

RESSALVA

**Atendendo solicitação do(a) autor(a), o
texto completo deste documento será
disponibilizado somente a partir de
07/04/2028.**

LINARA STÉFANI FACINI

RETICULADOS VIA CORPOS PUROS DE GRAU N

Tese de Doutorado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade

São José do Rio Preto

2026

*A Deus e à minha família,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus, pela vida e por Sua constante presença em minha caminhada, concedendo-me força, sabedoria e saúde em todos os momentos, e por guiar meus passos ao longo de toda esta jornada.

À minha mãe, Zilda, pelo cuidado, pelo carinho e pelo amor incondicional que sempre me dedicou ao longo de minha vida. Sua dedicação, seus ensinamentos e sua força foram, e continuam sendo, uma fonte permanente de inspiração para mim. Sou imensamente grata por todo o apoio, incentivo e confiança em meus sonhos. Saiba que honrá-la e fazê-la sentir orgulho de mim constitui uma das maiores motivações da minha vida.

À minha irmã, Lorena, pelo carinho constante, pelo apoio e pela presença sempre acolhedora durante esta caminhada. Agradeço por sua compreensão, incentivo e por tornar mais leves e mais doces os momentos difíceis enfrentados nesse percurso. Sua companhia e seu afeto foram de grande importância para que eu pudesse seguir em frente com confiança e serenidade.

Ao meu esposo, Marlon, pelo abundante incentivo aos meus estudos e pelo apoio incondicional durante toda esta jornada. Agradeço por estar sempre ao meu lado, oferecendo palavras de encorajamento, conselhos sábios e compartilhando comigo cada momento com carinho, compreensão e amor. Sua presença, companheirismo e confiança foram essenciais para que eu pudesse enfrentar os desafios e alcançar mais esta importante etapa de minha vida.

Ao meu pai do coração, Marcos, pelos conselhos sempre sábios e pela cumplicidade demonstrada ao longo desta caminhada. Sou profundamente grata por todo o apoio, pela presença e pela ajuda oferecida durante esta jornada, os quais foram fundamentais para que eu pudesse seguir com confiança e determinação na realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Professor Toninho, pela paciência, pela dedicação e pelos valiosos ensinamentos compartilhados ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Sou profundamente grata pelos conselhos, pela orientação segura e pela confiança que depositou em mim durante minha trajetória acadêmica. Seu incentivo foi essencial para que eu pudesse enfrentar os desafios da pesquisa com determinação e perseverança. Guardo com grande apreço suas palavras: “Se existe um jeito de crescer é através dos estudos”, as quais tomo como inspiração permanente em minha vida acadêmica e pessoal.

Ao Professor Trajano, a quem dirijo um agradecimento muito especial, pelo acolhi-

mento e pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos. Sua orientação e suas palavras de encorajamento foram decisivas em um momento fundamental para a conclusão desta tese. Sou profundamente grata por ter acreditado em mim, por ter me guiado com sabedoria pelo caminho correto e por ter contribuído de maneira significativa para que este trabalho pudesse ser finalizado.

Ao nosso grupo de pesquisa, formado pelos professores Toninho, Trajano, Robson e Jéfferson, bem como pelos alunos Cléber, João Pedro, Livea, Maria Clara, Maria Fernanda e Thiago, pela convivência acadêmica, pelas valiosas discussões e pelas trocas de conhecimentos. Agradeço pelo ambiente de colaboração, incentivo e companheirismo, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico.

Aos professores titulares da comissão examinadora, Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade, Prof. Dr. Trajano Pires da Nóbrega Neto, Prof. Dr. Robson Ricardo de Araújo, Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima e Prof. Dr. João Eloir Strapasson, e aos professores suplentes, Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos, Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho e Prof. Dr. Everton Luiz de Oliveira, por aceitarem participar deste momento tão significativo e pelas valiosas contribuições.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas — Câmpus de São José do Rio Preto, por proporcionar a estrutura necessária para a realização deste sonho. Em especial, à equipe da Seção de Pós-Graduação, sempre solícita no atendimento e no esclarecimento de dúvidas.

Por fim, deixo registrado meu sincero agradecimento a todos que, de alguma forma, estiveram presentes ao longo desta caminhada, contribuindo com apoio, incentivo e amizade. Cada gesto de confiança e encorajamento foi fundamental para que esta etapa pudesse ser concluída e para que este trabalho se tornasse realidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Encontre motivação para ultrapassar todos os desafios e nada será mais forte que sua determinação. Não podemos acrescentar dias à nossa vida, mas podemos acrescentar vida aos nossos dias.”

Cora Coralina

RESUMO

Nesta tese, investigamos os corpos puros de grau n , com ênfase na estrutura de suas bases integrais e nas propriedades geométricas associadas aos reticulados algébricos deles derivados. Inicialmente, retomamos o caso clássico dos corpos puros de grau 2, amplamente estudado na literatura, e avançamos para uma análise detalhada dos casos de grau p primo, apresentando resultados que ampliam e sistematizam o conhecimento existente. No contexto geral dos corpos puros de grau n , também discutimos e contextualizamos resultados previamente obtidos por Jakhar, Khanduja e Sangwan (2021), que determinaram bases integrais para essa classe de extensões. Uma das contribuições deste trabalho consiste na apresentação sistemática e estruturalmente clara das bases integrais desses corpos. Em particular, as expressões obtidas para as bases integrais e as condições de congruência associadas são formuladas de maneira explícita, por meio de parâmetros naturalmente identificados, o que confere maior transparência estrutural às construções e facilita sua aplicação em problemas subsequentes. Além disso, desenvolvemos uma metodologia para o cálculo da densidade de centro de reticulados algébricos obtidos a partir de corpos puros de grau n . Esse constitui o ponto central da tese. Para tal, analisamos diferentes estruturas induzidas por homomorfismos associados às imersões reais, introduzindo uma classificação que contempla seis tipos distintos de homomorfismos. Nesse contexto, propomos ainda um novo conceito, denominado similaridade, que permite estabelecer relações estruturais entre diferentes representações dos reticulados e direciona o estudo para dois casos fundamentais: o homomorfismo canônico e o homomorfismo de Minkowski. Por fim, essas construções são desenvolvidas não apenas no contexto usual, mas também considerando diferentes estruturas de $\mathbb{Z}$ -módulos, o que amplia o alcance das técnicas empregadas e fornece uma abordagem unificada para o estudo da densidade de centro de reticulados associados a corpos puros. Dessa forma, a tese contribui tanto para o aprofundamento teórico da Teoria Algébrica dos Números quanto para o entendimento das conexões entre estruturas algébricas e a geometria dos números.

