



**MODELAGEM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES DO
PROBLEMA DE COLORAÇÃO EM GRAFOS**

Daniele Lozano

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Modelagem Matemática e Aplicações do Problema de Coloração em Grafos

Daniele Lozano

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria do Socorro Nogueira Rangel

São José do Rio Preto

Janeiro de 2007

Lozano, Daniele

Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos/Daniele Lozano – São José do Rio Preto : [s.n.], 2007 79 f. il; 30cm.

Orientador: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Teoria dos grafos. 2. Programação inteira. 3. Polinômio cromático. 4. Coloração em grafos - Estudo e ensino. I. Rangel, Maria do Socorro Nogueira. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.17

BANCA EXAMINADORA

Titulares

Prof.^a Dr.^a Maria do Socorro Nogueira Rangel - Orientadora

Prof. Dr. Samuel Jurkiewicz

Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali

Suplentes

Prof.^a Dr.^a Sonia Cristina Poltroniere Silva

Prof.^a Dr.^a Eliana Xavier Linhares de Andrade

*A minha sobrinha, Victoria,
dedico.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus professores de graduação e em especial à Prof.^a Sueli e ao Prof. Balbo, por acreditarem em mim e também pelo incentivo.

Em segundo lugar, devo agradecer à Prof.^a Socorro por ter aceitado o desafio de me orientar. Tenho que agradecer também cada uma das suas cobranças e críticas, elas me fizeram crescer, cada uma de forma diferente, e apesar de ficar brava, no final eu sempre sabia que você estava certa, mais uma vez!

Aos meus pais pela paciência comigo e de me buscar e levar todas as vezes que vim para Rio Preto. A minha irmã, principalmente por ter me dado uma sobrinha tão linda e fofa!

À Juliana e a Patrícia, grandes amigas e companheiras de república em Rio Preto, por todo o tempo bom que passamos juntas e pela paciência em me ouvir (nem me lembro quantas vezes te atormentei com a Matemática, não é Paty?!). A Fanny, minha companheira de quarto.

Aos moradores da já extinta TranQra, em especial ao Ricardo, Ubarana e Morera, pelas boas risadas, baladas, companhia nos finais de semana e por sempre me acolherem na república de vocês. Um agradecimento mais que especial ao Ricardo por todo esse tempo que estamos juntos.

A todos os integrantes da Casa Rosada, por me abrigarem enquanto eu procurava uma casa para morar e pelos maravilhosos churrascos que vocês sempre fazem.

A todos os amigos da pós-graduação. Gabi, obrigada pela ótima companhia no ISMP!

A Prof.^a Celia Pires, por apoiar a nossa idéia e permitir a realização da Oficina de

Ensino com seus alunos.

Ao pessoal da Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino de Jundiaí, vocês são ótimas!
A todos da escola E.E. Tibúrcio Estevam de Siqueira e E.E. Prof. Orozimbo Sóstena, mas principalmente à coordenadora Teresa, pela confiança que tem em mim e pelo acolhimento.

Ao CNPq e à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar o problema de coloração em grafos sob diferentes perspectivas. Caracterizamos o polinômio cromático de um grafo e enunciamos algumas de suas propriedades. Apresentamos duas formulações matemáticas para o problema de coloração de vértices e um método de solução para cada formulação. Apresentamos e discutimos propostas de atividades para o desenvolvimento de uma Oficina de Coloração para alunos do Ensino Médio e Fundamental.

Palavras-chave: coloração em grafos, polinômio cromático, programação inteira, oficina de ensino.

Abstract

In this work the graph coloring problem was presented under different perspectives. We define the chromatic polynomials of a graph and describe some of its properties. Furthermore, two solution methods for the vertex coloring problem, through integer programming formulation, has been presented. We propose and discuss some activities for the development of a Workshop for students of secondary school.

Keywords: graph coloring, chromatic polynomials, integer programming, education workshop.

Sumário

1	Introdução	1
2	Tópicos em Teoria dos Grafos e Poliedros	3
2.1	Conceitos de Grafos	3
2.2	Tipos de Grafos	9
2.3	Representação Computacional	14
2.4	Operações em Grafos	17
2.5	Poliedros, faces e facetas	19
3	Aspectos Teóricos do Problema de Coloração	24
3.1	Coloração de Vértices	24
3.2	Polinômio Cromático	28
3.3	Problemas em Aberto	40
4	Propostas de Solução do Problema de Coloração	42
4.1	Modelos de Programação Inteira	42
4.1.1	Formulações Clássicas	43
4.1.2	Reformulação: Inequações válidas	47
4.2	Métodos de Solução	56
4.2.1	Geração de Colunas	58
4.2.2	<i>Branch-and-Cut</i>	59

5	Oficina de Coloração para o Ensino Fundamental e Médio	61
5.1	Propostas de Atividades	62
5.1.1	Atividades do 1º Bloco	62
5.1.2	Atividades do 2º Bloco	64
5.2	Desenvolvimento da Oficina de Coloração	66
5.2.1	Ensino Médio	67
5.2.2	Ensino Fundamental	70
5.3	Avaliação da Oficina	70
6	Considerações Finais	72
	Referências Bibliográficas	74
	Índice Remissivo	78

Capítulo 1

Introdução

O problema de coloração de vértices em grafos é um dos problemas mais estudados em Teoria dos Grafos devido à sua relevância em campos práticos e teóricos. Esse problema pode ser definido como o problema de achar o menor número de cores, k , tal que exista uma (k) -coloração do grafo G , ou seja, a atribuição de k cores a cada um dos vértices de G , sem que vértices adjacentes recebam a mesma cor. Este número mínimo de cores, k , é denominado número cromático de G .

Do ponto de vista teórico, o problema de coloração em grafos encontra-se na classe NP -difícil (e.g. [23], [5]), logo é pouco provável que ele possa ser resolvido de maneira exata em tempo polinomial. Do ponto de vista prático, os algoritmos exatos existentes atualmente se tornam inviáveis conforme aumenta-se o número de vértices do grafo, e até mesmo para grafos relativamente pequenos, esses métodos extrapolam, em geral, limites de tempo aceitáveis.

Um dos elementos importantes para melhorar a eficiência desses métodos é a determinação de bons limites inferiores e superiores para o valor ótimo do problema. A importância do problema de coloração tem incentivado as pesquisas nesse sentido, buscando métodos que aproximem os limites inferiores do número cromático do grafo.

Nesta dissertação estuda-se o problema de coloração de vértices sob diferentes perspectivas. Para isso, no Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos fundamentais em Teoria dos Grafos e Teoria Poliédrica que serão necessários durante a leitura do texto.

No Capítulo 3 são apresentados resultados que relacionam o número cromático com o número de vértices do grafo. Essa relação é usada para definir o polinômio cromático de um grafo, desenvolvido por Birkhoff em 1912, e algumas de suas propriedades. Neste mesmo capítulo, são apresentados alguns problemas sobre as dificuldades teóricas que são encontradas no desenvolvimento dessa área.

No Capítulo 4 são discutidas formulações matemáticas e métodos de solução para o problema de coloração de vértices. Vamos apresentar dois métodos propostos na literatura para determinar limites inferiores e superiores para o número cromático do grafo. O primeiro método é baseado em uma formulação do problema por conjuntos independentes maximais, proposto em 1996 por Mehotra e Trick [30]. Este método é o que apresenta os melhores resultados em termos de limites inferiores. O segundo método, apresentado por Díaz e Zabala, [15, 16] e Coll et al [12], traz uma formulação de programação inteira 0-1 para o problema baseado em restrições de atribuição. Díaz e Zabala em [16] utilizam inequações válidas para o politopo associado a essa formulação como planos de cortes em um algoritmo *Branch-and-Cut*.

O Capítulo 5 é dedicado à apresentação das atividades propostas e discussão da experiência obtida com a realização de uma Oficina de Coloração em uma escola pública de São José do Rio Preto no ano de 2005. A idéia de apresentar este tópico para alunos deste nível escolar foi motivada principalmente pelos trabalhos de Jurkiewicz [26, 25] que desde 2002 se propôs a levar conhecimentos adicionais da Matemática Discreta (principalmente grafos) para a sala de aula do Ensino Médio.

No Capítulo 6 são feitas as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Tópicos em Teoria dos Grafos e Poliedros

Neste capítulo são definidas as notações e são apresentados os conceitos básicos que serão utilizados nos demais capítulos. A notação utilizada ao longo do texto é consistente com a terminologia geralmente aceita em Teoria dos Grafos, e os conceitos aqui definidos, podem ser encontrados em [3], [24], [35], [37] e [36]. Na Seção 2.1 são apresentados os conceitos fundamentais em grafos. Na Seção 2.2 definimos alguns tipos de grafos, que serão utilizados nos Capítulos 3 e 4. A representação computacional de grafos é apresentada na Seção 2.3. Em seguida, na Seção 2.4 é abordado as operações em um grafo, fundamentais para o Capítulo 3, onde definimos polinômios cromáticos. Finalmente, na Seção 2.5, trazemos alguns conceitos básicos necessários sobre Teoria Poliédrica, que serão necessários no Capítulo 4 onde são apresentadas algumas inequações válidas e facetas para uma formulação do problema de coloração.

2.1 Conceitos de Grafos

Vamos iniciar a seção, definindo o que é um grafo.

Definição 2.1. *Um grafo $G(V, A)$ é uma estrutura, composta por dois conjuntos V e A tal que V é um conjunto finito não-vazio e A é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de V .*

Os elementos de V são chamados de *vértices* e $|V| = n$ é a ordem do grafo com n vértices. Os elementos de A são chamados de *arestas*.

Uma definição mais abrangente de grafos pode ser encontrada em [3], onde V é um conjunto discreto e A uma família, cujos elementos são definidos em função dos elementos de V . Se as arestas de A forem definidas como pares ordenados de vértices, dizemos que a aresta diverge de v_i e converge para v_j . Neste caso, o grafo é dito *orientado* ou *direcionado* e será chamado de *digrafo*.

Podemos visualizar um grafo através de uma representação gráfica (Figura 2.1), onde os vértices são pontos distintos do plano e as arestas, são linhas unindo dois vértices. No caso de digrafos (Figura 2.2), as arestas são representadas por setas, que indicam a sua orientação.

$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

$$A = \{ (1,2), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,6), (5,6) \}$$

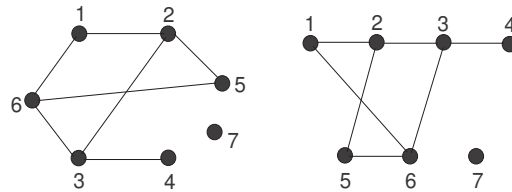


Figura 2.1: Exemplos de representações de um grafo $G(V, A)$.

$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

$$A = \{ (1,2), (1,4), (2,6), (3,4), (4,3), (5,2), (5,3), (5,6), (6,4), (7,3), (7,5) \}$$

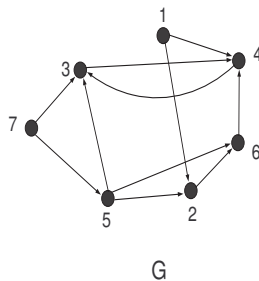


Figura 2.2: Exemplo de digrafo.

Dada uma aresta $e = (v_i, v_j)$, $v_i, v_j \in V$, $i, j = 1, \dots, n$ dizemos que os vértices v_i e v_j são as extremidades da aresta, ou simplesmente que e *incide* sobre v_i e v_j . Se $i = j$, ou seja, uma aresta $e = (v_i, v_i)$ que envolve apenas um vértice, diremos que G possui um *laço* (aresta a_1 na Figura 2.3(b)). Temos que e e w são *arestas paralelas*, se existir em A as arestas $e = (v_i, v_j)$ e $w = (v_i, v_j)$ (arestas e_1 e e_2 da Figura 2.3(a)).

Se substituirmos na definição de grafos o conjunto de arestas A , por um multiconjunto, ou seja, permitirmos a existência de arestas paralelas em G , este será um *multigrafo* (grafo representado na Figura 2.3(a)).

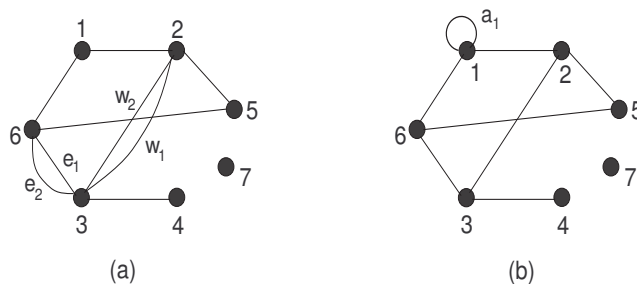


Figura 2.3: Exemplo de multigrafo (a) e um grafo que contém um laço (b).

O conceito de adjacência, é muito importante para algumas definições em Teoria dos Grafos. Dizemos que dois vértices são *adjacentes* ou *vizinhos* quando são extremidades de uma mesma aresta, ou seja, se $e = (v_i, v_j)$ então v_i e v_j são vértices adjacentes.

Na próxima definição, esse conceito aparece indiretamente.

Definição 2.2. Um conjunto *independente* (ou *internamente estável*) de G é um subconjunto $V' \subset V$ tal que para qualquer par de vértices $u, v \in V'$, a aresta (u, v) não está contida em A .

Ou seja, os vértices que fazem parte de um conjunto independente V' não são adjacentes. O número de estabilidade interna de G , $\alpha(G)$, é o tamanho do maior conjunto independente de G . Na Figura 2.4 temos para o grafo G_1 que $V'_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ e $V''_1 = \{2, 4, 6, 8\}$, logo $\alpha(G_1) = 4$. Em G_2 , $\alpha(G_2) = 1$, pois temos um grafo completo (ver Seção 2.2).

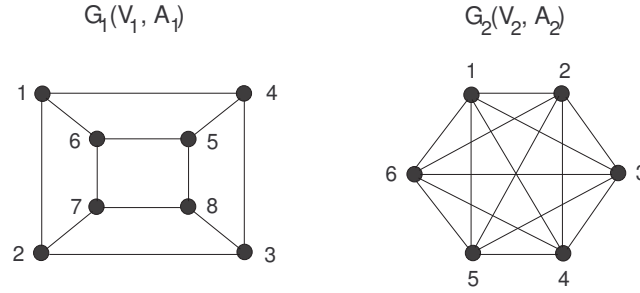


Figura 2.4: Número de estabilidade interna.

Dizemos que um *conjunto independente é maximal* se não puder ser adicionado mais nenhum vértice ao conjunto independente. Os conjuntos independentes V'_1 e V''_1 do grafo G_1 representado na Figura 2.4 descritos acima são exemplos de conjuntos independentes maximais.

Um *subgrafo* de $G(V, A)$ é um grafo onde $G'(V', A')$ é tal que $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$. Se além disso, A' possuir todas as arestas de A , incidentes nos vértices de V' dizemos que G' é o *subgrafo induzido* pelo subconjunto de vértices de V' e será denotado por $G[V']$. Um exemplo de subgrafo do grafo G representado na Figura 2.1, é $V' = \{1, 2, 5, 6\}$ e $A' = \{(1, 2), (2, 5), (5, 6)\}$. Se adicionarmos ao conjunto A' a aresta $(1, 6)$, o subgrafo G' resultante, é um subgrafo induzido.

Um *percurso* é uma sequência finita de arestas, tal que cada aresta aparece apenas uma vez. Se no percurso não há repetição de vértices, ele será chamado de *caminho*, ou seja, um caminho de v_i a v_k é uma sequência de vértices $v_i, \dots, v_k$, tal que $v_i \neq v_k, \forall i, j$. O número total de arestas incluídas em um caminho é igual ao seu comprimento (tamanho).

Exemplos de percurso e caminho podem ser encontrados na Figura 2.5(a), onde $\{2, 6, 4, 3, 1, 4, 5\}$ representa um percurso em G . Um caminho de tamanho 5 pode ser representado pela seguinte sequência de vértices, $\{5, 2, 6, 4, 3, 1\}$ na Figura 2.5(a).

Em um *ciclo* ou *circuito* a sequência $v_i, \dots, v_k, k \geq 3$, é um caminho tal que $v_i = v_k$. Na Figura 2.5(a) a sequência de vértices $\{4, 3, 1, 2, 6, 4\}$ representa um ciclo, e na Figura 2.5(b) um ciclo é representado pela sequência $\{1, 3, 5, 2, 4, 1\}$. A aresta $(1, 5)$ do grafo representado na Figura 2.5(b) é chamada de *corda*, ou seja, uma aresta que une dois vértices não

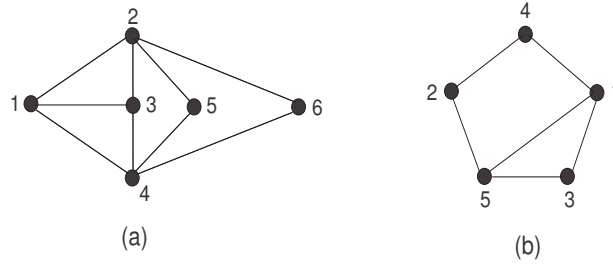


Figura 2.5: Grafos, onde encontramos exemplos de percurso, caminho, ciclo e também uma corda.

consecutivos de um ciclo.

Chamamos um subgrafo $G' \subset G$ de *hole*, se este é um ciclo induzido em G . Um *hole* com k vértices é denotado por C_k . O subgrafo G' será dito *antihole*, quando é o complemento do ciclo induzido em G , e será denotado por $\overline{C}_k$. Na Figura 2.6 está representado um *hole* de tamanho 8, C_8 , e o *antihole* $\overline{C}_8$.

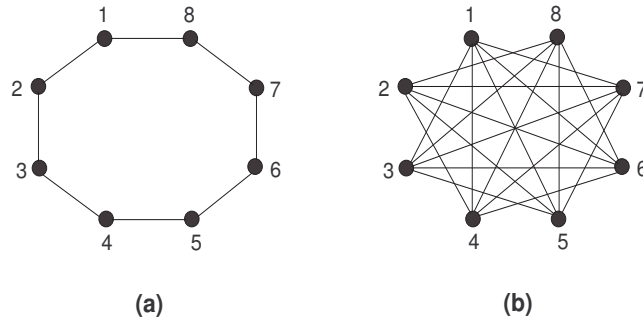


Figura 2.6: Em (a) temos representado um *hole* e em (b) um *antihole*.

Outro conceito importante, e que será muito utilizado ao longo da dissertação é o conceito de conjunto de vizinhos de um vértice v dado. Definimos a seguir esse conceito para grafos não-orientados.

Definição 2.3. O conjunto dos vizinhos de $v \in V$, $N(v)$, é formado por todos os vértices adjacentes a v , ou seja, $N(v) = \{u \in G \mid (u, v) \in A\}$.

O conjunto dos anti-vizinhos de v , $\overline{N}(v)$, é formado pelos vértices não adjacentes a v , ou seja, $\overline{N}(v) = V \setminus (N(v) \cup v)$. A Figura 2.7 pode ser usada para visualizar os vizinhos e

anti-vizinhos de um vértice.

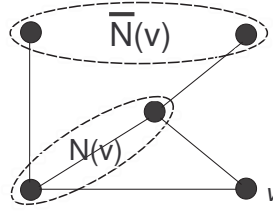


Figura 2.7: Conjuntos dos vizinhos e anti-vizinhos.

