UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:

FILOSOFIA DA MENTE, EPISTEMOLOGIA E LÓGICA

***CAMPUS* DE MARÍLIA**

MARIANA MATULOVIC

A lógica do muito em um sistema de Tablôs

Marília

2008

MARIANA MATULOVIC

A lógica do muito em um sistema de Tablôs

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília. Área de concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Orientador: Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa
Co-orientadora: Profª Dra. Maria Claudia C. Grácio

Marília
2008

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTE-
CA DA UNESP – MARÍLIA**

Matulovic, Mariana
M445 A lógica do muito em um sistema de tablôs / Mariana Matulovic. -- Marília, 2008.

121 f. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, 2008.
Bibliografia: f. 116-121.
Orientador: Prof. Hércules de Araújo Feitosa

1. Lógica. 2. Lógica do muito. 3. Lógicas moduladas. 4. Tablôs analíticos. I. Autor. II. Título.

CDD: 160

MARIANA MATULOVIC

A lógica do muito em um sistema de Tablôs

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília. Área de concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora em 14/08/2008.

BANCA

Prof. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza – PUC/ SÃO PAULO ____________________________

Prof. Dr. Mauri Cunha do Nascimento – UNESP/ BAURU _____________________________

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa – UNESP/ BAURU _______________________________

Marília

2008

À minha família:

Francisco ,Soely, Crislaine,

Maria Claudia, Vinícius e Gustavo.

*"O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis". **(Fernando Sabino)***

AGRADECIMENTOS

Registramos sinceros agradecimentos a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização desse trabalho e, de forma particular, pela colaboração e atenção inestimáveis, nossa gratidão:

- antes de tudo e todos, a DEUS, que sempre guiou a minha vida e os meus passos. Simplesmente, coloco a minha vida em suas mãos;

- ao meu “paizão intelectual” e orientador Hércules de Araújo Feitosa, por ter me permitido trabalhar com ele e por ter me ensinado a amar a lógica;

- à professora Maria Claudia, sempre presente e que contribuiu grandiosamente para a melhoria do trabalho.

- à família Fadel e Costa, pela força e pela presença marcante e motivadora em quase todo meu trabalho, principalmente, a um eterno amigo André Renato Fadel;

- aos professores Edélcio e ao Mauri, por me darem a honra de fazer parte da minha banca e pelas valiosas sugestões;

- aos professores Maria Eunice, Mariana, Tassinari, Cândida e todos que passaram pela minha vida acadêmica;

- à todos os amigos do mestrado, principalmente ao Luís Henrique e o Vicente, que foram espetaculares comigo;

- às meninas do SALCI (Ana e Ângela);

- ao pessoal do meu trabalho;

- aos meus amigos pessoais: Gabriel, Renan, Rafa, Vera, Augusta, e todos que fizeram e fazem, agora, parte da minha vida.

- Um agradecimento especial a uma pessoa muito querida, que tem me mostrado que a vida pode ser muito mais simples, maravilhosa e calma: Claudio.

“...foi um tempo que aprendi a transformar o medo em respeito, o respeito em confiança. Descobri como é bom chegar quando se tem paciência. E para se chegar, onde quer que seja, aprendi que não é preciso dominar a força, mas a razão. É preciso, antes de mais nada, querer”. (Amyr Klink).

MATULOVIC, M. A lógica do muito em um sistema de tablôs. Marília, 2008. 121 p. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filososfia, área de concentração em Lógica, Epistemologia e Filosofia da Mente) – Faculdade de Filosofia e Ciência de Marília, Unesp.

RESUMO

Dentre as diversas lógicas não-clássicas, que complementam o cálculo de predicados de primeira ordem, destacamos as lógicas moduladas. As lógicas moduladas são caracterizadas pela inclusão de um novo quantificador, chamado modulado, que tem a incumbência de interpretar aspectos indutivos de quantificadores das linguagens naturais. Como um caso particular de lógica modulada, a lógica do muito formaliza a noção intuitiva de "muitos". O quantificador do muito é representado por G. Assim, uma sentença do tipo $Gx\alpha(x)$ deve ser entendida como "muitos indivíduos satisfazem a propriedade α". Semanticamente, a noção de muitos está associada a uma estrutura matemática denominada família fechada superiormente e própria. Seja E um conjunto não vazio. Uma *família própria fechada superiormente* F em E é tal que: (i) $\mathsf{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$; (ii) $E \in \mathsf{F}$; (iii) $\emptyset \notin \mathsf{F}$; (iv) $A \in \mathsf{F}$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathsf{F}$. Intuitivamente, F caracteriza os conjuntos que possuem 'muitos' elementos. E, assim, o universo E possui muitos elementos; o $\emptyset$ não possui muitos elementos; e se A possui muitos elementos, então todo conjunto que contém A também possui muitos elementos. Com elementos sintáticos que caracterizam linguisticamente estas propriedades de F, pode-se verificar que a lógica do muito é correta e completa para uma estrutura de primeira ordem estendida por uma família própria fechada superiormente. A lógica do muito foi originalmente introduzida em um sistema dedutivo *hilbertiano*, baseado apenas em axiomas e regras de dedução. Neste trabalho, desenvolvemos um outro sistema dedutivo para a lógica do muito, porém num sistema de tablôs. Demonstramos, naturalmente, que esse novo sistema é equivalente ao sistema axiomático original.

Palavras-chave: Lógicas moduladas; lógica do muito; sistema de Tablôs; Indução

ABSTRACT

Among the several non classical logics that complement the classical first-order logic, we detach the Modulated Logics. This class of logics is characterized by extending the classical logic by the introduction of a new generalized quantifier, called modulated quantifier, that has the attribution of interpreting some inductive aspects of quantifiers in any natural language. As a particular case of Modulated Logic, the Logic of Many formalize the intuitive notion of "many". The quantifier of many is represented by G. Thus, a sentence of the type $Gx\alpha(x)$ must be understood like "many individuals satisfy the property α". Semantically, the notion of many is associated with a mathematical structure named proper superiorly closed family. Let E be a non empty set. A *proper superiorly closed family* F in E is such that: (i) $\mathsf{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$; (ii) $E \in \mathsf{F}$; (iii) $\emptyset \notin \mathsf{F}$; (iv) $A \in \mathsf{F}$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathsf{F}$. Intuitively, F characterizes the sets which have "many" elements. The empty set $\emptyset$ does not have many elements. And if A has many elements, then any set which contains A, also has many elements. The logic of many has syntactical elements that caracterize linguisticaly these properties of F. We can verify that the Logic of Many is correct and complete for a first order structure extended by a proper superiorly closed family. The Logic of Many was originally introduced in a Hilbertian deductive system, based only on axioms and rules. In this work, we developed another deductive system for the Logic of Many, but in a tableaux system. We proof that this new system is equivalent to the original one.

Key-words: Modulated Logics; Logic of Many; Tableaux System; Induction.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando Frege em "*Begriffsschrift*" (1879) desenvolveu a sua linguagem artificial, possuía entre os seus anseios a sistematização (ou formalização) das regras utilizadas pelos matemáticos em suas demonstrações. Essa nova linguagem deveria ter, portanto, elementos sintáticos e semânticos que a aproximassem da linguagem natural, mas que ao mesmo tempo diferisse da mesma nos aspectos relacionados à subjetividade e à imprecisão inerentes à linguagem natural.

Em decorrência da forte aplicabilidade dessa nova linguagem artificial nas mais diversas áreas acadêmicas e científicas, dentre elas destacamos a computação, a cibernética, a lingüística e a própria lógica, verificou-se que a mesma é limitada quando empregada em situações diferentes daquelas para as quais ela foi intencionalmente elaborada. Até mesmo a matemática moderna, já que o contexto matemático na época de Frege era diferente do atual, pois a linguagem fregeana apresenta restrições.

Por isso, muitos pesquisadores, tais como Mostowski (1957), Lindström (1966) e Grácio (1999) estenderam a linguagem lógica clássica de primeira ordem com o intuito de formalizar argumentos impossíveis de serem sistematizados na linguagem artificial de primeira ordem ou mesmo na Fregeana, de segunda ordem.

Mostowski, na obra "*On a generalization of quantifiers*", questionou a impossibilidade de se formalizar diversas propriedades matemáticas unicamente através da utilização dos quantificadores lógicos clássicos. Para resolver esse problema, ele introduziu uma família de quantificadores não-clássicos, denominados *quantificadores generalizados*, que inseridos no sistema lógico clássico formalizam noções intuitivas, porém impossíveis de serem tratadas apenas com os usuais operadores universal e existencial.

Lindströn, em "*First order predicate logic with generalized quantifiers*", aperfeiçoou os quantificadores de Mostowski, tornando-os mais acessíveis e fáceis de serem aplicados em diversas áreas de pesquisas. Em conseqüência disso, a partir da década de 80, houve um acréscimo considerável no número de pesquisadores interessados em estudar e aplicar os quantificadores generalizados em sistemas lógicos complementares ao clássico na lingüística e, principalmente, na computação.

Grácio (1999), em sua Tese de Doutorado intitulada "*Lógicas moduladas e o raciocínio sob incerteza*", introduziu um conjunto de lógicas não-clássicas, denominadas lógicas moduladas. Estas lógicas se caracterizam por estender a linguagem artificial da lógica clássica de primeira ordem por intermédio da inserção de novos operadores quantificacionais no seu contexto sintático, a fim de formalizar noções indutivas do tipo “muito”, “uma boa parte” e “a maioria”. A motivação subjacente ao desenvolvimento desses sistemas formais foi a possibilidade de se trabalhar dedutivamente com argumentos do tipo indutivo.

Desde as obras de David Hume (1972), podemos classificar duas formas de raciocínio: o dedutivo, que trata de verdades absolutas, e o indutivo, que trabalha das verdades empíricas, baseadas em evidências. Deste modo, as induções são apenas plausíveis, porém não absolutas, como as deduções.

Raciocínios dedutivos são aqueles nos quais as conclusões são sempre verdadeiras desde que as premissas que os compõem sejam todas verdadeiras. Eles caracterizam-se por serem claros, objetivos e absolutamente justificados. Além disso, suas conclusões não apresentam informações diferentes ou inéditas, ou seja, não há, nos argumentos dedutivos, qualquer informação na conclusão que não seja oriunda das premissas.

Ao contrário dos dedutivos, os raciocínios indutivos caracterizam-se por serem incertos e apenas prováveis com relação à sua validade. As suas conclusões apresentam certa plausibilidade de serem verdadeiras quando as suas premissas assim o são.

Sendo assim, Grácio apresentou três novos sistemas lógicos, com o intuito de formalizar três tipos de crenças indutivas sustentadas por evidências. O primeiro deles, apresentado por Grácio (1999), que representa a noção indutiva de “a maioria”, é formalizado por uma estrutura matemática fundamentada na cardinalidade de conjuntos. Tal sistema constitui a lógica modulada denominada lógica da maioria. O segundo, introduzido em Grácio (1999), que formaliza a noção de ‘muito’, é interpretado por uma estrutura matemática denominada *família fechada superiormente e própria*. O terceiro, também introduzido em Grácio (1999), o qual sistematiza a noção indutiva de “uma boa parte”, é fundamentado por uma estrutura pseudo-topológia. Esse sistema constitui a lógica modulada denominada lógica do plausível.

Nesta dissertação apresentamos a lógica do muito estruturada por um sistema dedutivo por tablôs, ao invés do sistema hilbertiano apresentado por Grácio.

Sendo assim, no Capítulo 1, expomos as estruturas das linguagens natural e artificial, bem como o aparecimento dos quantificadores generalizados em decorrência da impossibilidade de se tratar muitas propriedades matemáticas em termos dos quantificadores clássicos universal e existencial. Além disso, apresentamos algumas aplicações desses quantificadores na lógica, na lingüística e na computação.

No Capítulo 2, exibimos os principais sistemas de provas ou métodos de decisão, tais como o método axiomático ou hilbertiano, a dedução natural, o cálculo de seqüentes e, principalmente, as definições e propriedades do sistema dedutivo por tablôs para o Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e para o Cálculo Quantificacional Clássico (CQC).

No capítulo seguinte, apresentamos a lógica do muito, bem como definição e proposições referentes à concepção de famílias fechadas superiormente e própria. Além disso, exibimos em detalhes as estruturas sintática e semântica dessa lógica modulada.

No Capítulo 4, desenvolvemos um sistema de tablôs para a lógica do muito e demonstramos a equivalência entre o nosso sistema (por tablôs) e o sistema hilbertiano proposto por Grácio (1999).

Finalizando, no último capítulo, expomos algumas considerações a respeito da noção de crenças, principalmente a concepção utilizada por nós no decorrer desse trabalho, e realizamos algumas reflexões sobre a noção de "muitos" e a própria lógica do muito.

1. LINGUAGENS E QUANTIFICADORES

Neste capítulo, abordaremos as linguagens natural e artificial por intermédio de uma análise estrutural das mesmas. Em seguida, mostramos aspectos históricos e aplicados de alguns quantificadores não definíveis a partir dos clássicos ‘para todo’ e ‘existe algum’, particularmente quanto à lógica, à lingüística e à computação.

1.1 Estrutura da linguagem natural

Em qualquer livro de gramática ou lingüística encontramos as definições referentes à linguagem, língua, sintaxe, morfologia, semântica, pragmática, etc. Nesta seção, exporemos, sucintamente, alguns desses conceitos, a fim de que possamos comparar o sistema sintático e semântico da linguagem natural humana com o artificial e simbólico elaborado por Gottlob Frege (1879).

Carvalho e Nascimento (1970, p. 9) expõem que “linguagem no sentido *lato* é todo sistema de sinais que pode servir para a comunicação entre indivíduos”. Sendo assim, de acordo com esses autores e Coutinho (1968), a linguagem nada mais é do que um conjunto de signos básicos, utilizado para expressar idéias e pensamentos humanos.

Segundo Coutinho, esses signos, cuja união constitui o conjunto que conhecemos por alfabeto lingüístico, podem ser de origem natural ou artificial. Em conseqüência disso, podemos subdividir a linguagem em duas categorias: a linguagem natural, sujeita a ambigüidades e imprecisões de toda ordem e a linguagem artificial, que se caracteriza por ser clara, objetiva e sem vaguidade.

A linguagem natural, como o próprio nome já sugere, é formada e desenvolvida no decorrer da história e, por isso, está presente em todas as esferas humanas, sejam elas formais, informais ou eruditas. Em decorrência desta sua ampla abrangência, podemos subdividi-la em culta e popular.

A linguagem culta, também conhecida como erudita, caracteriza-se por obedecer a um conjunto de regras gramaticais e é utilizada, principalmente, em ambientes formais e científicos. Já a popular, ou coloquial, está ligada às situações informais, cujo objetivo é a comunicação, sem se atentar ou se preocupar com as normas. É utilizada no cotidiano e, por isso, está mais sujeita a alterações e variações.

Para nós, a diferença entre a linguagem popular e a erudita está no relaxamento do rigor da aplicação das regras de construção da linguagem natural, a fim de proporcionar uma maior agilidade de comunicação e para tornar a linguagem mais próxima do ambiente e da necessidade de um grupo de indivíduos. Em decorrência disso, apresentaremos, agora, como está estruturada a linguagem natural erudita. As idéias expostas aqui foram extraídas de Mortari (2001), Vieira e Lima (s. d.) e Nicola e Infante (1990).

Conforme já exposto, a linguagem é formada por um conjunto de signos básicos, denominados morfemas, que constituem o alfabeto de uma língua. A palavra morfema vem do grego *morphé* (forma) mais a terminação *ema* (fonema). As combinações de morfemas compõem estruturas lingüísticas mais complexas, as palavras, que reunidas formam as sentenças, e assim por diante.

Portanto, as linguagens naturais são compostas por:

- elementos básicos lingüísticos, denominados morfemas ou elementos mórficos, que são as menores unidades do sistema, isto é, são "pequenas partes lingüísticas que compõem as palavras" (Tufano, 1990, p. 249).
- palavras, que são combinações de morfemas regidas por regras sintáticas;
- frases e sentenças são oriundas da reunião de palavras por meio de uma gramática própria.

Na linguagem artificial, mais especificamente na linguagem da lógica clássica, o alfabeto representa os símbolos que utilizamos para construir as expressões básicas lógicas, tais como, termos, fórmulas atômicas, fórmulas, etc.

Há quatro formas possíveis de análise da linguagem:

- Fonético e fonológico: análise genuinamente sonora, em que a fonética está centrada no "estudo da produção da fala humana, considerando as questões fisiológicas envolvidas, tais como a estrutura do aparelho fonador: mandíbula, laringe, boca, dentes e língua" (Vieira; Lima, s. d., p. 3); a fonologia preocupa-se com a estrutura própria do som de uma determinada língua.
- Sintático: análise puramente formal, preocupada essencialmente com os aspectos estruturais dos objetos lingüísticos. Assim como na morfologia, estuda-se como se processam e constituem as palavras, bem como sua classificação no universo de discurso, tais como verbos, sujeitos, predicados, pronomes, etc.; a validade da estrutura das frases em um discurso, entre outros. Nesse contexto, não há preocupação com a interpretação das estruturas lingüísticas, mas sim com a sua forma, com os seus símbolos.
- Semântico: análise que se ocupa dos significados das expressões lingüísticas, ou

seja, das inter-relações existentes entre as expressões lingüísticas e o domínio em que se aplica essa linguagem. Segundo Vieira e Lima (s. d., p. 6), "a semântica tem como objeto de estudo o significado das expressões da linguagem natural".

Há duas maneiras distintas de examinarmos uma expressão lingüística: por intermédio da interpretação do significado real das palavras utilizadas, denominada *semântica lexical*, ou por meio da análise do valor de verdade da expressão (*semântica lógica*). Como a semântica lógica está também ligada à linguagem artificial, a exporemos quando abordarmos a linguagem artificial.

- Pragmático: análise que se ocupa do uso das construções lingüísticas pelos locutores de uma língua. Estuda-se, nesse contexto, "questões ligadas ao uso da linguagem, abordando-se aquilo que é relativo a quem usa e ao contexto de uso" (Vieira; Lima, s. d., p. 2).

A linguagem natural contém alguns obstáculos sintáticos e semânticos que a impossibilitam de ser utilizada eficientemente em dispositivos lógico-matemáticos e computacionais. Um exemplo disso é a possibilidade de termos diferentes interpretações e funções sintáticas em uma mesma expressão lingüística ao alterarmos a ordem das estruturas sintáticas que a compõe. Analisemos essas três sentenças:

S_1: Eles julgaram o jovem sacerdote.

S_2: Eles julgaram jovem o sacerdote.

S_3: Eles julgaram o sacerdote jovem.

Em S_1 "o jovem" é classificado, sintaticamente, como um adjunto adnominal. Isto quer dizer que a palavra jovem atribui ao sacerdote uma característica inerente a ele. Já em S_2 "jovem" é um predicativo do objeto e, por isso, representa uma característica atribuída à palavra sacerdote, em virtude do verbo "julgar". Em S_3 encontramos uma situação de ambigüidade em relação tanto a S_1 quanto em S_2[1].

Temos ainda na linguagem natural, a conhecida ambigüidade lexical que se caracteriza por dar várias significações a uma mesma palavra. Por exemplo, a palavra "verão" pode representar uma das quatro estações do ano ou então a conjugação do verbo "ver" no Futuro do Presente.

Esses e outros problemas não citados exemplificam a dificuldade em utilizarmos a linguagem humana em sistemas de cunho lógico-matemático, pois os ambientes de implementação dos mesmos são caracterizados especialmente pela necessidade

[1] O exemplo foi construído com a ajuda do professor de português André Renato Fadel, da rede Preve-Objetivo da região de Bauru.

de serem não-ambíguos, objetivos, formais, estáticos e rigorosos, uma vez que surgiram para formalizar demonstrações matemáticas.

Desse modo, houve uma necessidade de se desenvolver uma linguagem capaz de realizar tal função, mas que tanto quanto possível se aproximasse da linguagem natural humana.

1.2 Linguagem artificial

A linguagem artificial foi desenvolvida para suprir a deficiência da linguagem natural na formalização de sistemas lógico-matemáticos. Além do fato de ser construída numa fundamentação gramatical extremamente rigorosa, a fim de evitar os problemas verificados na linguagem natural, ela se caracteriza por ser mais estática e menos evolutiva que a linguagem natural. Com isso, ela tem condições de garantir aspectos de objetividade e clareza aos sistemas nos quais ela estiver inserida.

Diversos matemáticos buscaram desenvolver essa almejada linguagem. O primeiro idealizador de uma proposta para se construir uma linguagem artificial, com o intuito de oferecer um tratamento formal aos sistemas lógicos, foi o matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhem Von Leibniz, em 1666, em seu *Dissertatio de arte combinatória*[2].

Segundo Attie (2002), ao tecer sua *characteristica universalis* ou *lingua philosophica*, Leibniz pretendia dar uma representação da estrutura do pensamento humano puro, através da elaboração de uma linguagem e de um cálculo denominado *calculus ratiocinator*, que teria por finalidade deduzir conclusões das premissas advindas da *characteristica universalis*. Apesar da iniciativa, nenhuma das suas teorias foi desenvolvida.

> Para Leibniz, a linguagem comum, sujeita a ambigüidades e imprecisões de toda ordem, não seria o veículo ideal para a condução das idéias e da comunicação. Seu objetivo passou a ser a construção de uma língua racional, com leis sintáticas lógicas, criada a partir do levantamento das idéias mais simples, chamadas por ele de "*alfabeto dos pensamentos humanos*", de forma que as idéias mais complexas pudessem ser desenvolvidas a partir desse "alfabeto" (Attie, 2002, p. 3, grifos do autor).

Chauí (2006) expõe que toda a teoria de Leibniz, principalmente a linguagem,

[2] A maioria das obras de Leibniz não foi publicada durante a vida do autor. Posteriormente, Gerhardt divulgou parte dos trabalhos de Leibniz na obra *Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz*. Hildesheim: Georg Olms Verlag. v. 7, 1978. (Reimpressão da edição de 1890).

tinha como base conceptual a álgebra, pois ele acreditava que não havia nada mais universal, formal e rigoroso do que ela e, por isso, essa álgebra seria a única ferramenta capaz de produzir uma linguagem livre dos problemas encontrados na linguagem natural.

Segundo Chauí (2006, p. 113),

> Assim como a álgebra possui símbolos próprios, inconfundíveis, universais para todos os matemáticos, assim também a lógica deveria ser uma linguagem perfeita, totalmente purificada das ambigüidades e contra-sensos da linguagem cotidiana. Leibniz propôs uma linguagem simbólica artificial, isto é, construída especialmente para garantir ao pensamento plena clareza nas demonstrações e nas provas.

Um outro idealizador, ainda conforme Chauí, foi Hobbes, que assim como Leibniz, verificou que havia uma relação intrínseca entre a lógica e a matemática. Para ele, raciocinar era sinônimo de calcular, ou seja, “[...] quando raciocinamos simplesmente somamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos idéias [...]” (Chauí, 2000, p. 03). Sendo assim, caberia à lógica determinar quais seriam as regras necessárias para esse cálculo, além de sistematizar e organizar a maneira correta de se usar a linguagem a fim de evitar as famosas ambigüidades.

Em 1849, na obra *Investigação sobre as leis do pensamento*, George Boole apresentou um cálculo lógico fundamentado por uma álgebra matemática (que posteriormente ficou conhecida como *álgebra de Boole*), que arquiteta atualmente, segundo Feitosa e Paulovich (2006, p. 14), os dispositivos eletrônicos (chips) que integram as máquinas de processar.

Tanto Leibniz quanto Boole acreditavam que a lógica era um ramo, uma parte da matemática. Mas foi no final do Século XIX que surgiu um dos principais nomes da lógica moderna, Gottlob Frege, o qual defendia que a matemática poderia ser reduzida à lógica. Diante disso,

> Frege adota a tese – *logicismo* – de que a aritmética é um ramo da lógica, no sentido de que todos os termos da aritmética podem ser definidos com o auxílio apenas de termos lógicos e todos os teoremas da aritmética podem ser provados a partir dos axiomas lógicos (D’Ottaviano; Feitosa, 2003, p. 13).

Em 1879, na obra intitulada “*Begriffsschrift*” (Ideografia), Frege apresentou uma linguagem artificial destinada a formalizar o pensamento de modo claro e objetivo, libertando, desta maneira, a lógica das linguagens naturais. Essa linguagem foi desenvolvida com a finalidade de garantir a legitimidade e a exatidão das demonstrações e deduções matemáticas.

Nas palavras de Haack (2002),

> Ao defender seu *Begriffsschrift*, Frege avaliou as vantagens e desvantagens das linguagens formal e natural – comparando a primeira a ferramentas especializadas eficientes para um âmbito limitado de tarefas e a última à mão humana, mais versátil, porém menos eficiente para qualquer tarefa mais específica. Insistiu também na superioridade das linguagens formais sobre as naturais para a tarefa especializada de representar provas de forma explícita e sem ambigüidades (p. 13, grifo da autora).

Conforme Mortari (2001), ao analisar as demonstrações de alguns teoremas matemáticos, Frege percebeu que muitos deles não estavam, de fato, comprovados e que em boa parte dessas demonstrações existiam muitas contradições e pontos obscuros, nebulosos. Na tentativa de solucionar essas falhas, que eram muito constantes, Frege formalizou um conjunto de regras que deveriam ser utilizadas nas demonstrações de modo a não causarem mais equívocos e dubiedades.

Tal formalização culminou com o desenvolvimento do *cálculo de predicados*, o qual se tornou o cerne da lógica clássica. Uma das grandes contribuições desse cálculo é a presença de quantificadores destinados a representar as noções de Universalidade ($\forall$) e Existencialidade ($\exists$).

Segundo Westertåhl e Peters (2002), Frege ao estabelecer o seu cálculo de predicados, que era de segunda ordem e que não sobreviveu na íntegra devido a algumas inconsistências lógicas verificadas por Russell, conhecia a sintaxe e a semântica envolvida nos quantificadores, por ele introduzidos. Defendem que, para Frege, os quantificadores eram funções que atuavam tanto sobre os objetos como sobre as funções sobre os objetos, e era isso que os classificavam como funções de segunda ordem.

Frege distinguia dois níveis ou ordens de funções: as de primeira ordem e de segunda ordem. O critério adotado para realizar essa distinção era o tipo de argumento que elas tomavam. Assim, se os argumentos adotados eram objetos, a função em questão era classificada como de primeira ordem; no entanto, se os argumentos eram funções de primeira ordem, tratava-se de uma função de segunda ordem.

Não podemos nos esquecer que o propósito de Frege era desenvolver uma lógica matemática e, por isso, a mesma deveria quantificar não apenas sobre objetos, mas também sobre conjuntos e funções, já que a matemática está totalmente fundamentada em tais tipos de estruturas. A lógica *fregeana*, de segunda ordem, possibilita-nos tratar propriedades matemáticas que são impossíveis de serem formalizadas em uma lógica de primeira ordem. Um exemplo disso é o conceito de *supremo de um conjunto* A, o menor dos limitantes superiores de A.

Outra contribuição fundamental de Frege para a lógica, conforme lembraram Westertåhl e Peters (2002), foi a redução dos predicados lógicos em funções que designam valores de verdade (0 ≡ falso e 1 ≡ verdadeiro) para cada objeto x do predicado.

$$f: P \to \{0; 1\}$$

$$x \vdash f(x) = 0 \text{ ou}$$

$$f(x) = 1.$$

Portanto, o quantificador "para todo", $\forall x(\ldots x\ldots)$, representa a função que toma como argumentos funções de primeira ordem e que designa o valor de verdade 1 se, e somente se, a sentença é verdadeira para todos os objetos x da função-argumento. Caso contrário, ela indica o valor 0.

Já o quantificador existencial, $\exists x$, simboliza a noção de conjunto não-vazio, ou seja, quando utilizamos o existencial, estamos dizendo que dentro de um universo de discurso qualquer, existe pelo menos um elemento que satisfaz uma dada propriedade.

Uma característica importante dos quantificadores existencial e universal é que eles podem ser definidos um em função do outro: o quantificador existencial é definido em função do quantificador universal e da negação do seguinte modo:

$$\exists x F(x) \equiv_{df} \neg\forall x \neg F(x).$$

Como o propósito principal de Frege consistia em demonstrar que a matemática poderia ser reduzida à lógica, os quantificadores universal e existencial eram suficientes para tal objetivo. No entanto, com o crescimento da aplicação dessa linguagem nas mais diversas áreas acadêmicas, tais como a computação e a própria lingüística, surgiu a necessidade de se pensar em outros tipos de quantificadores, além dos clássicos.

1.3 Quantificadores generalizados

Mostowski (1957), em seu artigo intitulado "*On a generalization of quantifi-*

ers", pretendia trabalhar com quantificadores lógicos que possuíssem a capacidade de formalizar e representar noções quantificacionais inerentes ao raciocínio humano, mas que seriam impossíveis de serem definidas a partir dos quantificadores usuais da lógica clássica ($\forall$, $\exists$). Além disso, ele almejava verificar se os tradicionais problemas abordados na lógica clássica também poderiam ser tratados em uma lógica estruturada com tais quantificadores, ou seja, indagava se seria possível desenvolver um cálculo formal com esses quantificadores capaz de nos provar todas as propriedades (correção, completude, etc.) do sistema lógico clássico. (Mostowski, 1957, p. 12).

Apesar de não conseguir desenvolver esse cálculo, o autor acreditava na força e na funcionalidade desses quantificadores e, por isso, defendia que eles mereciam ser estudados mais de perto e que, além disso, alguns deles deveriam ser incluídos em exposições sistemáticas da lógica simbólica (1957, p. 13)[3], pois para ele a construção de um cálculo formal não deveria ser o único e principal objetivo da lógica simbólica.

