numéricos, reta numérica, noções de infinito e de proximidade, mas não revela conhecimento sobre como seriam essas relações. Essas informações reveladas não são suficientes para se apresentar uma inferência sobre o conhecimento do professor, sendo assim, são classificadas como ***indícios*** de conhecimento sobre ***conexões de simplificação***.

No que se refere às relações da Derivada com conteúdos que seriam estudados posteriormente (*conexões de complexificação*), também foram encontradas informações durante as entrevistas. Quando o professor foi questionado, por exemplo, sobre a relação existente entre o Cálculo I (que abordava Limite e Derivada) com a disciplina que seria oferecida em seguida, denominada de Cálculo II (que abordava o conteúdo de integral) ele relatou o seguinte:

Eu percebi que *eles podem utilizar bastante esses conceitos depois*, pois o Cálculo deles tratava de Derivada de ordens superiores, no próximo Cálculo deles, talvez, [eles irão utilizar] *as ideias das propriedades*: a Derivada de produto de funções, de Regra da Cadeia, essas coisas. Talvez, isso [o que foi estudado em Cálculo I] *seria essencial para eles futuramente.* (Formador. UI 32 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

O formador cita que na próxima disciplina (Cálculo II) os alunos iriam estudar as propriedades da Derivada, e que os conceitos que ele abordou em Cálculo I eram essenciais para os estudos futuros.

Caraca! Olha, a *Derivada nos auxilia a entendermos* alguns conceitos que estudamos. Por exemplo, a *Reta Tangente*, uma coisa ajuda outra. Uma motivação e, também, uma contextualização da própria matemática, vamos pensar assim. Entretanto a pergunta: “Por que precisa estudar Derivada?” Porque também, depois, *quando vamos estudar Integral*, uma coisa puxa a outra. *Conceitos evolutivos*, vamos pensar assim, não porque precisa ser um depois do outro, mas *na ordem de conceitos*, nós podemos colocar a integral depois. Integral é para cálculo de área. E o que alguém precisa para calcular a integral? *Uma explicação é a Derivada*. (Formador. UI 35 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Para o formador, a relação existente entre a Derivada e a Integral é que para o cálculo de integral, uma das explicações é a Derivada. O formador revela acreditar nessa relação, mas não revela quais e como seriam. Sendo assim, essas informações são classificadas como ***indícios*** do conhecimento do professor sobre **conexões de complexificação**.

No que se refere ao conhecimento do professor sobre as *conexões transversais* relacionadas à Derivada, a única informação que encontramos é sobre a ideia de Limite, quando ele afirma que:

[...] *essa ideia de limite está ligada à Derivada e integral* [...] (Professor. UI 24 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

O formador considera o conceito de limite como algo que perpassa o estudo de Derivada e integral. Ele também não revela seu conhecimento sobre como seria essa relação, desta forma, essa informação é classificada como um ***indício*** de conhecimento do formador sobre ***conexões transversais****.* No que se refere às conexões auxiliares, as informações disponíveis não foram suficientes para revelar o conhecimento do formador.

Embora nem sempre fique evidente o conhecimento do professor sobre as conexões, fica perceptível seu conhecimento sobre a importância das conexões:

[...] eu percebi que a minha graduação no início já foi dada a definição, o que era limite, Derivada e todas aquelas técnicas e *não existia um porque, tipo, onde que aparece o cálculo no Ensino Médio? Onde que aparece o Cálculo no Ensino Fundamental?* E quais são as ideias que estão presentes lá? [...] (Professor. UI 7 – Parte 2 - Entrevista 1 – 04 set. 2014)

Essa é uma das características do conhecimento do formador. Embora nem sempre revele informações suficientes para que se descreva as particularidades de seu conhecimento sobre as conexões, em seu discurso esses conhecimentos são considerados importantes.

4.1.3 O conhecimento da Derivada como prática Matemática (KPM) revelada pelo formador

Como ressaltado no capítulo 2, o KPM é um subdomínio que considera o conhecimento do professor sobre como “fazer matemática”, onde ele ressalta o “caminho” a se trilhar para estabelecer conexões, validar demonstrações, gerar definições, etc.

Um dos momentos em que considero que o professor revelou uma tentativa de levar seus alunos a validar seus conhecimentos sobre a definição de função composta, foi após corrigir algumas questões resolvidas no fórum 4.

Olá, Wesley! Com relação ao item c, sua ideia e partes da resolução estão corretas. No entanto, certifique-se sobre os sinais entre g'(x).h(x) e g(x).h'(x) na primeira linha de sua resolução. Ana e Wesley, pesquisem um pouco mais sobre -, pode ser na internet ou em livros do ensino médio e traga aqui para discutirmos (não esqueçam da fonte). Assim podemos discutir *se o produto de duas funções (f(x).g(x)) e a razão ou divisão de duas funções (f(x)/g(x)) podem ser chamados de* ***funções compostas.*** Sugiro que assistam aos vídeos que tratam de função composta, se não me engano, descrevi como aplicação da regra da cadeia... Abraços!!! (Formador - 8 out. 2014, 18:54 - F4_E5_ Post. 9).

Neste excerto, o professor questiona seus alunos "se o produto de duas funções (f(x).g(x)) e a razão ou divisão de duas funções (f(x)/g(x)) podem ser chamados de **funções compostas.**" Caso o professor continuasse fomentando a participação dos alunos a fim de que fossem (re)construindo coletivamente uma definição de função composta, poderia ter revelado mais informações que pudessem ser alocadas em KPM.

Sendo assim, na segunda conversa que tivemos, uma das questões esteve relacionada a essa publicação, na tentativa de que o professor revelasse algo a mais sobre o conhecimento dos passos para demonstrar ou validar uma definição, e ele respondeu o seguinte:

Bom, se eu pensar uma função composta, se eu pensar: *eu tenho uma função maior que outra coisa, eu tenho sempre uma função maior e uma função menor*. Uma depende da outra. Isso é o que eu sempre tentava falar lá para eles (se refere às interações no AVA e às aulas presenciais). Mas, aí, eu acho que *por essa definição, qualquer soma e qualquer produto seria uma função composta,* se eu pensar em uma depender da outra né?! Entretanto eu sempre tentava falar que eu tinha uma função maior e que esta função maior dependia de outra. "Tipo", igual a Seno de x ao quadrado, que nós trabalhamos. Então, *tem a função Seno*, e daí nós *definimos a questão de domínio, que o domínio dessa, na realidade, depende do contradomínio de x ao quadrado*. Ou seja, *o domínio de Seno depende do contradomínio de X ao quadrado. Então eu tenho a função f que é o x ao quadrado*, então *ela tem o domínio e o contradomínio dela [se referindo a $f(x) = x^2$]*. E *o contradomínio que seria o domínio dessa [o contradomínio da função x^2 seria o domínio da função Sen]*. ***Contudo eu senti dificuldade***. Tive dificuldade em explicar melhor para eles o que seria. Eu tentava explicar sempre pela definição do que tínhamos discutido. Para ver a diferença mesmo. (Formador. UI 67 - Entrevista 2 – 18/03/2016)

Neste excerto o professor revela sua tentativa de construir uma definição para função composta. Ele afirma que uma função é composta **quando** "*eu tenho uma função maior que outra coisa, eu tenho sempre uma função maior e uma função menor".*

Justifica dizendo que *"Uma depende da outra"*, mas se conscientiza de que se ele pensar nessa relação de dependência "*por essa definição, qualquer soma e qualquer produto seria uma função composta*". Em seguida ele apresenta o seguinte exemplo: $f(x) = senx^2$. E vai fazendo as seguintes pontuações:

- *tem a função Seno;*
- *definimos a questão de domínio, que o domínio dessa, na realidade, depende do contradomínio de x ao quadrado (o domínio de Seno depende do contradomínio de X ao quadrado);*
- *tenho a função f que é o x ao quadrado;*
- *ela tem o domínio e o contradomínio dela [se referindo a $f(x) = x^2$];*
- *o contradomínio que seria o domínio dessa [o contradomínio da função x^2 seria o domínio da função Sen].*

Embora o formador tente descrever o caminho que utiliza para definir a função composta, ele acaba apresentando apenas o que ele considera função composta, não deixando tão claros os caminhos que, segundo ele, devem ser percorridos para se construir uma definição. Ele revela seu conhecimento sobre sua definição para função composta, porém, esse conhecimento já é considerado em KoT. Ao final, admite que sentiu dificuldades de explicar essa ideia para os alunos. Contudo, apesar de não ser possível analisar tal conhecimento sob a perspectiva das categorias recentemente elaboradas para KPM, infere-se que este é o conhecimento que o professor revela sobre a *prática* Matemática. Por considerar que seriam necessárias mais informações a fim de caracterizar o KPM do formador, classifico estas como **indícios** de **KPM** sobre **função composta**.

Vale ressaltar o risco que o investigador corre ao confundir o conhecimento do professor sobre definições (KoT) com o conhecimento do professor sobre os caminhos para se chegar em uma definição (KPM). Embora sejam informações complementares e relacionadas, por fazerem parte do conhecimento especializado, tratam-se de conhecimentos distintos.

A seguir, serão apresentados os conhecimentos didáticos revelados pelo formador nas interações dos fóruns e entrevistas.

4.2 O conhecimento didático da Derivada revelado pelo formador de professores

As informações relacionadas a este domínio de conhecimento têm como objetivo descrever como o professor relaciona o conteúdo de Derivada aos processos de ensino e aprendizagem.

4.2.1 O conhecimento da Derivada como um tema Matemático a ser aprendido (KFLM) revelado pelo formador

Conforme apresentado no capítulo 2, os conhecimentos considerados como parte desse subdomínio, se referem aqueles que consideram um tema matemático como algo a ser aprendido. Ao olhar para os dados produzidos, foi possível observar algumas características que são descritas a seguir.

4.2.1.1 Conhecimentos revelados sobre Teorias de Ensino e Aprendizagem (KFLM e KMT)

Durante a segunda entrevista, o formador em alguns momentos citou teorias de ensino e aprendizagem como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a de Registros de Representação Semiótica (RRS). Ele afirmou que durante suas aulas as utilizou, como pode ser conferido no excerto abaixo.

