

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Rafael Daia Mattei

Detecção de Danos em Sistemas Mecânicos via
Observadores de Estado de Ordem Plena em
Paralelo

Ilha Solteira

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Rafael Daia Mattei

**Detecção de Danos em Sistemas Mecânicos via Observadores de
Estado de Ordem Plena em Paralelo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - Unesp como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo
Co-orientador: Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno

Ilha Solteira
2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Mattei, Rafael Daia.

M435d Detecção de danos em sistemas mecânicos via observadores de estado de ordem plena em paralelo / Rafael Daia Mattei. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
105 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2019

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo
Coorientador: Douglas Domingues Bueno
Inclui bibliografia

1. Monitoramento da integridade estrutural. 2. Detecção de danos. 3. Observadores de estado em paralelo. 4. Regulador quadrático linear.


Raiane da Silva Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Detecção de Danos em Sistemas Mecânicos via Observadores de Estado de Ordem Plena em Paralelo

AUTOR: RAFAEL DAIA MATTEI

ORIENTADOR: GILBERTO PECHOTO DE MELO

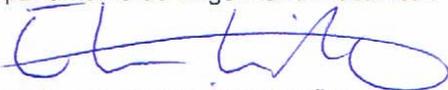
COORIENTADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / UNESP/Câmpus de Ilha Solteira



Prof. Dr. EDSON HIDEKI KOROISHI

Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Ilha Solteira, 12 de abril de 2019

Agradecimentos

Agradeço a Deus por minha vida, minha fé e por não me abandonar nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Marco Antônio Gaspar Mattei e Adriana Daia Mattei, por todo amor, compreensão e por serem meus maiores exemplos de determinação e honestidade.

Ao Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo pela orientação realizada desde a graduação, amizade, confiança e pelos conselhos que me ajudaram a tomar importantes decisões em minha vida profissional.

Ao Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno pela amizade, confiança e pelas contribuições fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção pela amizade e pelas discussões acerca da metodologia deste trabalho.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp de Ilha Solteira pela disposição em sanar minhas dúvidas ao longo deste trabalho.

Aos amigos Frederico Ribeiro, Rafael Teloli, João Francisco Trentin, Lucas Chaim, Renan Geronel, Maurício Iwanaga e João Ângelo Brogin pelo companheirismo e pela ajuda nos momentos difíceis.

À CNPq pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa 130665/2017–7 desenvolvido durante este mestrado.

Resumo

As metodologias de monitoramento da integridade estrutural baseadas em observadores de estado, em sua grande maioria, utilizam o resíduo obtido a partir da diferença entre a medida e a estimativa de dada resposta dinâmica do sistema para o processo de detecção de danos. Contudo, em determinadas situações, tem-se interesse em realizar o monitoramento através de certa resposta dinâmica que não pode ser medida diretamente. Desta forma, a principal contribuição deste trabalho é propor uma metodologia de detecção de danos para sistemas mecânicos, cujo resíduo é obtido a partir da diferença entre as estimativas do comportamento dinâmico de determinada região do sistema. Estas estimativas são geradas por dois observadores de estado de ordem plena em paralelo, ambos projetados a partir do modelo físico-matemático do sistema em monitoramento sem danos, cujos os ganhos ótimos são determinados pelo método LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*. A diferença entre os observadores consiste em serem baseados em conjuntos de medidas distintos. Simulações computacionais são apresentadas para demonstrar a aplicação desta metodologia, de maneira que são discutidas as vantagens e desvantagens em monitorar o sistema utilizando diferentes tipos de força de excitação. Os resultados obtidos são satisfatórios para a detecção dos tipos de dano considerados neste trabalho.

Palavras-chave: Monitoramento da integridade estrutural. Detecção de danos. Observadores de estado em paralelo. Regulador quadrático linear.

Abstract

Structural health monitoring methodologies based on state observers, for the most part, use the residual obtained from the difference between the measurement and the estimate of the given dynamic response of the system to the damage detection process. However, in certain situations, it is interesting to carry out the monitoring through a certain dynamic response that can not be measured directly. In this way, the main contribution of this work is to propose a methodology of damage detection for mechanical systems, whose residue is obtained from the difference between the estimates of the dynamic behavior of a certain region of the system. These estimates are generated by two parallel full-order state observers, both designed from the physical-mathematical model of the monitoring system without damages, whose optimal gains are determined by the LQR (Linear Quadratic Regulator) method. The difference between observers is that they are based on different sets of measures. Computational simulations are presented to demonstrate the application of this methodology, so that the advantages and disadvantages of monitoring the system using different types of excitation force are discussed. The results obtained are satisfactory for the detection of the types of damage considered in this work.

Keywords: Structural health monitoring. Damage detection. Parallel state observers. Linear quadratic regulator.

Lista de Figuras

1	Sistema massa-mola-amortecedor	33
2	Viga engastada	35
3	Elemento de viga de Euler-Bernoulli	36
4	Viga engastada representada por 50 elementos de viga de Euler-Bernoulli	37
5	Processo de concatenação para n_e elementos de viga de Euler-Bernoulli	38
6	Viga engastada contendo uma trinca	41
7	Seção transversal da região trincada	42
8	Relação entre I_d e I em função da profundidade da trinca	43
9	Diagrama de blocos do observador de estado	47
10	Diagrama de blocos do observador de estado de ordem plena	50
11	Diagrama de blocos dos observadores de estado de ordem plena em paralelo	53
12	Representação esquemática das posições dos sensores, da entrada e das estimativas das respostas dinâmicas	59
13	$y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	59
14	$y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	60
15	$y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	60
16	$y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	60
17	$y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	61
18	$y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	61
19	$\Delta_{1,r}^{\{\{3\}\{5\}\}}$ para o sistema excitado pela força impulso	62
20	$\Delta_{1,r}^{\{\{3\}\{5\}\}}$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	62
21	$\Delta_{1,r}^{\{\{3\}\{5\}\}}$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	63

22	$\Delta_{6,r}^{\frac{\{8\}\{10\}}{\{10\}}}$	para o sistema excitado pela força impulso	65
23	$\Delta_{6,r}^{\frac{\{8\}\{10\}}{\{10\}}}$	para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	65
24	$\Delta_{6,r}^{\frac{\{8\}\{10\}}{\{10\}}}$	para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	66
25	$\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$	para o sistema sem danos excitado pela força <i>chirp</i>	67
26	$\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$	para o sistema com o dano do tipo <i>open crack</i> (5%) excitado pela força <i>chirp</i>	68
27		Representação esquemática das posições dos sensores, da entrada e das estimativas das respostas dinâmicas	69
28	$y^{\{51\}}(t)$ e $y^{\{93\}}(t)$	para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	70
29	$y^{\{151\}}(t)$ e $y^{\{193\}}(t)$	para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	70
30	$y^{\{51\}}(t)$ e $y^{\{93\}}(t)$	para a viga excitada pela força <i>burst</i>	70
31	$y^{\{151\}}(t)$ e $y^{\{193\}}(t)$	para a viga excitada pela força <i>burst</i>	71
32	$\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$	para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	72
33	$\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$	para a viga excitada pela força <i>burst</i>	72
34	$\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}}$	para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	74
35	$\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}}$	para a viga excitada pela força <i>burst</i>	74
36	$\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$	para a viga sem danos excitada pela força <i>burst</i>	76
37	$\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$	para a viga com o dano do tipo <i>open crack</i> (1,73%) excitada pela força <i>burst</i>	76
38		Espectrograma da força impulso para o sistema massa-mola-amortecedor	88
39		Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	89
40		Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	89
41		Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	90
42		Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso	90
43		Espectrograma da força <i>chirp</i> para o sistema massa-mola-amortecedor	91
44		Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	92

45	Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	92
46	Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	93
47	Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>chirp</i>	93
48	Espectrograma da força <i>burst</i> para o sistema massa-mola-amortecedor	94
49	Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	95
50	Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	95
51	Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	96
52	Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força <i>burst</i>	96
53	Espectrograma da força <i>chirp</i> para a viga engastada	97
54	Espectrograma de $y^{\{51\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	98
55	Espectrograma de $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	98
56	Espectrograma de $y^{\{151\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	99
57	Espectrograma de $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	99
58	Espectrograma da força <i>burst</i> para a viga engastada	100
59	Espectrograma de $y^{\{51\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>burst</i>	101
60	Espectrograma de $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>burst</i>	101
61	Espectrograma de $y^{\{151\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>burst</i>	102
62	Espectrograma de $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força <i>burst</i>	102
63	$q_{m_1}(t)$ e $q_{m_2}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	104
64	$\dot{q}_{m_1}(t)$ e $\dot{q}_{m_2}(t)$ para a viga excitada pela força <i>chirp</i>	105

Lista de Tabelas

1	Parâmetros físicos do sistema massa-mola-amortecedor	33
2	Frequências naturais e razões de amortecimento do sistema massa-mola-amortecedor	34
3	Parâmetros físicos da viga engastada	35
4	Cinco primeiras frequências naturais da viga engastada para diferentes números de elementos	37
5	Razões de amortecimento do 1 ^o ao 5 ^o modo de vibrar da viga engastada .	39
6	$\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ para o sistema excitado pelas forças impulso, <i>chirp</i> e <i>burst</i>	64
7	$\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$ para o sistema excitado pelas forças impulso, <i>chirp</i> e <i>burst</i>	66
8	Profundidades da trinca	71
9	$\Delta_{1,r}^{\{51\}\{93\}}$ para a viga excitada através das forças <i>chirp</i> e <i>burst</i>	73
10	$\Delta_{101,r}^{\{151\}\{193\}}$ para a viga excitada através das forças <i>chirp</i> e <i>burst</i>	75

Lista de Símbolos

- A** - Matriz de estado em coordenadas físicas
- A_m** - Matriz de estado em coordenadas modais
- A_{m_i}** - Matriz de estado do *i*-ésimo modo de vibrar
- b_{m_i}^{*}** - Vetor de entrada do *i*-ésimo modo de vibrar
- B** - Matriz de entrada em coordenadas físicas para espaço de estados
- B_m** - Matriz de entrada em coordenadas modais para espaço de estados
- B_{m_i}** - Matriz de entrada do *i*-ésimo modo de vibrar para espaço de estados
- B_m^{*}** - Matriz de entrada em coordenadas modais
- B_o** - Matriz de posicionamento das entradas
- c_{m_{q_i}}** - Vetor de saída do deslocamento do *i*-ésimo modo de vibrar
- c_{m_{v_i}}** - Vetor de saída da velocidade do *i*-ésimo modo de vibrar
- C** - Matriz de saída em coordenadas físicas para espaço de estados
- C_m** - Matriz de saída em coordenadas modais para espaço de estados
- C_{m_i}** - Matriz de saída do *i*-ésimo modo de vibrar para espaço de estados
- C_{o_q}** - Matriz de saída dos deslocamentos em coordenadas físicas
- C_{m_q}** - Matriz de saída dos deslocamentos em coordenadas modais
- C_{o_v}** - Matriz de saída das velocidades em coordenadas físicas
- C_{m_v}** - Matriz de saída das velocidades em coordenadas modais
- D** - Matriz de amortecimento
- D_m** - Matriz de amortecimento modal
- e_t** - Critério de convergência para o número de elementos de viga
- E** - Módulo de elasticidade longitudinal
- f₀** - Frequência inicial da força *chirp* linear
- f_f** - Frequência final da força *chirp* linear
- f_b** - Frequência da força *burst*
- f_{n_i}** - *i*-ésima frequência natural em *Hz*
- f_{n_i}^(n_e)** - *i*-ésima frequência natural em *Hz* para *n_e* elementos
- h** - Altura da seção transversal da viga

I	-	Momento de inércia de área da seção transversal da viga
I_d	-	Momento de inércia de área da seção transversal da viga com dano
J	-	Índice de desempenho
k	-	Elemento de mola sem dano
k_d	-	Elemento de mola com dano
\mathbf{K}	-	Matriz de rigidez
\mathbf{K}_e	-	Matriz de rigidez do elemento de viga
\mathbf{K}_m	-	Matriz de rigidez modal
l	-	Comprimento da viga
l_e	-	Comprimento do elemento de viga
\mathbf{L}	-	Matriz de ganho do observador de estado
m	-	Número de saídas
\mathbf{M}	-	Matriz de massa
\mathbf{M}_e	-	Matriz de massa do elemento de viga
\mathbf{M}_m	-	Matriz de massa modal
n	-	Número de variáveis de estado em coordenadas físicas
\bar{n}	-	Número de variáveis de estado em coordenadas modais
n_e	-	Número de elementos de viga
n_g	-	Número de graus de liberdade
n_m	-	Número de modos de vibrar
\mathbf{O}	-	Matriz de observabilidade
p	-	Profundidade da trinca
\mathbf{P}	-	Solução da equação matricial de Riccati
$q_{m_i}(t)$	-	Deslocamento do i -ésimo modo de vibrar
$\dot{q}_{m_i}(t)$	-	Velocidade do i -ésimo modo de vibrar
$\ddot{q}_{m_i}(t)$	-	Aceleração do i -ésimo modo de vibrar
$\mathbf{q}(t)$	-	Vetor de deslocamento em coordenadas físicas
$\mathbf{q}_m(t)$	-	Vetor de deslocamento em coordenadas modais
$\dot{\mathbf{q}}(t)$	-	Vetor de velocidade em coordenadas físicas
$\dot{\mathbf{q}}_m(t)$	-	Vetor de velocidade em coordenadas modais
$\ddot{\mathbf{q}}(t)$	-	Vetor de aceleração em coordenadas físicas
$\ddot{\mathbf{q}}_m(t)$	-	Vetor de aceleração em coordenadas modais
\mathbf{Q}	-	Matriz do método LQR
\mathbf{Q}^*	-	Matriz do método LQR
r	-	Número de entradas

R	-	Matriz do método LQR
S_e	-	Área da seção transversal da viga
t	-	Tempo
$\mathbf{u}(t)$	-	Vetor de entrada
$V[\boldsymbol{\xi}(t)]$	-	Função de Lyapunov para o erro de estimação do vetor de estado
$\mathbf{x}(t)$	-	Vetor de estado em coordenadas físicas
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	-	Vetor de estado estimado em coordenadas físicas
$\hat{\mathbf{x}}^{\{\alpha\}}(t)$	-	vetor de estado estimado via α -ésimo conjunto de saídas
$\hat{\mathbf{x}}^{\{\beta\}}(t)$	-	vetor de estado estimado via β -ésimo conjunto de saídas
$\mathbf{x}_m(t)$	-	Vetor de estado em coordenadas modais
$\mathbf{x}_{m_i}(t)$	-	Vetor de estado do i -ésimo modo de vibrar
w	-	Largura da área da seção transversal da viga
$\mathbf{W}_o(t)$	-	Grammiano de observabilidade
$\mathbf{y}(t)$	-	Vetor de saída
$\hat{\mathbf{y}}(t)$	-	Vetor de saída estimado
$\mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t)$	-	α -ésimo conjunto de saídas
$\mathbf{y}^{\{\beta\}}(t)$	-	β -ésimo conjunto de saídas
$\mathbf{y}_i(t)$	-	Saída referente ao i -ésimo modo de vibrar
Z	-	Matriz de razões de amortecimento

Letras Gregas

γ_1	-	Coefficiente para determinação do amortecimento proporcional
γ_2	-	Coefficiente para determinação do amortecimento proporcional
$\delta_{i,j}(t)$	-	Vetor de deslocamento em coordenadas físicas do elemento de viga
$\Delta_{i,d}^{\{\alpha\}\{\beta\}}$	-	Resíduo obtido via estimativas desconhecidas da i -ésima variável de estado
$\Delta_{i,o}^{\{\alpha\}\{\beta\}}$	-	Resíduo obtido via estimativas ótimas da i -ésima variável de estado
$\Delta_{i,r}^{\{\alpha\}\{\beta\}}$	-	Diferença entre os resíduos desconhecido e ótimo
ζ_i	-	Razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibrar
$\theta_i(t)$	-	Deslocamento rotacional do i -ésimo nó da viga
μ	-	Severidade de dano para o elemento de mola
$\nu_i(t)$	-	Deslocamento transversal do i -ésimo nó da viga
$\xi(t)$	-	Erro de estimação do vetor de estado
$\xi^{\{\alpha\}}(t)$	-	Erro de estimação do vetor de estado via α -ésimo conjunto de saídas
$\xi^{\{\beta\}}(t)$	-	Erro de estimação do vetor de estado via β -ésimo conjunto de saídas
ρ	-	Densidade do material
ϕ_i	-	i -ésimo modo de vibrar
Φ	-	Matriz modal
ω_i	-	i -ésima frequência natural
Ω	-	Matriz de frequências naturais

Lista de Siglas

- AFD - *Actuator Fault Detection*
- CFD - *Component Fault Detection*
- FEM - *Finite Element Method*
- FDI - *Fault Detection and Isolation*
- IFD - *Instrument Fault Detection*
- LQR - *Linear Quadratic Regulator*
- LMI - *Linear Matrix Inequalities*
- SHM - *Structural Health Monitoring*

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Objetivos	22
1.2	Contribuições do Trabalho	22
1.3	Organização do Trabalho	23
2	Modelagem Estrutural	24
2.1	Modelos Estruturais de Segunda Ordem	24
2.1.1	Modelos Estruturais em Coordenadas Físicas	25
2.1.2	Modelos Estruturais em Coordenadas Modais	25
2.2	Espaço de Estados	29
2.2.1	Espaço de Estados em Coordenadas Físicas	30
2.2.2	Espaço de Estados em Coordenadas Modais	31
2.3	Sistemas Mecânicos Utilizados nas Simulações Computacionais	33
2.3.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor	33
2.3.2	Viga Engastada	35
2.4	Modelagem do Dano Estrutural	39
2.4.1	Modelos de Dano para o Sistema Massa-Mola-Amortecedor	40
2.4.2	Modelos de Dano para a Viga Engastada	41
3	Observadores de Estado	45
3.1	Observabilidade	45
3.2	Conceito de Observador de Estado	46
3.3	Observador de Estado de Ordem Plena	49

4	Metodologia de Detecção de Danos para Sistemas Mecânicos	52
4.1	Observadores de Estado de Ordem Plena em Paralelo	52
4.2	Determinação do Ganho Ótimo via Método LQR	53
4.3	Análise do Resíduo para Detecção de Danos	55
5	Resultados e Discussões	58
5.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor	58
5.2	Viga Engastada	68
6	Considerações Finais	78
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	79
	Referências	81
	Apêndice A – Espectrogramas das Forças de Excitação e das Medidas Disponíveis dos Sistemas em Monitoramento	87
A.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor	87
A.1.1	Força Impulso	88
A.1.2	Força <i>Chirp</i>	91
A.1.3	Força <i>Burst</i>	94
A.2	Viga Engastada	97
A.2.1	Força <i>Chirp</i>	97
A.2.2	Força <i>Burst</i>	100
	Apêndice B – Medidas Disponíveis da Viga Engastada Excitada pela Força <i>Chirp</i>	104

1 Introdução

Desde o século XX os acidentes envolvendo sistemas estruturais têm despertado o interesse de engenheiros e pesquisadores em desenvolver técnicas para monitorar estruturas e identificar danos em estágio precoce, especialmente nas comunidades de engenharia civil, mecânica e aeroespacial (DOEBLING et al., 1998; FARRAR; WORDEN, 2006; RÉBIL-LAT; HAJRYA; MECHBAL, 2014; AMEZQUITA-SANCHEZ; ADELI, 2016; RABELO et al., 2017). A principal motivação do desenvolvimento das técnicas de monitoramento da integridade estrutural, do inglês *Structural Health Monitoring* (SHM), é garantir a segurança do sistema estrutural, de modo que sejam evitados acidentes catastróficos e perdas humanas (FAN; QIAO, 2011; AMEZQUITA-SANCHEZ; ADELI, 2016). De acordo com Inman et al. (2005) e Balageas, Fritzen e Güemes (2010), além desta motivação, o fator econômico também impulsiona o desenvolvimento destas técnicas, especialmente devido aos altos gastos e perdas relacionadas à presença de danos e seus efeitos nas estruturas.

Farrar e Worden (2012) definem SHM como um processo de implementação de uma estratégia para detecção de danos em estruturas, sendo que a maior parte destes processos envolve a observação da estrutura usando as medidas das respostas dinâmicas, a extração de indicadores sensíveis ao dano a partir das medidas e a análise estatística desses indicadores para verificar a condição estrutural real do sistema.

As técnicas de detecção de danos baseadas em medições de vibração foram inicialmente empregadas na indústria aeroespacial e em plataformas petrolíferas *off-shore* entre a metade da década de 1970 e o início de 1980 (FARRAR; DOEBLING, 1999). Desta maneira, SHM pode ser considerado uma tecnologia emergente que combina sensores modernos com algoritmos computacionais capazes de realizar o monitoramento estrutural (IHN; CHANG, 2008).

O processo de SHM baseado na análise das medidas de vibração pode ser separado em quatro níveis (RYTTER, 1993; DOEBLING et al., 1998; WANG; HAO, 2013; JANAPATI et al., 2016):

Nível 1: Detecção do dano presente na estrutura;

Nível 2: Detecção e localização do dano;

Nível 3: Detecção, localização e quantificação da severidade do dano;

Nível 4: Detecção, localização, quantificação da severidade do dano e determinação da vida remanescente da estrutura.

de modo que na maioria dos problemas de SHM o fundamental é atingir o nível 1, especialmente porque em aplicações reais de engenharia em geral esta ainda é uma tarefa complexa (WORDEN; MANSON; FIELLER, 2000; PAPTHEOU et al., 2010; JANAPATI et al., 2016). Segundo Inman et al. (2005), Adewuyi, Wu e Serker (2009) e Klepka et al. (2014), o primordial é detectar com confiabilidade se o dano está presente na estrutura, visto a complexidade geométrica das estruturas reais, presença de incertezas, desconhecimento de fontes de excitação, entre outras.

Nestas técnicas de SHM são determinados, de acordo com o interesse na região a partir da qual se deseja monitorar o sistema, os pontos onde são posicionados sensores capazes de medir suas respostas dinâmicas. Em certas situações práticas, alguns pontos que se têm interesse em monitorar podem ser de difícil acesso, ou são inacessíveis para o posicionamento de sensores (YI; LI; GU, 2011; SUN; BÜYÜKÖZTÜRK, 2015; KHUC; CATBAS, 2017), como por exemplo, nas junções de componentes, regiões no interior da estrutura, entre outros. Também, especialmente por razões econômicas, em geral é reduzido o número de sensores disponíveis para serem embarcados no sistema em monitoramento sem alterar de forma significativa os custos de projeto e operações de sistema (GUO et al., 2004; YI; LI; GU, 2011; FENG; FENG, 2017). Ainda, para diversos sistemas não é possível prever, nas etapas de projeto, todas as regiões que apresentam danos durante a operação e, então, apenas durante o uso se apresenta a necessidade da inclusão de sensores em localizações específicas.

Uma das alternativas capaz de superar estes desafios consiste em se utilizar um dispositivo (ou programa de computador) baseado no modelo físico-matemático que represente o comportamento do sistema em monitoramento, sendo este capaz de estimar as repostas dinâmicas, nas localizações que se tem necessidade de monitorar, a partir das medidas nos pontos que se têm sensores e do conhecimento das fontes de excitação. No sentido mais completo do termo, o processo de estimação é comumente chamado de observação, sendo o dispositivo capaz de realizar esta tarefa denominado observador de estado (OGATA, 1998).

O processo de estimação do estado¹ de um sistema dinâmico foi abordado inicialmente em Kalman (1959), Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961), sendo o observador de estado utilizado em aplicações de sistemas de controle no domínio do tempo com realimentação, visto que nem todas as variáveis do vetor de estado do sistema são mensuráveis e, portanto, não estão disponíveis para realimentação (LUENBERGER, 1964; LUENBERGER, 1966; LUENBERGER, 1971). De tal maneira torna-se necessário utilizar o observador para estimá-las, especialmente para se construir um sinal de controle.

No contexto de detecção de danos e/ou falhas² em sistemas dinâmicos, os métodos quantitativos de detecção e isolamento de falhas baseados em modelos físicos-matemáticos, do inglês *Model-Based Fault Detection and Isolation* (FDI), utilizam a comparação das medidas disponíveis do sistema em monitoramento com informações a priori representadas pelo modelo (CHOW; WILLSKY, 1984; GERTLER, 1988; FRANK, 1990; FRANK; DING, 1994; POULIEZOS; STAVRAKAKIS, 1994; HEREDIA et al., 2008; POON et al., 2017). De acordo com o tipo de sistema que se deseja monitorar, tais métodos podem ser separados em três classes: detecção de falhas em instrumentos, do inglês *Instrument Fault Detection* (IFD); detecção de falhas em componentes, do inglês *Component Fault Detection* (CFD); e detecção de falhas em atuadores, do inglês *Actuator Fault Detection* (AFD), de modo que o projeto do método de detecção de falhas para cada tipo de sistema é distinto (FRANK, 1990; POULIEZOS; STAVRAKAKIS, 1994; KOBAYASHI; SIMON, 2003). Em relação ao tipo de abordagem empregada, tais métodos podem ser divididos em métodos de redundância analítica ou geração de resíduo e estimação de parâmetros, no entanto, muitos pesquisadores não consideram esta distinção e incluem essas duas abordagens na mesma categoria (POULIEZOS; STAVRAKAKIS, 1994).

Nos métodos de redundância analítica, o observador de estado, através das medidas do sistema monitorado e do conhecimento das fontes de excitação, estima determinada medida e a partir do resíduo gerado, sendo este a diferença entre a medida e a estimativa obtido através de técnicas de processamento de sinais, detecta-se a presença de falhas no sistema (ou no próprio sensor) (CLARK, 1978; WATANABE; HIMMELBLAU, 1982; CHOW; WILLSKY, 1984; FRANK, 1990; KOBAYASHI; SIMON, 2003; GAO; CECATI; DING, 2015). Gertler (1988) menciona que o resíduo pode ser gerado utilizando observadores de estado em paralelo. Segundo o autor, dado dois observadores baseados em conjuntos de medidas diferentes, o resíduo pode ser gerado a partir da diferença entre as estimativas do estado do sistema obtidas por cada observador, de forma que o resíduo

¹O conceito de estado de um sistema dinâmico é apresentado no capítulo 2.

²As definições de dano e falha são apresentadas no capítulo 2.

torna-se independente da disponibilidade das medidas das respostas dinâmicas da região a partir da qual se tem interesse em monitorar o sistema. Esta forma de geração de resíduo para detecção de falhas pode ser encontrada em [Tylee \(1983\)](#), [Patton e Willcox \(1985\)](#) e [Wünnenberg, Clark e Frank \(1985\)](#).

De acordo com [Frank e Ding \(1994\)](#), o uso de observadores de estado em FDI é baseado em um número idealizado de hipóteses, sendo que uma delas é que o modelo físico-matemático do sistema é conhecido. Segundo os autores, esta hipótese não é totalmente satisfeita na prática, devido às incertezas de parâmetro do sistema e pelas características das perturbações externas e ruídos de medida serem desconhecidas. Devido a isto, o problema de robustez dos observadores tornou-se um dos principais tópicos de estudo nestas metodologias de detecção de falhas ([POULIEZOS; STAVRAKAKIS, 1994](#)), sendo o principal objetivo projetar observadores de estado com máxima sensibilidade para a presença de falhas no sistema e mínima sensibilidade para incertezas ([CHOW; WILLSKY, 1984](#)). Os estudos relacionados a robustez de observadores em FDI podem ser vistos em [Wünnenberg e Frank \(1987\)](#), [Gertler \(1988\)](#), [Ding e Frank \(1989\)](#), [Gertler \(1991\)](#), [Edwards, Spurgeon e Patton \(2000\)](#), [Patton e Chen \(2000\)](#), [Patton et al. \(2010\)](#), [Liu et al. \(2016\)](#) e [Asgari e Yazdizadeh \(2018\)](#).

[Melo \(1998\)](#) menciona que a principal aplicação do observador de estado, até aquela data, envolve problemas de controle e detecção de falhas em sensores, atuadores e componentes. O autor propõe uma metodologia de detecção, localização e quantificação de falhas, especialmente para sistemas mecânicos lineares, de forma que este processo é realizado por um projeto de múltiplos observadores, denominado "banco de observadores" pelo autor, sendo cada um para um específico tipo de falha. Em [Zhang, Polycarpou e Parisini \(2002\)](#) foi desenvolvido um método robusto de monitoramento *online* para detecção e isolamento de falhas abruptas e incipientes em sistemas não lineares e com incertezas de parâmetros, sendo esta tarefa desempenhada por um banco de observadores adaptativos³ não lineares. A aplicação desta metodologia é apresentada para dois tipos de sistemas mecânicos, no caso, para o oscilador de Van de Pol e para um sistema de hidráulico de três tanques.

Em [Bhangu et al. \(2005\)](#) pode ser vista uma aplicação realizada em um sistema elétrico. No trabalho é abordada uma técnica de estimação *online* de estado para prever o "estado de carga" e o "estado de saúde"⁴ de baterias de chumbo-ácido para veículos

³Observadores adaptativos são aqueles que realizam "adaptações" relacionadas a parâmetros desconhecidos do sistema enquanto estimam o estado ([BESANÇON, 2000](#)).

⁴Os autores utilizam as expressões "estado de carga" e "estado de saúde" para definirem a condição de integridade dos componentes da bateria.

híbridos-elétricos, de modo que são utilizados em conjunto filtros de Kalman⁵ para monitorar o "estado de carga" e filtros de Kalman estendidos para monitorar o "estado de saúde". Jiang, Staroswiecki e Cocquempot (2006) apresentam uma abordagem de detecção *online* de falhas para sistemas não lineares utilizando observadores de estado adaptativos, de modo que este processo de detecção é acoplado a um controlador capaz de atenuar os efeitos da falha no desempenho do sistema.