Palavras-chave: corpos puros; reticulados; homomorfismo canônico; homomorfismo de Minkowski.

ABSTRACT

In this thesis, we investigate pure fields of degree n , with emphasis on the structure of their integral bases and the geometric properties associated with the algebraic lattices derived from them. Initially, we revisit the classical case of pure fields of degree 2, extensively studied in the literature, and advance toward a detailed analysis of cases of prime degree p , presenting results that extend and systematize existing knowledge. In the general context of pure fields of degree n , we also discuss and contextualize results previously obtained by Jakhar, Khanduja, and Sangwan (2021), who determined integral bases for this class of extensions. One contribution of this work consists of the systematic and structurally clear presentation of the integral bases of these fields. In particular, the expressions obtained for the integral bases and the associated congruence conditions are formulated explicitly, through naturally identified parameters, which confers greater structural transparency to the constructions and facilitates their application in subsequent problems. Furthermore, we develop a methodology for computing the center density of algebraic lattices obtained from pure fields of degree n . This constitutes the central point of the thesis. To this end, we analyze different structures induced by homomorphisms associated with real embeddings, introducing a classification that encompasses six distinct types of homomorphisms. In this context, we also propose a new concept, termed similarity, which allows us to establish structural relations between different representations of lattices and directs the study toward two fundamental cases: the canonical homomorphism and the Minkowski homomorphism. Finally, these constructions are developed not only in the usual context but also considering different $\mathbb{Z}$ -module structures, which broadens the scope of the techniques employed and provides a unified approach to the study of the center density of lattices associated with pure fields. In this way, the thesis contributes both to the theoretical deepening of Algebraic Number Theory and to the understanding of the connections between algebraic structures and the geometry of numbers.

Keywords: pure fields; lattices; canonical homomorphisms; Minkowski homomorphisms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 7.1 - Corpo puro de grau 2: $\delta(\phi_c(\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m(\mathbb{Z}[\theta]))$	155
Gráfico 7.2 - Corpo puro de grau 3: $\delta(\phi_c(\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m(\mathbb{Z}[\theta]))$	156
Gráfico 7.3 - Corpo puro de grau 4: $\delta(\phi_c(\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m(\mathbb{Z}[\theta]))$	156
Gráfico 7.4 - Corpo puro de grau 5: $\delta(\phi_c(\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m(\mathbb{Z}[\theta]))$	157
Gráfico 7.5 - Corpo puro de grau 2: $\delta(\phi_c(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$	161
Gráfico 7.6 - Corpo puro de grau 3: $\delta(\phi_c(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$	162
Gráfico 7.7 - Corpo puro de grau 5: $\delta(\phi_c(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}))$	162
Gráfico 7.8 - Corpo puro de grau 2 e $m = 2$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	166
Gráfico 7.9 - Corpo puro de grau 3 e $m = 2$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	166
Gráfico 7.10 - Corpo puro de grau 4 e $m = 2$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	167
Gráfico 7.11 - Corpo puro de grau 5 e $m = 2$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	167
Gráfico 7.12 - Corpo puro de grau 2 e $m = 3$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	168
Gráfico 7.13 - Corpo puro de grau 3 e $m = 3$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	169
Gráfico 7.14 - Corpo puro de grau 4 e $m = 3$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	169
Gráfico 7.15 - Corpo puro de grau 5 e $m = 3$: $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$ e $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	170
Gráfico 7.16 - Corpo puro de grau 2: $\delta(\phi_c((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$	179
Gráfico 7.17 - Corpo puro de grau 3: $\delta(\phi_c((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$	179
Gráfico 7.18 - Corpo puro de grau 4: $\delta(\phi_c((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$	180
Gráfico 7.19 - Corpo puro de grau 5: $\delta(\phi_c((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$ e $\delta(\phi_m((1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]))$	180

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Densidade de centro de dimensão menor ou igual a 6.	34
Tabela 5.1 - Corpo puro de grau 2: Densidade de centro $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$	102
Tabela 5.2 - Corpo puro de grau 3: Densidade de centro $\delta(\phi_c(\mathcal{M}))$	102
Tabela 6.1 - Corpo puro de grau 2: Densidade de centro $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	144
Tabela 6.2 - Corpo puro de grau 3: Densidade de centro $\delta(\phi_m(\mathcal{M}))$	144

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
Σ	Somatório
Π	Produtório
$a \equiv b \pmod{m}$	Congruência: a é congruente a b módulo m
$\mathbb{L}$	Corpo de números de grau n
$\sigma_k(\mathbb{L})$	$\mathbb{Q}$ -Monomorfismo de $\mathbb{L}$
r_1	Quantidade de monomorfismos reais
r_2	Quantidade de pares de monomorfismos imaginários
A, B	Anéis
$\mathcal{I}$	Ideal
$\mathcal{T}r_{B A}$	Traço relativo de B sobre A
$\mathcal{N}_{B A}$	Norma relativa de B sobre A
$f_\alpha(x)$	Polinômio característico de α
$\mathcal{T}r_{\mathbb{L} \mathbb{K}}(\alpha)$	Traço de α de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$
$\mathcal{N}_{\mathbb{L} \mathbb{K}}(\alpha)$	Norma de α de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$
$\mathcal{T}r(\alpha)$	Traço do elemento α via corpo de números