1.3.1 Os quantificadores e a lógica generalizada de Mostowski

As definições expostas nessa seção foram extraídas de Mostowski (1957) e Grácio (1999).

Consideremos um conjunto qualquer M (conjunto universo) e $M^* = M^{\mathbb{N}}$ o seu produto cartesiano ($M^* = M \times M \times ... \times M$ ...), isto é, o conjunto de todas as seqüências $\underline{x} = [x_1, x_2, ..., x]$, com $x_j \in M$ e j = 1, 2, ... Indicamos os valores de verdade, Falso e Verdadeiro, por 0 e 1, respectivamente.

Uma *função proposicional F* em M é uma função de M^* em {0,1} que satisfaz a seguinte condição:

♦ há um conjunto finito de naturais k tais que: se $x = (x_1, x_2, ...) \in M^*$, $y = (y_1, y_2, ...) \in M^*$ e $x_j = y_j$, para $j \in k$, então, F(x) = F(y), ou seja:

$$F: M^* \to \{0, 1\}$$

$$x = y \vdash F(x) = F(y).$$

Consideremos uma relação $R \subseteq M$ e S = {(m, n)} tal que m = $|R|$ é a cardinalidade de R e n = $|R^C|$ é a cardinalidade do complementar de R. Dada uma estrutura

---

[3] Analogia à seguinte citação de Mostowski (1957) : "[...] deserve a closer study and some deserve even to be included into systematic exposition of symbolic logic".

clássica de primeira ordem ($\mathcal{A}$), para cada função T: S $\rightarrow$ {0, 1}, definimos um *quantificador generalizado* por:

$$Q_T(R) = T(|R|, |R^C|) \text{ ou } Q_T(R) = T(m, n)\ .$$

Exemplos de quantificadores expressáveis por esta definição:

- Quantificador Existencial ($\exists$): para todo (m, n) $\in$ S, $T^{\exists}$(m, n) = 1 se, e somente se, m $\neq$ 0, pois se a cardinalidade do conjunto R é diferente de 0, isso significa que existe pelo menos um elemento em R. De modo análogo:

Se $A \subseteq M$ e $|A|$ representa a cardinalidade do subconjunto A, então:

$$\exists_M = \{A \subseteq M \ / \ A \neq \varnothing\}.$$

- Quantificador Universal ($\forall$): para todo (m, n) $\in$ S, $T^{\forall}$(m, n) = 1 se, e somente se, n = 0, pois se a cardinalidade do complementar de uma relação é 0, então todos os elementos de M fazem parte dessa relação. Ou seja:

Se $A \subseteq M$ e $|A|$ representa a cardinalidade do subconjunto A, então:

$$\forall_M = \{A \subseteq M \ / \ |A^C| = 0\}$$

- Quantificador "maioria" (M): para todo (m, n) $\in$ S, T^{M}(m, n) = 1 se, e somente se, m > n.

Em resumo, $A \models Qx\ \varphi(x)$ se, e somente se, T^{M}(m, n) = 1.

Os quantificadores de Mostowski são classificados como do tipo $\langle 1 \rangle$, pois o seu aparecimento depende apenas da cardinalidade do conjunto em questão e do seu complementar[4]. Esses quantificadores aplicam-se somente sobre *uma única* fórmula φ, com apenas uma variável livre, tal que todas as ocorrências livres estão ligadas em $Qx\ \varphi(x)$, na qual todas as ocorrências livres de x estão ligadas em φ. Assim, esses quantificadores representam subconjuntos de M.

[4] As classificações dos quantificadores generalizados em *tipos* decorre das relações que tais quantificadores podem realizar entre os subconjuntos de um dado universo M. Se as relações forem apenas unárias, tais como os de Mostowski, classificamos esses quantificadores como do tipo $\langle 1 \rangle$. Os demais casos serão vistos nos quantificadores de Lindström.

O cálculo formal (S) apresentado por Mostowski, em 1957, complementa o de primeira ordem em conseqüência da inclusão de um novo conjunto de quantificadores na sua sintaxe. Sendo assim, tudo o que era válido no CQC (Cálculo Quantificacional Clássico ou Cálculo de Primeira Ordem) também é nesse novo sistema lógico.

Diante disso, a linguagem de $\mathcal{L}(Q_M)$ é a mesma do CQC, acrescida de um conjunto de símbolos (Q^1, Q^2, ..., Q^s), com $s \in \mathbb{N}^*$, cuja função consiste em representar tanto os quantificadores novos, quanto os clássicos universal e existencial. Portanto, os *símbolos* tradicionais, $\exists$ e $\forall$, não pertencem mais à linguagem do sistema lógico desenvolvido por Mostowski.

A regra para a construção de fórmulas nesse sistema é modificada em decorrência dessa mudança de símbolos. Assim, temos: se α é uma fórmula e x uma variável, então $(Q^j x)\ \alpha(x)$ é uma fórmula ($j = 1, 2, ..., s$). As definições de variáveis ligadas e fórmulas fechadas se mantêm nesse novo sistema.

A satisfação de Q_M depende da seguinte regra semântica, tal como: "dado um cardinal $\aleph_\alpha$, obtém-se uma lógica $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ definida pela seguinte semântica: $\mathcal{B} \vDash Qx\varphi(x)$ se, e somente se, existem pelo menos $\aleph_\alpha$ elementos b, tais que $\mathcal{B} \vDash \varphi(b)$" (Grácio, Feitosa, 2005, p. 2).

Em decorrência do fato de Mostowski não ter conseguido demonstrar a completude do seu cálculo formal, muitos pesquisadores voltaram-se para tal tarefa a fim de encontrar possíveis soluções para esse problema. Dentre eles, destacamos Fuhrken (1964), que em *Skolem-type normal forms for first order languages with a generalized quantifiers*, demonstrou a validade de Teorema da Compacidade para a $\mathcal{L}$ (Q).

Há dois teoremas que refletem a questão da compacidade:

Compacidade forte: Se Δ é um conjunto de sentenças da lógica e se todo subconjunto finito de Δ tem um modelo, então Δ tem um modelo;

Compacidade contável: Se Δ é um conjunto de sentenças da lógica e se todo subconjunto contável de Δ tem um modelo, então Δ tem um modelo.

Vaught (1964), em *A completeness of logic with the added quantifier "there are uncountable many"*, provou que o conjunto de fórmulas válidas de $\mathcal{L}(Q)$ é recursivamente enumerável. Além disso, demonstrou a completude da lógica com o quantificador de Mostowski. No entanto, essa demonstração era demasiadamente complicada.

Então, Keisler (1970), em *Logic with the quantifier "there are uncountable many"*, conseguiu provar, através da utilização de modelos fracos, a completude de modo simples e claro.

Além disso, segundo Feitosa e Grácio (s.d) em "Sobre os quantificadores generalizados", o que torna a lógica $\mathcal{L}(Q)$ de Mostowski mais poderosa e mais atraente é o fato de ela contemplar e trabalhar conceitos impossíveis de serem tratados na lógica primeira ordem, pois em $\mathcal{L}(Q)$ podemos distinguir conjuntos infinitos dos conjuntos finitos e os contáveis dos não-contáveis, haja vista que a definição desses quantificadores está intrinsecamente relacionada com a cardinalidade de conjuntos. Tais conceitos, infinitude e enumerabilidade, são essenciais para a matemática moderna e não podem ser definidos em primeira ordem.

1.3.2 Os quantificadores e a lógica generalizada de Lindström

Diante do exposto, podemos concluir que os quantificadores de Mostowski representam relações unárias entre os subconjuntos de um universo M. Portanto, estes quantificadores não podem ser utilizados para representar relações de tipo binário ou n-ário, como por exemplo, dados dois conjuntos quaisquer A e B, não podemos indicar qual dos dois possui a maioria dos elementos do universo M.

Lindström (1966), em *First order predicate logic with generalized quantifiers*, aprimorou os quantificadores de Mostowski a fim de que os mesmos pudessem satisfazer relações importantes da teoria dos conjuntos e da matemática, e que tivessem condições de representar maior variedade de quantificadores generalizados existentes na linguagem natural. Enquanto os quantificadores de Mostowski operavam apenas sobre relações unárias, os de Lindström generalizavam sobre relações n-árias ($n \in \mathbb{N}^*$).

Um exemplo disso, conforme expuseram Westertåhl e Peters (2002), é o quantificador generalizado de Rescher que, em um dado universo M, indica que o conjunto A possui a maioria dos elementos de M. No entanto, esse mesmo quantificador não pode ser utilizado para enunciar que entre dois subconjuntos de M, A e B, a maioria dos elementos de A pertencem a B.

$$(Q^R)_M = \{A \subseteq M \;/\; |A| > |M - A|\} \text{ (quantificador de Rescher)}$$

Maioria $_M$(A, B) $\Leftrightarrow$ $|A \cap B| > |A - B|$ (quantificador de Lindström).

Conforme já exposto, os Quantificadores de Lindström operam sobre as relações existentes entre os subconjuntos de um dado universo *M*. Portanto, são classificados de acordo com o tipo dessas relações existentes.

Um quantificador do tipo $\langle 1, 1\rangle$ associa a cada universo *M* uma relação binária Q_M entre os subconjuntos de *M*[5]. Sendo assim, esse tipo de quantificador aplica-se a um par de fórmulas (φ, ψ), e é denotado por $Qxy(\varphi, \psi)$, em que todas as ocorrências livres de x estão em φ e todas as ocorrências livres de y estão em ψ.

Apresentamos alguns dos quantificadores clássicos e de Lindström do tipo $\langle 1, 1\rangle$:

(a) quantificadores aristotélicos:

Todo $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow A \subseteq B$;

Algum $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$;

Nenhum $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;

Nem todo $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow A \not\subset B$.

(b) outros tipos de quantificadores:

No mínimo cinco $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow |A \cap B| \geq 5$;

Exatamente três $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow |A \cap B| = 3$;

Infinitamente muitos $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow$ A $\cap$ B é infinita;

A maior parte $_{\mathcal{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow |A \cap B| > |A - B|$;

Um número par $_{\mathrm{M}}$(A, B) $\Leftrightarrow$ $|A \cap B|$ é par.

Um quantificador do tipo $\langle 1, 1, 1\rangle$ associa a cada universo *M* uma relação ternária Q_M entre os subconjuntos de *M*. Sendo assim, esse tipo de quantificador aplica-se a uma tripla de fórmulas (φ, ψ, δ), denotado por $Qxyz(\varphi, \psi, \delta)$, em que todas as ocorrências livres de x, y e z estão em φ, ψ e δ, respectivamente. E assim por diante.

Dizemos que um quantificador generalizado "Q" é *monádico* (do tipo $\langle 1, ..., 1\rangle$) quando é uma relação entre subconjuntos de um dado universo *M*. Caso contrário, ele é qualificado como poliádico.

---

[5] Tradução de: "A (generalized) *quantifier of type* $\langle 1, 1\rangle$ associates with each universe *M* a binary relation Q_M between subsets of *M*" (Westertåhl e Peters, 2002, p. 24, grifo dos autores).

Considerando Q como um conjunto qualquer de símbolos quantificacionais de tipo t, Lindström constituiu a linguagem desses quantificadores ($\mathcal{L}_t(Q_L)$) da seguinte forma (Lindström, 1966, p. 186):

Linguagem $\mathcal{L}_t(Q_L)$:

- Variáveis individuais $x_0, x_1, \ldots$;
- Para cada $i \in D^t$ (Determinador), há um predicado P_i;
- Identidade;
- Os membros de Q_L;
- [,], (,).

As Fórmula de $\mathcal{L}_t(Q_L)$ são caracterizadas por:

- Predicados (P_i), em que $i \in D^t$, seguidos por t ocorrências de variáveis;
- $x_m = x_n$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_t(Q_L)$, para qualquer m e n;
- se Q_L é do tipo $\langle n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ e α_n são fórmulas de $\mathcal{L}_t(Q_L)$, então $Qx_n(\alpha_n)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_t(Q_L)$. Isso é válido, analogamente, para os demais tipos de quantificadores;
- Nada mais é fórmula.

Apresentaremos a noção de satisfação através de dois exemplos, extraídos de Westertåhl e Peters (2002, p. 24), a fim de auxiliar na compreensão do conceito.

Consideremos um universo M e as fórmulas $\varphi = (x, x_1, \ldots, x_n)$ e $\psi = (y, y_1, \ldots, y_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{L}_t(Q_L)$. A satisfação de um quantificador do tipo $\langle 1, 1 \rangle$, isto é, Qxy (φ,ψ), é dada por:

$$M \vDash Qxy\,(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n), \psi(y, y_1, \ldots, y_n)) \Leftrightarrow$$

$$Q_M[\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)^{M,\,x}, (\psi(y, y_1, \ldots, y_n)^{M,\,y}].$$

Se Qxy $(\varphi, \psi) \equiv$ Mxy (φ, ψ), com M representando o quantificador “a maioria”, então:

$$M \vDash Mxy((\varphi(x, x_1, \ldots, x_n), \psi(y, y_1, \ldots, y_n)) \Leftrightarrow$$

$$M[(x, x_1, \ldots, x_n)^{M,\,x}, (\psi(y, y_1, \ldots, y_n)^{M,\,y}]$$

Para um quantificador do tipo $\langle 2, 3, 1 \rangle$, isto é, Qxy, zuv, w (φ, ψ, σ) e considerando os mesmos dados acima, temos:

$$M \vDash Qxy, zuv, w\,(\varphi(x, y, \ldots), \psi(z, u, v, \ldots), \sigma(w, \ldots)) \Leftrightarrow$$

$$Q_M[(\varphi(x, y,...))^{M, x,y}, (\psi(z, u, v, ...)^{M, z, u, v}, \sigma(w, ...)^{M, w}].$$

Em continuidade ao tratamento dos quantificadores, o período entre 1970 e 1980 foi importante pelo desenvolvimento e interação entre as pesquisas envolvendo quantificadores generalizados, lingüística e ciência da computação. Os lógicos focalizaram os quantificadores como ferramentas para representar quantificadores matemáticos importantes, que não podiam ser definidos na lógica de primeira ordem; os lingüistas examinavam os quantificadores como instrumentos de análise daqueles presentes na semântica da linguagem natural e que não estão definidos em termos dos clássicos $\forall$ e $\exists$ (tais como: muitos, uma boa parte, a maioria, etc.); já os computólogos pretendiam explorar a utilização dos quantificadores lógicos em estruturas finitas.

1.3.3 A lógica dos ultrafiltros e as lógicas moduladas

Em 1999, três pesquisadores brasileiros, Sette, Carnielli e Veloso apresentam no artigo *An alternative view of default reasoning and its logic* um sistema lógico, denominado atualmente lógica dos ultrafiltros, baseado na noção de ultrafiltro, com o intuito de formalizar e representar as noções intuitivas de “quase sempre” ou “quase todos”.

Essa formalização seria realizada por intermédio da inserção de um quantificador generalizado, representado por ∇, na sintaxe da lógica de primeira ordem, cujo objetivo é interpretar a concepção indutiva “quase todos” por intermédio de uma estrutura matemática denominada ultrafiltro.

Desse modo, a linguagem da lógica dos ultrafiltros ($\mathcal{L}(\nabla)$) é uma ampliação da linguagem da lógica de primeira ordem, composta pelos símbolos representantes das constantes, predicados e funções, pelos conectivos lógicos $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (se... então), mais os quantificadores $\forall$, $\exists$ e ∇.

Os axiomas de $\mathcal{L}(\nabla)$ são todos aqueles que constituem a lógica de primeira ordem, acrescidos de mais quatro oriundos da teoria dos ultrafiltros. Então:

Axiomas $\mathcal{L}(\nabla)$:

Ax_0: Axiomas do cálculo de primeira ordem (CQC)

Ax_1: $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((\nabla x\, \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\, \psi(x)))$

Ax_2: $((\nabla x\ \varphi(x)) \wedge (\nabla x\ \psi(x)) \rightarrow (\nabla x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)\ )$

Ax_3: $\nabla x\ \varphi(x) \vee \nabla x\ \neg\varphi(x)$

Ax_4: $\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$.

As regras de inferência são:

i) *Modus Ponens:* $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

ii) Generalização: $\varphi \vdash (\forall x)\ \varphi$.

A definição de fórmula é a mesma do CQC acrescida da seguinte cláusula: para a variável x, se φ é um fórmula em $\mathcal{L}(\nabla)$, então $\nabla x\varphi(x)$ também é fórmula.

A estrutura semântica de $\mathcal{L}(\nabla)$, assim como nas definições acima, é a mesma do CQC, adicionada por um ultrafiltro próprio ($F^{\mathcal{A}}$) sobre o universo, ou seja, uma estrutura para $\mathcal{L}(\nabla)$ é edificada acrescentando-se na estrutura clássica, representada por $\mathcal{A}$, um ultrafiltro próprio, $F^{\mathcal{A}}$, sobre o universo A. Indicamos essa nova estrutura por $\mathcal{A}^F = \langle\ \mathcal{A}, F^A\ \rangle$, na qual $\mathcal{A} = \langle A, \{R_i^{\mathcal{A}}\}_{i \in I}; \{f_i^{\mathcal{A}}\}_{j \in J}; \{a_k^{\mathcal{A}}\}_{k \in K} \rangle$[6].

A satisfação de uma fórmula φ é dada por:

- Se a fórmula em questão não envolver o quantificador ∇, a satisfação é definida como na lógica clássica;
- Se a fórmula φ envolver o quantificador ∇, então:

$\mathcal{A}^F \vDash \nabla x\ \varphi(\underline{y}, x)[\underline{a}]$ se, e somente se, $\{b \in A\ /\ \mathcal{A}^F \vDash \varphi(\underline{y}, x)[\underline{a}, b]\ \} \in F^A$.

Em 1999, Grácio apresentou em sua tese "*Lógicas moduladas e raciocínios sob incertezas*" uma família de lógicas, denominadas *lógicas moduladas*, cujo sistema formal "[...] pode ser considerado uma abstração do sistema apresentado em Sette, Carnielli e Veloso (1999) para a formalização da noção de 'quase todos'" (Grácio, 1999, p. 105).

As lógicas moduladas são lógicas complementares da lógica clássica de primeira ordem, caracterizadas pela inserção de quantificadores generalizados na linguagem sintática da lógica de primeira ordem. Esses quantificadores representam noções indutivas do tipo "muitos", "a maioria", "uma boa parte" e "quase todos", os quais são batizados de q*uantificadores modulados*.

---

[6] $R_i^{\mathcal{A}}$ representa uma relação T-ária definida em A para $i \in I$; $f_i^{\mathcal{A}}$ é uma função j-ária de A^n em A, supondo-se $T_1(j) = n$, para $j \in J$; e c_k é uma constante de A, para $k \in K$.

Semanticamente, os quantificadores modulados são interpretados por um subconjunto *Q*, o qual representa "[...] um conjunto arbitrário de proposições sustentadas pelas evidências, dentro de uma base de conhecimento" (Grácio, 1999, p. 160), o qual será o responsável pela definição do sistema e, conseqüentemente, da lógica modulada com que iremos trabalhar. Por exemplo, se consideramos *Q* uma topologia reduzida[7], formalizamos uma lógica modulada que representará a noção quantificacional de "uma boa parte". Tal lógica é denominada *lógica do plausível*.

No entanto, se *Q* é uma família própria fechada superiormente, ou seja, se *Q* determina "[...] uma coleção de subconjuntos do universo U fechada por superconjuntos e que contém o universo U" (Grácio, 1999, p. 105), temos uma lógica que representa a idéia de "muitos" e é denominada de *lógica do muito*. Por fim, quando *Q* "[...] é identificado com a classe de subconjuntos do universo cujos números cardinais são maiores que os números cardinais de seus complementares, em relação ao universo, formalizamos um argumento do tipo a "maioria" (Grácio, 1999, p. 161)".

A estrutura sintática e semântica das lógicas moduladas será apresentada no capítulo referente à lógica do muito.

1.3.4 Lógica quantificacional topológica

Joseph Sgro (1977), seguindo os passos de muitos pesquisadores, principalmente de Keisler, interessou-se pelos quantificadores generalizados em decorrência da enorme contribuição e da aplicabilidade dos mesmos em lógica e em outros ramos da matemática.

O que motivou Sgro a utilizar os quantificadores generalizados foi a impossibilidade de se trabalhar na lógica de primeira ordem com estruturas topológicas, já que a topologia utiliza noções de conjuntos abertos, definíveis em segunda ordem. Assim, ele empregou, na obra *Completeness theorems for topological models*, os quantificadores generalizados para prover uma fundamentação para o estudo de um modelo

[7] Uma topologia reduzida, conforme Grácio (1999) e Silvestrini (2005), é uma família $\mathfrak{I}$ de subconjuntos de um conjunto U, denominados de *subconjuntos abertos reduzidos*, que contemplam as seguintes cláusulas:

a) A intersecção de dois abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;

b) A reunião de dois subconjuntos abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;

c) U é um subconjunto aberto reduzido;

d) O subconjunto $\varnothing$ não é um aberto reduzido.

teórico topológico.

Assim como nas lógicas quantificacionais abordadas nesse trabalho, o sistema lógico de Sgro também complementa a lógica de primeira ordem por intermédio da inclusão de um novo quantificador (Q_T) no seu escopo sintático, o qual será interpretado por:

$Q_T x\varphi(x)$ significa que o conjunto definido por $\varphi(x)$ é um aberto.

Desse modo, a linguagem de $\mathscr{L}(Q_T)$ é uma ampliação da linguagem da lógica de primeira ordem com igualdade composta por símbolos para representar constantes, predicados e funções; pelos conectivos lógicos $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (se... então), $=$ (igualdade); mais os quantificadores $\forall$, $\exists$ e Q_T.

O conjunto de fórmulas para $\mathscr{L}(Q_T)$ constitui-se o menor conjunto que contém todas as fórmulas atômicas e é fechado para os operadores ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, Q_T).

Os axiomas de $\mathscr{L}(Q_T)$ são todos aqueles que constituem a lógica de primeira ordem, acrescidos de mais seis, sendo que dois primeiros são inerentes à quantificação e os quatro restantes são axiomas para a topologia. Desse modo:

(Ax_1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx\varphi(x) \leftrightarrow Qx\psi(x))$[8]

(Ax_2) $Qx\varphi(x) \leftrightarrow Qy\varphi(y)$

(Ax_3) $Qx\, (x = x)$

(Ax_4) $Qx\, (x \neq x)$

(Ax_5) $Qx\varphi(x) \wedge Qx\psi(x) \rightarrow Qx\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(Ax_6) $\forall x Qx\varphi(x, y) \rightarrow Qx\exists y\varphi(x, y)$

Considerando φ e ψ subconjuntos de um universo A e representando por $[\varphi]$ e $[\psi]$ os conjuntos de indivíduos que, respectivamente, satisfazem φ e ψ, esses axiomas denotam, intuitivamente, que:

(Ax_1) Se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm os mesmo indivíduos, então $[\varphi]$ é um aberto see[9] $[\psi]$ também é um aberto.

(Ax_2) Esse axioma representa o axioma da substituição de variáveis para o quantifi-

[8] Com o intuito de deixar o texto mais limpo, substituiremos a representação do quantificador topológico Q_T por Q na exposição dos axiomas.

[9] See será uma abreviação para “se e somente se”.

cador Q_T.

(Ax_3) O conjunto universo é um aberto.

(Ax_4) O conjunto vazio é um aberto.

(Ax_5) A intersecção entre dois conjuntos abertos é um aberto.

(Ax_6) Uma união qualquer de conjuntos abertos é um aberto.

As regras para o sistema lógico de Sgro são as mesmas da lógica clássica:

Modus Ponens (MP): $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

Generalização (GEN): $\varphi \vdash \forall x\varphi$

Além de formalizar uma lógica quantificacional topológica (1977), Sgro também demonstra a Correção e a Completude desse sistema.

1.3.5 Os quantificadores e a linguagem natural

Segundo Fenstad (1976), faz pouco tempo que a relação entre os lingüistas e os lógicos está amistosa. Durante um longo período, a combinação entre a lógica e gramática foi um ponto de discórdia entre os adeptos de cada área. Os lingüistas defendiam a concepção de que seria impossível aplicar a teoria lógica em análises e estudos da linguagem natural, devido, principalmente, à rigidez do formalismo lógico. Acreditavam que seria um tanto quanto complicado trabalhar com uma linguagem artificial estática e objetiva em sistemas lingüísticos naturais, que se caracterizam por serem subjetivos e por estarem em constantes mudanças e evoluções.

No entanto, Fenstad argumentou que não podemos reduzir a lógica somente a um cálculo de predicados formal, haja vista que ela é muito mais que uma mera formalização. E foi isso que, segundo Fenstad, Hans Reichenbach pensou quando, em 1948, na obra '*Elements of Symbolic Logic*", tentou aplicar ferramentas lógicas em algumas análises da linguagem natural. Reichenbach forneceu uma estrutura mais detalhada de análise da linguagem natural em termos de uma lógica mais elaborada.

Ainda segundo Fenstad, Haskell B. Curry em "*Some Logical Aspects of Grammatical structure*" (1961), apresentou uma análise de alguns aspectos da linguagem em termos lógicos. Infelizmente, tanto o trabalho de Reichenbach como o de Curry tiveram pouco impacto sobre os lingüistas da época. Por volta dos anos 50, Bar-Hillel conseguiu simplificar a *gramática categorial* desenvolvida por S. Lesniewski e K. Ajdukiewicz e a aplicou numa teoria a respeito de traduções de máquinas.

Mas, foi Richard Montague que, em 1973, unificou a análise categorial de Ajdukiewicz com a estrutura profunda de análise de Reichenbach, apresentando uma teoria que “unifica ou identifica expressões substantivas do inglês, como “[...] todos os pássaros”, “Maria”, “ela”, à noção de quantificadores generalizados.” (Grácio; Feitosa; 2005, p. 2).

Seguindo os passos de Montague, Barwise e Cooper (1981) também analisaram as relações existentes entre a linguagem natural e os quantificadores lógicos generalizados. Esses dois pesquisadores foram a expressão inicial da união entre lógicos e lingüistas, já que Cooper é um lingüista e Barwise um lógico.

Na obra ‘*Generalized Quantifiers and Natural Language*”, Barwise e Cooper (1981) apresentam os seus quantificadores generalizados, expõem sintaticamente e semanticamente uma lógica constituída por tais quantificadores (apesar de sua formalização não ter sido a preocupação principal deles) e, por fim, discutem algumas implicações gerais da noção de quantificadores generalizados para uma teoria de linguagem natural.

Nas análises referentes à natureza dos quantificadores generalizados, os autores abordaram alguns pontos que justificam a crescente utilização de outros quantificadores, distintos dos tradicionais Universal e Existencial. Apresentaremos somente aqueles mais relevantes para o nosso trabalho.

O primeiro diz respeito ao fato de os quantificadores do cálculo de predicados ($\forall$, $\exists$) não conseguirem tratar de todas as sentenças possíveis de serem formuladas na linguagem natural, ou seja, a teoria semântica da linguagem natural não pode estar baseada apenas no cálculo de predicados, pois a semântica da linguagem natural é maior e mais complexa que a semântica do cálculo de predicados.

Por exemplo, consideremos as seguintes sentenças elaboradas por Barwise e Cooper (1981, p. 160):

a) Há apenas um número finito de estrelas.
b) Nenhum coração baterá infinitamente.
c) Mais da metade das setas de João acertaram o alvo.
d) Mais da metade das pessoas votaram em Carter.
e) A maioria das setas de João acertaram o alvo.

Segundo os autores, essas sentenças podem ser expressas em qualquer linguagem natural existente. As sentenças do tipo (a) e (b) podem ser apresentadas em termos dos quantificadores de primeira ordem, mas há dificuldades em expressarmos as sentenças (c), (d) e (e) nesses mesmos quantificadores. Desse modo, não podemos reduzir os quantificadores “mais da metade” e “a maioria” em termos dos de primeira ordem $\forall x$ (... x ...) e $\exists x$ (... x ...) (Barwise, Cooper, 1981, p. 160).

O segundo ponto se refere à sintaxe. Para os autores, a sintaxe do cálculo de predicados difere da sintaxe da linguagem natural em relação aos quantificadores, ou seja, a estrutura sintática de sentenças quantificadas na linguagem natural é muito distinta daquela quantificada no cálculo de predicados.

Para Barwise e Cooper (1981), um *quantificador* é, sintaticamente, uma combinação ou uma reunião de um *determinador* com uma *expressão de conjuntos*. Um determinador denota um *termo de contagem*, tal como “muitos”, “uma boa parte”, “a maioria”, “mais que a metade”, etc., enquanto que uma expressão de conjuntos representa um *conjunto arbitrário de coisas*, tais como, “pessoas”, “anéis”, “animais”, etc. Esquematicamente:

Quantificador – “Muitas Pessoas”

Determinador   Expressão de Conjuntos
(Muitas)   (Pessoas)

Defendem ainda que a estrutura de um quantificador lógico corresponde, precisamente, à essência das Expressões Substantivas (NP ou *Noun-Phrase*) do Inglês. As expressões substantivas, mais comumente conhecidas por NPs, “são expressões substantivas simples do inglês que representam quantificadores generalizados de contagem” (Grácio, Feitosa, 2005, p. 39, nota de rodapé). Podemos representá-las por:

NP - “Muitas Pessoas”

Determinador   Substantivo

Muitas   Pessoas

O terceiro ponto diz respeito à não necessidade de todos os quantificadores terem correspondentes símbolos lógicos. Barwise e Cooper defendem que há uma noção errônea de que os quantificadores devem ser construídos apenas em ambientes lógicos, isto é, o significado não pode variar de modelo para modelo. Há aqueles que podem ser determinados por uma estrutura topológica, tais como os apresentados por Sgro, conforme já exposto.