Em Zarei e Poshtan (2010) foi desenvolvido um método de detecção de falhas para sistemas não lineares robusto à entradas desconhecidas. Nesta abordagem é proposto um observador não linear capaz de atenuar os efeitos de tais entradas no processo de detecção de falhas em sensores que monitoram um processo químico altamente não linear. Ferrari, Parisini e Polycarpou (2012) apresentam uma metodologia de detecção e isolamento de falhas para sistemas dinâmicos de grande porte, discretos no tempo, não lineares e com incertezas de parâmetro. Nesta abordagem, para superar problemas referentes à implementação de um esquema centralizado de monitoramento, é realizada a divisão do sistema em subsistemas interconectados, de forma que para cada subsistema é projetado um observador baseado em suas medidas e medidas de subsistemas adjacentes.

Witczak et al. (2016) propõe uma abordagem para detecção robusta de falhas em uma classe de sistemas não lineares discretos no tempo. Nesta metodologia são consideradas duas classes de incerteza, a entrada desconhecida e o ruído de medida. O objetivo consiste em realizar o monitoramento *online*, desacoplando o efeito da entrada desconhecida e minimizando o efeito do ruído de medida ao longo do tempo. A principal vantagem desta abordagem consiste na simplicidade em reduzir um problema de estimação de falhas para uma formulação de desigualdades matriciais. Em Asgari e Yazdizadeh (2018) é apresentado um método de detecção e isolamento de falhas em sensores, atuadores e componentes de um dispositivo de acionamento mecânico de uma turbina eólica, sendo o processo de monitoramento robusto a entradas desconhecidas e ruído de medida.

As metodologias de detecção de danos e/ou falhas abordadas nos trabalhos de Melo (1998), Zhang, Polycarpou e Parisini (2002), Bhangu et al. (2005), Jiang, Staroswiecki e Cocquempot (2006), Zarei e Poshtan (2010), Ferrari, Parisini e Polycarpou (2012), Witczak et al. (2016) e Asgari e Yazdizadeh (2018), bem como na grande maioria dos trabalhos desta área, são caracterizadas por utilizarem o resíduo gerado pela diferença entre determinada medida do sistema e sua estimativa no processo de monitoramento. Contudo, em situações que se tem interesse em monitorar o sistema a partir das repostas dinâmicas de

⁵Filtros de Kalman e sua versão estendida são tipos de observadores de estado, cuja definição é apresentada no capítulo 3.

dada região que apresenta indisponibilidade para o posicionamento de sensores, tem-se que esta forma de geração de resíduo não é viável.

Neste contexto, este trabalho apresenta uma metodologia capaz de realizar o monitoramento da integridade estrutural de sistemas mecânicos, de forma que o resíduo utilizado para a detecção de danos é independente das medidas disponíveis do sistema. O resíduo, neste caso, é gerado a partir das estimativas do comportamento dinâmico da região através da qual se tem interesse em monitorar o sistema, sendo tais obtidas por dois observadores de estado de ordem plena em paralelo, os quais são baseados em conjuntos de medidas distintos. Além disto, os observadores são projetados a partir do modelo físico-matemático do sistema sem danos, sendo esta uma tendência atual das técnicas de SHM, especialmente devido a dificuldade em se identificar modelos que representam o comportamento do sistema com diversos possíveis tipos de danos ([HEYDARZADEH; NOURANI, 2016](#)).

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é detectar danos em sistemas mecânicos, utilizando medidas de vibração, em regiões que não existem sensores disponíveis, a partir da comparação entre as estimativas do comportamento dinâmico.

Os objetivos secundários deste trabalho são:

- Monitorar a integridade estrutural do sistema utilizando observadores de estado de ordem plena baseados exclusivamente no modelo físico-matemático do sistema sem danos;
- Analisar as vantagens e desvantagens em utilizar diferentes tipos de força de excitação no processo de detecção de danos.

1.2 Contribuições do Trabalho

As contribuições atingidas neste trabalho são:

- Proposição de uma alternativa para monitorar sistemas mecânicos a partir de determinada resposta dinâmica que não pode ser medida diretamente;
- Apresentação de uma alternativa para se determinar o ganho ótimo do observador de estado de ordem plena através do método LQR sem utilizar o princípio da dualidade.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em 6 capítulos e 2 apêndices, sendo organizado da seguinte forma:

Capítulo 1: apresenta as motivações do desenvolvimento das técnicas de SHM, bem como seus principais objetivos e fundamentos. É realizada uma breve revisão bibliográfica acerca do uso de observadores de estado no processo de monitoramento de sistemas dinâmicos. Ainda são descritos os objetivos e principais contribuições deste trabalho;

Capítulo 2: neste capítulo é abordado o modelo físico-matemático que representa o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, sendo descrita sua representação em coordenadas físicas e modais. Também são apresentados os modelos dos sistemas mecânicos utilizados nas simulações computacionais deste trabalho, bem como os modelos de dano empregados;

Capítulo 3: neste capítulo são apresentados o conceito de observabilidade e a definição de observador de estado. São descritos alguns tipos de observadores, sendo enfatizado os observadores de estado de ordem plena;

Capítulo 4: neste capítulo é apresentada a metodologia de monitoramento da integridade estrutural proposta neste trabalho. São descritos o esquema dos observadores de estado de ordem plena em paralelo, a forma de geração do resíduo para detecção de danos e como é determinado o ganho ótimo dos observadores através do método LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*.

Capítulo 5: são apresentadas as discussões acerca dos resultados obtidos através das simulações computacionais para o método de detecção de danos proposto neste trabalho;

Capítulo 6: são apresentadas as considerações finais deste trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

Apêndice A: é apresentada uma breve discussão acerca dos espectrogramas das forças de excitação e das medidas disponíveis dos sistemas mecânicos utilizados nas simulações computacionais;

Apêndice B: é apresentada uma discussão a respeito das medidas disponíveis de uma viga engastada excitada pela força *chirp*.

2 Modelagem Estrutural

O método de detecção de danos proposto neste trabalho está inserido em uma classe cuja principal característica é utilizar o modelo físico-matemático do sistema no processo de monitoramento da integridade estrutural. Neste capítulo é descrito o modelo físico-matemático que pode representar o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos e, também, são apresentados os sistemas utilizados nas simulações computacionais.

2.1 Modelos Estruturais de Segunda Ordem

O comportamento de sistemas dinâmicos, como por exemplo, sistemas mecânicos, elétricos, eletromecânicos, entre outros, pode ser representado por um modelo físico-matemático definido por equações diferenciais matriciais de segunda ordem, de modo que são denominados sistemas de segunda ordem. Em especial, os modelos de sistemas mecânicos podem ser obtidos das seguintes formas: através de leis da física, como leis de movimento de Newton, equações de movimento de Lagrange ou princípio de D'Alembert; por meio do método dos Elementos Finitos, do inglês *Finite Element Method* (FEM); ou a partir de métodos de identificação de sistemas utilizando medidas disponíveis (GAWRONSKI, 2004).

Os sistemas mecânicos podem ser representados através de dois sistemas de coordenadas, sendo que de acordo com Gawronski (2004), a escolha das coordenadas pode ser arbitrária, dependendo do tipo de sistema que se deseja representar e as necessidades do engenheiro projetista. O primeiro sistema de coordenadas é conhecido como coordenadas físicas (ou coordenadas nodais), sendo definido a partir de deslocamentos e velocidades de determinados pontos do sistema, denominados graus de liberdade¹. O segundo é chamado de coordenadas modais, o qual é definido a partir de deslocamentos e velocidades dos modos de vibrar do sistema.

¹Número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante de tempo (RAO, 2008).

2.1.1 Modelos Estruturais em Coordenadas Físicas

Os modelos físicos-matemáticos de sistemas mecânicos representados em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações das coordenadas físicas são caracterizados pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como pelas matrizes que determinam a posição dos atuadores e sensores do sistema. Considerando que o sistema mecânico é linear e invariante no tempo, de modo que n_g é o número de graus de liberdade, r é o número de entradas e m é o número de saídas (medidas disponíveis), a equação diferencial matricial de segunda ordem em coordenadas físicas que representa seu comportamento dinâmico e a equação de saída são dadas, respectivamente, por (GAWRONSKI, 2004):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{oq}\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}_{ov}\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2)$$

Nas equações (1) e (2), $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, com dimensão $n_g \times 1$, são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração das coordenadas físicas, respectivamente; $\mathbf{u}(t)$, com dimensão $r \times 1$, é o vetor de entrada; $\mathbf{y}(t)$, com dimensão $m \times 1$, é o vetor de saída. As matrizes \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} , com dimensão $n_g \times n_g$, representam a massa, o amortecimento e a rigidez do sistema, respectivamente; \mathbf{B}_o , com dimensão $n_g \times r$, é a matriz de posicionamento das entradas (posicionamento dos atuadores); \mathbf{C}_{oq} e \mathbf{C}_{ov} , com dimensão $m \times n_g$, são as matrizes de saída dos deslocamentos e velocidades (posicionamento dos sensores), respectivamente (GAWRONSKI, 2004).

2.1.2 Modelos Estruturais em Coordenadas Modais

A representação de sistemas mecânicos em coordenadas modais é geralmente utilizada em análises dinâmicas de sistemas complexos modelados pelo método dos Elementos Finitos para reduzir a ordem do sistema, bem como em procedimentos de identificação de parâmetros de sistemas (GAWRONSKI, 2004). A representação em coordenadas modais pode ser obtida através da transformação dos modelos representados em coordenadas físicas, sendo esta transformação realizada a partir da matriz modal, como é mostrado a seguir.

Considerando o sistema mecânico representado pela equação (1) sem excitação externa ($\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$) e sem amortecimento ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$), a equação do movimento pode ser reescrita

como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Uma forma de solucionar esta equação diferencial é propor uma solução do tipo:

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\phi}e^{j\omega t} \quad (4)$$

sendo que $\boldsymbol{\phi}$ é o vetor formado por amplitudes que indicam as formas modais do problema. Substituindo a equação (4) na equação (3) e realizando alguns rearranjos, tem-se que:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (5)$$

de forma que este é um conjunto de equações homogêneas, cuja solução não trivial existe se:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (6)$$

O determinante da equação (6) é satisfeito para um conjunto de n_m valores de frequência ω . As frequências são denotadas por $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_m}$, de modo que o número n_m não excede o número de graus de liberdade do sistema ($n_m \leq n_g$) (GAWRONSKI, 2004). A frequência ω_i é chamada de i -ésima frequência natural. Substituindo ω_i na equação (5) pode ser obtido o vetor $\boldsymbol{\phi}_i$. O i -ésimo vetor $\boldsymbol{\phi}_i$ associado à i -ésima frequência natural ω_i é denominado i -ésimo modo de vibrar do sistema. A matriz de frequências naturais é uma matriz diagonal, definida como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_m}) \quad (7)$$

e a matriz de modos de vibrar, ou matriz modal $\boldsymbol{\Phi}$, com dimensão $n_g \times n_m$, para n_m modos de vibrar do sistema, é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n_m 1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n_m 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1n_g} & \phi_{2n_g} & \dots & \phi_{n_m n_g} \end{bmatrix} \quad (8)$$

sendo ϕ_{ij} o j -ésimo deslocamento do i -ésimo modo de vibrar. A matriz modal $\boldsymbol{\Phi}$ apresenta uma importante propriedade, a qual consiste em ser capaz de diagonalizar as matrizes de

massa e rigidez (GAWRONSKI, 2004):

$$\mathbf{M}_m = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_m = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (10)$$

de modo que as matrizes diagonais obtidas são chamadas de matriz de massa modal (\mathbf{M}_m) e matriz de rigidez modal (\mathbf{K}_m), com dimensão $n_m \times n_m$. Caso a matriz modal Φ seja normalizada em relação a matriz de massa, tem-se que:

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{I} \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_m = \Omega^2 \quad (12)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade. O mesmo procedimento de diagonalização pode ser aplicado a matriz de amortecimento através da seguinte equação:

$$\mathbf{D}_m = \Phi^T \mathbf{D} \Phi \quad (13)$$

de forma que só é possível diagonalizar esta matriz para o caso em que o amortecimento do sistema é proporcional, ou seja, que atende a seguinte expressão:

$$\mathbf{D} = \gamma_1 \mathbf{K} + \gamma_2 \mathbf{M} \quad (14)$$

na qual γ_1 e γ_2 são escalares não negativos.

De acordo com Gawronski (2004), para se utilizar a matriz modal deve ser introduzida uma nova variável, $\mathbf{q}_m(t)$, chamada de deslocamento modal, com dimensão $n_m \times 1$. Esta variável satisfaz a seguinte equação:

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{q}_m(t) \quad (15)$$

Para se obter a equação do movimento em termos desta variável, pode-se substituir a equação (15) na equação (1), e multiplicando os dois lados da equação (1) por Φ^T tem-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \Phi^T \mathbf{D} \Phi \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}_m(t) = \Phi^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}(t) \quad (16)$$

sendo que substituindo as equações (9), (10) e (13) na equação (16) pode ser obtida a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{K}_m \mathbf{q}_m(t) = \Phi^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}(t) \quad (17)$$

multiplicando os dois lados da equação (17) por \mathbf{M}_m^{-1} , tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{K}_m\mathbf{q}_m(t) = \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) \quad (18)$$

de modo que a equação (18) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m(t) + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q}_m(t) = \mathbf{B}_m^*\mathbf{u}(t) \quad (19)$$

Na equação (19), $\mathbf{\Omega}$ é a matriz diagonal de frequências naturais, como definida anteriormente. Esta matriz pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{K}_m \quad (20)$$

nesta mesma equação, \mathbf{Z} é a matriz de razões de amortecimento do sistema, expressada pela seguinte equação:

$$\mathbf{Z} = \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_m}) \quad (21)$$

na qual ζ_i é a razão de amortecimento do i -ésimo modo de vibrar, de modo que \mathbf{Z} pode ser obtida através da seguinte equação:

$$\mathbf{Z} = 0,5\mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{D}_m\mathbf{\Omega}^{-1} \quad (22)$$

ainda na equação (19), tem-se que \mathbf{B}_m^* , com dimensão $n_m \times r$, é a matriz de entrada modal, dada por:

$$\mathbf{B}_m^* = \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}_o \quad (23)$$

A saída do sistema pode ser representada a partir de coordenadas modais substituindo a equação (15) na equação (2):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{oq}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}_m(t) + \mathbf{C}_{ov}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}_m(t) \quad (24)$$

sendo as matrizes de saída dos descolamentos e velocidades modais, com dimensão $m \times n_m$, expressadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{C}_{mq} = \mathbf{C}_{oq}\mathbf{\Phi} \quad (25)$$

$$\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov}\mathbf{\Phi} \quad (26)$$

de modo que a equação (24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{mq}\mathbf{q}_m(t) + \mathbf{C}_{mv}\dot{\mathbf{q}}_m(t) \quad (27)$$

Uma importante característica da representação de sistemas mecânicos em coordenadas modais pode ser notada através da equação (19), visto que esta equação matricial representa um conjunto de equações desacopladas, devido as matrizes diagonais $\mathbf{\Omega}$ e \mathbf{Z} . Desta maneira, este conjunto de equações que representa o comportamento do sistema e a equação de saída podem ser reescritas, respectivamente, como: (GAWRONSKI, 2004):

$$\ddot{q}_{m_i}(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_{m_i}(t) + \omega_i^2q_{m_i}(t) = \mathbf{b}_{m_i}^*\mathbf{u}(t) \quad (28)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{c}_{mq_i}q_{m_i}(t) + \mathbf{c}_{mv_i}\dot{q}_{m_i}(t) \quad (29)$$

para $i = 1, 2, \dots, n_m$. Nesta equação, $\mathbf{b}_{m_i}^*$ é a i -ésima linha de \mathbf{B}_m^* e \mathbf{c}_{mq_i} , \mathbf{c}_{mv_i} são a i -ésima coluna das matrizes \mathbf{C}_{mq} e \mathbf{C}_{mv} , respectivamente; $\mathbf{y}_i(t)$ é a saída do sistema devido ao i -ésimo modo de vibrar, de forma que $\mathbf{y}(t)$ pode ser expressado através da seguinte equação:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{y}_i(t) \quad (30)$$

Na equação (30), $\mathbf{y}(t)$ é obtido a partir da soma das repostas modais $\mathbf{y}_i(t)$, o que consiste em um conceito fundamental utilizado para extrair propriedades estruturais do sistema representado em coordenadas modais (GAWRONSKI, 2004).

2.2 Espaço de Estados

A representação do comportamento de sistemas dinâmicos em espaço de estados é realizada através de modelos físicos-matemáticos definidos por equações diferenciais de primeira ordem, de forma que o sistema é descrito a partir de variáveis de estado. De acordo com Gawronski (2004), esta representação é geralmente utilizada por engenheiros eletricitistas, os quais possuem várias ferramentas de análise e desenvolvimento de sistemas de controle formuladas em espaço de estados. Por outro lado, engenheiros estruturais preferem a representação através de equações diferenciais de segunda ordem e graus de liberdade, visto que esta representação tem longa tradição, de forma que vários resultados, ferramentas de análise e formulações são obtidos a partir desta notação.

A representação em espaço de estados envolve equações diferenciais de primeira ordem

que relacionam três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada (excitações externas), variáveis de saída (medidas disponíveis) e variáveis de estado (OGATA, 1998). Um conceito fundamental nesta representação é o estado de um sistema dinâmico, sendo este o menor conjunto de valores variáveis (chamadas variáveis de estado) de modo que o conhecimento destes valores em $t = t_0$, associado ao conhecimento dos valores do sinal de entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo $t \geq t_0$ (OGATA, 1998). A seguir, é apresentada a formulação em espaço de estados para sistemas mecânicos descritos em coordenadas físicas e modais, respectivamente.

2.2.1 Espaço de Estados em Coordenadas Físicas

Para sistemas mecânicos lineares e invariantes no tempo, como descrito pela equação (1), a representação em espaço de estados pode ser obtida através da redução de ordem das equações diferenciais, ou seja, pode ser obtida através da transformação de equações diferenciais de segunda ordem em equações de primeira ordem a partir do seguinte rearranjo:

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t) \right\}^T \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \dot{\mathbf{q}}(t) \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) \right\}^T \quad (32)$$

Nas equações (31) e (32), $\mathbf{x}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ são o vetor de estado e sua derivada primeira, com dimensão $n \times 1$, de forma que n denota o número de variáveis de estado que representam o sistema mecânico, sendo $n = 2n_g$. Isolando o vetor de aceleração $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ na equação (1) e substituindo na equação (32) pode ser obtido:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) \end{array} \right\} \quad (33)$$

de forma que, rearranjando a equação (33), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o \end{array} \right] \mathbf{u}(t) \quad (34)$$

assim, a equação (34) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (35)$$

Na equação (35), \mathbf{A} é a matriz de estado ou matriz dinâmica, cuja dimensão é $n \times n$; \mathbf{B} é a matriz de entrada em espaço de estados, com dimensão $n \times r$. A saída do sistema pode ser escrita como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (36)$$

sendo \mathbf{C} , com dimensão $m \times n$, a matriz de saída em espaço de estados, dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oq} & \mathbf{C}_{ov} \end{bmatrix} \quad (37)$$

2.2.2 Espaço de Estados em Coordenadas Modais

A obtenção da representação em espaço de estados do sistema mecânico descrito em coordenadas modais é análoga ao processo de obtenção realizado quando o sistema é representado em coordenadas físicas. Considerando que o sistema em coordenadas modais é representado pela equação (19), a equação (34) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_m(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_m(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_m(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m^* \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (38)$$

de forma a equação (38) tem a seguinte representação:

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) \quad (39)$$

Na equação (39), $\mathbf{x}_m(t)$ é o vetor de estado em coordenadas modais, com dimensão $\bar{n} \times 1$, sendo que $\bar{n} = 2n_m$; \mathbf{A}_m , com dimensão $\bar{n} \times \bar{n}$, é a matriz de estado modal; e \mathbf{B}_m , com dimensão $\bar{n} \times r$, é a matriz de entrada modal em espaço de estados. A saída do sistema é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m(t) \quad (40)$$

sendo \mathbf{C}_m , com dimensão $m \times \bar{n}$, a matriz de saída modal em espaço de estados, dada por:

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mq} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix} \quad (41)$$

no entanto, de acordo com [Gawronski \(2004\)](#), apesar desta formulação ser obtida a partir dos deslocamentos modais $\mathbf{q}_m(t)$, não pode ser considerada a representação modal em espaço de estados. Segundo o autor, a representação modal em espaço de estados é caracterizada pela matriz \mathbf{A}_m ser uma matriz de blocos diagonais (sistema desacoplado),

como expressada por:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{m_{n_m}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

de modo que para $1 \leq i \leq n_m$, tem-se que a matriz \mathbf{A}_{m_i} , com dimensão 2×2 , pode ser obtida a partir da representação em espaço de estados da equação (28), sendo dada por:

$$\mathbf{A}_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix} \quad (43)$$

As matrizes de entrada e saída modais em espaço de estados podem ser reescritas da seguinte maneira, respectivamente:

$$\mathbf{B}_m = [\mathbf{B}_{m_1} \quad \mathbf{B}_{m_2} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{m_{n_m}}]^T \quad (44)$$

$$\mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_{m_1} \quad \mathbf{C}_{m_2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{m_{n_m}}] \quad (45)$$

sendo que \mathbf{B}_{m_i} tem dimensão $2 \times r$ e \mathbf{C}_{m_i} tem dimensão $m \times 2$. Estas matrizes podem ser expressadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{B}_{m_i} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{b}_{m_i}^*]^T \quad (46)$$

$$\mathbf{C}_{m_i} = [\mathbf{c}_{mq_i} \quad \mathbf{c}_{mv_i}] \quad (47)$$

O vetor de estado para cada bloco é composto por duas variáveis de estado:

$$\mathbf{x}_{m_i}(t) = \begin{Bmatrix} q_{m_i}(t) \\ \dot{q}_{m_i}(t) \end{Bmatrix} \quad (48)$$

de modo que a representação independente do i -ésimo modo de vibrar do sistema em espaço de estados é dada pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}_{m_i}(t) = \mathbf{A}_{m_i} \mathbf{x}_{m_i}(t) + \mathbf{B}_{m_i} \mathbf{u}(t) \quad (49)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_{m_i} \mathbf{x}_{m_i}(t) \quad (50)$$

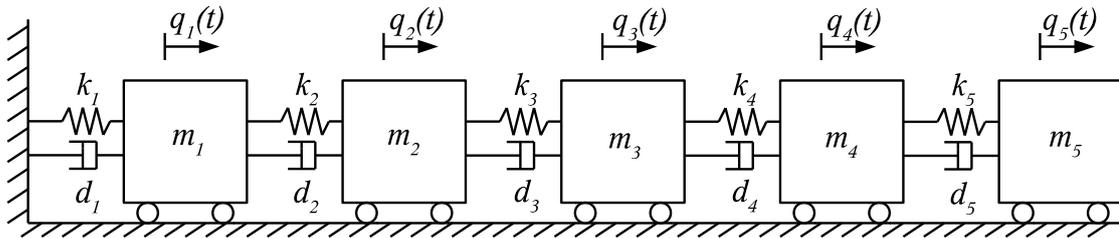
2.3 Sistemas Mecânicos Utilizados nas Simulações Computacionais

Nesta seção são apresentados os sistemas mecânicos utilizados nas simulações computacionais para aplicar a metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho. São utilizados dois sistemas, sendo eles: um sistema massa-mola-amortecedor e uma viga engastada representada pelo método dos Elementos Finitos.

2.3.1 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

O sistema massa-mola-amortecedor de cinco graus de liberdade utilizado neste trabalho é mostrado na figura (1), cujos parâmetros físicos são apresentados através da tabela (1).

Figura 1 – Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: Adaptado de Rébillat, Hajrya e Mechbal (2014)

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema massa-mola-amortecedor

Massa	$m_{1,\dots,5} = 1 \text{ kg}$
Rigidez	$k_{1,\dots,5} = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
Amortecimento	$d_{1,\dots,5} = 2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Fonte: Adaptado de Rébillat, Hajrya e Mechbal (2014)

Conceitualmente este sistema é capaz de representar o comportamento dinâmico de um sistema mecânico com uma de suas extremidades engastada e outra livre. As equações que governam o comportamento deste sistema podem ser obtidas a partir da Segunda Lei do movimento de Newton. Para o caso particular em que a massa do sistema se conserva,

a Segunda Lei de Newton pode ser expressada por:

$$\sum f(t) = m_i \ddot{q}_i(t) \quad (51)$$

sendo m_i e $\ddot{q}_i(t)$ a massa e a aceleração do i -ésimo elemento de massa. Para este sistema em particular as matrizes da equação do movimento (Eq. 1) são dadas por:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \quad (52)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 & 0 \\ 0 & 0 & -d_4 & d_4 + d_5 & -d_5 \\ 0 & 0 & 0 & -d_5 & d_5 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \quad (54)$$

de modo que o vetor de deslocamento em coordenadas físicas é expressado por:

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) \quad q_4(t) \quad q_5(t) \right\}^T \quad (55)$$

Pode se observar que o amortecimento do sistema é proporcional, de forma que $\mathbf{D} = 10^{-4}\mathbf{K}$. As frequências naturais e as razões de amortecimento de cada modo de vibrar são apresentados pela tabela (2).

Tabela 2 – Frequências naturais e razões de amortecimento do sistema massa-mola-amortecedor

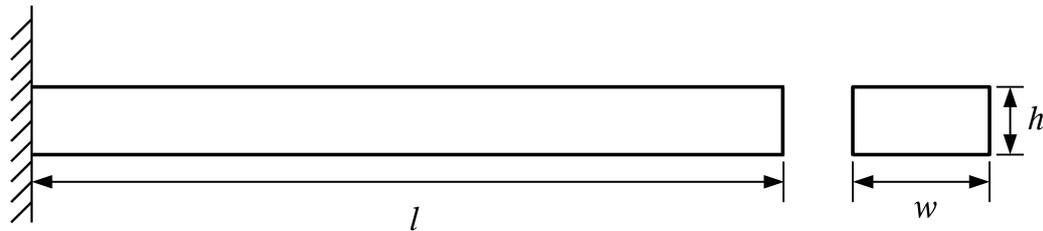
	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
f_n (Hz)	6,41	18,70	29,48	37,87	43,20
ζ	$2,0 \times 10^{-3}$	$5,9 \times 10^{-3}$	$9,3 \times 10^{-3}$	$1,19 \times 10^{-2}$	$1,36 \times 10^{-2}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

2.3.2 Viga Engastada

A viga engastada utilizada nas simulações computacionais deste trabalho é mostrada pela figura (2), cujos parâmetros físicos são descritos na tabela (3).

Figura 2 – Viga engastada



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Tabela 3 – Parâmetros físicos da viga engastada

Comprimento	$l = 500 \text{ mm}$
Largura	$w = 20 \text{ mm}$
Altura	$h = 3 \text{ mm}$
Módulo de elasticidade*	$E = 210 \text{ GPa}$
Densidade	$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

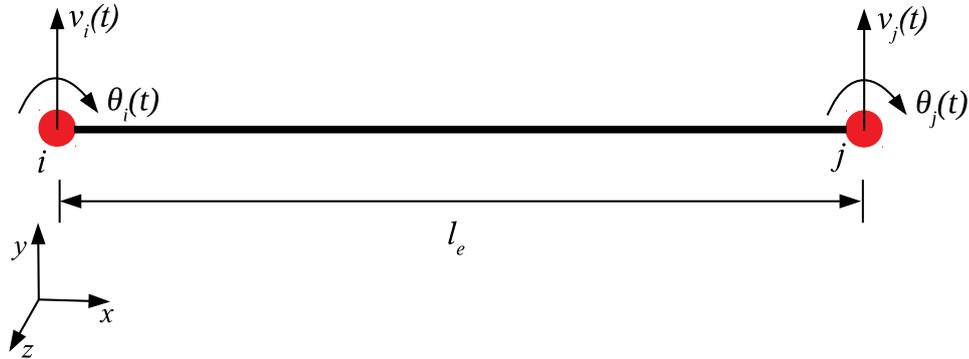
Nota: * Módulo de elasticidade longitudinal

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O modelo físico-matemático que representa o comportamento dinâmico desta viga é obtido através do método dos Elementos Finitos, sendo utilizado o elemento de viga de Euler-Bernoulli², o qual é ilustrado pela figura (3).

²Detalhes sobre a formulação dos elementos de viga de Euler-Bernoulli podem ser encontrados em [Dawe \(1984\)](#).

Figura 3 – Elemento de viga de Euler-Bernoulli



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Este elemento de viga, com comprimento l_e , apresenta dois nós (círculos), sendo que cada um tem dois graus de liberdade. Para o i -ésimo nó, tem-se a translação $\nu_i(t)$ no eixo y e a rotação $\theta_i(t)$ em torno do eixo z . O vetor de deslocamento em coordenadas físicas para este elemento é dado por:

$$\delta_{i,j}(t) = \left\{ \nu_i(t) \quad \theta_i(t) \quad \nu_j(t) \quad \theta_j(t) \right\}^T \quad (56)$$

sendo j o nó seguinte, com graus de liberdade $\nu_j(t)$ e $\theta_j(t)$. As matrizes de massa e rigidez deste elemento são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho S_e l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

nas quais S_e é a área da seção transversal da viga e I é o momento de inércia de área da seção transversal. A determinação do número de elementos utilizados é baseada na convergência das cinco primeiras frequências naturais da viga, de modo que este critério pode ser expressado por:

$$e_t = \left| f_{n_i}^{(n_e+1)} - f_{n_i}^{(n_e)} \right| \quad (59)$$

no qual $f_{n_i}^{(n_e)}$ é a i -ésima frequência natural em Hz , para $1 \leq i \leq 5$, determinada para n_e elementos. Considera-se que a convergência é obtida quando $e_t < 10^{-2}$, sendo mostrada pela tabela (4).