Vamos definir a seguir o que é o grau de um vértice. Esse conceito, além de ser fundamental para alguns resultados do Capítulo 3, nos fornece o tamanho do conjunto de vizinhos de um vértice.

Definição 2.4. Em um grafo $G = (V, A)$, o **grau de um vértice** v_i , $d(v_i)$, é o número total de arestas incidentes a ele. O grau do vértice de maior grau é $\Delta = \max_{v_i \in V} d(v_i)$.

Alguns vértices, recebem nomes especiais de acordo com o seu grau:

- *Vértice isolado*: Se v não é adjacente a qualquer outro vértice do grafo, ou seja, $d(v) = 0$;
- *Vértice pendente*: Se v é adjacente a apenas um vértice do grafo, tendo então $d(v) = 1$;
- *Vértice universal*: Se v for adjacente a todos os vértices do grafo, ou seja, $\overline{N}(v) = \emptyset$.

Na Figura 2.8 temos exemplos de vértices especiais. O grau do vértice 4 nos grafos G e G' é 2 e 3 respectivamente. Já os vértices 1 e 7 de G são exemplos de vértices pendente e isolado, respectivamente. Exemplo de vértice universal está representado pelo vértice 2 de G' .

Note que, se o grafo possui um laço em v , então este contribuirá com grau 2 para esse vértice. Por exemplo, o vértice 5 do grafo G' da Figura 2.8 possui grau 4. Agora se o grafo contém arestas paralelas, cada aresta contribui com um grau em cada vértice onde incide. Por exemplo, o vértice 6 do grafo G da Figura 2.8 tem grau 5.

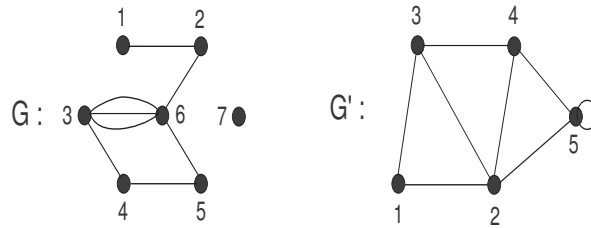


Figura 2.8: Grafos onde encontramos vértices especiais.

Finalizamos a seção com a próxima proposição que formaliza o resultado existente entre o grau dos vértices de um grafo com a quantidade de arestas deste.

Proposição 2.1. *Dado um grafo G com n vértices e m arestas, temos que:*

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

Demonstração: Seja $e_k = (v_i, v_j)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$ uma dada aresta de G .

Note que e_k contribui com um grau para o vértice v_i e um para o vértice v_j . Assim, cada aresta e_k de A contribuirá com dois graus. Logo, a soma de todos os graus dos vértices é igual a duas vezes o número de arestas.

□

2.2 Tipos de Grafos

Os grafos que apresentamos nesta seção são utilizados ao longo do texto com frequência. Considere, para essas definições que $G = (V, A)$, é um grafo com m arestas e n vértices.

- *Grafo nulo* : É um grafo, cujo conjunto de arestas é vazio.
- *Grafo simples* : Se o grafo não possuir arestas paralelas e laço.

Exemplos dessas estruturas podem ser encontrados na Figura 2.9.

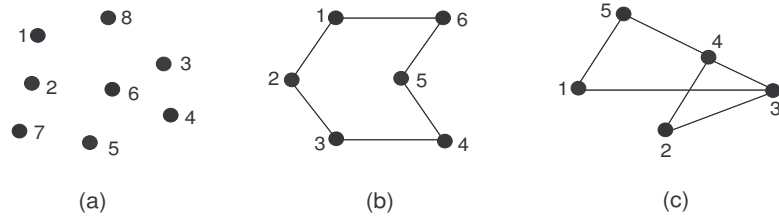


Figura 2.9: O grafo representado em (a) é um grafo nulo, e os grafos representados em (b) e (c) são exemplos de grafo simples.

- *Grafo Conexo* : Se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices. Caso contrário será chamado de *desconexo*. (ver Figura 2.10)

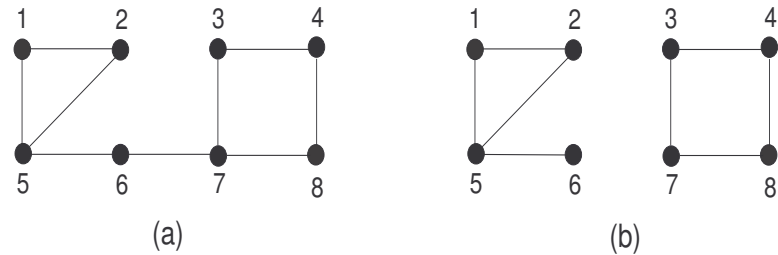


Figura 2.10: A figura (a) representa um grafo conexo e a figura (b) um grafo desconexo.

Quando um grafo é desconexo, dizemos que este é formado por um conjunto de componentes. Por exemplo, o grafo desconexo da Figura 2.10 é formado por duas componentes. A primeira formada pelos vértices $\{1, 2, 5, 6\}$ e suas respectivas arestas e a segunda componente formada pelos vértices $\{3, 4, 7, 8\}$ e pelo conjunto de arestas existente entre esses vértices.

Vamos definir agora o que é um vértice de corte, necessário para a definição do próximo grafo.

Definição 2.5. *Um vértice é dito **vértice de corte**, se ao ser retirado do conjunto V , juntamente com as arestas incidentes a ele, torna o grafo desconexo.*

Por exemplo, na Figura 2.10(a) o vértice 6 é um vértice de corte.

- *Bloco* : Um bloco é um grafo conexo não-trivial ($|V| > 1$) que não possui vértice de corte. A Figura 2.11 ilustra um grafo sem vértice de corte, ou seja, um bloco.

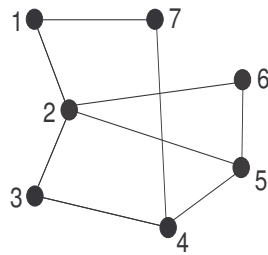


Figura 2.11: Representação de um bloco.

- *Árvore* : Se o grafo for conexo e não possuir ciclo. (ver Figura 2.12)

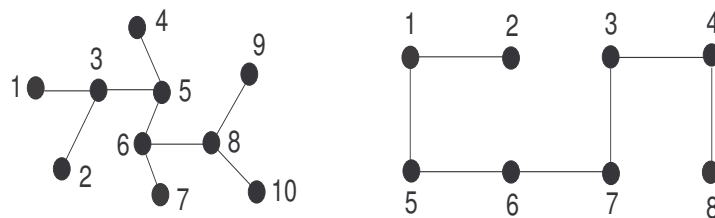
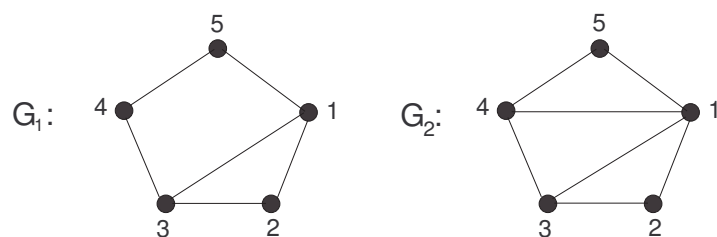


Figura 2.12: Representações de árvores

- *Grafo cordal* : É um grafo em que todo ciclo, $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$, de comprimento maior do que 3 possui uma corda. (ver Figura 2.13)

Figura 2.13: Um contra-exemplo (grafo G_1) e um exemplo (grafo G_2) de grafo cordal.

No ciclo $\{1, 2, 3, 4, 5, 1\}$ do grafo G_2 da Figura 2.13, existe uma corda, representada pela aresta $(1,3)$. Já no grafo G_1 da mesma figura existe um ciclo de tamanho 4, $\{1, 3, 4, 5, 1\}$, que não contém uma corda, logo esse grafo não é cordal.

- *Grafo completo* : É um grafo simples tal que existe uma aresta entre cada par de vértice. Denotado por K_n .
- *Clique* : Um clique é um subgrafo completo. O tamanho do clique é dado pelo número de vértices que são mutuamente adjacentes.

Na Figura 2.14 estão representadas estas estruturas.

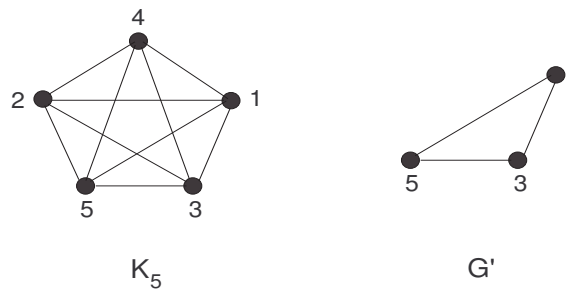


Figura 2.14: Exemplo de grafo completo, K_5 , e um clique de tamanho 3.

- *Grafo bipartido* : É o grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos independentes, V_1 e V_2 . (ver Figura 2.15)

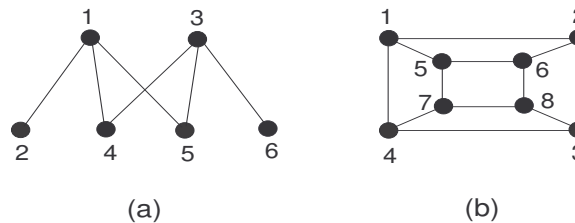


Figura 2.15: Dois exemplos de grafo bipartido.

Os vértices dos grafos representados na Figura 2.15 (a) e (b), podem ser particionados em dois conjuntos, $V_1 = \{1, 3\}$ e $V_2 = \{2, 4, 5, 6\}$ e $V_1' = \{1, 3, 6, 7\}$ e $V_2' = \{2, 4, 5, 8\}$ respectivamente. As árvores representadas na Figura 2.12 também são exemplos de grafo bipartido.

- *Grafo bipartido completo* : Se qualquer vértice $v \in V_1$ é adjacente a todos os vértices w de V_2 . Denotado por $K_{p,q}$. (ver Figura 2.16)

Note na Figura 2.16 que os vértices do $K_{3,3}$ podem ser particionados em dois conjuntos disjuntos, $V_1 = \{1, 3, 5\}$ e $V_2 = \{2, 4, 6\}$. Os vértices do $K_{2,4}$ e $K_{1,6}$ também, ou seja, $V'_1 = \{1, 2\}$ e $V'_2 = \{3, 4, 5, 6\}$, e $V''_1 = \{1\}$ e $V''_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

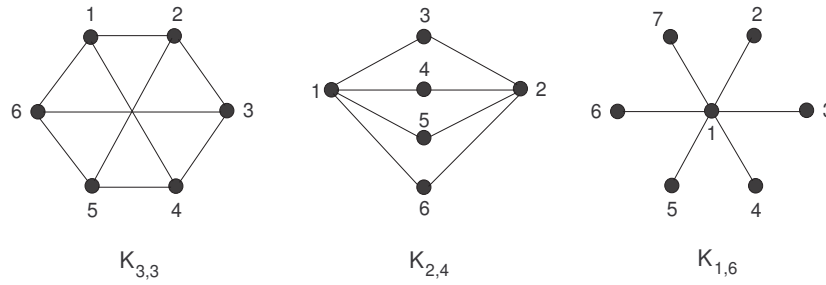


Figura 2.16: Exemplos de grafos bipartidos completos.

- *Grafo Planar* : É um grafo que pode ser desenhado em um plano sem qualquer cruzamento entre arestas. (ver Figura 2.17)

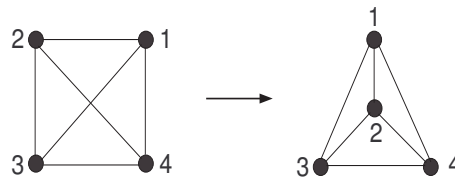


Figura 2.17: K_4 , um exemplo de grafo planar.

Pode-se provar que o grafo $K_{3,3}$ não é um grafo planar, assim como o K_5 , pois ao representá-lo em um plano, haverá a intersecção de pelo menos uma de suas arestas.

A seguir, definimos e mostramos qual a diferença entre grafos iguais e isomorfos. Este conceito será utilizado nos Capítulos 3 e 4.

Definição 2.6. Dizemos que dois grafos G_1 e G_2 são **iguais** quando possuem o mesmo conjunto de vértice e o mesmo conjunto de arestas, ou seja, $V_{G_1} = V_{G_2}$ e $A_{G_1} = A_{G_2}$.

Definição 2.7. Dizemos que dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$, com o mesmo número de vértices e arestas, são **isomorfos** se $\exists f : V_1 \rightarrow V_2$ bijetora tal que $(v, w) \in A_1 \iff (f(v), f(w)) \in A_2$, preservando as relações de adjacência.

Os grafos representados por G_1 e G_2 na Figura 2.18 são isomorfos, pois existe uma função que relaciona os vértices dos grafos, preservando as relações de adjacência. O mesmo não acontece com G_1 e G_3 , pois não existe uma função que relacione todos os vértices do grafo, assim não são grafos isomorfos. G_3 então também não é isomorfo a G_2 .

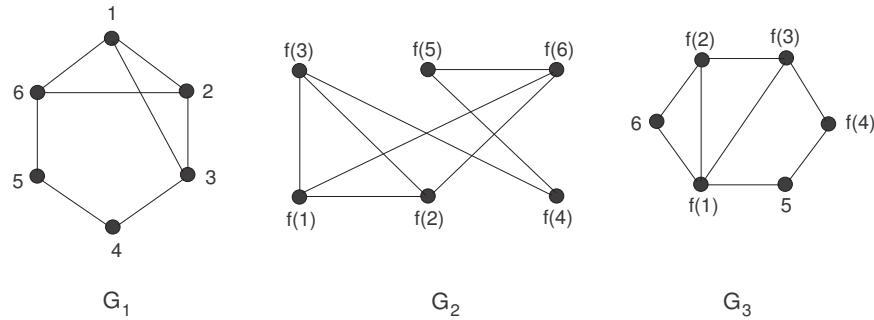


Figura 2.18: Relação de isomorfismo entre grafos.

Uma dificuldade que aparece na hora de representar essas estruturas computacionalmente é quando os grafos são iguais, isomorfos ou completamente distintos. Para isso, precisamos de uma forma de representação que não permita ambiguidade, o que será apresentado na próxima seção.

2.3 Representação Computacional

Duas formas de representar um grafo (ou digrafo) de forma que a estrutura usada corresponda ao grafo dado e que pode ser armazenada e manipulada computacionalmente são a Matriz de Adjacência e a Matriz de Incidência.

Considere um grafo $G(V, A)$ com n vértices e m arestas. Vamos definir a seguir essas matrizes.

1. Matriz de Adjacência

É uma matriz $n \times n$, $M_{adj} = [a_{ij}]$ onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \exists (i, j) \in A \\ 0 & \Leftrightarrow \nexists (i, j) \in A \end{cases}$$

Essa definição refere-se tanto para grafos não-orientados como para grafos orientados, como podemos observar pela Figura 2.19, onde está representada a matriz de adjacência do grafo. Observe que no caso de grafos não-orientados esta matriz é uma matriz simétrica.

Matriz de Adjacência

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Grafo G

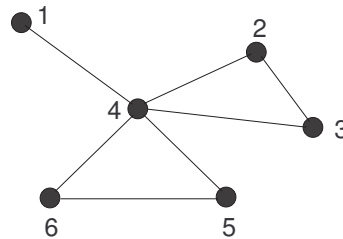


Figura 2.19: Matriz de adjacência do grafo G.

OBS: Note que na matriz de adjacência, $N(v)$ corresponde ao conjunto de elementos não nulos da linha (ou coluna) associada a v .

2. Matriz de Incidência

É uma matriz $n \times m$, $M_{inc} = [b_{ij}]$ onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } j \text{ incide no vértice } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como podemos observar na Figura 2.20, as linhas da matriz estão representando os vértices do grafo e cada aresta é representada por uma coluna, sendo a primeira a coluna referente à aresta a_1 , a segunda à aresta a_2 e assim por diante.

Matriz de Incidência

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Grafo G

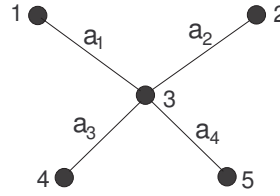


Figura 2.20: Matriz de incidência do grafo G.

No caso de digrafos é necessário distinguir quando uma aresta incide em um vértice dado, sendo necessário uma modificação na definição da Matriz de Incidência. Assim temos:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } j \text{ diverge do vértice } i \\ -1 & \text{se a aresta } j \text{ converge para o vértice } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na Figura 2.21 as colunas são referentes a cada aresta incidente ou divergente do grafo, ou seja, a convergência da aresta a_1 está representada na primeira coluna, a da aresta a_2 na segunda coluna e assim por diante. As linhas referem-se aos vértices do grafo.

Matriz de Incidência

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Grafo G

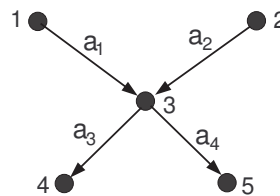


Figura 2.21: Matriz de incidência de um grafo orientado.

2.4 Operações em Grafos

Dado um grafo $G(V, A)$, vamos definir nesta seção algumas operações com os vértices e as arestas do grafo. Estas operações são utilizadas no Capítulo 3 no estudo de coloração de vértices.

1. Inclusão de vértice: podemos incluir um vértice v , em G , de duas formas:

- i)* $G'(V', A')$ é tal que $V' = V \cup \{v\}$, ou seja, apenas incluir um vértice ao grafo;
- ii)* $G'(V', A')$ é tal que $V' = V \cup \{v\}$ e $A' = (A - (w, z)) \cup \{(v, w), (v, z)\}$, ou seja, incluir um vértice v em uma aresta (w, z) .

Denotaremos a inclusão de um vértice por $G + v$. O caso *i)* está representado na Figura 2.22(a), onde o grafo resultante G' tem o vértice 6 isolado. A Figura 2.22(b) representa o caso *ii)*.

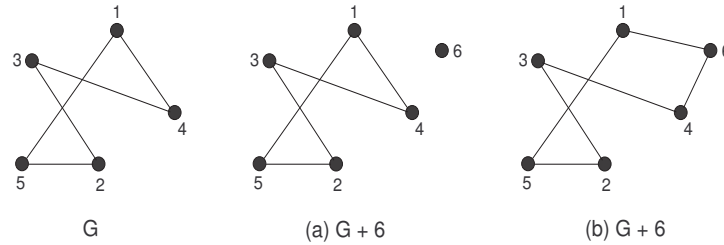


Figura 2.22: Representação da inclusão de um vértice no grafo G .

2. Inclusão de aresta: O grafo $G'(V', A')$ é tal que $A' = A \cup \{(v, w)\}$. Denotado por $G + e$.

Como ao longo do trabalho vamos considerar que G é um grafo simples, então a inclusão de aresta paralela e laço não será considerada.

Obs: Note que no caso da Figura 2.23(b), o conjunto de vértices também é modificado, ou seja, $V' = V \cup \{v\}$.