O quarto, e último (segundo a nossa hierarquia de relevância), refere-se à noção de que os quantificadores denotam uma família de conjuntos, ou seja, quando usamos um tipo de quantificador, estamos afirmando que um conjunto possui determinada propriedade, ou seja, um conjunto pertence a uma família de conjuntos, configurada por uma dada propriedade. Sendo assim, expressões do tipo: "$\forall x\ F(x)$" afirma que o conjunto contém todos os indivíduos. Os valores de verdade dos quantificadores dependerão dos conjuntos aos quais eles tiverem associados.

Por exemplo, a sentença $\exists x\ \varphi(x)$ será verdadeira se o conjunto que satisfaz $\varphi(x)$ possui algum elemento. Caso contrário, ela será falsa. Portanto, "[...] quantificadores são utilizados para representar a família de conjuntos para as quais eles produzem o valor "verdadeiro"[10]" (Barwise, Cooper, 1981, p. 164).

1.3.5.1 A lógica com os quantificadores generalizados segundo Barwise e Cooper

Os autores distinguem dois tipos de quantificadores: os lógicos e os não-lógicos. Os lógicos caracterizam-se por apresentarem uma única interpretação semântica, independentemente do modelo a ser considerado, enquanto que, nos quantificadores não-lógicos, sua interpretação está intrinsecamente ligada ao modelo adotado.

A lógica que apresentamos abaixo é apenas uma exposição do sistema desenvolvido por Barwise e Cooper. Não entraremos em discussões aprofundadas sobre o assunto.

A lógica dos quantificadores generalizados de Barwise e Cooper é denotada por $\mathscr{L}(GQ)$.

A linguagem de $\mathscr{L}(GQ)$ é composta por:

i) Conectivos lógicos: $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$

ii) Variáveis: $(x, y, z, \ldots)$

[10] Tradução de: "[...] quantifiers are taken to denote the family of sets for which they yield the value "true"".

iii) Conjunto de indivíduos ou objetos: E (também denominado de "coisa")

iv) Símbolos auxiliares: (,), [,], ^, =

v) Alguns determinadores lógicos: existe, todos, nenhum, ambos, 1, 2, 3, 1!, 2!, "o 1", "o 2", etc.

vi) Determinadores não-lógicos: muitos, poucos, a maioria, boa parte, etc.

vii) Símbolos de constantes: (c, d, ...)

viii) Símbolos Relacionais: (R, S, ...)

ix) Um termo de conjunto distinguido: (coisa) *thing*.

Barwise e Cooper apresentam seis *regras* de formação sintática que unidas fornecem uma definição indutiva dos três tipos de expressões para essa lógica, denominadas, "termos de conjuntos", "quantificadores" e "fórmulas":

i) *Termos de Conjuntos*

R_1: Qualquer símbolo de predicado é um termo de conjunto.

R_2: Se φ é uma fórmula e *u* é uma variável, então û[φ] é um termo de conjunto.

ii) *Quantificadores*

R_3: Se D é um determinador e η é um termo de conjunto, então D(η) é um quantificador.

iii) *Fórmulas*

R_4: Se R é uma relação n-ária e $t_1, \ldots, t_n$ são constantes ou variáveis, então $R(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula. Analogamente, se η é um termo de conjunto e t é uma variável ou constante, então η(t) é uma fórmula;

R_5: Se Q é um quantificador e η é um termo de conjunto, então Q(η) é uma fórmula.

R_6: As fórmulas são fechadas para os conectivos proposicionais $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\neg$ (não).

A semântica para $\mathscr{L}$(QG) é definida como segue:

Um modelo para $\mathscr{L}$(QG) é uma função $\mathscr{M}$ que designa interpretações para expressões da linguagem. Designa para um termo "Coisa" algum conjunto não-vazio "E" e para cada símbolo básico S, uma interpretação ||S||, que satisfaz as onze regras abaixo (Barwise; Cooper, p. 169):

S_1: Se "*t*" é uma constante ou variável, então $||t|| \in$ E;

S_2: ||coisa|| = E;

S_3: $||=|| = \{\langle a, a\rangle \ / \ a \in E\}$;

S_4: Se R é um símbolo relacional n-ário, então $||R|| \subseteq E \times E \times \ldots E$. Analogamente, se U é um termo de conjunto básico, então $||U|| \subseteq E$;

S_5:

a) ||algum|| é uma função que designa para cada $A \subseteq E$ a família:

$$||\text{algum}||\ (A) = \{X \subseteq E \ / \ X \cap A \neq \varnothing\};$$

b) ||todo|| é uma função que designa para cada $A \subseteq E$ a família:

$$||\text{todo}||\ (A) = \{X \subseteq E \ / \ A \subseteq X\};$$

c) ||nenhum|| é uma função que designa para cada $A \subseteq E$ a família:

$$||\text{nenhum}||\ (A) = \{X \subseteq E \ / \ X \cap A = \varnothing\}.$$

d) Para cada número natural, n, ||n||, ||n!|| e ||o n|| são funções em conjuntos, definidos por:

$||n||(A) = \{X \subseteq E \ / \ |X \cap A| \geq n\}$, onde $|X \cap A|$ representa a cardinalidade do conjunto.

$$||n!||(A) = \{X \subseteq E \ / \ |X \cap A| = n\}$$

$$||\text{o } n||(A) = \begin{cases} ||\text{todo}||A, \text{ se } |A| = n; \\ \text{Indefinido, caso contrário.} \end{cases}$$

$$||\text{ambos}||(A) = ||\text{o } 2||(A)$$

S_6: Se D é um símbolo de um determinante não-lógico, então ||D|| designa, para cada conjunto A, alguma família de conjuntos que *vivem em*[11] A.

Portanto, a interpretação ||D||(A), para um quantificador D(A), sendo D o determinador e A uma expressão de conjunto, é “[...] uma família de conjuntos Q com a propriedade: $X \in Q$ se, e somente se, $(X \cap A) \in Q$”[12](Barwise, Cooper, 1981, p. 170).

S_7: Se R é um símbolo de relação n-ária, então:

[11] A propriedade *vive em* será definida logo adiante.

[12] Tradução de: “[...] a family of sets Q with the property that $X \in Q$ if and only if $(X \cap A) \in Q$”.

$$||R(t_1,\dots,t_n)|| = \begin{cases} 1, \text{ se } \langle || t_1||,\dots, || t_n || \rangle \in ||R|| \\ 0, \text{ se } \langle || t_1||,\dots, || t_n || \rangle \notin ||R||. \end{cases}$$

S_8: Se η é termo de conjunto, então:

$$||\eta(t)|| = \begin{cases} 1, \text{ se } || t|| \in ||\eta|| \\ 0, \text{ se } || t|| \notin ||\eta||. \end{cases}$$

S_9: Se D é um determinador e η um termo de conjunto, então o quantificador D(η) representa o resultado da aplicação do sentido de D no sentido de η.

$$||D(\eta)|| = ||D||(||\eta||)$$

Isto representa uma família de conjuntos que *vive em* $||\eta||$.

S_{10}: Se Q é um quantificador e ψ é um termo de conjunto, então a verdade ou falsidade de Qψ depende da denotação de ψ ser ou não ser um dos conjuntos na denotação de Q, ou seja:

$$||Q\psi|| = \begin{cases} 1, \text{ se } || \psi|| \in ||Q|| \\ 0, \text{ se } || \psi|| \notin ||Q|| \end{cases}$$

S_{11}: Permanecem as usuais regras de verdade para $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Por exemplo:

$$\begin{cases} ||\varphi \wedge \psi||=1, \text{ se } || \psi||= ||\varphi||= 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

1.3.5.2 A teoria lingüística dos quantificadores generalizados de Barwise e Cooper

Conforme já exposto, para Barwise e Cooper os quantificadores generalizados são equivalentes às expressões substantivas (NP ou *Noun-Phrases*) da linguagem natural inglesa. Diante disso, as expressões formalizadas no sistema lógico fundamentado por tais quantificadores possuem suas respectivas sentenças correspondentes na linguagem inglesa.

A teoria lingüística, nas palavras dos próprios autores, ocupa-se, em parte, com *universalidades naturais da língua*, ou seja, com fatos que se conservam para todas as linguagens naturais humanas e que as distinguem de outras linguagens logicamente possíveis[13] (Barwise e Cooper, 1981, p. 176).

Diante disso, os autores sugerem alguns potenciais universais da linguagem natural que se relacionam com a teoria da quantificação. Ao todo são dez universais, mas como apenas alguns "admitem uma análise no âmbito dos quantificadores generalizados" (Grácio, Feitosa, 2005, p. 40), restringiremos nossa apreciação a elas. Antes de comentarmos esses Universais, precisamos definir algumas propriedades dos quantificadores.

i) Propriedade "*Vive em*" (Barwisee e Cooper, 1981, p. 178): Dadas duas sentenças A e B, um quantificador Q vive em B, se $B \subseteq A$ com a seguinte propriedade: $\forall X \subseteq B$, $X \in Q \leftrightarrow (X \cap A) \in Q$.

ii) Quantificador *próprio* ou *crivo* (Barwisee e Cooper, 1981, p. 179): um quantificador "Q" é classificado como próprio ou crivo quando Q é um subconjunto próprio e não-vazio das partes de um universo M, ou seja, $Q \subseteq \wp(M)$.

iii) Determinadores *fracos* e *fortes* (Barwisee e Cooper, 1981, p. 182):

- Positivamente fortes: Para todo modelo $\mathcal{M} = \langle E, ||\quad|| \rangle$[14] e todo subconjunto $A \subseteq E$, se $||D||(A)$ está definida, então $A \in ||D||(A)$, ou seja, um determinador é positivamente forte se a sentença constituída por ele é verdadeira em qualquer modelo adotado.
- Negativamente forte: $||D||(A)$ está definida, então $A \notin ||D||(A)$, ou seja, um determinador é negativamente forte se a sentença constituída por ele é falsa em qualquer modelo adotado.

---

[13] Tradução de: "Linguistic Theory is concerned, in part, with natural language universal, facts which hold for all naturally occurring human languages and which distinguish them from other logically possible languages".

[14] Os símbolos E e $||\quad||$ representam, respectivamente, o conjunto Universo e a função interpretação da lógica quantificada segundo Barwise e Cooper (que veremos mais adiante), no Modelo $\mathcal{M}$ com universo E.

- Fraco: se o determinador não é positivamente e nem negativamente forte. A veracidade das sentenças varia de acordo com a o modelo ou universo considerado.

  Exemplos:

a) Todo ser humano é mortal - (positivamente forte).
b) Nenhum gato tem coração - (negativamente forte).
c) Muitos homens gostam de futebol americano - (fraco).

iv) Quantificador *monotônico crescente* e *decrescente* (Barwisee e Cooper, 1981, p. 184):

- Monotônico crescente: Q é um quantificador monotônico crescente se $X \in Q$ e $X \subseteq Y \subseteq E$, então, $Y \in Q$, ou seja, para qualquer conjunto $X \in Q$, Q também contém todos os super-conjuntos de X.

$$X \in Q \text{ e } X \subseteq Y \subseteq E \rightarrow Y \in Q$$

- Monotônico decrescente: Q é um quantificador monotônico decrescente se $X \in Q$ e $Y \subseteq X \subseteq E$, então, $Y \in Q$, ou seja, para qualquer conjunto $X \in Q$, Q também contém todos os subconjuntos de X.

$$X \in Q \text{ e } Y \subseteq X \subseteq E \rightarrow Y \in Q$$

Por meio dessas novas relações, monotônico crescente e decrescente, Barwise e Cooper (1981, p. 186) definem dois novos quantificadores: o quantificador de negação "~Q" e o quantificador complementar "Q~".

$$\sim Q: \{X \subseteq E \ / \ X \notin Q\}$$

$$Q\sim: \{X \subseteq E \ / \ (E - X) \in Q\}$$

Com isso, "os autores demonstram que quando Q é um quantificador monotônico crescente, então ~Q e Q~ são quantificadores monotônicos decrescentes e quando Q é um quantificador monotônico decrescente, então ~Q e Q~ são quantificadores monotônicos crescentes" (Grácio, Feitosa, 2005, p. 41).

v) Quantificador *persistente* (Barwisee e Cooper, 1981, p. 192): um quantificador "Q" é persistente quando para todo modelo $\mathcal{M} = \langle E, || \quad || \rangle$ e todos $A \subseteq B \subseteq E$, se $X \in ||D||(A)$, então $X \in ||D||(B)$.

Universal do NP-Quantificador (Barwisee e Cooper, 1981, p.177) Toda linguagem natural possui constituintes sintáticos (denominados expressões substantivas-NPs), cuja função semântica é expressar quantificadores generalizados sobre o domínio do universo.

Barwise e Cooper não ignoram o fato de que, devido aos diferentes sistemas lingüísticos que compõem a linguagem natural humana, é muito complicado e difícil estabelecer uma definição sintática universal para as expressões substantivas. No entanto, eles defendem e acreditam que, em qualquer estrutura lingüística humana, existe uma categoria sintática que se comporta como as NPs do inglês. Essa categoria compreende os nomes próprios e os determinadores, tais como, "a maioria", "todos", etc.

Isso garante às NPs e, conseqüentemente, aos quantificadores uma Universalidade que nos permite analisar e considerar evidências que podem ser verdadeiras em qualquer linguagem natural. Além, é claro, de servir como um elemento distintivo entre as linguagens naturais e artificiais.

Universal do Determinador (Barwise, Cooper, 1981, p. 179) Toda linguagem natural contém expressões básicas, denominadas Determinadores, cuja função semântica é atribuir denotações de substantivos de contagem comum (isto é, conjuntos) A, um quantificador que *vive em* A.

Universal da correspondência de monotonicidade (Barwise, Cooper, 1981, p. 186) Há uma NP (expressão substantiva) simples que expressa o quantificador monotônico decrescente ~Q se, e somente se, existe uma NP simples com um determinador fraco não-cardinal que expressa o quantificador monotônico crescente Q~.

A idéia subjacente a esse Universal é inserir restrições no conjunto de determinadores básicos em uma linguagem humana, ou seja, para os autores não é necessário que uma linguagem possua, por exemplo, os determinadores "não a maioria" e "não todos" se "a maioria" e "todos" já fazem parte do escopo sintático dessa linguagem. A preocupação desse Universal é com o aspecto semântico dos termos e não com o sintático, ou seja, "nós não precisamos assumir, por exemplo, que *poucos* é o mesmo que *não muito* em qualquer nível sintático"[15] (Barwise, Cooper, 1981, p. 187).

[15] Tradução de: "We do not have to assume, for example, that *few* is the same as *not many* at any syntactic level".

Universal do retraimento (Barwise, Cooper, 1981, p. 187) As NPs simples de qualquer linguagem natural expressam quantificadores monotônicos ou conjunções de quantificadores monotônicos.

Retraimento do determinador forte (Barwise, Cooper, 1981, p. 188) Em linguagens naturais, determinadores fortes positivos são monotônicos crescentes. Determinadores fortes negativos são monotônicos decrescentes.

Universal do determinador persistente (Barwise, Cooper, 1981, p. 193): todo determinador persistente da linguagem humana é monotônico crescente e fraco.

Algumas análises realizadas por Feitosa e Grácio (2005), em relação às lógicas moduladas e algumas definições e propriedades da linguagem natural apresentados por Barwise e Cooper (1981), serão apresentadas em uma subseção no Capítulo 4.

1.4 Computação e quantificadores

Conforme Väänänen e Kolaitis (1995), os trabalhos com quantificadores generalizados, e consequentemente com as lógicas não-clássicas desenvolvidas a partir desses quantificadores, traçaram os fundamentos para um estudo sistemático das lógicas estendidas que foram apresentadas principalmente durante as décadas de 70 e 80. Também permitiram o desenvolvimento de uma *teoria dos modelos* cujo objetivo central é classificar e relacionar as diferenças e semelhanças entre esses novos sistemas lógicos. Esse período também foi marcado por acentuado aumento na interação entre a lógica e a ciência da computação, principalmente no estudo da complexidade computacional.

As estruturas que alicerçam os nossos computadores são finitas, uma vez que todos os programas existentes são finitos e constituídos por algoritmos com instruções finitas. Por isso, surgiu uma nova Teoria dos Modelos, a *Teoria dos Modelos Finitos*, cuja função é investigar as relações existentes entre as estruturas matemáticas finitas e as diferentes linguagens artificiais desenvolvidas.

Mesmo com essa extensa aplicabilidade, a teoria dos modelos finitos surgiu tardiamente e, até recentemente, era pouco desenvolvida quando comparada com a teoria clássica dos modelos. Por que isso ocorreu? Qual foi o motivo dessa postergação? Para Fagin (1993), em *Finite-model theory - a personal perspective*, há duas justificativas ou razões para tal demora: uma de cunho filosófico e outra natureza técnica.

i) Justificativa Filosófica: como bem sabemos, o rigor da formalização da lógica moderna surgiu para dar uma fundamentação objetiva e clara nas demonstrações matemáticas. Na matemática, trabalhamos tanto com estruturas finitas quanto com as infinitas. Para o autor não há justificativas plausíveis para nos focarmos apenas nas estruturas finitas. Ao contrário, se fosse para enfatizarmos um tipo deveríamos nos concentrar nas estruturas infinitas, já que a maioria dos problemas que aparecem na matemática acontece nesse tipo de estrutura e o caso finito seria condição particular.

ii) Justificativa Técnica: Algumas das principais características lógicas e da teoria dos modelos não se aplicam em estruturas finitas. É o caso dos teoremas da completude e da compacidade.

Podemos dizer que a meta da teoria dos modelos finitos é desenvolver ferramentas e conceitos possíveis de serem tratados em estruturas finitas. Uma das teses centrais que permeia os trabalhos dos pesquisadores dessa nova área é a de se estender a lógica clássica com quantificadores fundamentados em estruturas finitas.

De acordo com Fagin, esse atual interesse é decorrente da forte conexão e aplicabilidade das estruturas finitas em computação. Podemos dizer, em outras palavras, que a teoria dos modelos finitos analisa a complexidade dos algoritmos e denominamos *Complexidade Descritiva* à técnica utilizada para estudar tais algoritmos.

Segundo Badia (2001), na Teoria da Computação podemos encontrar dois tipos de complexidade: Complexidade Computacional e a Complexidade Descritiva.

A *Complexidade Descritiva* tem como objetivo classificar problemas através da análise da quantidade de linguagens lógicas que serão necessárias para descrever tais problemas.

Já a *Complexidade Computacional* é oriunda da Matemática Computacional e tem como objetivo analisar a eficiência dos algoritmos. Um algoritmo é eficiente se, e somente se, a sua implementação é rápida e exige pouca memória para a sua aplicação. Utilizamos a função de tempo teórico (ou polinômio do tempo - PTIME) para quantificar essa eficácia.

Como é realizado esse cálculo? É feito por meio de uma associação entre as operações básicas dos algoritmos com uma unidade de tempo. O programa é considerado rápido quando a dependência do tempo e entrada de dados no procedimento são polinomiais. Quando a dependência é exponencial, o programa é considerado lento e pouco viável. Podemos destacar aqui os autômatos, os quais são classificados de acordo com a complexidade computacional das suas operações de performance.

Autômatos são máquinas de estados finitos cuja função é aceitar ou rejeitar palavras. Formalmente, um autômato é representado por um quíntupla $\langle Q, \Sigma, \delta, S_0, F\rangle$, em que:

- Q representa um conjunto finito de estados;
- Σ denota um conjunto finito de símbolos, ao qual denominados *alfabeto* da linguagem que o autômato aceita;
- δ é uma função de transição (neste caso, transição indica uma mudança de estado);
- S_0 exprime o estado inicial do autômato, ou seja, estado no qual o autômato se encontra quando não foi processada nenhuma entrada;
- F é o conjunto de estados de Q, denominados de *estados de aceitação*.

Segundo Westerståhl (2005), um autômato finito é uma máquina com um número finito de estados, incluindo um estado inicial e no mínimo um estado aceitável, a qual funciona da seguinte maneira: a máquina inicia o processo escaneando, em um estado inicial S_0, a primeira letra no extremo à esquerda da palavra que está para ser analisada. A cada passo subseqüente, a máquina move um símbolo à direita e entra, possivelmente, em um novo estado, de acordo com a função de transição (δ) utilizada no processo. Quando é possível o movimento da máquina ao longo da palavra, em estado aceitável, então a palavra é *aceita*. Uma máquina *aceita* um conjunto W de palavras se ela *aceita* todas as palavras de W.

No entanto, qual a relação existente entre autômatos e quantificadores generalizados? Já expomos que os quantificadores generalizados, tais como o de Lindström, por exemplo, podem ser vistos como uma relações binárias entre os números naturais, por intermédio da cardinalidade dos conjuntos. Por exemplo:

$$Q_{\text{MAIORIA}}(A) \Leftrightarrow T(|M - A|, |A|)$$

De acordo com Westerståhl (2005), essa relação binária dos quantificadores generalizados, principalmente dos tipos $\langle 1, 1\rangle$, pode ser codificada como um conjunto de palavras, ou seja, consideramos uma palavra binária qualquer $w_1, \ldots, w_m$, corresponder a um modelo (M, A), em que $|M| = m$, $A \subseteq M$, e "1" significa "pertence a A" e "0" representa "não pertence a A". Assim, $|A|$ é o número de 1's que aparecem no modelo e Q é codificado como um conjunto W_Q de tais palavras. Caberia, então, a um autômato reconhecer se uma palavra pertence, ou não, a esse conjunto W_Q. Um conjunto de palavras é classificado como P-TIME se existe um polinômio p(x) e uma máquina que aceite W, tal que sempre que $w \in W$, a aceitação computacional toma, no máximo, n passos.

Temos, ainda, o trabalho de Chandra e Harel[16], que introduziu a *lógica dos pontos fixos* em estruturas finitas. Uma das principais características desse sistema é que todas as propriedades expressivas da lógica podem ser computáveis em P-TIME. Já, Kolaitis e Väänänen (1995), apresentaram um trabalho envolvendo os quantificadores generalizados e os pebbe games (jogos com pedras) em estruturas finitas.

Com base no exposto, observamos que quantificadores generalizados são usados em contexto computacional em algumas importantes frentes de modelos finitos, poder de expressão lingüística e jogos.

Segundo Westerståhl (2005), há muitos problemas que envolvem a aplicação e a eficiência dos quantificadores generalizados em estruturas finitas, tais como a questão de se poder, ou não, representar certas propriedades computáveis em P-TIME segundo a introdução de um número finito de quantificadores generalizados na lógica de primeira ordem. Naturalmente, esses novos quantificadores têm inúmeras contribuições a oferecer nos esperados e mais inesperados contextos.

No entanto, como o cerne do nosso trabalho está no entendimento e ampliação conceitual de um sistema lógico desenvolvido em estruturas quaisquer, finitas ou infinitas, apresentamos nesta seção apenas algumas considerações sobre possíveis aplicações dos quantificadores generalizados em estruturas finitas.

[16]CHANDRA, A; HAREL, D. (1982) *Structure and complexity of relational queries.* J. Comput: System Sci, p. 99 – 128.

2. PROCEDIMENTO DE PROVAS POR TABLÔS

Dentre as muitas questões filosóficas que permearam e que ainda trespassam o mundo acadêmico, principalmente o do grupo constituído pelos filósofos e/ou dos lógicos, destacamos a preocupação em se compreender como é que os seres humanos "fazem para processar mentalmente algumas informações e obter conclusões a partir dos elementos considerados" (Feitosa, Paulovich, 2005, p. 7), isto é, como é que raciocinamos.

Sendo assim, concomitantemente com Feitosa e Paulovich e com o dicionário Oxford de Filosofia, para nós raciocinar é qualquer processo mental utilizado para se extrair uma conclusão a partir de um conjunto de informações ou premissas. E a lógica, desde o seu surgimento com Aristóteles, tem como objetivo analisar como é que esse processo se realiza.

Denominamos, também, *inferência* ao processo mental pelo qual se deriva uma conclusão a partir de uma ou mais premissas que a antecedem, sendo que tais premissas é a explicação ou causa dessa conclusão (Chauí, 2006). Se, no entanto, ao fazermos uma inferência verificarmos que os dados (ou premissas) que estamos utilizando são confiáveis e que há uma coerência lógica no tratamento dessas informações, formulamos o que os lógicos designam por *argumentos*.

Segundo Mortari (2001, p. 9),

> [...] um argumento pode ser definido como um conjunto (não-vazio e finito) de sentenças, das quais uma é chamada de *conclusão*, as outras de *premissas*, e pretende-se que as premissas justifiquem, garantam ou dêem evidências para a conclusão (grifos do autor).

Cabe, portanto, à lógica trabalhar com os argumentos, verificando quais deles são válidos, aceitáveis ou inválidos. Um argumento é considerado válido se, em qualquer circunstância, premissas verdadeiras acarretam uma conclusão também verdadeira. Em outras palavras, "[...] um argumento é valido quando as suas premissas estão de tal forma relacionadas com a conclusão, que se as premissas são verdadeiras, então necessariamente a conclusão é verdadeira" (Feitosa, Paulovich, 2005, p. 8).

Há três modalidades de processos inferenciais bastante conhecidas e discutidas e, consequentemente, três tipos de argumentos: a dedução, a indução e a abdução. A dedução é uma forma de inferência que se caracteriza por fornecer uma conclusão necessariamente verdadeira a partir de premissas também verdadeiras. Diferentemente da dedução, na indução a verdade das premissas embora não acarretem a verdade da conclusão, constituem boa razão para supormos a verdade da conclusão. Podemos, assim, dizer que a conclusão de uma inferência indutiva é *provavelmente* verdadeira quando as premissas que a compõe são verdadeiras.

A abdução é um tipo de inferência realizada quando o ser humano se depara com um fato surpreendente ou com uma anomalia. Diante de tal situação, inicialmente a mente humana sai em busca de hipóteses ou conjecturas que proporcionem uma melhor solução para esse fato surpreendente ou esta anomalia. Após o término desse levantamento, as hipóteses são testadas e selecionadas com o propósito de proporcionar uma conclusão ou uma solução a partir dessas hipóteses.

De acordo com Santaella (1999, p. 23), "quando nós somos confrontados com algo que nos surpreende, a abdução é o processo por meio do qual uma hipótese ou conjectura aparece como uma possível resposta para esse fato surpreendente"[17]. Diante disso, podemos caracterizar o raciocínio abdutivo por:

- Percepção de um fato surpreendente ou uma anomalia;
- Formulação de hipóteses que possibilitem uma solução;
- Teste das hipóteses e seleção das mais coerentes;
- Conclusão, a partir das hipóteses selecionadas.

Conforme Grácio (1999, p. 10), muitos "esforços têm sido devotados para criar sistemas formais e gerar programas que simulem ambas as espécies de raciocínio (dedutivo e indutivo, *observação nossa*), ou seja, que representem ambas as formas de gerar o raciocínio humano". Para os raciocínios do tipo dedutivo temos, por exemplo, o cálculo quantificacional clássico, que se caracteriza por deduzir conclusões verdadeiras e objetivas a partir de um conjunto de informações também verdadeiras. Já os indutivos tendem a ser formalizados por meio de lógicas indutivas ou, como uma outra alternativa, por intermédio da inclusão de novos quantificadores generalizados na sintaxe da lógica clássica. Já o raciocínio abdutivo, por sua vez, tornou-se a base de elementos de reflexão desenvolvidos por Charles Sanders Pierce, conhecidos por lógica da descoberta.

Vimos que um dos objetivos da lógica é a determinação da validade, ou não, de argumentos ou inferências, ou seja, "procura-se determinar em que condições uma certa proposição (ou sentença) é conseqüência lógica de um conjunto dado de propo-

---

[17] Tradução de: "When we are confronted with something that surprises us, abduction is the process through which a hypothesis or conjecture appears as a possible answer to that surprising fact".

sições (ou sentenças) (Mortari, 2001, p. 120). Para isso, precisamos de um sistema de provas ou procedimento de decisão que realize essa verificação de modo eficiente, claro, sistemático, mecânico, com finitos passos (para que possa ser executado por uma máquina), realizável em um tempo plausível, correto e completo.

Existe uma quantidade razoável de apresentações de sistemas de provas para o cálculo proposicional clássico (CPC) e para o cálculo quantificacional clássico (CQC). Neste capítulo apresentamos sucintamente alguns métodos que, assim como Neto (2004) e Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006), consideramos mais relevantes. O método por tablôs será extensamente abordado devido a sua relevância para este trabalho.

2.1 Sistemas de provas ou procedimentos de decisão

Os métodos de provas mais comumente usados pelos lógicos, devido às suas eficiência e executabilidade, são os seguintes: método axiomático ou sistema Hilbertiano, sistemas de dedução natural, cálculos de seqüentes e método dos tablôs.

2.1.1 Método axiomático ou Hilbertiano

A principal característica desse método é que ele trabalha com axiomas e regras de inferências (ou deduções). Em um sistema axiomático, uma demonstração se inicia a partir de um conjunto de *axiomas* (proposições, sentenças ou fórmulas aceitas sem demonstração) e continua por um mecanismo de síntese, gerando os teoremas por meio da aplicação de uma ou mais regras de inferências que compõem o sistema. Este método teve origem com Euclides, quando o autor axiomatizou a Geometria em sua obra “Elementos”.