Eu acabei usando as que eu tinha estudado no mestrado que é a *TSD (teoria das situações didáticas)* e a dos *registros de representação semiótica*. (Formador. UI 47 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Além disso, explica como vê tais teorias

Olha, eu acho que a TSD *sugere que nós temos que propor situações que levem a esta aprendizagem, situações adidáticas*. Nós propomos a situação que leve em consideração o que os alunos já têm de conhecimento e, com isso, eles consigam buscar solução para aquele problema. E é nesse sentido, o de construir as situações que favoreçam o desenvolvimento desta aprendizagem e essa *ideia de trabalhar os vários Registros* e para que não façamos cálculo apenas em cima de linguagem algébrica. Porque se não pode pensar: “Ah, a Derivada...”, mas *o que seria a representação desta Derivada no gráfico? O que seria esse movimento das retas no gráfico*? Para pegar naquele ponto que toca a *Representação Gráfica* da função. Então, *a ideia era que o aluno conseguisse enxergar o conceito que nós estávamos* *trabalhando em diferentes registros*, tanto na *algébrica*, no *gráfico*, etc. Nós até, eu não vou me recordar agora, mas eu acho que coloquei questões que era para eles interpretarem alguns gráficos. Acho que foi na avaliação. (Formador. UI 57 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Segundo o formador, a TSD e RRS foram as duas teorias que permearam os processos de ensino e de aprendizagem de seus alunos em relação à Derivada. Ele considera as situações propostas aos alunos como adidáticas, onde pode mediar uma aprendizagem baseada em diferentes registros, como o algébrico e o gráfico, de forma que seus alunos conseguissem relacionar a derivada, apresentada de forma algébrica, com sua representação no gráfico, a fim de que o aluno fosse capaz de compreender o conceito a partir de diferentes registros.

A utilização de diferentes registros (geométrico/gráfico, algébrico, língua materna) foi possível de ser acompanhada nas discussões do fórum, e ao citar quais utilizou, em uma das perguntas da segunda conversa, relatou:

Bom, a *questão de Derivada que nós vimos, basicamente, foi tentar vincula-la a essa questão de reta tangente*. Para isso, nós utilizamos essa *representação geométrica*. Demos também bastante enfoque na *representação algébrica*. Quando estávamos falando de reta tangente, quando nós usamos o limite para definir, então usamos um pouco de *representação tabular*. Então, acho que basicamente foram essas três. Com isso eu acho que pode ter um pouco também da questão da *língua materna*, que é até uma dúvida que eu tenho que tirar com [uma professora do mestrado], se é considerado um registro de representação semiótica [...]. (Formador. UI 48 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

Sendo assim, por meio das informações apresentadas nesta cessão, é possível inferir que o formador revelou seu conhecimento sobre duas teorias formais que caracteriza parte de seu conhecimento considerado em KFLM e em KMT. O conhecimento da **Teoria das Situações Didáticas** e dos **Registros de Representação Semiótica** permitiu que elaborasse uma "teoria pessoal" onde as "situações adidáticas" foram propostas por meio das atividades presentes nas listas de exercícios que valorizaram os registros algébrico, geométrico/gráfico e língua materna. Por meio das informações dos fóruns não foi possível ter acesso a grande parte da "teoria pessoal" utilizada pelo professor, porém, a partir do que ele revelou, classifico tais informações como **evidência** de seu conhecimento.

4.2.1.2 Conhecimentos revelados sobre Facilitadores e Fragilizadores para a aprendizagem de Derivada

Essa foi uma das categorias do subdomínio KFLM sobre a qual o formador mais revelou informações de seu conhecimento, talvez por ser uma preocupação que ele transpareceu desde a primeira conversa, como pode ser conferido nos excertos abaixo.

E eu fui buscar pesquisas que falam sobre o ensino de cálculo até lá no Ensino Médio, pois o cálculo está presente desde o Ensino Fundamental. Aí já dá para se ter uma ideia dele no Ensino Médio depois. Daí eu *fui olhar as dificuldades que os alunos enfrentavam,* quais eram as estratégias de superação, e fui buscar mais ou menos as ideias para trabalhar com eles. (Formador. UI 6 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

No momento em que começou a se preparar para as aulas, uma de suas preocupações foi buscar pesquisas que retratassem as possíveis dificuldades que os discentes poderiam enfrentar ao estudar tal conceito. Porém, embora cite as dificuldades, essas informações são classificadas apenas como oportunidades para buscar mais informações nas quais o professor revela seu conhecimento sobre as dificuldades relacionadas a Derivada.

Essa oportunidade foi explorada ainda nesta primeira conversa, quando foi pedido para que o formador citasse quais dificuldades haviam sido citadas nas pesquisas. Ele relatou o seguinte:

Então, pelas pesquisas que eu vi, parece que eles têm dificuldades em conceitos básicos, *na questão de ser função, o que é uma função*? Têm dificuldades em *interpretação de gráficos*, essas coisas. E aí também, na *manipulação dessas expressões algébricas*. Acho que isso pode ser uma coisa que nós temos que ter um cuidado a mais.

Baseado nas pesquisas que havia estudado, as dificuldades que ele cita são: compreensão de função; interpretação gráfica; e manipulação de expressões algébricas.

Ao olhar para as discussões dos fóruns, em alguns momentos é possível ver alguns questionamentos do professor que são indícios de seu conhecimento de dificuldades dos alunos:

Muito bem Ana. Gráfico item a. O esboço do seu gráfico ficou bom. Você poderia aproximar mais, a representação da função de sua assintota, (isso nas pontas...) *entendeu?* Abraços!! (Formador - 26 out. 2014, 11:20 - F5_E4_ Post. 10).

Ao questionar a aluna se ela havia entendido a observação feita por ele, parece que ele considera a possibilidade de que ela não tenha entendido. Essa informação é classificada como um ***indício*** do conhecimento do professor sobre possíveis dificuldades (KFLM) que seus alunos tinham ao aprender o conceito de **assíntotas**.

Outros indícios de conhecimento das dificuldades de aprendizagem dos alunos podem ser acompanhados nas postagens abaixo.

Olá, muito bem... acredito que vocês estão compreendendo alguns conceitos de cálculo e os utilizando bem. Pergunta... *quais os critérios para (x) ser máximo ou mínimo? E qual o critério para (x) ser de inflexão???* Abraços (Formador - 3 nov. 2014, 19:37 - F6_E4_ Post. 13).

No excerto acima, quando o professor questiona quais os critérios que definem o que é **máximo**, **mínimo** e **ponto de inflexão**, dá ***indícios*** de seu conhecimento sobre dificuldades que os alunos têm em diferenciar esses conceitos.

No excerto abaixo, o professor pergunta ao aluno sobre suas dúvidas em relação à função composta e o questiona se a função apresentada no item c pode ser considerada uma função composta. Nesse questionamento o professor dá ***indícios*** de conhecer a dificuldade de seu aluno em diferenciar **função composta** de outras funções.

Boa Noite, Wesley! Qual a sua dúvida sobre funções compostas? *No item c podemos considerá-la como uma função composta?* (Formador - 6 out. 2014, 21:35 - F4_E4_ Post. 15).

Ao realizar a segunda entrevista com o professor, um dos pontos que conversamos foi em relação às dificuldades que seus alunos haviam enfrentando, a fim de buscar mais informações para que o formador pudesse revelar seu conhecimento. Ele relatou o seguinte:

Eles tiveram *bastantes dificuldades em* ***enxergar*** *o que era função composta*, e é nesse fórum que eles acabam tendo dúvidas. Acho que porque é muito novo e talvez o tempo de aprendizagem deles ali não é suficiente. Talvez eles adquiram e vão tendo algumas ideias ali e, conforme vão evoluindo no curso, vão aprendendo. Eu acredito que sim. Nós, como professores, normalmente aplicamos, mas eu vi que eles tiveram bastantes dificuldades. Eu podia ter melhorado um pouco mais essa ideia de tratar o que é uma função composta... Mas também ali, talvez, não fosse o momento de falar tudo. (Formador. UI 33 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Neste excerto o formador cita que seus alunos tiveram dificuldades em identificar o que era função composta, admite que poderia ter melhorado sua explicação e, adiante, revela ter tido dificuldade em explicar esse conceito.

> [...] contudo eu senti dificuldade. *Tive dificuldade em explicar melhor para eles o que seria*. Eu tentava explicar sempre pela definição do que tínhamos discutido. Para ver a diferença mesmo. (Formador. UI 67 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Embora o professor cite a dificuldade que seus alunos enfrentaram ao se depararem com esse conceito, ele não revela informações sobre se essas dificuldades fragilizaram a aprendizagem do conceito de Derivada. Sendo assim, essas informações serão classificadas como ***indício*** do conhecimento do professor sobre dificuldades com a **função composta**.

Houve, além desses, ainda outros dois momentos na segunda conversa em que o professor citou dificuldades que percebeu terem sido enfrentadas por seus alunos:

> É igual nós acabamos de conversar, essa questão de modo de *trabalho algébrico é uma coisa que eles têm bastante dificuldade.* E, aí também, nós conseguimos identificar algumas e saber se *é dificuldade mesmo ou somente momentânea*. Pode ser que seja momentânea a partir de uma coisa nova, mas para concluir, tem que ser olhado com mais calma. Se eu fosse ministrar várias vezes essa disciplina, eu acho que teria que se dedicar mais, a como, talvez, ajudar eles a superarem essas dificuldades. (Formador. UI 64 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Neste excerto o professor revela que seus alunos tiveram bastante dificuldades com o trabalho **algébrico**. Além disso, ele apresenta uma diferenciação entre **dificuldade momentânea** e **dificuldades**. Segundo ele, a dificuldade momentânea surge a partir do momento que o aluno se deparar com algo novo.

Em seguida, ele cita novamente:

> Sim, ela tinha dificuldades em saber quando deveria agrupar ou não. Na realidade, não só ela, mas outros também. Tudo isso diz respeito às *manipulações algébricas*. Outra dificuldade também foi na *interpretação de gráficos*, que é uma dificuldade, porque eles não têm conhecimento de outras representações. [...] acho que nas listas que eu propus, ficou faltando explorar mais isso. Eu acho que ficou faltando isso. (Formador. UI 65 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

O formador cita que seus alunos tiveram dificuldades nas manipulações algébricas e na interpretação gráfica e revela que sente que deveria ter explorado um pouco mais isso nas listas de exercícios.

Conforme foi apresentado durante toda essa seção, o formador demonstra estar ciente de dificuldades que os alunos possam vir a enfrentar ao aprender Derivada. Esses conhecimentos revelados, porém, serão classificados como ***indícios***, pois não foram encontradas informações em que o professor revelasse como tais dificuldades puderam fragilizar a aprendizagem da Derivada (ESCUDERO-ÁVILA, 2015).

Pela atuação do formador durante as discussões nos fóruns e também pelas declarações que deu em nossas conversas, percebeu-se que a Teoria das Situações Didáticas e Registro de Representação Semiótica, assumidas como teorias que foram utilizadas durante as aulas, foram consideradas por ele como facilitadores da aprendizagem de Derivada, condizendo com o que Asiala et al. (2001) defende, quando afirma que a teoria escolhida pode agir como um facilitador da aprendizagem de um conteúdo matemático.

4.2.1.3 Conhecimentos revelados sobre formas de interação do estudante com o conteúdo Matemático

Ao observar as listas de exercícios propostas pelo formador, tem-se a ideia de que o aluno que estudaria o conteúdo de Derivada realizaria uma interação com o conteúdo de forma mais algébrica. Isso pode ser considerado como um ***indício*** do conhecimento do professor sobre **formas de interação do estudante com o conteúdo** matemático ou simplesmente uma forma como o formador optou por ensinar o conteúdo. Lembrando o que foi dito no capítulo teórico, a forma como o aluno interage com o tópico que aprende está diretamente ligada com a maneira como o professor opta por ensiná-lo.