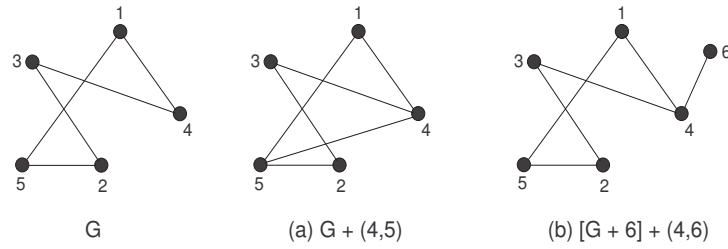


Figura 2.23: A inclusão de uma aresta no grafo G está representada em (a). Em (b) representamos a adição de um vértice no grafo (como descrito em 1.i)) e depois incluímos uma aresta entre este vértice e outro do grafo.

3. Remoção de vértice: O grafo G' é tal que $V' = V - \{v\}$, devendo também ser removidas as arestas a ele incidente. $G - v$.

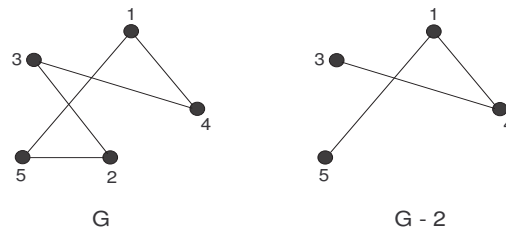


Figura 2.24: Representação da remoção de um vértice.

4. Remoção de aresta: O grafo G' resultante é tal que $A' = A - \{(v, w)\}$. $G - e$.

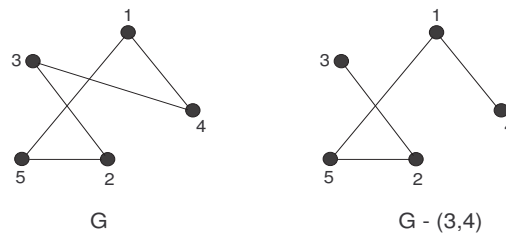


Figura 2.25: Representação da remoção de uma aresta do grafo G .

5. Contração de dois vértices: Contrair dois vértices $v, w \in V$, do grafo G , é tal que $V' = (V - \{v, w\}) \cup \{vw\}$. As arestas incidentes em v e w passarão a incidir em vw , e as arestas paralelas e laços são removidos.

A Figura 2.26 representa a contração de dois vértices do grafo G de duas formas, sendo os vértices adjacentes ou não.

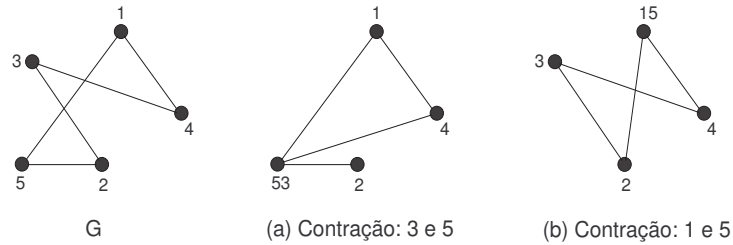


Figura 2.26: Em (a), está representada a contração de dois vértices não adjacentes, e em (b) de dois vértices adjacentes.

6. Contração de aresta: Uma aresta $e = (v, w)$ do grafo G , será contraída ao se remover e e contrair os vértices v e w . Denotado por G/e .

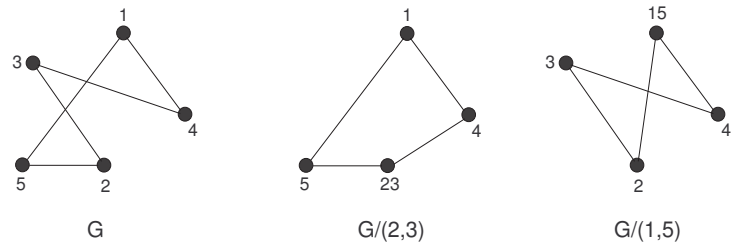


Figura 2.27: Representações da contração de uma aresta do grafo G .

2.5 Poliedros, faces e facetas

O objetivo desta seção é definir um poliedro e entender a importância de algumas inequações que podem ser usadas na sua descrição. Estas inequações fornecem bons planos de cortes, como será visto no Capítulo 4. Todas as definições e resultados apresentados aqui, podem ser encontrados principalmente em [20] e [38] entre outros.

Vamos iniciar a seção, definindo o que é um poliedro.

Definição 2.8. Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **poliedro** se para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e algum vetor $b \in \mathbb{R}^m$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$. Um poliedro definido desta forma é denotado por $P(A, b)$.

Se $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então os poliedros $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$ são chamados de semi-espço e hiperplano, respectivamente. Se existir k vetores $(x^1, 1), (x^2, 1), \dots, (x^k, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ linearmente independentes, dizemos que o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ tem dimensão plena, $\dim(P) = n$. Na Figura 2.28 temos um exemplo de um poliedro de dimensão plena.

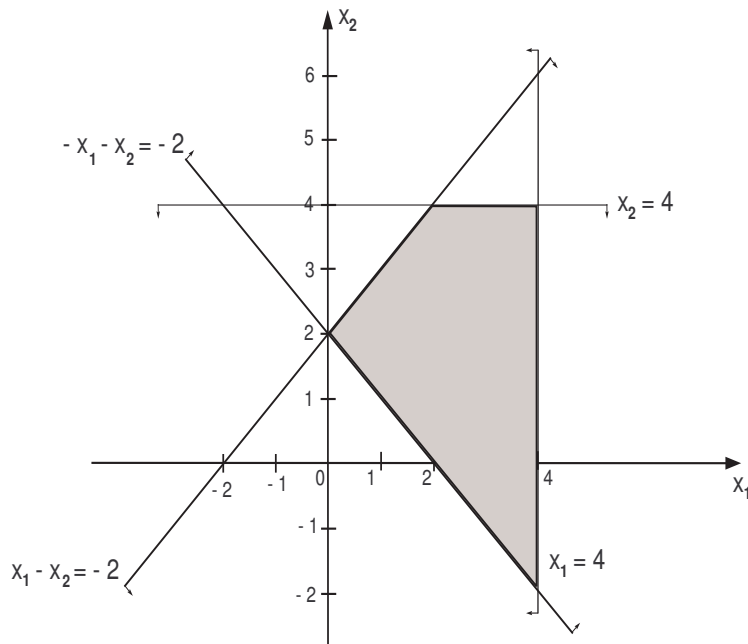


Figura 2.28: Exemplo de um poliedro no $\mathbb{R}^2$.

Quando P for um poliedro limitado, ou seja, existe um número real α tal que todo ponto $x \in P$ satisfaz $\|x\| \leq \alpha$, será chamado de *politopo*. Vamos definir a seguir, alguns conceitos importantes, que nos ajudam a caracterizar as faces de um poliedro.

Definição 2.9. Uma inequação $\pi x \leq \pi_0$ é uma **inequação válida** para $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se $\pi x \leq \pi_0$ $\forall x \in P$.

Definição 2.10. Se $\pi x \leq \pi_0$ e $\mu x \leq \mu_0$ são duas inequações válidas para $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$, $\pi x \leq \pi_0$ **domina** $\mu x \leq \mu_0$ se $\exists u > 0$ tal que $\pi > u\mu$ e $\pi_0 \leq u\mu_0$, e $(\pi, \pi_0) \neq (u\mu, u\mu_0)$.

Observe que se $\pi x \leq \pi_0$ domina $\mu x \leq \mu_0$, então $\{x \in \mathbb{R}_+^n : \pi x \leq \pi_0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : \mu x \leq \mu_0\}$.

Definição 2.11. Uma inequação válida $\pi x \leq \pi_0$ é **redundante** na descrição de P , se existem $k \geq 2$ inequações válidas $\pi^i x \leq \pi_0^i$, $i = 1, \dots, k$ para P , e pesos $u_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ tais que $\left(\sum_{i=1}^k u_i \pi^i\right) x \leq \sum_{i=1}^k u_i \pi_0^i$ domina $\pi x \leq \pi_0$.

Definimos a seguir quando uma inequação válida define uma face do poliedro.

Definição 2.12. Um conjunto F , $F \subseteq P$, define uma face de P se $F = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$, para alguma inequação válida $\pi x \leq \pi_0$.

Se F é uma face de P e $\dim(F) = \dim(P) - 1$, então dizemos que F é uma *faceta* de P .

Proposição 2.2. Se $P \subset \mathbb{R}^n$ tem dimensão plena, $\pi x \leq \pi_0$ define uma faceta de P , se e somente se, existem n pontos afim independentes de P satisfazendo a inequação em equação.

Para ilustrar os conceitos definidos acima, vamos considerar o poliedro $P \subset \mathbb{R}^2$, mostrado na Figura 2.29, descrito pelas inequações

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad (5)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (6)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (7)$$

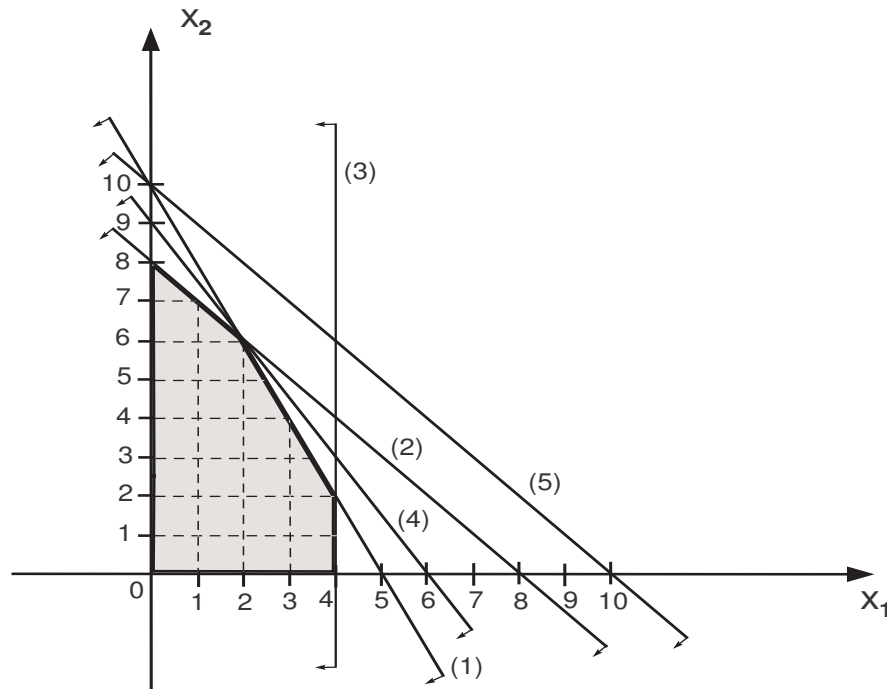


Figura 2.29: Faces e facetas de um poliedro. A região destacada no gráfico representa o poliedro P .

Considere os pontos, $x^1 = (4, 2)$, $x^2 = (2, 6)$ e $x^3 = (1, 7)$. É fácil verificar que os vetores $(x^1, 1)$, $(x^2, 1)$ e $(x^3, 1)$ são linearmente independentes. Logo, $P \subset \mathbb{R}^2$ é um poliedro de dimensão plena. Vamos analisar então cada uma das inequações que descrevem esse poliedro.

A inequação $2x_1 + x_2 \leq 10$ define uma faceta de P . Pela Proposição 2.2 basta existir dois pontos afim independentes que satisfaçam a inequação (1) em equação para esta definir uma faceta. Considere os pontos $(2, 6)$ e $(4, 2)$. Note que esses dois pontos satisfazem as condições da proposição, logo a inequação (1), $2x_1 + x_2 \leq 10$, define uma faceta para P .

Observe que os pontos $(2, 6)$ e $(4, 2)$, também satisfazem a inequação $x_1 \leq 4$, logo esta inequação também define uma faceta de P .

Os pontos $(1, 7)$ e $(0, 8)$ são dois pontos afim independentes e satisfazem a inequação $x_1 + x_2 \leq 8$ em equação, logo pela Proposição 2.2 essa inequação define uma faceta de P .

A inequação $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ define uma face de P consistindo apenas do ponto $(2, 6)$, sendo então uma inequação redundante. Se considerarmos as inequações $2x_1 + x_2 \leq 10$ e

$x_1 + x_2 \leq 8$ também mostramos que a inequação (4) é redundante, visto que é a soma dessas duas inequações.

A inequação $x_1 + x_2 \leq 10$ também é uma inequação redundante. Para verificar, vamos considerar as inequações $2x_1 + x_2 \leq 10$ e $x_1 + x_2 \leq 8$, logo $\pi^1 = (2, 1)$, $\pi_0^1 = 10$ e $\pi^2 = (1, 1)$, $\pi_0^2 = 8$ e o peso $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^2 u_i \pi^i \right) x &\leq \sum_{i=1}^2 u_i \pi_0^i \implies \left(\frac{1}{2} (2, 1) + \frac{1}{2} (1, 1) \right) x \leq \frac{1}{2} 10 + \frac{1}{2} 8 \\ &\implies \left(\left(1, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) x \leq 5 + 4 \implies \frac{3}{2} x_1 + x_2 \leq 9. \end{aligned}$$

A inequação resultante $\frac{3}{2} x_1 + x_2 \leq 9$ domina $x_1 + x_2 \leq 10$ para $u = 1$. Assim, pela Definição 2.11, mostramos que a inequação (5) não é necessária para a descrição do poliedro.

Logo, a descrição mínima de P é dada por:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Estes resultados podem ser formalizados no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [20].

Teorema 2.1. *Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e, $F = \{x \in P : \pi x = \pi_0\}$ uma face de P . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) F é uma faceta de P ;
- ii) $\dim(F) = n - 1$;
- iii) Se $\mu x \leq \mu_0$, $\mu \neq 0$, é uma inequação válida tal que $F \subseteq \{x \in P : \mu x = \mu_0\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tal que $\mu = \alpha \pi$ e $\mu_0 = \alpha \pi_0$.

Capítulo 3

Aspectos Teóricos do Problema de Coloração

O objetivo deste capítulo é mostrar alguns resultados existentes na literatura envolvendo coloração de grafos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [36], [24], [37], [1] e [33]. Na Seção 3.1 vamos apresentar os conceitos fundamentais do problema de coloração de vértices. Na Seção 3.2 vamos mostrar como determinar o polinômio cromático de um grafo e algumas de suas propriedades. E finalizamos, apresentando alguns problemas em aberto na Seção 3.3.

3.1 Coloração de Vértices

Nesta seção são apresentados alguns resultados que relacionam o número cromático com o grau dos vértices de um grafo. Vamos começar enunciando o teorema que pela dificuldade em ser provado, colaborou com o desenvolvimento dessa área.

Teorema 3.1. *(Teorema das Quatro Cores) [34] Todo mapa desenhado em um plano, pode ser colorido com no máximo quatro cores, sem que regiões com fronteira comum recebam a mesma cor.*

Definimos a seguir uma k -coloração e o número cromático do grafo.

Definição 3.1. *Seja G um grafo simples conexo. Se a cada vértice de G puder ser atribuída uma cor, dentre k cores, tal que vértices adjacentes não recebam a mesma cor, dizemos que G é **k -colorível** e que temos uma coloração de G .*

Definição 3.2. *O número cromático de um grafo G , $\chi(G)$, é o menor número de cores necessárias para obter uma coloração de G .*

O problema de coloração em grafos é definido como o problema de encontrar o menor número de cores, $\chi(G)$, tal que G possui uma $\chi(G)$ -coloração. Porém, determinar o número cromático de um grafo qualquer não é um problema fácil, visto que esse problema pertence a classe *NP-difícil* [23].

Na Figura 3.1(a) está representada uma coloração de G com 4 cores. Uma possível coloração utilizando 3 cores está representado pela Figura 3.1(b).

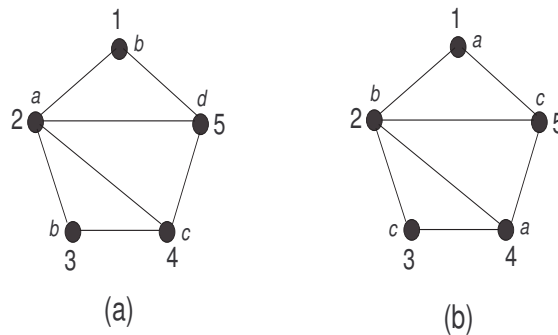


Figura 3.1: Exemplo de coloração com 4 e 3 cores.

Enunciamos a seguir alguns resultados sobre o número cromático de um grafo.

Proposição 3.1. *Dado um grafo G , então $\chi(G) = 2$ se e somente se G é um grafo bipartido.*

Uma idéia intuitiva da demonstração desta proposição é observar que se G é um grafo bipartido, então seu conjunto de vértices V , pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos, V' e V'' . Deste modo, basta atribuir uma cor aos vértices de V' e uma outra cor aos vértices de V'' . Logo, são necessárias duas cores para colorir esse grafo.

Observe que o número cromático de alguns grafos é facilmente determinado, tais como:

- *Grafo nulo*: Se G é um grafo nulo, é fácil ver pela definição de grafo nulo (ver Seção 2.2) que $\chi(G) = 1$;
- *Grafo completo*: Se G é um grafo completo com n vértices, também pela definição de grafo completo (ver Seção 2.2), temos $\chi(G) = n$;
- *Árvore*: Se G é uma árvore, note que os vértices de G podem ser particionados em dois conjuntos disjuntos, logo pela Proposição 3.1 temos $\chi(G) = 2$.

Se considerarmos G , um grafo qualquer, que contenha um clique de tamanho r , então $\chi(G) \geq r$. Este resultado nos fornece um limite inferior para o número cromático. Como podemos verificar na Figura 3.2 abaixo, o grafo contém o subgrafo completo K_4 , assim, não temos como colorir G com menos de quatro cores.

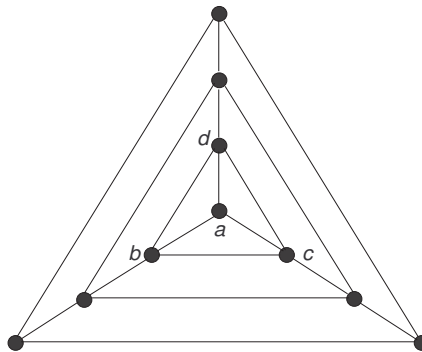


Figura 3.2: Representação de um grafo que contém um clique de tamanho 4.

Um limite superior para o número cromático é n , se G é um grafo com n vértices. Porém esse limitante é muito ruim, e podemos melhorá-lo se soubermos o grau do vértice de maior grau, ou seja, Δ . Esse resultado é mostrado no próximo teorema.

Teorema 3.2. *Se G é um grafo simples com grau máximo dos vértices Δ , então G é $(\Delta+1)$ -colorível.*

Demonstração: *Seja G um grafo com n vértices. Vamos provar esse teorema por indução no número de vértices de G .*

Se $n = 1 \Rightarrow \Delta = 0$, logo uma cor é necessária.

Supondo que vale para todo grafo com $n - 1$ vértices, vamos provar que também vale para todo grafo com n vértices.

Tomemos G' o grafo obtido de G com a remoção de um vértice v , assim temos que G' tem $n - 1$ vértices, e o grau do vértice de maior grau é no máximo Δ . Pela hipótese de indução G' é $(\Delta + 1)$ -colorível.

Ao adicionar um vértice em G' , ele terá n vértices, basta então colorir esse novo vértice com uma cor diferente dos seus vértices adjacentes, que será no máximo Δ . Logo G' é $(\Delta + 1)$ -colorível.