De acordo com Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006, p. 50),

> [...] a idéia do método axiomático é definir demonstrações de fórmulas a partir de um conjunto dado de premissas. Estas demonstrações são seqüências finitas de fórmulas, cada uma delas sendo justificada pelas regras dos sistema, terminando a seqüência com a fórmula que desejamos demonstrar (caso tenhamos sucesso).

Com o advento da linguagem artificial, o sistema axiomático lógico passou a ser representado por sistemas formais. Isso ocorreu porque toda a lógica, pós Frege, passou a ser apresentada por estruturas formais simbólicas, ao passo que na axiomática euclidiana, os axiomas e as proposições que compunham o sistema eram literalmente escritos.

Os sistemas axiomáticos propostos para o CPC e para o CQC apresentam uma característica bastante interessante, a saber: cada autor pode escolher um conjunto de axiomas da sua preferência para compor o seu aparato lógico, desde que as propriedades e as características do mesmo sejam mantidas e conservadas; que essas apresentações sejam equivalentes entre si e, por fim, que esses axiomas não gerem inconsistência no sistema.

Por exemplo, Feitosa e Paulovich (2006), Sundholm (1983) e, principalmente Mendelson (1987) escolheram o seguinte conjunto de axiomas e regras para compor os seus procedimentos de prova para o CPC:

Ax_1: $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$

Ax_2: $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$

Ax_3: $((\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi))$

Regra: *Modus ponens*: $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

Já, Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006) e Shoenfield (1967) optaram por compor seus sistemas axiomáticos com um axioma e quatro regras de inferência:

i) Axioma: $\neg\varphi \vee \varphi$

ii) Regras:

- Expansão: $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$

- Eliminação: $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$

- Associatividade: $\varphi \vee (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \gamma$

- Corte: $\varphi \vee \psi; \neg\varphi \vee \gamma \vdash \psi \vee \gamma$.

Para maiores detalhes sobre as demonstrações das equivalências de algumas das diversas apresentações da lógica clássica, verificar Sundholm (1983).

2.1.2 Dedução natural.

Ao contrário do método axiomático, a dedução natural trabalha apenas com regras inferenciais. No entanto, ambos os métodos (axiomático e dedução natural) envolvem apenas o aparato sintático da lógica, não havendo assim, qualquer relação ou dependência com a semântica do sistema.

O sistema de dedução natural procede da seguinte maneira: a partir de um conjunto de premissas, deriva-se uma conclusão por intermédio da aplicação de determinadas regras de dedução ou inferência. Segundo Mortari (2001, p. 236), "[...] basicamente, o procedimento consiste em aplicar um conjunto de *regras de inferência* ao conjunto de premissas, gerando conclusões intermediárias as quais aplicam-se novamente as regras, até atingir-se a conclusão final desejada"(grifos do autor).

As regras de inferência são postuladas e, por isso, não devem e não podem ser demonstradas, ou seja, são regras aceitas sem questionamentos. No entanto, não podemos escolher aleatoriamente essas regras. Elas devem preservar a verdade do sistema, isto é, se aplicamos essas regras em fórmulas verdadeiras, a conclusão ou fórmula resultante também deverá ser verdadeira e, além disso, precisam ser capazes de demonstrar a validade de todas as formas de argumentos.

Na dedução natural, as regras de inferências são de dois tipos: uma de *introdução* e outra de *eliminação* para cada conectivo pertencente à estrutura sintática do sistema lógico em questão. Segundo Sundholm (1983, p. 148), temos:

Regra de Introdução: como o próprio nome diz, essa regra indica como um operador qualquer, por exemplo "$\wedge$", será inserido na dedução.

Regra de Eliminação: ao contrário da introdução, a regra de eliminação indica como eliminar um operador lógico.

As seguintes regras constituem um sistema de dedução natural para o CPC. Para três fórmulas quaisquer φ, ψ e σ, temos:

<table>
<tr><td colspan="2">Conjunção ($\wedge$)</td></tr>
<tr><td>- Introdução da conjunção (I$\wedge$)
$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$</td><td>- Eliminação da conjunção (E$\wedge$)
$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Disjunção ($\vee$)</td></tr>
<tr><td>- Introdução da disjunção (I$\vee$)
$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$</td><td>- Eliminação da disjunção (E$\vee$)
$$\frac{\varphi \vee \psi}{\sigma}$$, se de $\varphi \vdash \sigma$ ou $\psi \vdash \sigma$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condicional ($\to$)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>- Introdução do condicional (I→)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$</td><td>- Eliminação do condicional (E→)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi\\ \varphi\end{array}}{\psi}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bicondicional (↔)</td></tr>
<tr><td>- Introdução do Bicondicional (I↔)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi\\ \psi \to \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$$</td><td>- Eliminação do Bicondicional (E↔)
$$\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Negação (¬)</td></tr>
<tr><td>- Introdução da negação (I¬)
$$\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$$</td><td>- Eliminação da negação (E¬)
$$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\psi}$$</td></tr>
</table>

Temos, ainda, a regras de inferência hipotética, a qual exige o uso de *hipóteses* na sua construção; e as regras de inferências derivadas, que se caracterizam por serem provadas a partir das outras.

<table>
<tr><td colspan="2">Hipotéticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">- RAA: Redução ao absurdo
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi \land \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas</td></tr>
<tr><td>- Modus Tolens (MT)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi\\ \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}$$</td><td>- Silogismo Hipotético (SD)
$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi\\ \psi \to \sigma\end{array}}{\varphi \to \sigma}$$</td></tr>
</table>

- Contraposição (CT)	- Leis de De Morgan (DM)
$\dfrac{\varphi \to \psi}{\neg\psi \to \neg\varphi}$	$\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi}$ $\quad$ $\dfrac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}$

Com a adição das regras a seguir, constituímos a dedução natural para o CQC:

Universal (∀)
- Introdução do Universal (I∀) $\dfrac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi[c/x]}$, para uma nova constante c na dedução, que possa substituir x em φ.
- Eliminação do Universal (E∀) $\dfrac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi[c/x]}$, para qualquer constante c
Existencial (∃)
- Introdução do Existencial (I∃) $\dfrac{\varphi(c)}{\exists x\ \varphi[c/x]}$, para uma nova constante c na dedução.
- Eliminação do Existencial (E∃) $\dfrac{\exists x \varphi(x)}{\varphi(c)}$, para uma nova constante c na dedução

Segundo Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006), as regras de dedução, tais como as vimos acima, foram desenvolvidas em 1935 por Gerard Gentzen em sua obra "Untersuchunger über das Logiche schliessen".

2.1.3 Método dos seqüentes

O cálculo de seqüentes se caracteriza pela análise das subfórmulas do sistema. Assim como a dedução natural, ele também foi desenvolvido por Gentzen, mas diferentemente da dedução natural, está associado com o aspecto semântico da lógica.

De acordo com Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006, p. 97), a característica principal do método de seqüentes é a utilização de seqüentes no lugar de fórmulas.

Um *seqüente* é um par $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ de conjuntos finitos de fórmulas não simultaneamente vazios. Um seqüente $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ é denotado por $\Gamma \to \Delta$.

Uma característica essencial do cálculo de seqüentes seguinte é que as suas regras são apenas *regras de Introdução*, conforme expôs Sundholm (1983, p. 169). Os axiomas e as regras seguintes compõem um cálculo de seqüentes:

i) Axioma: $\varphi, \Gamma \to \varphi$

ii) Regras:

a) $$\frac{\Gamma \to \varphi}{\Delta, \Gamma \to \varphi}$$

b) Regras da conjunção

i) $$\frac{\Gamma \to \varphi \qquad \Gamma \to \psi}{\Gamma \to \varphi \wedge \psi}$$

ii) $$\frac{\varphi, \Gamma \to \sigma}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \sigma} \qquad \frac{\psi, \Gamma \to \sigma}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \sigma}$$

b) Regras da disjunção

i) $$\frac{\Gamma \to \varphi}{\Gamma \to \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \to \psi}{\Gamma \to \varphi \vee \psi}$$

ii) $$\frac{\varphi, \Gamma \to \sigma \qquad \psi, \Gamma \to \sigma}{\varphi \vee \psi, \Gamma \to \sigma}$$

c) Regras do condicional

i) $$\frac{\varphi, \Gamma \to \psi}{\Gamma \to \varphi \to \psi}$$

ii) $$\frac{\Gamma \to \varphi \qquad \psi, \Gamma \to \sigma}{\varphi \to \psi, \Gamma \to \sigma}$$

d) Regras para o Universal

i) $$\frac{\Gamma \rightarrow \varphi}{\Gamma \rightarrow \forall x\, \varphi[a/x]}$$ desde que "a" não ocorra em Γ[18].

ii) $$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \rightarrow \sigma}{\forall x\, \varphi, \Gamma \rightarrow \sigma}$$

e) Regras do Existencial

i) $$\frac{\Gamma \rightarrow \varphi[t/x]}{\Gamma \rightarrow \exists x\, \varphi}$$

ii) $$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \vdash \sigma}{\exists x\, \varphi, \Gamma \vdash \sigma}$$ desde que "a" não ocorra na conclusão.

De acordo com Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006, p. 98), as provas no cálculo de seqüentes são árvores invertidas, cujos nós são seqüentes, sendo que a raiz é o seqüente a ser demonstrado, os nós terminais são instanciações do axioma e os nós predecessores (exceto a raiz) são obtidos pela aplicação de alguma das regras expostas acima.

Uma das idéias mais importantes desenvolvida nos cálculos de seqüentes é o *Teorema de Eliminação do Corte,* também conhecido como *Hauptsatz*. Nesse teorema, Gentzen demonstrou que a regra do Corte pode ser eliminada do sistema, ou seja,

> [...] garante que se existe uma prova para uma dada fórmula, então existe uma outra prova chamada *normal* ou *sem cortes*, a qual tem forma e propriedades determinadas. Podemos estabelecer, a partir disso, limites para o tamanho da prova de uma fórmula dada (Silvestrini, 2005, p. 67).

A regra do corte, introduzida por Gentzen, expõe que:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \rightarrow \sigma}{\Gamma \rightarrow \sigma}$$

Apresentaremos agora um outro sistema dedutivo que, assim como o cálculo de seqüentes, também se caracteriza pela análise das subfórmulas da fórmula a ser

[18] A fórmula $\forall x\, \varphi[a/x]$ denota a substituição da variável "x" por uma constante qualquer "a", desde que "a" não ocorra em Γ.

demonstrada. Tal método é conhecido por *sistemas de tablôs* ou *árvores de refutação*.

2.1.4 Árvores de refutação ou sistema de tablôs

A concepção central desse método é a mesma utilizada quando queremos contestar uma tese ou uma demonstração matemática: a apresentação de um contra-exemplo, pois tanto na matemática, quanto em qualquer sistema lógico, quando queremos refutar uma teoria, saímos em busca de um modelo no qual a mesma não esteja fundamentada e, deste modo, seja inválida. Já ao contrário, para corroborarmos, precisamos que a sentença em questão seja válida em qualquer modelo ou estrutura do sistema. Em outras palavras, "O método dos tableax (...) é um método de prova por refutação, no qual um teorema é provado pelo insucesso na tentativa de construção sistemática de um modelo para a sua negação" (Buchsbaum; Pequeno, 1990, p. 1).

Desse modo, o sistema de tablôs é um método de provas baseado na análise e na decomposição de fórmulas, que procede da seguinte maneira: suponhamos que nos foi dada uma fórmula φ para verificarmos a sua validade no sistema lógico em que estamos trabalhando. Para essa análise, aceitamos inicialmente, como hipótese, a negação da fórmula φ, ou seja, supomos que $\neg\varphi$ é válida. Se após aplicarmos todas as regras do sistema, chegarmos a uma contradição lógica, então a fórmula $\neg\varphi$, que inicialmente supomos como válida, não pode ocorrer. Logo, a fórmula φ em questão é válida. Caso contrário, dizemos que ela é inválida.

De acordo com Silvestrini (2005, p. 68), o sistema de tablôs[19] "[...] constitui-se num sistema de prova automática de teoremas, caracterizando-se como um algoritmo. Por isso, é um método de decisão para as fórmulas válidas de uma dada lógica [...]", ou seja, ele nos permite verificar se uma determinada fórmula é teorema ou não do sistema lógico no qual estamos trabalhando.

O tablô é um método oriundo dos sistemas de provas desenvolvidos por Gentzen que, apesar de ter sido concebido por Evert Beth (1959) em *The foundations of mathematics*, foi aperfeiçoado e difundido por Hintikka e Smullyan, tal qual o vere-

[19] É mais comum encontrarmos a nomenclatura original francesa *tableaux* e *tableau* para representar as expressões do Português tablôs e tablô, respectivamente. Neste trabalho, adotamos as palavras em português, assim como Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006).

mos mais adiante.

Antes de apresentarmos o método em si, exporemos algumas definições que são fundamentais para uma melhor compreensão da teoria, as quais foram extraídas de Smullyan (1994), republicação da obra *First-Order Logic* de 1968, Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006) e de Silvestrini (2005).

A primeira definição essencial para o sistema de tablôs é a de *árvores*, uma vez que um tablô pode ser enunciado como uma árvore de nós ou pontos. Um *nó* ou *ponto*, segundo Silvestrini (2005), representa cada fórmula ou subfórmula que ocorre na árvore. A utilização do termo "árvores" faz referência às árvores genealógicas, já que o método de tablôs apresenta-se em uma estrutura semelhante às das árvores genealógicas.

Podemos distinguir dois tipos de nós ou pontos sucessores: os imediatos, que são aqueles que vêm imediatamente após algum ponto e aqueles que, em algum momento, sucedem um determinado ponto. Os primeiros são denominados *sucessores imediatos* e os segundos apenas *pontos sucessores*. As noções de sucessor imediato e sucessor são, portanto, sempre relativas a algum ponto.

O *nível* de um nó ou ponto em uma árvore é dado por uma função n, a qual associa a cada nó "x" da árvore um número inteiro positivo, isto é:

$$n\colon \mathrm{x} \in \mathrm{A} \to \mathbb{N}$$

$$\mathrm{x} \text{ é a raiz} \to n(\mathrm{x}) = 1;$$

$$\mathrm{xRx_1} \to n(\mathrm{x_1}) = n(\mathrm{x}) + 1.$$

Consideremos um conjunto não-vazio A, constituído por elementos denominados *nós* e uma relação R ($R \subseteq$ A x A), cuja característica é apresentar a relação antecessor – sucessor entre os elementos de A, ou seja, xRy representa a idéia de que o nó x é antecessor ou predecessor de y, ou então, que o nó y é o sucessor de x.

Uma *árvore* é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle \mathrm{A}, R\rangle$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. existe um único nó, denominado *raiz* ou *origem* e denotado por r, que não possui elementos antecessores, ou seja: $\neg\exists\, \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \mathrm{x}Rr$;
2. Todo nó, distinto da raiz, possui um único antecessor, isto é, se $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{y} \neq r$, então $\exists!\, \mathrm{z} \in \mathrm{A}$, tal que $\mathrm{z}Ry$.
3. A relação R não possui ciclos, isto é, $\neg\exists\, \mathrm{x_1}, \ldots, \mathrm{x_n} \in \mathrm{A}$, tais que: $\mathrm{x_1}R\mathrm{x_2}R \ldots R\mathrm{x_1}$.
4. Se y é um *ponto sucessor imediato* de x, xRy, então o nível (n) de y é o de x acrescido de uma unidade.

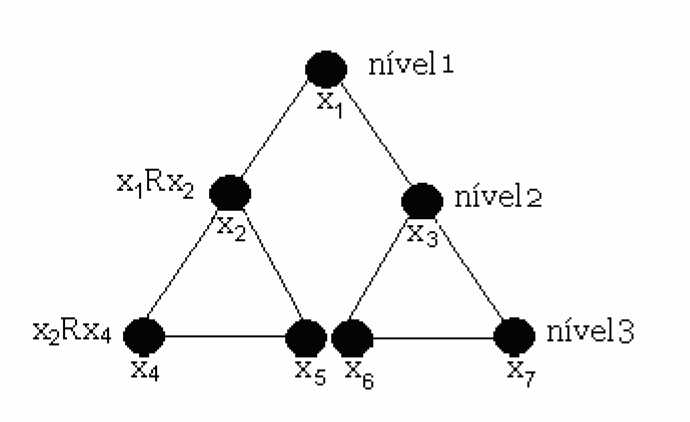
$$n\ (y) = n\ (x) + 1.$$

Um ponto ou nó é classificado como *ponto final* ou *nó terminal* se ele não possui qualquer tipo de sucessor. No entanto, se ele detiver um único sucessor imediato, o intitulamos de *ponto simples* e se ele apresentar mais de um sucessor imediato, então o chamamos de *ponto junção*.

Um *caminho* ou *ramo*, segundo Smullyan (1994), é uma seqüência finita ou infinitamente enumerável de pontos, começando com uma origem, sendo que cada termo da seqüência, exceto o último, é o predecessor do próximo. O último ponto dessa seqüência é um ponto final, ou seja, um ponto sem sucessores. Um ramo é dito *finito* quando o conjunto de pontos que o constitui é finito. Caso contrário, ele é *infinito*.

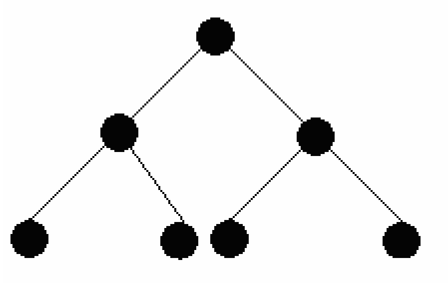
Uma árvore é *finitamente gerada* quando cada ponto que a constitui possui apenas finitos sucessores. Diante disso, uma árvore $\mathfrak{I}$ é *finita* quando $\mathfrak{I}$ tem, finitamente, muitos pontos. Caso contrário, ela é *infinita*.

Exemplificando as definições acima, apresentamos uma árvore finitamente gerada, composta por sete *nós* ou pontos, sendo estes distribuídos em três níveis diferentes.



Analisando essa árvore minuciosamente podemos inferir que ela é composta pelos pontos (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7); pelos 3 níveis, n_1, n_2 e n_3; que há as relações seguintes entre os nós das árvores: x_1Rx_2, x_1Rx_4, x_2Rx_4, x_1Rx_5, x_2Rx_5, x_1Rx_6, x_1Rx_3, x_3Rx_6, x_1Rx_7, x_3Rx_7; que os pontos x_4, x_5, x_6 e x_7 são os pontos finais; que não existe pontos simples; os pontos x_1, x_2 e x_3 são pontos do tipo junção; todos os ramos são finitos; e por fim, que os pontos (x_1, x_2, x_4), (x_1, x_2, x_5), (x_1, x_3, x_6), (x_1, x_2, x_7), constituem ramos finitos da árvore.

Temos ainda dois tipos muito comuns de árvores, as Monádicas e as Diádicas, que se caracterizam por possuírem em cada nó, respectivamente, apenas um e dois sucessores imediatos. Eis, aqui, um exemplo de uma árvore diádica.



Os conceitos de *fórmulas* e *subfórmulas* são fundamentais para o entendimento do método dos tablôs, já que esse método se evidencia por analisar as subfórmulas provenientes de uma dada fórmula inicial. Por isso, exporemos, sucintamente, tais conceitos.

Consideremos, por enquanto, a linguagem do CPC. São fórmulas do CPC:

i) todas as variáveis proposicionais;

ii) se φ é uma fórmula, então $\neg\varphi$ também é fórmula;

iii) Se φ e ψ são fórmulas, então $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ também são fórmulas.

A definição de subfórmulas depende de um conceito anterior, o de fórmula imediata (Smullyan1994, p. 8).

Fórmula imediata é dada pelas seguintes condições:

a) Variáveis proposicionais não possuem fórmulas imediatas;

b) A fórmula $\neg\varphi$ tem como fórmula imediata φ e não outras;

c) As fórmulas $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ possuem como fórmulas imediatas φ e ψ e não outras.

Subfórmula é definida, explicitamente, pelas regras:

i) Se φ' é uma fórmula imediata de φ ou φ é idêntica a φ', então φ' é subfórmula de φ.

ii) Se φ'' é uma subfórmula de φ' e φ' é uma subfórmula de φ, então φ'' é subfórmula de φ.

Para Smullyan (1995, p. 8), φ é uma subfórmula de ψ se, e somente se, existe uma seqüência finita iniciada por ψ e terminada com φ, tal que cada termo da seqüência, exceto o primeiro, é uma subfórmula imediata do termo precedente[20].

O *grau* (gr) de uma fórmula é definido pelo número de ocorrências dos conectivos lógicos que aparecem na fórmula. Assim:

1) as variáveis proposicionais p têm grau 0, uma vez que não possuem conectivos lógicos, isto é, para uma variável proposicional p, gr(p) = 0;

2) Se uma fórmula φ tem grau n, então $\neg\varphi$ tem grau n acrescido em uma unidade, isto é, $gr(\varphi) = n \Rightarrow gr(\neg\varphi) = n + 1$;

3) Se φ e ψ tem graus n_1 e n_2 então:

$$gr(\varphi \wedge \psi) = n_1 + n_2 + 1;$$

$$gr(\varphi \vee \psi) = n_1 + n_2 + 1;$$

$$gr(\varphi \rightarrow \psi) = n_1 + n_2 + 1.$$

Uma outra maneira de medir as fórmulas é por meio da função *complexidade (l)*. Essa função se caracteriza por designar, para cada fórmula do CPC, um número natural, do seguinte modo:

$$l: For(CPC) \rightarrow \mathbb{N}$$

a) Se φ é atômica, isto é, uma variável proposicional, então $l(\varphi) = 1$

b) $l(\neg\varphi) = l(\varphi) + 1$

c) $l(\varphi \wedge \psi) = l(\varphi) + l(\psi) + 1$

$l(\varphi \vee \psi) = l(\varphi) + l(\psi) + 1$

$l(\varphi \rightarrow \psi) = l(\varphi) + l(\psi) + 1$

Podemos representar as subfórmulas na forma de árvores. No topo da árvore colocamos a fórmula dada. Os nós abaixo são as subfórmulas oriundas da fórmula em questão. Não temos, nessa apresentação, qualquer aspecto valorativo das fórmulas. Assim:

[20] Tradução de: "Y is a subformula of Z iff (i.e. if and only if) there exists a finite sequence starting with Z and ending with Y such that each term of the sequence except the first is an immediate subformula of the preceding term."

$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$
φ	$\varphi \quad \psi$	$\varphi \quad \psi$	$\varphi \quad \psi$

No entanto, ao valorarmos essas fórmulas e, consequentemente, as subfórmulas, temos as regras sintáticas que dão subsídio aos tablôs do CPC.

a) Se $v(\neg\varphi) = 1$, então $v(\varphi) = 0$, ou seja, se $\neg\varphi$ é verdadeira, logo φ é falsa.

b) Se $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, ou seja, se a conjunção de duas fórmulas é verdadeira, então ambas as fórmulas são verdadeira.

c) Se $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, então $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 0$, ou seja, se a conjunção de duas fórmulas é falsa, então pelo menos uma das fórmulas é falsa.

d) Se $v(\varphi \vee \psi) = 0$, então $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, ou seja, a disjunção de duas fórmulas é falsa se ambas as fórmulas são falsas.

e) Se $v(\varphi \vee \psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, ou seja, a disjunção de duas fórmulas é verdadeira se pelo menos uma das fórmulas é verdadeira.

e) Se $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$, então $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, ou seja, a condicional é falsa se o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso.

f) Se $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, então $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$, ou seja, a condicional é verdadeira se o antecedente é falso ou o conseqüente é verdadeiro.

Nos tablôs, quando a validade de uma fórmula estiver condicionada aos valores de verdade das subfórmulas que a compõe, representamos essas subfórmulas uma embaixo da outra na árvore, ou seja, em um mesmo ramo. Por outro lado, se a validade da fórmula depender de apenas umas das subfórmulas, então as mesmas estarão em ramos distintos na árvore, isto é, a fórmula apresentará uma bifurcação (dois ramos) em sua sucessão e cada subfórmula estará em um ramo distinto.

Exemplos:

$1\ (\varphi \wedge \psi)$	$0\ (\varphi \wedge \psi)$
$1\ \varphi$	$0\ \varphi \mid 0\ \psi$
$1\ \psi$	

Se o conjunto de fórmulas e subfórmulas que formam o tablô é finito, então o tablô é *finito*. Deste modo, o tablô tem finitos passos e, como bem observam Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006), os tablôs, por serem constituídos por subfórmulas, possuem uma importante propriedade:

> [...] cada regra produz somente subfórmulas das anteriores, e considerando que o número de subfórmulas de uma fórmula proposicional é finito, obtemos que todo tablô para um conjunto finito de fórmulas em Prop [CPC, observação nossa] termina (fechado ou não) em finitos passos (Carnielli; Coniglio e Bianconi, 2006, p. 87).

Essa propriedade torna os tablôs computacionalmente possíveis e eficazes, uma vez que a computação só trabalha com estruturas finitas. Além disso, a apresentação de um sistema lógico apropriado para a discussão de aspectos computacionais deve trazer consigo características que agilizem o procedimento dedutivo, ou seja, devem contemplar algoritmos com tamanhos e tempos de processamento que sejam o menor possível. A apresentação de um sistema dedutivo em forma de tablô tem favorecido estes aspectos computacionais.

Uma outra característica importante dos tablôs, apresentada por Buchsbaum e Pequeno (1990), em *O método dos Tableaux generalizado e sua aplicação lógica ao raciocínio automático em lógicas não-clássicas*, é a capacidade de adaptação desse método a diferentes sistemas lógicos. Os próprios autores aplicaram o método na lógica paraconsistente de Da Costa (1993). Silvestrini (2005) na dissertação de mestrado "Tableaux e Indução na lógica do plausível" desenvolveu um tablô para uma particularização das lógicas moduladas: a *lógica do plausível*. Tomaremos como exemplo, também, esta dissertação de mestrado, uma vez que usaremos os tablôs como procedimento de prova para um outro tipo de lógica modulada: a *lógica do muito*.

2.1.4.1 Tablôs para o CPC

De acordo com Silvestrini (2005, p. 76), construímos um tablô T para uma fórmula qualquer φ, colocando $\neg\varphi$ como ponto inicial do tablô e expandimos os ramos por meio da aplicação de uma dessas três regras:

a) Regras do Tipo Conjuntivo: quando em um ramo ocorre uma das fórmulas do tipo α, as quais serão apresentadas logo abaixo, acrescentamos, no nesse mesmo ramo, as subfórmulas provenientes de α. Fórmulas do tipo α representam as fórmulas que não se bifurcam, ou seja, são fórmulas cujas conseqüências são diretas, sem ramificações. São elas:

i) 1 $(\varphi \wedge \psi)$

ii) 0 $(\varphi \vee \psi)$

iii) 0 $(\varphi \rightarrow \psi)$

iv) 0 φ e 0 $\neg\varphi$

Logo:

Regra α

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

b) Regras do Tipo Disjuntivo: neste tipo de regra, as fórmulas se bifurcam, ou seja, as conseqüências de uma dada fórmula do tipo β se ramificam. Assim, quando ocorrer no ramo uma fórmula do tipo β, acrescentamos duas fórmulas, β_1 e β_2, em dois novos ramos, "[...] de modo que cada uma se posicione de um lado em relação ao ponto anterior, para ocorrer bifurcação neste ramo, originando dois ramos distintos" (Silvestrini, 2005, p. 76). As regras do tipo β são as seguintes:

i') 0 $(\varphi \wedge \psi)$

ii') 1 $(\varphi \vee \psi)$

iii') 1 $(\varphi \rightarrow \psi)$

Então:

Regra β

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

c) Regras Especiais: São consideradas especiais as regras da Negação (RN) e do Bicondicional, isto é:

RN

$$\frac{0\neg\varphi}{1\ \ \varphi}$$

BICONDICIONAL

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{0 \;\; \varphi \leftrightarrow \psi} \\ 1\,\varphi & 0\,\varphi \\ 0\,\psi & 1\,\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{1 \;\; \varphi \leftrightarrow \psi} \\ 1\,\varphi & 0\,\varphi \\ 1\,\psi & 0\,\psi \end{array}$$

Em resumo, tomando uma única aplicação de uma das regras acima, um *tablô* para uma dada fórmula φ é uma árvore composta por nós (os quais são subfórmulas das fórmulas) determinados a partir da aplicação de uma dessas duas regras de inferência:

i) Se aparece, no ramo, uma fórmula do tipo α, então adicionamos α_1 e α_2 no mesmo ramo de α.

ii) Se, no entanto, ocorre uma fórmula do tipo β, então bifurcamos β, β_1 e β_2, em dois sub-ramos de φ.

iii) Se aparece uma das regras especiais, a executamos conforme explicitamos em (c)

As regras de expansão para o CPC são as seguintes:

1) Negação

i) $\dfrac{1 \;\; \neg\varphi}{0 \;\; \varphi}$

ii) $\dfrac{0 \;\; \neg\varphi}{1 \;\; \varphi}$

2) Conjunção

i) $\dfrac{1 \;\; (\varphi \wedge \psi)}{\begin{array}{c} 1 \;\; \varphi \\ 1 \;\; \psi \end{array}}$

ii) $0 \ (\varphi \wedge \psi)$

$$
\begin{array}{c|c}
0\ \varphi & 0\ \psi
\end{array}
$$

3) Disjunção

i) $1 \ (\varphi \vee \psi)$

$$
\begin{array}{c|c}
1\ \varphi & 1\ \psi
\end{array}
$$

ii) $0 \ (\varphi \vee \psi)$

$$
\frac{}{\begin{array}{c} 0\ \varphi \\ 0\ \psi \end{array}}
$$

4) Condicional

i) $1 \ (\varphi \to \psi)$

$$
\begin{array}{c|c}
0\ \varphi & 1\ \psi
\end{array}
$$

ii) $0 \ (\varphi \to \psi)$

$$
\frac{}{\begin{array}{c} 1\ \varphi \\ 0\ \psi \end{array}}
$$

5) Bicondicional

i) $1 \ (\varphi \leftrightarrow \psi)$

$$
\begin{array}{c|c}
1\ \varphi & 0\ \psi \\
1\ \psi & 0\ \varphi
\end{array}
$$

ii) $0 \ (\varphi \leftrightarrow \psi)$

$$
\begin{array}{c|c}
1\ \varphi & 0\ \varphi \\
0\ \psi & 1\ \psi
\end{array}
$$

Apresentamos a seguir as definições de ramos e tablôs fechados necessárias à determinação da validade de uma fórmula, conforme (Silvestrini, 2005, p. 78).