$\mathcal{N}(\alpha)$	Norma do elemento α via corpo de números
$\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$	Anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{L}$
$\mathcal{D}_{B A}$	Discriminante de relativo de B sobre A
$\mathcal{D}(\mathbb{L})$	Discriminante de $\mathbb{L}$
θ	Elemento primitivo do corpo de números
$\mathbb{Z}[\theta]$	Conjunto das combinações lineares inteiras das potências de θ
$\text{Ind}(\theta)$	Índice da extensão $\mathbb{Z}[\theta] \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$
$\mathcal{D}(1, \theta, \dots, \theta^{n-1})$	Discriminante da base potente
$\Delta(p)$	Discriminante do polinômio $p(x)$
$\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$	Corpo puro de grau n
ξ_n^k	Raízes primitivas da unidade de $x^n - 1$
Λ_B	Reticulado com base B
$\mathcal{P}_B$	Região fundamental do reticulado Λ_B
M	Matriz geradora do reticulado Λ
$G = M^t M$	Matriz de Gram do reticulado Λ
$\mathcal{V}(\Lambda)$	Volume do reticulado Λ
$\det(\Lambda)$	Determinante do reticulado Λ
$\Delta(\Lambda)$	Densidade de empacotamento associada a Λ
$\Lambda_{\min}$	Norma mínima do reticulado Λ
$\rho = \frac{\Lambda_{\min}}{2}$	Raio de empacotamento do reticulado Λ
$\delta(\Lambda)$	Densidade de centro do reticulado Λ
$\mathcal{M}$	$\mathbb{Z}$ -módulo
$\Re$	Parte real
$\Im$	Parte imaginária
ϕ	Imersão real de $\mathbb{L}$

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ_c	Homomorfismo canônico
ϕ_m	Homomorfismo de Minkowski
ϕ_β	Perturbação do homomorfismo canônico - Perturbação β
$\phi_{2\beta}$	Perturbação do homomorfismo canônico - Perturbação 2β
ϕ_r	Homomorfismo completo
ϕ_l	Homomorfismo geral
$\phi_a \sim \phi_b$	Similaridade de imersões reais
$\overline{\phi_a}$	Classe de equivalência da similaridade ϕ_a
$\langle, \rangle$	Produto interno
$\phi_a \cdot \phi_b$	Produto interno de imersões reais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CONCEITOS BÁSICOS	23
2.1	CORPO DE NÚMEROS	23
2.2	TRAÇO E NORMA	24
2.3	ANEL DOS INTEIROS	27
2.4	DISCRIMINANTE	28
2.5	EXEMPLOS CLÁSSICOS DE CORPO DE NÚMEROS	30
2.6	RETICULADOS	32
2.7	RETICULADOS ALGÉBRICOS	34
2.8	CONCLUSÃO	41
3	CORPOS PUROS	42
3.1	ESTRUTURA DOS CORPOS PUROS	42
3.2	ANEL DOS INTEIROS E DISCRIMINANTE DOS CORPOS PUROS	49
3.3	GENERALIZAÇÃO PARA OS CORPOS PUROS	53
3.3.1	Corpos puros de grau primo	53
3.3.2	Corpos puros de grau n	63
3.4	CONCLUSÃO	64
4	SIMILARIDADE DE IMERSÕES	65
4.1	SIMILARIDADE	65
4.2	CLASSES DE SIMILARIDADES	66
4.3	CONCLUSÃO	70
5	DENSIDADE DE CENTRO: HOMOMORFISMO CANÔNICO	71
5.1	DENSIDADE DE CENTRO VIA CORPOS PUROS DE GRAU n	71
5.2	DENSIDADE DE CENTRO VIA CORPOS PUROS DE GRAU PRIMO	85
5.3	DENSIDADE DE CENTRO VIA MÓDULOS	91
5.4	DENSIDADE DE CENTRO VIA IDEAIS DA FORMA $\theta\mathbb{Z}[\theta]$	102
5.5	DENSIDADE DE CENTRO VIA IDEAIS DA FORMA $(1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]$	111

5.6	CONCLUSÃO	124
6	DENSIDADE DE CENTRO: HOMOMORFISMO DE MINKOWSKI	125
6.1	DENSIDADE DE CENTRO VIA CORPOS PUROS DE GRAU N	125
6.2	DENSIDADE DE CENTRO VIA CORPOS PUROS DE GRAU PRIMO	135
6.3	DENSIDADE DE CENTRO VIA MÓDULOS	139
6.4	DENSIDADE DE CENTRO VIA IDEAIS DA FORMA $\theta\mathbb{Z}[\theta]$	144
6.5	DENSIDADE DE CENTRO VIA IDEAIS DA FORMA $(1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]$	148
6.6	CONCLUSÃO	153
7	COMPARAÇÃO ENTRE OS HOMOMORFISMOS CANÔNICO E DE MINKOWSKI	154
7.1	HOMOMORFISMO CANÔNICO E DE MINKOWSKI VIA $\mathbb{Z}[\theta]$	154
7.2	HOMOMORFISMO CANÔNICO E DE MINKOWSKI VIA $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$	160
7.3	HOMOMORFISMO CANÔNICO E DE MINKOWSKI VIA $\mathcal{M}$	165
7.4	HOMOMORFISMO CANÔNICO E DE MINKOWSKI VIA $(1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]$	178
7.5	CONCLUSÃO	187
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	188
	REFERÊNCIAS	190
	ÍNDICE REMISSIVO	194