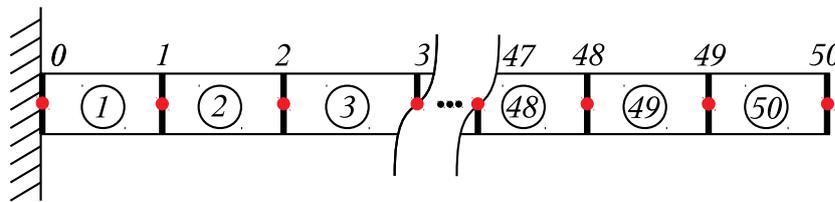
Tabela 4 – Cinco primeiras frequências naturais da viga engastada para diferentes números de elementos

$f_n (Hz)$	Número de elementos					
	20	40	50	100	150	200
f_{n_1}	10,06	10,06	10,06	10,06	10,06	10,06
f_{n_2}	63,03	63,03	63,03	63,03	63,03	63,03
f_{n_3}	176,50	176,50	176,50	176,50	176,50	176,50
f_{n_4}	345,89	345,87	345,86	345,86	345,86	345,86
f_{n_5}	571,84	571,75	571,74	571,74	571,74	571,74

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Desta forma, analisando a tabela (4), a viga mostrada pela figura (2), para a faixa de frequência de interesse neste estudo, pode ser representada por 50 elementos, como mostra a figura a seguir:

Figura 4 – Viga engastada representada por 50 elementos de viga de Euler-Bernoulli



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

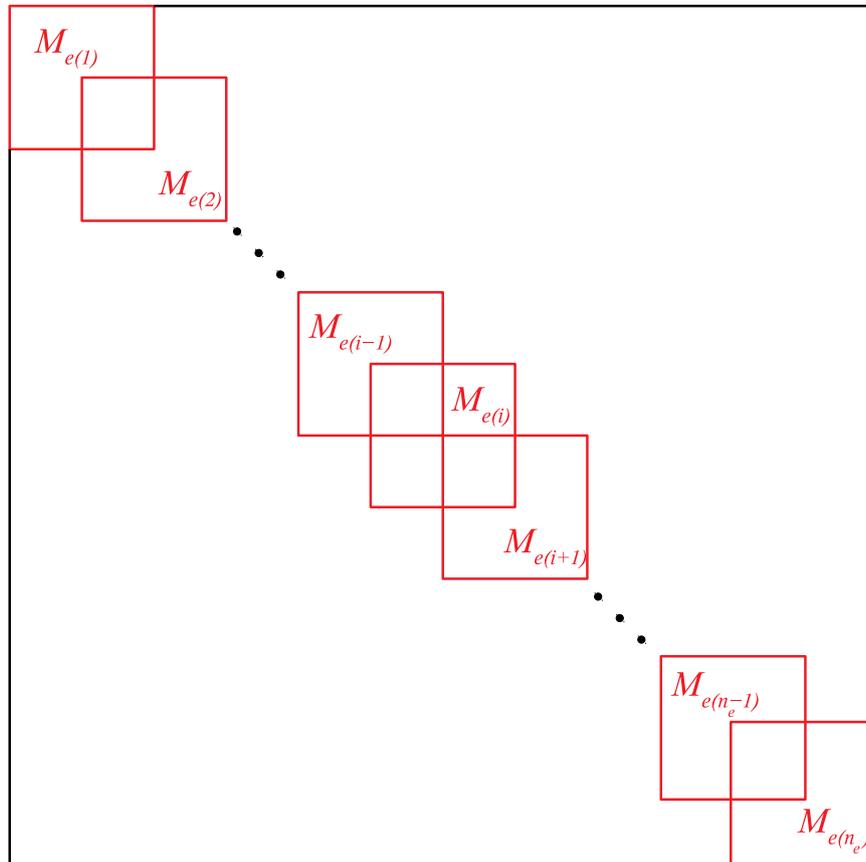
sendo que esta viga tem 51 nós e 100 graus de liberdade ($n_g = 100$), visto que os graus de liberdade do nó 0, $\nu_0(t)$ e $\theta_0(t)$, são restringidos pelo engaste. O vetor de deslocamento em coordenadas físicas é dado por:

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ \nu_1(t) \quad \theta_1(t) \quad \nu_2(t) \quad \theta_2(t) \quad \cdots \quad \nu_{49}(t) \quad \theta_{49}(t) \quad \nu_{50}(t) \quad \theta_{50}(t) \right\}^T \quad (60)$$

As matrizes de massa \mathbf{M} e rigidez \mathbf{K} são obtidas através da concatenação das matrizes dos elementos \mathbf{M}_e e \mathbf{K}_e , respectivamente. O processo de concatenação para n_e elementos

de viga de Euler-Bernoulli é ilustrado pela figura (5).

Figura 5 – Processo de concatenação para n_e elementos de viga de Euler-Bernoulli



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Como para muitos sistemas mecânicos a natureza do amortecimento não é exatamente conhecida, a matriz de amortecimento pode ser assumida como uma combinação linear entre as matrizes de massa e rigidez (GAWRONSKI, 2004), como expressado pela equação (14). Desta maneira, assume-se que o amortecimento desta viga é dado por:

$$\mathbf{D} = 10^{-3}\mathbf{M} \quad (61)$$

sendo as razões de amortecimento do 1º ao 5º modo de vibrar apresentadas pela tabela (5). Para as simulações computacionais, o modelo físico-matemático da viga engastada é representado em coordenadas modais, devido ao grande número de graus de liberdade ($n_g = 100$), de modo que o sistema é representado até o 5º modo de vibrar ($n_m = 5$).

Tabela 5 – Razões de amortecimento do 1º ao 5º modo de vibrar da viga engastada

	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
ζ	$7,9 \times 10^{-6}$	$1,3 \times 10^{-6}$	$4,5 \times 10^{-7}$	$2,3 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

2.4 Modelagem do Dano Estrutural

O conceito de dano pode ser definido, em termos gerais, como mudanças que aparecem em um sistema, as quais podem afetar seu atual ou futuro desempenho (MESHGRAM; PAWAR, 2015). De acordo com os autores, esta definição é pouco significativa sem que haja comparação entre os dois estados do sistema, sendo estes estados sem danos e com danos. A definição de dano pode ser limitada como mudanças no material e/ou propriedades geométricas do sistema, incluindo condições de contorno e conectividade do sistema, que podem afetar adversamente seu atual ou futuro desempenho. Já o conceito de falha pode ser definido como mudanças que ocorrem em um sistema que produzem uma redução inaceitável de seu desempenho, diferente do dano, no qual o sistema opera satisfatoriamente, porém abaixo da condição ideal (WORDEN; DULIEU-BARTON, 2004).

Em sistemas estruturais um tipo de dano comum e amplamente investigado por engenheiros e pesquisadores são as trincas, como pode ser visto em Gounaris e Papadopoulos (2002), Barad, Sharma e Vyas (2013), Namdar et al. (2016) e Bhuiyan et al. (2018). A presença de trincas no sistema é responsável pela redução da rigidez estrutural na localidade em que estão presentes, redução das frequências naturais e aumento do amortecimento modal (GOUNARIS; DIMAROGONAS, 1988; OSTACHOWICZ; KRAWCZUK, 1991; MESHGRAM; PAWAR, 2015).

Os modelos físicos-matemáticos que representam um sistema contendo trincas são usualmente baseados em duas classes de modelos que descrevem seu comportamento, sendo estes os modelos de *open crack* e o *breathing crack*³ (CHONDROS; DIMAROGONAS; YAO, 2001). O modelo físico-matemático de *open crack* é caracterizado pelo fato da trinca permanecer aberta durante a vibração do sistema, enquanto no modelo de *breathing crack*, a trinca realiza movimentos alternados de abertura e fechamento durante a vibração, sendo então o que mais se aproxima do comportamento real de uma trinca

³Os termos *open crack* e *breathing crack* são mantidos em inglês neste trabalho para manter maior aderência à terminologia usada na literatura.

(CHONDROS; DIMAROGONAS; YAO, 2001).

O modelo físico-matemático de *open crack* considera a redução permanente de rigidez na região em torno da trinca. Como a redução de rigidez é permanente (não apresenta variações durante a vibração) tem representação linear (CHONDROS; DIMAROGONAS; YAO, 2001). Já o modelo físico-matemático de *breathing crack* considera a variação de rigidez na região em torno da trinca, devido ao seu movimento alternado de abertura e fechamento durante a vibração, sendo comumente considerado um oscilador bilinear (LAW; ZHU, 2004; NGUYEN, 2013). Devido a variação de rigidez do sistema causada pelo deslocamento, estes modelos de trinca são não lineares.

Desta forma, como trincas são um tipo de dano comum em sistemas mecânicos e pelo fato dos sistemas típicos, como representados pelas figuras (1) e (2), quando excitados dinamicamente, apresentarem os maiores esforços internos (tensões normais e tangenciais) próximos a região do engaste, implicando em um maior potencial de ocorrência de danos nesta região, o tipo de dano investigado é caracterizado pela redução de rigidez próximo ao engaste. Tanto para o sistema massa-mola-amortecedor quanto para a viga engastada são abordados dois modelos físicos-matemáticos de dano, de modo que um representa o modelo de *open crack* e o outro o modelo de *breathing crack*.

2.4.1 Modelos de Dano para o Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Para o sistema massa-mola-amortecedor, representado pela figura (1), o modelo físico-matemático de dano é baseado na alteração de rigidez dos elementos de mola. Considerando que a rigidez deste tipo de elemento na condição sem dano é denotada por k , tem-se que a rigidez deste na condição com dano pode ser expressada por:

$$k_d = (1 - \mu) k \quad (62)$$

de modo que nesta equação μ é o parâmetro que determina a severidade do dano, sendo $0 < \mu < 1$. Para o primeiro modelo físico-matemático de dano, com o propósito de representar um modelo de *open crack*, é considerado que a rigidez do elemento k_1 é reduzida permanentemente, de modo que pode ser definida pela equação (62). O segundo modelo físico-matemático de dano, o qual representa um modelo de *breathing crack*, considera que a rigidez do elemento k_1 é dada pela seguinte equação:

$$k_1[q_1(t)] = \begin{cases} k_d, & q_1(t) > 0 \\ k, & q_1(t) \leq 0 \end{cases} \quad (63)$$

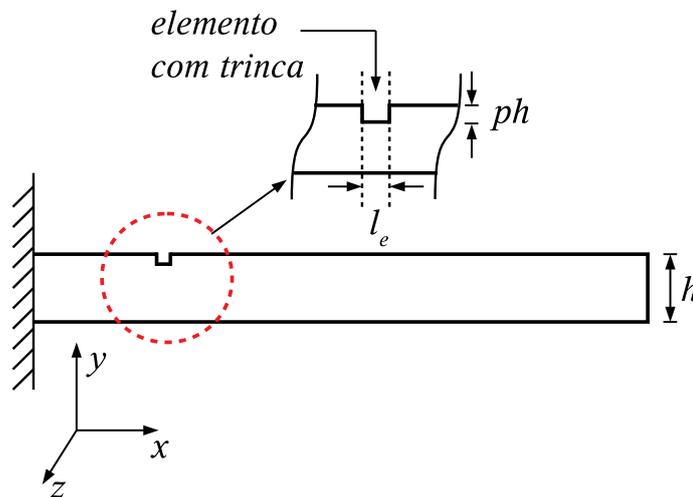
sendo $q_1(t)$ o deslocamento do elemento de massa m_1 , de modo que:

- Quando a trinca está aberta, ou seja, $q_1(t) > 0$, a rigidez é dada por k_d ;
- Quando a trinca está fechada, ou seja, $q_1(t) \leq 0$, a rigidez permanece inalterada.

2.4.2 Modelos de Dano para a Viga Engastada

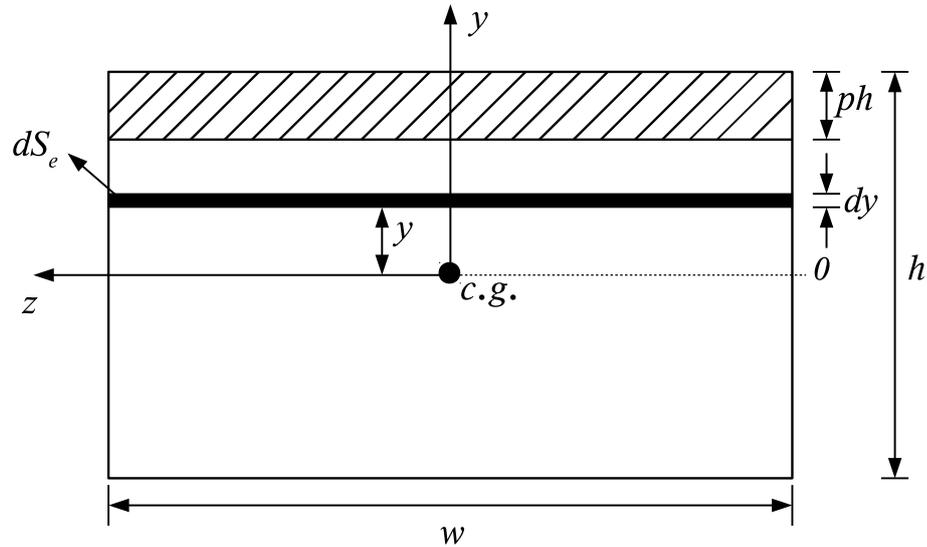
A viga engastada contendo uma trinca é mostrada na figura (6), de modo que a área da seção transversal da região que está trincada é ilustrada pela figura (7).

Figura 6 – Viga engastada contendo uma trinca



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 7 – Seção transversal da região trincada



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Na figura (7), a área hachurada representa a trinca, de modo que p é o fator que determina a sua profundidade (severidade); dS_e é o diferencial de área da seção transversal, sendo $dS_e = wdy$; y representa a distância entre o eixo z e dS_e ; e $c.g.$ é o centro geométrico da área da seção transversal. O modelo físico-matemático que representa esta trinca é obtido a partir do cálculo do momento de inércia de área em torno do eixo z da região que não está trincada, sendo este momento de inércia expresso por:

$$I_d = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-ph} y^2 dS_e \quad (64)$$

de modo que resolvendo esta integral tem-se:

$$I_d = w \left[\frac{\left(\frac{h}{2} - ph\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3} \right] \quad (65)$$

rearranjando esta equação pode ser obtido:

$$I_d = \frac{wh^3}{24} (-8p^3 + 12p^2 - 6p + 2) \quad (66)$$

multiplicando o numerador e o denominador por 0,5 tem-se:

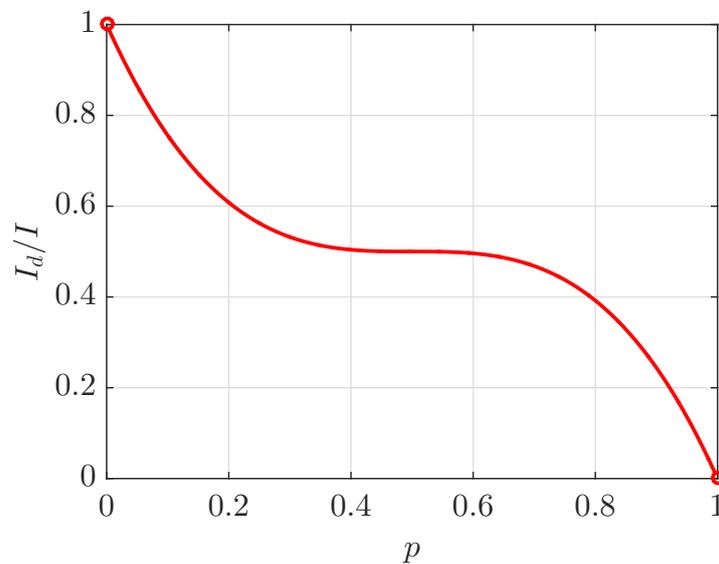
$$I_d = \frac{wh^3}{12} (-4p^3 + 6p^2 - 3p + 1) \quad (67)$$

Na equação (67), pode se notar que o termo $\frac{wh^3}{12}$ é o momento de inércia de área para a condição que não existe trinca (I), portanto:

$$I_d = (-4p^3 + 6p^2 - 3p + 1) I \quad (68)$$

de modo que $I > I_d$, sendo a profundidade da trinca definida no intervalo $0 < p < 1$, como ilustra a figura (8).

Figura 8 – Relação entre I_d e I em função da profundidade da trinca



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Desta forma, o modelo físico-matemático que representa o dano (trinca) é baseado na redução do momento de inércia de área do elemento de viga de Euler-Bernoulli em que o dano está localizado. O primeiro modelo físico-matemático de dano, com o propósito de representar um modelo de *open crack*, considera a redução permanente do momento de inércia de área do elemento 1, de modo que seu momento de inércia é determinado pela equação (68). O segundo modelo físico-matemático de dano, o qual representa um modelo de *breathing crack*, considera que o momento de inércia de área do elemento 1 é dado pela seguinte equação:

$$I_1[\theta_1(t)] = \begin{cases} I_d, & \theta_1(t) < 0 \\ I, & \theta_1(t) \geq 0 \end{cases} \quad (69)$$

sendo $\theta_1(t)$ o deslocamento angular do nó 1, de modo que:

- Quando a trinca está aberta, ou seja, $\theta_1(t) < 0$, o momento de inércia de área é dado por I_d ;
- Quando a trinca está fechada, ou seja, $\theta_1(t) \geq 0$, o momento de inércia de área permanece inalterado.

Para as simulações computacionais, a representação em coordenadas modais da viga contendo danos é realizada a partir da matriz modal Φ do sistema sem danos, pois, neste trabalho, admiti-se que somente a matriz modal do sistema sem danos é conhecida.

3 Observadores de Estado

Neste capítulo é apresentado o conceito de observabilidade de sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo, o qual é fundamental para o projeto de observadores de estado. Também, é apresentada a definição de observador de estado, de forma que são descritos alguns tipos de observadores, sendo enfatizado o observador de estado de ordem plena, o qual é utilizado na metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho.

3.1 Observabilidade

O conceito de observabilidade é importante na solução do problema de se obter variáveis de estado não mensuráveis a partir de medidas disponíveis do sistema (OGATA, 1998). Um sistema é dito observável em t_0 se o estado $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da saída $\mathbf{y}(t)$, durante um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$, no qual $t_1 > t_0$ (GAWRONSKI, 2004). Se isto é verdade para todos os instantes t_0 e estados $\mathbf{x}(t_0)$ o sistema é completamente observável.

O critério clássico de observabilidade é definido como: um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, como representado pelas equações (35) e (36), é completamente observável, se e somente se, a matriz de observabilidade de dimensão $nm \times n$, dada pela equação (70), tiver posto igual a n .

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (70)$$

O posto de uma matriz compreende o número de linhas ou colunas linearmente independentes (OGATA, 1998). Para uma matriz de dimensão $od \times od$ ter posto igual a od , suas linhas devem ser linearmente independentes. Caso uma linha seja combinação das

outras, tem-se posto igual a $od - 1$. Já uma matriz de dimensão $p \times od$ (com $p > od$) possui posto completo se seu posto é igual od , ou posto deficiente se seu posto é menor od .

De acordo com [Gawronski \(2004\)](#), o critério para determinação da observabilidade de um sistema dado pela equação (70) apresenta duas limitações. A primeira limitação consiste no fato de que este critério somente pode informar se o sistema é ou não observável. A segunda se deve ao fato deste critério ser somente útil para sistemas representados por um pequeno número de variáveis de estado. A última limitação pode ser exemplificada considerando um sistema representado por 100 variáveis de estado, de modo que determinar a matriz \mathbf{A}^{99} (já que \mathbf{A} tem dimensão 100×100) provavelmente levaria a problemas numéricos ([GAWRONSKI, 2004](#)).

Uma alternativa para estas limitações consiste em usar gramianos para determinar esta propriedade do sistema. Grammianos são matrizes não negativas que expressam a observabilidade do sistema qualitativamente ([GAWRONSKI, 2004](#)). A matriz de gramiano de observabilidade é dada por:

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (71)$$

de modo que pode ser determinada, alternativamente, da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{W}}_o(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o(t) + \mathbf{W}_o(t) \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (72)$$

A solução $\mathbf{W}_o(t)$ é uma matriz variante no tempo. Para um sistema estável, pode-se obter uma solução invariante no tempo assumindo que $\dot{\mathbf{W}}_o(t) = \mathbf{0}$. Desta forma, a equação pode (72) reescrita como:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (73)$$

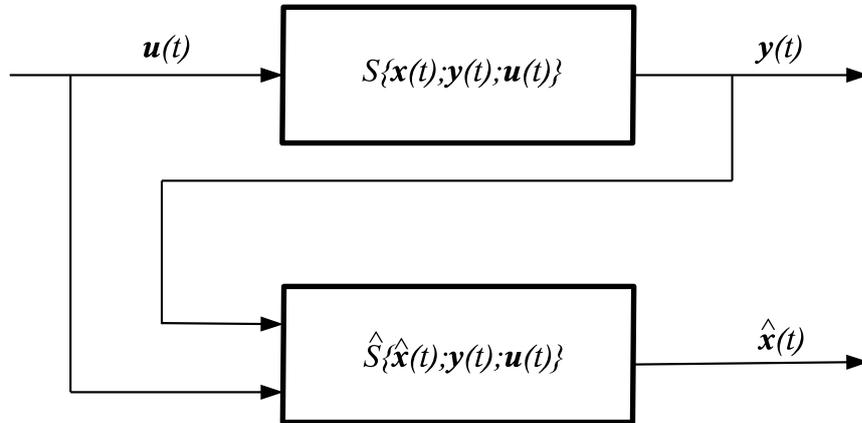
sendo \mathbf{W}_o uma matriz positiva definida.

3.2 Conceito de Observador de Estado

Um observador de estado para um sistema dinâmico $S\{\mathbf{x}(t); \mathbf{y}(t); \mathbf{u}(t)\}$ com estado $\mathbf{x}(t)$, saída $\mathbf{y}(t)$ e entrada $\mathbf{u}(t)$, como representado pelas equações (35) e (36), é um sistema dinâmico auxiliar $\hat{S}\{\hat{\mathbf{x}}(t); \mathbf{y}(t); \mathbf{u}(t)\}$ com entradas $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ e saída $\hat{\mathbf{x}}(t)$, sendo este também o vetor de estado do observador, cuja principal propriedade é de que o estado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ do sistema \hat{S} converge com o estado $\mathbf{x}(t)$ do sistema S , independentemente

da entrada $\mathbf{u}(t)$ e de $\mathbf{x}(t)$ (VALER, 1999). A figura (9) ilustra este enunciado através de um diagrama de blocos, conforme é empregado amplamente na literatura.

Figura 9 – Diagrama de blocos do observador de estado



Fonte: Adaptado de Valer (1999)

A construção do observador de estado é possível se o sistema dinâmico é completamente observável ou pelo menos detectável (ver seção 3.3). Diferentemente do sistema S , que em geral é físico, o sistema \hat{S} é abstrato e implementado por um programa de computador, inclusive a partir de um modelo físico-matemático do sistema S .

Neste problema de estimar o vetor de estado de um sistema dinâmico, a solução trivial consiste em utilizar um sistema dinâmico auxiliar determinado pelas mesmas equações e condições iniciais do sistema a observar, como dado pela equação (74), sendo tal sistema auxiliar denominado de observador de estado em malha aberta ou observador de estado trivial.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (74)$$

No entanto, este tipo de observador conduz ao desejado vetor de estado só no caso em que o sistema real é estável e suas condições iniciais são conhecidas (VALER, 1999). Na prática, o estado inicial é geralmente desconhecido e, então, um observador de estado adequado pode ser obtido considerando a entrada e a saída do sistema dinâmico. Neste contexto, o observador de estado que estima todas as variáveis do sistema, independentemente de algumas estarem disponíveis por medição direta, é denominado observador de estado de ordem plena, sendo que este possui a mesma ordem (n) do sistema (OGATA, 1998). Em algumas situações não é necessário a estimação das variáveis de saída do sis-

tema, sendo somente necessário estimar as variáveis não mensuráveis. Desta forma, a ordem do observador de estado pode ser reduzida já que as variáveis de saída geralmente proveem m relações lineares independentes entre as variáveis de estado e, então, é preciso estimar $(n - m)$ variáveis e determinar as restantes destas relações lineares (VALER, 1999). Este tipo de observador é denominado de observador de estado de ordem reduzida.

Esta redução de ordem pode não ser significativa quando o sistema observado é representado por conjunto pequeno de variáveis de estado. No entanto, para sistemas com um grande número de variáveis de saída uma redução mais substancial pode ser obtida, sendo, em algumas situações, vantajoso a utilização do observador de ordem reduzida (VALER, 1999). É importante notar, contudo, que se a medição das variáveis de saída envolve ruídos significativos e é relativamente imprecisa, o uso de observadores de ordem plena pode resultar em maior desempenho quando comparado aos de ordem reduzida (OGATA, 1998), visto que as variáveis de estado medidas diretamente são geralmente estimadas em um esforço para se reduzir o efeito do ruído de medida na estimação do estado do sistema (DORF; BISHOP, 2011).

Uma alternativa para superar o problema de ruído nos sensores ou distúrbios desconhecidos que podem afetar adversamente a convergência do observador na estimação do estado do sistema consiste em utilizar o observador de estado integral-proporcional ou o filtro de Kalman. De acordo com Valer (1999), o observador integral-proporcional é capaz de estimar o distúrbio (constante, linear ou não linear) sempre que este é mais lento que a constante de tempo da ação integral e o número de medições não é menor que o número de distúrbios. Aumentando o ganho integral é possível rejeitar distúrbios mais rápidos, no entanto, isto tem o efeito negativo de diminuir a margem de estabilidade do observador.

O filtro de Kalman é um dos métodos mais utilizados no processo de estimação de estado devido a sua facilidade de implementação e robustez (JULIER; UHLMANN, 1997), de modo que é aplicado em diversas áreas, como por exemplo, navegação, identificação de parâmetros, filtragem de sinais, na área econômica e financeira, entre outras (BUENO, 2007). Trata-se de um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, sendo que através da observação da variável denominada "variável de observação" outra variável, não observável, denominada "variável de estado" pode ser estimada eficientemente (BUENO, 2007). O filtro de Kalman permite que sejam estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros do sistema. Sua utilização é recomendada quando se deseja minimizar os efeitos de ruído nos sinais de entrada e saída do sistema, utilizados na estimação do estado (BISHOP; WELCH, 1995), sendo que o ruído presente no sinal de entrada é chamado de ruído de

processo e representa um distúrbio no sistema, e o ruído presente no sinal de saída é conhecido como ruído de medida e representa o ruído nos sensores. No entanto, segundo [Julier e Uhlmann \(1997\)](#), a aplicação do filtro de Kalman na estimação do estado de sistemas não lineares pode encontrar algumas dificuldades, de forma que é utilizada sua versão estendida, denominada filtro de Kalman estendido, a qual lineariza os modelos físicos-matemáticos não lineares permitindo que o filtro de Kalman tradicional (linear) possa ser aplicado ([JULIER; UHLMANN, 1997](#); [WAN; MERWE, 2000](#)).

3.3 Observador de Estado de Ordem Plena

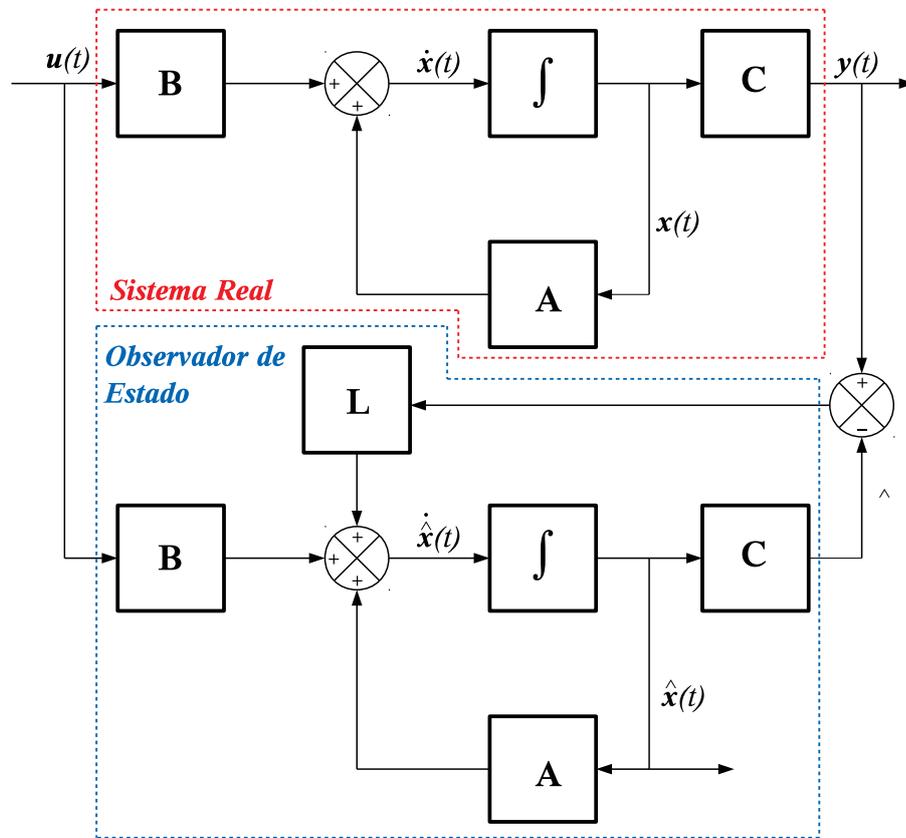
Considere um sistema dinâmico $S\{\mathbf{x}(t); \mathbf{y}(t); \mathbf{u}(t)\}$, linear e invariante no tempo, representado em espaço de estados pelas equações (35) e (36). O modelo físico-matemático do observador de estado de ordem plena é basicamente o mesmo que o do sistema dinâmico, exceto por um termo adicional que incorpora o erro de estimação que pode compensar as incertezas nas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} e a ausência do erro inicial ([OGATA, 1998](#)). Desta forma, o observador de ordem plena para o sistema S é representado pelas seguintes equações:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)] \quad (75)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (76)$$

Na equação (75), $\mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)]$ é o termo adicional. Neste termo, \mathbf{L} é a matriz de ganho do observador de estado com dimensão $n \times m$, sendo esta uma matriz de penalização do termo de correção $[\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)]$ ([OGATA, 1998](#)). Este termo adicional corrige continuamente a saída do observador e aumenta seu desempenho. A figura (10) mostra o diagrama de blocos do observador de estado de ordem plena.