Um ramo de um tablô é *fechado* quando existem nesse ramo pontos que correspondem às fórmulas do tipo 1φ e 0φ.

A presença dessas fórmulas em um mesmo ramo indica que encontramos uma inconsistência ao supor válida a negação da fórmula inicial φ. Utilizamos o símbolo "X" para representar que o ramo é fechado.

Um tablô para uma dada fórmula φ é *fechado* quando todos os seus ramos são fechados; caso contrário, o tablô é *aberto*.

A partir de uma fórmula dada, utilizamos o método dos tablôs para verificarmos se ela é, ou não, válida. Iniciamos o procedimento refutando tal fórmula, ou seja, supomos que a fórmula não é válida. Em seguida, aplicamos as regras de formação até esgotarmos todas as possibilidades e examinamos cada ramo proveniente dessa aplicação. Quando o ramo atender a uma *cláusula de fechamento*, esse ramo pode ser considerado fechado, caso contrário, ele é considerado aberto.

Exemplos de tablôs para o CPC:

a) $\neg(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \vee \neg\alpha)$

i)	0	$\neg(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \vee \neg\alpha)$	(refutação da sentença)
ii)	1	$\neg(\neg\alpha \to \beta)$	(aplicação da regra do condicional em i)
iii)	0	$(\neg\beta \vee \neg\alpha)$	(aplicação da regra do condicional em i)
iv)	0	$\neg\beta$	(aplicação da regra da disjunção em iii)
v)	0	$\neg\alpha$	(aplicação da regra da disjunção em iii)
vi)	1	β	(aplicação da regra da negação em iv)
vii)	1	α	(aplicação da regra da negação em v)
viii)	0	$(\neg\alpha \to \beta)$	(aplicação da regra da negação em ii)
ix)	1	$\neg\alpha$	(aplicação da regra do condicional em viii)
x)	0	β	(aplicação da regra do condicional em ix)
		X	(contradição em vi e x, clausula de fechamento)

Portanto, como o tablô fecha, a fórmula $\neg(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \vee \neg\alpha)$ é válida no CPC.

b) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\beta \wedge \alpha) \to \gamma))$

i)	0 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\beta \wedge \alpha) \to \gamma))$			(refutação da sentença)
ii)	1 $\alpha \to (\beta \to \gamma)$			(aplicação da regra do condicional em i)
iii)	0 $(\beta \wedge \alpha) \to \gamma$			(aplicação da regra do condicional em i)
iv)	1 $\beta \wedge \alpha$			(aplicação da regra do condicional em iii)
v)	0 γ			(aplicação da regra do condicional em iii)
vi)	1 β			(aplicação da regra da conjunção em iv)
vii)	1 α			(aplicação da regra da conjunção em iv)
viii)	0 α	1 $(\beta \to \gamma)$		(aplicação da regra do condicional em ii)
ix)	X			(contradição em vii e viii)
x)		0 β	1 γ	(aplicação da regra do condicional em viii)
xi)		X	X	(contradição em vi e x; contradição em v e x)

Portanto, como o tablô fecha, a fórmula $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\beta \wedge \alpha) \to \gamma))$ é válida no CPC.

c) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$

i)	0 $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$				(refutação da sentença)
ii)	1 $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$				(regra do condicional em i)
iii)	0 $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$				(regra do condicional em i)
iv)	1 α		1 $(\beta \wedge \gamma)$		(regra da disjunção em ii)
v)	0 $(\alpha \vee \beta)$	0 $(\alpha \vee \gamma)$	0 $(\alpha \vee \beta)$	0 $(\alpha \vee \gamma)$	(regra da conjunção em iii)
vi)	0 α	0 α	0 α	0 α	(regra da disjunção em v)
vii)	0 β	0 γ	0 β	0 γ	(regra da disjunção em v)
viii)	X	X	1 β	1 γ	(contr. em iv e vii, conj. em iv)
			X	X	(contradição em vii e viii)

Portanto, como o tablô fecha, a fórmula $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ é válida no CPC.

d) $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to (\beta \to \alpha)$

i)	0	$((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to (\beta \to \alpha)$	(refutação da sentença)
ii)	1	$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha$	(regra do condicional em i)

iii)	0	$(\beta \rightarrow \alpha)$		(regra do condicional em i)
iv)	1	$(\neg\alpha \vee \beta)$		(regra da conjunção em ii)
v)	1	$\neg\alpha$		(regra da conjunção em ii)
vi)	0	α		(regra da negação em v)
vii)	1	β		(regra do condicional em iii)
viii)	0	α		(regra do condicional em iii)
ix)	1	$\neg\alpha$	1 β	(regra da disjunção em iv)
x)	0	α		(regra da negação em ix)

Como não houve contradição nesse tablô, a hipótese inicial de que a fórmula não é válida foi corroborada. Logo, $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ não é válida no CPC.

2.1.4.2 Tablôs para o CQC

A idéia sobre a essência dos quantificadores universal e existencial, bem como as definições de fórmulas com ocorrência de variáveis *ligadas e abertas*, já foram apresentadas no Capítulo 1.

Com as quantificações, o grau de uma fórmula é dado pela quantidade de ocorrência de conectivos e quantificadores lógicos:

$$gr(\forall x\ \varphi) = gr(\varphi) + 1$$

$$gr(\exists x\ \varphi) = gr(\varphi) + 1.$$

Uma propriedade importante aqui é a de *Substituição*. Dados uma fórmula qualquer φ, uma variável x e uma constante *a*, podemos substituir a variável x pelo parâmetro *a*. No cálculo proposicional, essa propriedade não gera qualquer restrição, mas no quantificacional precisamos analisá-la com cuidado, a fim de observamos alguns detalhes importantes.

Por exemplo, se quisermos substituir a variável x por *a* numa sentença do tipo $\forall x\ \varphi$, representada por $\forall x\ \varphi[a/x]$, não temos problemas, pois a fórmula φ é válida para todos os elementos do universo em questão, podendo esses elementos ser x, y, z, ou outros. Agora, se precisarmos substituir x por *b*, numa sentença do tipo $\exists x\varphi$, denotada por $\exists x\ \varphi[a/x]$, devemos analisar se *b* ainda não apareceu no processo, pois o quantificador existencial nos diz apenas que existe algum elemento do universo que satisfaz φ. Para que não tenhamos uma situação do tipo $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ para uma determinada propriedade que só é válida para um único elemento, então substituímos um parâmetro na sentença se, e somente se, ele é novo na demonstração. Caso contrário, a substituição não pode ser realizada.

A definição de *subfórmulas* é a mesma do CPC, acrescida da seguinte cláusula: i) Toda instanciação ou substituição das fórmulas do tipo $[\forall x\varphi]$ e $[\exists x\varphi]$ é uma subfórmula.

Agora, quais são os valores de verdade para essas fórmulas quantificadas? Devemos analisar, assim como fizemos no CPC, cada operador e ver em quais situações eles validam, ou não, uma sentença. Por exemplo, se dissermos que é verdadeira a sentença "todos os quadriláteros têm quatro lados", então não pode existir um modelo que apresente um quadrilátero com cinco lados. Essa sentença, para ser verdadeira, deve valer para todos os modelos existentes.

Com o operador existencial a analise é diferente. Uma sentença do tipo "Existem equações do segundo grau que não possuem solução no conjunto dos reais", nos diz que existe pelo menos uma equação cuja solução não é válida nos reais. Nesse tipo de situação, não precisamos validar todas as sentenças dos modelos. Basta que validemos uma.

Essas idéias são essenciais para a construção das regras dos tablôs do CQC, como veremos a seguir. Seja φ uma fórmula do CQC e c uma constante:

i) $$\frac{1\ \forall x\ \varphi(x)}{1\ \varphi[c/\ x]\text{ , para qualquer c}}$$

ii) $$\frac{0\ \forall x\ \varphi(x)}{0\ \varphi[x/c]\text{, desde que c seja novo no ramo}}$$

iii) $$\frac{1\ \exists x\ \varphi(x)}{1\ \varphi[c/x]\text{, desde que c seja novo no ramo}}$$

iv) $$\frac{0\ \exists x\ \varphi(x)}{0\ \varphi[x/c]\text{, para qualquer constante c.}}$$

A regra (i) reproduz a seguinte idéia: se uma dada propriedade φ é válida para todos os elementos do universo de discurso, então podemos substituir a variável x por qualquer elemento do universo do modelo, mesmo que ele já tenha aparecido em momentos anteriores.

A negação do universal, como apresentada na regra (ii), também nos permite substituir x por uma determinada constante, desde que a mesma seja inédita no modelo em questão. Isso decorre do fato de que, quando uma dada propriedade φ não valida todos os elementos do discurso, então existe pelo menos um caso, no modelo, em que tal propriedade não se verifica. É importante enfatizarmos que não sabemos a quantidade de elementos em que essa propriedade não é válida. Podemos, apenas, garantir que a não validade se verifica para pelo menos um objeto. Em razão disso, condicionamos que a constante seja nova no modelo.

A idéia subjacente à regra (iii) é semelhante a da regra (ii), ou seja, existe no modelo pelo menos um elemento que possui uma determinada propriedade φ. Novamente nos deparamos com a impossibilidade de garantir tal propriedade para mais de um elemento do modelo. Por isso, precisamos que a constante a ser substituída seja inédita.

Se aparecer uma fórmula do tipo 0 $(\exists x\, \varphi(x))$, como no caso da regra (iv), deduzimos que, como não é o caso que existe pelo menos um modelo que valide uma determinada propriedade φ, então podemos afirmar que para qualquer elemento do modelo, φ não é satisfeita.

As regras dos tablôs para o CPC assim como as definições inerentes ao método, tais como ramos, sub-ramos, tablôs abertos e fechados, cláusula de fechamento, etc., são conservadas e verificadas no CQC.

Exemplos:

a) $\forall x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \rightarrow \forall x\beta(x))$

i)	0	$\forall x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \rightarrow \forall x\beta(x))$	(refutação da sentença)
ii)	1	$\forall x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$	(regra do condicional em i)
iii)	0	$(\forall x\alpha(x) \rightarrow \forall x\beta(x))$	(regra do condicional em i)
iv)	1	$\forall x\alpha(x)$	(regra do condicional em iii)
v)	0	$\forall x\beta(x)$	(regra do condicional em iii)

vi) 0 $\beta(c)$ (regra do Universal em v)

vii) 1 $\alpha(c) \rightarrow \beta(c)$ (regra do Universal em ii)

viii) 0 $\alpha(c)$ | 1 $\beta(c)$ (regra do condicional em vii)

ix) 1 $\alpha(c)$ | X (regra do Universal em iv, claus. de fech. em vi e viii))

X | (cláusulas de fechamento em viii e ix).

Como o tablô fecha, a fórmula $\forall x(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \rightarrow \forall x\beta(x))$ é válida no CQC.

b) $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x))$

i) 0 $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x))$ (refutação da sentença)

ii) 1 $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$ (regra do condicional em i)

iii) 0 $\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)$ (regra do condicional em i)

iv) 0 $\forall x\alpha(x)$ (regra da disjunção em iii)

v) 0 $\forall x\beta(x)$ (regra da disjunção em iii)

vi) 0 $\alpha(c)$ (regra do universal em iv)

vii) 0 $\beta(d)$ (regra do universal em v)

viii) 1 $\alpha(c) \vee \beta(c)$ (regra do universal em ii)

ix) 1 $\alpha(d) \vee \beta(d)$ (regra do universal em ii)

x) 1 $\alpha(c)$ | 1 $\beta(c)$ (regra da disjunção em viii)

xi) X | (cláusula de fechamento em vi ex)

xii) | 1 $\alpha(d)$ | 1 $\beta(d)$ (regra da disjunção em ix)

| X (cláusula de fechamento em vii e xii)

Como não houve contradição nesse tablô, a sentença inicial de que a fórmula não é válida foi corroborada. Logo, $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x))$ não é válida no CQC.

c) $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x))$

i) 0 $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x))$ (refutação da sentença)

ii) 1 $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x))$ (regra do condicional em i)

iii) 0 $(\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x))$ (regra do condicional em i)

iv) 0 $\exists x\alpha(x)$ (regra da disjunção em iii)

v) 0 $\exists x\beta(x)$ (regra da disjunção em iii)

vi)	1	$\alpha(c) \vee \beta(c)$			(regra do existencial em ii)
vii)	1	$\alpha(c)$	1	$\beta(c)$	(regra da disjunção em vi)
viii)	0	$\alpha(c)$	0	$\beta(c)$	(regra do existencial em iv e v)
		X		X	(cláusulas de fechamento em vii e viii)

Como o tablô fecha, a fórmula $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow (\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x))$ é válida no CQC.

d) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(a)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow Q(a))$

i)	0	$\exists x(P(x) \rightarrow Q(a)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow Q(a))$			(refutação da sentença)
ii)	1	$\exists x(P(x) \rightarrow Q(a))$			(regra do condicional em i)
iii)	0	$(\exists xP(x) \rightarrow Q(a))$			(regra do condicional em i)
iv)	1	$\exists xP(x)$			(regra do condicional em iii)
v)	0	$Q(a)$			(regra do condicional em iii)
vi)	1	$P(b)$			(regra do existencial em iv)
vii)	1	$P(c) \rightarrow Q(a)$			(regra do existencial em ii)
viii)	0	$P(c)$	1	$Q(a)$	(regra do condicional em vii)
				X	(cláusula de fechamento em v e viii)

Como não houve contradição nesse tablô, a sentença inicial de que a fórmula não é válida foi corroborada. Logo, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(a)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow Q(a))$ não é válida no CQC.

Smullyan simplificou as quatro regras de expansão do CQC em apenas duas: as regras do tipo γ e δ. Uma regra do tipo γ representa aquelas regras que possibilitam substituições de variáveis sem qualquer restrição, ou seja, nessas regras podemos substituir as constantes quantas vezes forem precisas e podemos utilizar aquelas que já apareceram no sistema. Assim, todas as fórmulas citadas abaixo serão simplificadas por uma única regra, a regra γ.

a) $$\frac{1\ \forall x\ \varphi(x)}{1\ \varphi[c/x],\ \text{para qualquer } c}$$

b) $$\frac{0\ \exists x\ \varphi(x)}{0\ \varphi[c/x],\ \text{para qualquer constante } c}$$

Então:

Regra γ

$$\frac{\varphi}{\varphi(c)\text{, na qual “c” é uma constante qualquer.}}$$

Já δ simplifica as regras que condicionam a substituição das constantes, tais como:

a) $$\frac{0\ \forall x\ \varphi(x)}{0\ \varphi[c/x]\text{, desde que c seja novo no ramo}}$$

b) $$\frac{1\ \exists x\ \varphi(x)}{1\ \varphi[c/x]\text{, desde que c seja novo no ramo}}$$

Logo:

Regra δ

$$\frac{\varphi}{\varphi(c)\text{, na qual “c” é uma constante nova no ramo}}$$

A meta central desta dissertação é construir um sistema de tablôs para a *lógica do muito*. Todas as definições e propriedades válidas no CPC e CQC, que vimos nesse capítulo, serão válidas no sistema da lógica do muito, haja vista que essa lógica é uma extensão da lógica de primeira ordem. Desse modo, antes de propormos esse novo sistema de tablôs, apresentamos a versão axiomática da lógica do muito, particularização das lógicas moduladas, para a qual desenvolveremos o sistema de tablôs.

3. A LÓGICA DO MUITO

A lógica do muito foi introduzida por Grácio, em 1999, em sua tese de doutorado intitulada "*Lógicas moduladas e o raciocínio sob incerteza*". Trata-se de um tipo de lógica modulada e, portanto, caracteriza-se por apresentar em seu ambiente sintático um novo quantificador generalizado, além dos usuais quantificadores de primeira ordem, $\forall$ e $\exists$.

Grácio (1999), ao desenvolver a lógica do muito, estava preocupada em formalizar sentenças que representassem a noção intuitiva de "muitos indivíduos". Para tanto, ela inseriu um novo quantificador generalizado G na sintaxe da lógica de primeira ordem, com o seguinte significado: $Gx\ \varphi(x) \equiv$ "*muitos* x satisfazem $\varphi(x)$".

É bastante comum atrelarmos à noção intuitiva de "muitos" à idéia de cardinalidade de um conjunto, ou seja, da quantidade de elementos que satisfazem uma determinada sentença φ. No entanto, a concepção de "muitos" para Grácio (1999) está desvinculada da cardinalidade, mas sim associada somente à noção de um conjunto grande de evidências. Há uma estrutura matemática, nomeada pela autora de Família Fechada Superiormente Própria, que define e justifica a relação intrínseca entre a noção intuitiva de muitos com a de um conjunto grande de evidências.

Há três propriedades essenciais na noção de "muitos" que capturam a concepção subjacente a esse conceito e que constituem, como veremos daqui a pouco, a base da definição de famílias fechadas superiormente próprias. São elas:

> (i) se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ e φ está contida em ψ, então ψ também é satisfeita por muitos indivíduos do universo;
> (ii) se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ, então existe alguém que satisfaz φ;
> (iii) o conjunto universo contém muitos indivíduos (Grácio, Feitosa, 2005, p. 36).

3.1 Família fechada superiormente

A definição formal de uma *família fechada superiormente própria* está atrelada à significação de uma família fechada superiormente. Segundo Grácio (1999), uma família fechada superiormente F em um conjunto A é uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as condições seguintes, quando A' e A'' são subconjuntos de A:

i) se A' $\in$ *F* e A' $\subseteq$ A'', então A'' $\in$ *F*

ii) A $\in$ F.

Exporemos algumas proposições e definições referentes às famílias fechadas superiormente que nos serão importantes para a continuidade do trabalho. Dentre elas, destacamos a definição de famílias fechadas superiormente próprias. Todas as informações apresentadas nesta subseção foram extraídas de (Grácio, 1999, p. 107 – 108).

Proposição 3.1.1 O conjunto das partes de um dado conjunto A, indicado por $\mathcal{P}$(A), constitui-se numa família fechada superiormente sobre A.

Definição 3.1.2 Uma família fechada superiormente *F* é *imprópria* quando *F* = $\mathcal{P}$(A). Todas as outras famílias fechadas superiormente sobre A são *próprias*.

Quando o conjunto vazio não pertence à família fechada superiormente *F* em A, então temos uma família própria. Sendo assim, dizemos que *F* é uma *família fechada superiormente própria* em um conjunto A se, e somente se, A é uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

i) se A' $\in$ *F* e A' $\subseteq$ A'', então A'' $\in$ *F*

ii) A $\in$ *F*

iii) $\emptyset \notin$ *F*

Proposição 3.1.3 Consideremos um conjunto U com cardinalidade maior ou igual a 2, ou seja, $|U| \geq 2$. O conjunto Q = $\mathcal{P}$(U) – {$\emptyset$} é uma família fechada superiormente própria em U, mas não é um filtro[21], pois podemos ter intersecções vazias entre subconjuntos de U que não pertencem à Q.

Teorema 3.1.4 Se B é uma coleção de subconjuntos de A tal que $\emptyset \notin$ B, então B pode ser estendido a uma *família fechada superiormente própria*.

---

[21] Segundo Sette, Carnielli e Veloso (1999), um filtro sobre um universo U é uma coleção F $\subseteq$ $\mathcal{P}$(U) dos subconjuntos de U, tal que:

i) F é fechado para a intersecção, ou seja, se X, Y $\in$ F, então X $\cap$ Y $\in$ F;

ii) F é fechado para superconjuntos, isto é, se X $\in$ F e X $\subseteq$ Y, então Y $\in$ F.

A seguir, exemplificaremos algumas famílias fechadas superiormente próprias, em virtude do vínculo existente entre essa definição e a noção intuitiva de “muitos”.

1) Consideremos o conjunto A = {a, b, c, d} e a seguinte família *F* = {A, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}}. Essa família é fechada superiormente própria em A, ou seja, cada membro de *F* possui muitos elementos?

Essa família *F* é fechada superiormente própria em A, pois satisfaz as três condições necessárias para isso.

F = {A, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}}

a) $A \in F$

b) $\varnothing \notin F$.

c) Se $A' \in F$ e $A' \subseteq A''$, então $A'' \in F$.

A família *F* possui esses quatro subconjuntos para analisarmos: A, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}.

O conjunto {a, b} está contido em {a, b, c}, {a, b, d} ou {a, b, c, d}. Todos os três conjuntos que contém {a, b} pertencem à família *F*. Notemos que, em qualquer subconjunto de *F*, não ocorre o caso em que X está em *F*, $X \subseteq Y$, mas Y não está em *F*. Diante disso, concluímos que, de fato, *F* é uma família própria fechada superiormente em A.

2) Dado o conjunto A = {a, b, c, d}, a família *F* = {A, {a, b}} é fechada superiormente?

A resposta é não, pois se considerarmos o conjunto {a, b, c} que contém {a, b}, verificamos que o mesmo não pertence à família *F*. Logo, *F* não é uma família própria fechada superiormente em A.

3) Consideremos no universo U = {brasileiras}, as seguintes propriedades: “gostar de sapatos” e “gostar de bolsas” e que “todas as brasileiras que gostam de sapatos, também gostam de bolsas”. Se “muitas brasileiras gostam de sapatos” está numa família fechada superiormente própria, então podemos inferir que “muitas brasileiras gostam de bolsas” também está.

3.2 A sintaxe da lógica do muito

Indicamos a lógica do muito por $\mathscr{L}(G)$.

A linguagem desta lógica é determinada por todos os operadores da lógica clássica de primeira ordem com a igualdade ($CQC_=$), acrescida do quantificador G, que representa a noção quantificacional de “muitos”. Assim, a linguagem de $\mathcal{L}(G)$ consta dos símbolos: ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, G).

A definição de fórmula é a mesma do CQC, acrescida da seguinte cláusula: para uma variável x, se φ é uma fórmula em $\mathcal{L}(G)$, então $Gx\ \varphi(x)$ também o é.

As definições de variáveis livres e ligadas, bem como a propriedade de substituição das variáveis livres, são as mesmas da lógica clássica. A única diferença, com relação à definição de variável ligada, é que além dos quantificadores usuais $\forall$ e $\exists$, teremos o quantificador generalizado G, isto é, “toda ocorrência de x em $Gx\ \alpha(x)$ é ligada” (Grácio, 1999, p. 110).

A lógica do muito, por ser uma lógica complementar à clássica, possui em seu sistema axiomático todos os axiomas clássicos mais os cincos axiomas abaixo referentes ao quantificador G:

(Ax_0) Axiomas da lógica de primeira ordem clássica com a igualdade.

(Ax_1) $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Gx\ \varphi(x) \rightarrow Gx\ \psi(x))$

(Ax_2) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Gx\ \varphi(x)$

(Ax_3) $Gx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$

(Ax_4) $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Gx\ \varphi(x) \leftrightarrow Gx\ \psi(x))$

(Ax_5) $Gx\ \varphi(x) \rightarrow Gy\ \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$.

Desse modo, considerando φ e ψ sentenças de $\mathcal{L}(G)$ e representando por $[\varphi]$ e $[\psi]$ os conjuntos de indivíduos que, respectivamente, satisfazem φ e ψ, os axiomas denotam intuitivamente que:

(Ax_1) Se $[\varphi] \subseteq [\psi]$ e $[\varphi]$ tem muitos elementos, então $[\psi]$ também possui muitos elementos;

(Ax_2) Se $[\varphi]$ é satisfeito por todos os indivíduos de um determinado universo, então podemos afirmar que são muitos os indivíduos que satisfazem $[\varphi]$;

(Ax_3) Se são muitos os indivíduos de $[\varphi]$, então existe pelo menos um indivíduo que satisfaz $[\varphi]$, ou seja, $[\varphi]$ não é vazio;

(Ax_4) Se dois conjuntos são iguais e o conjunto de elementos que satisfazem um deles

é grande (possui muitos elementos), então podemos afirmar que o outro conjunto em questão também é um conjunto grande de evidências (muitos elementos);
(Ax_5) Se são muitos os indivíduos x em [φ], e y é uma variável livre e distinta de x, então podemos substituir x por y, ou seja, são muitos os indivíduos y em [φ].

As regras que compões $\mathcal{L}(G)$ são:

i) *Modus Ponens*: $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

ii) Generalização: $\varphi \vdash (\forall x)\, \varphi$.

Grácio apresenta alguns teoremas da $\mathcal{L}(G)$. São eles:

(1) $G x\, (\varphi(x) \lor \neg\varphi(x))$;

(2) $G x\, \varphi(x) \land G x\, \psi(x) \to G x\, (\varphi(x) \lor \psi(x))$;

(3) $\neg G x\, (\varphi(x) \land \neg\varphi(x))$;

(4) $G x\, \varphi(x) \lor G x\, \psi(x) \to G x\, (\varphi(x) \lor \psi(x))$;

3.3 A semântica da lógica do muito

A estrutura semântica da lógica do muito, $\mathcal{L}(G)$, é composta por uma estrutura clássica de primeira ordem $\mathcal{A}$, complementada por uma família própria fechada superiormente ($\mathcal{F}^A$) sobre o universo A. Indicamos essa nova estrutura por $\mathcal{A}^{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}^A \rangle$, em que $\mathcal{A}^{\mathcal{F}} = (A, \{R^A{}_i\}_{i\in I}, \{f^A{}_j\}_{j\in J}, \{c^A{}_k\}_{k\in K}, \mathcal{F}^A)$[22].

Em uma estrutura do tipo $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$, a satisfação das fórmulas da lógica do muito é definida da seguinte maneira: considere a definição usual do CQC e acrescente a cláusula: "seja φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres está contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e considere uma seqüência $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)$ em A. Então: $\mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash G x\, \varphi[x, \underline{a}]$ see $\{b \in A \,/\, \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash \varphi[b; \underline{a}]\} \in \mathcal{F}^A$" (Grácio, 1999, p. 116). Como $A \neq \varnothing$, quando x não ocorre livre em φ, $\mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash G x\, \varphi[\underline{a}]$ see $\mathcal{A} \vDash \varphi[\underline{a}]$.

Intuitivamente, temos:

---

[22] $R_i{}^{\mathcal{A}}$ representa uma relação $T_{(i)}$-ária definida em A para $i \in I$; $f_j{}^{\mathcal{A}}$ é uma função j-ária de A^n em A, supondo-se $T_1(j) = n$, para $j \in J$; e c_k é uma constante de A, para $k \in K$.

(Gx) $\varphi(x)$ é verdadeira, isto é, $[\varphi]$ é membro de $\mathcal{F}^A$ see muitos indivíduos de A satisfazem φ (em outras palavras, se $[\varphi]$ contém muitos indivíduos). Assim, $\mathcal{F}^A$ é uma coleção de conjuntos que contêm muitos elementos"(Feitosa, Grácio, 2005, p. 37).

Algumas definições tais como sentenças, teoremas, consistência, etc., não foram expostas devido à analogia com a lógica de primeira ordem. Por fim, Grácio (1999) demonstra, em sua tese, que a lógica do muito é correta e completa, segundo o sistema dedutivo e modelos introduzidos neste capítulo.

A seguir, desenvolveremos um sistema dedutivo por tablôs para o sistema lógico modulado do "muito".

4. UM SISTEMA DE TABLÔS PARA A LÓGICA DO MUITO

Grácio (1999), quando do desenvolvimento da lógica do muito, apresentou esta nova lógica em um sistema dedutivo do tipo hilbertiano: estruturada por axiomas e regras de dedução. Neste capítulo, apresentamos essa mesma lógica em um sistema de tablôs, denotado por Tabl[$\mathcal{L}(G)$], e demonstramos a equivalência entre esse novo sistema (em tablôs) e o sistema hilbertiano utilizado inicialmente.

Como a lógica do muito é não-clássica, por extender a lógica clássica de primeira ordem, todas as propriedades e definições válidas na lógica clássica também o são na lógica do muito. Por isso, não apresentamos novamente as definições de árvores, ramos e tablôs, já que são as mesmas expostas para o CPC e CQC, no Capítulo 2. No entanto, há alguns aspectos que diferem no sistema de tablôs para a lógica do muito, tais como *a cláusula de fechamento* e *as regras referentes ao quantificador modulado* G. Nesses casos, introduzimos os elementos teóricos adequados ao sistema lógico em questão.

4.1 As regras de Tabl[$\mathcal{L}(G)$]

Para Tabl[$\mathcal{L}(G)$] são válidas todas as regras estabelecidas para os tablôs do CPC e CQC, mais aquelas próprias do sistema modulado para G. A fundamentação teórica subjacente às novas regras de expansão para o quantificador G está no conceito de família fechada superiormente própria e na noção intuitiva do quantificador ‘muito’. Assim, considerando um universo qualquer A, as regras de Tabl[$\mathcal{L}(G)$] são as seguintes:

Regra G_1:

$$\frac{1 \quad Gx\varphi(x)}{1 \;\; \varphi(a)}$$

em que “a” é uma constante nova no ramo.