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos números algébricos tem sido bastante útil no desenvolvimento de códigos corretores de erros e de reticulados. Corpos finitos foram a ferramenta chave para o desenvolvimento dos códigos binários, estruturas que despertaram gradativamente o interesse dos pesquisadores em teoria das comunicações. Constelações de sinais tendo estrutura de reticulados são consideradas boas para transmissão de sinais, pois a estrutura linear dos reticulados, sendo altamente simétrica, simplifica a tarefa de decodificação. A partir desta percepção, passaram a associar o estudo dos códigos aos reticulados e surgiram várias famílias de reticulados. Dentre tais famílias destaca-se a descrita por Herman Minkowski, no final do século XIX e início do século XX, Minkowski [1], que encontrou na Teoria Algébrica dos Números ferramentas que viabilizaram o efetivo cálculo da densidade de centro. Com isso, diferentes técnicas e abordagens, as quais objetivam otimizar a eficiência da transmissão dentro de características específicas do canal de transmissão de sinais vêm se desenvolvendo.

A grande expansão da área de telecomunicações está associada à necessidade cada vez maior de desenvolver sistemas de comunicações que possibilitem fornecer serviços de excelente qualidade, a altas taxas de transmissão e de capacidade de armazenamento. Uma análise de um sistema de informação, mais especificamente relacionada à teoria de códigos corretores de erros, tem como um marco o artigo de Claude A. Shannon [2]. Quando transmitimos uma informação existe uma possibilidade da mensagem recebida ser diferente da mensagem enviada. Assim, o objetivo é detectar e recuperar a mensagem enviada ao receptor e com isso poder construir códigos com pequena probabilidade de ocorrerem erros. Uma maneira de se projetar um conjunto de sinais que se aproxime dos padrões apresentados na teoria de Shannon é representar cada sinal como um ponto em um espaço n -dimensional.

O processo de projetar um conjunto de palavras-código pode ser reduzido a um problema geométrico de alocação de pontos em uma região de um espaço. Os códigos construídos a partir de reticulados constituem uma das técnicas de alocação de pontos. Ao tomarmos o espaço euclidiano n -dimensional, para n suficientemente grande, se considerarmos os centros das esferas de um mesmo empacotamento reticulado denso como sinais (para valores altos da relação sinal-ruído, SNR), obtemos um código de bloco ótimo para

um Canal Gaussiano Branco (AWGN), limitado em faixa, garantindo uma baixa probabilidade de erro numa transmissão de dados abaixo de uma certa taxa C , chamada capacidade de canal, como demonstrado por Shannon, o que estabeleceu um importante vínculo entre empacotamento esférico e a teoria de códigos.

Uma grande parte da pesquisa de reticulados é impulsionada pela busca por uma resposta a seguinte pergunta: qual a maneira de dispormos esferas de mesmo raio no espaço n -dimensional, sem sobreposição, de modo a cobrir a maior parte possível do espaço? Ou seja, qual é a melhor forma de empacotarmos o espaço por esferas?

O grande interesse nesta questão deve-se ao fato de que há uma relação entre a densidade de um empacotamento de esferas e a eficiência de um código corretor de erros. Com isso, têm-se aumentado o interesse no assunto, e devido a relação entre códigos e reticulados, novas técnicas na geração de reticulados tem sido obtidas. Em 1900, o problema do empacotamento de esferas foi destacado por Hilbert, numa seleta de grandes problemas que seriam de grande relevância no próximo século, devido a sua importância e complexidade. Ao longo dos últimos anos, muito tem sido feito e muito mais existe por se fazer, o que o torna um tema atual.

Um outro problema semelhante ao empacotamento de esferas é o número de contato, ou do inglês, *kissing number*. O problema do número de contato surgiu em uma discussão entre Isaac Newton e David Gregory no dia 4 de maio de 1694. A questão era descobrir quantas esferas idênticas podem ser arranjadas de forma que todas elas toquem uma esfera idêntica central. Com a métrica euclidiana, nas dimensões 2, 3, 8 e 24 são conhecidos os maiores números de contato possíveis, que correspondem à 6, 12, 240 e 196560, respectivamente [3].

Uma das técnicas de gerar reticulados e avaliar sua densidade de empacotamento é através da aplicação de determinados homomorfismos a certos $\mathbb{Z}$ -módulos livres de posto n contidos em corpos de números $\mathbb{L}$ de grau n . Os reticulados gerados por este método são conhecidos como reticulados algébricos.

A vantagem de obter reticulados por este método é que podemos identificar os pontos do reticulado no $\mathbb{R}^n$ com os elementos do corpo $\mathbb{L}$. Desta forma, podemos utilizar algumas propriedades do corpo $\mathbb{L}$, que possuem uma estrutura algébrica mais rica, no estudo de tais reticulados. Com isso, o estudo de parâmetros relacionados à probabilidade de erro e que do ponto de vista geométrico são difíceis de se calcular, podem ser traduzidos num contexto algébrico.

De modo a facilitar o cálculo da densidade de empacotamento é possível reduzi-la ao cálculo de um outro parâmetro, chamado de densidade de centro [3]. Em reticulados algébricos este parâmetro envolve o discriminante do corpo, a norma do ideal (ou índice no caso de $\mathbb{Z}$ -módulo) e a minimização de uma função traço.

A densidade de empacotamento na métrica euclidiana está relacionada com a eficiência na transmissão de sinais mapeados com pontos do reticulado em canais gaussianos [4]. Neste caso, para termos uma transmissão com pequena probabilidade de erros, devemos fazer o uso de reticulados com alta densidade de empacotamento.