Figura 10 – Diagrama de blocos do observador de estado de ordem plena



Fonte: Adaptado de Ogata (1998)

O erro de estimação do observador de estado pode ser obtido subtraindo a equação (75) da equação (35):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (77)$$

sendo este definido como a diferença entre $\mathbf{x}(t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t)$, como dado pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (78)$$

desta forma, através da equação (78), a equação (77) pode ser reescrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (79)$$

A partir da equação (79), pode-se notar que o comportamento dinâmico do vetor de erro é determinado pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$. Se a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ é estável, ou seja, se tem seus autovalores com parte real negativa, o vetor de erro converge

a zero, qualquer que seja o erro inicial $\boldsymbol{\xi}(t_0)$. Em outras palavras, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ converge para $\mathbf{x}(t)$ independentemente do valor de $\mathbf{x}(t_0)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$. Se os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ são escolhidos de maneira que o comportamento dinâmico do vetor de erro é assintoticamente estável e adequadamente rápido, então, qualquer erro tende a zero (a origem) com uma velocidade adequada (OGATA, 1998).

Se o sistema dinâmico S é completamente observável, é possível escolher a matriz \mathbf{L} tal que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ tem autovalores arbitrariamente escolhidos (OGATA, 1998), ou seja, a matriz de ganho \mathbf{L} do observador pode ser determinada¹ para fornecer a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ desejada. Em algumas situações práticas o sistema dinâmico pode não ser completamente observável, de forma que esta escolha arbitrária de autovalores não é mais possível. No entanto, se o sistema for detectável, a escolha dos autovalores dos modos observáveis pode ser arbitrária, enquanto que os autovalores dos modos não observáveis não podem ser modificados (VALER, 1999). Mas sendo estes últimos autovalores estáveis, um observador estável pode ser construído.

¹A determinação da matriz de ganho do observador de estado através no método LQR é apresentada no capítulo 4.

4 Metodologia de Detecção de Danos para Sistemas Mecânicos

Neste capítulo é apresentada a metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho, sendo abordado o projeto dos observadores de estado de ordem plena em paralelo (GERTLER, 1988). Também, apresenta-se a forma de avaliação do resíduo utilizado para a detecção de danos, o qual é gerado a partir das estimativas do comportamento dinâmico de determinada região do sistema. Ainda, descreve-se a relação do resíduo com os ganhos ótimos dos observadores obtidos pelo método LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*.

4.1 Observadores de Estado de Ordem Plena em Paralelo

A metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho utiliza dois observadores de estado de ordem plena em paralelo para monitorar o sistema mecânico (ver Fig. 11). Considere que o sistema tem m saídas que podem ser agrupadas em dois conjuntos, de modo que para cada conjunto o sistema é completamente observável ou detectável. Estes são denominados α -ésimo e β -ésimo conjuntos de saídas, $\mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t)$ e $\mathbf{y}^{\{\beta\}}(t)$, respectivamente, sendo:

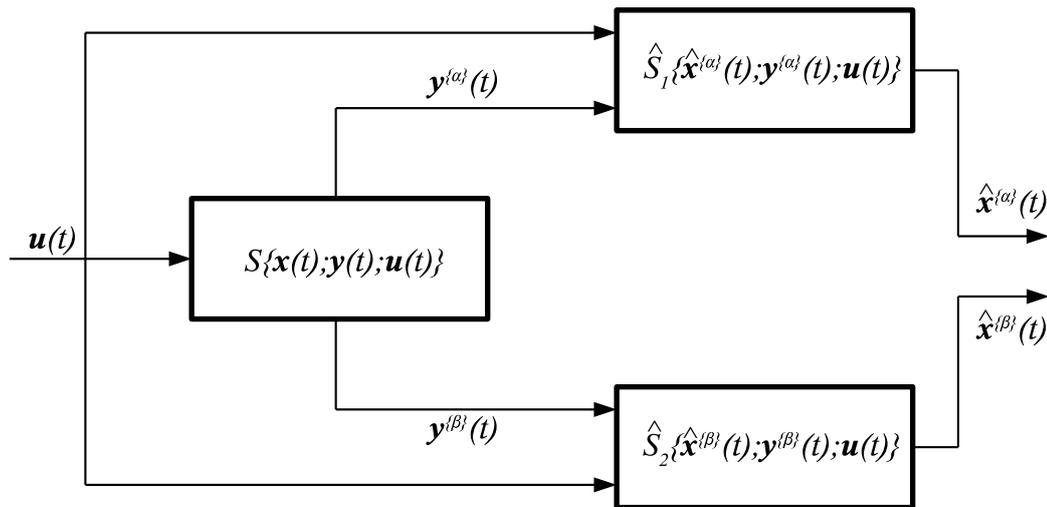
$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t) \\ \mathbf{y}^{\{\beta\}}(t) \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Por questão de notação, considerando que o conjunto $\mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t)$ tem como saída¹ a j -ésima variável de estado $x_j(t)$ do sistema, denota-se tal por $y^{\{j\}}(t)$. Para o caso do conjunto ter mais de uma saída, como por exemplo, $x_j(t)$ e $x_k(t)$, tem-se como notação $\mathbf{y}^{\{j,k\}}(t)$. Os dois observadores de estado são projetados a partir do modelo físico-matemático do sistema sem danos, de modo que o primeiro observador tem como uma

¹Em particular, para sistemas mecânicos, as m saídas fornecem m relações lineares independentes entre as variáveis de estado.

das entradas $\mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t)$ e saída $\hat{\mathbf{x}}^{\{\alpha\}}(t)$ e, para o segundo observador, tem-se como uma das entradas $\mathbf{y}^{\{\beta\}}(t)$ e saída $\hat{\mathbf{x}}^{\{\beta\}}(t)$. Os superescritos de $\hat{\mathbf{x}}^{\{\alpha\}}(t)$ e $\hat{\mathbf{x}}^{\{\beta\}}(t)$ indicam a partir de qual conjunto de saídas do sistema é obtida a estimativa do vetor de estado, sendo realizado a partir das estimativas o processo de detecção de danos (ver seção 4.3). Este enunciado é ilustrado graficamente pela seguinte figura:

Figura 11 – Diagrama de blocos dos observadores de estado de ordem plena em paralelo



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

de modo que para o primeiro observador de estado as matrizes de saída e de ganho são denotadas respectivamente por $\mathbf{C}^{\{\alpha\}}$ e $\mathbf{L}^{\{\alpha\}}$. Similarmente, para o segundo observador, tem-se como notação $\mathbf{C}^{\{\beta\}}$ e $\mathbf{L}^{\{\beta\}}$. As matrizes de ganho² dos dois observadores de estado são obtidas através do método LQR, como é mostrado a seguir.

4.2 Determinação do Ganho Ótimo via Método LQR

O problema de se projetar um observador de estado de ordem plena consiste em determinar sua matriz de ganho \mathbf{L} , tal que a dinâmica do erro de estimação $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ seja assintoticamente estável (OGATA, 1998). O método LQR fornece a matriz de ganho ótima a partir da minimização de determinado índice de desempenho quadrático. Neste caso, por analogia ao projeto de controladores, considere que tal índice de desempenho é

²Salienta-se que as matrizes de ganho ótimas são obtidas a partir do modelo físico-matemático do sistema sem danos.

dado pela seguinte equação:

$$J = \int_0^{\infty} [\boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (81)$$

na qual \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana ou simétrica real definida positiva (ou semidefinida positiva) e \mathbf{R} é uma matriz hermitiana ou simétrica real definida positiva (OGATA, 1998). Além disto, $\mathbf{u}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{L}^T \boldsymbol{\xi}(t) \quad (82)$$

de forma que substituindo a equação (82) na equação (81) e realizando alguns rearranjos, tem-se:

$$J = \int_0^{\infty} \{\boldsymbol{\xi}^T(t) [\mathbf{Q} + \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^T] \boldsymbol{\xi}(t)\} dt \quad (83)$$

Considerando que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})$, a qual determina o comportamento dinâmico do erro de estimação $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$, é estável, tem-se que uma possível função de Lyapunov para o erro é:

$$V[\boldsymbol{\xi}(t)] = \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}(t) \quad (84)$$

sendo \mathbf{P} uma matriz hermitiana ou simétrica real definida positiva. Como a função $V[\boldsymbol{\xi}(t)]$ é definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}[\boldsymbol{\xi}(t)]$ seja definida negativa, de modo que:

$$\dot{V}[\boldsymbol{\xi}(t)] = -\boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{Q}^* \boldsymbol{\xi}(t) \quad (85)$$

sendo \mathbf{Q}^* uma matriz hermitiana ou simétrica real definida positiva (OGATA, 1998). A equação (85) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}(t)] = -\boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{Q}^* \boldsymbol{\xi}(t) \quad (86)$$

admitindo que $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^T$, a equação (86) torna-se:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = -\boldsymbol{\xi}^T(t) [\mathbf{Q} + \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^T] \boldsymbol{\xi}(t) \quad (87)$$

substituindo a equação (79) na equação acima, tem-se:

$$\boldsymbol{\xi}^T(t) [(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})] \boldsymbol{\xi}(t) = -\boldsymbol{\xi}^T(t) [\mathbf{Q} + \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^T] \boldsymbol{\xi}(t) \quad (88)$$

de maneira que a equação (88) pode ser reescrita de forma equivalente através da seguinte

expressão:

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) + \mathbf{Q} + \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^T = \mathbf{0} \quad (89)$$

Assim, conforme Ogata (1998), a partir de certa operação, minimizando o índice J , tem-se que o ganho ótimo do observador é dado por:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P})^T \quad (90)$$

sendo que a matriz \mathbf{P} deve satisfazer a seguinte equação:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (91)$$

definida na literatura como equação matricial reduzida de Riccati (CLOUTIER, 1997; OGATA, 1998).

Para as simulações computacionais deste trabalho, considera-se que $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{R} = 10^{-2} \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

4.3 Análise do Resíduo para Detecção de Danos

Conforme pré-estabelecido neste texto, a estratégia de detecção de danos proposta neste trabalho considera que não existem sensores na região do sistema através da qual se deseja realizar o monitoramento. Assim, o monitoramento é realizado a partir das estimativas das respostas dinâmicas desta região obtidas por meio de medições realizadas em outras posições do sistema. Considere que se tem interesse em monitorar o sistema através do comportamento dinâmico da região que apresenta maior potencial de ocorrência de danos, sendo tal dado pela i -ésima variável de estado, $x_i(t)$, cujas estimativas, $\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t)$ e $\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)$, são obtidas a partir dos conjuntos de saídas $\mathbf{y}^{\{\alpha\}}(t)$ e $\mathbf{y}^{\{\beta\}}(t)$, respectivamente. Os erros de estimação desta variável de estado são expressados, respectivamente, por:

$$\xi_i^{\{\alpha\}}(t) = x_i(t) - \hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t) \quad (92)$$

$$\xi_i^{\{\beta\}}(t) = x_i(t) - \hat{x}_i^{\{\beta\}}(t) \quad (93)$$

de modo que isolando $x_i(t)$ na equação (92) e substituindo na equação (93), tem-se:

$$\xi_i^{\{\beta\}}(t) - \xi_i^{\{\alpha\}}(t) = \hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t) - \hat{x}_i^{\{\beta\}}(t) \quad (94)$$

A partir da equação acima é possível notar que a diferença entre as estimativas $\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t)$

e $\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)$ é determinada pela diferença entre os erros de estimação e, portanto, independe da medida de $x_i(t)$ na posição que, conforme previsto, não possui sensores. Para a situação em que o sistema em monitoramento não contém danos, sabe-se que o modelo físico-matemático, a partir do qual são obtidos os ganhos ótimos dos observadores de estado, é semelhante ao do sistema, de modo que $\xi_i^{\{\alpha\}}(t)$ e $\xi_i^{\{\beta\}}(t)$ apresentam comportamento dinâmico assintoticamente estável. Desta forma, analisando a equação (94), tem-se que as estimativas $\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t)$ e $\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)$ tendem para o mesmo resultado, sendo, então, definidas como estimativas ótimas. No entanto, para a situação em que o sistema em monitoramento contém danos, o modelo físico-matemático, a partir do qual são determinados os ganhos ótimos, difere do modelo do sistema, visto que os observadores são projetados a partir do modelo sem danos. Desta forma, os erros de estimação não apresentam comportamento dinâmico semelhante à situação em que o sistema em monitoramento não contém danos, de modo que as estimativas $\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t)$ e $\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)$ não convergem para o mesmo resultado.

A diferença entre estas estimativas pode definir um índice para detecção de danos, denominado de resíduo, conforme é expressado pela seguinte equação:

$$\Delta_i^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} = 100 \left(\frac{\sqrt{\int_{t_{min}}^{t_{max}} |\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t) - \hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)|^2 dt}}{\sqrt{\int_{t_{min}}^{t_{max}} |\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)|^2 dt}} \right) \quad (95)$$

de modo que para o monitoramento da integridade estrutural, é determinado, inicialmente, o resíduo para a situação em que o sistema não contém danos, sendo denotado por $\Delta_{i,o}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}}$. Este resíduo é obtido a partir de estimativas ótimas, de modo que tende a ser um valor mínimo, sendo, portanto, utilizado como referência numérica para determinação da condição estrutural do sistema em monitoramento. Por outro lado, considerando que a condição estrutural do sistema é desconhecida, tem-se que o resíduo é denotado por $\Delta_{i,d}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}}$. Desta forma, a determinação da condição estrutural pode ser realizada pela seguinte relação de diferenças:

$$\Delta_{i,r}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} = \Delta_{i,d}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} - \Delta_{i,o}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} \quad (96)$$

de modo que, caso o sistema não contenha danos, tem-se $\Delta_{i,r}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} \Big|_{und} \approx 0$, enquanto que, caso o sistema contenha danos:

$$\Delta_{i,r}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} \Big|_{dam} > \Delta_{i,r}^{\frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{\{\beta\}}} \Big|_{und} \quad (97)$$

onde os subscritos *dam* e *und* indicam, respectivamente, a condição estrutural com danos,

do inglês *damaged*, e sem danos, do inglês *undamaged*.

Na prática, as estimativas $\hat{x}_i^{\{\alpha\}}(t)$ e $\hat{x}_i^{\{\beta\}}(t)$ apresentam condições iniciais iguais, sendo tipicamente nulas. Desta maneira, a diferença entre estas estimativas é mais adequadamente notada após os instantes iniciais do processo de monitoramento. Portanto, neste trabalho, considerando os instantes inicial e final do processo de monitoramento³ são, respectivamente, $t_0 = 0\text{ s}$ e $t_f = 20\text{ s}$, tem-se que o intervalo de tempo utilizado para determinar o valor do resíduo é definido entre $t_{min} = 5\text{ s}$ e $t_{max} = 20\text{ s}$ e, em aplicações gerais, deve ser definido pelo analista.

³Os instantes inicial e final do processo de monitoramento definem o intervalo de tempo em que são realizadas as medições das respostas dinâmicas do sistema.

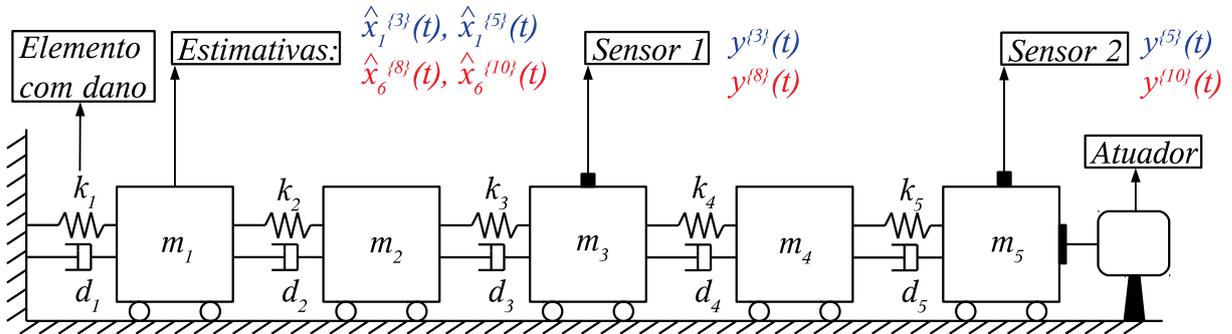
5 Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir das simulações computacionais referentes à aplicação da metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho. São analisados dois sistemas mecânicos, sendo eles: um sistema massa-mola-amortecedor (Fig. 1) e uma viga engastada (Fig. 2), como mostrado a seguir.

5.1 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

O monitoramento da integridade estrutural do sistema massa-mola-amortecedor é realizado a partir das estimativas das respostas dinâmicas na região do engaste. Com o propósito de analisar as vantagens e desvantagens no processo de detecção de danos, tem-se que o monitoramento é realizado através das estimativas do deslocamento do elemento de massa m_1 , que corresponde ao estado $x_1(t)$ e, também, através das estimativas da velocidade deste mesmo elemento, que corresponde ao estado $x_6(t)$. As estimativas do deslocamento são obtidas a partir dos conjuntos de saídas $y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$, os quais representam os deslocamentos do elemento de massa m_3 , $x_3(t)$, e do elemento m_5 , $x_5(t)$, respectivamente. As estimativas da velocidade são obtidas a partir dos conjuntos de saídas $y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$, que representam as velocidades do elemento m_3 , $x_8(t)$, e do elemento m_5 , $x_{10}(t)$, respectivamente. Como ponto de aplicação da força de excitação, considera-se o elemento de massa m_5 como entrada do sistema. As estimativas utilizadas no monitoramento, bem como o posicionamento dos sensores e do atuador, são ilustrados pela figura (12).

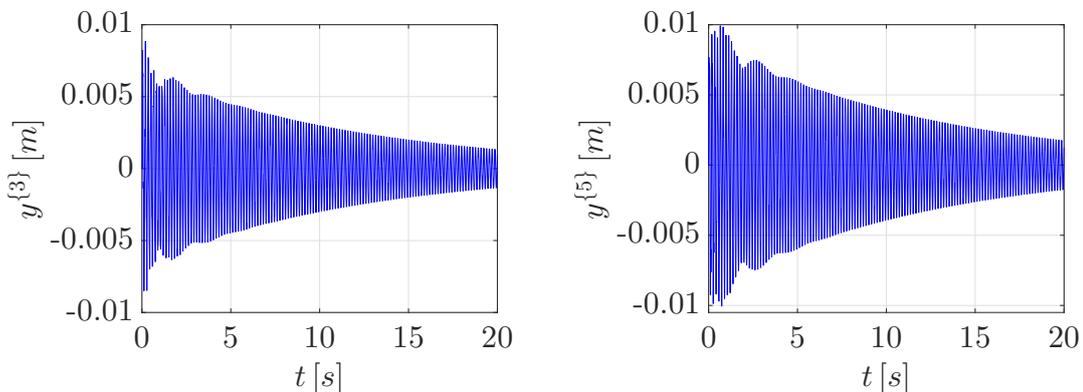
Figura 12 – Representação esquemática das posições dos sensores, da entrada e das estimativas das respostas dinâmicas



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os resíduos¹ obtidos através das estimativas do deslocamento, $\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$, e da velocidade, $\hat{x}_6^{\{8\}}(t)$ e $\hat{x}_6^{\{10\}}(t)$, são denotados por $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ e $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$, respectivamente. Para o monitoramento do sistema são considerados três tipos de força de excitação: a força impulso de área unitária; a força *chirp* linear com amplitude de 5 N , definida para a faixa de frequência entre $f_0 = 4,41\text{ Hz}$ e $f_f = 45,20\text{ Hz}$, que compreende a primeira e a quinta frequências naturais do sistema, que são respectivamente $f_{n_1} = 6,41\text{ Hz}$ e $f_{n_5} = 43,20\text{ Hz}$; e a força *burst*, definida para 20 ciclos de oscilação, com frequência $f_b = 6,41\text{ Hz}$ e amplitude máxima de 3 N . A seguir, são mostradas as saídas (medidas disponíveis) do sistema² para cada tipo de força de excitação utilizada no monitoramento.

Figura 13 – $y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso

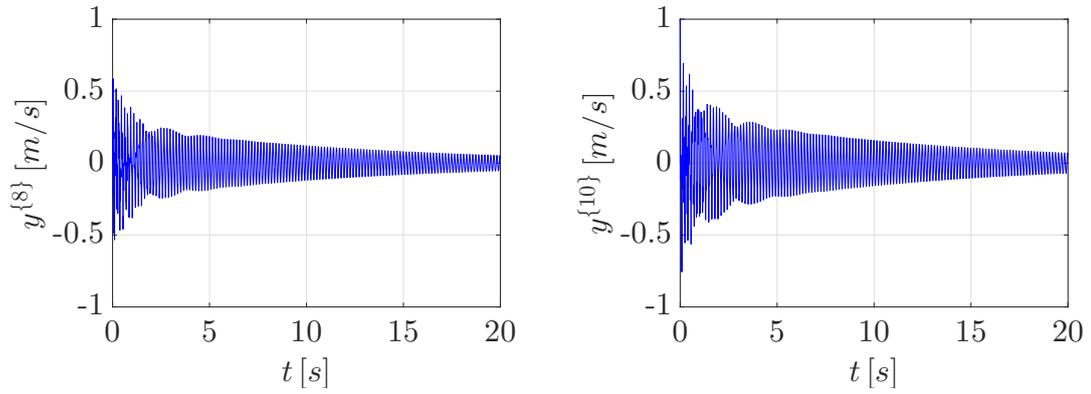


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

¹Note que neste texto resíduo é definido como um índice para detecção de danos, conforme destacado na seção 4.3.

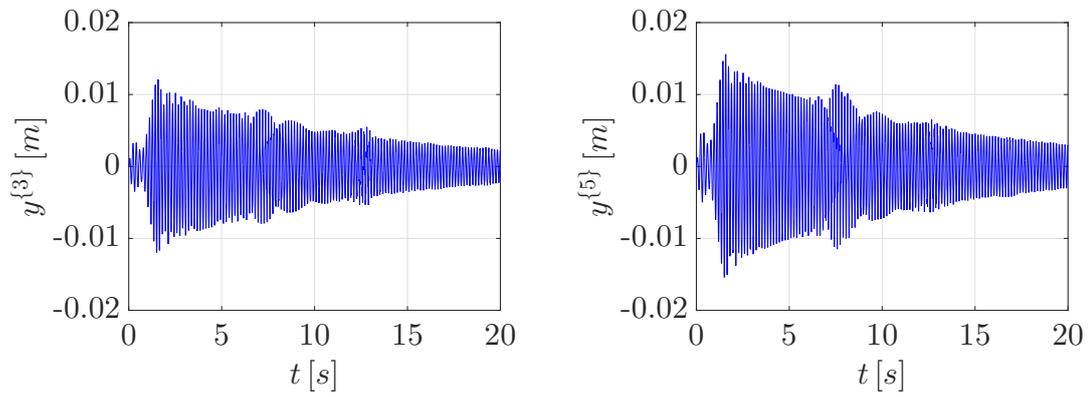
²As saídas apresentadas são referentes à situação de monitoramento em que o sistema não contém danos.

Figura 14 – $y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso



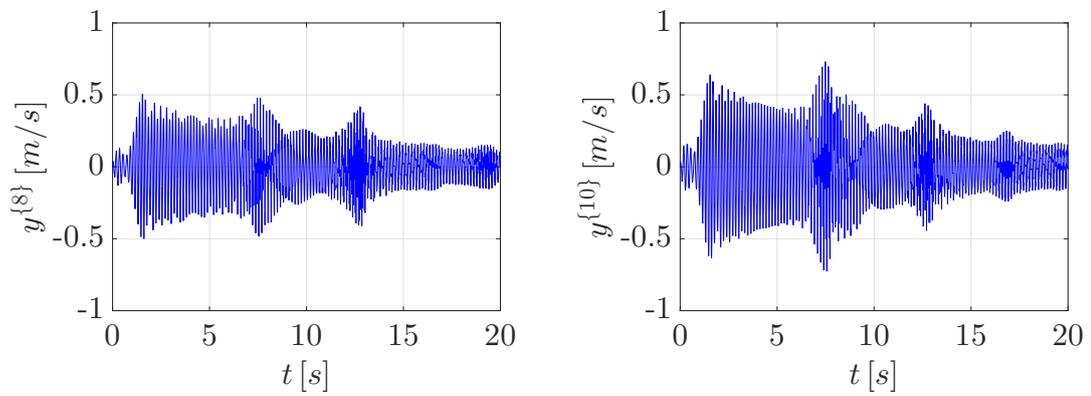
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 15 – $y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*



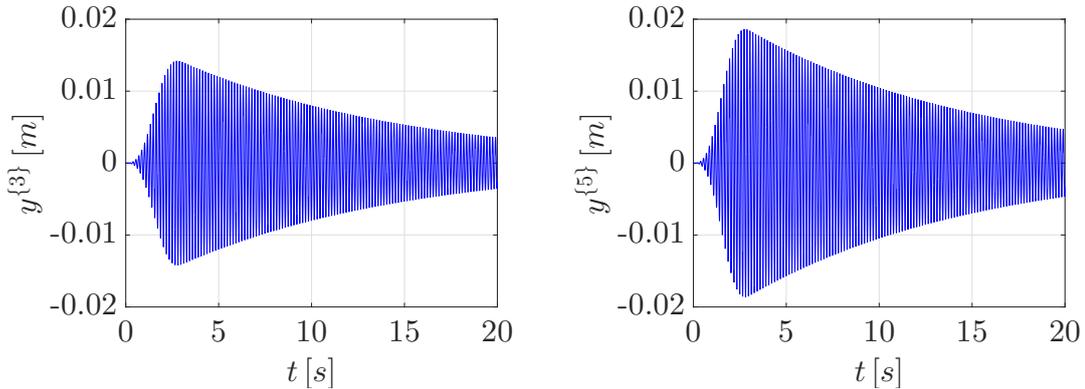
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 16 – $y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*



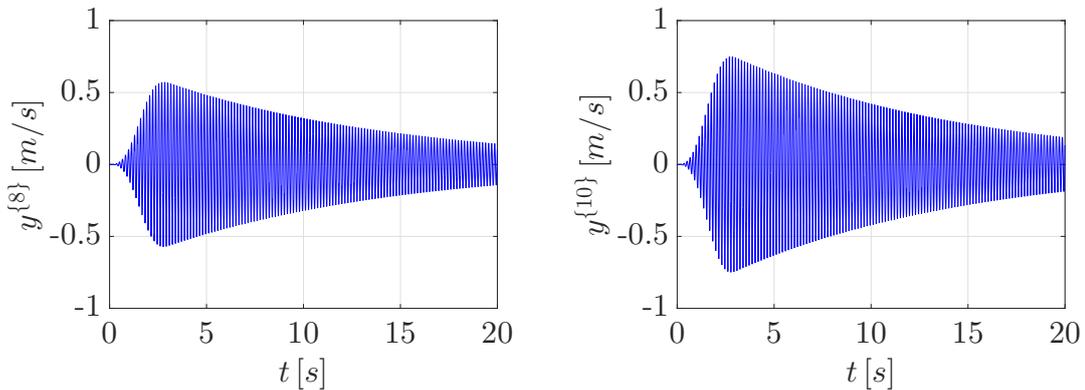
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 17 – $y^{\{3\}}(t)$ e $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

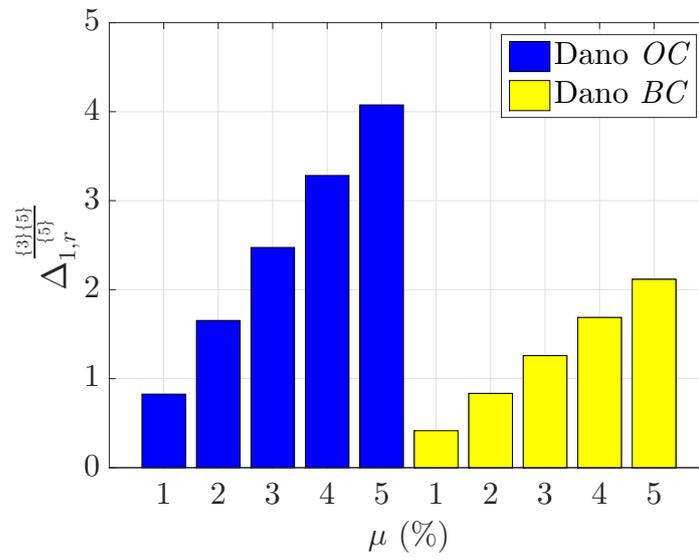
Figura 18 – $y^{\{8\}}(t)$ e $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

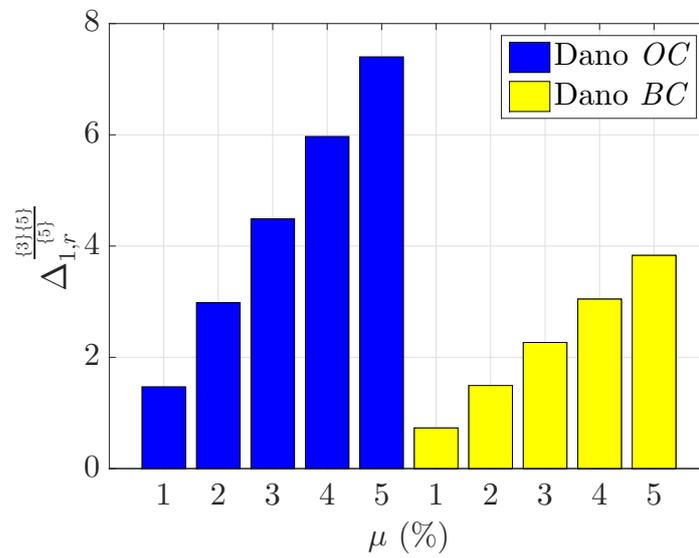
A partir das figuras anteriores, pode se notar o efeito do amortecimento estrutural. Também, para clareza de entendimento do espectro das medidas disponíveis para cada força de excitação, o Apêndice A apresenta uma breve discussão do espectrograma associado à cada caso. Quanto aos tipos de dano investigados, são consideradas duas condições de dano que representam a redução de rigidez do elemento de mola k_1 . A primeira condição de dano representa o modelo físico-matemático de *open crack* (Dano *OC*), e a segunda representa o modelo de *breathing crack* (Dano *BC*), sendo avaliados os resíduos gerados para severidades de dano (μ) entre 1% e 5%. A seguir, são mostrados os resíduos $\Delta_{1,r}^{\{3\},\{5\}}$ obtidos para as forças impulso, *chirp* e *burst* através das figuras (19), (20) e (21), respectivamente.