Intuitivamente, essa regra nos diz que: se muitos indivíduos satisfazem uma propriedade qualquer φ(x), então existe pelo menos um elemento pertencente ao conjunto A para o qual a propriedade φ(x) é satisfeita.

Exemplo:
a) Consideremos o conjunto A de todos os brasileiros. Assim, se φ(x) representa a propriedade que "muitos brasileiros apreciam um bom café", então existe pelo menos um brasileiro, que é apreciador de bom café.

Regra G_2:

$$\frac{0 \quad G x\varphi(x)}{0 \quad \varphi(a)}$$ em que "a" é uma constante nova no ramo.

Intuitivamente, temos que: se o conjunto de evidências que satisfazem uma propriedade não tem muitos indivíduos, então existe pelo menos um elemento do universo de discurso que não apresenta tal característica.

Exemplo:
a) Consideremos o conjunto A de todos os brasileiros. Assim, se φ(x) representa a propriedade que diz "não são muitos os brasileiros que torcem pelo futebol argentino", então existe pelo menos um brasileiro, que não torce para o futebol argentino.

Regra G_3:

$$\frac{0 \quad Gx(\varphi(x) \vee \psi(x))}{\begin{array}{l} 0 \quad Gx\varphi(x) \\ 0 \quad Gx\psi(x) \end{array}}$$

Essa regra nos diz que se a união de dois conjuntos não possui muitos elementos, então ambos os conjuntos que determinam a união também não contém muitos elementos, pois se qualquer um deles gozar da propriedade 'ter muitos elementos', então a união, pela definição de família fechada superiormente, também terá muitos elementos.

Exemplo:

a) Consideremos a seguinte sentença falsa – 0: "muitos brasileiros são ricos ou possuem dupla cidadania". Essa sentença só é falsa quando realmente são falsas as proposições que afirmam que "muitos brasileiros são ricos" e "muitos brasileiros possuem dupla cidadania".

Regra G_4:

$$\frac{1 \quad \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))}{\begin{array}{ll} 1 & \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \\ 1 & \forall x(\psi(x) \to \varphi(x)) \end{array}}$$

Essa regra é uma fórmula válida do CQC. Como nosso sistema precisa satisfazer todos os teoremas da lógica do muito, necessitamos dela para alcançar tal objetivo. Devido ao fato de essa fórmula, válida classicamente, não integrar as regras dos tablôs clássicos do CQC, foi preciso inseri-la no nosso sistema para torná-lo computacionalmente mais rápido e efetivo. Se não, quando aparecesse uma fórmula desse tipo em uma demonstração, ela seria imediatamente instanciada e não subdividida em duas subfórmulas conforme estamos propondo.

Regra G_5:

$$\frac{1 \quad \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))}{0 \quad Gx\varphi(x) \quad \Big| \quad 1 \quad Gx\psi(x)}$$

Essa regra deve ser analisada com mais detalhes. Observemos o seguinte: se para todos os elementos de um dado universo, o conjunto $\varphi(x)$ está contido em $\psi(x)$, então podemos afirmar que:

- 1 $Gx\varphi(x)$

  ou

- 0 $Gx\varphi(x)$.

No primeiro caso, se muitos elementos satisfazem o conjunto $\varphi(x)$, pela definição de família fechada superiormente, muitos elementos devem satisfazer $\psi(x)$, já que $\varphi(x)$ está contido em $\psi(x)$.

Agora, se é falso que muitos elementos atendem o conjunto $\varphi(x)$, não podemos afirmar nada, efetivamente, a respeito do conjunto $\psi(x)$. Isto é, a definição de família fechada superiormente só é válida quando o conjunto que está contido é fechado superiormente. Agora, nesse caso, 0 $\mathcal{G}x\varphi(x)$, o conjunto $\psi(x)$ pode ter muitos elementos ou não.

Exemplos:

a) Consideremos o conjunto φ: "conjunto dos mamíferos" e ψ: "conjunto dos animais". Sabemos que o conjunto dos mamíferos está contido no conjunto dos animais. Na bibliografia sobre ciências ou biologia, vemos que o conjunto de animais mamíferos é considerado grande (possui muitos indivíduos), ou seja, em nossa linguagem lógico-matemática, esse conjunto pertence à uma família fechada superiormente. Diante disso, podemos afirmar, sem quaisquer resquícios de dúvidas, que o conjunto dos animais (ψ) também está nesta família fechada superiormente.

b) Consideremos, agora, o conjunto φ: "conjunto dos morcegos não-hematófagos" e ψ: "conjunto dos morcegos". Sabemos que $\varphi \subseteq \psi$. Considerando que o conjunto de morcegos não-hematófagos é não-grande, pela definição do quantificador $\mathcal{G}$, nada podemos inferir a respeito de ψ.

Sendo assim, a nossa regra nos diz que se o conjunto φ está contido em ψ, para todos os elementos de um determinado universo, então muitos elementos satisfazem ψ ou não são muitos os elementos que satisfazem φ.

Para que o nosso procedimento seja realmente efetivo, precisamos programar alguns comandos que serão fundamentais ao processo. Inicialmente, o dispositivo tentará aplicar as regras clássicas dos operadores lógicos $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ e $\forall$ sem instanciar as fórmulas. Em seguida, verifica-se se alguma regra específica de Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$] pode ser utilizada. Caso afirmativo, esta deve ser aplicada. Por último, instanciam-se as fórmulas, quando possível e, por fim, analisa-se se o método originou alguma cláusula de fechamento.

Expostas as regras de Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$], definiremos as cláusulas de fechamento desse novo sistema.

Definição 4.1.1 Um ramo, em Tabl[$\mathcal{L}(\boldsymbol{G})$] , é *fechado* quando temos no mesmo ramo uma das seguintes contradições:

(i) α e $\neg\alpha$ (cláusula de fechamento dos tablôs clássicos);

(ii) $\boldsymbol{G}x\alpha(x)$ e $\neg\boldsymbol{G}y\alpha(x)$, nos casos em que y é uma variável livre para x em $\alpha(x)$.

Definição 4.1.2 Um tablô é fechado para uma dada fórmula α quando todos os seus ramos são fechados.

Assim, como na lógica clássica, representamos que um ramo está fechado em Tabl[$\mathcal{L}(\boldsymbol{G})$] através do símbolo "X".

Vejamos alguns exemplos de deduções de sentenças quantificadas pelo operador $\boldsymbol{G}$ em Tabl[$\mathcal{L}(\boldsymbol{G})$].

a) $\boldsymbol{G}x\varphi(x) \vee \boldsymbol{G}x\psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$

i)	0	$\boldsymbol{G}x\varphi(x) \vee \boldsymbol{G}x\psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$			(refutação da sentença)
ii)	1	$\boldsymbol{G}x\varphi(x) \vee \boldsymbol{G}x\psi(x)$			(regra do condicional em i)
iii)	0	$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$			(regra do condicional em i)
iv)	1	$\boldsymbol{G}x\varphi(x)$	1	$\boldsymbol{G}x\psi(x)$	(regra do CPC em ii)
v)	1	$\varphi(a)$	1	$\psi(b)$	(regra $\boldsymbol{G}_1$ em iv)
vi)	0	$\varphi(a) \vee \psi(a)$	0	$\varphi(a) \vee \psi(a)$	(regra do CQC em iii)
vii)	0	$\varphi(b) \vee \psi(b)$	0	$\varphi(b) \vee \psi(b)$	(regra do CQC em iii)
viii)	0	$\varphi(a)$	0	$\varphi(b)$	(regra do CPC em vi e vii)
ix)	0	$\psi(a)$	0	$\psi(b)$	(regra do CPC em vi e vii)
		X		X	(cl. de fechamento em v e viii; v e ix)

b) $\boldsymbol{G}x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

i)	0	$\boldsymbol{G}x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	(refutação da sentença)

ii)	0	$\varphi(a) \vee \neg\varphi(a))$	(regra G_1 em i)
iii)	0	$\varphi(a)$	(regra do CPC em ii)
iv)	0	$\neg\varphi(a)$	(regra do CPC em ii)
v)	1	$\varphi(a)$	(regra do CPC em iv)
vi)		X	(cl. de fechamento em iii e v)

c) $G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \wedge G\text{x}\ \psi(\text{x}) \rightarrow G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \vee \psi(\text{x}))$

i)	0	$G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \wedge G\text{x}\ \psi(\text{x}) \rightarrow G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \vee \psi(\text{x}))$	(refutação da sentença)
ii)	1	$G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \wedge G\text{x}\ \psi(\text{x})$	(regra do condicional em i)
iii)	0	$G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \vee \psi(\text{x}))$	(regra do condicional em i)
iv)	1	$G\text{x}\ \varphi(\text{x})$	(regra do CPC em ii)
v)	1	$G\text{x}\ \psi(\text{x})$	(regra do CPC em ii)
vi)	0	$G\text{x}\ \varphi(\text{x})$	(regra G_3 em iii)
vii)	0	$G\text{x}\ \psi(\text{x})$	(regra G_3 em iii)
viii)		X	(cláusula de fechamento em iv e vi)

d) $\neg G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \wedge \neg\varphi(\text{x}))$

i)	0	$\neg G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \wedge \neg\varphi(\text{x}))$	(refutação da sentença)
ii)	1	$G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \wedge \neg\varphi(\text{x}))$	(regra do CPC em i)
iii)	1	$\varphi(a) \wedge \neg\varphi(a)$	(regra G_1 em ii)
iv)	1	$\varphi(a)$	(regra do CPC em iii)
v)	1	$\neg\varphi(a)$	(regra do CPC em iii)
vi)	0	$\varphi(a)$	(regra do CPC em v)
vii)		X	(cláusula de fechamento em iv e vi)

e) $G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \vee G\text{x}\ \psi(\text{x}) \rightarrow G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \vee \psi(\text{x}))$

i)	0	$G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \vee G\text{x}\ \psi(\text{x}) \rightarrow G\text{x}\ (\varphi(\text{x}) \vee \psi(\text{x}))$	(refutação da sentença)
ii)	1	$G\text{x}\ \varphi(\text{x}) \vee G\text{x}\ \psi(\text{x})$	(regra do condicional em i)

iii)	0	$\mathcal{G}x\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$			(regra do condicional em i)
iv)	0	$\mathcal{G}x\,\varphi(x)$			(regra $\mathcal{G}_3$ em iii)
v)	0	$\mathcal{G}x\,\psi(x)$			(regra $\mathcal{G}_3$ em iii)
vi)	1	$\mathcal{G}x\,\varphi(x)$	1	$\mathcal{G}x\,\psi(x)$	(regra do CPC em ii)
		X		X	(cl. de fechamento em iv e vi)

4.2 Equivalência entre o sistema Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$] e o sistema hilbertiano da lógica do muito

A idéia de se avaliar a equivalência entre diferentes sistemas dedutivos, a fim de se verificar quando os mesmos conservam todas as conseqüências dedutivas, foi extraída de Silvestrini (2005). Utilizamos algumas definições importantes retiradas do trabalho de Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006).

Silvestrini, em sua dissertação intitulada *Tableaux e Indução na lógica do Plausível*, apresentou um sistema dedutivo por tablôs para uma lógica modulada, também desenvolvida por Grácio, denominada *lógica do plausível*. Em vez de verificar se o seu sistema dedutivo por tablôs conservava a correção e completude da lógica do plausível, ele optou por demonstrar a equivalência entre o seu sistema de tablôs (TLP) e o sistema hilbertiano proposto por Grácio para a lógica do plausível. Assim, ele garantiu que o sistema TLP preserva a correção e completude para a sua lógica pesquisada.

Em suma, Silvestrini (2005) propôs esquematicamente que:

$$\Gamma \vdash_{LP} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{LP} \varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma \Vdash_{LP} \varphi$$

Obs: O símbolo $\Vdash$ representa a dedução por tablôs e LP a lógica do plausível.

> Ao demonstrarmos que $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi$, estaremos estabelecendo a equivalência entre as conseqüências lógicas de cada sistema dedutivo abordado e, uma vez que em Grácio (1999, p. 149) está demonstrada a completude do sistema axiomático de L (*P*), nosso sistema de tableaux TLP também será correto e completo (Silvestrini, 2005, p. 108).

Assim como Silvestrini, demonstraremos a equivalência do nosso sistema Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$] com o sistema hilbertiano de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, proposto por Grácio (1999), ou seja:

$$\Gamma \vdash_{L(\mathcal{G})} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{L(\mathcal{G})} \varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma \Vdash_{Tabl[L(\mathcal{G})]} \varphi.$$

No entanto, para demonstrarmos essa equivalência, precisaremos de algumas definições apresentadas a seguir.

Definição 4.2.1 (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 83): Dizemos que Γ *deriva* φ *analiticamente* se existe um tablô fechado para o conjunto ($\Gamma \cup \neg\varphi$), também representado por ($\Gamma, \neg\varphi$). Denotamos tal fato por $\Gamma \Vdash_T \varphi$.

Teorema 4.2.2 (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 83) Temos as seguintes propriedades:

a) $\varphi \Vdash_T \varphi$;

b) Se $\Vdash_T \varphi$ então $\Gamma \Vdash_T \varphi$;

c) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \Vdash_T \varphi$;

d) Se $\Gamma \Vdash_T \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \Vdash_T \varphi$ (Monotonicidade);

e) $\Gamma \Vdash_T \varphi$ see existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 finito, tal que $\Gamma_0 \Vdash_T \varphi$.

Definição 4.2.3 (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 86) Seja Γ um conjunto de fórmulas na linguagem L = ($\vee$, $\neg$). Dizemos que Γ é T-inconsistente (inconsistente por tablôs) se existe um tablô fechado para Γ.

Teorema 4.2.4. (Carnielli, Coniglio; Bianconi, 2006, p. 88 – *Introdução ao Corte*) Os conjuntos (Γ, φ) e (Γ, $\neg\varphi$) são T-inconsistentes se, e somente se, o conjunto Γ é T-inconsistente.

A regra de introdução ao corte é válida tanto no CPC como no CQC. Como a utilizaremos para demonstrar um dos principais teoremas dessa dissertação, é necessário que examinemos se a mesma é preservada quando estendemos a lógica de primeira ordem com o quantificador generalizado $\mathcal{G}$.

Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006) validam essa regra para a lógica proposicional constituída na linguagem L = {$\vee$, $\neg$}. De modo análogo, verificaremos que o mesmo vale para L = {$\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\mathcal{G}$}.

Com o intuito de apresentar uma demonstração mais “limpa” e simples, substituiremos os símbolos dos valores de verdade 0 e 1, pelo sinal ($\neg$) para representar a negação, e a ausência de marcação para representar a afirmação. Assim, $\neg\mathcal{G}x\ \varphi(x)$ significa que não são muitos os indivíduos que satisfazem $\varphi(x)$ e $\mathcal{G}x\ \varphi(x)$ denota que muitos indivíduos satisfazem $\varphi(x)$. No entanto, depois retornaremos à marcação anterior.

Demonstração da regra de Introdução ao Corte para L = {$\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\mathcal{G}$}[23] :

($\Leftarrow$) Se o conjunto Γ é T-inconsistente, então (Γ, φ) e (Γ, $\neg\varphi$) são T-inconsistentes.

Sabemos, por hipótese, que existe um tablô fechado para Γ. Pelo teorema da Monotonicidade, se $\Gamma \subseteq \Delta$, então Δ também é fechado por tablô. Logo (Γ, φ) e (Γ, $\neg\varphi$) são T-inconsistentes.

($\Rightarrow$) Se os conjuntos (Γ, φ) e (Γ, $\neg\varphi$) são T-inconsistentes, então o conjunto Γ é T-inconsistente.

Diante do fato de que Carnielli, Coniglio e Bianconi (2006) já demonstraram que o Teorema se aplica para L = {$\vee$, $\neg$}, ao estendermos essa linguagem com o conectivo clássico condicional, verificaremos que ainda se aplica apenas para o referido conectivo. Em seguida, analisaremos se o enunciado é preservado quando inserimos, gradativamente, os quantificadores Universal, Existencial e $\mathcal{G}$ na estrutura sintática da lógica.

i) L = {$\vee$, $\neg$, $\rightarrow$}

Logo:

- $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \gamma)$

Por hipótese, temos que os conjuntos abaixo são T-inconsistentes:

[23] Essa demonstração contou com a colaboração do Ms. Luís Henrique da Cruz Silvestrini.

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma, (\psi \to \gamma) \\ \\ \Gamma, \neg(\psi \to \gamma)\end{array}\right\}\text{ são T-inconsistentes}$$

Pela definição 4.2.3, se Γ, $(\psi \to \gamma)$ e Γ, $\neg(\psi \to \gamma)$ são T- inconsistentes então existe um tablô fechado para eles. Assim, ou temos um tablô fechado para Γ e nada precisa ser acrescentado ou o tablô fecha pela inclusão da fórmula condicional:

a) Γ

$$\begin{array}{c} (\psi \to \gamma) \\ \begin{array}{c|c} \neg\psi & \gamma \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} \end{array} \end{array}$$

Como esse tablô é fechado, então ψ ocorre no ramo à esquerda e $\neg\gamma$ ocorre no ramo à direita a partir de Γ.

b) Γ

$$\begin{array}{c} \neg(\psi \to \gamma) \\ \psi \\ \neg\gamma \\ \mathrm{X} \end{array}$$

Assim, $\neg\psi$ ou γ ocorre no tablô de Γ.

Como ocorre (a) e (b), há um tablô fechado para Γ e, assim, concluímos que Γ é T- inconsistente.

ii) $L = \{\vee, \neg, \to, \forall\}$

Temos:

• $\varphi \equiv \forall x\ \psi(x)$

Por hipótese, temos que os conjuntos abaixo são T-inconsistentes:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma, \forall x\ \psi(x) \\ \\ \Gamma, \neg\forall x\ \psi(x)\end{array}\right\}\text{ são T-inconsistentes}$$

Pela definição 4.2.3, desde que Γ, $\forall x\ \varphi(x)$ e Γ, $\neg\ \forall x\ \varphi(x)$ são T- inconsistentes então existe um tablô fechado para eles. Assim, ou temos um tablô fechado para Γ e nada precisa ser acrescentado ou o tablô fecha pela inclusão da fórmula quantificada. Assim:

a) Γ

$\forall x\ \psi(x)$

$\psi(x)$, para todo x.

X

Diante disso, inferimos que $\neg\psi(x)$ ocorre no tablô de Γ , para qualquer x.

b) Γ

$\neg\forall x\ \psi(x)$

$\neg\psi(x)$, x novo no ramo.

X

Logo, $\psi(x) \in \Gamma$, para um x novo no ramo.

Como vale (a) e (b), temos no tablô de Γ, em cada ramo, $\neg\psi(x)$ para algum x e $\psi(x)$. Logo, Γ é T-inconsistente.

iii) L = $\{\vee, \neg, \rightarrow, \forall, G\}$

Verificaremos se o mesmo ocorre com L = $\{\vee, \neg, \rightarrow, \forall, G\}$.

• $\varphi \equiv Gx\ \psi(x)$

Por hipótese, temos que os conjuntos abaixo são T-inconsistentes:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma, Gx\ \psi(x) \\ \\ \Gamma, \neg\ Gx\ \psi(x)\end{array}\right\}\text{ são T-inconsistentes}$$

Como Γ, $Gx\psi(x)$ e Γ, $\neg Gx\psi(x)$ são T-inconsistente, então podemos concluir pela definição 4.2.3 que existe um tablô fechado para cada um deles. Assim, ou temos um tablô fechado para Γ e nada precisa ser acrescentado ou o tablô fecha pela inclusão da fórmula quantificada $Gx\ \psi(x)$:

a) Γ

$Gx\ \psi(x)$

X

Como o tablô é fechado, então ocorre no tablô $\neg Gx\ \psi(x)$ ou $\neg\ \exists x\ \psi(x)$ $\{\neg\psi(a)$, para alguma nova constante a$\}$.

b) Γ

$\neg\, \mathcal{G} x\, \psi(x)$

X

Diante disso, ocorre no tablô $\mathcal{G} x\, \psi(x)$ ou $\forall x \psi(x)$.

Como o nosso objetivo é provar que Γ é T-inconsistente, analisaremos todas as possíveis combinações entre os diferentes tipos de fórmulas que podem estar contidas no tablô de Γ, lembrando que (a) e (b) ocorrem.

1) $\neg \mathcal{G} x\, \psi(x)$ e $\mathcal{G} x\, \psi(x)$. Trivialmente, Γ é T- inconsistente.

2) $\neg \mathcal{G} x\, \psi(x)$ e $\forall x\, \psi(x)$. De $\forall x\, \psi(x)$, temos $\psi(a)$, para todo a, inclusive para o $\neg\psi(a)$, proveniente da instanciação de $\neg\, \mathcal{G} x\, \psi(x)$. Logo, Γ é T- inconsistente.

3) $\neg\, \exists x\, \psi(x)$ e $\mathcal{G} x\, \psi(x)$: De $\neg\, \exists x\, \psi(x)$, temos $\neg\psi(a)$, para todo a, inclusive para o $\psi(a)$, proveniente da instanciação de $\mathcal{G} x\, \psi(x)$. Portanto, Γ é T- inconsistente

4) $\neg\, \exists x\, \psi(x)$ e $\forall x\, \psi(x)$. Por análise direta, Γ é T-inconsistente.

Com isso, demonstramos que podemos aplicar a regra do corte quando as fórmulas são quantificadas também com o operador generalizado $\mathcal{G}$. ■

Teorema 4.2.5 Se $\Gamma \vdash_{L(\mathcal{G})} \varphi$, então $\Gamma \Vdash_{Tabl[L(\mathcal{G})]} \varphi$.

Demonstração: Consideremos o conjunto de premissas $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n = \varphi\}$ que deduz φ a partir de um conjunto Γ. A idéia subjacente a esta demonstração é a de se construir um tablô fechado para $\neg\varphi$, por intermédio da indução sobre o comprimento da dedução (k = 1, 2, ..., n), ou seja, construirmos um tablô fechado quando n = 1 (apenas uma premissa) e continuaremos para $n \geq 1$.

1ª Parte: O comprimento da dedução é igual a 1, ou seja, n = 1. Nesse caso, δ_1 tem que ser uma premissa ou um esquema de axiomas da lógica do muito ($L(\mathcal{G})$). Analisemos, então, esses dois casos.

i) δ_1 é uma premissa.

Pela definição 4.2.1, precisamos verificar se existe um tablô fechado para $\Gamma \wedge \neg\varphi$. Como $\varphi \in \Gamma$, então $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição clássica.

ii) δ_1 é um esquema de axiomas.

Neste caso, basta construirmos um tablô para $(\Gamma, \neg\delta_1)$. Desde que o tablô seja fechado, então $\Gamma \Vdash \varphi_1 = \delta$.

Resta-nos, então, verificar que para cada axioma específico da *lógica do muito* existe um tablô fechado. Assim:

$\delta_1 \equiv \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\mathcal{G}x\ \varphi(x) \to \mathcal{G}x\ \psi(x))$

i)	0	$\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\mathcal{G}x\ \varphi(x) \to \mathcal{G}x\ \psi(x))$	(refutação de δ_1)
ii)	1	$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$	(regra do condicional em i)
iii)	0	$\mathcal{G}x\ \varphi(x) \to \mathcal{G}x\ \psi(x)$	(regra do condicional em i)
iv)	1	$\mathcal{G}x\ \varphi(x)$	(regra do condicional em iii)
v)	0	$\mathcal{G}x\ \psi(x)$	(regra do condicional em iii)
vi)	0	$\mathcal{G}x\ \varphi(x)$ | 1 $\mathcal{G}x\ \psi(x)$	(regra $\mathcal{G}_5$ em ii)
		X | X	(contradição em iv e vi e v e vi)

Como o tablô para $\neg\delta_1$ é fechado, inferimos que $\Gamma \Vdash \delta_1$.

$\delta'_1 \equiv \forall x\ \varphi(x) \to \mathcal{G}x\ \varphi(x)$

i)	0	$\forall x\ (\varphi(x)) \to \mathcal{G}x\ (\varphi(x))$	(refutação de δ'_1)
ii)	1	$\forall x\ \varphi(x)$	(regra do condicional em i)
iii)	0	$\mathcal{G}x\ \varphi(x)$	(regra do condicional em i)
iv)	0	$\varphi(a)$	(regra do $\mathcal{G}_2$ em iii, para um a $\in F$)
v)	1	$\varphi(a)$	(regra do universal em ii)
vi)		X	(contradição em iv e v)

Como o tablô para $\neg\delta'_1$ é fechado, podemos inferir que $\Gamma \Vdash \delta'_1$.

$\delta''_1 \equiv \mathcal{G}x\ \varphi(x) \to \exists x\ \varphi(x)$

i)	0	Gx $\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$	(refutação de δ''_1)
ii)	1	Gx $\varphi(x)$	(regra do condicional em i)
iii)	0	$\exists x\ \varphi(x)$	(regra do condicional em i)
iv)	1	$\varphi(a)$	(regra do G_1 em ii, para um a $\in F$)
v)	0	$\varphi(a)$	(regra do existencial em iii)
vi)		X	(contradição em iv e v)

Como o tablô para $\neg\delta''_1$ é fechado, inferimos que $\Gamma \Vdash \delta''_1$.

$\delta'''_1 \equiv \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (G\text{x } \varphi(x) \leftrightarrow G\text{x } \psi(x))$

i)	0	$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (G\text{x } \varphi(x) \leftrightarrow G\text{x } \psi(x))$	(refutação de δ'''_1)
ii)	1	$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$	(regra do condicional em i)
iii)	0	Gx $\varphi(x) \leftrightarrow G$x $\psi(x)$	(regra do condicional em i)
iv)	1	$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$	(regra G_4 em ii)
v)	1	$\forall x(\psi(x) \to \varphi(x))$	(regra G_4 em ii)

vi)	1 Gx $\varphi(x)$		0 Gx $\varphi(x)$				(regra do bicondic. em iii)
vii)	0 Gx $\psi(x)$		1 Gx $\psi(x)$				(regra do bicondic. em iii)
viii)	0 Gx $\varphi(x)$	1 Gx $\psi(x)$	0 Gx $\varphi(x)$		1 Gx $\psi(x)$		(G_5 em iv)
ix)	X	X	0 Gx$\psi(x)$	1 Gx$\varphi(x)$	0 Gx$\psi(x)$	1 Gx $\varphi(x)$	(G_5 - v)
			X	X	X	X	

Como o tablô para $\neg\delta'''_1$ é fechado, inferimos que $\Gamma \Vdash \delta'''_1$.

$\delta 1''''_1 \equiv G\text{x } \varphi(x) \to G\text{y } \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$.

i)	0	Gx $\varphi(x) \to G$y $\varphi(y)$	(refutação de δ''''_1)
ii)	1	Gx $\varphi(x)$	(regra do condicional)

iii) 0 $G y\, \varphi(y)$ (regra do condicional)

iv) X (cl. Fechamento em ii e iii)

Como o tablô para $\neg\delta''''_1$ é fechado, inferimos que $\Gamma \Vdash \delta''''_1$.

- 2ª Parte: Comprimento da dedução é maior que um, ou seja, $n > 1$.

Nesse momento, presumimos a existência de uma prova, no sistema hilbertiano para φ ($\delta_1,\ldots, \delta_n = \varphi$), a partir de um conjunto Γ com comprimento igual a n, ou seja:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \equiv \varphi\end{array}\right\} \quad n \text{ passos } (\Gamma \vdash \varphi)$$

Pela hipótese da indução, podemos deduzir, por tablôs, qualquer δ_i desde que $i < n$.

Para mostrar que $\Gamma \Vdash \varphi$, devemos "analisar um a um todos os casos que permitiram colocar δ_n (isto é, φ) na seqüência" (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 89). Ou seja:

❖ i = 1. Então, $\varphi = \delta_n = \delta_1$. Neste caso, φ é uma única premissa ou um axioma da lógica do muito. Ambas as situações já foram analisadas e comprovadas.

❖ i = n. Nesta circunstância, $\varphi = \delta_n$, só pode ter sido deduzida a partir da aplicação de alguma regra de inferência. Como no nosso sistema só há duas regras, *Modus Ponens* e Generalização, então φ só pode ser conseqüência do emprego de alguma delas. Analisemos cada uma separadamente.

1) *Modus Ponens* (MP): pretendemos avaliar:

$$\frac{\Gamma \Vdash \psi \qquad \Gamma \Vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Gamma \Vdash \varphi}$$

Sabemos que φ é obtido de $\varphi_i = \psi$ e $\varphi_j = \psi \rightarrow \varphi$ ($i, j < n$) por *Modus Ponens*. Pela definição 4.2.1, temos que:

a) Γ, $\{\neg\psi\}$ é fechado por tablô.

b) Γ , $\{\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ também é fechado por tablô.