O formador constatou que seus estudantes normalmente, quando apresentavam dificuldades de simplificar as respostas, é por que tinham dificuldades:

Talvez de entender que isso aqui é o produto das raízes de uma equação do segundo grau. Porque eles acham que é outra coisa, *não tentam fazer de outra maneira*. A gente teve momentos que alguns alunos usaram a simplificação. Quando eles já tinham montado polinômio e poderia agrupar, vamos pensar assim. Mas eu acho que tiveram alguns que viram questões desse tipo e pegaram a equação do segundo grau que foi mais fácil de resolver, assim, não resolveram pela propriedade. (Professor. UI 56 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Segundo o formador, seus alunos tinham a tendência de não fazer de maneira diferente daquilo que estavam habituados. Embora sejam necessárias mais informações onde o formador revele seu conhecimento sobre tais formas de interações de seus alunos com o conteúdo, por meio dessas é possível inferir que o conhecimento que ele revela, ressalta uma tendência dos alunos **seguirem uma rotina para apresentarem respostas** às derivadas de funções. Essas informações são classificadas como ***indícios*** do conhecimento do formador.

4.2.1.4 Conhecimentos revelados sobre principais interesses e expectativa dos estudantes

Na segunda entrevista, o professor foi questionado sobre as expectativas de seus alunos em relação a aprender o conteúdo de Derivada, e ele citou o seguinte:

Olha, eu acho que *eles tinham um pouco de receio*. Eles falaram que eles achavam uma disciplina importante, tinham vários Cálculos, essa questão de Limite. Acho que é o que todos nós temos! Quando começa a fazer Matemática pensa: Ah, vou estudar Cálculo, Limite, essas coisas. Mas, aí com essa ideia de intuição que a gente trabalhou no começo, eles conseguiam aplicar os conhecimentos que eles já tinham. Então, *depois viram que não era "lá grande coisa assim"*. Até as descobertas de Reta Tangente, aquelas regrinhas que eles estudavam lá no ensino Médio, fórmula para calcular Reta Tangente e depois só entendendo o que era o coeficiente. E aí, eu, com a ideia de conhecer esses registros, utilizando o geogebra, me ajudou bastante a mostrar o que seria Reta Tangente. (Formador. UI 10 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

O professor relata que no começo percebeu certo receio de seus alunos, talvez pela "fama" que os conteúdos da disciplina de cálculo têm dentro do curso de Matemática, mas que depois, no decorrer das aulas, perceberam que não era 'lá grande coisa'.

A partir desse excerto é possível perceber que o professor revela informações em relação a uma das expectativas que percebeu que seus alunos tiveram ao iniciar a disciplina, porém não revela especificamente em relação ao conteúdo de Derivada. Sendo assim, pelos dados produzidos, não foi possível descrever as características do conhecimento do professor sobre os interesses e expectativas dos alunos ao estudarem Derivada. Isso não significa que o professor não conhece algumas dessas expectativas. Significa apenas que ele não revelou por meio dos dados produzidos durante a pesquisa.

4.2.2 O conhecimento da Derivada como um tema Matemático a ser ensinado (KMT) revelado pelo formador

Na primeira entrevista com o formador de professores também não apareceram informações que pudessem ser utilizadas para revelar sobre seu MKT, pelo fato de, como dito anteriormente, o tema de Derivada não estar decidido no momento da conversa. Mas, ressalto alguns excertos que serviram de oportunidades para continuar buscando informações que revelassem características dos conhecimentos considerados nesse subdomínio.

Quando o formador de professores foi estimulado a contar sobre como havia planejado o ensino da disciplina ele citou:

> Então, logo que me convidaram, eu fui parar para pensar na disciplina. A gente tem uns exemplos nossos, dos professores da graduação. Então eu fui tentar olhar o que eu tinha de anotações da minha época de graduação. E então eu acho que já pela experiência, pela visão do Mestrado principalmente, eu vi, assim, que aquela *metodologia da graduação não é adequada*. Eu acredito que *não é adequada para a atualidade*, pelo ensino atual. E eu *fui buscar pesquisas que falam sobre o ensino de cálculo* até lá no Ensino Médio, pois o cálculo está presente desde o Ensino Fundamental [...] (Formador. UI 6 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

E posteriormente acrescenta que:

> [...] pois como te falei, eu nunca dei aula de Cálculo. Já dei aula de Análise e de Prática. E das outras vezes, eu apenas *segui o livro*, porque na verdade eu era novo quando trabalhei lá e não tinha muita experiência acadêmica. (Formador. UI 14 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Desses excertos vemos que ele faz uma crítica em relação à forma como os conteúdos da disciplina de Cálculo foram ensinados durante a sua graduação e acrescenta que tal forma de ensinar “não é adequada para a atualidade”. Posteriormente ele afirma ser a primeira vez que vai lecionar tal disciplina, e que anteriormente, quando foi professor de outras disciplinas o ensino oferecido foi baseado no livro utilizado.

Quando foi pedido para o professor explicitar como ele pretendia realizar o ensino nesta disciplina, ele acrescentou

[...] *primeiramente, abrir um debate, passar o conceito e, na hora da manipulação, se surgir alguma dúvida, podemos discutir e saná-las.* Por exemplo, como eu fatoro uma expressão Algébrica, as propriedades lá de potenciação, coisas desse tipo. Então, eu acho que os conceitos do fundamental e médio (se referindo ao Ensino Fundamental e Médio), talvez, possam prejudicar um pouco, mas é normal isso. Estamos ali para ajudá-los a superarem essas dificuldades. (Formador. UI 13 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

E quando foi pedido para que o professor falasse sobre o acompanhamento desses alunos ele citou:

[...] a gente pode ter um contato mesmo por web *mostrando alguns slides, utilizando softwares. Eu quero usar o Geogebra com eles, para ter um trabalho mais de investigação* [...]. (Formador. UI 11 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Embora os excertos apresentados acima não nos revelem nada sobre o conhecimento especializado do formador de professores, eles nos dão oportunidades de buscar informações que revelem o conhecimento especializado do professor no que se refere: às *teorias* (formais ou pessoais) utilizadas para ensinar 'Derivada'; e aos *recursos manipuláveis* e *didáticos* utilizados durante os processos de ensino de Derivada.

Quanto ao conhecimento do professor sobre o ensino do conteúdo de Derivada, encontramos informações que demonstram seu conhecimento sobre *teorias de ensino* formais e pessoais. Ele tinha conhecimento da *teoria de ensino* que seu professor utilizou com ele durante sua graduação, observa-se:

[...] eu percebi que *a minha graduação no início já foi dada a definição, o que era limite, Derivada e todas aquelas técnicas* e não existia um porque, tipo, onde que aparece o cálculo no Ensino Médio? Onde que aparece o Cálculo no Ensino Fundamental? E quais são as ideias que estão presentes lá? [...] (Professor. UI 7 – Parte 2 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Neste extrato o professor revela conhecer a *teoria pessoal* de ensino que seu professor utilizou quando ensinou Derivada a ele, durante a graduação. Ele lembra que o professor iniciava seu ensino pela definição, apresentando primeiro limite, depois Derivada e, em seguida, a utilização de técnicas sem explicar o porquê.

Ao reconhecer a *teoria de ensino* utilizada por seu professor, ele afirma que queria fazer diferente, descrevendo qual a *teoria de ensino* que ele pretendia utilizar ao ensinar o conteúdo de Derivada.

> Então, eu quero *tentar desenvolver neles um espírito de investigação, de busca de curiosidades* [...] *não apenas de pegar uma técnica, sei lá, de derivação e ficar aplicando. Mas, de fazer pensar porque que isso dá certo, porque isso funciona, onde que eu aplico. Porque eles vão ser professores futuramente.* A ideia é essa, ser professores. Então, [eles devem] ter essa preocupação [de saber] porque que existe esse conceito, no que ele me ajuda, onde que eu aplico. Então, se eu conseguir desenvolver isso nos alunos eu acho que estou satisfeito como professor. Mas, eu quero que eles tenham aprendizagem dessas técnicas que eles vão usar futuramente também, então acho que isso pode ser trabalhado aos poucos [...]. (Professor. UI 13 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

O professor fala de seu objetivo de torná-los investigadores, para que não apenas utilizem as técnicas disponíveis, mas que tais técnicas os levem a refletir sobre a utilização, aplicação e compreensão do conceito, porque é consciente de que serão professores. Mas, ao observar de forma geral todo o ensino realizado com seus alunos foi em grande parte baseado em manipulações algébricas, que é algo que o formador cita ao final de sua fala.

Sobre sua *teoria de ensino* pessoal, ele relata como pretendia levar os alunos a aprender Derivada:

> Olha, eu acho assim que, se preocupar com o desenvolvimento histórico do Cálculo, de quais foram as ideias iniciais, todo esse desenvolvimento que eu adquiri através de minha pesquisa que também está ligada. O conceito de função está ligado com o Cálculo né?! Então, *essa ideia de como a gente vai construindo e desvinculando esses conhecimentos pra que a gente chegue lá nas definições de Limite, Derivada* [...] (Professor. UI 18 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Em sua teoria pessoal para o ensino de Derivada, ele salienta que pretendia iniciar com elementos históricos relacionados à disciplina de cálculo em geral, ressaltando como os conhecimentos foram sendo construídos e se desvinculando até chegar nas definições de Limite e Derivada. Para o professor, para que os alunos aprendessem os conceitos de Derivada, os conceitos históricos e os relacionados ao Limite deveriam ser ensinados primeiramente.

Embora esses excertos apresentem como o professor pretendia ensinar seus alunos, aos descrever tais características é possível perceber que elas não estão exclusivamente relacionadas ao conteúdo de Derivada. Tratam-se apenas de escolhas pedagógicas feitas para ensinar.

Na segunda entrevista, foi pedido para que o professor relatasse com mais detalhes como ele havia ensinado o conteúdo de Derivada e ele nos contou o seguinte:

A gente *iniciou Derivada com a ideia de Reta Tangente*. Eu segui mais a ideia desse estudo que tem já no Ensino Médio sobre Reta Tangente. E eles já tinham estudado em matérias anteriores, como geometria analítica e álgebra linear. Então eles já tinham tido essa ideia de Reta Tangente e pela manipulação que a gente conseguiu fazer no Geogebra. A gente viu as *razões,* tem aquela *ideia do triângulo,* e a gente *foi manipulando a reta tangente a um gráfico, fazendo esses cálculos, acompanhando. O Limite disso geraria o coeficiente angular da Reta*. Mas, essas foram algumas coisas. (Professor. UI 8 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

A estratégia pessoal de ensino utilizada pelo formador para o ensino de Derivada se iniciou com a ideia da Reta Tangente, por se tratar de conceitos que, segundo ele, já haviam sido abordados no ensino médio e em disciplinas anteriores. A partir dessas ideias foram propostas manipulações em um *software* matemático (geogebra) onde os estudantes puderam visualizar a razão, a ideia do triângulo, realizar a manipulação da reta tangente, fazer cálculo, até chegar ao limite que resultaria no coeficiente angular. É possível perceber, a partir da fala do professor, que nessa teoria de ensino foram utilizados diferentes tipos de representações (algébrico e gráfico) e recursos digitais, como o geogebra.