Figura 19 – $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ para o sistema excitado pela força impulso



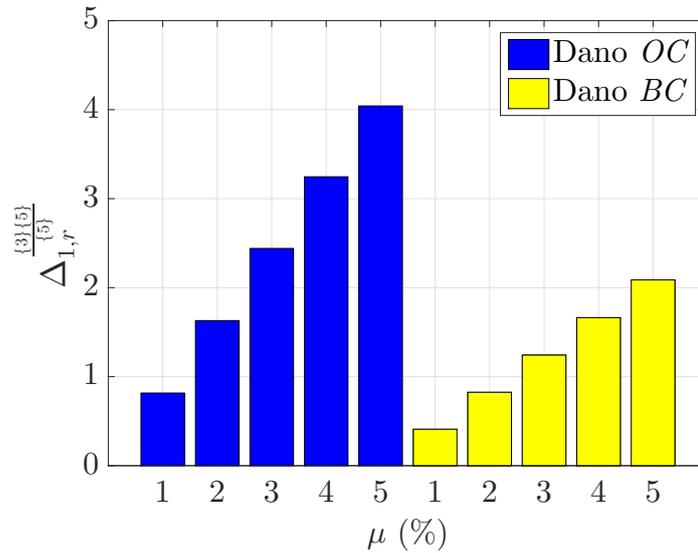
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 20 – $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ para o sistema excitado pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 21 – $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os valores dos resíduos $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ mostrados pelas figuras (19), (20) e (21) são apresentados pela tabela (6). Pode se notar que $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}} > 0$ para todas as situações de monitoramento, de modo que é possível detectar a presença de danos representados pelos modelos físicos-matemáticos de *open crack* e de *breathing crack*. Também, pode se observar que quanto maior a severidade do dano, maior é o resíduo gerado pelas estimativas. Isto se deve ao fato de que o aumento da severidade aumenta a diferença entre o modelo do sistema em monitoramento e o modelo a partir do qual são projetados os observadores de estado (modelo físico-matemático do sistema sem danos), o que então diminui a convergência das estimativas em um mesmo resultado, fazendo, desta forma, o resíduo $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ aumentar.

Tabela 6 – $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ para o sistema excitado pelas forças impulso, *chirp* e *burst*

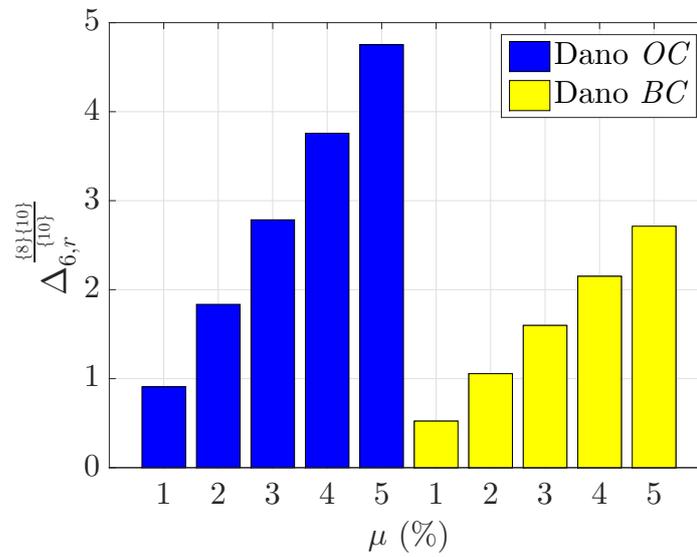
μ	Impulso		<i>Chirp</i>		<i>Burst</i>	
	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>
1%	0,826	0,415	1,470	0,729	0,816	0,409
2%	1,654	0,834	2,981	1,493	1,630	0,824
3%	2,474	1,259	4,490	2,267	2,441	1,242
4%	3,283	1,687	5,970	3,046	3,246	1,663
5%	4,076	2,116	7,402	3,832	4,042	2,087

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Além disto, pode se observar que os resíduos gerados para as situações de monitoramento em que o sistema contém o tipo de dano definido pelo modelo de *open crack* são maiores que os gerados para as situações em que contém o tipo de dano definido pelo modelo de *breathing crack*. Isto se deve ao fato do modelo físico-matemático do sistema com o dano do tipo *open crack* ser diferente do modelo dos observadores de estado durante todo o processo de monitoramento, ou seja, durante o tempo de medição das respostas, o que não ocorre para a situação em que o sistema contém o dano do tipo *breathing crack*. Nesta última situação, o sistema apresenta rigidez nominal (condição sem danos) quando $x_1(t) \leq 0$, sendo diferente apenas para $x_1(t) > 0$. Como os observadores são projetados a partir do modelo do sistema sem danos, as estimativas obtidas quando $x_1(t) \leq 0$ são ótimas, o que contribui para aumento da convergência em um mesmo resultado, diminuindo, deste modo, o resíduo associado.

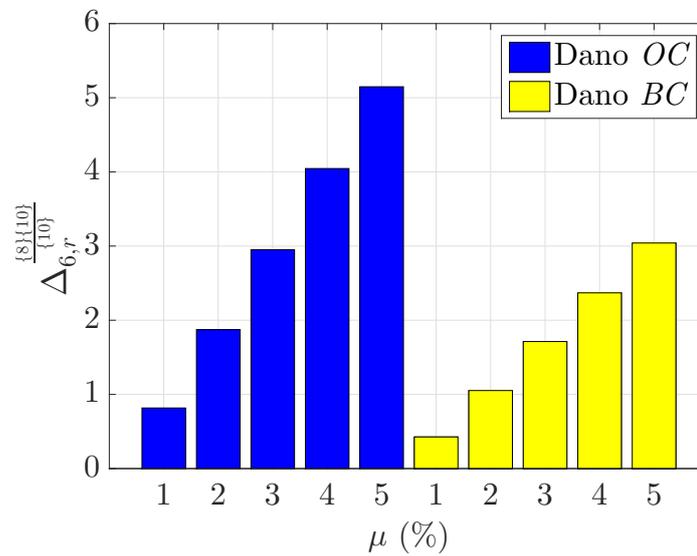
Quanto as forças de excitação utilizadas, pode se notar que os maiores resíduos são obtidos quando o sistema é excitado através da força *chirp*, de modo que esta força se mostra mais adequada, em especial, para a detecção dos tipos de dano considerados neste trabalho. A seguir, os resíduos $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$ obtidos para as forças impulso, *chirp* e *burst* são mostrados pelas figuras (22), (23) e (24), respectivamente.

Figura 22 – $\Delta_{6,r}^{\{\{8\}\{10\}\}}$ para o sistema excitado pela força impulso



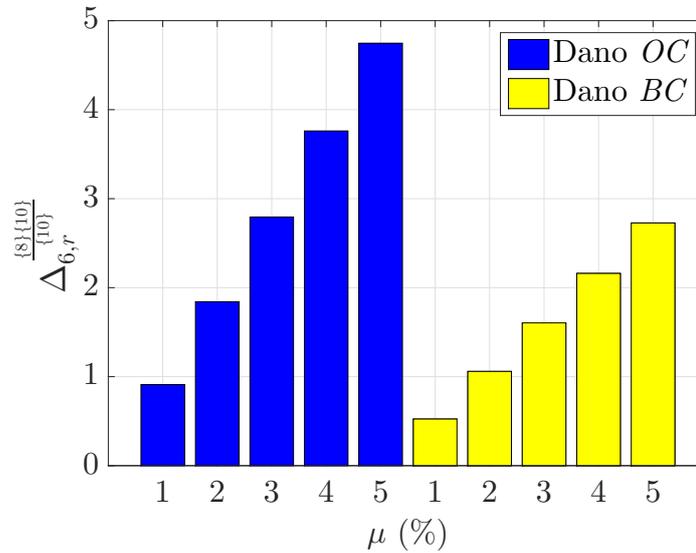
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 23 – $\Delta_{6,r}^{\{\{8\}\{10\}\}}$ para o sistema excitado pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 24 – $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os resíduos mostrados pelas figuras (22), (23) e (24) são apresentados pela tabela (7). Pode se observar que $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}} > 0$ para todas as situações de monitoramento, de modo que também é possível detectar os tipos de dano considerados a partir das estimativas da velocidade do elemento de massa m_1 . Assim como pode se notar para os resíduos gerados através das estimativas do deslocamento, os resíduos $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$ aumentam conforme aumenta a severidade do dano e são maiores para as situações que o sistema em monitoramento contém o dano do tipo *open crack* quando comparado às situações em que contém o dano do tipo *breathing crack*.

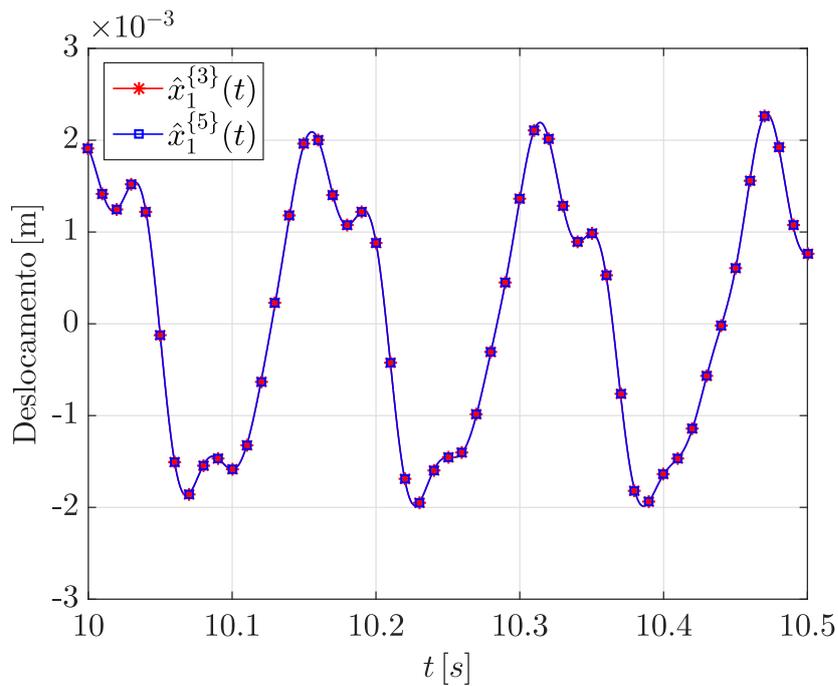
Tabela 7 – $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$ para o sistema excitado pelas forças impulso, *chirp* e *burst*

μ	Impulso		<i>Chirp</i>		<i>Burst</i>	
	Dano OC	Dano BC	Dano OC	Dano BC	Dano OC	Dano BC
1%	0,909	0,523	0,817	0,426	0,911	0,524
2%	1,835	1,056	1,872	1,052	1,842	1,059
3%	2,785	1,598	2,951	1,713	2,792	1,604
4%	3,756	2,150	4,045	2,369	3,761	2,160
5%	4,752	2,713	5,148	3,041	4,747	2,727

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

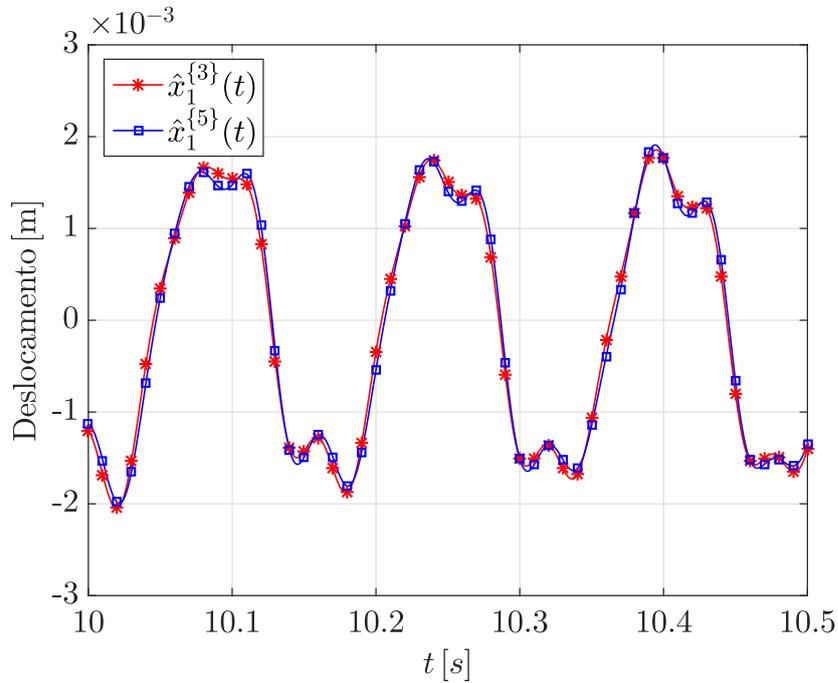
Para as forças de excitação, os maiores resíduos também são obtidos quando o sistema é excitado através da força *chirp*, exceto para as situações em que o sistema contém o dano do tipo *open crack* com severidade de 1% e o dano do tipo *breathing crack* com severidades de 1% e 2%, sendo os maiores resíduos obtidos através da força *burst*. Ao comparar os resíduos $\Delta_{1,r}^{\{3\}\{5\}}$ e $\Delta_{6,r}^{\{8\}\{10\}}$, tem-se que a estratégia de monitoramento mais adequada, em especial para o sistema e os tipos de dano considerados, consiste em utilizar o resíduo obtido a partir das estimativas do deslocamento, $\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$, e excitar o sistema através da força *chirp*. Estas estimativas são mostradas pelas figuras (25) e (26), que ilustram respectivamente as condições em que o sistema em monitoramento não contém danos e que contém o dano do tipo *open crack* com severidade de 5%.

Figura 25 – $\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$ para o sistema sem danos excitado pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 26 – $\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$ para o sistema com o dano do tipo *open crack* (5%) excitado pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

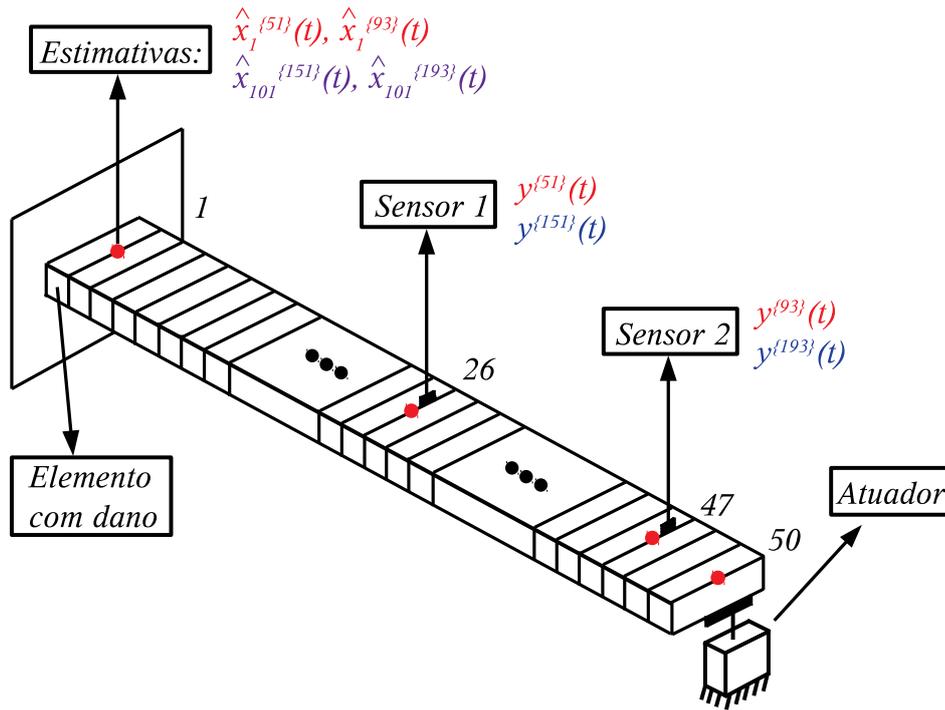
A partir das figuras (25) e (26), pode se notar que para a situação em que o sistema em monitoramento não contém danos, as estimativas $\hat{x}_1^{\{3\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{5\}}(t)$ convergem para o mesmo resultado, de modo que o resíduo mínimo é $\Delta_{1,o}^{\frac{\{3\}\{5\}}{\{5\}}} = 0,047$. No entanto, para a situação que o sistema contém o tipo de dano considerado, pode se observar que as estimativas não convergem para o mesmo resultado, tendo como resíduo $\Delta_{1,r}^{\frac{\{3\}\{5\}}{\{5\}}} = 7,402$.

5.2 Viga Engastada

O processo de detecção de danos para a viga engastada, assim como para o sistema massa-mola-amortecedor, é realizado a partir das estimativas das respostas dinâmicas da região de engaste da estrutura. Tem-se então que o monitoramento é realizado a partir das estimativas do deslocamento e da velocidade transversais do nó 1, que correspondem aos estados $x_1(t)$ e $x_{101}(t)$, respectivamente. As estimativas do deslocamento são obtidas através dos conjuntos de saídas $y^{\{51\}}(t)$ e $y^{\{93\}}(t)$, que representam os deslocamentos transversais dos nós 26 e 47, $x_{51}(t)$ e $x_{93}(t)$, respectivamente. As estimativas da velocidade são obtidas através dos conjuntos de saídas $y^{\{151\}}(t)$ e $y^{\{193\}}(t)$, os quais representam

as velocidades transversais dos nós 26 e 47, $x_{151}(t)$ e $x_{193}(t)$, respectivamente. Quanto ao ponto de aplicação da força de excitação, tem-se que a viga é excitada através do nó 50. A figura (27) mostra a representação esquemática das estimativas utilizadas no monitoramento, assim como o posicionamento dos sensores e da entrada.

Figura 27 – Representação esquemática das posições dos sensores, da entrada e das estimativas das respostas dinâmicas



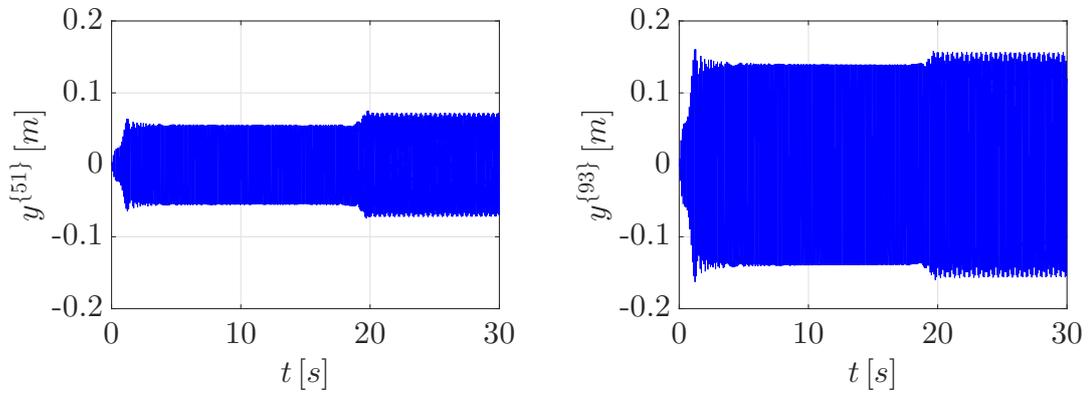
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os resíduos obtidos a partir das estimativas do deslocamento, $\hat{x}_1^{\{51\}}(t)$ e $\hat{x}_1^{\{93\}}(t)$, e da velocidade, $\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$, são denotados por $\Delta_{1,r}^{\{\frac{51}{93}\}\{\frac{93}{193}\}}$ e $\Delta_{101,r}^{\{\frac{151}{193}\}\{\frac{193}{93}\}}$, respectivamente. Neste processo de monitoramento são utilizados dois tipos de força de excitação: a força *chirp* linear com amplitude de $2 N$, definida para a faixa de frequência entre $f_0 = 8,06 Hz$ e $f_f = 65,03 Hz$, que compreende a primeira e a segunda frequências naturais do sistema, que são respectivamente $f_{n_1} = 10,06 Hz$ e $f_{n_2} = 63,03 Hz$; e a força *burst*, definida para 15 ciclos de oscilação, com frequência $f_b = 10,06 Hz$ e amplitude máxima de $1,5 N$. A seguir, são mostradas as medidas disponíveis do sistema³ para cada tipo de força de excitação utilizada no monitoramento. Salienta-se que as medidas são apresentadas para intervalos de tempo que permitem melhor visualização e clareza de entendimento acerca

³As medidas mostradas são referentes à situação de monitoramento em que o sistema não contém danos.

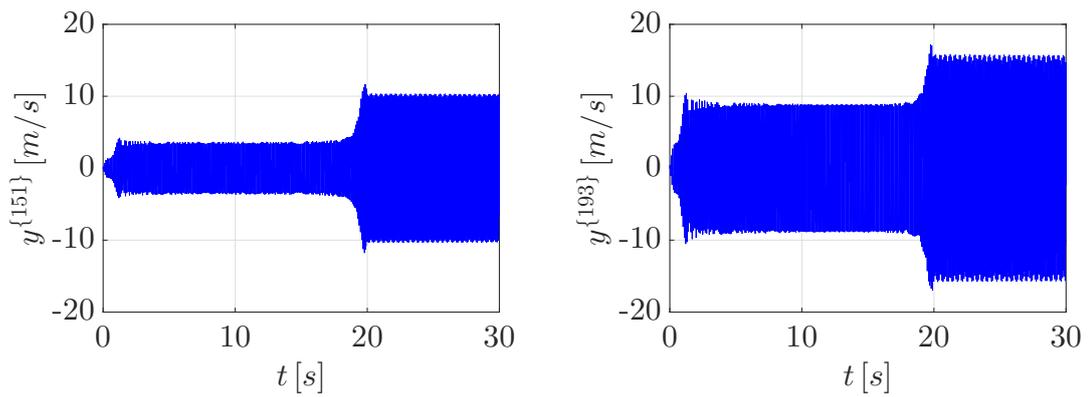
do comportamento dinâmico do sistema.

Figura 28 – $y^{\{51\}}(t)$ e $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



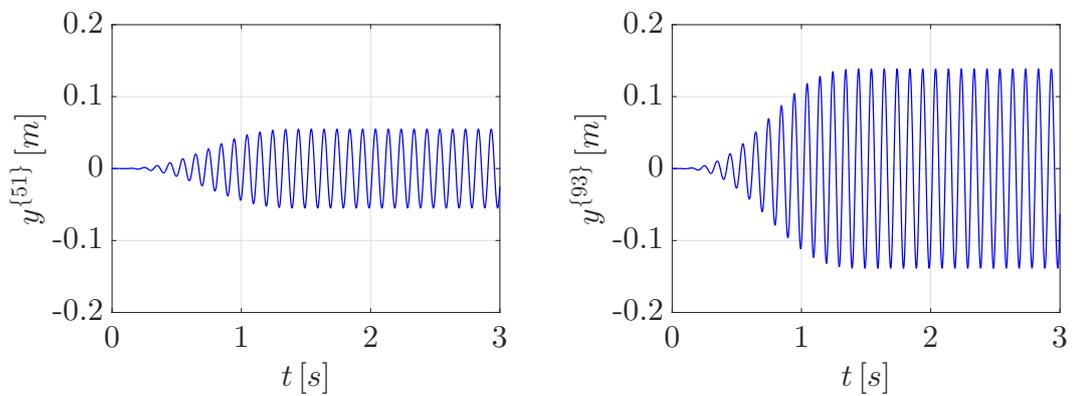
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 29 – $y^{\{151\}}(t)$ e $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



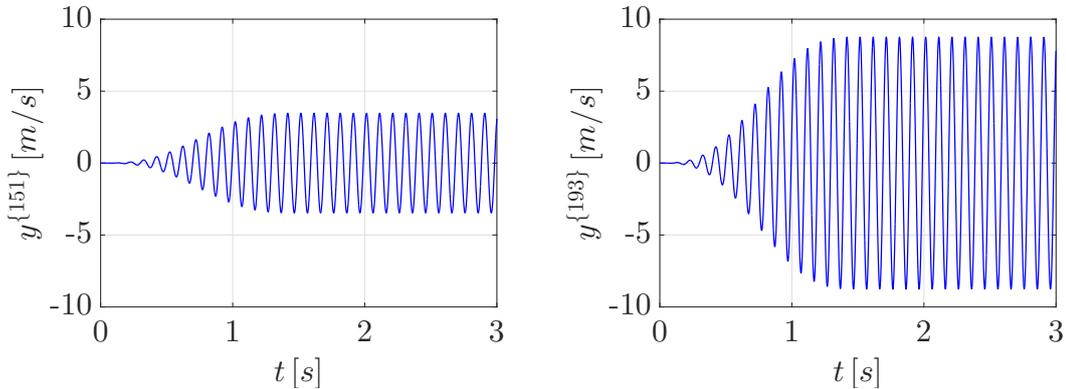
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 30 – $y^{\{51\}}(t)$ e $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 31 – $y^{\{151\}}(t)$ e $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir das figuras anteriores, pode se observar que o amortecimento estrutural tem efeito pouco significativo nas respostas dinâmicas da viga engastada, visto que as razões de amortecimento dos modos de vibrar considerados nas simulações computacionais ($n_m = 5$) são praticamente nulas (ver Tab. 5). Assim como para o sistema massa-mola-amortecedor, para clareza de entendimento do espectro das medidas para cada força de excitação, é apresentada uma breve discussão do espectrograma associado à cada caso no Apêndice A. Além disto, pode se observar que as medidas quando o sistema é excitado pela força *chirp* apresentam aumento de magnitude próximo ao instante de tempo $t = 20$ s. Desta forma, para clareza de entendimento, é apresentado, no Apêndice B, uma discussão acerca deste comportamento dinâmico.

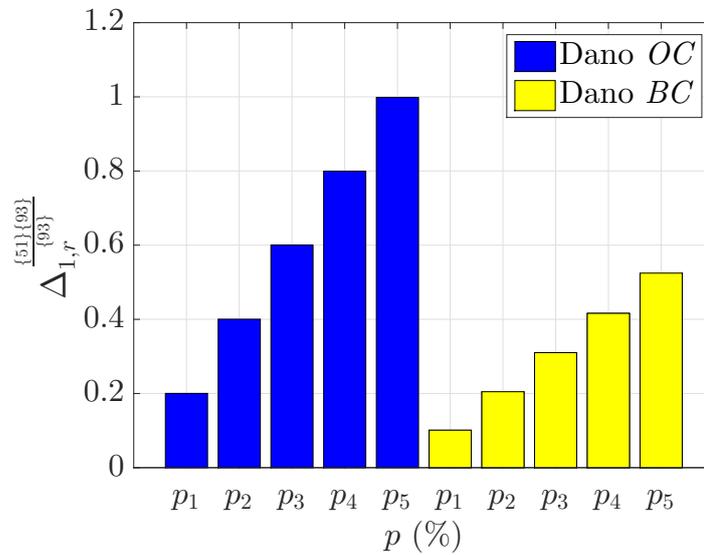
Quanto aos tipos de dano investigados, são considerados dois modelos físicos-matemáticos de dano, o modelo de *open crack* (Dano *OC*) e o de *breathing crack* (Dano *BC*), que representam a redução do momento de inércia de área do elemento de viga 1. Para as simulações computacionais são consideradas as profundidades da trinca (severidades do dano) apresentadas pela tabela (8). Também, são mostrados os resíduos $\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$ obtidos a partir das forças *chirp* e *burst* através das figuras (32) e (33), respectivamente.