Da definição 4.2.3, segue que $\Gamma \wedge \{\neg\psi\}$ e $\Gamma \wedge \{\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ são T-inconsistentes. Agora, aplicando a regra do condicional e De Morgan em (b), obtemos: $\Gamma \wedge \{\neg\psi\}$ e $\Gamma \wedge \{\neg\neg\psi \wedge \neg\varphi\}$ são T-inconsistentes, ou seja:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \Gamma \wedge \{\neg\psi\} \\ \\ \text{ii) } \Gamma \wedge \{\psi \wedge \neg\varphi)\} \end{array}\right\} \text{ são T-inconsistentes}$$

O teorema 4.2.2 (d) (Monotonicidade) nos garante que ao adicionarmos fórmulas em uma dedução, a qual é fechada por tablôs, o fechamento é preservado. Aplicando-se, então, esse teorema em (i) temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i') } \Gamma \wedge \neg\psi \wedge \neg\varphi \\ \\ \text{ii') } \Gamma \wedge \psi \wedge \neg\varphi \end{array}\right\} \text{ são T-inconsistentes}$$

Diante desse contexto, podemos empregar o teorema 4.2.4 (*Introdução ao corte*), isto é:

$$\frac{\begin{array}{ll} \Gamma \wedge \neg\psi \wedge \neg\varphi & \text{é T-inconsistente} \\ \Gamma \wedge \psi \wedge \neg\varphi & \text{é T-inconsistente} \end{array}}{\begin{array}{ll} \Gamma \wedge \neg\varphi & \text{é T-inconsistente} \end{array}}$$

Assim sendo, $(\Gamma, \neg\varphi)$ é T-inconsistente, ou seja, $\Gamma \Vdash \varphi$.

2) Generalização: Desejamos avaliar:

$$\frac{\Gamma \Vdash \psi}{\Gamma \Vdash \forall x\, \psi(x) = \varphi}$$

Sabemos que $\forall x\ \psi$ é obtido de $\varphi_i = \psi$ ($i < n$) por Generalização. Pela definição 4.2.1, temos que Γ, $\{\neg\psi\}$ é fechado por tablô.

Da definição 4.2.2, para demonstrarmos que $\Gamma \Vdash \forall x\psi$, basta construirmos um tablô fechado para $(\Gamma, \neg\forall x\psi)$. Assim, temos:

i) Γ

ii) 0 $\forall x\ \psi$

iii) 0 $\psi(c)$, desde que c seja nova no ramo (aplicação da regra clássica $\neg\forall$)

iv) X (Fechamento pela hipótese da indução em i e iii)

Portanto, $\Gamma \Vdash \forall x\ \psi$, ou seja, $\Gamma \Vdash \varphi$.

Concluímos, deste modo, que se $\Gamma \vdash_{L(\mathcal{G})} \varphi$, então $\Gamma \Vdash_{Tabl[L(\mathcal{G})]} \varphi$. ■

A demonstração do próximo teorema será feita de modo análogo ao de Castro (2004) e Silvestrini (2005).

Em sua tese, Castro desenvolveu uma hierarquia de sistemas de tablôs para as lógicas paraconsistente de Da Costa(C_n). Ele representou esse sistema de tablôs pela sigla $TNDC_n$. Em um dos seus teoremas, Castro demonstrou que para cada fórmula validada em seu sistema de tablôs, existe uma dedução no sistema axiomático de Da Costa, ou seja:

$\Gamma \vdash_{TDNCn} S \Rightarrow \Gamma \vdash_{Cn} S$

Silvestrini (2005) também aplicou esse estilo para demonstrar que todas as regras que compunham o seu sistema de tablôs para a lógica do plausível (TLP) possuem uma demonstração no sistema hilbertiano dessa mesma lógica, ou seja, a lógica do Plausível (L(P)).

> O que estamos propondo demonstrar, nesse momento, é que para cada fórmula validada (conseqüência analítica) pelo sistema TLP, devemos apresentar uma demonstração (dedução) no correspondente sistema axiomático $L^{\tau}_{\omega\omega}(P)$ (Silvestrini, 2005, p. 115).

Desse modo, utilizaremos o mesmo esquema de demonstração para provarmos o nosso Teorema 4.2.6, ou seja, verificarmos que cada uma das nossas regras para o sistema de tablôs da *lógica do muito* pode ser deduzida no sistema axiomático da referida lógica.

Silvestrini compreende o sistema por tablôs "como uma "*mecanização exaustiva*" do procedimento de prova do *reduction ad absurdum* do método axiomático" (2005, p. 115, grifo do autor). Diante disso, ele defende que se há, para uma referida fórmula, uma demonstração por tablôs, então podemos construir uma prova por redução ao absurdo no sistema axiomático. Mas isso só será possível quando:

> i) As condições para *inicialização* e *fechamento* do sistema TLP, também

> são condições válidas, nas provas por absurdo, no correspondente sistema hilbertiano L(P).
> ii) Todas as *Regras de Expansão* de TLP são dedutíveis no sistema hilbertiano L(P), desse modo, tais regras de TLP passam a ser entendidas como *Regras de Dedução* no sistema axiomático (Silvestrini, 2005, p. 116).

Como optamos por demonstrar que o nosso sistema de tablôs para a lógica do muito é correto e completo por um procedimento análogo ao de Silvestrini, e concordamos com as idéias defendidas pelo autor, então demonstraremos que as regras de tablôs para a *lógica do muito* podem ser deduzidas no sistema hilbertiano, respeitando as clausulas i) e ii) expostas por Silvestrini adaptadas para o sistema Tabl[L($\mathcal{G}$)].

Teorema 4.2.6 Se $\Gamma \Vdash_{\mathrm{Tabl[L(\mathcal{G})]}} \varphi$, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}(\mathcal{G})} \varphi$.

Demonstração: Há dois casos a serem analisados:

i) $\varphi \in \Gamma$, neste caso segue de modo direto que $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}(\mathcal{G})} \varphi$.

ii) $\varphi \notin \Gamma$. Neste caso, φ deve ser alguma fórmula gerada ou advinda da aplicação de alguma regra do nosso sistema de tablôs. Sendo assim, precisamos verificar se conseguimos deduzir cada uma das fórmulas de Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$] no esquema hilbertiano da lógica do muito.

Observamos que as condições de inicialização e fechamento do sistema por tablôs - Tabl[$\mathcal{L}(\mathcal{G})$] - são as mesmas para as demonstrações por redução ao absurdo, ou seja: (1) iniciamos a demonstração refutando a fórmula inicial; (2) concluímos quando encontramos uma contradição lógica.

Dedução das regras do Tablô axiomaticamente.

- Regra G_1: $\mathcal{G}x\, \varphi(x) \vdash \varphi(a)$, a é nova no ramo.

Neste caso, utilizaremos o método direto dedutivo.

1.	$\mathcal{G}x\, \varphi(x)$	p.
2.	$\mathcal{G}x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$	Ax_3
3.	$\exists x \varphi(x)$	MP em 1 e 2
4.	$\varphi(a)$	CQC em 3.

❖ Regra G_2: $\neg \mathcal{G}x\, \varphi(x) \vdash \neg\varphi(a)$, a é novo no ramo.

1.	$\neg \mathcal{G}x\, \varphi(x)$	p.
2.	$\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \mathcal{G}x\, \varphi(x)$	Ax_2
3.	$\neg\forall x\, \varphi(x)$	MT em 1 e 2
4.	$\neg\, \varphi(a)$	CQC.

❖ Regra G_3: $\neg \mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash (\neg\mathcal{G}x\, \varphi(x) \wedge \neg \mathcal{G}x\, \psi(x))$

1.	$\neg \mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	p.
2.	$\neg\, (\neg\mathcal{G}x\, \varphi(x) \wedge \neg \mathcal{G}x\, \psi(x))$	pp. (redução ao absurdo)
3.	$\neg\neg\, \mathcal{G}x\, \varphi(x) \vee \neg\neg\, \mathcal{G}x\, \psi(x)$	CPC
4.	$\mathcal{G}x\, \varphi(x) \vee \mathcal{G}x\, \psi(x)$	CPC
5.	$(\mathcal{G}x\, \varphi(x) \vee \mathcal{G}x\, \psi(x)) \rightarrow \mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	Teorema 4 de L($\mathcal{G}$)
6.	$\mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP em 4 e 5
7.	$\neg \mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \mathcal{G}x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	Contradição.

❖ Regra G_4: É classicamente válida.

❖ Regra G_5: $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash (\neg\mathcal{G}x\, \varphi(x) \vee \mathcal{G}x\, \psi(x))$

1.	$\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$	p.
2.	$\neg(\neg\mathcal{G}x\, \varphi(x) \vee \mathcal{G}x\, \psi(x))$	pp. (redução ao absurdo)
3.	$\neg\, (\mathcal{G}x\, \varphi(x) \rightarrow \mathcal{G}x\, \psi(x))$	CPC
4.	$\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{G}x\, \varphi(x) \rightarrow \mathcal{G}x\, \psi(x))$	Ax_1
5.	$\neg\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$	MT em 3 e 4
6.	$\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \neg\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$	Contradição.

Assim sendo, demonstramos que tudo que é válido em Tabl[L($\mathcal{G}$)], também o é na $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Diante disso, comprovamos o Teorema 4.2.6. ■

Ao demonstrarmos os teoremas 4.2.5 e 4.2.6, podemos concluir que:

$$\Gamma \vdash_{L(G)} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{L(G)} \varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma \Vdash_{Tabl[L(G)]} \varphi$$

Deste modo, provamos que o sistema de tablôs, proposto neste trabalho, é equivalente ao sistema axiomático introduzido por Grácio (1999) para a *lógica do muito*. Em conseqüência disso, podemos garantir a correção e completude de Tabl[$\mathcal{L}(G)$].

5. ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE "MUITOS" E A LÓGICA DO MUITO

Marilena Chauí, na introdução do livro "Convite à filosofia", 2006, faz um paralelo entre as principais concepções e analogias que permeiam o Mundo virtual Matrix[24] e a Filosofia. Para tanto, Chauí relata dois episódios que aconteceram com Neo, personagem principal do filme Matrix (interpretado pelo ator Keanu Reeves), e com Sócrates, há 23 séculos atrás, na Grécia antiga.

Na Grécia antiga, Sócrates era conhecido e respeitado por sua imensa sabedoria. No entanto, ele se indagava sobre o que, de fato, significava 'ser sábio'. Diante de tal dúvida, diz a lenda que Sócrates foi consultar o oráculo em um santuário dedicado ao Deus Apolo, na cidade de Delfos. Sobre a porta principal desse santuário, havia a seguinte mensagem escrita: *Nosce te ipsum*, que significa "Conhece-te a ti mesmo". Quando Sócrates perguntou ao oráculo o que significava ser um sábio e se realmente ele era digno de ser clamado de sábio, em vez de responder a pergunta o oráculo perguntou: "O que você sabe?". Sócrates respondeu: "Só sei que nada sei". Ao ouvir tal resposta, o oráculo respondeu que ele era, realmente, o mais sábio de todos os homens, pois era o único que sabia que nada sabia.

Um episódio análogo a esse foi retratado em uma das cenas iniciais do filme Matrix, quando Neo se encontra com *Sibila*, o oráculo, e ela pergunta se ele leu a frase que estava em cima da porta pela qual ele acabara de passar. A frase era *Nosce te ipsum*, e Neo responde que não. O oráculo traduz, então, a frase para Neo e o avisa que ele só conseguirá conhecer e livrar o mundo da Matrix, quando ele conhecer, primeiro, a si mesmo.

O que é a Matrix? Segundo Chauí (2006, p. 10),

> Essa palavra é latina. Deriva de *mater*, que quer dizer "mãe". Em latim, *matrix* é o órgão sexual das fêmeas dos mamíferos onde o embrião e o feto se desenvolvem; é o útero. Na linguagem técnica, a matrix é o molde para fundição de uma peça; o circuito de codificadores e de decodificadores das cores primárias (para produzir imagens na televisão) e dos sons (nos discos, fitas e filmes); e, na linguagem da informática, é a rede de guias de entradas e saídas de elementos lógicos dispostos em determinadas intersecções."

A Matrix do filme é um computador gigantesco que apresenta todas essas co-

[24] Referência ao mundo virtual retratado no primeiro Filme da Trilogia Matrix, dos irmãos Wachowski. Warner Bross: EUA, 1999.

notações apresentadas acima, isto é, ela representa, ao mesmo tempo, um útero universal onde estão todos os seres humanos, cuja vida real é "uterina" e cuja vida imaginária é forjada pelos circuitos de codificadores e decodificadores de cores e sons e pelas redes de guias de entrada e saída de sinais lógicos (Chauí, p. 10).

O problema da Matrix é que ela cria um mundo de aparências, ou seja, ela desenvolve uma falsa realidade na qual todos os seres humanos acreditam. Diante disso, é outorgado a Neo a função de destruir a Matrix, isto é, de acabar com esse mundo de aparências e restaurar a realidade. No entanto, para que isso pudesse acontecer, Neo precisou se questionar a respeito daquilo que ele acreditava ou foi levado a crer do mundo que o cercava, necessitava conhecer e compreender a si mesmo, pois somente assim ele poderia sair das trevas (mundo das aparências) e ir para a luz (mundo real) e, com isso, resolver os problemas do seu mundo externo.

Sócrates sempre foi um indagador e em conseqüência disso, é considerado o 'patrono da filosofia'. Nada, para Sócrates, era inquestionável, principalmente as crenças impostas pelos seus conterrâneos. *Crenças*, segundo Chauí, "[...] são coisas ou idéias em que acreditamos sem questionar, que aceitamos porque são óbvias, evidentes" (2006, p. 13). Sócrates se questionava a respeito da veracidade de tudo que as pessoas acreditavam como verdadeiras, assim como Neo foi levado a se indagar.

Vivemos em um mundo cercado por crenças, isto é, por um conjunto de proposições sustentadas pelas evidências do dia-a-dia. Por exemplo,

> Cremos na existência do espaço e do tempo, na realidade exterior e na diferença entre realidade e sonho, assim como na diferença entre sanidade mental ou razão e loucura. Cremos na existência das qualidades e das quantidades (ou seja, bonito, feio, ruim, etc., e muito, pouco, uma boa parte, etc., respectivamente[25]). Cremos que somos seres racionais capazes de conhecer as coisas e por isso acreditamos na existência da verdade e na diferença entre verdade e mentira; cremos também na objetividade e na diferença entre ela e a subjetividade. Cremos na existência da vontade e a liberdade e por isso cremos na existência entre o bem e o mal, crença que nos faz aceitar como perfeitamente natural a existência da moral e da religião. Cremos também que somos seres que naturalmente precisam de seus semelhantes e por isso tomamos como um fato óbvio e inquestionável a existência da sociedade com suas regras, normas, permissões e proibições (Chauí, 2006, p. 15).

Mas será que essas crenças são verdadeiras? Será que não vivemos em uma Matrix e precisamos, assim como Neo, descobrir e distinguir o mundo real do ilusório? Conforme apontou Chauí, cremos na existência do tempo, mas o que é o tempo? Cremos na existência de verdades, mas o que são verdades? Cremos que vivemos em

---

[25] Explicação nossa.

um país livre, mas ao mesmo tempo, somos dominados por um conjunto de regras e normas que precisamos seguir. Será que somos livres mesmo? Ou tudo não passa de uma mera ilusão?

Quando nos questionamos a respeito do mundo que nos cerca, das crenças que foram pré-estabelecidas pelos nossos ancestrais e que norteiam muitas das nossas atitudes cotidianas, estamos exprimindo uma "sede pelo saber". Isso é fazer filosofia, é ser um filósofo. A filosofia surge "[...] quando os seres humanos começam a exigir provas e justificações racionais que validem ou invalidem as crenças cotidianas" (Chauí, 2006, p. 18). Racional no sentido de se respeitar normas e regras de coerências do pensamento, a fim de que um argumento conduza a conclusões que possam ser compreendidas, discutidas e aceitas por todos ou por muitos.

Aristóteles foi o primeiro a tentar justificar, sistematicamente, as crenças, por meio dos seus silogismos. Bem sabemos que o cerne da lógica aristotélica está nas proposições, sendo que elas têm por função exprimir, por intermédio da linguagem natural, as crenças elaboradas e encadeadas pelo raciocínio humano.

Alguns filósofos e lógicos, tal como David Hume e Grácio, associam a palavra e a concepção de indução à formação de crenças, no sentido de estarem vinculadas à observação de evidências positivas a seu favor. Grande parte das questões filosóficas "[...] concernentes à indução estão associadas à preocupação em apresentar os mecanismos ou princípios racionais que justifiquem a crença, tomada por seus declarantes como válida no sentido dedutivo, em algumas proposições universais baseadas em casos singulares" (Grácio, 1999, p. 22).

Do século I ao século VIII, época que constituiu a Filosofia Patrística, as crenças, diferentemente das indutivas apresentadas no parágrafo precedente, centraram-se nos *dogmas religiosos*, ou seja, nas verdades irrefutáveis e inquestionáveis. Temos como principal representante dessa época Santo Agostinho.

Na Filosofia Medieval, influenciados principalmente pelo poder da Igreja Católica, os filósofos preocuparam-se em estudar, explicar e defender essencialmente as crenças religiosas, as quais são aceitas muitas vezes sem compreensão alguma. Destacamos, no final desse período, Francis Bacon que foi o primeiro filósofo a formular uma teoria da indução que pretendia justificar as inferências e procedimentos utilizados nas ciências naturais.

Contrariamente, no Renascimento, a religião deixa de ser o centro do Universo e o Homem passa a ser valorizado e defendido entre os filósofos. Esse período também foi marcado por um intenso movimento protestante, que lutava em prol da liberdade das crenças e do pensamento.

A Filosofia Moderna surgiu com a função de acabar com um ceticismo filosófico que norteava os estudiosos da época: a concepção de que a razão seria incapaz de conhecer a realidade exterior e o homem. Para tanto, a filosofia deveria começar pela reflexão, "[...] isto é, aquele que conhece – o sujeito do conhecimento – volta-se para si mesmo para saber se é capaz de conhecimento verdadeiro e, se for, sob quais condições a capacidade de conhecer se realiza corretamente" (Chauí, 2006, p. 49).

Os séculos XVIII e XIX foram marcados pela *crença nos poderes da razão* e no interesse pelas ciências. Esse período é marcado por uma divisão no campo de estudo da filosofia. Por exemplo, em razão da oposição de Kant em relação à metafísica[26] vigente, a filosofia passou a ser uma teoria do conhecimento e da ética.

Além disso, em decorrência da filosofia positivista de Augusto Comte, foram separadas da filosofia as ciências ditas positivas, isto é, a matemática, a física, a química, a biologia, a astronomia e a sociologia. Caberia, segundo Chauí (2006, p. 57), à filosofia fazer uma "[...] reflexão sobre o significado do trabalho científico, isto é, uma análise e uma interpretação dos procedimentos ou das metodologias usadas pelas ciências e uma avaliação dos resultados científicos.

Em resumo, a filosofia reduziu-se, segundo a autora, à *teoria do conhecimento*, que analisa a capacidade e a possibilidade humana de conhecer; à *ética*, a qual se responsabiliza pelo estudo das condições de possibilidade das ações morais; e à epistemologia, isto é, a justificação das crenças e análise crítica das ciências.

Dentre os principais representantes desse último período, ou seja, do período no qual a filosofia reduziu-se a uma teoria do conhecimento, destacamos o filósofo David Hume, que embora nunca tenha utilizado a palavra indução nos seus trabalhos, se questionava a respeito das justificativas racionais que eram apresentadas para as inferências indutivas ou crenças. Dentre as suas indagações, destacamos: como justificamos a crença de que, indutivamente, o futuro será como o passado? Ou ainda,

---

[26] Segundo Chauí (2006), Metafísica é a ciência da realidade pura, que não é nem natural mutável, nem natural imutável. Trata-se daquilo que se deve haver em toda e qualquer realidade seja ela natural, matemática, ética, política ou técnica, para ser realidade. É o conhecimento da realidade em si, dos primeiros princípios e das primeiras causas de todas as coisas. A palavra metafísica surgiu porque esses livros ficavam depois dos livros de física, pois os bibliotecários achavam que eram livros que tratavam da realidade para além da física.

como podemos escolher uma proposição indutiva em detrimento de uma outra, se ambas apresentarem um considerável conjunto de evidências a seu favor? Esses questionamentos ficaram conhecidos na literatura como “Problema da Indução” ou “Problema de Hume”. Para Hume, não há como justificarmos a indução.

A filosofia contemporânea, de meados do século XIX até os dias atuais, centra-se na crítica de todos os valores e preceitos que a sustentou desde o seu surgimento, isto é, indaga-se sobre o que significa, de fato, razão, verdade, espaço, tempo, liberdade, crenças ou induções, acaso, etc.

As crenças, por exemplo, podem ser definidas como:

- Estado ou processo mental de quem acredita em pessoa ou coisa[27];
- No pensamento medieval, crença está vinculada à fé religiosa, convicção na doutrina e nos ensinamentos sagrados, frequentemente considerados compatíveis e coerentes com a reflexão racional;[28]
- No *empirismo* moderno: disposição meramente subjetiva a considerar algo certo ou verdadeiro, por força do hábito ou da vivacidade das impressões sensíveis[29];
- Na concepção peirceana: crenças são hábitos fortalecidos;
- *Crenças*, segundo Chauí (2006), são coisas ou idéias em que acreditamos sem questionar, que aceitamos porque são óbvias, evidentes;
- Para Grácio (1999, p. 11), o conceito de *crença* está vinculado à “[...] manipulação de um conjunto de proposições que não são absolutamente certas, mas sustentadas pelas evidências”.

Em decorrência do fato de que essa Dissertação tem como foco a construção de tablôs para a lógica do muito, para nós a noção de crença está vinculada à mesma abordagem defendida por Grácio, pois a motivação subjacente ao desenvolvimento da ‘lógica do muito’ advém da preocupação em se formalizar argumentos indutivos do tipo “muitos”, “a maioria”, “uma boa parte”, etc.

No entanto, conforme já expomos por intermédio do Problema de Hume, há sérios entraves referentes à formalização dos argumentos indutivos. Algumas propostas foram apresentadas com o intuito de responder aos questionamentos levantados por Hume. Apresentaremos, sucintamente, algumas delas, tal como Grácio (1999).

(i) Rejeição da Indução

[27] Fonte: Dicionário Houaiss.
[28] Fonte: Dicionário Houaiss.
[29] Fonte: Dicionário Houaiss.

O principal defensor dessa abordagem foi Karl Popper, o qual rejeitava a condição de que por meio da indução seria possível chegar, racionalmente, aos conhecimentos científicos. Popper defendia a concepção de que seria impossível justificar logicamente processos inferenciais indutivos, em virtude do fato de que a indução, para ele, seria um processo psicológico e não lógico.

De acordo com Gonzalez (1984, p. 3), para muitos filósofos, dentre eles Popper, "[...] apenas as questões pertencentes ao contexto da justificação são considerados como concernentes à Lógica e à Filosofia da Ciência. As questões referentes à origem das idéias, hipóteses, leis ou teorias são geralmente relegadas ao domínio da Psicologia ou da Sociologia".

Nesse ponto, alguns esclarecimentos se fazem necessários. Estamos trabalhando com raciocínios do tipo indutivo que estão intrinsecamente relacionados com as ciências naturais e com questões do nosso dia-a-dia. Nossa intenção é argumentar favoravelmente à tese de que há uma racionalidade nos métodos que conduzem os cientistas às descobertas científicas. Os filósofos da ciência defendem a existência de dois tipos de contextos que permeiam os resultados científicos: *contexto da descoberta*, que é o caminho pelo qual se chega a um determinado resultado, e *contexto da justificação*, que fornece a justifica de tal resultado.

Como Popper defendia que não se poderia utilizar a indução como um processo lógico, então não se poderia falar em um contexto da descoberta, pois esse processo apresentaria alguma irracionalidade e muita criatividade em sua constituição. Mas, mesmo assim, ele admitia "... como científico (empírico) aquilo que (em enunciados universais) pode ser *testado* pela experiência" (Silvestrine, 2005, p. 44).

Baseado nisso, Popper adota como método científico o *Hipotético Dedutivo* ou *Falsificacionismo*, que se caracteriza por rejeitar teorias por intermédio da verificação de resultados ou evidências que a falsificam, ou seja, "[...] encontrar um contraexemplo é condição necessária e suficiente para se falsificar uma teoria, bem como falsear condições iniciais" (Silvestrini, 2005, p. 44). Diante disso, Popper categoriza como teorias científicas aquelas teorias que mais sobreviverem à testes de falsificação.

O método *Hipotético Dedutivo* pode ser descrito da seguinte maneira: diante de um problema, hipóteses são levantadas a fim de solucioná-lo. Dentre estas hipóteses estão leis e teorias científicas que até o momento foram corroboradas pelos cientistas. A partir dessas hipóteses, obtemos, dedutivamente, algumas conclusões. A fim de verificarmos se realmente a teoria em questão progrediu cientificamente, comparamos essas conclusões entre si e com as teorias já existentes a respeito desse assunto, afim de que verifiquemos se não ocorreu alguma contradição lógica ao introduzirmos essas novas hipóteses. Em seguida investigamos, empiricamente, se há evidências que falsifiquem essas hipóteses. Se isso não ocorrer, concluímos que as hipóteses levantadas foram corroboradas e, portanto, sustentam a teoria. Caso contrário, encontramos um contra-exemplo segundo o qual essa teoria não se fundamenta. É importante salientarmos que, em outros momentos, outras análises podem derrubar essa teoria recém comprovada.

(ii) Reconstrução da indução

Os defensores dessa corrente acreditam que a indução deve ser reconstruída a partir do acréscimo de novas premissas ou por substituição da conclusão por proposições envolvendo probabilidades. Destacam-se, nesse contexto, os trabalhos de John Stuart Mill e Rudolf Carnap.

Para Mill deve haver, no universo, alguma regularidade expressa por meio de princípios indutivos, oriundos do Princípio de Causalidade Universal, isto é, ele defende que existe uma causa explicativa para cada fenômeno que ocorre no universo.

Já Carnap, em sua obra intitulada *Logical fondations of probability*, aplica aspectos teóricos da probabilidade nas conclusões indutivas. Sendo assim, sua lógica indutiva tem como fundamentação a lógica dedutiva, acrescida de um novo conceito relacionado com o grau de confirmação (representado por “c”) de uma determinada hipótese.

(iii) Justificação como pseudo-problema

Os defensores dessa corrente defendem a impossibilidade de se justificar racionalmente inferências do tipo indutivo, já que a indução e a dedução são raciocínios muito distintos, e impor que a indução

> [...] satisfaça condições de correção apropriadas somente para a dedução lógica clássica é transferir os critérios de avaliação de um domínio para outro, no qual eles são inadequados. Assim, sob esta abordagem, a tarefa da justificação racional da indução, como classicamente estruturada, encontra-se basicamente sem esperanças e torna, de fato, a indução inválida ou não racional” (Grácio, 1999, p. 21).

Assim, o problema da Indução seria dissolvido se nós usássemos corretamente alguns termos, tais como “razoável” e “boas razões”. Os adeptos dessa abordagem acreditam que há uma instituição indutiva, passada de geração em geração e constituída por princípios e critérios baseados na experiência, que norteia o uso correto desses termos.

(iv) Pragmatismo

Como já foi visto, Popper defendia que uma teoria sobre as descobertas poderia interessar às artes, à psicologia, mas não à lógica, pois para ele não existe uma base científica ou lógica que justifique o processo de descoberta. Por isso, em suas obras somente é enfatizado o lado justificativo e explicativo das hipóteses.

> [...] Popper argumenta que não existe uma lógica no processo de descoberta científica, ou qualquer método para a geração ou reconstrução de nossas idéias, uma vez que, em sua opinião, toda descoberta criadora contém um elemento de irracionalidade e acaso (Gonzalez, 2004, p. 250).

Devido a essa concepção, Popper faz parte de um grupo de filósofos que acreditam que apenas os assuntos referentes ao *contexto da justificação* devem ser relacionados com a lógica e a filosofia da ciência. Contrapondo esse grupo, existe um outro, *ligado ao contexto da descoberta*, que defende a existência de uma lógica da descoberta fundamentada em procedimentos racionais.

> “A lógica da descoberta constitui, de acordo com o ponto de vista dos seus defensores, uma área de inquérito (em geral relacionada à resolução de problemas) acerca daquelas classes de procedimentos racionais que podem – e apenas podem – conduzir à sugestão de hipótese, leis ou teorias” (Gonzalez, 1985, p. 4).

Dentro do próprio grupo de defensores de uma lógica da descoberta existe ainda divergências quanto à questão descoberta-justificação. Há aqueles que acreditam numa diferença entre lógica da descoberta e lógica da justificação, tais como Peirce e Hanson, e há aqueles que não admitem tal distinção, tal como McLaughlin.

McLaughlin é um dos defensores da concepção de que o processo da descoberta é indutivo e, como tal, deve ser tratado indutivamente. Consequentemente, tal vertente encontra os mesmos obstáculos lógicos inerentes à indução. Já Peirce, Hanson, Salmon e outros, acreditam que há três tipos de inferências subjacentes ao processo da descoberta: a dedução, a indução e a abdução. Como já explicamos esses processos inferenciais, não os retomaremos neste momento.

Conforme exposto, sistematizar os raciocínios indutivos não é uma tarefa simples e fácil, pois precisamos lidar com entraves filosóficos muito complexos tais como, por exemplo, o problema da justificação da indução. Além disso, a utilização da própria linguagem, seja ela natural ou artificial, também dificulta essa formalização.

Em Begriffschrift, Frege analisou todas as vantagens e desvantagens da utilização da linguagem natural e artificial na formalização de sistemas que se caracterizam por serem objetivos e sistemáticos. Defendia a concepção de que a linguagem natural por ser historicamente evolutiva, subjetiva, muitas vezes vaga e incerta, não é a ferramenta adequada para se utilizar em um âmbito com características contrárias às delas, tal como a matemática e a lógica.

Não há dúvidas a respeito da versatilidade e da eficiência da linguagem natural na representação do raciocínio humano, ou seja, conseguimos expressar todos os nossos pensamentos e raciocínios, lingüisticamente. Qualquer tipo de raciocínio indutivo pode ser representado no discurso informal. No entanto, a vaguidade da indução e da própria linguagem dificulta a formalização deste tipo de raciocínio, em um sistema artificial.