Ao relatar um desses momentos em que ensinou Derivada para seus estudantes, o formador revela sua **estratégia** de ensinar este conceito, mas também revela que esta é influenciada por teorias formais, tais como a Teoria das Situações Didáticas e o Registro de Representações Semióticas, conforme ficou evidente ao ser apresentada uma das categorias de KFLM. Sendo assim, essas informações são classificadas como **evidências** do conhecimento do professor sobre a **TSD**, **RRS** e revela a **teoria pessoal** construída, a partir de seus conhecimentos de teorias formais, para ensinar 'Derivada'.

Mas, a partir das informações extraídas das entrevistas do formador foi possível perceber que, para ele, para ensinar o conteúdo de Derivada era necessário muito mais que conhecimento de teorias, era necessário utilizar recursos que favorecessem os processos de ensino e aprendizagem. Parte de seu conhecimento sobre esses recursos pode ser acompanhado no extrato abaixo:

[...] aí eu acho que a ideia do *software, é um conhecimento que eu tenho* e eu acho que é um conhecimento que deve ser usado nas disciplinas agora porque ele é uma tecnologia que pode auxiliar na construção dos conhecimentos, então utilizar essas ferramentas, ver o melhor jeito de utilizar. Uma coisa que eu estou buscando também, umas ideias, eu acho que você teve aula com um professor lá do mestrado, ele deu uma disciplina de cálculo e trabalhou com *Geogebra*. (Professor. UI 18 - Entrevista 1 – 04 set. 2014).

Neste excerto o formador apenas afirma que conhece *softwares* e que trabalhou com o geogebra durante a disciplina, não revelando, assim, informações suficientes para apresentar características de tal conhecimento. Porém, relacionando tal informação com o excerto (Professor. UI 8 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016) apresentado acima, onde o professor relata a estratégia utilizada para ensinar 'Derivada' e afirma que o *software* foi utilizado para auxiliar os alunos a visualizar razões, ideia de triângulo e todas aquelas outras manipulações, revela seu conhecimento de como um *software* como o geogebra pode ser utilizado como um recurso digital para ensinar o conceito de Derivada. Tal informação é classificada como uma **evidência** do conhecimento do formador sobre o **geogebra** como recurso digital útil para ensinar 'Derivada'.

O professor também apresentou tarefas (listas de exercícios) que, a partir de seu conhecimento, poderiam auxiliar nos processos de ensino de Derivada.

4.2.3 O conhecimento da Derivada como parâmetro de aprendizagem a ser alcançado (KMLS) revelado pelo formador

Nesta seção serão apresentadas informações que revelam o conhecimento do formador no que diz respeito às *expectativas de aprendizagem* que ele tinha em relação aos seus estudantes; ao *nível conceitual e procedimental* esperado que seus alunos desenvolvesses a partir das aulas oferecidas; e à *sequência de conteúdos* utilizada para favorecer tal aprendizagem.

4.2.3.1 Conhecimento revelado pelo formador sobre *sequência de conteúdos* utilizada no ensino de Derivada

A fim de favorecer a aprendizagem dos alunos sobre Derivada, o professor utilizou uma sequência de conteúdos, que é revelado por ele ao propor as listas de exercícios.

As listas seguem a seguinte sequência de conteúdos: $f'(x_0)$ (utilizando os procedimentos de Derivada da soma e da diferença); Equação da Reta Tangente; $f'(x_0)$ (utilizando regra do produto; regra do quociente; regra da cadeia); Derivada de

Ordens Superiores; gráficos de funções; aplicação dos conceitos de derivada em uma situação problema (posição, velocidade, aceleração); limite.

Pode ser que nas aulas presenciais o formador tenha utilizado outra organização ao apresentar a sequência de conteúdos, porém, como a presente pesquisa foca apenas nas interações a distância e nas entrevistas, são utilizadas como referências as listas de exercícios.

Por meio dessas informações podemos inferir que o formador revela seu conhecimento sobre uma sequência de conteúdos para ensinar 'Derivada'. Essas informações são classificadas como **evidência** de conhecimento sobre **sequenciação de conteúdos para ensinar 'Derivada'.**

4.2.3.2 Conhecimento revelado pelo formador sobre *expectativas de aprendizagem* de Derivada

Considerando que esta categoria se refere à aprendizagem que o formador espera que seus alunos construam sobre Derivada, é possível perceber por meio da própria sequência de conteúdos utilizada e por meio das listas de exercícios que o formador revelou, que sua pretensão em relação à aprendizagem dos seus alunos sobre Derivada permeasse a aprendizagem de $f'(x)$; $f'(x_0)$; Equação da Reta Tangente; Derivada de ordens superiores; esboço de gráficos; e aplicação de derivada em situações problemas.

Porém, estou consciente de que as características deste conhecimento não ficaram tão evidentes quanto gostaria. Para tanto, outros questionamentos poderiam ser feitos, como por exemplo: Sobre a aprendizagem de Ordens Superiores, até qual ordem espera que seus alunos aprendam? Com quais tipos de funções? Questionamentos como esses me forneceriam mais informações sobre o conhecimento do formador, importantes para caracterizar seu conhecimento.

4.2.3.3 Conhecimento revelado pelo formador sobre *nível conceitual e procedimental esperado* em relação a aprendizagem Derivada

A partir da sequência revelada pelo formador, é possível, também, encontrar algumas informações que revelam seu conhecimento sobre o nível conceitual e procedimental esperados de seus alunos.

Em nossa primeira entrevista ele relatou:

Então, eu quero tentar *desenvolver neles um espírito de investigação*, de busca de curiosidades [...] *não apenas de pegar uma técnica, sei lá, de derivação e ficar aplicando*. Mas, de fazer pensar porque que isso dá certo, *porque isso funciona, onde que eu aplico*. Porque eles vão ser professores futuramente. A ideia é essa, ser professores. Então, [eles devem] ter essa preocupação [de saber] *porque que existe esse conceito*, *no que ele me ajuda*, *onde que eu aplico*. Então, se eu conseguir desenvolver isso nos alunos eu acho que estou satisfeito como professor. Mas, *eu quero que eles tenham aprendizagem dessas técnicas* que eles vão usar futuramente também, então acho que isso pode ser trabalhado aos poucos [...]. (Professor. UI 13 - Entrevista 1 – 04 set. 2014)

Neste excerto o professor revela o nível de conhecimento que ele pretende que seus alunos desenvolvam. Ele afirma que pretendia auxiliá-los a desenvolver um espírito de investigação e, além de saber utilizar uma técnica, conhecer porque funciona, onde aplica, em que tal conceito ajuda, etc. Todos esses “conhecimentos” que o professor considera importante serem construídos por seus alunos fazem parte dos conhecimentos contemplados em KoT. Sendo assim, o professor dá **indícios** de que seu conhecimento sobre o **nível conceitual e procedimental** contempla os conhecimentos contemplados em apenas um dos subdomínios do Domínio Matemático.

Outros momentos em que o professor revela seu conhecimento sobre o nível conceitual e procedimental esperado de seus alunos são apresentados a seguir

A forma de se *entender o conceito, a ideia da Derivada, não apenas a definição de Derivada*, mas entender essa *aplicação dela*. Não sei se nós podemos chamar de macete essa evolução: pode-se calcular a Derivada pelo Limite. Mas o limite, às vezes, se transforma numa regra que pode ser aplicada sem usar toda vez a definição para calcular. Então, acho que isso é importante, essa visão. Nós sempre tentamos calcular o limite pelo limite, e depois se descobriu que poderia ser feito de outra maneira. *Conhecer essas Derivadas de algumas funções específicas, saber usar as propriedades quando necessárias e saber quais propriedades utilizar, e, às vezes, nem precisar utilizar propriedades.* (Formador. UI 39 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016)

Segundo este excerto, o professor espera que seus alunos saibam não somente utilizar a técnica de derivação, mas que compreendam o conceito, a definição e entendam sua aplicação. Embora ele fale sobre o que espera que seus discentes saibam, não explicita o nível conceitual que espera. Todos os conhecimentos citados que seus alunos devem saber, referem-se ao domínio do conhecimento matemático. Isso dá indícios de que, para o professor formador, o fato de o professor conhecer o conteúdo já seja suficiente para seu ensino.

Tentando extrair mais informações sobre este aspecto, na segunda entrevista perguntei a ele sobre o nível conceitual e procedimental que ele esperava de seus alunos e ele respondeu o seguinte:

> Olha, eu acho que para licenciatura, "*os conteúdos propostos nessa disciplina" são suficientes sim*! Eu acho também que esses alunos devem saber que eles estão estudando para atuarem, quem sabe até na universidade, igual a gente. Eu não vou falar que eu saí da faculdade pensando em atuar na faculdade, mas daí eu tive a oportunidade de trabalhar, e isso faz com que você estude além do que aquilo [que aprendeu na licenciatura]. Então, talvez, o interessante seria eles aprenderem esses conceitos iniciais que a gente propôs, e, se necessário, buscar mais. Tentar maneiras de ensinar esse mesmo conteúdo, talvez com outras estratégias e assim evoluir um pouco mais. (Formador. UI 40 - Entrevista 2 – 18 mar.2016)

Novamente ele cita que os discentes, futuros professores, precisam desenvolver alguns conhecimentos, se possível, "maior" do que eles iriam ensinar, porém, mais uma vez, não explicita o nível que eles precisam ter, ou até que ponto eles precisariam aprender. O formador demonstra ser consciente da importância de buscar desenvolver seus conhecimentos, mas não apresenta um limite para tal desenvolvimento, em se tratando da Derivada. Então, classificaremos essas informações como **indícios** de conhecimento

Tal indício, em um momento da entrevista transforma-se em evidência, no momento em que ele admite o que esperava que seus alunos realizassem durante a aprendizagem de Derivada.

> [...] quando eles iam resolver algum exercício, *eles precisavam querer entender o gráfico*, ou olhar uma função e pensar como poderia representa-la graficamente. Acho que talvez isso poderia facilitar algumas ideias sobre outros trabalhos. Acho que nas listas que eu propus, ficou faltando explorar mais isso. Eu acho que ficou faltando isso. (Professor. UI 65 - Entrevista 2 – 18 mar. 2016).

Essa informação indica qual o *nível conceitual e procedimental* que o professor esperava de seus alunos naquele nível de ensino, afirmando que eles deveriam entender o gráfico e relacioná-lo com a função correspondente.