A diversidade e a distância produto mínima também são parâmetros muito estudados em reticulados. A diversidade e a distância produto mínima estão associadas a eficiência na transmissão de sinais mapeados com pontos do reticulado em canais com desvanecimento do tipo Rayleigh [4]. Neste caso, devemos utilizar códigos com diversidade alta e distância produto mínima alta para termos uma transmissão com pequena probabilidade de erros.

Já em sistemas com múltiplas antenas transmissoras e múltiplas antenas receptoras deseja-se utilizar códigos com diversidade máxima e maior ganho de codificação. Para obter diversidade máxima usa-se as álgebras de divisão [5, 6, 7].

O processo de projetar um conjunto de palavras-código pode ser reduzido a um problema geométrico de alocação de pontos em uma região de um espaço. Os códigos construídos a partir de reticulados constituem uma das técnicas de alocação de pontos. Ao tomarmos o espaço euclidiano n -dimensional, para n suficientemente grande, se considerarmos os centros das esferas de um mesmo empacotamento reticulado denso como sinais (para valores altos da relação sinal-ruído, SNR), obtemos um código de bloco ótimo para um Canal Gaussiano Branco (AWGN), limitado em faixa, garantindo uma baixa probabilidade de erro numa transmissão de dados abaixo de uma certa taxa C , chamada capacidade de canal, como demonstrado por Shannon, o que estabeleceu um importante vínculo entre empacotamento esférico e a teoria de códigos. Neste sentido, várias construções de reticulados com boa densidade de empacotamento têm sido feitas [8, 9, 10, 11, 12].

Já o problema de encontrar boas constelações de sinais para a transmissão em um canal com desvanecimento do tipo Rayleigh, que modela algumas formas de comunicação sem fio, é construir constelações de sinais com energia média mínima para uma desejada taxa de erro, dada a eficiência espectral (número de bits por duas dimensões). Se associarmos as constelações de sinais a empacotamentos reticulados, o ideal é que estas constelações tenham diversidade máxima (as componentes entre dois pontos do reticulado são todas distintas). Além disso, quanto maior for a diversidade e a distância produto mínima, menor será a probabilidade de erro nestes canais [13, 4]. Dado um reticulado qualquer, em geral é difícil calcular a densidade de empacotamento em relação à métrica euclidiana e a distância produto mínima. Para a densidade de empacotamento é necessário determinar o vetor de norma mínima, o que para reticulados gerais é um problema difícil (a conjectura é que seja NP-Hard [14]) e o mesmo ocorre para a distância produto mínima. Usando Teoria Algébrica dos Números, podemos obter reticulados como a imagem de

um homomorfismo torcido aplicado a certos $\mathbb{Z}$ -módulos contidos em extensões finitas de $\mathbb{Q}$ [10]. Através de certas propriedades específicas dos corpos de números utilizados na construção de cada reticulado, podemos calcular a densidade, a diversidade e a distância produto mínima do reticulado em questão [15, 4, 16]. Usando corpos de números totalmente reais, algumas boas constelações baseadas em reticulados apropriadas para canais com desvanecimento do tipo Rayleigh tem sido encontradas, pois nestas constelações é possível obter diversidade máxima, [17]. Outro fato é que constelações de sinais sobre reticulados com estas propriedades e que sejam rotações do reticulado $\mathbb{Z}^n$, $n = 2^{r-2}$ com $r \geq 4$ e $n = (p-1)/2$ com $p \geq 5$ primo, são especiais para este tipo de transmissão por terem também “ganho de forma” (relacionado à energia média), [18, 19, 20].

Tendo em vista construir reticulados que sejam simultaneamente eficientes para ambos os canais, gaussiano e com desvanecimento do tipo Rayleigh, em [21] famílias de reticulados D_n -rotacionados com diversidade máxima para $n = 2^{r-2}$ com $r \geq 5$ e $n = (p-1)/2$ com $p \geq 7$ primo, foram construídas. Neste sentido, será possível construir outras famílias de reticulados, via corpos de números totalmente reais, que sejam eficientes para ambos os canais? Essas construções possuem um forte apelo geométrico, pois em cada caso é determinada a matriz de rotação, garantindo que o reticulado construído é uma versão rotacionada de algum dos reticulados conhecidos na literatura. Bayer [22, 23] obteve a construção de reticulados, mas de forma diferente, em que usou alguns resultados de Teoria Algébrica dos Números que garantem os isomorfismos entre os reticulados densos e os reticulados construídos algebricamente. Por outro lado, é a construção algébrica que permite a determinação da distância produto mínima que está relacionada à probabilidade de erro em canais com desvanecimento. Além disso, seguindo esta temática, vários resultados relacionados a Teoria Algébrica dos Números foram obtidos, dentre os quais podemos citar [24, 25, 26, 27, 23, 28, 29, 30].

O estudo dos corpos puros, definidos como corpos de números da forma $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$, com $d \in \mathbb{Z}$ livre de potências n -ésimas, ocupa uma posição central na Teoria Algébrica dos Números. A determinação do anel de inteiros algébricos $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ e do seu discriminante é um problema clássico e fundamental, pois essas estruturas codificam propriedades aritméticas essenciais do corpo. Os exemplos mais elementares e conhecidos são os corpos puros de grau 2, os quadráticos, cuja base integral e discriminante são completamente caracterizados por um teorema clássico. A partir desses casos iniciais, a busca pela descrição dos inteiros algébricos em graus superiores tem mobilizado matemáticos por séculos, com contribuições notórias de nomes como Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss e, de maneira crucial, Richard Dedekind no final do século XIX.