Tabela 8 – Profundidades da trinca

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
0,34%	0,68%	1,02%	1,37%	1,73%

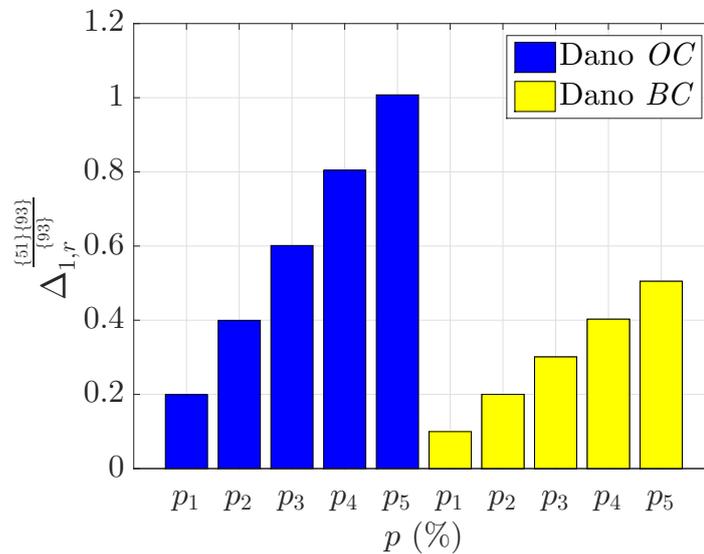
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 32 – $\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$ para a viga excitada pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 33 – $\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os resíduos $\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}}$ mostrados pelas figuras (32) e (33) são apresentados pela tabela (9). Pode se notar que $\Delta_{1,r}^{\frac{\{51\}\{93\}}{\{93\}}} > 0$ para todas as situações de monitoramento, de forma que é possível detectar a presença de danos representados pelos modelos físicos-matemáticos de *open crack* e de *breathing crack*. Para este sistema, também pode se

observar que quanto maior a profundidade da trinca (severidade do dano), maior é o resíduo gerado, conforme comentado no caso anterior: quanto maior a profundidade da trinca, maior é a diferença entre o modelo do sistema em monitoramento e o modelo a partir do qual são projetados os observadores de estado, o que diminui a convergência das estimativas em um mesmo resultado, fazendo o resíduo $\Delta_{1,r}^{\{51\}\{93\}}$ aumentar.

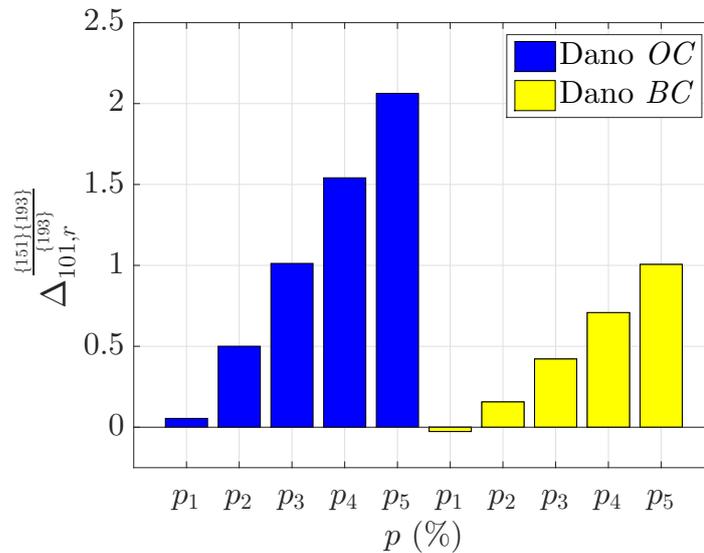
Tabela 9 – $\Delta_{1,r}^{\{51\}\{93\}}$ para a viga excitada através das forças *chirp* e *burst*

$p(\%)$	<i>Chirp</i>		<i>Burst</i>	
	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>
p_1	0,200	0,101	0,199	0,100
p_2	0,401	0,205	0,400	0,200
p_3	0,601	0,310	0,601	0,301
p_4	0,799	0,416	0,804	0,403
p_5	0,998	0,525	1,008	0,505

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

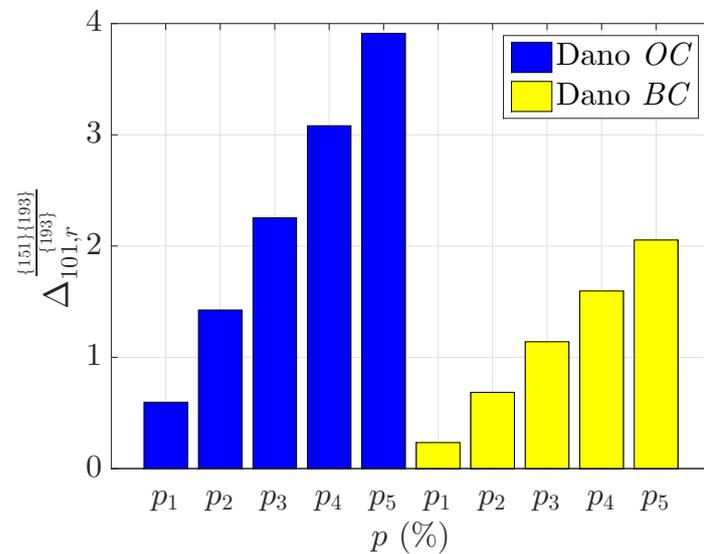
Assim como pode se observar para o sistema massa-mola-amortecedor, os resíduos obtidos para as situações de monitoramento em que o sistema contém o dano do tipo *open crack* são maiores que os obtidos quando o sistema contém o dano do tipo *breathing crack*. Para a situação que o dano é determinado pelo modelo de *breathing crack*, tem-se rigidez do sistema equivalente à condição com dano quando $x_2(t) < 0$, e equivalente à condição sem dano se $x_2(t) \geq 0$. Desta forma, as estimativas quando $x_2(t) \geq 0$ são ótimas, o que aumenta a convergência em um mesmo resultado, fazendo o resíduo $\Delta_{1,r}^{\{51\}\{93\}}$ diminuir. Quanto a força de excitação, os resíduos obtidos para as forças *chirp* e *burst* são semelhantes, de modo não há vantagens em utilizar uma em detrimento da outra. Os resíduos $\Delta_{101,r}^{\{151\}\{193\}}$ obtidos para as forças *chirp* e *burst* são mostrados pelas figuras (34) e (35), respectivamente.

Figura 34 – $\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}}$ para a viga excitada pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 35 – $\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}}$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os resíduos $\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}}$ mostrados pelas figuras (34) e (35) são apresentados pela tabela (10). Pode se observar que $\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}} > 0$, exceto para a situação em que o sistema contém o dano do tipo *breathing crack*, com severidade de 0,34%, e é excitado através da força *chirp*. Para esta situação, nota-se a partir da equação (96), que o resíduo obtido a partir

das estimativas ótimas não representa um valor mínimo, pois o resíduo obtido através das estimativas do sistema com dano é menor. Desta forma, tem-se que a metodologia de detecção de danos utilizada deve ser investigada com mais detalhes para as situações que o dano tem representação não linear.

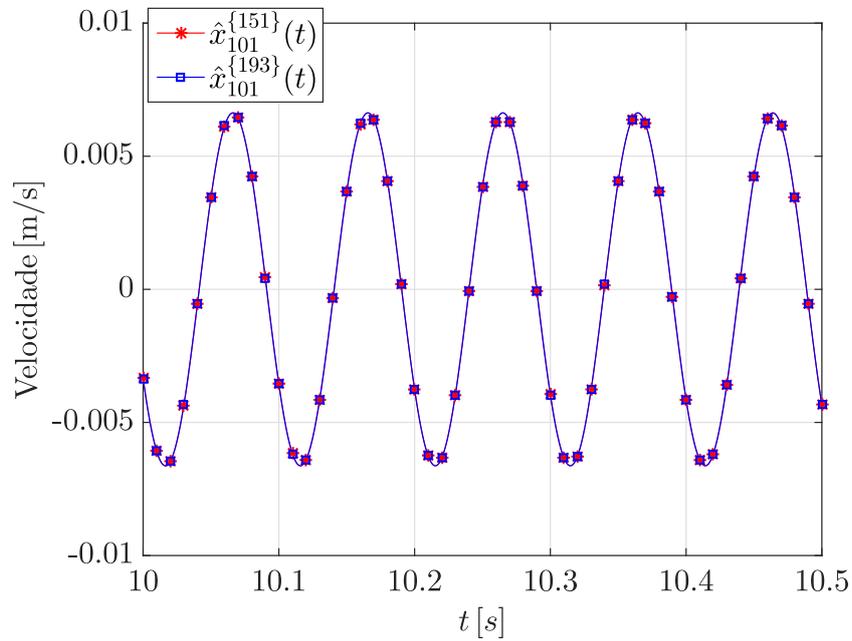
Tabela 10 – $\Delta_{101,r}^{\{151\}\{193\}}$ para a viga excitada através das forças *chirp* e *burst*

$p(\%)$	<i>Chirp</i>		<i>Burst</i>	
	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>	Dano <i>OC</i>	Dano <i>BC</i>
p_1	0,055	-0,027	0,596	0,234
p_2	0,500	0,156	1,425	0,685
p_3	1,012	0,421	2,253	1,140
p_4	1,541	0,708	3,081	1,596
p_5	2,062	1,006	3,911	2,054

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

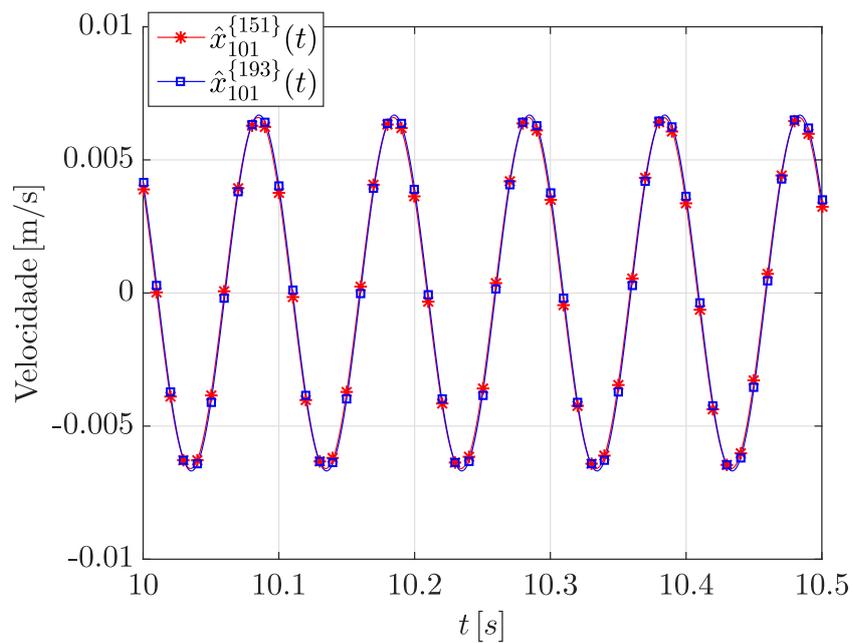
Assim como pode se observar para os resíduos gerados através das estimativas do deslocamento, os resíduos $\Delta_{101,r}^{\{151\}\{193\}}$ aumentam conforme aumenta a profundidade da trinca e são maiores para as situações que o sistema em monitoramento contém o dano do tipo *open crack* quando comparado às situações que contém o dano do tipo *breathing crack*. Quanto a força de excitação utilizada, os maiores resíduos gerados a partir das estimativas da velocidade ocorrem quando o sistema é excitado através da força *burst*. Ao comparar os resíduos $\Delta_{1,r}^{\{51\}\{93\}}$ e $\Delta_{101,r}^{\{151\}\{193\}}$, pode se notar que a estratégia de monitoramento mais adequada, em especial para o sistema e os tipos de dano considerados, consiste em utilizar o resíduo gerado através das estimativas da velocidade, $\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$, e excitar o sistema através da força *burst*. Estas estimativas são mostradas pelas figuras (36) e (37), que ilustram respectivamente as condições em que o sistema em monitoramento não contém danos e que contém o dano do tipo *open crack* com severidade de 5%.

Figura 36 – $\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$ para a viga sem danos excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 37 – $\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$ para a viga com o dano do tipo *open crack* (1,73%) excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir das figuras (36) e (37), pode se observar que para a situação que o sistema em monitoramento não contém danos, as estimativas $\hat{x}_{101}^{\{151\}}(t)$ e $\hat{x}_{101}^{\{193\}}(t)$ convergem para o mesmo resultado, de modo que o resíduo mínimo é $\Delta_{101,o}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}} = 0,119$. No entanto, para a situação que o sistema contém o tipo de dano considerado, tem-se que visualmente não é possível notar significativa diferença entre as estimativas, sendo o resíduo associado à esta situação $\Delta_{101,r}^{\frac{\{151\}\{193\}}{\{193\}}} = 3,911$. Como não é possível notar significativa diferença entre as estimativas, tem-se que é mais adequado realizar a detecção de danos a partir do resíduo proposto neste trabalho (Eq. 95), especialmente para as situações de monitoramento em que os danos se encontram em estágio precoce.

6 Considerações Finais

A metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho consiste em uma alternativa para aplicações com necessidade de monitorar sistemas mecânicos a partir das respostas dinâmicas de regiões com indisponibilidade de posicionar sensores. Desta forma, a detecção de danos é realizada através do resíduo obtido a partir da diferença entre as estimativas do comportamento dinâmico da região. As estimativas são geradas por dois observadores de estado de ordem plena em paralelo, cujos os ganhos ótimos, obtidos pelo método LQR, são determinados a partir do modelo físico-matemático do sistema sem danos. Cada observador de estado é baseado em um conjunto de medidas do sistema, de forma que se tem necessidade do sistema ser completamente observável ou detectável para cada conjunto de medidas.

São realizadas duas aplicações para esta metodologia, sendo utilizados os seguintes sistemas mecânicos: um sistema massa-mola-amortecedor e uma viga engastada obtida pelo método dos Elementos Finitos. Ambos representam sistemas com uma de suas extremidades livre e outra engastada. A principal diferença destes sistemas está relacionada ao número de graus de liberdade requeridos para obtenção dos modelos físicos-matemáticos. O sistema massa-mola-amortecedor é representado por cinco graus de liberdade, enquanto a viga engastada é representada por cem graus de liberdade, de forma que a viga requer representação em coordenadas modais para a integração numérica da equação matricial do movimento, especialmente para reduzir as dimensões das matrizes.

Nestas simulações, o monitoramento do sistema é realizado a partir das estimativas do deslocamento e da velocidade da região definida com maior potencial de ocorrência de danos, de forma que para os sistemas típicos, tem-se que esta região está localizada próxima ao engaste. Para o sistema massa-mola-amortecedor, utiliza-se as estimativas das respostas dinâmicas do elemento de massa m_1 , e para a viga engastada, utiliza-se as estimativas do nó 1. Quanto aos tipos de dano investigados, são considerados, para ambos sistemas, dois tipos de modelos físicos-matemáticos que representam o comportamento dinâmico do sistema contendo trincas: o modelo de *open crack* e o de *breathing crack*.

Para o sistema massa-mola-amortecedor, a metodologia de monitoramento da integridade estrutural é capaz de detectar os tipos e severidades de dano considerados. São utilizados três tipos de força de excitação para o monitoramento: a força impulso de área unitária, o *chirp* linear e o *burst*. A partir dos resultados obtidos, tem-se que a estratégia mais adequada para detecção de danos, em especial para as condições de dano consideradas, consiste em avaliar o resíduo obtido a partir das estimativas do deslocamento do elemento de massa m_1 e excitar o sistema através da força *chirp*.

Para a viga engastada, são considerados dois tipos de forças de excitação para o monitoramento: o *chirp* linear e o *burst*. Para a condição que o sistema contém o dano do tipo *breathing crack*, com profundidade de trinca de 0,34%, para excitação através da força *chirp*, tem-se que a metodologia utilizada não é capaz de detectar que o sistema contém dano utilizando as estimativas da velocidade. Desta forma, tem-se que a metodologia proposta deve ser investigada com mais detalhes para as situações que o dano tem representação não linear. Pode se notar, a partir dos resultados obtidos, que a estratégia mais adequada de monitoramento, em especial para as condições de dano consideradas, consiste em utilizar o resíduo gerado a partir das estimativas da velocidade do nó 1 e excitar o sistema através da força *burst*.

As principais vantagens desta metodologia consistem em utilizar uma forma de geração de resíduo que é independente das medidas disponíveis do sistema, e somente utilizar o modelo físico-matemático do sistema sem danos para o projeto dos observadores de estado em paralelo, sendo esta uma importante vantagem para as técnicas de SHM. A principal desvantagem desta metodologia é a necessidade em se definir pelo menos dois conjuntos de medidas para os quais o sistema em monitoramento é observável ou detectável, visto que as estimativas utilizadas para se gerar o resíduo são obtidas a partir de conjuntos de medidas distintos. Isto não é visto na maior parte dos trabalhos desta área, pois o resíduo é gerado a partir da diferença entre dada medida e sua estimativa, sendo necessário apenas se determinar um conjunto de medidas.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

As seguintes sugestões podem ser consideradas para trabalhos futuros:

- Realizar o monitoramento da integridade estrutural a partir das estimativas do comportamento dinâmico de regiões que encontram-se distantes da região que apresenta maior potencial de ocorrência de danos, e a avaliar as vantagens e desvantagens

quando comparado ao monitoramento realizado a partir das estimativas da região com maior potencial de ocorrência de danos;

- Utilizar observadores de estado de ordem reduzida na metodologia de monitoramento da integridade estrutural proposta neste trabalho, com o intuito de avaliar as vantagens e desvantagens no processo de detecção de danos quando comparado a utilização de observadores de estado de ordem plena;
- Analisar a influência das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , as quais são utilizadas na determinação dos ganhos ótimos dos observadores de estado através do método LQR, no processo de detecção de danos;
- Determinar os ganhos dos observadores de estado em paralelo através do método LQR em estrutura de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMI), para sistemas com incertezas de parâmetros;
- Determinar os intervalos de tempo mais adequados, em cada tipo de força de excitação, para geração do resíduo utilizado na detecção de danos;
- Aplicar a metodologia de detecção de danos proposta neste trabalho em sistemas que apresentam comportamento dinâmico não linear na condição que não contém danos, além de ampliar o entendimento da abordagem proposta neste estudo para sistemas com danos não lineares;
- Avaliar a influência de incertezas de parâmetros, entradas desconhecidas e ruídos de medida na determinação da condição estrutural do sistema em monitoramento através da metodologia proposta neste trabalho.

Referências

- ADEWUYI, A. P.; WU, Z.; SERKER, N. K. Assessment of vibration-based damage identification methods using displacement and distributed strain measurements. *Structural Health Monitoring*, London, v. 8, n. 6, p. 443–461, 2009.
- AMEZQUITA-SANCHEZ, J. P.; ADELI, H. Signal processing techniques for vibration-based health monitoring of smart structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Barcelona, v. 23, n. 1, p. 1–15, 2016.
- ASGARI, S.; YAZDIZADEH, A. Robust model-based fault diagnosis of mechanical drive train in v47/660 kw wind turbine. *Energy Systems*, Berlin, v. 9, n. 4, p. 921–952, 2018.
- BALAGEAS, D.; FRITZEN, C.-P.; GÜEMES, A. *Structural health monitoring*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- BARAD, K. H.; SHARMA, D.; VYAS, V. Crack detection in cantilever beam by frequency based method. *Procedia Engineering*, Oxford, v. 51, p. 770–775, 2013.
- BESANÇON, G. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & control letters*, Amsterdam, v. 41, n. 4, p. 271–280, 2000.
- BHANGU, B. S. et al. Nonlinear observers for predicting state-of-charge and state-of-health of lead-acid batteries for hybrid-electric vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, New York, v. 54, n. 3, p. 783–794, 2005.
- BHUIYAN, M. Y. et al. Toward identifying crack-length-related resonances in acoustic emission waveforms for structural health monitoring applications. *Structural Health Monitoring*, London, v. 17, n. 3, p. 577–585, 2018.
- BISHOP, G.; WELCH, G. *An Introduction to Kalman Filter*. [S.l.], 1995.
- BUENO, D. D. *Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos*. 2007. 130f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita de Filho", 2007.
- CHONDROS, T.; DIMAROGONAS, A. D.; YAO, J. Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 239, n. 1, p. 57–67, 2001.
- CHOW, E.; WILLSKY, A. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 29, n. 7, p. 603–614, 1984.
- CLARK, R. N. Instrument fault detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, New York, n. 3, p. 456–465, 1978.

- CLOUTIER, J. R. State-dependent riccati equation techniques: an overview. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Albuquerque. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*. New York: IEEE, 1997. p. 932–936.
- DAWE, D. *Matrix and finite element displacement analysis of structures*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1984.
- DING, X.; FRANK, P. Fault detection via optimally robust detection filters. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 1989, Tampa. *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decesion and Control*. New York: IEEE, 2002. p. 1767–1772.
- DOEBLING, S. W. et al. A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, Washington, v. 30, n. 2, p. 91–105, 1998.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern control systems*. [S.l.]: Pearson, 2011.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K.; PATTON, R. J. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, Elmsford, v. 36, n. 4, p. 541–553, 2000.
- FAN, W.; QIAO, P. Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study. *Structural Health Monitoring*, London, v. 10, n. 1, p. 83–111, 2011.
- FARRAR, C.; DOEBLING, S. *Modal analysis and testing*. [S.l.]: Springer, 1999.
- FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, London, v. 365, n. 1851, p. 303–315, 2006.
- FARRAR, C. R.; WORDEN, K. *Structural health monitoring: a machine learning perspective*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- FENG, D.; FENG, M. Q. Experimental validation of cost-effective vision-based structural health monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, London, v. 88, p. 199–211, 2017.
- FERRARI, R. M.; PARISINI, T.; POLYCARPOU, M. M. Distributed fault detection and isolation of large-scale discrete-time nonlinear systems: An adaptive approximation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 57, n. 2, p. 275–290, 2012.
- FRANK, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: A survey and some new results. *Automatica*, Elmsford, v. 26, n. 3, p. 459–474, 1990.
- FRANK, P. M.; DING, X. Frequency domain approach to optimally robust residual generation and evaluation for model-based fault diagnosis. *Automatica*, Elmsford, v. 30, n. 5, p. 789–804, 1994.
- GAO, Z.; CECATI, C.; DING, S. X. A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques - part 1: Fault diagnosis with model-based and signal-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 62, n. 6, p. 3757–3767, 2015.
- GAWRONSKI, W. *Advanced structural dynamics and active control of structures*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.

- GERTLER, J. Analytical redundancy methods in fault detection and isolation-survey and synthesis. *IFAC Proceedings Volumes*, Baden-Baden, v. 24, n. 6, p. 9–21, 1991.
- GERTLER, J. J. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. *IEEE Control systems magazine*, New York, v. 8, n. 6, p. 3–11, 1988.
- GOUNARIS, G.; DIMAROGONAS, A. A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis. *Computers & Structures*, Elmsford, v. 28, n. 3, p. 309–313, 1988.
- GOUNARIS, G. D.; PAPADOPOULOS, C. A. Crack identification in rotating shafts by coupled response measurements. *Engineering fracture mechanics*, Elmsford, v. 69, n. 3, p. 339–352, 2002.
- GUO, H. et al. Optimal placement of sensors for structural health monitoring using improved genetic algorithms. *Smart Materials and Structures*, New York, v. 13, n. 3, p. 528–534, 2004.
- HEREDIA, G. et al. Sensor and actuator fault detection in small autonomous helicopters. *Mechatronics*, Oxford, v. 18, n. 2, p. 90–99, 2008.
- HEYDARZADEH, M.; NOURANI, M. A two-stage fault detection and isolation platform for industrial systems using residual evaluation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, New York, v. 65, n. 10, p. 2424–2432, 2016.
- IHN, J.-B.; CHANG, F.-K. Pitch-catch active sensing methods in structural health monitoring for aircraft structures. *Structural Health Monitoring*, London, v. 7, n. 1, p. 5–19, 2008.
- INMAN, D. J. et al. *Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.
- JANAPATI, V. et al. Damage detection sensitivity characterization of acousto-ultrasound-based structural health monitoring techniques. *Structural Health Monitoring*, London, v. 15, n. 2, p. 143–161, 2016.
- JIANG, B.; STAROSWIECKI, M.; COCQUEMPOT, V. Fault accommodation for nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 51, n. 9, p. 1578–1583, 2006.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS, 1997, Orlando. *Proceedings SPIE 3068, Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*. Redondo Beach: Spie, 1997. p. 182–194.
- KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 4, n. 3, p. 481–492, 1959.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, New York, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, New York, v. 83, n. 1, p. 95–108, 1961.

- KHUC, T.; CATBAS, F. N. Completely contactless structural health monitoring of real-life structures using cameras and computer vision. *Structural Control and Health Monitoring*, New York, v. 24, n. 1, 2017.
- KLEPKA, A. et al. Impact damage detection in laminated composites by non-linear vibro-acoustic wave modulations. *Composites Part B: Engineering*, Oxford, v. 65, p. 99–108, 2014.
- KOBAYASHI, T.; SIMON, D. L. Application of a bank of kalman filters for aircraft engine fault diagnostics. In: CONFERENCE SPONSORS: INTERNATIONAL GAS TURBINE INSTITUTE, 2003, Atlanta. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, collocated with the 2003 International Joint Power Generation Conference*. Piscataway: IEEE/ASME, 2003. p. 461–470.
- LAW, S.; ZHU, X. Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Engineering Structures*, Oxford, v. 26, n. 9, p. 1279–1293, 2004.
- LIU, J. et al. Robust model-based fault diagnosis for pem fuel cell air-feed system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 63, n. 5, p. 3261–3270, 2016.
- LUENBERGER, D. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 11, n. 2, p. 190–197, 1966.
- LUENBERGER, D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971.
- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, New York, v. 8, n. 2, p. 74–80, 1964.
- MELO, G. P. de. *Detecção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida*. 1998. 125 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual de Campinas, 1998.
- MESHARAM, N. A.; PAWAR, V. S. Analysis of crack detection of a cantilever beam using finite element analysis. *International Journal of Engineering Research & Technology*, Delhi, v. 4, n. 04, 2015.
- NAMDAR, A. et al. Effect of flexural crack on plain concrete beam failure mechanism a numerical simulation. *Frattura ed Integrità Strutturale*, Cassino, n. 36, p. 168–181, 2016.
- NGUYEN, K. V. Comparison studies of open and breathing crack detections of a beam-like bridge subjected to a moving vehicle. *Engineering Structures*, Oxford, v. 51, p. 306–314, 2013.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: LTC, 1998.
- OSTACHOWICZ, W.; KRAWCZUK, M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 150, n. 2, p. 191–201, 1991.
- PAPATHEOU, E. et al. The use of pseudo-faults for novelty detection in shm. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 329, n. 12, p. 2349–2366, 2010.

- PATTON, R.; WILLCOX, S. Comparison of two techniques of ifd based on a non-linear stochastic model of an aircraft. *IFAC Proceedings Volumes*, Baden-Baden, v. 18, n. 5, p. 711–717, 1985.
- PATTON, R. J.; CHEN, J. On eigenstructure assignment for robust fault diagnosis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, Chichester, v. 10, n. 14, p. 1193–1208, 2000.
- PATTON, R. J. et al. Robust fdi applied to thruster faults of a satellite system. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 18, n. 9, p. 1093–1109, 2010.
- POON, J. et al. Model-based fault detection and identification for switching power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 32, n. 2, p. 1419–1430, 2017.
- POULIEZOS, A.; STAVRAKAKIS, G. S. *Real time fault monitoring of industrial processes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994.
- RABELO, D. de S. et al. Impedance-based structural health monitoring and statistical method for threshold-level determination applied to 2024-t3 aluminum panels under varying temperature. *Structural Health Monitoring*, London, v. 16, n. 4, p. 365–381, 2017.
- RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.
- RÉBILLAT, M.; HAJRYA, R.; MECHBAL, N. Nonlinear structural damage detection based on cascade of hammerstein models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, London, v. 48, n. 1-2, p. 247–259, 2014.
- RYTTER, A. *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. 1993. 145 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, 1993.
- SUN, H.; BÜYÜKÖZTÜRK, O. Optimal sensor placement in structural health monitoring using discrete optimization. *Smart Materials and Structures*, New York, v. 24, n. 12, 2015.
- TYLEE, J. On-line failure detection in nuclear power plant instrumentation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 28, n. 3, p. 406–415, 1983.
- VALER, C. E. I. *Uma introdução ao controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis*. 1999. 179 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — PUC-RJ, 1999.
- WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: IEEE ADAPTIVE SYSTEMS FOR SIGNAL PROCESSING, COMMUNICATIONS, AND CONTROL SYMPOSIUM, 2000, Alberta. *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*. New York: IEEE, 2002. p. 153–158.
- WANG, Y.; HAO, H. Damage identification scheme based on compressive sensing. *Journal of Computing in Civil Engineering*, New York, v. 29, n. 2, p. 04014037:1–10, 2013.

- WATANABE, K.; HIMMELBLAU, D. Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 13, n. 2, p. 137–158, 1982.
- WITCZAK, M. et al. An lmi approach to robust fault estimation for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Chichester, v. 26, n. 7, p. 1530–1548, 2016.
- WORDEN, K.; DULIEU-BARTON, J. M. An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring*, London, v. 3, n. 1, p. 85–98, 2004.
- WORDEN, K.; MANSON, G.; FIELLER, N. R. Damage detection using outlier analysis. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 229, n. 3, p. 647–667, 2000.
- WÜNNENBERG, J.; CLARK, R.; FRANK, P. An application of instrument fault detection. *IFAC Proceedings Volumes*, Baden-Baden, v. 18, n. 5, p. 699–704, 1985.
- WÜNNENBERG, J.; FRANK, P. Sensor fault detection via robust observers. In: *System fault diagnostics, reliability and related knowledge-based approaches*. [S.l.]: Springer, 1987. p. 147–160.
- YI, T.-H.; LI, H.-N.; GU, M. Optimal sensor placement for structural health monitoring based on multiple optimization strategies. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Hoboken, v. 20, n. 7, p. 881–900, 2011.
- ZAREI, J.; POSHTAN, J. Design of nonlinear unknown input observer for process fault detection. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 49, n. 22, p. 11443–11452, 2010.
- ZHANG, X.; POLYCARPOU, M. M.; PARISINI, T. A robust detection and isolation scheme for abrupt and incipient faults in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 47, n. 4, p. 576–593, 2002.