Pelos exercícios propostos nas listas de exercícios, o formador revela uma grande preocupação em relação ao desenvolvimento procedimental de seus alunos, propondo situações nas quais eles possam utilizar procedimentos como: derivada da soma; derivada da diferença; regra do produto; regra do quociente; regra da cadeia; além disso, que saibam esboçar o gráfico de funções quer seja com papel e lápis ou utilizando recursos virtuais como o geogebra, além de utilizarem esses conceitos em situações problemas que envolvam aceleração, posição e velocidade.

E assim encerramos este capítulo que teve a intenção de apresentar as informações que revelam o conhecimento especializado do formador de professores ao ensinar o conteúdo de Derivada a distância.

A PARTIDA E O NORTE:
HORA DE VERIFICAR A PESQUISA REALIZADA

[...]
Deixei pegadas lá no vale da morte
Um solo infértil aos meus muitos defeitos
Minha vida alargou-se em caminhos estreitos
E eu vi você
A partida
E o norte
[...]
(Trecho "A Partida e o Norte" Estevão Queiroga)

Ao chegar a este “lugar”, é possível olhar para trás para tirar algumas conclusões e fazer algumas reflexões sobre o caminho que percorri para a realização da pesquisa e escrita da tese e questionamentos que emergiram deste processo.

Após o início da caminhada, influenciada pelos lugares por onde andei, me surpreendi olhando para um professor de Matemática, mas ele não era como todos os professores de Matemática! Ele atuava como formador de professores de Matemática e ensinava Derivada a distância, e ainda, encontrava-se em início de carreira. Desde então não desviei o olhar dele. E em meio a tantas possibilidades, me flagrei questionando: ***que Conhecimento Especializado revela um formador de professores, em início de carreira, ao ensinar ‘Derivada’ a distância?*** Portanto, em meio a tantos, escolhi dar voz a este professor, e como uma daquelas decisões que tomamos entre uma atividade e outra no nosso dia a dia, mas que tem o poder de mudar o rumo da nossa vida, decidi que *caracterizar o Conhecimento Especializado revelado por um formador de professores de Matemática, em início de carreira, ao ensinar ‘Derivada’ a distância* foi o objetivo que impulsionou o meu caminhar nesses últimos anos.

Na mochila que preparei para esta caminhada escolhi colocar um binóculo da marca “Estudo de Caso”, um dos mais indicados para quem precisa olhar com mais atenção para um “lugar” específico. As lentes desse binóculo que escolhi foram fabricadas, nos mínimos detalhes, por uma empresa espanhola cuja logomarca é MTSK, no “mercado” desde 2013, mas que vem galgando espaço em meio às grandes empresas de “lentes”. Decidi, também, que olharia com uma intenção qualitativa, consciente de que aquilo que eu “enxerguei” e interpretei foi influenciado pelas lentes que eu utilizei e por “aquilo” para o que eu estava olhando quis “revelar”.

Certa de que os resultados dessa “observação” diziam respeito a um caso específico, mas que poderiam me levar a refletir sobre outros “lugares”, destaco-os a seguir.

Em relação ao *Mathematical Knowledge*, enxerguei que o formador de professores revelou seu conhecimento sobre a Derivada como tema matemático (KoT), como um tema que faz parte de uma conjunto de temas que se relacionam entre si e com outros (KSM) e, também, sobre as regras de funcionamento de tal conjunto cuja Derivada é um dos integrantes (KPM).

Descrevendo o que enxerguei sobre KoT, em relação aos procedimentos, o formador de professores deixou evidente seu conhecimento sobre a regra do produto (quando se faz e quando pode ser feito), a segunda derivada (como se faz), a derivada de uma função (como se faz, porque se faz assim, quando pode ser feito e característica do resultado), a derivada da função em um ponto (como se faz) e a derivada da soma (como se faz, por que se faz assim, quando pode ser feito e característica do resultado). Além dessas evidências, deixou indícios de seu conhecimento sobre reta tangente (como se faz), assíntotas oblíquas (como se faz) e função composta.

Em relação à fenomenologia, o professor não revelou seu conhecimento, apenas citou que considera importante que os professores conheçam a gênese de um conceito e sua aplicação.

No tocante aos registros de representações que ele revelou conhecer, observei que ele fala sobre registros algébricos, gráficos, tabular e língua materna, mas deixa evidente o algébrico e gráfico. Também, o formador de professores revelou conhecer, de forma evidente, algumas propriedades como assíntota, máximos (se $f'(x) = 0$ e $f"(x) > 0$ então x é ponto de mínimo local), mínimos (se $f'(x) = 0$ e $f"(x) < 0$ então x é ponto de máximo local), ponto de inflexão (se $f"(x) = 0$ então x é ponto de inflexão), derivada da soma, derivada do produto, derivada do quociente e as condições para a existência da derivada de uma função em um ponto. Porém, o formador de professores não revelou seu conhecimento sobre os fundamentos de tais propriedades.

Sobre *Knowledge of the Structure of Mathematics*, que se refere ao que o professor revela sobre as conexões existentes entre a Derivada e outros temas, há indícios de que o formador tenha realizado relações entre a derivada e conjuntos numéricos, reta numérica, noções de infinito e ideias de proximidade, conhecimentos que são considerados como *conexões de simplificação*, porém, as informações não foram suficientes para descrever suas características.

Com referência às conexões de complexificação o formador citou conhecer a relação entre as derivadas de ordens superiores e suas propriedades, sendo estas últimas, temas estudados em Cálculo II, disciplina que foi ofertada posteriormente.

Por fim, sobre as conexões transversais, o professor citou considerar o Limite como um conceito que perpassa os conteúdos de Derivada e Integral, porém, sem ser específico em revelar como seriam tais relações.

Sobre *Knowledge of the Practice of Mathematics*, percebi que uma das características desse conhecimento é que o professor revela conhecer a função composta explicando como faz, justificando quando pode ser considerada uma função composta e apresentando um exemplo. Tal conhecimento revela características de critérios que o professor cria para definir um tema matemático.

Em relação ao PCK, enxerguei que o formador não revelou seu conhecimento tanto quanto revelou sobre MK, porém, foi possível ver o conhecimento do formador sobre a Derivada como um tema a ser aprendido (KFLM), como um tema a ser ensinado (KMT) e como parâmetro de aprendizagem que considera as pretensões do professor sobre o que o aluno deve/pode alcançar (KMLS), não foi tão revelado quanto as características "enxergadas" em MK.

Acerca do *Knowledge of Features of Learning Mathematics* foi possível notar características de seu conhecimento sobre potencializadores ou dificultadores da aprendizagem de derivada, teorias de aprendizagem, formas de interação dos estudantes com a derivada e interesses e expectativa.

No que diz respeito ao conhecimento dos potencializadores e facilitadores da aprendizagem, o formador revelou algumas características que não foram consideradas como evidências, porém, descrevem parte do conhecimento que ele revelou. Entre elas encontram-se a dificuldade dos discentes em compreenderem o conceito de função em algumas manipulações algébricas, na compreensão do que são assíntotas, de diferenciar máximo, mínimo e ponto de inflexão, na interpretação gráfica e na identificação e compreensão da função composta, sendo esta uma dificuldade que o formador revelou ter tido para explicar a seus estudantes.

O professor revelou características sobre seu conhecimento de teorias de aprendizagem. o professor revelou conhecer duas teorias formais, denominadas de Teoria das Situações Didáticas e Registro de Representação Semiótica. Por meio do conhecimento destas, o professor construiu sua "teoria pessoal" onde foi propondo situações que contemplassem conceitos diferentes e possibilitassem a seus alunos perpassar por diferentes registros de representação.

Quanto às formas de interação dos estudantes com a derivada, uma das características do conhecimento revelado pelo formador é que ele demonstra perceber uma certa tendência dos alunos a seguir uma rotina ao apresentar as respostas às derivadas quando encontradas por meio das manipulações algébricas.

Porém, são necessárias mais informações para apresentar características mais pontuais em relação a tal conhecimento do professor.

Uma última característica do conhecimento elencado neste subdomínio é que o formador revelou seu conhecimento sobre os interesses e expectativas de seus estudantes em relação à disciplina de cálculo, mas não especificamente do conteúdo de Derivada.

Sobre o *Knowledge of Mathematics Teaching*, é possível inferir que uma das características de tal conhecimento é que o professor utilizou a Teoria das Situações Didáticas e Registros de Representação Semiótica para nortear seus processos de ensino e, dentro destes processos utilizou o geogebra como um recurso virtual e estratégias e tarefas como recursos didáticos para o ensino de Derivada.

E, acerca do *Knowledge of Mathematics Learning Standards* notei que uma das características do conhecimento deste professor é que a *sequência* que ele utilizou e revelou por meio das discussões nos fóruns, se iniciou por $f'(x_0)$ - Derivada da soma e da diferença -, prosseguiu pela equação da reta tangente, depois $f'(x_0)$ – regra do produto, regra do quociente e regra da cadeia -, depois, Derivada de ordens superiores, aplicação do conceito de derivada por meio de uma situação problema (envolvendo posição, aceleração e velocidade) e se encerrou com limite.

A sequência de conteúdos descritas anteriormente era exatamente a *expectativa* que o professor tinha de que seus estudantes aprendessem, pois, tais conteúdos foram “cobrados” na avaliação elaborada pelo professor sobre Derivada.

E, por fim, vislumbrei que o professor esperava que seus alunos desenvolvessem um nível procedimental que os permitissem derivar, algebricamente, qualquer tipo de função, pois propôs várias questões nas listas de exercícios a fim de que os estudantes aprendessem tais procedimentos. Além disso, ele revelou ser uma de suas pretensões, que seus alunos compreendessem o conceito por trás da Derivada, visualizando e compreendendo, independentemente do registro de representação utilizado.

O formador, participante da pesquisa, embora estivesse em início de carreira, e apesar de olharmos para seu conhecimento revelado apenas no Ambiente Virtual de Aprendizagem e nas duas entrevistas que fizemos, revela um conhecimento especializado que apresenta algum tipo de conhecimento em todos os subdomínios de MTSK.

Também, embora o professor tenha atuado como formador, ou seja, seus estudantes fossem atuar como futuros professores de Matemática, seu ensino demorou-se mais em auxiliar no desenvolvimento do conhecimento matemático dos seus alunos, do que didático. Utilizando a analogia da pesca, o formador preocupou-se mais em ensinar seus alunos, futuros professores de Matemática, a pescar. E, pelos relatos em nossas conversas, tais atitudes, por mais que ele não quisesse, foram influenciadas pela formação que ele obteve enquanto era estudante de Matemática.

O formador apresentou um discurso crítico em relação ao que vivenciou durante sua formação, deixando explícito que nem sempre ele via justificativas e aplicações nos conteúdos que estudava. Sendo assim, seu discurso tendia no sentido de pretender realizar algo um pouco diferente com seus alunos, de maneira a ensiná-los as técnicas, mas, também, a natureza, essência e aplicabilidade do tema estudado.