Historicamente, os corpos puros cúbicos (grau 3) foram os primeiros a serem sistematicamente tratados após os quadráticos, com Dedekind estabelecendo as primeiras des-

crições de suas bases integrais [31]. Seguindo essa cronologia, os corpos puros quárticos (grau 4) receberam atenção significativa, com destaque para os trabalhos de Funakura na década de 1980 [32] e, posteriormente, para as contribuições de Rodrigues no início dos anos 2000 [33], que investigou casos particulares em que o elemento primitivo é $\theta = \sqrt[4]{d}$ com d livre de quadrados.

Avançando na escala dos graus, os corpos puros quánticos (grau 5) e sêxticos (grau 6) representaram saltos de complexidade. Inspirados por dissertações de mestrado que abordavam esses tópicos [34, 33, 35], nossos trabalhos recentes conseguiram expressar bases integrais e discriminantes para esses corpos [36, 37], utilizando como ferramenta principal o polinômio característico. No entanto, a abordagem via polinômio característico para o grau 6 evidenciou um aumento significativo na complexidade computacional dos coeficientes, sinalizando a necessidade de explorar novos caminhos e estratégias mais sofisticadas.

Nessa direção, a busca por uma visão mais unificada e generalizada levou ao estudo de famílias mais amplas. Pesquisas recentes, como as de Hameed e Nakahara para grau 8 [38] e de Esteves para graus potência de 2 ($n = 2^k$) [39], introduziram a abordagem de utilizar subcorpos específicos para construir os anéis de inteiros. É nesse contexto de evolução histórica e complexidade crescente que esta tese se insere. A partir dos resultados previamente obtidos para graus específicos, fizemos um estudo aprofundado sobre os corpos puros de grau primo p , da forma $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\theta)$ com $\theta = \sqrt[p]{d}$ e d inteiro livre de quadrados. Encontramos as suas bases integrais através da análise do discriminante e do índice. Buscamos, assim, apresentar generalizações para as estruturas encontradas, contribuindo para a compreensão unificada dos anéis de inteiros algébricos dessa importante família de corpos. Paralelamente, autores como Jakhar, Khanduja e Sangwan obtiveram resultados abrangentes para corpos puros de grau n com d livre de potências n -ésimas [40, 41], consolidando a teoria.

Apresentamos, nesta tese, um estudo aprofundado dos corpos puros de grau n , com ênfase no desenvolvimento de resultados originais acerca da densidade de centro de reticulados algébricos obtidos a partir desses corpos. O principal objetivo deste trabalho consiste em estabelecer uma abordagem sistemática para o cálculo dessas densidades, explorando diferentes estruturas de $\mathbb{Z}$ -módulos e distintos tipos de homomorfismos, muitos dos quais introduzidos no âmbito desta pesquisa.

No Capítulo 2, realizamos uma retomada dos principais conceitos da Teoria Algébrica dos Números necessários ao desenvolvimento do trabalho. Em particular, na Seção 2.7, apresentamos seis tipos de homomorfismos por meio dos quais é possível construir reticulados algébricos. Ademais, ao final dessa seção, discutimos propriedades matriciais relevantes que desempenham papel fundamental no cálculo do volume associado a

homomorfismos não clássicos.

No Capítulo 3, desenvolvemos uma revisão da literatura, reunindo resultados que serviram de base e inspiração para esta pesquisa, especialmente no que se refere ao cálculo de bases integrais e discriminantes. Paralelamente, incorporamos contribuições autorais já publicadas, bem como apresentamos uma generalização para a determinação de bases integrais e discriminantes de corpos puros de grau p , com p primo. Essa generalização é apresentada sob uma abordagem mais clara e estruturada, permitindo a identificação das bases integrais por meio de congruências simples e autoexplicativas.

No Capítulo 4, introduzimos o conceito de similaridade, uma noção original desenvolvida neste trabalho. Tal conceito possibilita a comparação entre imersões reais, permitindo determinar quando duas delas possuem a mesma densidade de centro. Este resultado revela-se fundamental para a organização e compreensão dos capítulos subsequentes, servindo como ferramenta central nas análises desenvolvidas.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo de reticulados algébricos provenientes de corpos puros de grau n via homomorfismo canônico. Este capítulo é inteiramente autoral e apresenta fórmulas explícitas para a densidade de centro associada a diversos $\mathbb{Z}$ -módulos contidos em $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. Além disso, os métodos desenvolvidos estabelecem uma base conceitual que pode ser explorada em futuras generalizações.

De maneira análoga, no Capítulo 6 investigamos reticulados algébricos associados a corpos puros de grau n por meio do homomorfismo de Minkowski. Assim como no Capítulo 5, os resultados são originais e incluem a obtenção de fórmulas para a densidade de centro de diferentes $\mathbb{Z}$ -módulos. Este capítulo também evidencia o potencial de extensão das técnicas empregadas.

No Capítulo 7, apresentamos uma análise comparativa das densidades de centro obtidas nos Capítulos 5 e 6. Este capítulo possui caráter essencialmente analítico e visual, permitindo identificar, em cada situação considerada, qual escolha — seja do homomorfismo ou do $\mathbb{Z}$ -módulo — conduz aos melhores resultados em termos de densidade.

Por fim, no Capítulo 8, expomos as conclusões do trabalho, destacando as principais contribuições alcançadas, bem como delineamos perspectivas para pesquisas futuras, indicando possíveis desdobramentos e generalizações dos resultados aqui obtidos.

Em síntese, os Capítulos 3, 4, 5, 6 e 7 apresentam resultados originais desenvolvidos ao longo do período de pesquisa desta tese. Tais contribuições refletem um estudo aprofundado acerca dos corpos puros e de suas aplicações na construção e análise de reticulados algébricos. Além disso, as demonstrações envolvidas não possuem caráter elementar, exigindo ferramentas e argumentos mais sofisticados da Teoria Algébrica dos Números. Nesse contexto, evidencia-se a riqueza e a elegância dessa teoria ao investigar os corpos puros com o propósito de aplicá-los ao estudo das densidades de centro obtidas por meio do

homomorfismo canônico e do homomorfismo de Minkowski.