□

Proposição 3.2. *Um limite superior e inferior para o número cromático de um grafo é dado por*

$$r \leq \chi(G) \leq \Delta + 1$$

onde r é o tamanho do maior clique de G .

Outro resultado, provado por Brooks em 1941 é enunciado no Teorema 3.3. Sua demonstração pode ser encontrada em [36].

Teorema 3.3. *(Teorema de Brooks) Seja G um grafo simples e conexo, com grau máximo dos vértices Δ . Se G não é um grafo completo, nem um ciclo com número ímpar de vértices, então $\chi(G) \leq \Delta$.*

Para ilustrar o teorema, vamos considerar o grafo da Figura 3.2. Como já vimos, o grafo contém o grafo completo K_4 , então $\chi(G) \geq 4$. Por outro lado, o grafo satisfaz as condições do Teorema de Brooks, com $\Delta = 4$ e, então $\chi(G) \leq 4$. Isso implica que $\chi(G) = 4$.

Apresentamos nesta seção, limitantes para o número cromático de um grafo, porém somente em alguns casos esses limites fornecem o número cromático exato do grafo, como vimos no exemplo do último teorema. A seguir, na próxima seção, vamos mostrar como obter o número cromático e o número de colorações possíveis associadas.

3.2 Polinômio Cromático

O conceito de polinômio cromático foi introduzido por Birkhoff [2] em 1912, como mais uma ferramenta para atacar o Teorema das Quatro Cores (que na época ainda era uma conjectura).

A idéia é obter uma função que determina o número cromático de um grafo qualquer, e o número de colorações associadas. Vamos definir a seguir o polinômio cromático e como determinar o número cromático do grafo a partir dele.

Definição 3.3. *O polinômio cromático, $P_G(k)$, é uma função que conta o número de colorações de G com k cores.*

Proposição 3.3. *O menor k que satisfaz $P_G(k) > 0$, é o número cromático de G .*

Para demonstrar a Proposição 3.3 parte do fato que pela Definição 3.2 temos que o número cromático do grafo é o menor número de cores necessárias para obter uma coloração de G e $P_G(k)$ conta o número de colorações de G (Definição 3.3), logo se $k < \chi(G)$ então $P_G(k) = 0$, assim $P_G(k) > 0$ se $k \geq \chi(G)$.

Em alguns grafos, o polinômio cromático é obtido facilmente, usando apenas princípios básicos de contagem. Considere um conjunto W com k cores, que serão utilizadas para colorir os grafos abaixo.

- **Grafo nulo:**

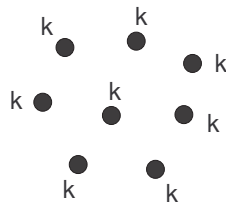


Figura 3.3: Exemplo de coloração no grafo nulo.

Seja G o grafo nulo representado na Figura 3.3. Seus vértices podem ser coloridos utilizando de forma aleatória qualquer uma das k cores do conjunto W , ou seja, es-

colhendo um vértice para colorir, podemos usar qualquer uma das k cores de W . O segundo vértice, assim como os demais, não são adjacentes ao primeiro já colorido, podendo então também ser colorido com qualquer uma das k cores do conjunto. Utilizando esse raciocínio recursivamente, obtemos o polinômio cromático do grafo nulo acima:

$$P_G(k) = k.k.k.k.k.k.k.k = k^8.$$

Generalizando para um grafo nulo qualquer com n vértices temos:

$$P_G(k) = k^n.$$

- **Grafo completo:**

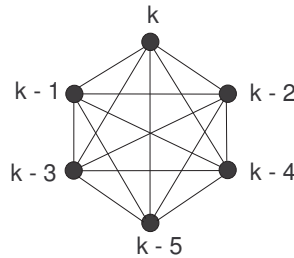


Figura 3.4: Exemplo de coloração do grafo completo K_6 .

Para colorir o grafo completo K_6 representado na Figura 3.4, vamos escolher qualquer um dos vértices, por exemplo v , e atribuir qualquer uma das k cores do conjunto W . Como os demais vértices são todos adjacentes a v , devemos escolher um vértice qualquer u e, atribuir a ele qualquer uma das $k - 1$ cores restantes em W . Note que para o próximo vértice escolhido, pode ser atribuída qualquer cor do conjunto W dentre as $k - 2$ restantes, pois retiramos apenas as cores utilizadas em v e u . Para o próximo vértice temos $k - 3$ cores dentre as k cores do conjunto W e assim por diante.

Logo, temos que o polinômio cromático do grafo completo K_6 é

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5).$$

Generalizando para um grafo completo com n vértices, K_n , temos:

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) \dots (k-n+1).$$

• **Árvore:**

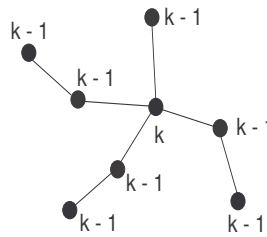


Figura 3.5: Exemplo de coloração de uma árvore.

Vamos atribuir uma cor dentre as k cores do conjunto W a um dos vértices da árvore representada na Figura 3.5, por exemplo v . Em seguida, atribuímos qualquer uma das $k-1$ cores restantes em W aos vértices adjacentes a v . Temos então $k-1$ cores para colorir os vértices que não são adjacentes ao vértice v , mas são adjacentes aos demais já coloridos, pois já se pode usar a cor utilizada para colorir v novamente. Note que para os demais vértices, sempre temos $k-1$ cores do conjunto W para atribuir, pois a única cor que não pode ser utilizada é a dos vértices adjacentes a ele. Assim, obtemos o seguinte polinômio cromático

$$\begin{aligned} P_G(k) &= k(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1)(k-1) \\ &= k(k-1)^7. \end{aligned}$$

Generalizando para uma árvore qualquer com n vértices temos:

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Entretanto, se G é um grafo qualquer, a função $P_G(k)$ não é obtida facilmente. Mostramos a seguir um teorema que nos auxilia a obter $P_G(k)$ de um grafo G recursivamente.

Teorema 3.4. *(Teorema da remoção-contracção) Seja G um grafo simples e uma dada aresta $e = (v, w)$. Considere os grafos $G - e$ e G/e . Então:*

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$

Demonstração: *Seja $e = (v, w)$ uma aresta de G . Vamos analisar os seguintes casos:*

- i. Se os vértices v e w tem cores diferentes, posso adicionar a aresta e ao grafo $G - e$, e o número de colorações diferentes com k cores desse grafo não muda. Logo, $G - e$ e G tem o mesmo número de k -colorações.*
- ii. Se os vértices v e w tem cores iguais, posso contrair esses vértices no grafo $G - e$, e o número de colorações diferentes com k cores desse grafo não muda. Logo $G - e$ e G/e tem o mesmo número de k -colorações.*

Como i. e ii. são disjuntos, o número total de colorações do grafo $G - e$ é $P_G(k) + P_{G/e}(k)$. Logo,

$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

ou seja

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$

□

Para ilustrar o teorema, vamos utilizar um dispositivo introduzido por Zykov [39, 24], onde um diagrama do grafo é usado para descrever o seu polinômio cromático. A Figura 3.6 mostra, passo a passo esse processo de remoção-contracção, utilizando o Teorema 3.4. Considere que temos um conjunto contendo k cores, para ser utilizado para colorir os vértices desse grafo.

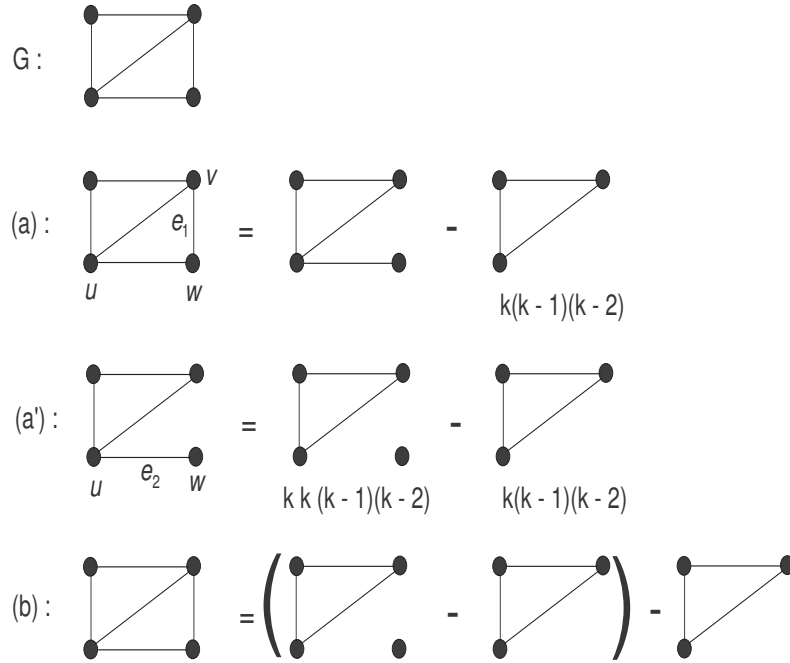


Figura 3.6: Passo a passo do processo de remoção-contração do grafo G .

No passo (a), retiramos a aresta e_1 e contraímos os vértices v e w do grafo G . Obtemos desse processo dois grafos, um que ainda será retirado uma aresta, e_2 , e contraído seus vértices (passo (a')) e outro, o K_3 , cujo polinômio cromático é conhecido. No passo (a'), temos mais uma vez o K_3 e outro grafo que é o K_3 com um vértice isolado, onde podemos usar qualquer uma das k cores para colorir. No passo (b), estão representados os grafos resultantes da remoção-contração.

Então, o polinômio cromático de G é:

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= k^2(k-1)(k-2) - 2(k(k-1)(k-2)) \\
 &= k^2(k^2 - 3k + 2) - 2k(k^2 - 3k + 2) \\
 &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k.
 \end{aligned}$$

Observe na Figura 3.6 que o passo (a') não seria necessário, pois o grafo resultante $G - e_1$, é o grafo completo K_3 acrescido da aresta e_2 , ou seja, temos um vértice pendente. Os vértices do K_3 podem ser coloridos de $k(k-1)(k-2)$ maneiras. Note que para colorir o vértice pendente, a única cor que não pode ser utilizada é a de seu vértice adjacente, logo

temos $k - 1$ cores possíveis para colorir esse vértice. Desta forma, o número de colorações do grafo $G - e_1$ é $k(k - 1)^2(k - 2)$, o que resulta em

$$\begin{aligned} P_G(k) &= k(k - 1)^2(k - 2) - k(k - 1)(k - 2) \\ &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k. \end{aligned}$$

Corolário 3.1. *A função $P_G(k)$ de um grafo G simples é um polinômio.*

Demonstração: *Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas.*

Utilizando o Teorema 3.4, obtemos dois grafos, $G - e$ e G/e , que possuem pelo menos $m - 1$ arestas, pois no processo de contração de arestas, os laços e arestas paralelas são eliminados.

Repetindo o processo em $G - e$ e depois em G/e obtemos quatro grafos, cada um, com pelo menos $m - 2$ arestas, e assim por diante. Como em $G - e$ retiramos aresta e G/e contraímos as arestas, no final do processo, vamos obter grafos nulos.

Em um grafo nulo, a função $P_G(k)$ é polinomial, e então $P_G(k)$ de um grafo qualquer também será, pois é a soma dos polinômios cromáticos dos grafos nulos.

□

Vamos considerar o grafo G representado na Figura 3.7 abaixo. Utilizando o Teorema 3.4, obtemos os grafos que nos fornecem o polinômio cromático do grafo original G .

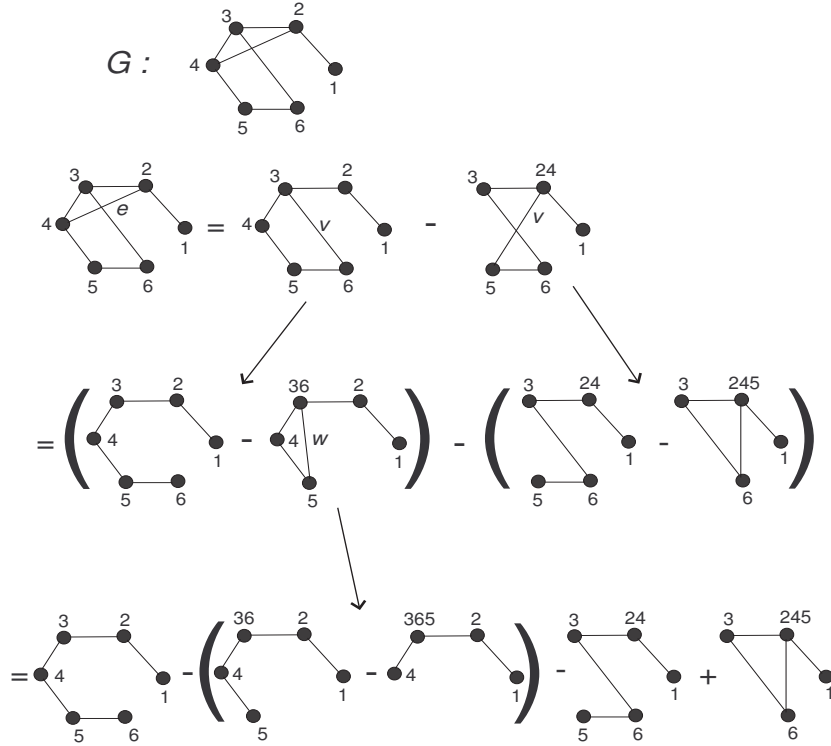


Figura 3.7: Processo de remoção-contracção para determinar o polinômio cromático do grafo G .

Temos então que o processo de remoção-contracção gerou cinco grafos. O polinômio cromático do grafo original, é a soma dos polinômios cromáticos de cada grafo obtido no processo. Assim:

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= k(k-1)^5 - k(k-1)^4 + k(k-1)^3 - k(k-1)^4 + k(k-1)^2(k-2) \\
 &= k(k-1)^2[(k-1)^3 - (k-1)^2 + (k-1) - (k-1)^2 + (k-2)] \\
 &= k(k^2 - 2k + 1)[k^3 - k^2 - 2k^2 + 2k + k - 1 - k^2 + 2k - 1 + k - 1 \\
 &\quad - k^2 + 2k - 1 + k - 2] \\
 &= (k^3 - 2k^2 + k)[k^3 - 5k^2 + 9k - 6] \\
 &= k^6 - 5k^5 + 9k^4 - 6k^3 - 2k^5 + 10k^4 - 18k^3 + 12k^2 + k^4 - 5k^3 + 9k^2 - 6k \\
 P_G(k) &= k^6 - 7k^5 + 20k^4 - 29k^3 + 21k^2 - 6k
 \end{aligned}$$

Note que:

$$P_G(1) = 0; P_G(2) = 0; P_G(3) = 36$$

Assim, o menor número de cores necessárias para colorir G é 3, ou seja, $\chi(G) = 3$. Podemos colorir G de 36 maneiras diferentes utilizando 3 cores.

Pela demonstração do Corolário 3.1, podemos notar que se G é um grafo com n vértices, então $P_G(k)$ tem grau n . No próximo teorema, vamos enunciar outros resultados importantes que garantem que $P_G(k)$ é um polinômio.

Teorema 3.5. *O polinômio $P_G(k)$ de qualquer grafo com n vértices, é um polinômio mônico¹ em k , com coeficientes inteiros, sendo o maior termo k^n , termo constante igual a zero e os demais termos alternando de sinal.*

Demonstração: Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Vamos provar por indução sob o número de arestas de G .

Se $m = 0$, então G é um grafo nulo e $P_G(k) = k^n$.

Supondo válido para todo grafo com $m - 1$ arestas, vamos provar que vale para todo grafo com m arestas.

Pelo Teorema 3.4 temos que $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$. Como $G-e$ e G/e tem menos que m arestas, pela hipótese de indução, existem inteiros não negativos a_i e b_i , $i = 1, \dots, n-1$ tais que:

$$P_{G-e}(k) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i k^i + k^n \quad e \quad P_{G/e}(k) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-1-i} b_i k^i + k^{n-1}$$

Logo, como $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$ temos:

$$\begin{aligned} P_G(k) &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i k^i + k^n - \left(\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-1-i} b_i k^i + k^{n-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} a_i k^i + (-1)^{n-(n-1)} a_{n-1} k^{n-1} + k^n + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} b_i k^i - k^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} (a_i + b_i) k^i - (a_{n-1} + 1) k^{n-1} + k^n \end{aligned}$$

¹O coeficiente do termo de maior grau é 1.

□

É fácil observar que o coeficiente de k^n é igual a um, pois utilizando o Teorema 3.4 recursivamente, obtemos $P_G(k)$ através de grafos nulos. Da mesma forma, o termo constante é zero, pois caso contrário $P_G(0) > 0$ e então poderíamos colorir G usando zero cores, o que é um absurdo!

Pelas Figuras 3.6 e 3.7, podemos verificar que de fato, os polinômios obtidos são da forma descrita pelo Teorema 3.5. Outro fato que podemos relatar através desse polinômio é que o coeficiente do termo k^{n-1} é igual ao número de arestas do grafo. Esse resultado está formalizado no próximo corolário.

Corolário 3.2. *O coeficiente do termo k^{n-1} em $P_G(k)$, de qualquer grafo G com m arestas, é $-m$.*

Demonstração: *Seja G um grafo com m arestas e n vértices. Vamos provar por indução sob o número de arestas de G .*

Se $m = 0$, então G é um grafo nulo, logo $P_G(k) = k^n$.

Se $m = 1$, então $P_G(k) = k^{n-1}(k - 1) = k^n - 1k^{n-1}$.

Vamos supor que vale para todo grafo com $m - 1$ arestas e provar para um grafo com m arestas.

Pelo Teorema 3.4 temos que $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$. Como $P_{G/e}(k)$ e P_{G-e} tem menos do que m arestas, temos pela hipótese de indução e pelo Teorema 3.5 que:

$$P_{G-e}(k) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} a_i k^i - (m-1)k^{n-1} + k^n$$

$$P_{G/e}(k) = \sum_{i=1}^{n-3} (-1)^{n-1-i} b_i k^i - (m-1)k^{n-2} + k^{n-1}$$

Então como $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$, logo:

$$\begin{aligned}
P_G(k) &= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} a_i k^i - (m-1)k^{n-1} + k^n \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{n-3} (-1)^{n-1-i} b_i k^i - (m-1)k^{n-2} + k^{n-1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} a_i k^i + (-1)^{n-(n-2)} a_{n-2} k^{n-2} - (m-1)k^{n-1} + k^n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-3} (-1)^{n-i} b_i k^i + (m-1)k^{n-2} - k^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-3} (-1)^{n-i} (a_i + b_i) k^i + (a_{n-2} + m-1)k^{n-2} - (m-1+1)k^{n-1} + k^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} (a_i + b_i) k^i - m k^{n-1} + k^n
\end{aligned}$$

□

Trazemos a seguir um resultado sobre os grafos desconexos encontrado em [24], que mostra como obter o polinômio cromático quando o grafo é desconexo.

Proposição 3.4. *Se G é um grafo desconexo, $P_G(k)$ é o produto dos polinômios de cada componente.*

Considere o grafo desconexo da Figura 3.8, o qual utilizaremos para ilustrar a Proposição 3.4.