Embora não tivesse lecionado o conteúdo de Derivada ainda, sua experiência como acadêmico e como leitor de pesquisas realizadas com foco em cálculo lhe alertavam para possíveis dificuldades que seus estudantes poderiam vir a enfrentar.

Em suas aulas a distância, por meio dos espaços de Fóruns criados no AVA, propôs listas de exercícios nas quais os discentes puderam utilizar as mais diversas propriedades de derivação, além da utilização de outros recursos, diferentes do papel e lápis comumente utilizados.

O professor revelou seu conhecimento sobre diversas propriedades ao realizar as correções das resoluções de seus alunos. O ambiente virtual utilizado para questionamentos e esclarecimentos.

Embora o discurso primário do professor tenha sido em direção à aprendizagem das justificativas e aplicações dos conceitos estudados, na prática, ao olhar para as próprias listas de exercícios, percebe-se a insistência e propriedade dada ao uso matematicamente correto das regras e propriedades de derivação.

Quanto à didática utilizada para o ensino de derivada, o professor ressaltou a importância de utilizar os procedimentos já padronizados e consolidados para a resolução dos exercícios propostos.

A pesquisa desenvolvida contribui para a área de Educação Matemática porque nos leva a refletir sobre conhecimento, não qualquer conhecimento, mas o conhecimento de alguém que atua como formador de professores de Matemática.

Tal conhecimento, quer seja ele desenvolvido ou não, influenciará diretamente nos processos de ensino e aprendizagem da geração presente e das futuras.

Voltando o olhar para o caminho trilhado, sou consciente de que, caso esse olhar fosse feito por outros, ou se fosse olhado novamente após esses anos, os resultados seriam diferentes, além disso, se tivessem sido observados outros momentos (como as aulas presenciais), outros conhecimentos poderiam ter sido revelados, e, ainda, se fossem marcados outros encontros, outras conversas sobre aquilo que eu estava entrevendo, outras características também poderiam ter sido ressaltadas.

Contudo, sinto-me satisfeita! O binóculo que escolhi, com suas lentes especiais, foram suficientes para enxergar características do que me propus a observar. Sinto-me satisfeita de haver respondido à pergunta que norteou tal caminhada, consciente de que ficaram problemáticas em aberto, como por exemplo, quais as crenças e concepções deste formador de professores em início de carreira? Como suas crenças influenciam seu conhecimento especializado? Como seu conhecimento especializado influenciam suas crenças?

Neste momento, outras inquietações com outros questionamentos: Mas, afinal, se essas foram as características do conhecimento que o formador revelou enquanto ensinou derivada a distância, quais seriam as características do conhecimento especializado construído pelos alunos que foram ensinados por este formador? Que tipo de atividades poderiam favorecer o desenvolvimento do conhecimento dos estudantes sobre o funcionamento do conjunto que integra todos os temas matemáticos (KPM)? Como auxiliar no desenvolvimento do conhecimento didático do conteúdo (PCK) dos discentes, futuros professores, ainda quando estão na formação inicial, de forma a “dar conta” dos desafios que o ensino da Matemática na Educação Básica propõe?

Enfim, essas são indagações que apresento ao final desta caminhada, ao chegar ao “final” que me propus neste período, mas que de forma alguma representa o final do meu caminho. Embora a caminhada tenha sido árdua, cansativa, e muitas vezes difícil pela falta de luz, aqui onde cheguei é apenas mais uma parada dessa caminhada que trilharei até “meu lugar”.

Será que realmente passamos pelo doutorado
ou o doutorado que nos passa, atravessa, transpassa?
Passar pelo doutorado não é para qualquer um,
por outro lado, não nos torna melhores do que ninguém!
Passar pelo doutorado é uma experiência que nos transforma,
mas em várias questões da vida ainda continuamos sendo os mesmos...
Passar pelo doutorado, pode até parecer mais fácil
por tudo o que já enfrentamos no período do mestrado...
mas não!
Utilizando a analogia do parto,
apesar de AINDA não ser mãe,
na segunda maternidade,
embora com certeza a mãe esteja mais preparada para tudo que irá enfrentar,
a experiência de ganhar o primeiro filho não minora a dor...
Passar pelo doutorado é dolorido tanto quanto!
Embora, também passe...
Passar pelo doutorado,
por muitos pode ser considerado o fim de um ciclo,
mas a sensação que tenho é de que
é apenas o início de uma longa caminhada que teremos pela frente,
onde os cheiros, sabores, texturas, cores serão apreciados com um novo olhar,
não melhor...
apenas diferente!

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AGUILAR, A. **El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas:** un estudio de caso. 2016. 203 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Huelva, Huelva, Espanha, 2016.

AIRES, S. N. S. **Professor bacharel iniciante no ensino superior:** dificuldades e possibilidades pedagógicas. 2015. 212 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Santos, Santos, 2015.

ALMEIDA, H. R. F. L. **Polidocentes-com-Mídias e o Ensino de Cálculo I**. 2016. 219 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2016.

ALMEIDA, H. R. F. L.; BORBA, M. C. E-licm@t. In: BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L. **As licenciaturas em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB):** uma visao a partir da utilização das Tecnologias Digitais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. p. 13–28.

ALVES, A. F. S **Um estudo das atividades propostas em um curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, na modalidade a Distância**. 2011. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – PUC, São Paulo, 2011.

ALVEZ-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método das ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 1. ed. São Paulo: Pioneira, 1998.

AMIT, M; VINNER, S. **Some misconceptions in calculus. Anecdotes or the tip of iceberg?** In. BOOKER, G; COBB, P; MENDICUTI, T. N (Eds). Proceedings of the 14^{th} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) with the North American Chapter 12^{th} PME - NA Conference Vol. 1 (p. 3-10). México, 1990.

ANDRÉ, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.** 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ANJOS, R. A. V; ALONSO, K, M; MACIEL, C. **A constituição do Referencial Pedagógico para análise de Ambientes Virtuais de Aprendizagem.** Simpósio Internacional de Educação a Distância (SIED); Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância (EnPED). UFSCAR, 2016.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo.** Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1.

APOSTOL, T. M. (1979). **Análisis Matemático**. 2. ed. Reverté S.A., Barcelona.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:** As Discussões dos Alunos. 2002. 210 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2002.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K.(1997). **The Development of Students´Graphical Understanding of the Derivative**. Journal of Mathematical Behavior, 16(4), pp 399-431.

Badillo, E. R. (2003). **La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia (La derivada, un concepto a caballo entre la Matemática y la Física)**. Tese, Departamento de Didáctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals. Universidad Autónoma de Barcelona.

BALL, D.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, n. Fall, p. 14–46, 2005.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, p. 389–407, 2008.

BALL, D. L.; BASS, H. With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. In: **Paper prepared based on keynote address at the 43rdjahrestagungfürdidaktik der Mathematik**, 2009, Oldenbirg, Germany. *Anais*... Oldenbirg, Germany: [s.n.], 2009.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2009.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L. **As Licenciaturas em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB)**: uma visão a partir da utilização das Tecnologias Digitais. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. v. 39.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas** XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró en Agosto de 2001.BOULOS, P. **Introdução ao Cálculo**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974.

BRASIL. Decreto 5800. Dispõe sobre o Sistema Universidade Aberta do Brasil - UAB. **Diário oficial**, Brasília, 8 jun. 2006. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2006/Decreto/D5800.htm>. Acesso em: 7 jan. 2015.

BRASIL. **Referênciais de qualidade para educação superior a distância**. Brasília: MEC, 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/legislacao/refead1.pdf>.

BRASIL. Censo da Educação Superior. [S.l.]: INEP/MEC. 2013. BRITO, N. D. **Estudo sobre a aprendizagem da docência na Educação a Distância:** uma análise da percepção dos professores da UAB_UFSCar. 2014. Dissertação (Mestrado em Eduação) – Universidade Fedral de São Carlos, São Carlos, 2014.

BRASIL. Referenciais de qualidade para educação superior a distância. Brasília: MEC, 2007. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/legislacao/refead1.pdf>. Acesso em Ago 2016.

CANCHERINI, A. **A socialização do professor iniciante:** um difícil começo. 2009. 212 f. Dissertação (Mestrado em Eduação e Formação) – PUC, Santos, 2009.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; PLANAS, N. **MTSK como marco teórico y metodológico.** In: CABANHA, D. S. C.; CARRILLO, J. (Eds). Conhecimento Especializado do Professor de Matemática: o MTSK. 2019. No prelo.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C; CLIMENT, N.. **Un marco teórico para el Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas.** Huelva, Espanha: [s.n.], 2014.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; FLORES, P. Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. **Investigación en Didáctica de la Matemática.** Homenaje a Encarnación Castro. Granada: Editorial Comares: Rico, M. C.; Cañadas, J; Gutierrez, M.; Segovia, I, 2013. p. 193–200.

CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997). **Representaciones y Modelización.** In Rico, L. (coordinador) La educación matemática en la enseñanza secundaria (p. 95-124). ICE (Universidad de Barcelona)/Editorial Horsori, Barcelona.

CHIARI, A. S. S. **O Papel das Tecnologias Digitais em Disciplinas de Álgebra Linear a Distância:** Possibilidades, Limites e Desafios. 2015. 208 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2015.

CONTRERAS, L.C.; MONTES, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C.; JOGLAR, N. (2018). **Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas**. In: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M.; Climent, N. (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK.* No prelo.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Professional development in education**, 2011, 38, 3, 507-509

CORREA; D. S. P. **Licenciatura em Matemática a distância e a Formação de professores para/com uso de tecnologias digitais de informação e comunicação.** 2012. 138 f. Universidade Fedral do Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande / MS, 2012.

D’AMBROSIO, U. Prefácio . In BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

D’AVOGLIO, A. R. **Derivada da função num ponto:** Uma forma significativa de introduzir o conceito*.* 2002. 92 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2002.

DALL’ANESE, C. **Conceito de Derivada:** Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. 2000. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2000.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11–33.

EMERECIANO, M. S. J.; SOUZA, C. A. P. **Ser Presença como Educador, Professor e Tutor**. *ABED*, 2005. Disponível em: <http://www.abed.org.br/site/pt/midiateca/textos_ead/695/2005/11/ser_presenca_como_educador,_professor_e_tutor_>. Acesso em: Jan 2017.

ERNEST, P. The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. **Mathematics Teaching:** The State of the Art. London: Falmer Press: [s.n.], 1989.

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. London: Falmer Press, 1991.

ESCUDERO-AVILA, D. I. **Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundária.** 2015. 340 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Huelva, Huelva, Espanha, 2015.

ESCUDERO DOMINGUES, A.; CARRILLO, J. Conocimiento Matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. In: Investigación En Educación Matemática, 2014, Salamanca. **Anais**... Salamanca: [s.n.], 2014. p. 267–276.