APÊNDICE A – Espectrogramas das Forças de Excitação e das Medidas Disponíveis dos Sistemas em Monitoramento

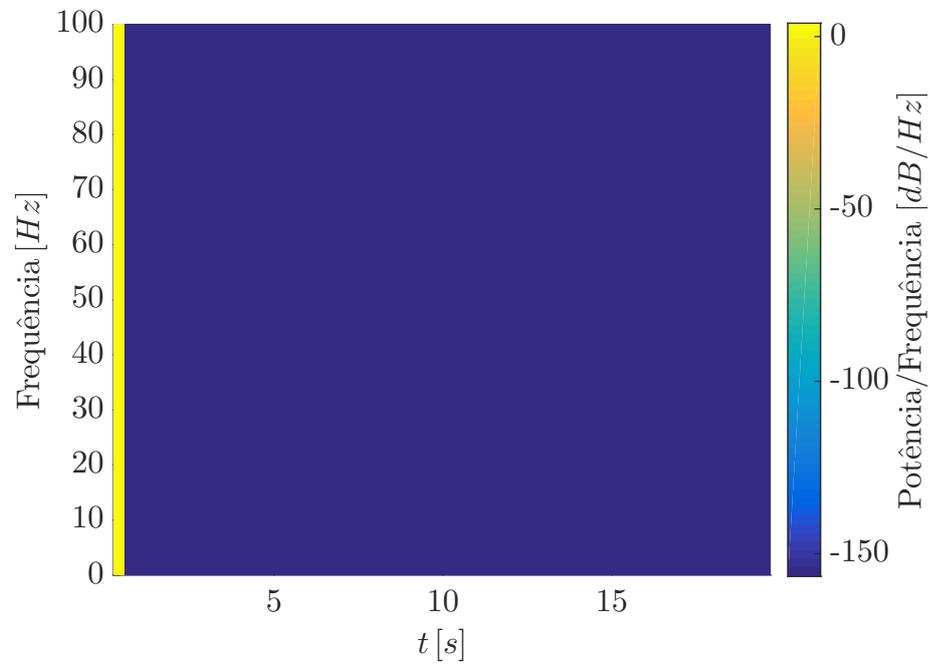
Neste apêndice são apresentados os espectrogramas das forças de excitação e das medidas disponíveis dos sistemas em monitoramento utilizados nas simulações computacionais (ver Cap. 5).

A.1 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Os espectrogramas das forças de excitação e das medidas disponíveis do sistema massa-mola-amortecedor para as forças impulso, *chirp* e *burst* são mostrados nas figuras (38) a (52).

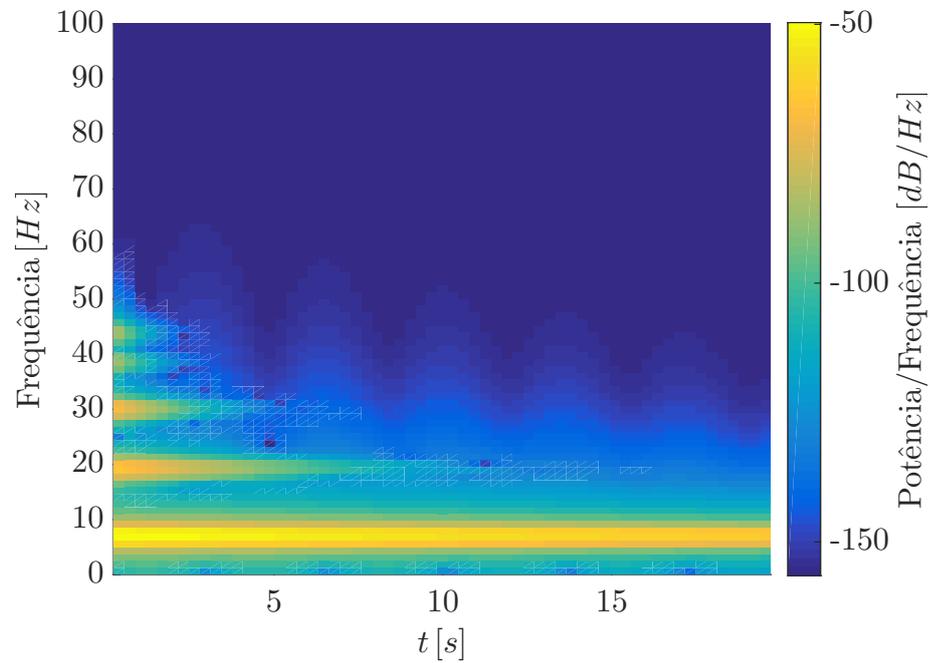
A.1.1 Força Impulso

Figura 38 – Espectrograma da força impulso para o sistema massa-mola-amortecedor



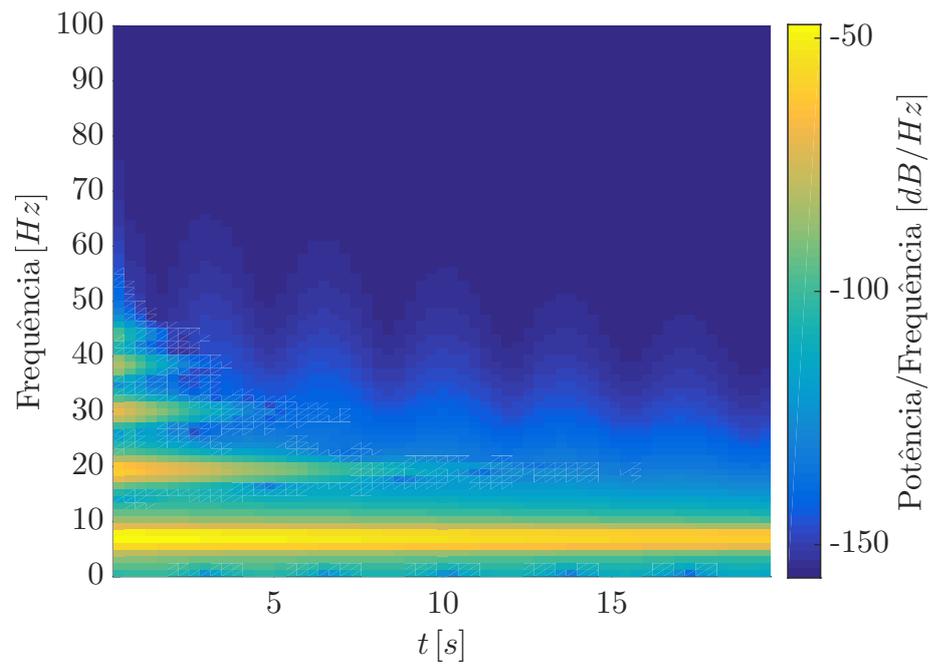
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 39 – Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso



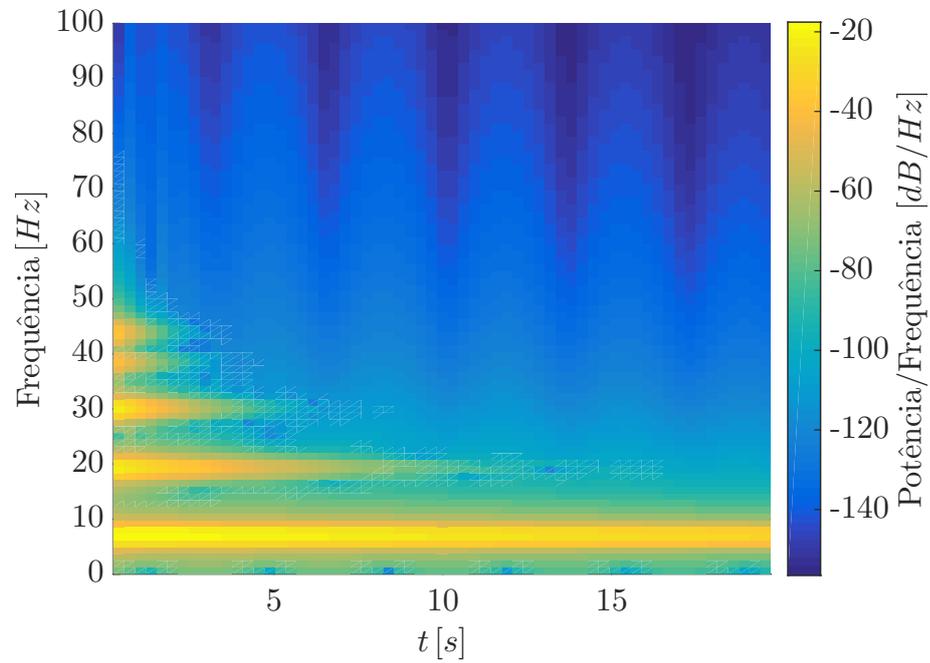
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 40 – Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso



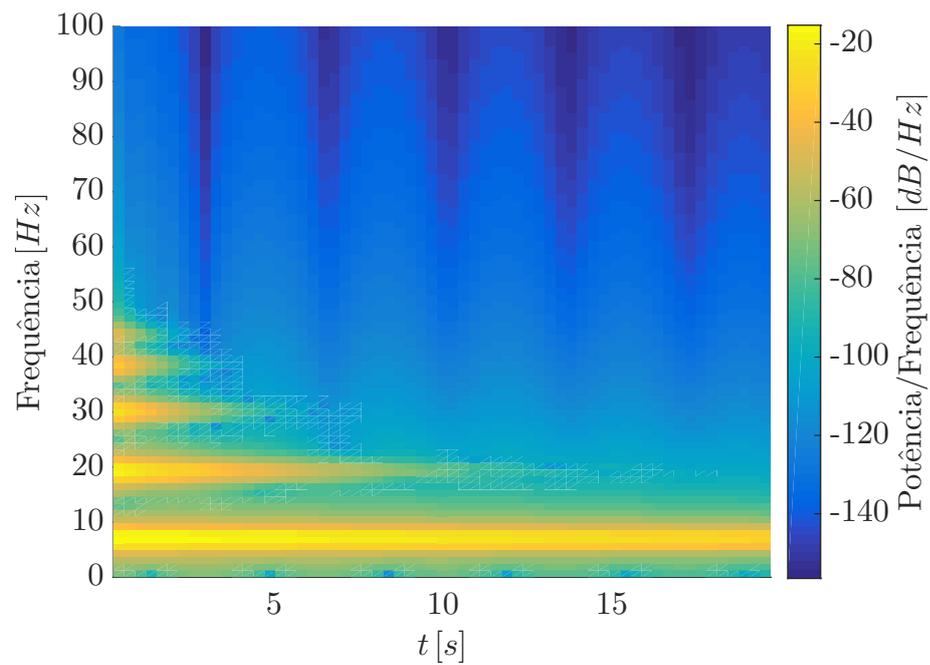
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 41 – Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 42 – Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força impulso

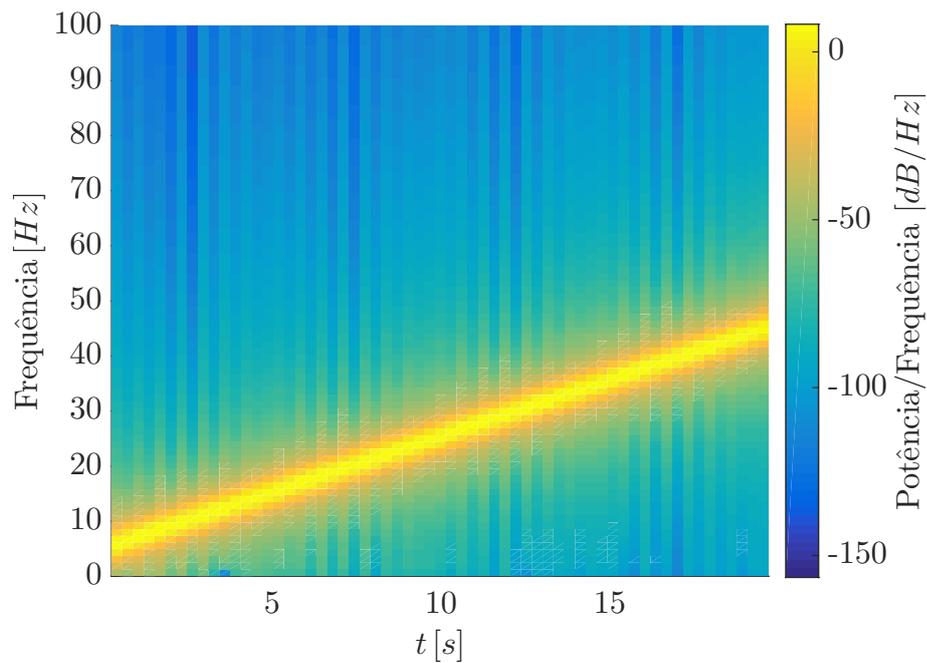


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir da figura (38), nota-se que a força impulso excita o sistema em uma larga banda de frequência durante um pequeno intervalo de tempo. Através das figuras (39), (40), (41) e (42), pode se observar que o sistema é excitado em todos os modos de vibrar, no caso, cinco modos. Também pode se notar que o primeiro e o segundo modos de vibrar têm contribuição mais significativa nas respostas dinâmicas do sistema quando comparado aos outros modos. Isto se deve ao fato das razões de amortecimento associadas aos primeiros modos serem menores que as razões associadas aos modos de ordem superior, como pode ser visto na tabela (2).

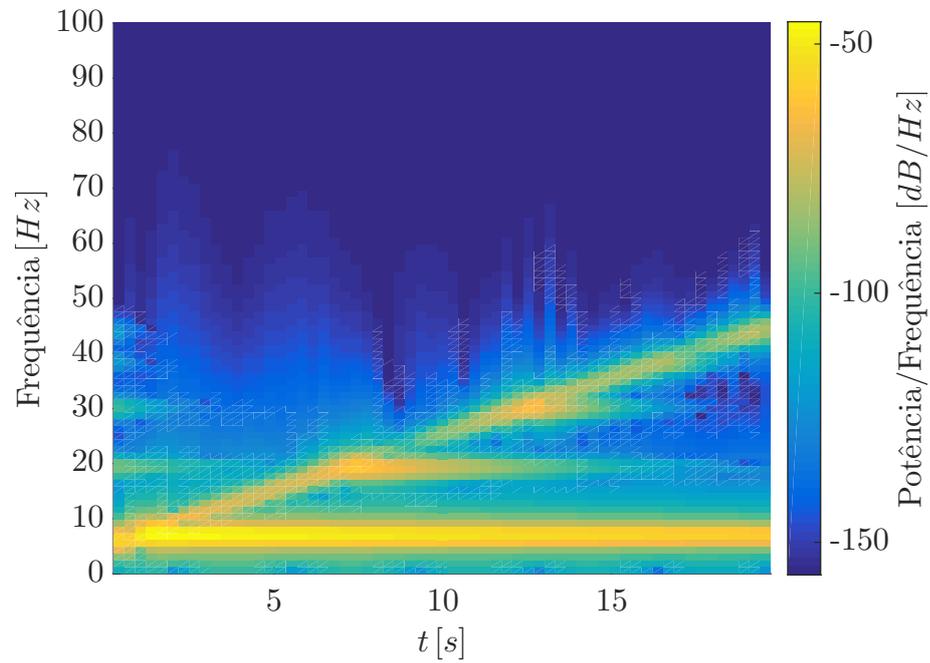
A.1.2 Força *Chirp*

Figura 43 – Espectrograma da força *chirp* para o sistema massa-mola-amortecedor



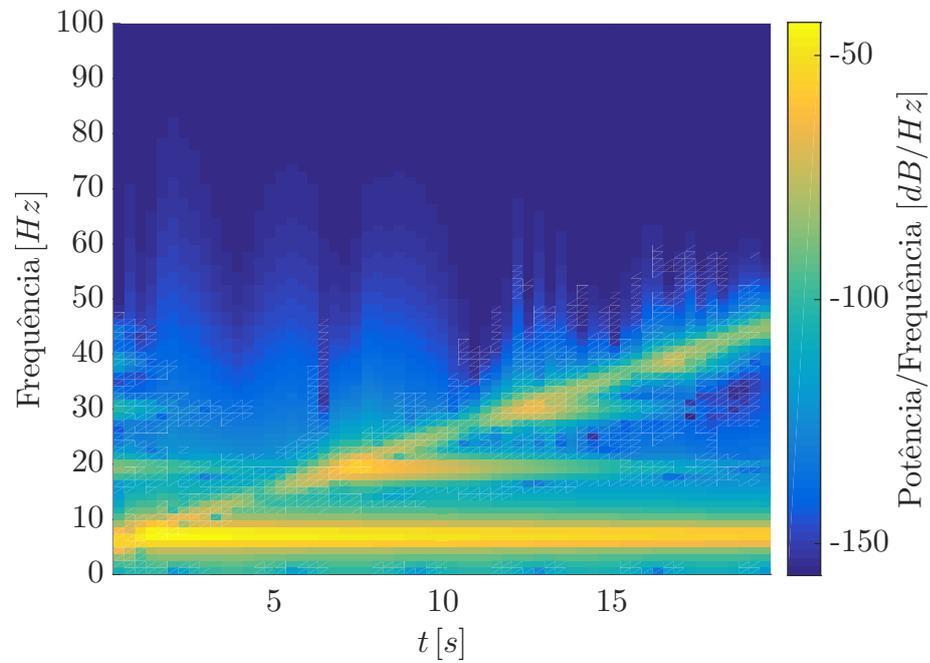
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 44 – Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*



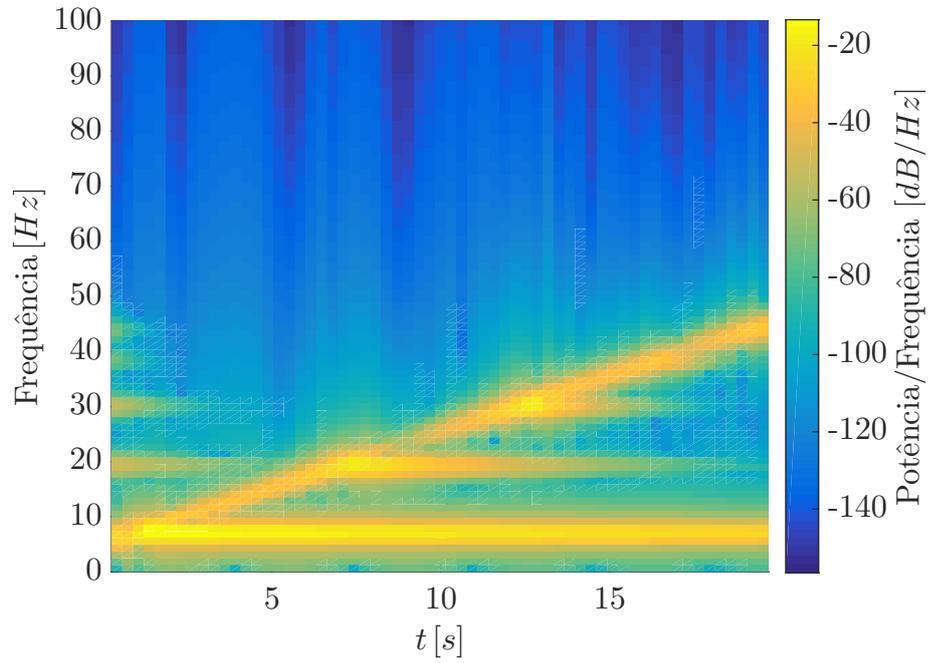
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 45 – Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*



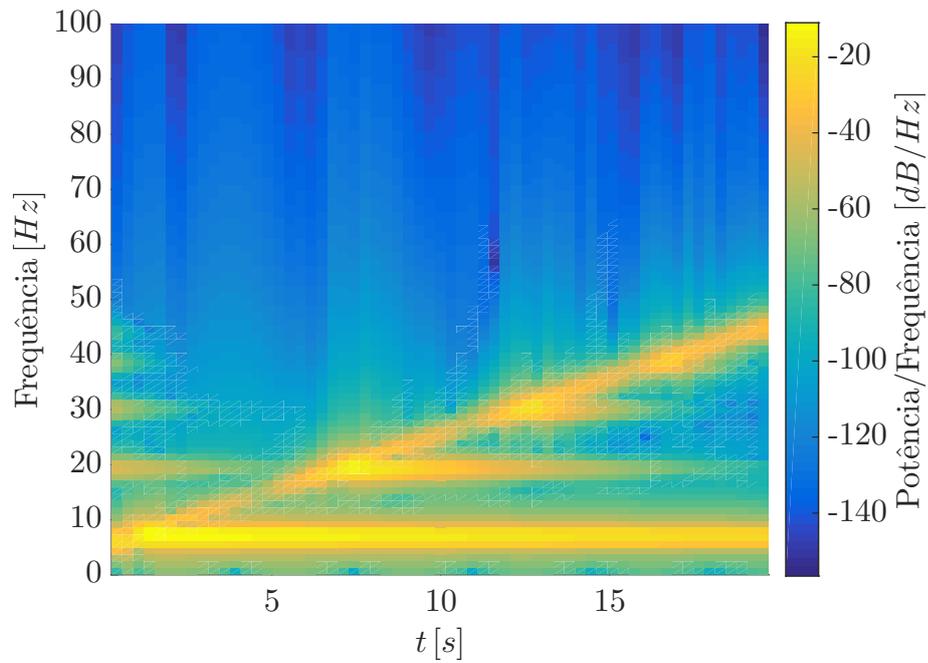
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 46 – Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 47 – Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *chirp*

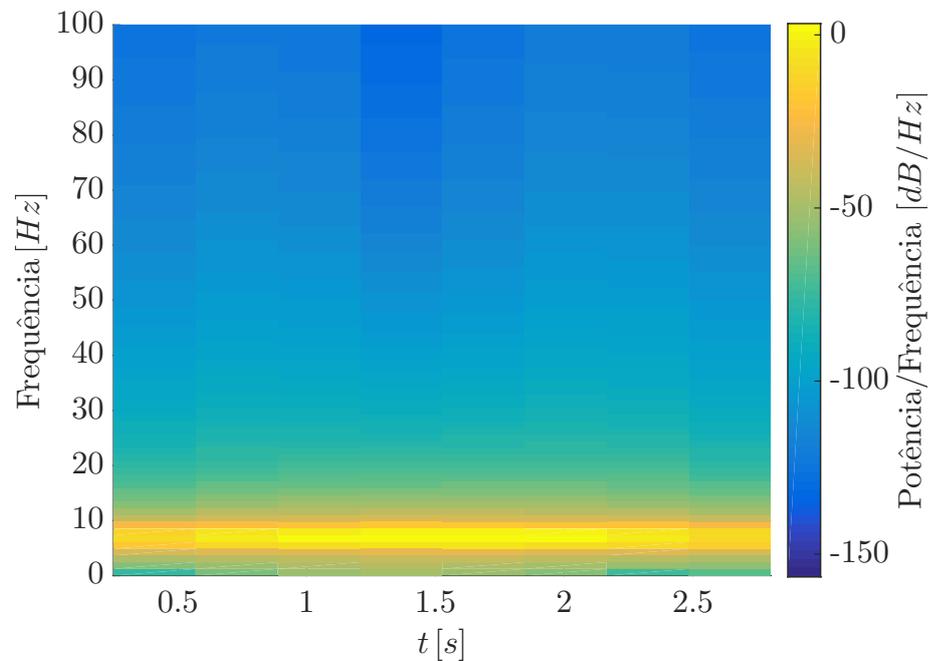


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir da figura (43), observa-se que a força *chirp* tem comportamento linear e é definida para a faixa de frequência que compreende a primeira e a quinta frequências naturais do sistema, que são respectivamente $f_{n_1} = 6,41 \text{ Hz}$ e $f_{n_2} = 43,20 \text{ Hz}$. Através das figuras (44), (45), (46) e (47), nota-se que o sistema é excitado em todos os modos de vibrar, de forma que os dois primeiros modos têm contribuição mais significativa nas respostas do sistema, conforme é mencionado para o caso que o sistema é excitado pela força impulso (Apêndice A.1.1).

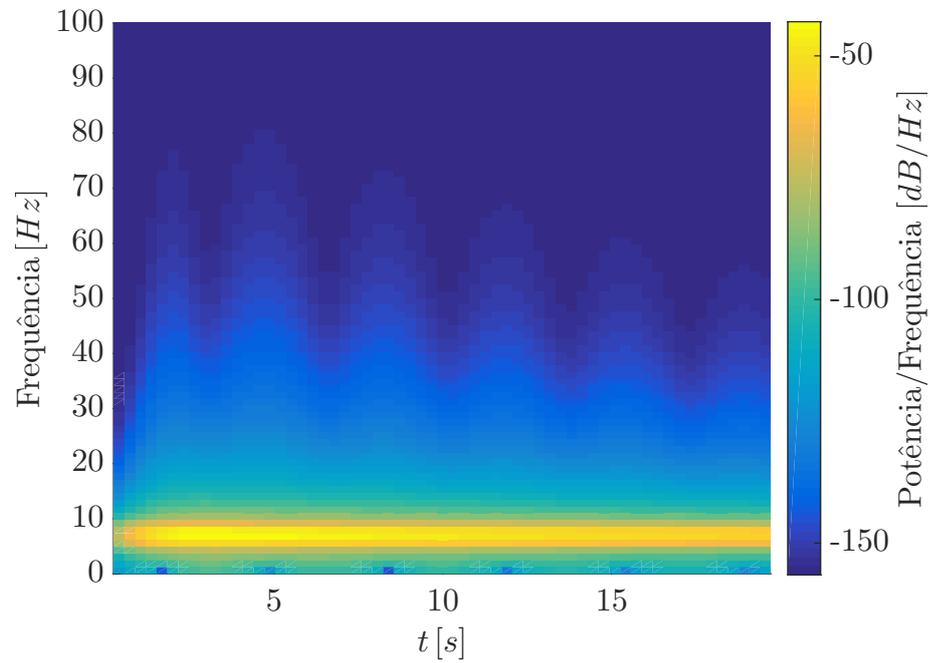
A.1.3 Força *Burst*

Figura 48 – Espectrograma da força *burst* para o sistema massa-mola-amortecedor



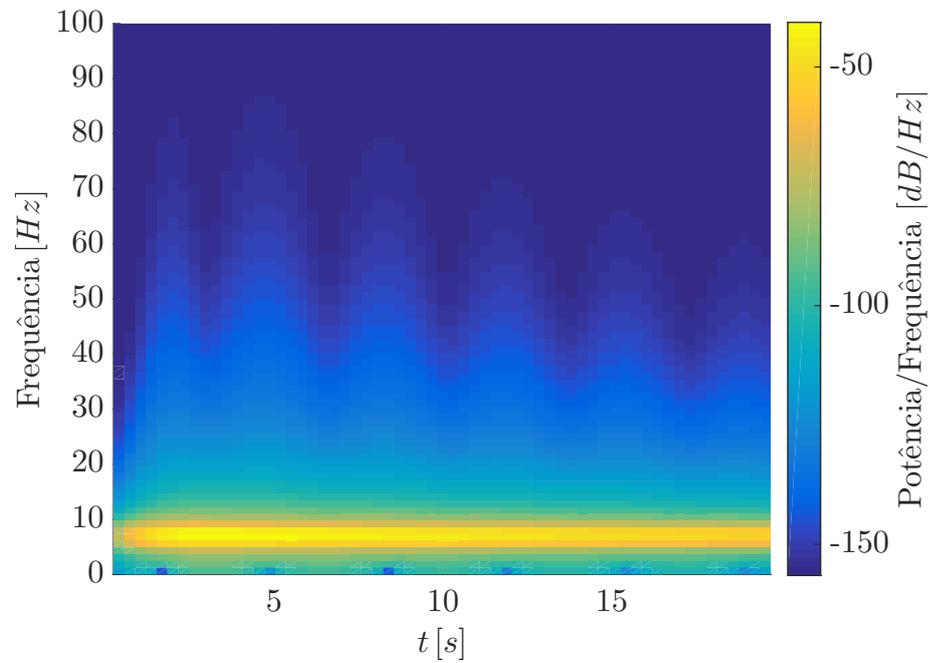
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 49 – Espectrograma de $y^{\{3\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



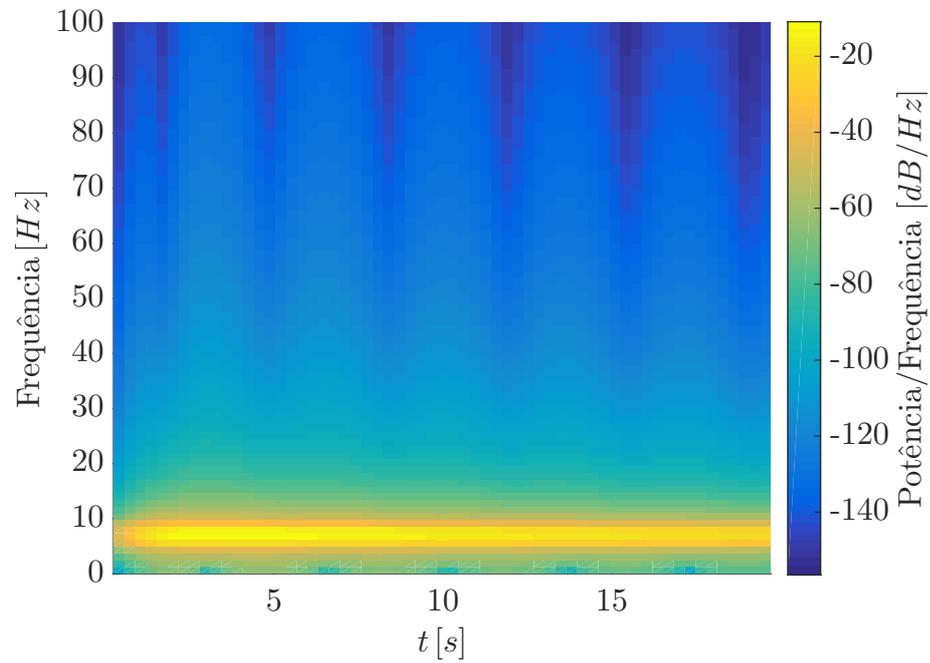
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 50 – Espectrograma de $y^{\{5\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