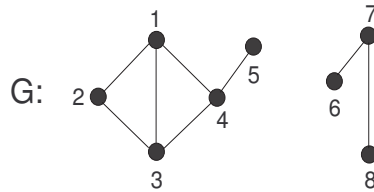


Figura 3.8: Grafo desconexo G e suas componentes, G_1 e G_2 .

Vamos determinar o polinômio cromático de cada componente de G , aplicando recursivamente o Teorema 3.4, e em seguida utilizaremos o resultado da Proposição 3.4 para

determinar $P_G(k)$. Iniciamos pela primeira componente, G_1 , que está representado na Figura 3.9.

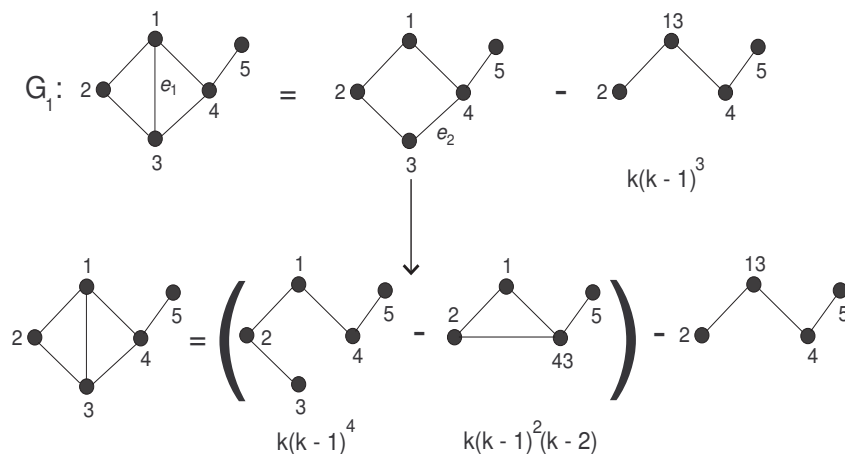


Figura 3.9: Processo de remoção-contração da primeira componente do grafo desconexo G .

Pela Figura 3.9 vemos que o processo é iniciado, removendo e contraindo a aresta $e_1 = (1, 3)$, obtendo dois grafos, $G_1 - e_1$ e G_1/e_1 . Como G_1/e_1 é uma árvore, não é necessário utilizar novamente o Teorema 3.4. Em seguida, continuamos o processo somente em $G_1 - e_1$, removendo e contraindo a aresta $e_2 = (3, 4)$, obtendo dois novos grafos cujo polinômio cromático são conhecidos.

O polinômio cromático $P_{G_1}(k)$ é obtido da soma e subtração dos polinômios dos grafos obtidos na Figura 3.9, determinados através da remoção-contracção, assim:

$$\begin{aligned}
 P_{G_1}(k) &= k(k-1)^4 - k(k-1)^2(k-2) - k(k-1)^3 \\
 &= k(k-1)^2[(k-1)^2 - (k-2) - (k-1)] \\
 &= k(k^2 - 2k + 1)[k^2 - 2k + 1 - k + 2 - k + 1] \\
 &= (k^3 - 2k^2 + k)(k^2 - 4k + 4) \\
 &= k^5 - 4k^4 + 4k^3 - 2k^4 + 8k^3 - 8k^2 + k^3 - 4k^2 + 4k \\
 P_{G_1}(k) &= k^5 - 6k^4 + 13k^3 - 12k^2 + 4k.
 \end{aligned}$$

Note que a outra componente, G_2 , do grafo G que está representado na Figura 3.10

formada pelos vértices $\{6, 7, 8\}$, é uma árvore. Assim, o seu polinômio já é conhecido e não necessitamos aplicar o processo de remoção-contracção.

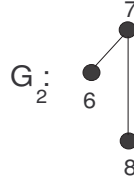


Figura 3.10: Componente G_2 .

Logo, $P_{G_2}(k)$ é o polinômio cromático da árvore com três vértices, assim:

$$\begin{aligned} P_{G_2}(k) &= k(k-1)^2 \\ &= k(k^2 - 2k + 1) \\ P_{G_2}(k) &= k^3 - 2k^2 + k. \end{aligned}$$

Temos então pela Proposição 3.4 que $P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)$, assim:

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) \\ &= [k^5 - 6k^4 + 13k^3 - 12k^2 + 4k][k^3 - 2k^2 + k] \\ &= k^8 - 2k^7 + k^6 - 6k^7 + 12k^6 - 6k^5 + 13k^6 - 26k^5 \\ &\quad + 13k^4 - 12k^5 + 24k^4 - 12k^3 + 4k^4 - 8k^3 + 4k^2 \\ P_G(k) &= k^8 - 8k^7 + 26k^6 - 44k^5 + 41k^4 - 20k^3 + 4k^2. \end{aligned}$$

Obtemos então, que o menor número de cores para colorir o grafo desconexo da Figura 3.8 é 3, pois $P_G(1) = 0$; $P_G(2) = 0$ e $P_G(3) = 144$.

Observe que o polinômio cromático do grafo desconexo da Figura 3.8, tem o termo constante e o termo de grau um iguais a zero, ou seja, o termo de menor grau desse polinômio é k^2 . Sem perda de generalidade, o polinômio cromático de um grafo desconexo tem como termo de menor grau, aquele referente ao número de componentes do grafo, ou seja, um grafo com 3 componentes, por exemplo, tem como termo de menor grau k^3 e os termos k^2 , k e constante iguais a zero.

O fato dos grafos desconexos apresentarem essa propriedade, caracteriza algumas das dificuldades encontradas para determinar quais polinômios são cromáticos, além de outros problemas ainda em aberto, que serão discutidos na próxima seção.

3.3 Problemas em Aberto

Vamos apresentar aqui alguns resultados parciais, ou ainda não provados que podemos encontrar na literatura com relação ao polinômio cromático.

1. Em [24] encontramos uma discussão sobre a dificuldade de caracterizar os grafos que tem o mesmo polinômio cromático, e quais polinômios são cromáticos. Um exemplo de um polinômio que não é cromático, mas satisfaz as propriedades descritas no Teorema 3.5 e no Corolário 3.2, é $k^4 - 3k^3 + 3k^2$.

Este polinômio poderia ser associado a um grafo com 4 vértices, 3 arestas e 2 componentes, mas um grafo com essas características é G que contém uma componente sendo o K_3 e a outra o K_1 . O polinômio cromático de G é $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 2k^2$. Isto mostra que o polinômio $k^4 - 3k^3 + 3k^2$ não é cromático.

Outro exemplo de polinômio que não é cromático é $k^4 - 3k^3 + 3k^2 - 2k$, que pode ser associado a um grafo com 4 vértices, 3 arestas e 1 componente. Porém, para $k = 1$ o valor do polinômio é -1 , que é um absurdo!

Outro problema em aberto, é sobre os coeficientes dos termos de $P_G(k)$ descritos a seguir.

2. Read [31] conjecturou que os p primeiros coeficientes dos termos do polinômio cromático, em valor absoluto, são estritamente crescente e os demais estritamente decrescentes.

Podemos notar que o polinômio cromático do grafo da Figura 3.7, cujos coeficientes em valor absoluto são (1, 7, 20, 29, 21 e 6) satisfazem a conjectura.

O grafo desconexo da Figura 3.8 também tem os coeficientes dos termos do polinômio cromático de G satisfazendo essa propriedade.

Para finalizar, apresentamos uma conjectura sobre a multiplicidade da raiz k do polinômio $P_G(k)$ e o que ela representa no grafo.

3. Em [10] Chia apresenta algumas propriedades sobre a multiplicidade da raiz do polinômio $P_G(k)$.

A multiplicidade da raiz $k = 0$ caracteriza o número de componentes do grafo. Por exemplo a raiz $k = 0$ do polinômio cromático do grafo G da Figura 3.8 tem multiplicidade 2, logo esse grafo tem duas componentes.

Já a multiplicidade da raiz $k = 1$ caracteriza o número de blocos do grafo (ver Seção 2.2). Por exemplo, o grafo da Figura 3.8 tem 4 blocos, uma vez que a multiplicidade da raiz $k = 1$ é 4.

O que pouco se sabe é sobre as propriedades estruturais de G que podem ser deduzidas da multiplicidade da raiz $k = 2$. O polinômio cromático do grafo desconexo G da Figura 3.8 tem a raiz $k = 2$ com multiplicidade 2. O que isso pode representar no grafo?

Capítulo 4

Propostas de Solução do Problema de Coloração

Neste capítulo apresentamos a formulação matemática do Problema de Coloração em Grafos, através de Modelos de Programação Inteira. O estudo realizado e as formulações apresentadas aqui foram baseados principalmente nos trabalhos de Díaz e Zabala [15, 16] e Mehotra e Trick [30]. Na Seção 4.1 apresentamos duas formulações para o problema e algumas inequações que reforçam uma dessas formulações. Na Seção 4.2 discutimos alguns métodos de solução propostos na literatura, assim como alguns estudos e trabalhos que estão sendo realizados utilizando esses métodos.

4.1 Modelos de Programação Inteira

A maioria dos problemas em otimização em grafos pode ser formulado como um problema de programação inteira (PI). Apresentamos nesta seção duas formulações para o Problema de Coloração em Grafos, uma baseada na Formulação por Conjuntos Independentes Maximais proposta por Mehotra e Trick [30] e outra proposta por Díaz e Zabala [15] (ver Seção 4.1.1). Apresentamos também as dificuldades de encontrar uma solução através da formulação proposta por Díaz e Zabala e finalmente algumas inequações válidas que são utilizadas na reformulação do problema (Seção 4.1.2).

4.1.1 Formulações Clássicas

O problema de coloração em grafos é um dos problemas mais estudados em Teoria dos Grafos. Dos trabalhos encontrados na literatura, o que alcançou os melhores resultados em termos de limite inferior para o problema de coloração é o de Mehotra e Trick [30], como veremos na Seção 4.2.1. Neste trabalho, os autores propõe uma formulação do problema baseado na cobertura por conjuntos independentes maximais.

Esta formulação, chamada *Formulação por Conjuntos Independentes Maximais*, associa uma variável binária para cada conjunto independente maximal do grafo. Vamos considerar $\mathbf{S}$ como sendo a família de todos os conjuntos independentes maximais do grafo G . Definimos a variável binária x_s , $s \in \mathbf{S}$, que recebe valor 1 quando o conjunto independente s recebe uma dada cor, e 0 caso contrário. O critério de otimização é determinar a quantidade mínima de conjuntos independentes maximais necessária para cobrir todos os vértices do grafo, ou seja,

$$\min \sum_{s \in \mathbf{S}} x_s.$$

É necessário garantir que todos os vértices sejam coloridos, ou seja, cobertos por pelo menos um conjunto independente, assim temos:

$$\sum_{\{s: i \in s\}} x_s \geq 1 \quad i \in V.$$

Note pela restrição acima que $x_s = 0$ não impede que os vértices de s sejam coloridos, ou seja, os vértices de s podem receber cores distintas se cobertos por outros conjuntos independentes. Observe também, que a restrição de que dois vértices adjacentes recebem cores distintas é satisfeita pela própria definição das variáveis. Assim, a formulação do problema de coloração mínima baseada na cobertura por conjuntos independentes (*CI*) é então:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{s \in \mathbf{S}} x_s \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{\{s: i \in s\}} x_s \geq 1 \quad i \in V \\ & x_s \in \{0, 1\} \quad s \in \mathbf{S} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esta formulação possui uma restrição por vértice, mas o número de conjuntos independentes de um grafo pode ser exponencial, e então podemos ter um número exponencial de variáveis na formulação, o que torna o problema difícil de ser tratado. Outra dificuldade é o fato de que os vértices são multicoloridos, o que pode gerar colorações equivalentes.

Considere o grafo da Figura 4.1 abaixo. Temos que $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ onde

$$s_1 = \{1, 3, 6, 8\}, \quad s_2 = \{1, 3, 9, 10\}, \quad s_3 = \{1, 3, 8, 10\}, \quad s_4 = \{1, 4, 6, 8\},$$

$$s_5 = \{2, 4, 6, 8\}, \quad s_6 = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{e} \quad s_7 = \{1, 3, 6, 9\},$$

ou seja, G tem sete conjuntos independentes maximais.

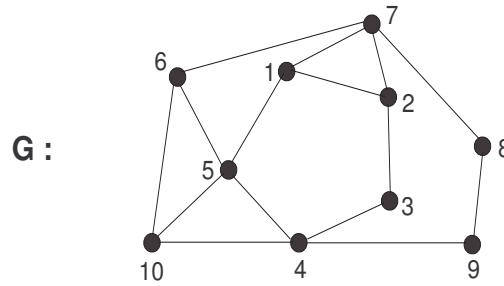


Figura 4.1: Representação de um grafo G com 10 vértices e 15 arestas.

A formulação matemática por Conjuntos Independentes Maximais (CI) do grafo da Figura 4.1 é:

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_{s_1} + x_{s_2} + x_{s_3} + x_{s_4} + x_{s_5} + x_{s_6} + x_{s_7} \\
\text{s.a.} \quad & x_{s_1} + x_{s_2} + x_{s_3} + x_{s_4} + x_{s_7} \geq 1 \\
& x_{s_5} \geq 1 \\
& x_{s_1} + x_{s_2} + x_{s_3} + x_{s_6} + x_{s_7} \geq 1 \\
& x_{s_4} + x_{s_5} \geq 1 \\
& x_{s_6} \geq 1 \\
& x_{s_1} + x_{s_4} + x_{s_5} \geq 1 \\
& x_{s_6} \geq 1 \\
& x_{s_1} + x_{s_3} + x_{s_4} + x_{s_5} \geq 1 \\
& x_{s_2} + x_{s_6} + x_{s_7} \geq 1 \\
& x_{s_2} + x_{s_3} \geq 1 \\
& x_s \in \{0, 1\} \quad s \in \mathbf{S}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Note que uma possível solução é $x_{s_2} = x_{s_5} = x_{s_6} = 1$, ou seja, os vértices do grafo da Figura 4.1 são cobertos pelos conjuntos independentes $\{1, 3, 9, 10\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{3, 5, 7, 9\}$. Com essa solução os vértices 3 e 9 são multicoloridos.

Uma forma de tentar evitar essa simetria das soluções do problema é utilizar uma formulação alternativa para conjuntos independentes (não só os conjuntos maximais), através da substituição da desigualdade na Formulação (4.1) por uma igualdade. Embora o modelo (4.1) possa ter um número alto de variáveis, se utilizarmos uma técnica de geração de colunas [30] esse problema pode ser tratado, como será visto na Seção 4.2.1. Podemos encontrar também alguns algoritmos de resolução para a Formulação (4.1) em [11].

Díaz e Zabala [16] trazem uma outra formulação para o problema de coloração. Essa formulação é baseada em restrições de atribuição. Dado um grafo $G(V, A)$ com n vértices, m arestas e um conjunto de n cores, vamos definir duas variáveis.

Seja x_{ij} , $i \in V$ e $1 \leq j \leq n$ uma variável binária que indica se a cor j foi atribuída ou não a um vértice i ($x_{ij} = 1$ se o vértice i for colorido com a cor j e $x_{ij} = 0$ caso contrário)

e w_j , com valor 1 se a cor j for atribuída a pelo menos um vértice de V . A variável w_j controla o uso ou não de cada cor j . O critério de otimização é minimizar o número de cores necessárias para obter uma coloração do grafo, temos então:

$$\min \sum_{j=1}^n w_j.$$

Devemos assegurar que cada vértice de V irá receber exatamente uma cor e também que os vértices adjacentes recebam cores diferentes. Temos então as restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall i \in V \\ x_{ij} + x_{kj} &\leq w_j \quad \forall (i, k) \in A, 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Uma formulação de Díaz e Zabala [12, 15, 16] para o problema de coloração de vértices é então:

$$\begin{aligned} z = \min \quad & \sum_{j=1}^n w_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \tag{a} \\ & x_{ij} + x_{kj} \leq w_j \quad \forall (i, k) \in A, 1 \leq j \leq n \tag{b} \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, 1 \leq j \leq n \\ & w_j \in \{0, 1\} \quad 1 \leq j \leq n \tag{c} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Note que esta é uma formulação simétrica, pois qualquer permutação de cores fornece soluções factíveis, com o mesmo valor da função objetivo [17]. Ilustramos esse fato na Figura 4.2 abaixo, onde obtemos uma coloração simétrica utilizando o número mínimo de três cores.

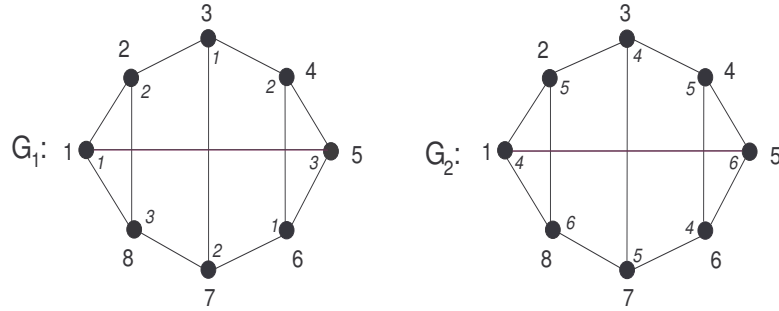


Figura 4.2: Duas colorações simétricas para o grafo G .

Pela Figura 4.2, vemos que os vértices de G_1 , 1, 3 e 6 receberam a cor 1 (isto é $x_{11} = x_{31} = x_{61} = 1$), enquanto que os grupos de vértices 2, 4, 7 e 5, 8 receberam a cor 2 e 3 respectivamente, ou seja, $x_{22} = x_{42} = x_{72} = 1$ e $x_{53} = x_{83} = 1$. Já em G_2 temos que os vértices 1, 3 e 6 recebem a cor 4 e os grupos de vértices 2, 4, 7 e 5, 8 recebem a cor 5 e 6 respectivamente. Isto nos fornece duas colorações simétricas de G , ou seja, utilizando o mínimo de três cores, obtém-se duas soluções equivalentes para o mesmo problema.

Na prática, essa simetria define um número exponencial de colorações, o que torna a sua utilização inviável para instâncias grandes. Apresentamos a seguir, algumas inequações que melhoram a Formulação (4.3), excluindo algumas soluções simétricas do conjunto solução do problema.

4.1.2 Reformulação: Inequações válidas

Como mostramos na Seção 4.1.1, dada uma k -coloração de G , qualquer escolha de k cores do conjunto $\{1, \dots, n\}$ fornece uma solução factível para o poliedro associado a Formulação (4.3), e essas soluções são todas equivalentes (possuem o mesmo valor de z).

Definimos a seguir duas inequações que eliminam algumas das soluções simétricas factíveis para a Formulação (4.3). Estas restrições adicionais são definidas por:

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall 1 \leq j \leq n-1 \quad (\text{a})$$

(4.4)

$$w_j \leq \sum_{i \in V} x_{ij} \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad (\text{b})$$

Este conjunto de restrições garante que a cor $j+1$ só será atribuída a algum vértice se a cor j já tiver sido utilizada na coloração de outros vértices. Assim, uma nova formulação do problema de coloração é:

$$z = \min \sum_{j=1}^n w_j$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (\text{a})$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq w_j \quad \forall (i, k) \in A, 1 \leq j \leq n \quad (\text{b})$$

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall 1 \leq j \leq n-1 \quad (\text{c}) \quad (4.5)$$

$$w_j \leq \sum_{i \in V} x_{ij} \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad (\text{d})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, 1 \leq j \leq n$$

$$w_j \in \{0, 1\} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Observe que assim, colorações com índice maior que k (dada uma k -coloração do grafo) não são consideradas na Formulação (4.5) e a simetria exposta na Figura 4.2 é eliminada.