FARIA, E. C. **Do ensino presencial ao ensino a distância:** A inovação na prática pedagógica de professores de Matemática. 2012. 151 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2012.

FERRÃO, N. S. **Mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem de cálculo diferencial e integral.** 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2013.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. 4. ed. Curi: Positivo, 2009.

FIDALGO, F; MILL, D. Espaço, tempo e tecnologia no trabalho pedagógico: redimensionamento na Idade Mídia. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 88, n. 220, p. 421–444, 2007.

FILHO, A. C.; SALES, V. M. B.; ALVES, F. C. A identidade docente do tutor da Educação a Distância. 2012, São Carlos. **Anais**... São Carlos: [s.n.], 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. 5[a] ed. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1992.

FLORES, E., ESCUDERO, D. I., Y AGUILAR, A. (2013). **Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK.** In: BERCIANO, A.; GUTIÉRREZ, G.; ESTEPA, A.; CLIMENT, N. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (p. 275-282). Bilbao: SEIEM.

FLORES-MEDRANO, E.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A. (2017). **Profundizando en el conocimiento de la práctica matemática.** In: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; (Eds). Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Atas da III Jornada do Seminario de Investigación en Didácticas de la Matemática da Universidade de Huelva (p. 38-47). Huelva. CGSE.

FLORES-MEDRANO, E. **Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK).** 2015. 165 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Huelva, Huelva, Espanha, 2015.

FORSTER, S. R. L. **Ensino a Distância:** Uma análise do design de um curso de Cálculo com um olhar no conteúdo de limites e continuidade de uma variável real. 2007. 288 f. Mestrado (Ensino de Matemática) – PUC, São Paulo - SP, 2007.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1995.

GALLEGUILLOS, J. E. **Modelagem Matemática na modalidade online:** análise segundo a Teoria da Atividade. 2016. 215f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2016.

GARCIA, M. M. L. **Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria**. 2017. 280f. Tese. Universidad de Huelva, Huelva - Espanha, 2017.

GAVILÁN, J. M. **El papel del profesor en la enseñanza de la Derivada.** Análisis desde una perspectiva cognitiva. 2010. Disponível em: < http://grupo.us.es/geducmate/LIBRO.pdf>. Acesso em Ago de 2016.

GRACIAS, T. A. S. **A natureza da reorganização do pensamneto em um curso a dostância sobre tendencias em educação matemática.** 2003. 143 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2003.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación**, v. 20, p. 13–31, 2009.

GODOY, L. F. S. **Registros de Representação da Noção de Derivada e o processo de aprendizagem.** 2004. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2004.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2011.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das derivadas no Cálculo I:** Atividades Investigativas utilizando o geogebra. 2012. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Eduação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1985. v. 1.

HEITMANN, F. P. **Atividades Invetigativas em grupos online:** possibilidades para educação matemática a distância. 2013. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2013.

HOFFMANN, L. D. **Cálculo:** Um curso moderno e suas aplicações 1. 2ª ed. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.

JUNIOR, J. C. M. **O ensino de derivadas em Cálculo I:** Aprendizagem a partir da visualização como o uso do geogebra. 2015. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

KLEINER, I. (2001). **History of the Infinitely Small and Infinitely Large in Calculus. Educational Studies** in Mathematics, 48, pp. 137-174.

LEHMANN, M. S. **Uma proposta de uma sequência didática para conceitualização de derivada como taxa de variação instantânea.** 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.

LEINHARDT, G, PUTNAM, R. T., STEIN, M. K. y BAXTER, J. (1991). **Where subject Knowledge matters**. En Brophy, J. (Ed.) Advances in research on teaching: Teachers´ knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice, vol 2 (pp. 87-113). JAI Press: Greenwich, CT.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982. v. 1, 2ª ed.

LEME, J. C. M. **Aspectos processuais e estruturais da Noção de Derivada**. 2003. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2003.

LIMA, V. S. et al. Formação docente para a modalidade a distância na UAB-UFSCar: um olhar sobre o professor-coordenador de disciplina na polidocência. **Polidocência na Educação a Distância:** múltiplos enfoques. São Carlos: EdUFSCar, 2010. p. 149–171.

LINS, R.C. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

LLINARES, S. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. **Revista UNO**, n. 17, p. 51–63, 1998.

LOBO, R. S. **O tratamento dado por livros didáticos ao conceito de derivada**. 2012. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2012.

LOPES, V. R. **Aprendizagem em um ambiente construcionista:** explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais. 2015. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MALHEIROS, A. P. S. **Educação Matemática online:** a elaboração de projetos de Modelagem. 2008. 187f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2008.

MELILLO, K. M. C. F. A. L. **O papel do tutor, indiscutivelmente, tem sido o coração do sistema UAB**. 2011. Dissertação – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente:** Imagem Conceitual e Definição Conceitual. 2003. 159 f. Dissertação (Mestrado em Eduação Matemática) – PUC, São P, 2003.

MOISE, E. E. **Cálculo:** um curso universitário. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1970. v. 1.

MONTES, M. A. **Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito:** un estúdio de caso. 2015. 249 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Huelva, Huelva, Espanha, 2015.

MONTES, M. A.; CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. In: Investigación En Educación Matemática, 2013, Bilbao. **Anais**... Bilbao: BERCIANO, A.; GUTIERREZ, G.; ESTEPA, A.; CLIMENTE, N., 2013. p. 403–410.

MOREIRA, M. M. **Análise da visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do material didático de Matemática à luz da sequência Fedathi:** O caso da Licenciatura em Matemática do IFCE. 2014. 292 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

MORIEL-JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. 162 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2014.

OCHOA, J. A. V. **La comprensión de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada.** Una análisis desde el modelo de Pirie y Kieren. 2011. 228f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2011.

OLIMPIO JUNIOR, J. **Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática** - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 273f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2006.

OLIVEIRA, L. P. F.; ZAMPIERI, M. T. Os diferentes modelos de Licenciatura em Matemática da UAB. In: BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L. (Org.). **As Licenciaturas em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB):** uma visão a partir da utilização das Tecnologias Digitais. São Paulo: Livraria da Física, 2015. p. 48–66.

OLIVEIRA, D. G. **Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica.** 2011. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Eduação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

OLIVEIRA, M. R. G.; MILL, D.; RIBEIRO, L. **A tutoria como formação docente na modalidade de Educação a Distância**. 2009, [S.l: s.n.], 2009.

OLIVEIRA, M. R. G.; MILL, D.; RIBEIRO, L. R. C. Ensino Superior, tutoria online e profissão docente. In: CONGRESSO ESTADUAL PAULISTA PARA A FORMAÇÃO DE EDUCADORES, 2009, Águas de Lindóia. **Anais**... Águas de Lindóia: [s.n.], 2009. p. 243–258.

ORTON, A. (1983). **Students´ understanding of differentiation.** Educational Studies in Mathematics, 14, pp. 235-250.

PAJARES, F. Teachers’ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. **Review of Educational Research**, n. 62 (39), p. 307–332, 1992.

PAPERT, S. . **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PINTO, G. M. F. **Compreensão Gráfica da Derivada de uma função real em um curso de Cálculo Semi-Presencial.** 2008. 115 f. Disserta (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

PIRES, Á. **Amostragem e pesquisa qualitativa: ensaio teórico e metodológico**. In: POUPART, Jean et al. (org.) A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis RJ: Vozes, 2009. PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: APM, 2003, LISBOA. Anais. LISBOA: [s.n.], 2003. p. 25–39.

PONTE, J. P. Mathematics teachers’ professional knowledge. In: PME, 1994, Lisboa. **Anais**... Lisboa: [s.n.], 1994. p. 195–210.

POUPART, J. A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In: POUPART, J. et al. **A pesquisa Qualitativa:** enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2012. p. 215–153.

RAMOS, V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações.** 2009. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2009.

RAYMUNDO, R. M. **Um estudo sobre interações em fóruns de discussão de um curso de formação inicial de professores de Matemática a distância.** 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

ROJAS, N. **Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas:** un estudio de casos. 2014. 345 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Granada, Granada, 2014.

ROSA, M. **A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game:** relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. 2008. 267f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2008.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 2005. 8, p. 255–281.

ROWLAND, T. et al. **Developing Primary Mathematics Teaching:** reflecting on practice with the Knowledge Quartet. London: Sage: [s.n.], 2009.

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em uma ambiente virtual de aprendizagem:** o caso da geometria euclidiana espacia**l**. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2006.

SANTOS, S. C. **Um Retrato de uma Licenciatura em Matemática a Distância sob a Ótica de seus Alunos Iniciantes**. 2013. 208 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2013.

SANTOS, M. B. **Processos de comunicação da disciplina de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância do CESAD/UFS/UAB**. 2012. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, 2012.

SCHOENFELD, A. H. **How we think**. Nova York: Routledge: [s.n.], 2010.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner:** How professionals think in action. Nova York: Basic Books, 1983.

SCHWAB, J. J. Education and the structure of the disciplines. **Science, curriculum and liberal education**, v. Chicago: University of Chicago Press, n. I. Westbury& N.J. Wilkof, p. 229–272, 1978.

SCUCUGLIA, R. **A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas**. 2006. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2006.

SELDEN, J.; SELDEN, A.; MASON, A. (1994). **Even good calculus students can't solve non-routine problems.** In: KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Eds). Research issues in undergraduate mathematics learning: preliminary analyses and results. Washington, Estados Unidos. The Mathematical Association of America, p. 19-26.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 4, p. 4–14, 1986.

SIMON, M. A. (2000). **Research on the Development of Mathematics Teachers: The Teacher Development Experiment**. En Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (Eds.) Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 335-359). Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.

SKEMP, R. **The psychology of learning mathematics**. Middlesex: England: Penguin books, 1978.

SOUTO, D. L. P. **Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância online**. 2013. 281f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2013.

SPIVAK, M. **Calculus:** Cálculo Infinitesimal. Barcelona: Reverté S. A, 1978.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. v. 1.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity**. In: Educational Studies in Mathematics.12, 151-169.

TAN, S. T. **Matemática Aplicada a administração e economia**. 2ª ed. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2008.

TIROSH, D. Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 22, p. 125–147, 2000.

UFMS. **Projeto Político Pedagógico:** licenciatura em Matemática a distância. Campo Grande: UFMS, 2012.

VASCO, D. **Conocimiento especializado del profesor de álgebra:** un estudio de casos en el nivel universitario. 2016. 644 f. Tese (Doctorado en Didácticas de la Matemática) – Universidad de Huelva, Huelva, Espanha, 2016.

VEGA, E. A. S. **Interacción de un colectivo de humanos-con-medios en un curso de matemáticas a distancia virtual**. 2016. 245f.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2016.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402f.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 1999.

VIEL, S. R. **Um olhar sobre a formação de professores a distância:** o caso da CEDERJ/UAB. 2011. 219 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2011.