Dessa forma, esta tese contribui para o avanço do estudo de reticulados algébricos associados a corpos puros, oferecendo novas ferramentas teóricas e metodológicas para o cálculo e análise de densidades de centro.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, exploramos os corpos puros de grau n em sua essência, contemplando de maneira detalhada suas características mais relevantes, tais como sua definição, propriedades estruturais, descrição do anel de inteiros e cálculo do discriminante. Um ponto que merece destaque é o fato de termos ampliado o escopo usual de estudo, ao considerar não apenas os casos clássicos — corpos totalmente reais ou totalmente imaginários —, mas também os corpos mistos, os quais apresentam um comportamento mais sutil e, em muitos aspectos, mais desafiador do ponto de vista aritmético.

Adicionalmente, apresentamos as bases integrais dos corpos puros de grau p primo sob uma abordagem diferenciada, na qual sua determinação pode ser realizada por meio de uma análise direta de congruências. Essa forma de apresentação confere maior clareza aos resultados, além de proporcionar uma ferramenta prática e eficiente para o cálculo dessas bases, evidenciando uma organização mais limpa e estruturada desses objetos.

No âmbito dos estudos desenvolvidos, introduzimos o conceito de similaridade, o qual desempenha um papel central neste trabalho. Tal conceito permite classificar as imersões reais associadas aos corpos de números de grau n e, como consequência direta, estabelecer que imersões similares conduzem a reticulados algébricos com a mesma densidade de centro. Esse resultado revela uma importante estrutura subjacente ao problema, ao permitir agrupar situações aparentemente distintas sob um mesmo comportamento.

Considerando os seis tipos de imersões apresentados, a aplicação do conceito de similaridade possibilitou a identificação de duas classes fundamentais — associadas ao homomorfismo canônico e ao homomorfismo de Minkowski —, as quais orientaram o desenvolvimento dos Capítulos 5 e 6. Esses capítulos constituem o núcleo técnico do trabalho, no qual foram realizados cálculos detalhados da norma mínima ao quadrado dos corpos puros, bem como do volume dos reticulados associados a esses corpos.

A partir desses cálculos, foi possível construir, de maneira explícita, as fórmulas das densidades de centro dos reticulados algébricos definidos sobre diferentes $\mathbb{Z}$ -módulos de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, tais como $\mathbb{Z}[\theta]$, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ (no caso de grau primo), $\mathcal{M}$, $\theta\mathbb{Z}[\theta]$ e $(1 - \theta)\mathbb{Z}[\theta]$. Observou-se que cada um desses casos apresenta particularidades próprias, influenciadas tanto pela estrutura do módulo quanto pelos parâmetros do corpo puro, não sendo possível estabelecer, em geral, um comportamento uniforme entre eles.

O Capítulo 7 foi dedicado à comparação das densidades de centro obtidas por meio dos homomorfismos canônico e de Minkowski. Em síntese, as análises desenvolvidas ao longo desse capítulo evidenciam que essa comparação depende, de maneira sensível, tanto da escolha do $\mathbb{Z}$ -módulo quanto dos parâmetros aritméticos que definem o corpo puro, tais como o grau n e o valor do inteiro d .

De modo geral, constatou-se que, em diversos casos, o homomorfismo canônico apresenta desempenho superior ou, ao menos, equivalente ao homomorfismo de Minkowski, conforme observado nas Seções 7.1 e 7.2. Contudo, a análise realizada na Seção 7.3 revela que esse comportamento não é uniforme, sendo necessário um exame mais aprofundado das hipóteses envolvidas para determinar qual homomorfismo conduz à maior densidade de centro em cada situação.

Além disso, na Seção 7.4, verificou-se que o homomorfismo de Minkowski pode apresentar vantagem em determinados cenários, particularmente quando o grau n é ímpar. Entretanto, esse comportamento não se mantém de forma geral, uma vez que, com o crescimento do parâmetro d , o homomorfismo canônico tende novamente a se destacar, evidenciando a complexidade da interação entre os parâmetros envolvidos.

Dessa forma, conclui-se que não há um comportamento universal dominante entre os homomorfismos considerados, sendo a escolha do mais adequado intrinsecamente dependente das características específicas do problema em análise. Tal constatação reforça a necessidade de uma abordagem cuidadosa e contextualizada ao se estudar densidades de centro em reticulados algébricos provenientes de corpos puros.

Assim, a essência deste trabalho consistiu na construção de uma metodologia que, ao mesmo tempo em que se afasta de abordagens tradicionais, propõe uma organização sistemática e padronizada para o estudo dos corpos puros de grau n , permitindo a generalização das fórmulas das densidades de centro e oferecendo um novo olhar sobre o problema.

No que diz respeito às perspectivas futuras, diversas direções de pesquisa se apresentam de forma natural. Dentre elas, destaca-se a possibilidade de explorar outros tipos de imersões na construção de reticulados algébricos, ampliando o conjunto de ferramentas disponíveis para o estudo dessas estruturas. Além disso, mostra-se promissora a realização de análises comparativas mais aprofundadas entre diferentes $\mathbb{Z}$ -módulos, com o objetivo de identificar, em cada contexto, aqueles que produzem maiores densidades de centro.

Ademais, abre-se espaço para investigações que busquem estabelecer critérios mais precisos para a obtenção de densidades de centro ótimas, bem como para a extensão dos resultados aqui obtidos a outras classes de corpos de números. Espera-se, portanto, que a metodologia desenvolvida neste trabalho sirva como base e inspiração para novas pesquisas, contribuindo para o avanço do estudo dos reticulados algébricos.