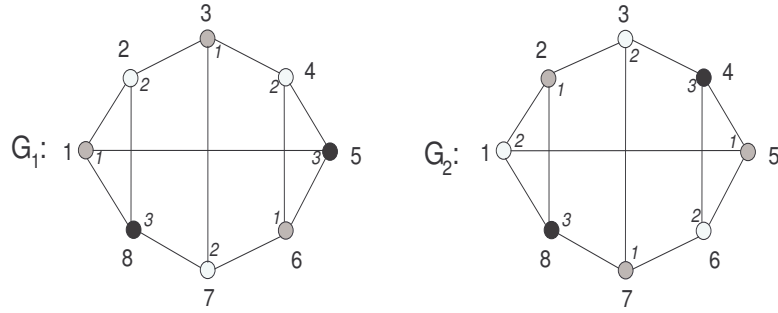


Figura 4.3: Duas soluções simétricas pertencentes ao espaço solução do problema.

Porém ainda existe simetria no conjunto solução do problema como mostrado na Figura 4.3. Essas simetrias estão relacionadas à permutação das três cores necessárias para colorir os vértices do grafo. Em G_1 os vértices 1, 3, 6 receberam a cor 1 enquanto que em G_2 a cor 1 foi atribuída aos vértices 2, 5, 7. A cor 2 e 3 foram atribuídas aos grupos de vértices 2, 4, 7 e 5, 8 de G_1 e aos grupos de vértices 1, 3, 6 e 4, 8 de G_2 respectivamente. Embora ainda existam essas simetrias, o espaço de soluções viáveis da Formulação (4.5) tem uma redução significativa.

Outras classes de inequações propostas em [12, 16, 17] podem ser úteis na resolução do problema. Considere o poliedro associado à Formulação (4.5), o qual chamaremos por (CP) [16]. Descrevemos a seguir essas inequações.

- *Inequação Conjunto Independente*

Considere uma coloração ótima de G . O conjunto de todos os vértices coloridos com uma determinada cor (j_0) é um conjunto estável (ver Definição 2.2), e a cardinalidade deste conjunto não excede o número de estabilidade interna de G , $\alpha(G)$ (ver Seção 2.1). Adaptando essa propriedade para um subgrafo $G'(V', A')$ de G , temos que a inequação:

$$\sum_{v_i \in V'} x_{v_i j_0} \leq \alpha(G') w_{j_0} \quad (4.6)$$

é válida para (CP) , $\forall j_0 = 1, \dots, n$, onde $\alpha(G')$ é o número de estabilidade interna de G' .

Para exemplificar a utilização dessa inequação, considere o subgrafo G' do grafo G representado na Figura 4.1 formado pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 5, 6, 7\}$. O número de

estabilidade interna de G' , $\alpha(G')$, é 3. Logo

$$x_{v_1j_0} + x_{v_2j_0} + x_{v_5j_0} + x_{v_6j_0} + x_{v_7j_0} \leq 3w_{j_0}$$

é uma inequação válida para (CP) . Temos então que no máximo três vértices são coloridos com a cor j_0 .

Desde que $\alpha(G') < 2$, a inequação (4.6) define uma faceta do (CP) , pois qualquer $(n - \alpha(G') + 1)$ -coloração que atribui a cor j_0 a um conjunto independente maximal de G' satisfaz a inequação em equação. Entretanto se $\alpha(G') \geq 2$, a inequação não é uma faceta, pois não existe uma n -coloração satisfazendo a inequação em equação [16].

A proposição a seguir define uma inequação válida baseada em (4.6) e as condições para que defina uma faceta.

Proposição 4.1. [16] *Seja $G' = G(V')$, $V' \subset V$, o subgrafo induzido de G . Considere o número de estabilidade interna de G' , $\alpha(G')$, e seja $j_0 \leq n - \alpha(G')$. Então a inequação*

Conjunto Independente

$$\sum_{v_i \in V'} x_{v_i j_0} + \sum_{v_i \in V} \sum_{j = n - \alpha(G') + 1} x_{v_i j} \leq \alpha(G')w_{j_0} + w_{n - \alpha(G') + 1} \quad (4.7)$$

é válida para (CP) . Se,

- $\alpha(G') < \alpha(G)$;
- $\forall v_i \in V \setminus V'$, o subgrafo $G[V' \cup \{v_i\}]$ contém um conjunto independente de cardinalidade $(\alpha(G') + 1)$;
- existir um conjunto independente maximal I de G' , tal que $G[V \setminus I]$ não é um clique;
- existir apenas $\chi(G)$ -colorações que satisfazem a inequação em equação

então a inequação (4.7) define uma faceta para o (CP) .

A inequação (4.7) mostrou-se muito útil para subgrafos cujo número de estabilidade interna é conhecido [16]. Porém, determinar o número de estabilidade de um grafo é um

problema tão difícil quanto o problema de coloração, o que torna a inequação vantajosa apenas em alguns casos.

Os conceitos de clique (ver Seção 2.2), *hole* e conjunto de vizinhos de um dado vértice v_i (ver Seção 2.1), também são úteis para derivar inequações válidas para a Formulação (4.5) [16].

- *Inequação Clique*

Como todos os vértices de um clique são mutuamente adjacentes, não podemos atribuir uma cor a mais de um vértice. A próxima proposição formaliza essa observação.

Proposição 4.2. [16] *Seja K um clique maximal de G e $1 \leq j_0 \leq n - 1$. A Inequação *Clique*,*

$$\sum_{v_i \in K} x_{v_i j_0} \leq w_{j_0} \quad (4.8)$$

define uma faceta para (CP).

O grafo da Figura 4.1 tem três cliques maximais, $K^1 = \{1, 2, 7\}$, $K^2 = \{4, 5, 10\}$ e $K^3 = \{5, 6, 10\}$, logo as inequações (4.9) definem facetas para (CP).

$$\begin{array}{ll} \sum_{v_i \in K^1} x_{v_i j_0} \leq w_{j_0} & x_{v_1 j_0} + x_{v_2 j_0} + x_{v_7 j_0} \leq w_{j_0} \\ \sum_{v_i \in K^2} x_{v_i j_0} \leq w_{j_0} & \implies x_{v_4 j_0} + x_{v_5 j_0} + x_{v_{10} j_0} \leq w_{j_0} \\ \sum_{v_i \in K^3} x_{v_i j_0} \leq w_{j_0} & x_{v_5 j_0} + x_{v_6 j_0} + x_{v_{10} j_0} \leq w_{j_0} \end{array} \quad (4.9)$$

- *Inequação Hole*

A próxima proposição define uma inequação válida baseada no uso da subestrutura *hole*.

Proposição 4.3. [16] *Seja C_k um hole de G de tamanho k e $1 \leq j_0 \leq n - \lfloor k/2 \rfloor$. A inequação *Hole**

$$\sum_{v_i \in C_k} x_{v_i j_0} + \sum_{v_i \in V} \sum_{j = n - \lfloor k/2 \rfloor + 1}^n x_{v_i j} \leq \lfloor k/2 \rfloor w_{j_0} + w_{n - \lfloor k/2 \rfloor + 1} \quad (4.10)$$

é válida para (CP).

No grafo da Figura 4.1 temos um *hole* de tamanho 5, $C_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Logo, uma inequação válida para (CP) baseada nesse *hole* é

$$\sum_{v_i \in C_5} x_{v_i j_0} + \sum_{v_i \in V} \sum_{j=9}^{10} x_{v_i j} \leq 2w_{j_0} + w_9$$

ou seja,

$$x_{v_1 j_0} + x_{v_2 j_0} + x_{v_3 j_0} + x_{v_4 j_0} + x_{v_5 j_0} + \sum_{v_i \in V} x_{v_i 9} + \sum_{v_i \in V} x_{v_i 10} \leq 2w_{j_0} + w_9. \quad (4.11)$$

- *Inequação de Vizinhança*

Para definirmos a inequação de vizinhança, vamos considerar inicialmente o subconjunto das restrições (4.3(b)) definida para os vizinhos de v_i , $N(v_i)$. Para isso, denotamos $|N(v_i)| = \delta(v_i)$ para todo $1 \leq j_0 \leq n-1$ e $v_i \in V$. Se adicionarmos todas as restrições do subconjunto, obtemos a seguinte inequação válida

$$\sum_{k \in N(v_i)} x_{k j_0} + \delta(v_i) x_{v_i j_0} \leq \delta(v_i) w_{j_0}. \quad (4.12)$$

Considere o vértice 5 do grafo da Figura 4.1. Temos que $N(v_5) = \{1, 4, 6, 10\}$, logo $\delta(v_5) = 4$. Então o conjunto de restrições

$$x_{v_5 j_0} + x_{v_1 j_0} \leq w_{j_0}$$

$$x_{v_5 j_0} + x_{v_4 j_0} \leq w_{j_0}$$

$$x_{v_5 j_0} + x_{v_6 j_0} \leq w_{j_0}$$

$$x_{v_5 j_0} + x_{v_{10} j_0} \leq w_{j_0}$$

pertencente a Formulação (4.5) pode ser substituído pela inequação válida

$$\sum_{k \in N(v_5)} x_{k j_0} + 4x_{v_5 j_0} \leq 4w_{j_0}. \quad (4.13)$$

Observe que ou o vértice v_5 é colorido com a cor j_0 ou os vizinhos de v_5 o são. Porém, nem todos os vizinhos de v_5 são coloridos com a cor j_0 . No nosso exemplo, os quatro vizinhos não podem receber a mesma cor pois v_{10} é também vizinho de v_4 e v_6 .

Se substituirmos $\delta(v_i)$ da inequação válida (4.12) por $r = \alpha(G[N(v_i)])$, ou seja, pelo número de estabilidade interna do subgrafo induzido pelos vizinhos de v_i e além disso tivermos $1 \leq j_0 \leq n-r+1$, então as soluções factíveis que satisfazem essa nova inequação em equação, tem $x_{v_i j} = 0$ para todo $j \geq n-r+2$. A inequação definida na próxima proposição resulta da aplicação desse processo.

Proposição 4.4. [16] *Seja $v_i \in V$ tal que $r = \alpha(G[N(v_i)])$ não é menor que 2. A inequação **Vizinhança***

$$\sum_{u \in N(v_i)} x_{uj_0} + rx_{v_i j_0} + \sum_{j=1}^{r-1} jx_{v_i n-r+j+1} \leq rw_{j_0} \quad (4.14)$$

é uma faceta para (CP) para todo $1 \leq j_0 \leq n-r+1$.

Considerando o exemplo anterior, substituímos $\delta(v_5) = 4$ por $r = \alpha(G[N(v_5)]) = 2$. O subgrafo induzido pelos vizinhos de v_5 está representado na Figura 4.4 abaixo.

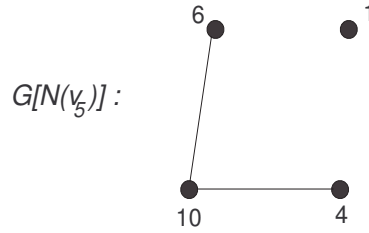


Figura 4.4: Subgrafo induzido pelo conjunto de vizinhos de v_5 do grafo G da Figura 4.1.

Temos então que a inequação

$$\sum_{u \in N(v_5)} x_{uj_0} + 2x_{v_5 j_0} + x_{v_5 10} \leq 2w_{j_0}$$

ou seja,

$$x_{v_1 j_0} + x_{v_4 j_0} + x_{v_6 j_0} + x_{v_{10} j_0} + 2x_{v_5 j_0} + x_{v_5 10} \leq 2w_{j_0} \quad (4.15)$$

é uma faceta para todo $1 \leq j_0 \leq 9$.

- *Inequação Bloco de Cor*

Uma nova inequação que elimina soluções simétricas será apresentada a seguir. Para isso, note que as restrições definidas em (4.4) impõem que qualquer solução factível do politopo (CP) que não utiliza a cor j_0 , não pode usar cores com índice maior que j_0 . Além disso, qualquer vértice em V não recebe mais que uma cor. A próxima proposição traz juntas essas duas observação.

Proposição 4.5. [16] *A inequação **Bloco de Cor***

$$\sum_{j=j_0}^n x_{v_{i_0}j} \leq w_{j_0} \quad (4.16)$$

é válida para (CP) para todo $v_{i_0} \in V$ e $1 \leq j_0 \leq n-1$.

• *Inequação Caminho Multicolorido*

Considere agora um caminho $P_k = v_1, \dots, v_k$, $k \geq 3$ e um conjunto $\{c_1, \dots, c_k\}$ de k cores tal que $c_k \geq c_i$, $i = 1, \dots, k-1$. Somando a inequação Bloco de Cor $\sum_{j=c_k}^n x_{v_i j} \leq w_{c_k}$ e a restrição $x_{v_i c_i} + x_{v_{i+1} c_i} \leq w_{c_i}$ resulta na seguinte inequação:

$$x_{v_1 c_1} + \sum_{i=2}^{k-1} (x_{v_i c_{i-1}} + x_{v_i c_i}) + x_{v_k c_{k-1}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=c_k}^n x_{v_i j} \leq k w_{c_k} + \sum_{i=1}^{k-1} w_{c_i}$$

Essa é uma inequação válida, porém dominada pelo conjunto de inequações utilizadas para obtê-la. Observe que o coeficiente de w_{c_k} pode ser reduzido a 1, preservando a validade da inequação, uma vez que não são necessárias mais de k cores para colorir um conjunto com k vértices. Obtemos então o seguinte resultado.

Proposição 4.6. [16] *Seja $P_k = v_1, \dots, v_k$, $k \geq 3$, um caminho e considere o conjunto $\{c_1, \dots, c_k\}$ de k cores tal que $c_k \geq c_i$, $i = 1, \dots, k-1$. A inequação do **Caminho Multicolorido***

$$x_{v_1 c_1} + \sum_{i=2}^{k-1} (x_{v_i c_{i-1}} + x_{v_i c_i}) + x_{v_k c_{k-1}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=c_k}^n x_{v_i j} \leq w_{c_k} + \sum_{j=1}^{k-1} w_{c_j} \quad (4.17)$$

é válida para (CP) .

Vamos considerar um caminho do vértice 1 ao vértice 4, $P_4 = v_1, v_2, v_3, v_4$, do grafo da Figura 4.1 e o conjunto de cores $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Então a inequação (4.18) abaixo é válida para (CP) .

$$x_{v_1c_1} + \sum_{i=2}^3 (x_{v_i c_{i-1}} + x_{v_i c_i}) + x_{v_4 c_3} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=c_4}^{10} x_{v_i j} \leq w_{c_4} + \sum_{j=1}^3 w_{c_j}$$

ou seja,

$$x_{v_1c_1} + x_{v_2c_1} + x_{v_2c_2} + x_{v_3c_2} + x_{v_3c_3} + x_{v_4c_3} + \sum_{j=c_4}^{10} (x_{v_1j} + x_{v_2j} + x_{v_3j} + x_{v_4j}) \leq w_{c_4} + w_{c_1} + w_{c_2} + w_{c_3}. \quad (4.18)$$

- *Inequação Clique Multicolorido*

Vamos obter agora uma nova inequação válida para (CP) , de forma similar à descrita acima. Para isso, considere $\{v_1, \dots, v_p\}$ um clique de G de tamanho p , k o índice da cor tal que $p \leq k \leq n-1$ e $Col \subseteq \{1, \dots, k-1\}$. Quando somamos a inequação Clique $\sum_{i=1}^p x_{v_i j} \leq w_j$, $j \in Col$ e a inequação Bloco de Cor $\sum_{j=k}^n x_{v_i j} \leq w_k$, $j = 1, \dots, p$, obtemos a seguinte inequação válida:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j \in Col} x_{v_i j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=k}^n x_{v_i j} \leq \sum_{i=1}^p w_j + p w_k$$

Note novamente que o coeficiente de w_k nessa inequação pode ser reduzido a 1 preservando a validade, pois não são necessárias mais do que p cores para colorir os vértices de um clique de tamanho p . A proposição a seguir formaliza esse resultado.

Proposição 4.7. [16] *Seja $\{v_1, \dots, v_p\}$ um clique de tamanho p . O índice da cor, k , é tal que $p \leq k \leq n-1$ e $Col \subseteq \{1, \dots, k-1\}$ para $|Col| = p-1$. Então a inequação **Clique Multicolorido***

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=k}^n x_{v_i j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j \in Col} x_{v_i j} \leq w_k + \sum_{j \in Col} w_j \quad (4.19)$$

é válida para (CP) . Se $\chi(G) + 1 \leq k$, então a inequação define uma faceta.

Considere o clique de tamanho 3, formado pelos vértice $\{5, 6, 10\}$ da Figura 4.1. Pela Proposição 4.7 temos que $3 \leq k \leq n - 1$ e $Col \subseteq \{1, 2\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=k}^{10} x_{v_i j} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in Col} x_{v_i j} &\leq w_k + \sum_{j \in Col} w_j \\ \sum_{j=k}^{10} (x_{v_1 j} + x_{v_2 j} + x_{v_3 j}) + \sum_{i=1}^3 (x_{v_i 1} + x_{v_i 2}) &\leq w_k + w_1 + w_2 \\ \sum_{j=k}^{10} (x_{v_1 j} + x_{v_2 j} + x_{v_3 j}) + x_{v_1 1} + x_{v_1 2} + x_{v_2 1} + x_{v_2 2} + x_{v_3 1} + x_{v_3 2} &\leq w_k + w_1 + w_2 \end{aligned}$$

ou seja, considerando que v_1, v_2 e v_3 estão representando os vértices 5, 6 e 10 respectivamente, temos que a inequação

$$\sum_{j=k}^{10} (x_{v_5 j} + x_{v_6 j} + x_{v_{10} j}) + x_{v_5 1} + x_{v_5 2} + x_{v_6 1} + x_{v_6 2} + x_{v_{10} 1} + x_{v_{10} 2} \leq w_k + w_1 + w_2 \quad (4.20)$$

é válida para (CP) .

As inequações que descrevemos aqui serão utilizadas na Seção 4.2.2 para a descrição do algoritmo *Branch-and-Cut* proposto por Díaz e Zabala [16].

4.2 Métodos de Solução

Diversos métodos de solução foram propostos para resolver o problema de coloração em grafos, classificado como *NP*-difícil (e.g. [23], [5]). Nesta seção vamos apresentar dois desses métodos, o primeiro através da geração de colunas [30] e outro utilizando um algoritmo *Branch-and-Cut* [16]. Para isso, trazemos uma breve revisão dos algoritmos *Branch-and-Bound*, Planos de Cortes e Geração de Colunas [20, 38].

- *Branch-and-Bound*

O algoritmo *Branch-and-Bound*, baseado na técnica "dividir para conquistar", particiona o conjunto de solução do problema em subconjuntos, na tentativa de que a resolução do

subproblema associado a cada um desses subconjuntos seja mais simples que a resolução do problema original. Entretanto, se os subproblemas são ainda assim difíceis de resolver, eles são particionados de maneira similar. Esse processo continua até que a solução do problema seja encontrada.