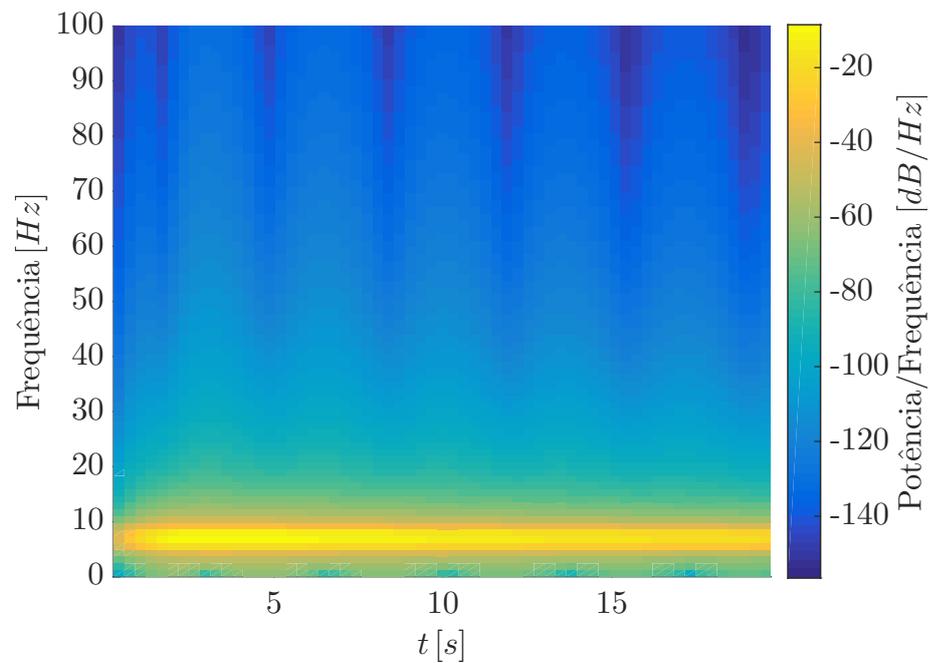
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 51 – Espectrograma de $y^{\{8\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 52 – Espectrograma de $y^{\{10\}}(t)$ para o sistema excitado pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

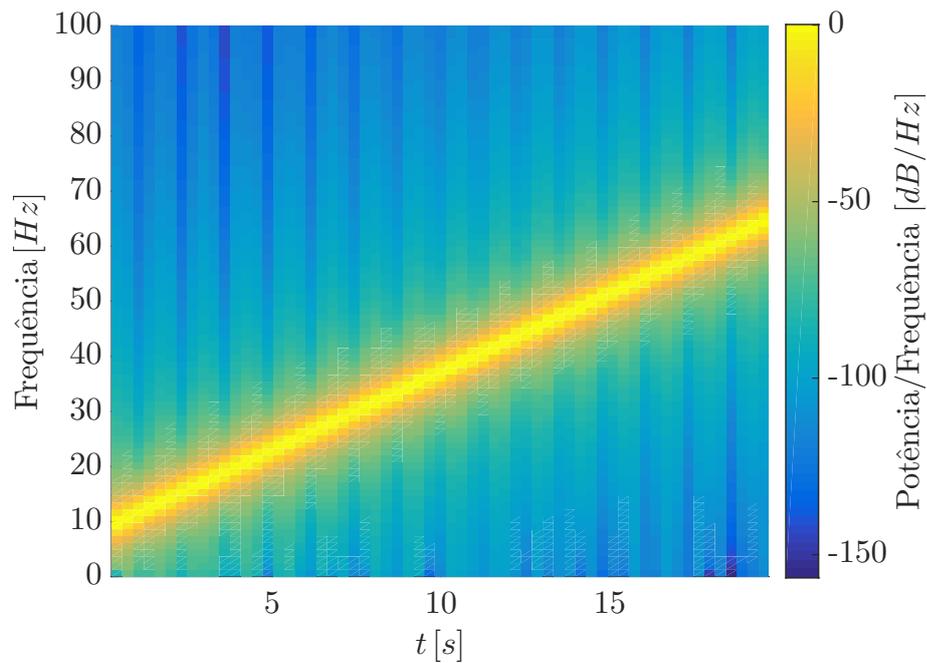
A figura (48) mostra que a força *burst* é definida para a primeira frequência natural do sistema, sendo $f_{n_1} = 6,41 \text{ Hz}$. A partir das figuras (49), (50), (51) e (52), pode se notar que o sistema responde predominantemente para o primeiro modo de vibrar.

A.2 Viga Engastada

Os espectrogramas das forças de excitação e das medidas disponíveis da viga engastada para as forças *chirp* e *burst* são mostrados nas figuras (53) a (62).

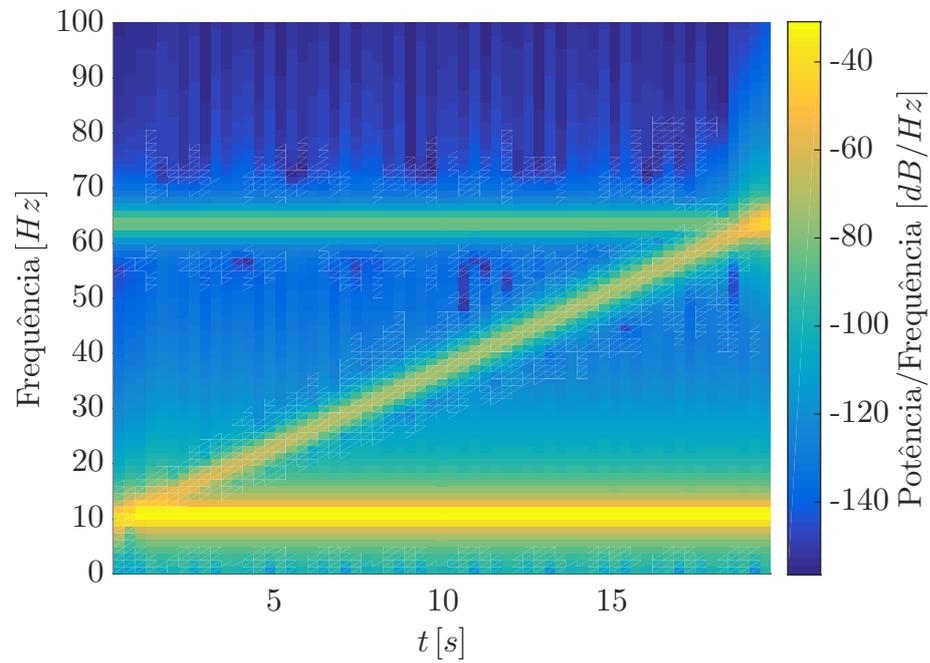
A.2.1 Força *Chirp*

Figura 53 – Espectrograma da força *chirp* para a viga engastada



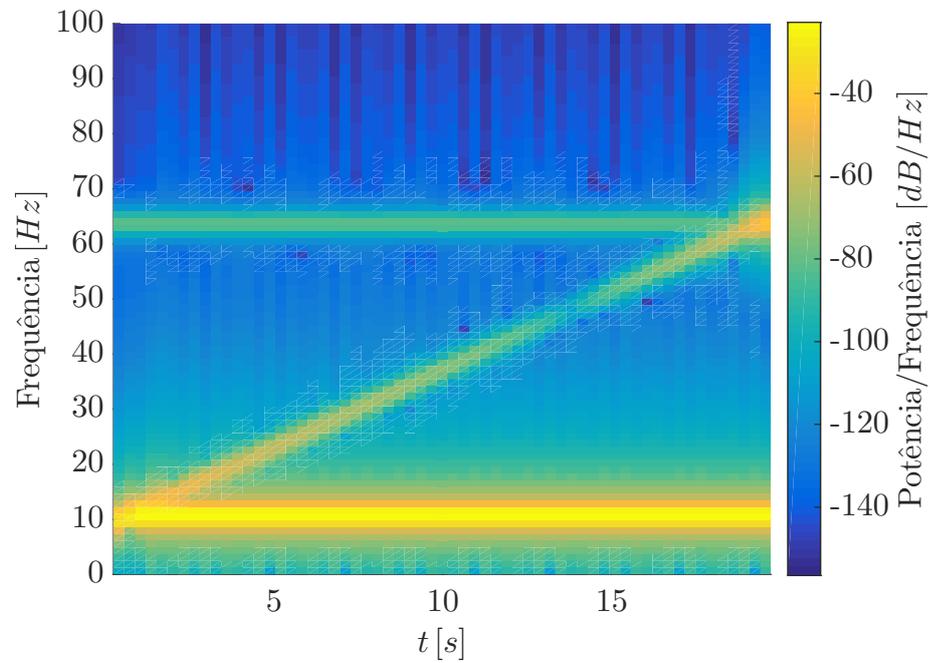
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 54 – Espectrograma de $y^{\{51\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



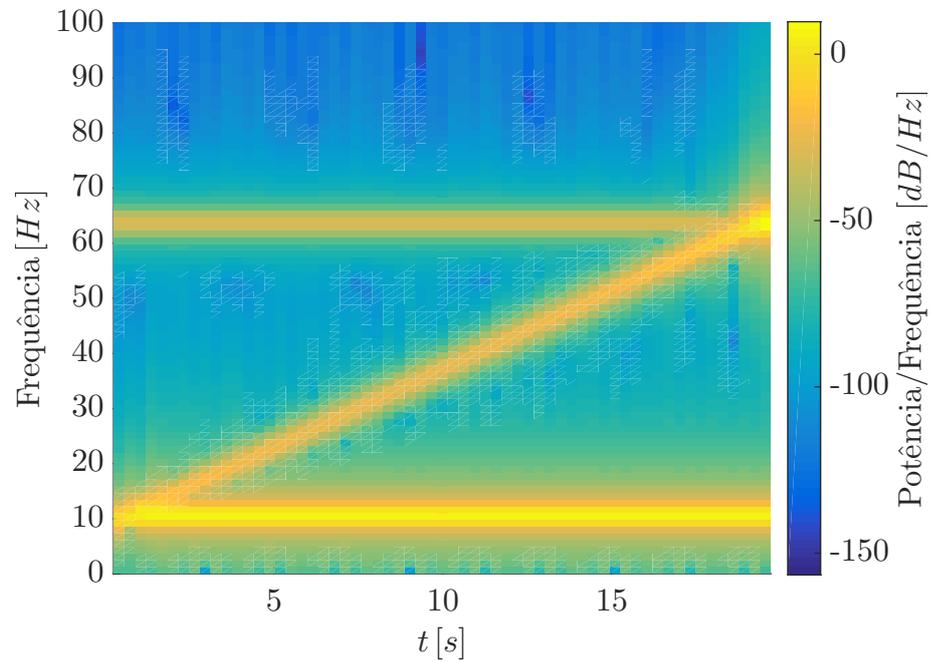
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 55 – Espectrograma de $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



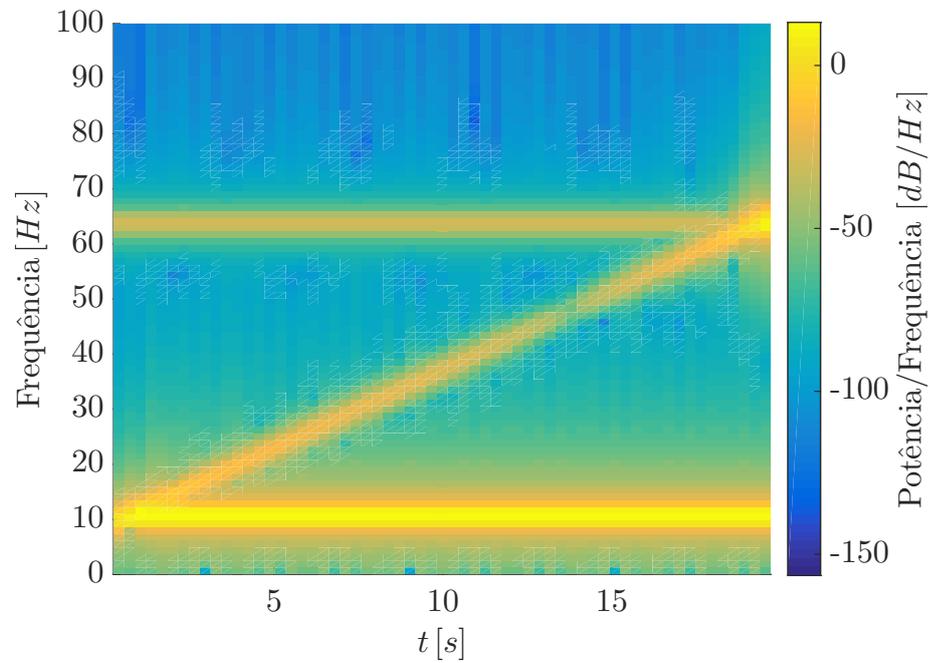
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 56 – Espectrograma de $y^{\{151\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 57 – Espectrograma de $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*

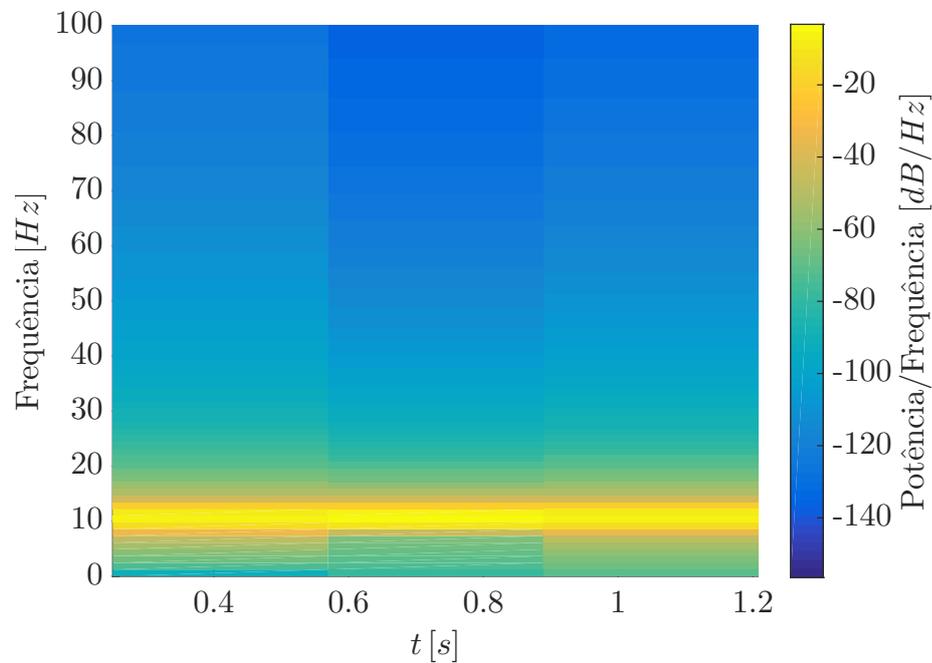


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir da figura (53), observa-se que a força *chirp* apresenta comportamento linear e é definida para a faixa de frequência que compreende a primeira e a segunda frequências naturais do sistema, sendo respectivamente $f_{n_1} = 10,06 \text{ Hz}$ e $f_{n_2} = 63,03 \text{ Hz}$. As figuras (54), (55), (56) e (57) mostram, para a faixa de frequência considerada, que são excitados o primeiro e o segundo modos de vibrar, sendo que ambos têm contribuição significativa nas respostas da viga.

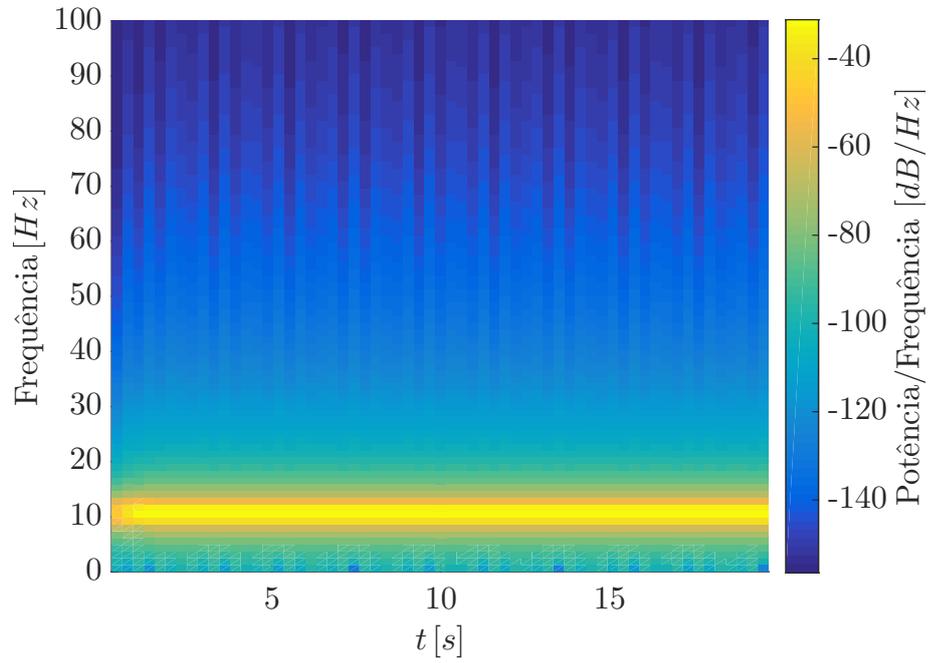
A.2.2 Força *Burst*

Figura 58 – Espectrograma da força *burst* para a viga engastada



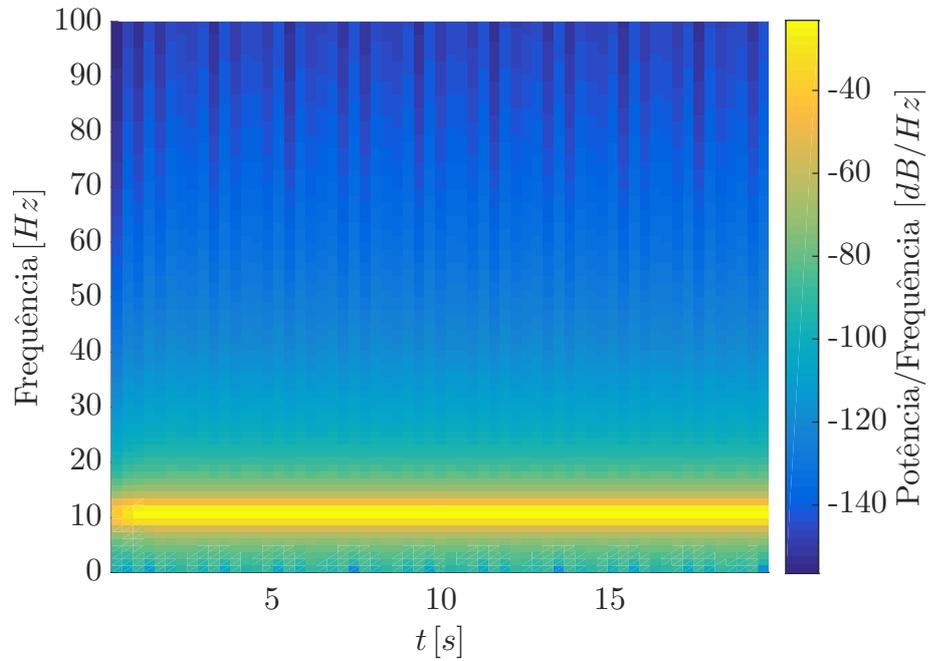
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 59 – Espectrograma de $y^{\{51\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 60 – Espectrograma de $y^{\{93\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 61 – Espectrograma de $y^{\{151\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*

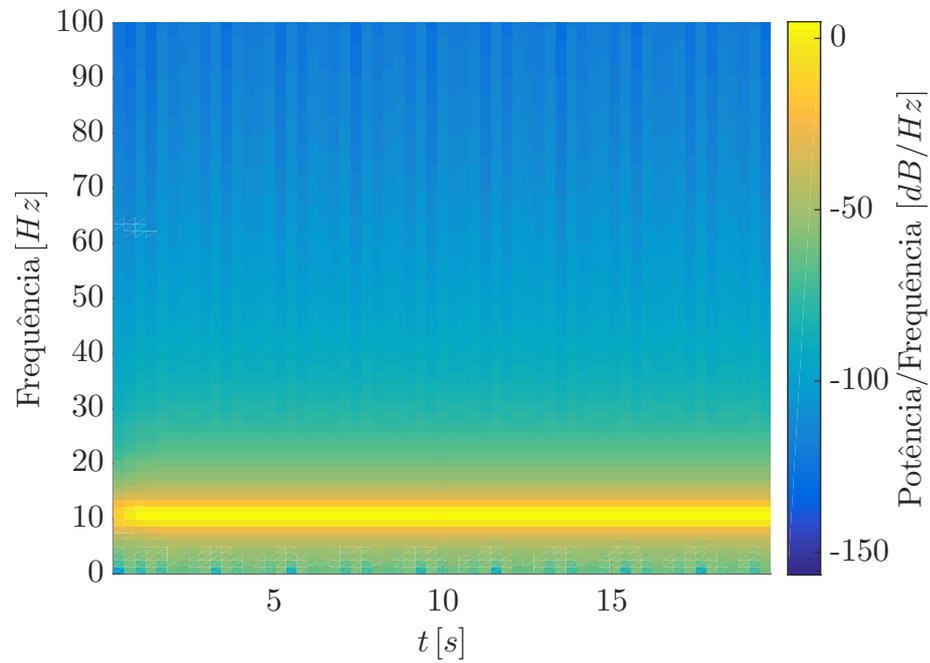
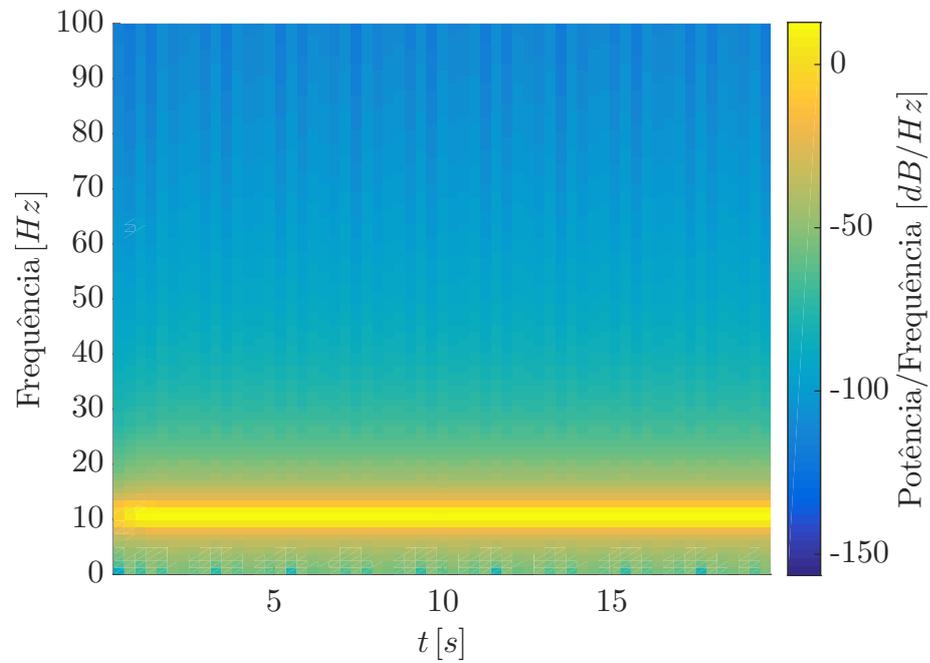


Figura 62 – Espectrograma de $y^{\{193\}}(t)$ para a viga excitada pela força *burst*

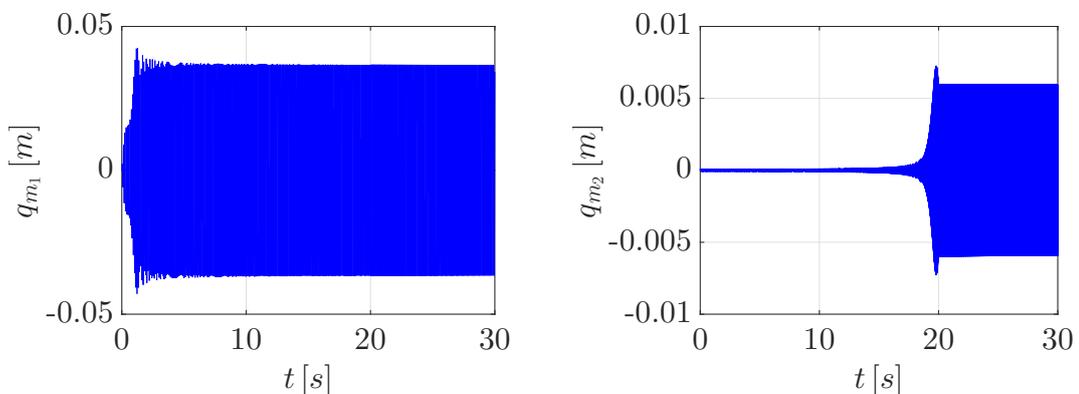


A figura (58) mostra que a força *burst* é definida a partir da primeira frequência natural da viga, sendo $f_{n_1} = 10,06 Hz$. Através das figuras (59), (60), (61) e (62), nota-se que o sistema responde predominantemente para o primeiro modo de vibrar.

APÊNDICE B – Medidas Disponíveis da Viga Engastada Excitada pela Força *Chirp*

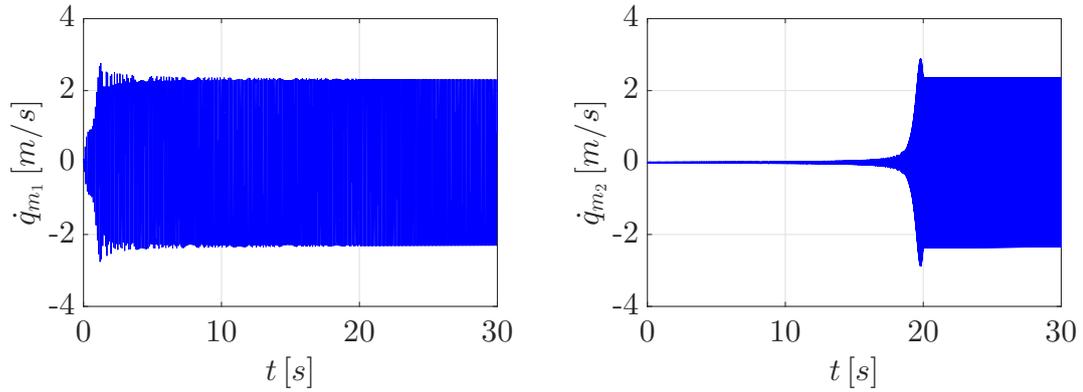
Neste apêndice são analisadas as medidas disponíveis da viga engastada excitada pela força *chirp*. Como pode se notar a partir das figuras (28) e (29), as medidas próximo ao instante de tempo $t = 20\text{ s}$ apresentam aumento de magnitude. A força *chirp* utilizada para excitar a viga é definida para a banda de frequência que compreende as duas primeiras frequências naturais, $f_{n_1} = 10,06\text{ Hz}$ e $f_{n_2} = 63,03\text{ Hz}$, de modo que a partir da análise dos espectrogramas destas medidas (ver Apêndice A) pode se notar que o sistema responde predominantemente para o primeiro e segundo modos de vibrar. Desta forma, o aumento da magnitude das medidas pode ser entendido a partir da análise do comportamento dinâmico dos dois primeiros modos. As figuras (63) e (64) mostram os deslocamentos, $q_{m_1}(t)$ e $q_{m_2}(t)$, e as velocidades, $\dot{q}_{m_1}(t)$ e $\dot{q}_{m_2}(t)$, do primeiro e segundo modos de vibrar, respectivamente.

Figura 63 – $q_{m_1}(t)$ e $q_{m_2}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 64 – $\dot{q}_{m_1}(t)$ e $\dot{q}_{m_2}(t)$ para a viga excitada pela força *chirp*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir das figuras anteriores pode se observar que o primeiro modo de vibrar é excitado próximo ao instante inicial de monitoramento, enquanto o segundo modo é excitado próximo ao instante $t = 20$ s. Sabe-se também que as razões de amortecimento dos dois primeiros modos (ver Tab. 5) são aproximadamente nulas, $\zeta_1 = 7,9 \times 10^{-6}$ e $\zeta_2 = 1,3 \times 10^{-6}$, de forma que praticamente não dissipam energia durante o processo de monitoramento. Ao excitar o segundo modo de vibrar a partir da força *chirp* considerada, tem-se que a resposta dinâmica do sistema devido a este modo é somada a resposta devido ao primeiro modo, de forma que o aumento abrupto é justificado pelo fato das razões de amortecimento serem aproximadamente nulas.