ZABEL, M. . **Luz, Câmeras, Flashs:** uma compreensão sobre a disciplina de Prática de Ensino de Matemática a distância**.** 2014. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2014.

ZAMPIERI, M. T. **A comunicação em uma disciplina de Introdução a Estatística:** um olhar sob a formação inicial de professores de matemática a distância**.** 2013. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2013.

ZULATTO, R. B. A. **A naturezada aprendizagem matemática em um ambienete online de formação continuada de professores.** 2007. 174 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2007.

YIN. R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 3 ed., Porto Alegre: Bookman, 2005.

YIN. R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

APÊNDICE 1 – PESQUISAS SOBRE DERIVADA

Título (AUTOR, ano)	Objetivo da pesquisa	Informações apresentadas na pesquisa
Conceito De Derivada: Uma proposta para seu ensino e aprendizagem (DALL'ANESE, 2000)	[...] este trabalho apresenta uma sequência didática com atividades apresentadas em fichas, em que os alunos trabalham em duplas, para perceber a essência do conceito de derivada. [...] [as análises] permite[m] levantar conclusões sobre os ganhos desta escolha pedagógica para o ensino e aprendizagem do conceito de derivada (DALL'ANESE, 2000, p. 6)	Esta pesquisa apresenta informações sobre: - A Derivada a partir de livros didáticos (8); - Elementos históricos; - Aplicação da Derivada; - Levantamento bibliográfico de pesquisas que abordam a Derivada; - Sequência didática para ensinar 'Derivada' a partir da taxa de variação.
Derivada de uma Função num ponto: Uma forma significativa de introduzir o conceito (D'AVOGLIO, 2002)	[...] investigar se a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, por meio de conceitos familiares aos alunos e com um certo relacionamento com o cotidiano deles, como o de velocidade por exemplo, produziria efeitos para a melhoria da aprendizagem dessa noção (D'AVOGLIO, 2002, p. 7)	- Levantamento bibliográfico de pesquisas sobre Derivada; - Sequência didática para ensino de Derivada a partir da velocidade;
Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual (MEYER, 2003)	Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico. Objetiva investigar elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual*, relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. É referenciada na teoria de David Tall e Shlomo Vinnes sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual* (MEYER, 2003, s /n).	- Levantamento bibliográfico de pesquisas sobre Derivada; - Dificuldades de compreensão desse conceito; - Diferenciação entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual da Derivada; - Aplicação da Derivada;
Aspectos Processuais e Estruturais da noção de Derivada (LEME, 2003)	Esta pesquisa pretendeu buscar possíveis causas de dificuldades para a compreensão conceitual da noção de derivada (LEME, 2003, p. 10)	- Levantamento bibliográfico de pesquisas sobre Derivada; - A Derivada nos livros didáticos (34) - Etapas da conceitualização da Derivada; - Tipos de representações da Derivada; - Aspectos processuais e estruturais da Derivada; - Estágios cognitivos na aprendizagem da noção de Derivada; - Arquitetura conceitual da Derivada; - Desenvolvimento do pensamento científico
Registros de Representação na noção de derivada e o processo de aprendizagem (GODOY, 2003)	Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico, que tem como objetivo investigar o conhecimento de alunos que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral sobre a noção de derivada, à luz da teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval (GODOY, 2004, p. s/n)	- A Derivada nos livros didáticos (4) - Levantamento bibliográfico de pesquisas sobre Derivada; - Registros de Representação Semióticos do conceito de Derivada;
Descrições e conflitos	O objetivo deste trabalho é discutir o papel de limitações	- Levantamento bibliográfico sobre Derivada;

computacionais: o caso da derivada (GIRALDO, 2004)	associadas com descrições de conceitos para a delimitação de objetos de ensino no campo do planejamento pedagógico. O foco principal é no caso particular de descrições computacionais para o conceito de derivada (GIRALDO, 2004, p. ii).	- Imagem de conceito e definição de conceito; - Fatores de conflito pessoal e conflito cognitivo; - Imagens de conceito e unidades cognitivas; - O uso do computador no ensino da Derivada (softwares matemáticos) - Obstáculos epistemológicos
Compreensão Gráfica da Derivada de uma Função Real em um curso de Cálculo Semipresencial (PINTO, 2008)	Nesta pesquisa verificamos de que forma os alunos da Educação a Distância do Consórcio CEDERJ – Fundação CECIERJ compreendem graficamente o conceito de derivada. [...] analisamos a flexibilidade dos alunos em transitar de uma a outras formas de representação da derivada de uma função. Concluímos que esta compreensão é falha e insuficiente, sendo os alunos em sua maioria incapazes de compreender a derivada em situações gráficas (PINTO, 2008, p. 3).	- Formação do conhecimento matemático (SFARD, 1991; DUBINSKY – APOS – BREIDENBACH et al.; 1992; PALIS, 2003; CLARK et al., 1997) - Construção, análise e utilização instrumental de gráficos de funções; (TALL, 1997); - Estudo e ensino de Derivadas (ALMEIDA; VISEU, 2002; ORTON, 1983; GIRALDO, 2003; ASIALA et al., 1997) - EaD no Brasil
Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio (ANDRÉ, 2008)	O objetivo desta pesquisa é apresentar, aplicar e analisar os resultados de uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio. Optamos por uma abordagem baseada na teoria da imagem de conceito e raiz cognitiva (ANDRÉ, 2008, p. ix)	- O ensino da Derivada pela taxa de variação instantânea; - Sequência proposta para o ensino do conceito de Derivada
Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura, sobre derivada e suas aplicações (RAMOS, 2009)	Esta é uma pesquisa diagnóstica, cujo objetivo é investigar os conhecimentos dos alunos que já passaram por um curso de Cálculo e estudaram “a derivada”, quanto a suas aplicações e tentar classificar as dificuldades desses alunos diante dessas atividades. [...] após a análise dos resultados, observamos que os alunos manipulam bem as representações algébricas, mas muitos deles não conseguem identificar os procedimentos necessários, nem fazer uso do conceito de derivada, para a resolução de uma determinada situação de aplicação (RAMOS, 2009, p. 7)	- Levantamento bibliográfico sobre Derivada; - Gênese histórica da Derivada (BOYER, KEPLER, EVES) - Registros de Representação Semiótica (DUVAL)
Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica (OLIVEIRA, 2011)	Este trabalho apresenta alguns métodos elaborados por eminentes matemáticos, como Fermat, Barrow, Newton e Descartes, para a determinação do conceito de derivada, a partir da reta tangente a uma curva em um dado ponto. O objetivo principal é favorecer a compreensão deste conceito, utilizando a Educação **pela** História da Matemática (OLIVEIRA, 2011, p. 7)	- História do Cálculo - O conceito de tangente - Diversos métodos para a determinação da tangente - Problemas do Cálculo - O Cálculo (Newton; Leibniz) - Sequência de ensino
	O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de uma	- Panorama geral sobre o ensino de Cálculo;

Proposta de uma sequência didática para conceitualização de derivada como taxa de variação instantânea (LEHMANN, 2011)	sequência didática que pudesse auxiliar os alunos no processo de ensino-aprendizagem em relação ao conceito de derivada como taxa de variação instantânea. [...] O referencial teórico adotado foi o da Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud [...]. A análise geral dos resultados permitiu concluir que, com a sequência didática, os alunos apresentaram desempenho satisfatório e conseguiram assimilar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, além de uma melhor familiarização com a questão das funções e suas diferentes representações. (LEHMANN, 2011, p. 6)	- O conceito de Derivada como taxa de variação instantânea;
Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação (LIMA, 2012)	Esta pesquisa teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a construção do conceito de derivada a partir da noção de variação. (LIMA, 2012, p. 7)	- Pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Cálculo - O ensino e aprendizagem do conceito de Derivada - Propostas metodológicas para o ensino de Derivada - A Derivada como taxa de variação instantânea - Sequência didática para o ensino de Derivada
Aplicação das derivadas no Cálculo I: Atividades investigativas utilizando o Geogebra (GONÇALVES, 2012)	O presente trabalho se propõe a apresentar / discutir as aplicações das derivadas na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior, visando contribuir para a formação de futuros Professores de Matemática. O trabalho fundamentou-se teoricamente em reflexões sobre o ensino de Cálculo, particularmente o ensino de derivadas, Investigação Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação – TICE’s (GONÇALVES, 2012, p. 7)	- A Educação Matemática no Ensino Superior e o ensino de Cálculo; - Ensino de Derivada no Cálculo; - Aplicações da Derivada; - Atividades investigativas sobre Derivada;
O tratamento dado por livros didáticos ao conceito da derivada (LOBO, 2012)	Pesquisas revelam que existem grandes dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e, em particular, da Derivada. Elas já têm apontado algumas causas de tais dificuldades. A utilização do livro didático, muitas vezes como um guia das aulas de Cálculo, pode reduzir o estudo de Derivada a algoritmos que levam a uma aplicação imediata de resultados, sem destacar o cerne desse conceito. Dessa forma escolhemos realizar uma pesquisa buscando investigar como livros didáticos abordam esse conteúdo (LOBO, 2012, p. 5).	- O conceito de Derivada nos livros didáticos; - Estudo da Derivada a partir de Newton; - Estudo da Derivada a partir de Leibniz; - Estudo da Derivada a partir de Cauchy; - Estudo da Derivada a partir de Weierstrass;
Mapas conceituais digitais como elementos sinalizadores da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral	O presente estudo tem por objetivo analisar o uso de mapas conceituais digitais no Ensino Superior, construídos com o *software CmapTools*, como elemento sinalizador da aprendizagem significativa de estudantes que já cursaram Cálculo Diferencial e Integral em relação ao objeto matemático	Levantamento bibliográfico sobre Cálculo e Derivada; - Aprendizagem Significativa; - Mapas conceituais e a Derivada.

(FERRÃO, 2013)	derivada (FERRÃO, 2013, p. 7)	
Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso de Geogebra (JÚNIOR, 2015)	O presente trabalho objetiva discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos relacionados a derivadas de funções reais de uma variável real no ensino de Cálculo I, a partir da visualização proporcionada pelo software GeoGebra (JUNIOR, 2015, p. vii)	- Ensino com uso de tecnologias; - Levantamento bibliográfico sobre ensino de cálculo e tecnologias; - Software Geogebra; - As contribuições da visualização à aprendizagem de Derivadas a partir de atividades exploratórias com o uso do *software* GeoGebra.
Aprendizagem em um ambiente construcionista: explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais (LOPES, 2015)	Esta pesquisa teve por objetivo analisar a aprendizagem de Derivadas de funções em um ambiente construcionista, em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada em formato de educação bimodal (parte presencial parte a distância) (LOPES, 2015, p. 6)	- Educação A distância e construcionismo; - Aplicações de Derivada de funções de uma variável; - Regra de L'Hospital; - Máximos e mínimos; - Aprendizagem sobre Derivadas em um ambiente construcionista.

Fonte: Elaborada pela autora (2017).