Esse algoritmo é tipicamente representado por uma árvore de enumeração, onde cada nó da árvore corresponde a cada um dos subproblemas descrito acima. Para evitar a enumeração completa do conjunto viável, são usados limites primais (soluções viáveis) e duais (limites inferiores para o caso do problema de coloração) para o valor da função objetivo.

- Planos de Cortes

A idéia do algoritmo de Planos de Cortes é obter formulações que se aproximem do envoltório convexo do problema inteiro através da introdução de inequações válidas chamados de planos de cortes. De forma geral, a estrutura básica do algoritmo de Planos de Cortes para resolver o problema inteiro pode ser descrita pelo Algoritmo 1:

Algoritmo 1:

Passo 1. Resolva a relaxação linear (PL) correspondente ao problema inteiro, que é gerada eliminando a condição de integralidade das variáveis.

Passo 2. Se a solução da relaxação linear é factível para o problema inteiro, ou seja, a solução encontrada na relaxação é uma solução inteira, então o problema foi resolvido na otimalidade, pare.

Passo 3. Caso contrário, encontre um ou mais planos de cortes que separem a solução ótima da relaxação do envoltório convexo formado pelos pontos inteiros factíveis. Adicione esses planos de cortes à formulação corrente e volte ao passo 1.

Os melhores planos de cortes conhecido são as facetas, pois estas compõe uma descrição completa e irredundante do poliedro associado ao problema inteiro. Dizemos então que tais planos de cortes são faciais.

O algoritmo *Branch-and-Cut* combina as idéias dos algoritmos *Branch-and-Bound* e Planos de Cortes. Esse método utiliza em cada nó da árvore de enumeração o método dos planos de cortes com a finalidade de gerar bons limites duais (inferiores). Na Seção 4.1.2 mostramos algumas inequações que definem facetas e foram utilizadas na implementação do algoritmo *Branch-and-Cut* que descrevemos na Seção 4.2.2.

- Geração de Colunas

A idéia do método de Geração de Colunas é que ao invés de considerar todas as colunas (que em geral são muitas) do problema principal, conhecido como problema mestre (PM), consideramos apenas um subconjunto delas. Isso define um problema mestre restrito (PMR). Avaliamos então se existem colunas que não estão no problema (PM), mas que podem melhorar a sua função objetivo ao ser adicionada.

Na geração de colunas, o problema (PMR) é otimizado iterativamente, até que exista a garantia de que a solução ótima do problema (PMR) é também a solução ótima do problema (PM). Considere x e π as soluções primal e dual respectivamente do problema (PMR) corrente. Se o custo reduzido de uma variável é maior ou igual a zero, então a solução x do problema (PMR) é também uma solução ótima do problema mestre. Caso contrário adicionamos ao problema restrito a coluna derivada da solução ótima do subproblema e repetimos a reotimização do problema (PMR). O procedimento descrito acima deverá ser repetido até que não existam mais colunas atrativas. A variável dual π é o coeficiente da função objetivo do subproblema e representa o valor da utilidade de cada item no momento.

Quando combinamos a técnica de Geração de Colunas com o Algoritmo *Branch-and-Bound* temos o algoritmo *Branch-and-Price* [38]. Esse método gera colunas nos nós da árvore de enumeração, e para isso necessita de regras especiais para a partição dos subproblemas nas ramificações.

4.2.1 Geração de Colunas

Na Seção 4.1 nós apresentamos a Formulação por Conjuntos Independentes Maximais (CI) do problema de coloração em grafos. A seguir trazemos uma breve visão da técnica de

geração de colunas proposta por Mehotra e Trick [30] para o problema (ver Formulação (4.1)).

Começamos com um subconjunto de conjuntos independentes $\bar{\mathbf{S}}$ e então resolvemos a relaxação linear de (CI) restrito a $s \in \bar{\mathbf{S}}$. Isto fornece uma solução dual factível π . Para determinar se é útil expandir $\bar{\mathbf{S}}$, resolvemos o seguinte problema de *Conjunto Independente Máximo Ponderado (CIMP)*:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \pi_i z_i \\ \text{s.a.} \quad & z_i + z_k \leq 1 \quad \forall (i, k) \in A \\ & z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \end{aligned} \tag{4.21}$$

Se a solução ótima desse problema for maior que 1, então $\mathbf{S}' = \{i \in V : z_i = 1\}$ é o conjunto independente que deve ser adicionado a $\bar{\mathbf{S}}$, ou seja, a variável associada a esse conjunto independente deve ser incluída no problema (CI) . Caso contrário, a solução da relaxação linear de (4.1) foi encontrada.

O processo acima é repetido até que não haja mais conjuntos independentes que melhorem a solução. Se o resultado da relaxação retorna um x_s inteiro para todo $s \in \bar{\mathbf{S}}$, então temos a solução ótima para o (CI) . Quando algum x_s não é inteiro, temos que determinar a solução através de outro método como algoritmos (e.g. Planos de Cortes) ou heurísticas. Este processo é implementado em [30].

Este método foi o que alcançou melhores resultados em termos de limite inferior para o problema de coloração, sendo utilizado até hoje como base para os estudos realizados sobre o problema de coloração em grafos [6], [7], [21], [8], [22], e [32].

4.2.2 *Branch-and-Cut*

Baseadas nos estudos realizados sobre famílias de inequações que definem facetas para (CP) [15, 12] e no desenvolvimento do algoritmo de planos de cortes [17], Díaz e Zabala em [16] propõe a resolução do problema de coloração em grafos (4.5) pelo algoritmo *Branch-and-Cut*. Esse algoritmo inclui uma fase de pré-processamento útil para eliminar soluções subótimas e restrições redundantes, diminuindo assim o tamanho do problema.

A fase de pré-processamento é iniciada através de uma heurística simples que busca o maior clique K do grafo. Um limite inferior válido para o número cromático é então obtido pelo tamanho do clique, pois os vértices do clique devem receber cores diferentes.

Note que existem vértices que podem ser retirados do grafo G , e a coloração obtida para o subgrafo resultante G' pode ser estendida para o grafo original G , sem a necessidade do uso de uma nova cor. Díaz e Zabala propõe dois procedimentos para identificar esses vértices.

Um limite superior, $\bar{\chi}$, para o número cromático é encontrado através da solução encontrada pelo algoritmo Dsatur [4]. Dsatur é um algoritmo de enumeração implícita, onde cada nó da árvore de busca corresponde a uma coloração parcial de G . Determinado esse limite, as variáveis x_{ij} e w_j com índice $j \geq \bar{\chi} + 1$ são eliminadas da formulação (CP) .

A cada nó da árvore de enumeração do método *Branch-and-Cut* é resolvido o seguinte Problema de Separação. Dada a solução ótima da relaxação linear (x^*, w^*) de (CP) encontre uma inequação válida violada.

O problema de separação é aplicado inicialmente somente para as inequações Clique (4.8), Bloco de Cor (4.16) e Caminho Multicolorido (4.17). Se não for detectada nenhuma violação dessas inequações, procura-se pelas inequações *Hole* (4.10) e Clique Multicolorido (4.19). Os experimentos computacionais apresentados em [16] mostraram que a utilização dessas inequações são úteis para fortalecer a relaxação linear de (CP) .

Para a realização dos testes computacionais Díaz e Zabala utilizaram as instâncias de DIMACS [19] e os resultados foram comparados com os dados fornecidos pelo algoritmo *Branch-and-Bound*, CPLEX [13] e Dsatur [4]. Todos os resultados mostraram que o algoritmo *Branch-and-Cut* proposto é capaz de resolver instâncias de coloração em grafos que Dsatur não consegue. Os testes realizados mostraram também que esse método produz uma melhoria nos limites inferior e superior, sendo uma promessa de algoritmo exato para o Problema de Coloração em Grafos.

Capítulo 5

Oficina de Coloração para o Ensino Fundamental e Médio

Neste capítulo, vamos apresentar as atividades propostas e o desenvolvimento de uma Oficina de Coloração para o Ensino Fundamental e Médio, apresentadas em [27, 29, 28]. A oficina foi realizada na escola E. E. Pio X, em um dia letivo do ano de 2005 durante a aula de Matemática. Foram oferecidas duas oficinas nesta escola, uma para a 2ª série do Ensino Médio e outra para a 6ª série do Ensino Fundamental. Compareceram à primeira oficina dezesseis alunos, e esta durou duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. Para a segunda oficina, com duração de sessenta minutos, compareceram vinte e cinco alunos da 6ª série. A idéia de apresentar este tópico para alunos deste nível escolar foi motivada pelos trabalhos de Jurkiewicz [26, 25] e Simões e Lima [34]. Em [26], Jurkiewicz discute: "Qual conteúdo deve-se introduzir no currículo da matemática pré-universitária para viver num mundo de procedimentos algorítmicos?" Já em [25] o autor discute a necessidade da introdução deste conteúdo, voltado à formação de cidadãos aptos a viver num mundo onde a cultura dos procedimentos sequenciais se torna rapidamente um padrão e, cita também algumas experiências que estão sendo realizadas neste sentido, tais como DIMACS [18], MEGAMATH [9] e Colorfull Math [14]. Na Seção 5.1 apresentamos as atividades propostas divididas em dois blocos. Na Seção 5.2 descrevemos o desenvolvimento de cada oficina.

Finalmente na Seção 5.3 relatamos os pontos positivos e negativos.

5.1 Propostas de Atividades

As atividades propostas para esta oficina tem por objetivo, desenvolver no aluno, através do problema de coloração de mapas e grafos [27], a habilidade de resolver problemas utilizando estratégias e entender as aplicações diversas de um mesmo problema, além de apresentar novos tópicos da Matemática Discreta.

As atividades foram divididas em dois blocos, de 4 atividades cada. O primeiro bloco, teve como objetivo trabalhar o Problema de Coloração de Mapas e o segundo o Problema de Coloração em Grafos. Descrevemos a seguir as atividades propostas em cada bloco.

5.1.1 Atividades do 1º Bloco

A primeira atividade (Atividade 1) deste bloco, é encontrar uma coloração para três mapas desenhados em isopor. O objetivo é determinar qual é a quantidade mínima de cores necessárias para obter uma coloração de cada um dos mapas. A seguir, é apresentado um questionário (Atividade 2), com perguntas sobre o processo usado pelo aluno para obter a coloração de cada um dos mapas. As respostas obtidas para o questionário servem como instrumento para a avaliação da oficina. Para finalizar esse bloco, é apresentado o Problema da Herança¹ (Atividade 3), que é semelhante a atividade 1, porém a coloração do mapa não é livre, pois já existem regiões coloridas. O Teorema das Quatro Cores é enunciado ao final deste bloco (Atividade 4). Detalhamos a seguir cada uma das atividades propostas.

Atividade 1

Colorir cada mapa dado (ver Figura 5.1), sem que regiões com fronteira comum (regiões adjacentes) recebam a mesma cor. Observe que regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas regiões adjacentes.

¹Adaptado de [34]

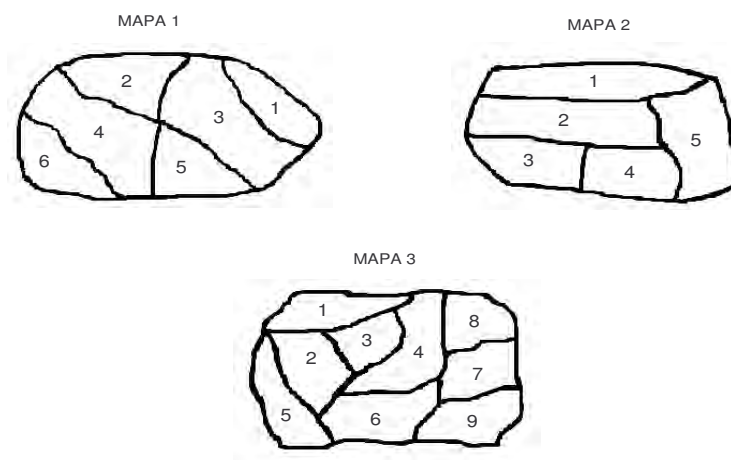


Figura 5.1: Mapas desenhados em isopor.

Atividade 2

Responda o questionário utilizando cada mapa colorido com o número mínimo de cores.

Perguntas	Mapa 1	Mapa 2	Mapa 3
1- Por qual região você começou a colorir o mapa?			
2- Por que começou por essa região? a. Preferi começar por uma região do canto. b. Comecei por essa região, pois gosto do número. c. Por que é a que tem mais fronteiras. d. Outra (explique).			
3- Você conseguiu colorir o mapa começando por essa região? a. Sim b. Não			
4- Se a resposta anterior foi <u>não</u> , responda: Sua estratégia para conseguir a coloração do mapa foi: a. Começar de novo. b. Substituir uma cor por outra. c. Apenas mudar duas cores de lugar. d. Após mudar várias cores de lugar. e. Não consegui uma coloração.			

Figura 5.2: Questionário sobre a Atividade 1.

Atividade 3

(*Problema da Herança*) Antonio, Beatriz, Carlos e Daniel, são quatro filhos que devem dividir igualmente os terrenos que receberam de herança de seu pai. Cada um tem sua casa construída em um terreno, que está indicado no mapa abaixo pelas letras iniciais de seus nomes (Figura 5.3). O filho mais velho, Antonio, herdou também a casa dos pais, localizada no terreno 9. A condição deixada pelo pai para a distribuição dos terrenos, foi que os terrenos recebidos por cada um dos filhos não podem ter fronteiras comuns. Como devem ser distribuídos os terrenos?

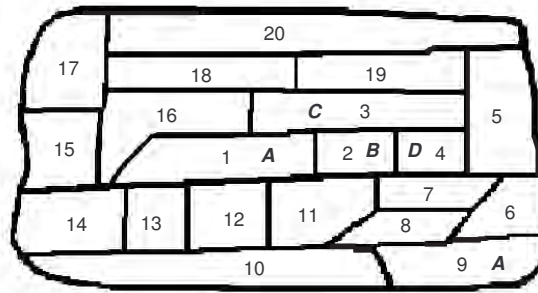


Figura 5.3: Mapa dos terrenos.

Atividade 4

(*Teorema das Quatro Cores*) Todo mapa desenhado em um plano, pode ser colorido com no máximo quatro cores, sem que regiões com fronteira comum recebam a mesma cor [34].

5.1.2 Atividades do 2º Bloco

Para iniciar o 2º bloco, propomos a Atividade 5, que associa a cada mapa trabalhado na Atividade 1 o seu grafo. Após formalizar a notação de grafo, foi trabalhada simultaneamente a Atividade 6 que é obter uma coloração dos vértices de cada grafo. Foi proposto então o Problema dos Químicos² (Atividade 7), como exemplo de aplicação do problema de coloração

²Pode ser encontrado em [36]

de vértices. Finalizamos a oficina com uma avaliação individual (Atividade 8) que junto com a Atividade 2 servem de instrumento para a nossa avaliação da oficina. Vamos descrever a seguir cada uma dessas atividades.

Atividade 5 e 6

Vamos relacionar cada mapa a uma estrutura matemática, que chamaremos por *grafo*. Essa estrutura é tal que cada terreno será representado por um ponto, e haverá uma ligação entre dois pontos, se os terrenos tiverem fronteira em comum. Chamaremos os pontos de vértices e as ligações de arestas. O *Problema de Coloração de Vértices* é o problema de atribuir cores aos vértices do grafo, tal que vértices adjacentes não recebam a mesma cor, ou seja, se existir uma aresta entre dois vértices, eles devem receber cores diferentes. A Figura 5.4 ilustra os grafos associados aos mapas da Atividade 1.

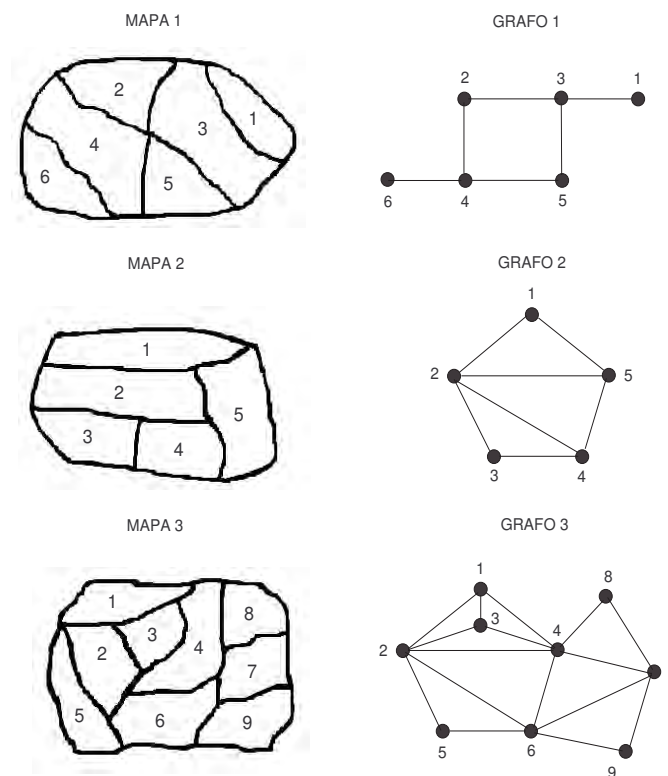


Figura 5.4: Grafos associados a mapas.

Atividade 7

(*Problema dos Químicos*) [36] Suponha que um químico deseja armazenar 5 substâncias, a, b, c, d , e e . Algumas dessas substâncias reagem quando entram em contato, devendo então ser armazenadas em salas diferentes. Qual é a quantidade mínima de salas necessárias para armazenar essas substâncias? Considere a Tabela 1 abaixo onde estão identificadas por um * as substâncias que reagem quando armazenadas juntas.

	a	b	c	d	e
a		*	*	*	
b	*		*	*	*
c	*	*		*	
d	*	*	*		*
e		*		*	

Tabela 1: Tabela das substâncias.

Atividade 8

Avaliação individual sobre a oficina.

Qual o seu ponto de vista sobre a oficina? Descreva o que achou de bom e ruim na realização das atividades. Houve muitas dúvidas? Se houve dúvidas, as mesmas foram sanadas?

5.2 Desenvolvimento da Oficina de Coloração

Na escola E. E. Pio X, realizamos duas oficinas de ensino, uma para a 2ª série do Ensino Médio e outra para a 6ª série do Ensino Fundamental [29]. Compareceram à primeira oficina dezesseis alunos, e esta durou duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. Para a segunda oficina, com duração de sessenta minutos, compareceram vinte e cinco alunos da 6ª série.

A oficina ocorreu de forma dinâmica havendo integração entre os alunos e as professoras [29]. No primeiro bloco, trabalhamos com os alunos organizados em duplas, e as dúvidas

foram tiradas individualmente. No segundo bloco, com o objetivo de construir junto com os alunos os novos conceitos que seriam trabalhados, direcionamos as atividades utilizando a lousa. Vamos relatar a seguir o desenvolvimento de cada oficina.

5.2.1 Ensino Médio

A turma, composta por dezesseis alunos, foi separada em oito duplas, sendo livre a escolha do parceiro. Explicamos a Atividade 1 e foi entregue a cada dupla dois mapas de cada tipo (representados na Figura 5.1), e um conjunto de tachinhas contendo cem tachinhas com cinco cores diferentes. Após a dupla concluir a coloração do mapa dado, um novo mapa era entregue. Foi solicitado que os alunos fizessem anotações.