Tanto Frege quanto Russell, examinavam a vaguidade como um "[...] defeito das línguas naturais, algo a ser banido de uma linguagem formal aceita" (Haack, 1998, p. 219). E foi isso que Frege fez quando desenvolveu a linguagem artificial que fundamentaria todos os sistemas lógico-matemáticos vigentes e subseqüentes. Além disso, Frege insistiu na superioridade da linguagem artificial, em detrimento da natural, nas representações formais, explícitas e sem vaguidade, das sentenças matemáticas e lógicas.

De acordo com Haack (1998, p. 17), logo após a publicação de Begriffschrift, muitos pesquisadores se voltaram para o estudo de sistemas lógicos formalizados por essa nova linguagem, tanto em uma vertente mais matemática/lógica, quanto em uma mais filosófica. Haack distinguiu 4 áreas principais de desenvolvimento na lógica: duas em estudos formais e duas em análises filosóficas, tais como:

i) desenvolvimento da lógica clássica padrão, com a apresentação de uma sintaxe e semântica fundamentadas em uma linguagem artificial;

ii) desenvolvimentos de cálculos não-clássicos;

iii) estudo filosófico da aplicação desses sistemas no discurso informal, na análise e

interpretação dos conectivos sentenciais e dos quantificadores nas mais diversas sistematizações da lógica;
iv) análise e estudo dos objetivos da importância e relevância da formalização das linguagens naturais em uma visão filosófica.

A linguagem artificial *fregeana* eliminou os problemas de subjetividade, vaguidade e imprecisão da linguagem natural. No entanto, outros problemas surgiram em decorrência da extensa aplicabilidade dessa linguagem em outras áreas de pesquisa, tal como a computação, e na própria lógica. Por exemplo, se a lógica é tida como uma disciplina que busca formalizar o raciocínio humano, porém, tal objetivo não é alcançado quando excluímos da linguagem lógica uma parte significativa de expressões do raciocínio humano, como por exemplo, os argumentos indutivos.

Diante disso, houve uma forte pressão por parte da comunidade científica em prol de uma modificação sintática e/ou semântica na lógica clássica, com o intuito de poder, com isso, representar os vários tipos de argumentos informais. Algumas respostas a essa pressão foram apresentadas pela comunidade, tais como:

- Admissão dos argumentos tidos como problemáticos, tais como os indutivos ou informais, sem qualquer mudança no aparato sintático e semântico da lógica clássica. Esses argumentos seriam representados por alguns ajustes "[...] na maneira pela qual os argumentos informais incômodos são representados no formalismo" (Haack, 1998, p. 209).
- Os argumentos problemáticos são admitidos, conservando a sintaxe da lógica clássica e modificando a sua estrutura semântica;
- Ampliação do aparato lógico, possibilitando assim a formalização desses argumentos problemáticos. É importante ressaltarmos que quando se amplia um sistema, tudo que era válido anteriormente deve continuar prevalecendo com a extensão. Esses sistemas ampliados são conhecidos como *lógicas não-clássicas complementares*.
- Modificação da estrutura sintática e semântica da lógica. Esses sistemas constituem o que denominamos por *lógicas não-clássicas alternativas*.

Os sistemas lógicos clássicos, nos quais todas as suas fórmulas são verdadeiras ou falsas, são inadequados "[...] para a avaliação de argumentos informais com premissas e/ou conclusões que, em razão de sua vaguidade, hesitamos em chamar seja de definitivamente verdadeiras ou de definitivamente falsas" (Haack, 1998, p. 220).

Segundo Haack (1998), há duas soluções para resolver esse problema de formalização dos argumentos do tipo indutivo: "[...] por em ordem os argumentos informais vagos antes de submetê-los a avaliação pelos padrões da lógica clássica bivalente, ou conceber algum sistema lógico formal alternativo que se aplique a eles mais diretamente" (Haack, 1998, p. 221).

Uma das propostas mais conhecidas de formalização do raciocínio indutivo ou sob incerteza é a lógica do padrão, mundialmente conhecida como *Default Logic*, que se caracteriza por inferir conclusões a partir de um conjunto de informações do tipo padrão (*defaults)*, ou seja, argumentos da forma "na ausência de qualquer informação contrária" ou "é consistente afirmar que" (Grácio, 1999). Por exemplo, percebemos que é um padrão as cobras rastejarem, ou seja, nunca vimos uma cobra que andasse de maneira diferente. Diante disso, podemos concluir que uma cobra particular "x" rasteja.

Uma característica essencial da lógica do padrão é a sua não-monotonicidade, isto é, tanto o aparato sintático quanto o semântico desse sistema lógico precisam ser periodicamente revisados à medida que novas informações são adicionadas na estrutura. No entanto, conforme apontaram Sette, Carnielli e Veloso (1999), Grácio (1999) e Silvestrini (2005), tais sistemas são computacionalmente desvantajosos, pois a cada demonstração, todas as regras, premissas, teorema, etc., precisam ser reavaliados e isso pressupõe uma "[...] falta de localidade dos procedimentos de demonstração" (Sivestrini, 2005, p. 54).

Além disso, eles alegam que apesar desses sistemas terem sido elaborados com o intuito de capturar as noções intuitivas de "quase todos" ou a "maioria" tal fato, às vezes, não ocorre, pois não há, nesses sistemas, preocupação em se "[...] tomar como modelo de suas teorias somente estruturas nas quais, de fato, quase todos indivíduos satisfaçam as proposições acreditadas" (Grácio, 1999, p. 72), isto é, podem existir modelos na teoria nos quais determinadas proposições não sejam acreditadas por "quase todos" ou a "maioria" dos indivíduos.

Diante desse contexto, Sette, Carnielli e Veloso (1999) formalizaram um sistema monotônico, no qual os problemas supracitados não estavam presentes. Motivada por esse trabalho, Grácio desenvolveu uma família de lógicas monotônicas, denominadas lógicas moduladas, que capturam a noção intuitiva de "uma boa parte", "maioria" e "muitos", conforme já explicitados nos capítulos precedentes.

Conforme o próprio título sugere, o objetivo desse capítulo é argüir um pouco a respeito da concepção intuitiva do "muito" e da lógica do muito elaborada por Grácio.

Se formos buscar fundamentação teórica na gramática a respeito do muito, nos defrontamos com uma situação um tanto quanto complicada, pois morfologicamente o “muito” é classificado como um pronome indefinido, quando acompanha um substantivo ou como advérbio de intensidade, quando acompanha um verbo. No dicionário Aurélio, muito é denotado por: “pronome indefinido: que significa em grande número ou em grande intensidade”.

Mas, o que, de fato, significa esse “grande número” ou essa “grande intensidade”? A noção de muito para uma pessoa genérica A pode ser diferente da concepção de uma pessoa B. Por exemplo, imaginemos duas pessoas de maneira que uma delas mora em Salvador (A), Brasil, e a outra no Alasca (B). Se em um dia, cuja temperatura média foi de 12 graus, perguntássemos a elas se está “muito frio”, a pessoa A certamente responderia que sim e a B que não, pois ambas vivem em países com situações climáticas completamente divergentes. A concepção de muito para os sujeitos foram, neste caso, distintas. E nenhum deles está errado.

O conceito de “muitos” poderia, ainda, estar associado à noção de cardinalidade de conjuntos, ou seja, estar vinculado à quantidade de elementos de um dado conjunto. Por exemplo, uma pessoa A do Saara poderia afirmar que choveu muitos dias em um determinado mês, ao observar que choveu por 3 dias. Uma pessoa B de Manaus poderia, ao contrário, dizer que choveu pouco no caso de ter chovido 3 dias no mesmo período.

Poderíamos, no entanto, estipular que o conceito de muito está vinculado a uma cardinalidade numérica, como por exemplo, 70% de evidências a favor de um fato em um dado universo. Ou seja, se em um universo de 100 pessoas, 70 ou mais gostam de vinho, é correto induzir que muitos gostam de vinho. Mas, qual o critério adotado para se estabelecer o 70%, e não o 65% ou 75% como fronteira? Se 40% das pessoas gostam de vinho, o que nos impede de alegar que “muitas” pessoas gostam de vinho? Qual é o limite ou fronteira para deixarmos de considerar que muitos gostam de vinho?

Além disso, a análise do universo é de suma importância para a noção de muito, pois se considerarmos, por exemplo, o universo das crianças em fase de alfabetização das escolas públicas do Estado de São Paulo, e verificarmos que de cada 40 alunos, 8 (20%) não estão alfabetizados, podemos dizer que muitos alunos precisam ser alfabetizados nas escolas públicas estaduais paulistas. No entanto, a análise será diferente se considerarmos um país africano ou, então, verificarmos o Sistema de Ensino da Suíça. Observamos, assim, que o significado de “muitos” é algo subjetivo e contextual.

Conforme já exposto, formalizar o conceito de muito é fundamentar um raciocínio do tipo indutivo e há inúmeros problemas filosóficos inerentes a este tipo de formalização. Filosofar é, dentre muitas outras acepções, questionar tudo aquilo que acreditamos. No entanto, expor ou argüir a respeito do que são crenças é um tanto quanto complicado, pois não há, dentro da própria comunidade científica, um consenso a respeito da definição do que realmente é uma crença.

Elencamos, nos parágrafos precedentes, uma série de definições das mesmas e podemos pensar em uma formalização para cada uma delas, mesmo que não consigamos realizar tal fato. Talvez devêssemos pensar, como Barwise e Cooper fizeram com os Universais da linguagem, em encontrar uma definição universal que contemplasse todas as demais e que todos os pesquisadores, das mais diversas áreas, concordassem com ela. Mas diante desse contexto, a filosofia surgiria e questionaria qual seria o critério de relevância adotado para se escolher uma definição de crenças do tipo “A” em detrimento de uma do tipo “B”. Podemos, portanto, concluir que tal uniformização é algo dificílimo de ser realizado, pelo menos até o momento.

Sem unificação, uma alternativa seria a escolha de uma das diversas definições de crenças que há na literatura. Grácio optou por uma definição que tivesse um viés mais matemático do que filosófico. Embora não tenha trabalhado com a cardinalidade de conjuntos, no caso da lógica do muito, há uma estrutura matemática que dará subsídios à concepção de “muitos”, o qual está, nesse caso, vinculado à noção de um conjunto grande de evidências.

A lógica do muito apresenta alguns pontos nebulosos que a torna um tanto quanto limitável. Um deles está no fato de que a estrutura matemática que fundamenta a concepção de muito é definida a partir de conjuntos que já possuem muitos elementos, isto é: uma família fechada superiormente própria. Não era objetivo central de Grácio, na sua tese de doutorado, definir o que significa ser “muitos”, pois nem sabemos se isso é possível. Mas sim, formalizar um sistema lógico, correto e completo, que trabalhasse com a noção de “muitos”, na concepção de um conjunto grande de evidências. Não há dúvidas, no entanto, de que “[...] parece faltar algo que diga quando podemos considerar, para um dado universo de discurso, que já podemos contar com “muitos” indivíduos” (Grácio, Feitosa e Nascimento, 2006, p. 27).

Um outro caso é a possibilidade de considerarmos em um universo com mais de 15 elementos, que um conjunto unitário possua muitos elementos deste universo. A definição de família fechada superiormente favorece tal interpretação. E isso parece ser, intuitivamente, falso.

Apesar dos problemas mencionados, a formalização das crenças por Grácio na sua Tese permite que tratemos, dedutivamente, argumentos do tipo indutivos. Se houver na literatura acadêmica alguma definição formal do “muitos”, por exemplo uma definição fuzzy, Grácio nos possibilita trabalharmos com tal conceito logicamente. Além disso, em decorrência desta dissertação de mestrado, podemos apresentar essa lógica em um sistema dedutivo por tablôs.

5.1 As lógicas moduladas e as propriedades da linguagem natural apresentadas por Barwise e Cooper

Os quantificadores, na visão de Barwise e Cooper, são formados por intermédio da união entre um determinador de contagem com uma expressão de conjuntos. Podemos então considerar, pelas definições apresentadas no capítulo 2 sobre os quantificadores modulados, “[...] a linguagem das lógicas moduladas como uma possível formalização para um fragmento das linguagens naturais que trate das quantificações sobre contagem” (Grácio, Feitosa , 2005, p. 43).

Com isso, contrapomos a concepção abordada por Barwise e Cooper de que a universalidade das NPs determina uma distinção entre as linguagens artificiais e naturais. Com as lógicas moduladas, tal diferença não se concretiza, haja vista que podemos considerar os quantificadores modulados análogos aos quantificadores generalizados de Barwise e Cooper.

Uma outra oposição entre os dois sistemas está na propriedade semântica de um quantificador se forte e fraco. Para Grácio e Feitosa (2005, p. 43), “todos os determinadores das lógicas moduladas são fortes, desde que o domínio de discurso sempre pertença à família de conjuntos definida pelo quantificador”, e essa inclusão do universo do discurso no sistema lógico modulado é garantida por um dos axiomas das lógicas moduladas, o qual nos diz que: $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Qx\ \varphi(x)$. Já Barwise e Cooper, 1981, classificam o quantificador “muito” como fraco.

Em relação à propriedade dos quantificadores serem próprios ou crivos, podemos afirmar que todos os quantificadores modulados são próprios, pois todos apresentam em sua sintaxe dois axiomas que garantem que tanto o quantificador Universal quanto o Existencial fazem parte e estão diretamente relacionados com as famílias dos conjuntos que definem os quantificadores modulados.

Em se tratando da propriedade da monotonicidade, os quantificadores modulados “muito” e “quase todos” são monotônicos crescentes, em decorrência do seguinte axioma das correspondentes lógicas moduladas formalizadas por tais quantificadores: $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx\ \varphi(x) \rightarrow Qx\ \psi(x))$. O quantificador “uma boa parte”, segundo Grácio e Feitosa (2005, p. 43), “[...] é não monotônico, devido a sua axiomática e interpretação dada pelas estruturas de topologias reduzidas”.

Uma característica importante da lógica do muito, modulada pelo quantificador G, é que em um universo de discurso qualquer, sentenças do tipo $Gx\ \varphi(x)$ e $Gx\ \neg\varphi(x)$ não são contrárias, uma vez que podem ser ambas verdadeiras. Um exemplo disso, retirado de Grácio (1999), é o que se segue: considerando o universo dos números naturais, ambas as sentenças que “muitos números naturais são pares” e “muitos números naturais não são pares, ou seja, são ímpares” são verdadeiras.

Diante dessa explanação, verificamos e analisamos uma maneira de se formalizar quantificadores generalizados naturais a partir de uma perspectiva e estrutura totalmente matemática, por intermédio das lógicas moduladas.

O objetivo de se começar esse capítulo com uma analogia ao filme Matrix foi para dar subsídios ao caráter filosófico dessa dissertação. Falar e questionar sobre as crenças ou argumentos indutivos é buscar, de uma maneira ou de outra, conhecer a nós mesmos, isto é, indagarmos sobre o que acreditamos. Diariamente, somos confrontados com inúmeras informações a respeito de máquinas que realizam as mais diversificadas tarefas, tal como mandar uma informação do outro lado do mundo em milésimos de segundos. No entanto, quando se trata das situações simples da vida humana, tal como pegar um copo de plástico, percebemos que isso não é tão fácil quanto imaginávamos.

Ao longo dessa dissertação e também por intermédio do trabalho de Grácio (1999), uma concepção aparentemente tão trivial, como o conceito de “muitos”, traz consigo inúmeros entraves e questionamentos filosóficos. Poder inserir em uma máquina uma linguagem que trate do “muitos” seria uma grande contribuição científica, pois abriria a possibilidade de termos uma máquina que não apenas emitisse sons programados, mas que conseguisse interpretar uma sentença do tipo “Há muitas pessoas na sala hoje”. A máquina atual pode proferir tais palavras, mas não entende o que isso significa. O mundo virtual é, por enquanto, o que permite a lógica clássica, uma Máquina de Turing, enquanto que o humano navega em um mundo não–clássico, muito mais rico e mais perfeito do que já encontramos, talvez, seja impossível de ser mecanizado. É reconfortante saber que ainda há “muitas” características que nos distingue de uma máquina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Grácio (1999), motivada pelo trabalho desenvolvido por Sette, Carnielli e Veloso (1999), no qual os autores apresentam uma abordagem monotônica para sistematização dos argumentos indutivos do tipo “quase todos” ou “genericamente”, também propõe uma família de sistemas monotônicos que formalizam as concepções indutivas de “a maioria”, “uma boa parte” e “muitos”. Segundo a autora (1999, p. 160)

> O que diferencia esses sistemas é a forma particular de argumento indutivo usado para gerar as proposições sustentadas pelas evidências, capturada semanticamente por uma estrutura particular e sintaticamente formalizada pelos axiomas específicos para aquela forma de raciocínio.

Cada sistema é uma extensão da lógica clássica de primeira ordem por intermédio da inclusão de um novo quantificador generalizado no escopo sintático clássico. Esse quantificador, denominado *Quantificador Modulado*, é interpretado por um subconjunto Q das partes de um universo, o qual representa, intuitivamente, um conjunto de proposições sustentadas pelas evidências. Assim, “[...] em cada sistema, o conjunto de indivíduos que satisfaz a proposição sob o escopo do quantificador generalizado é considerado um conjunto de evidências adequado para realizar o tipo de argumento indutivo a que o quantificador se propõe” (Grácio, 1999, p. 172).

Em se tratando da lógica do muito, vimos que a estrutura matemática que formaliza o conceito de ‘muito’ é o de uma *família fechada superiormente e própria*, e percebe-se que a definição do conceito de “muito”, segundo a estrutura, parte do pressuposto que já possuímos um conjunto com muitos elementos e que, assim, a partir disso, podemos trabalhar com conjuntos com muitos elementos. Mas, então, o que é muito? Segundo Grácio, “muito” denota um conjunto grande de evidências. Mas como formalizar o primeiro conjunto, ou seja, esse conjunto inicial que dará o impulso inicial para a formação de todos os outros?

O trabalho de Grácio (1999) visava formalizar alguns tipos de concepções indutivas. E isso foi alcançado com o desenvolvimento das lógicas moduladas. No entanto, a definição do primeiro conjunto que definiria o ‘muito’ ou uma ‘boa parte’ não era prioridade no trabalho, pois conforme já exposto no capítulo precedente, o conceito de ‘muito’ é algo subjetivo e contextual.

Uma sugestão para um possível trabalho futuro seria a apresentação de um sistema modulado com conceitos subjacentes à lógica fuzzy, que fosse capaz de formalizar o conceito inicial de “muito”.

Uma outra possibilidade seria a análise da questão da “fronteira” nesse novo sistema, isto é: qual é o grau de pertinência que se estabeleceria em um operador fuzzy para dizer que a partir daquele ponto podemos dizer que há muitos elementos no conjunto. Será que isso seria possível?

Vimos que as lógicas moduladas nos possibilitam trabalhar e analisar questões lingüísticas segundo as concepções defendidas por Barwise e Cooper. Poderíamos, a partir disso, verificar se esse novo “sistema modulado fuzzy” também contribuiria para a compreensão das relações existente entre lógica e linguagem.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, H. A. *Gramática ilustrada*. São Paulo: Moderna, 1990.

ATTIE, J. P. *Lógica clássica:* aplicações e conexões. Minicurso ministrado na I Semana da matemática da Universidade de Santa Cruz, Ilhéus: Bahia, 11 a 13 de dezembro de 2002. Disponível em: <http://www.uesc.br/arbelos/arquivo/sm/2002/mc.02.doc>. Acesso em: 31. ago. 2006.

BADIA, A. Safety, domain independence and generalized quantification. *Data & Knowledge Engineering*, v. 38, n. 2, 2001. p. 147-172. Disponível em: <http://www.elsevier.com/locate/datak>. Acesso em: 07. out. 2005.

BARWISE, J. *Admissible sets and structures:* an approach to definable theory. New York: Springer- Verlag, 1975.

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, v. 4, Holland: Reidel Publishing Company, 1981. p. 159-219.

BENTHEN, J. V. Determiners and logic. *Linguistics and Philosophy*, v. 6, n. 4. Holland: Reidel Publishing Company, 1983. p. 447 – 449.

BENTHEN, J. V.; WESTERTÅHL, D. Directions in generalized quantifiers. *Studia logica*, v. 55, 1985. p. 389-419.

BETH, E. W. *The foundations of mathematics*. Holland: North Holland, 1959.

BUCHSBAUM, A.; NETO, M. C. L. Raciocínio por tablôs pela forma direta. *Revista eletrônica de sistemas de informação,* v. 2, 2005. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/resi/edicao06/Art50.pdf>. Acesso em: 13. maio. 2006.

BUCHSBAUM, A.; PEQUENO, T. O método de tableaux generalizado e sua aplicação ao raciocínio automático em lógicas não clássicas. *O que nos faz pensar*, v. 3. Cadernos do departamento de filosofia da PUC-Rio, 1990. p. 81-96. Disponível em <http://wwwexe.inf.ufsc.br/~arthur/publicacoes/artigos_revistas/OMetododosTableauxGeneralizado.pdf>. Acesso em: 14. maio. 2006.

CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E.; BIANCONI, R. *Lógica e aplicações*: matemática, ciência da computação e filosofia. Versão preliminar: capítulos 1 a 5. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, 2006. Disponível em: <http://www.cle.inucamp.br/prof/coniglio/LIVRO.pdf>. Acesso em: 17. maio. 2006.

CARVALHO, D. G.; NASCIMENTO, M. *Gramática histórica*. São Paulo: Ática, 1970.

CASTRO, M. A. *Hierarquia de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas de C_n de Da Costa*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

CHANDRA, A; HAREL, D. (1982) *Structure and complexity of relational queries*. J. Comput: System Sci, p. 99 – 128.

CHAUÍ, M. *Convite à filosofia* . São Paulo: Ática, 2006.

CHAUÍ, M. Convite à filosofia . In *Unidade 5: A lógica*. Ática: São Paulo, 2000. Disponível para download na página pessoal da autora:<http://br.geocities.com/mcrost 02/index.htm>. Acesso em: 31. ago. 2006.

COUTINHO, I. L. C. *Pontos de gramática histórica*. Rio de Janeiro: Livraria Acadêmica, 1968.

D'OTTAVIANO, I. M. L. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (Org). *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*, v. 11. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE, 1992. p. 65-93. (Coleção CLE)

D'OTTAVIANO, I. M. L; FEITOSA, H. A. História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In NOBRE, S. (org.). *Coleção História da Matemática para Professores*. Rio Claro, 2003.

DUPUY, J. P. *Nas origens das ciências cognitivas*. São Paulo: Editora Unesp, 1996.

ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 1972.

EPSTEIN, R. L.; CARNIELLI, W. A. *Computability:* computable functions, logic, and the foundations of mathematics. Pacific Grove: Wadsworth & Brooks, 1989.

FAGIN, R. Finite-model theory- a personal perspective. *Theoretical Computer Sci-*

ence, v. 116, 1993. p. 3 – 31.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FENSTAD, J. E. Models for Natural Languages. *Essays on Mathematical and Philosophical Logic*. Hintikka, J.; Niiniluoto, I. ; Saarinen, E. (Ed.). London: Reidel Publishing Company, 1978. p. 315 – 340.

FREGE, F. L. G. *Prólogo às leis básicas da aritmética*. Tradução de Celso R. Braida (NIM/UFSC). Original: *Grundgesetze der Arithmetik*, *Begriffsschriftlich abgeleitet*; Zweited unverändert Auflage, Hildesheim, Georg Olms, 1962; p. v – xxvi. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~nim/grundgesetze.pdf>. Acesso em: 25. out. 2005.

FREGE, F. L. G. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert. Translated as *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in J. vanHeijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1879.

FUHRKEN, G. Skolem-type normal forms for first-order languages with a generalized quantifiers. *Fund. Mathematical*, vol. 54, 1964. p. 291 – 302.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schlieben. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, 1935.

GONZALEZ, M. E. Q.; HASELAGER, W. F. G. Creativity and self-organization: contributions from cognitive science and semiotics. S.E.E.D. Journal . *Semiotics, Evolution, Energy and Development*, v. 33, 2003. p. 61-70.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A. Lógicas moduladas: implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, v. 4, n.1, 2005. p. 34 - 46.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Muitos: formalizando um conceito impreciso. *Revista Eletrônica Informação e Cognição,* v. 5, n. 2, 2006. p. 20-28.

GRÁCIO, M. C. C. ; FEITOSA, H. A. *Sobre os quantificadores generalizados*. Universidade Estadual Paulista: Marília, [s.d] (artigo não-publicado).

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. São Paulo: Editora Unesp, 1998.

HINTIKKA, J. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, v. 8, 1955.

HUME, D. *Investigações acerca do entendimento humano*. São Paulo: Ed. Nacional, EdUSP, 1972.

KANG, H. *Quantifier spreading:* linguistic and pragmatic considerations. London: 2000. Disponível em : <http://www.elsevier.nl/locate/lingua>. Acesso em: 11. nov. 2005.

KEISLER, H. J. Logic with the quantifier “there exist uncontably many”. *Annals of Mathematical Logic*, v. 1. Holland: North – Holland Publishing Company, 1970. p. 1 – 93.

KOLAITIS, P. G.; VÄÄNÄNEN, J. A. Generalized quantifiers and pebbe games on finite structures. *Annals of Pure Applied Logic*, v. 74, 1995. p. 23 – 75.

LEROY, M. *As grandes descobertas da lingüística moderna*. Tradução de Izidoro Blikstein e José Paulo Paes. São Paulo: Cultrix, 1971.

LINDSTRÖM, P. First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers. *Theoria: A swedish journal of Philosophy and Psychology*, v. 32, 1966. p. 186- 195.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 3.ed. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/ Cole Advanced Books & Software, 1987.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

MOSTOWISK, A. On a generalization of quantifiers. *Fund. Mathematical*, v. 44, 1957. p. 12- 36.

NETO, M. C. L. *Um método dos tablôs por prova direta para a Lógica Clássica*. Dissertação de mestrado. Florianópolis: Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004. Disponível em <http://www.inf.ufsc.br/~l3c/artigos/Dissertacao.pdf>. Acesso em: 13. maio. 2006.

NICOLA, J.; INFANTE, U. *Gramática contemporânea da língua portuguesa*. São Paulo: Scipione, 1990.

O que uma máquina faz, mas não deveria fazer: Complexidade computacional. O problema P versus NP. Disponível em:<http://www.cdcc.usp.br/matematica/11.htm >. Acesso em: 19. abr. 2006.

QUINTON, A. Filosofia. Tradução de Paulo Ruas. *Oxforf Companion to Philosophy*. OUP: Oxford University,1995. Disponível em: <http://criticanarede.com/fil_ filosofia.html>. Acesso em: 25. out. 2005.

SAINT-DIZIER, P. *Default logic, natural language and generalized quantifiers*. Irisa-Inria, Campus de Beaulieu: France, (s.d.). p. 355-360. Disponível em: <acl.ldc.upenn.edu/C/C88/C88-2117.pdf>. Acesso em: 25. out. 2005.

SALMON, W. C. *Lógica*. Tradução de Álvaro Cabral. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-hall do Brasil, 1993.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Ed.) *Pratica*: *Proofs, types and categories*. Rio de Janeiro: PUC, 1999. p. 127-158.

SGRO, J. Completeness theorems for topological models. *Annals of Mathematical Logic*, v. 11, 1977. p. 173 – 193.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Reading: Addison-Wesley, 1967.

SILVESTRINI, L. H. C. *Tableaux e Indução na Lógica do Plausível*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia - Área de Concentração em Epistemologia e Lógica). Marília: Faculdade de Filosofia e Ciências, Unesp, 2005.

SMULLYAN, R. M. *First-Order Logic*. Republicação do 1º trabalho publicado pela Springer-Verlag, New York, 1968. New York: Dover Publications, 1994.

SUNDHOLM, G. System of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.). *Handbook of Philosophical Logic*, v. 1. London: Reidel Publishing Company, 1983. Cap. 1-2, p. 133 – 188.

TUFANO, D. *Estudo de língua e literatura*. São Paulo: Moderna, 1990.

VAUGHT, R. The completeness of logic with the added quantifier “there are uncountably many”. *Fund. Mathematical*, vol. 54, 1964. p. 303 – 304.

VÄÄNÄNEN, J. A. Generalized quantifiers. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, vol. 62, 1997. Disponível em: <www.eatcs.org>. Acesso em: 13. maio. 2006.

VIEIRA, R.; LIMA, V. L. S. *Lingüística computacional*: princípios e aplicações. (s.d.). Disponível em: <http://www.inf.unisinos.br/~renata/cursos/pln/lingcompintro.pdf >. Acesso em: 03. fev. 2006.

WESTERTÅHL, D. Generalized Quantifiers. *Stanford Encyclopedia of Philopsophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers>. Acesso em: 11. jan. 2006.

WESTERTÅHL, D. Logical constants in quantifier languages. *Linguistic and Philosophy*, v. 8, 1985. p. 387-413.

WESTERTÅHL, D. Some Result on Quantifier. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 25, n. 2, 1984. p. 152 – 170.

WESTERTÅHL, D.; PETERS, S. The concept of a (generalized) quantifiers. In *Quantifiers*. DRAFT: 2002. Cap. 2. Disponível em: <http://www.stanford.edu/group/nassl li/courses/peters-wes/PWbookdraft2-3.pdf >. Acesso em: 11. jan. 2006.

ZALTA, E. N. Gottlob Frege. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entri s/frege/>. Acesso em: 25. out. 2005.