A primeira coloração, do primeiro mapa, foi livre. Após obtida uma coloração, os alunos foram orientados a determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa, satisfazendo a condição proposta na atividade. Todas as duplas obtiveram o mínimo de duas cores para o Mapa 1.

Ao colorir os Mapas 2 e 3, os alunos tomaram a iniciativa de buscar o menor número de cores necessárias, determinando três e quatro cores respectivamente. Com o acompanhamento e orientação constante das professoras, as duplas puderam sanar suas dúvidas, e ao mesmo tempo anotar suas dificuldades.

Ao final da coloração de cada mapa, a dupla foi questionada por uma das professoras, sobre a razão daquele número de cores necessárias. Em relação ao Mapa 2 a resposta quase sempre foi *"Por que a região dois faz fronteira com todas as outras regiões, o que não aconteceu com o Mapa 1"*. E no Mapa 3 as justificativas eram *"A região quatro tem muitas fronteiras"*. Deixamos para o Bloco 2 de atividades a conclusão dessa discussão.

Concluída a coloração dos três mapas, distribuímos o questionário, que foi respondido por cada aluno, utilizando os mapas já coloridos e as anotações feitas durante a realização da Atividade 1.

Para a Atividade 3, distribuímos um mapa dos terrenos, também desenhado em isopor, para cada aluno. Após a leitura do problema, os alunos tentaram obter a solução do

problema, mas a maioria só conseguiu com o auxílio das professoras. Apresentamos então o Teorema das Quatro Cores, como curiosidade sobre o tema.

Passamos então para o desenvolvimento das atividades do segundo bloco, começando pela Atividade 5. Após associar ao primeiro mapa o seu grafo, formalizamos a notação do grafo, e apresentamos o *Problema de Coloração de Vértices*. Através de discussões, a própria turma concluiu que a coloração do mapa e do grafo são equivalentes, pois os vértices do grafo estão representando as regiões do mapa.

O argumento dos alunos do por quê da quantidade mínima de cores no Mapa 2 ser três foi quebrada, quando retiramos do grafo associado a aresta $(2, 3)$ e colorimos o grafo resultante, obtendo novamente o mínimo de três cores. Para o Mapa 3, foi pedido que um aluno fizesse a representação do grafo associado na lousa (Figura 5.5) e os demais em uma folha, e este grafo foi colorido. Uma nova representação planar do grafo (Grafo 3 da Figura 5.4) foi colorida também.

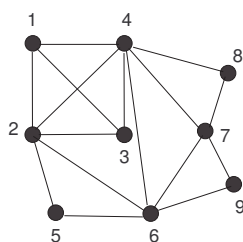


Figura 5.5: Grafo associado ao Mapa 3 representado por um aluno.

Apresentamos então o porquê do número mínimo de cores necessárias para colorir cada um dos mapas, e seu respectivo grafo, é diferente. Ou seja, no Mapa 1 existem no máximo duas regiões mutuamente adjacentes e nos Mapas 2 e 3 existem três e quatro regiões respectivamente.

Outro conceito construído de maneira indireta a partir da realização da Atividade 5, foi o conceito de isomorfismo. Este conceito foi trabalhado para que os alunos concluíssem que a forma de representar o mapa através de um grafo não é importante, mas sim as arestas existentes entre os vértices, pois podemos representar o mesmo mapa de diferentes formas utilizando grafos.

O *Problema dos Químicos* (Atividade 7) foi apresentado em seguida. Discutimos com a turma que não é fácil perceber o número de salas que são necessárias para armazenar as substâncias, apenas analisando a tabela. Representamos então o problema através de um grafo (Figura 5.6(a)), onde os vértices representam as substâncias e as arestas indicam as substâncias que devem ser armazenadas separadamente.

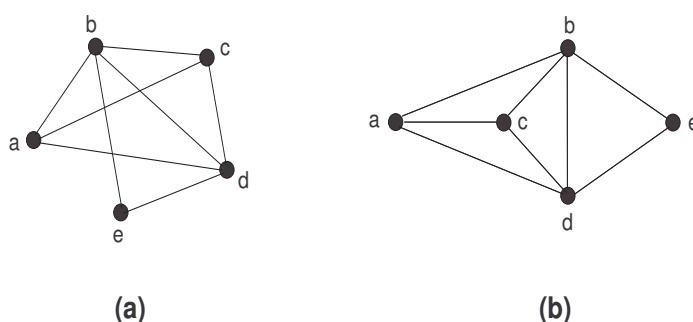


Figura 5.6: Representações do Problema dos Químicos através de um grafo.

Colorimos o grafo da Figura 5.6(a), através de sugestões feitas pela turma. Os vértices a e e receberam a mesma cor, e os demais, cores diferentes. Logo, uma solução do problema é armazenar as substâncias a e e na mesma sala e as demais em salas diferentes, utilizando um total de 4 salas.

Redesenhamos o grafo, e definimos uma coloração diferente. Foi atribuída a mesma cor aos vértices c e e e, aos demais, cores diferentes. A turma não identificou o motivo de não conseguirmos colorir o grafo utilizando apenas três cores. Desenhamos na lousa uma representação planar (Figura 5.6(b)) para o grafo, tal que o K_4 é visto de forma clara e assim mostramos a necessidade das 4 cores.

O desenvolvimento dessa atividade possibilitou a apresentação de novos conceitos. Um deles é que a coloração do grafo não é única e outro é de quantas formas pode-se armazenar essas substâncias nas salas respeitando as restrições do problema, logo o problema tem mais de uma solução.

Para concluir a oficina, pedimos a avaliação individual para os alunos (Atividade 8), cujo resultado está relatado na Seção 5.3.

5.2.2 Ensino Fundamental

O desenvolvimento das atividades nesta segunda oficina foi o mesmo da primeira, portanto vamos descrever aqui apenas alguns pontos diferenciados.

Na realização da Atividade 1, após obtida uma coloração do Mapa 1 (que foi livre), retiramos uma cor e a dupla investigava se era possível uma coloração com o número de cores restantes. Esse exercício foi realizado até a dupla determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa, satisfazendo a condição proposta na atividade.

Esta etapa da Atividade 1 foi realizada de forma diferente da primeira oficina, pois nesse grupo de alunos a compreensão inicial da atividade é mais demorada, sendo necessário uma investigação inicial passo a passo. Com os Mapas 2 e 3 a atividade foi desenvolvida da mesma forma que na primeira oficina.

Outra dificuldade encontrada por esse grupo de alunos foi na realização da Atividade 3 (Problema da Herança). Mesmo com o auxílio das professoras, a resposta do problema não foi encontrada, exceto por uma dupla de meninas.

Apresentamos o Teorema das Quatro Cores, como curiosidade sobre o tema. A professora de Matemática da turma pediu aos alunos uma atividade extra. Essa atividade foi colorir o mapa do Brasil utilizando no máximo 4 cores. O segundo bloco da oficina não foi realizado nesta turma, por falta de tempo e conhecimento prévio necessário. Porém, a avaliação individual (Atividade 8) foi pedida aos alunos.

5.3 Avaliação da Oficina

Através do questionário (Atividade 2) e a avaliação individual da oficina pedida aos alunos (Atividade 8), pudemos analisar a oficina e avaliar o desenvolvimento das atividades trabalhadas, o tempo utilizado e também o interesse dos alunos de acordo com cada grupo (2ª série do Ensino Médio e 6ª série do Ensino Fundamental).

De modo geral, as duas oficinas de ensino realizadas na E.E. Pio X, foram produtivas, nos permite comparar o modo como os alunos de diferentes faixas etárias se comportam diante da aprendizagem de conteúdos diferente dos trabalhados na grade curricular.

Na realização das oficinas, conseguimos passar a idéia da importância de estratégias para a resolução de problemas e, também como devemos rever o processo de solução do problema quando a resposta não é obtida, ou seja, nem sempre começar de novo é o melhor caminho.

A oficina realizada com a turma da 2ª série do Ensino Médio, permitiu um aproveitamento das atividades propostas melhor do que os alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, pois o grupo, por ser mais maduro em conteúdo matemático, participou das atividades da oficina de forma mais ativa, possibilitando a construção dos conteúdos que foram trabalhados.

Uma falha nossa na construção da primeira atividade proposta (Atividade 1) foi que o primeiro mapa proposto para coloração (Mapa 1) tem seis regiões, e nosso conjunto de tachinhas continha apenas cinco cores distintas. Isto induz de certa forma o aluno a pensar que pelo menos uma cor terá que ser repetida. Porém a primeira coloração do mapa deve ser livre, e assim a possibilidade da "pior" coloração (utilizando uma cor para cada região) não acontece.

Outra questão que deve ser revista é o tempo de duração das atividades dentro de cada bloco. Analisando apenas as atividades do 1º Bloco que foi a trabalhada nas duas oficinas, consideramos que uma hora-aula é insuficiente para o desenvolvimento das atividades com a turma da 6ª série do Ensino Fundamental. Para a turma da 2ª série do Ensino Médio o tempo é mais que suficiente.

Uma questão importante a observar, é que o Teorema das 4 Cores (Atividade 4), não garante que o Problema da Herança (Atividade 3) tem solução. As condições impostas pelo problema propõe que seja encontrado uma partição do conjunto de vértices em 4 conjuntos independentes de mesmo tamanho.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos o problema de coloração de vértices de um grafo sob diferentes perspectivas. Esses estudos foram focados na determinação do número cromático de um grafo através do seu polinômio cromático e a partir de uma formulação de programação inteira.

Vimos inicialmente, no Capítulo 3, como determinar o polinômio cromático, $P_G(k)$, de um grafo. Mostramos também algumas propriedades que caracterizam essa classe de polinômios. Alguns problemas ainda em aberto sobre as raízes do polinômio, bem como a dificuldade encontrada em determinar quando um polinômio é cromático foram apresentados.

Apresentamos duas maneiras de formular matematicamente o Problema de Coloração em Grafos, Capítulo 4. A primeira através da formulação por Conjuntos Independentes Maximais [30] e a segunda por restrições de atribuição [12, 16]. Inequações válidas que definem facetas para o problema inteiro também foram discutidas. Uma breve revisão dos algoritmos *Branch-and-Bound*, Planos de Cortes e Geração de Colunas foi apresentada. Esses algoritmos são utilizados na resolução das duas formulações do Problema de Coloração em Grafos que apresentamos.

A Formulação por Conjuntos Independentes Maximais é resolvida através de um algoritmo de Geração de Colunas proposto por Mehotra e Trick [30]. Essa formulação tem sido utilizada como referência por diversos autores pois fornece bons resultados em termos de limite inferior para o problema. A formulação por restrições de atribuição é resolvido em

[16] pelo método *Branch-and-Cut* e os testes computacionais mostraram a eficiência desse algoritmo (melhoria nos limites inferior e superior), sendo este uma promessa de algoritmo exato para o Problema de Coloração em Grafos.

Foi relatada as atividades propostas e nossa experiência com a realização de uma Oficina de Coloração no Ensino Fundamental e Médio de uma escola pública de São José do Rio Preto no ano de 2005. Esse trabalho foi motivado pelos trabalhos de Jurkiewicz [26, 25] realizados em escolas do Rio de Janeiro.

Propomos dois trabalhos futuros. O primeiro é a continuação das atividades propostas em [27], com a realização de novas oficinas de ensino que abordem o tema *Polinômios Cromáticos*. O segundo é a resolução do problema de coloração através do algoritmo *Branch-and-Cut-and-Price*, com implementação computacional e comparação de resultados com os algoritmos propostos em [30] e [16].

Referências Bibliográficas

- [1] BEINEKE, L. W., AND WILSON, R. J. *Selected topics in graph theory 3*. Academic Press Limited, 1988.
- [2] BIRKHOFF, G. D. A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Annals of Mathematics*, 14 (1912), 42–46.
- [3] BOAVENTURA, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. Edgard Blücher Ltda, 2003.
- [4] BRELÁZ, D. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of ACM* 22 (1979), 251–256.
- [5] BUCKLEY, F., AND HARARY, F. *Distance in Graphs*. Addison Wesley, 1990.
- [6] CAMPÊLO, M., CAMPOS, V., AND CORRÊA, R. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Eletronic Notes in Discrete Mathematics* 19 (2005), 337–343.
- [7] CAMPÊLO, M., CORRÊA, R., AND FROTA, Y. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters* 89 (2004), 159–164.
- [8] CAMPOS, V. Estudo do politopo e dos limites inferiores gerados pela formulação de coloração dos representantes. Master’s thesis, Universidade Federal do Ceará, 2005.
- [9] CASEY, N. Megamath. sítio na Internet, www.c3.lanl.gov/mega-math (última visita 01/12/2006).

-
- [10] CHIA, G. L. Some problems on chromatic polynomials. *Discrete Mathematics*, 172 (1997), 39–44.
- [11] CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A., AND SANDI, C. *Combinatorial Optimization*. Wiley, New York, 1979.
- [12] COLL, P., MARENCO, J., DÍAZ, I., AND ZABALA, P. Facets of the graph coloring polytope. *Annals of Operation Research*, 116 (2002), 79–90.
- [13] CPLEX. Linear optimization 6.0 with integer & barrier solvers. ILOG, 1997-1998.
- [14] CULBERSON, J. Colorfull math. sítio na Internet, web.cs.ualberta.ca/~joe/Coloring (última visita 01/12/2006).
- [15] DÍAZ, I., AND ZABALA, P. A polyhedral approach for graph coloring. *Eletronics Notes in Discrete Mathematics*, 7 (2001), 1–4.
- [16] DÍAZ, I., AND ZABALA, P. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics* 154, 5 (2006), 826–847.
- [17] DÍAZ, I., AND ZABALA, P. A cutting plane algorithm for graph coloring. *Submitted to Discrete Applied Mathematics - Abril* (2006).
- [18] DIMACS. The dimacs connect institute. sítio na Internet, dimacs.rutgers.edu/dci (última visita 01/12/2006).
- [19] DIMACS. Instances. sítio na Internet, mat.gsia.cmu.edu/COLOR02.
- [20] FERREIRA, R., AND WAKABAYASHI, Y. *Combinatória Poliédrica e Planos-de-Corte Faciais*. Campinas - SP, X ESCOLA DE COMPUTAÇÃO, 1996.
- [21] FILHO, G., AND LORENA, L. Algoritmo genético construtivo e geração de colunas: uma aplicação para coloração de grafos. *Anais do XXXII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2000), 1570–1580.

- [22] FROTA, Y. Estudo computacional de algoritmos exatos para coloração em grafos. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará, 2003.
- [23] GAREY, M., AND JOHNSON, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [24] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison Wesley, 1969.
- [25] JURKIEWICZ, S. Matemática discreta em sala de aula. *História e Tecnologia no Ensino de Matemática 1* (2002), 115–161. Carvalho, L. M.; Guimarães, L. C. (org.), IME-UERJ.
- [26] JURKIEWICZ, S., AND G. LEVENTHAL, G. Oficinas de matemática discreta no ensino médio. *ERMAC - Algebraic Graph Theory Journey* (2004). Livro de Resumos do ERMAC - Algebraic Graph Theory Journey, Rio de Janeiro.
- [27] LOZANO, D., AND RANGEL, S. Introdução ao estudo de coloração no ensino médio. In *XXVIII CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São Paulo - SP* (2005), vol. único. Anais do XXVIII CNMAC. São Carlos - SP : SBMAC.
- [28] LOZANO, D., RANGEL, S., AND PIRES, C. Uma proposta de oficina de coloração para o ensino fundamental e médio. (em preparação).
- [29] LOZANO, D., RANGEL, S., AND PIRES, C. Oficina de coloração de mapas e grafos para o ensino fundamental e médio. In *XXIX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas - SP* (2006), vol. único. Anais do XXIX CNMAC. São Carlos - SP : SBMAC.
- [30] MEHOTRA, A., AND TRICK, M. A column generation approach for graph coloring. *INFORMS Journal on Computing* 8, 4 (1996), 344–354.
- [31] READ, R. An introduction to chromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory* 4 (1968), 52–71.
- [32] RODRIGUES, C. Limites inferiores para o problema de coloração de vértices via geração de cortes e colunas. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará, 2005.

- [33] SILVA, M. Coloração de grafos. UFPR. Trabalho de Graduação.
- [34] SIMÕES, M., AND LIMA, M. Teoria dos grafos: Apoio ao professor de matemática. Ministério da Educação de Portugal, sítio na Internet, www.dgidec.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/grafosmanuela.pdf, (última visita 24/11/2006).
- [35] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e algoritmos computacionais*, 2 ed. Campus, 1986.
- [36] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*, 4 ed. Longman, 1996.
- [37] WILSON, R. J., AND WATKINS, J. J. *Graphs: An Introductory Approach*. Wiley, 1990.
- [38] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. Wiley, New York, 1998.
- [39] ZYKOV, A. A. On some properties of linear complexes. *Mat. Sbornik* 24 (1949), 163–188. *Amer. Math. Soc. Translation* N. 79, 1952.

Índice Remissivo

adjacentes

vértices, 5

algoritmo

Branch-and-Bound, 56

Branch-and-Cut, 56, 59

Geração de Colunas, 58

Planos de Cortes, 57

antihole, 7

aresta, 4

contração de, 19

inclusão de, 17

paralela, 5, 8

remoção de, 18

árvore, 11, 26, 30

bloco, 10, 41

caminho, 6, 54

ciclo, 6, 11

clique, 12, 26, 60

coloração

grafos, 56, 62

k -coloração, 25, 47

mapas, 62

vértice, 46, 65

comprimento

caminho, 6

conjunto

anti-vizinhos, 7

de vizinhos, 7

estável, 5, 49

independente, 5, 43

independente maximal, 6, 42, 58

corda, 6

digrafo, 4, 14

dimensão plena, 20

face, 21

faceta, 21

geração de colunas, 45

grafo, 3, 65

bipartido, 12, 25

bipartido completo, 12

coloração, 25, 56, 62

completo, 12, 26, 29

conexo, 10, 25

cordal, 11

desconexo, 10, 37

iguais, 13

- isomorfos, 13
- nulo, 9, 26, 28
- orientado, 4
- planar, 13
- simples, 9, 25
- grau
 - de um vértice, 8, 26
- hiperplano, 20
- hole*, 7
- inequação
 - bloco de cor, 53, 60
 - caminho multicolorido, 54, 60
 - clique, 51, 60
 - clique multicolorido, 55, 60
 - conjunto independente, 49
 - de vizinhança, 52
 - dominante, 21
 - hole*, 51, 60
 - redundante, 21
 - válida, 20
- laço, 5, 8
- matriz
 - adjacência, 14
 - incidência, 15
- multigrafo, 5
- número
 - cromático, 25, 28
 - estabilidade interna, 5, 50
- percurso, 6
- poliedro, 20
- polinômio, 33, 37
 - cromático, 28, 31, 40
 - mônico, 35
- politopo, 20
- semi-espaco, 20
- subgrafo, 6, 12
 - induzido, 6, 50
- teorema
 - das quatro cores, 24, 62
 - de Brooks, 27
 - remoção-contração, 31
- vértice, 4
 - adjacente, 5, 43
 - coloração, 46, 65
 - contração de, 18
 - de corte, 10
 - inclusão de, 17
 - isolado, 8
 - pendente, 8
 - remoção de, 18
 - universal, 8