REFERÊNCIAS

- [1] MINKOWSKI, H. Dichteste gitterförmige lagerung kongruenter körper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 311–355, 1984.
- [2] SHANNON, C. Mathematical theory of communication. *Bell Systems Technical Journal*, v. 27, p. pt. 1: 379–423; pt. II: 623–656, 1948.
- [3] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. *Sphere packings, lattices and groups*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [4] BOUTROS, J. et al. Good lattice constelations for both rayleigh fading and gaussian channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 42(2), p. 502–518, 1996.
- [5] BELFIORI, J.; REKAYA, G. Quaternionic lattices for space-time coding. *in Proc. IEEE Inf. Theory Workshop (ITW 2003), Paris, France, 31 Mar-Apr.4, 2003*.
- [6] BELFIORE, J.; REKAYA, G.; VITERBO, E. The golden code: a 2×2 full-rate space-time code with non-vanishing determinants. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 51(4), p. 1432–1436, 2005.
- [7] OGGIER, F.; REKAYA, G.; BELFIORE, J. Perfect space-time block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 52(9), p. 3885–3902, 2006.
- [8] CRAIG, M. A cyclotomic construction for leech’s lattice. *Mathematique*, v. 25, p. 236–241, 1978.
- [9] CRAIG, M. Extreme forms and cyclotomy. *Mathematique*, v. 25, p. 44–56, 1978.
- [10] BAYER-FLUCKIGER, E. Lattices and number fields. *Contemporary Mathematics*, v. 241, p. 69–84, 1999.
- [11] BAYER-FLUCKIGER, E.; SUAREZ, I. Modular lattices over cyclotomic fields. *Journal of Number Theory*, v. 114, p. 394–411, 2005.
- [12] ANDRADE, A. et al. Lattices via cyclotomic fields in dimension 2 and 4. *International Journal of Applied Mathematics - IJAM*, v. 20(8), p. 1095–1105, 2007.
- [13] VITERBI, A. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-13, p. 260–269, 1967.
- [14] MICCIANCIO, D.; GOLDWASSER, S. *Complexity of Lattices Problems: A Cryptographic Perspective*. [S.l.]: The Kluwer International Series in Engineering as Computer Science, Kluwer Academic Publishers, 2002. v. 671.

-
- [15] ANDRADE, A. et al. Constructions of algebraic lattices. *Computational Applied Mathematics*, v. 29(3), p. 1–13, 2010.
- [16] OGGIER, F. *Algebraic methods for channel coding*. Tese (Doutorado) — Lausanne - EPFL, 2005.
- [17] GIRARD, X.; BELFIORI, J. Constellations matched to the rayleigh fading channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 42(1), p. 106–115, 1996.
- [18] ANDRADE, A.; ALVES, C.; CARLOS, T. B. Rotated lattices via the cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta_{2^r})$. *International Journal of Applied Mathematics*, v. 19(3), p. 321–331, 2006.
- [19] BAYER-FLUCKIGER, E.; OGGIER, F.; VITERBO, E. New algebraic constructions of rotated $\mathbb{Z}^n$ -lattice: constellations for the rayleigh fading channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 50(4), p. 702–714, 2004.
- [20] BAYER-FLUCKIGER, E.; NEBE, G. On the euclidean minimum of some real number fields. *Journal de theorie des nombres de Bordeaux*, v. 17(2), p. 437–454, 2005.
- [21] JORGE, G.; FERRARI, A.; COSTA, S. Rotated d_n -lattices. *Journal of Number Theory*, v. 132(11), p. 2397–2406, 2012.
- [22] BAYER-FLUCKIGER, E. Definite unimodular lattices having an automorphism of given characteristic polynomial. *Comment. Math. Helvetici*, v. 59, p. 509–538, 1984.
- [23] BAYER-FLUCKIGER, E. Upper bounds for euclidean minima of algebraic number fields. *J. Number Theory*, v. 121, p. 305–323, 2006.
- [24] FLORES, A. *Reticulados em corpos abelianos*. Tese (Doutorado) — Fecc - Unicamp, Campinas - SP, 2000.
- [25] NETO, T. N.; INTERLANDO, J.; LOPES, J. On computing discriminants of subfields of $\mathbb{Q}(\zeta_{p^r})$. *Journal of Number Theory*, v. 96, p. 319–325, 2002.
- [26] LOPES, J. Discriminants of subfields of $\mathbb{Q}(\zeta_{2^r})$. *Journal of Algebra Appl.*, v. 2, p. 463–469, 2003.
- [27] NETO, T. N.; INTERLANDO, J.; LOPES, J. The discriminant of abelian number fields. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 5(1), p. 1–7, 2006.
- [28] FÁVARO, E. *Corpos cujo condutor é potência de primo: caracterização e reticulados associados*. Tese (Doutorado) — Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto - SP, 2012.
- [29] OLIVERIA, E. de. *Torres de Extensões abelianas de grau primo ímpar não ramificado*. Tese (Doutorado) — Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto - SP, 2015.
- [30] NUNES, J. *p-Extensões galoisianas e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, 2015.
- [31] DEDEKIND, R. Über die anzahl der idealklassen in reinen kubischen zahlkörpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 121, p. 40–123, 1900.
- [32] FUNAKURA, T. On integral bases of pure quartic fields. *Math. J. Okayama Univ.*, v. 26, p. 27–41, 1984.

-
- [33] RODRIGUES, V. C. da S. *Reticulados de Posto 4 em Corpos de Números*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2001.
- [34] VICENTE, J. P. G. *Reticulados de Posto 3 em Corpos de Números*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2000.
- [35] RIBEIRO, A. C. *Reticulados Sobre Corpos de Números*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2003.
- [36] ANDRADE, A. A. de; FACINI, L. S.; ESTEVES, L. C. Algebraic integers of pure quintic extensions. *SPM*, v. 43, p. 1–8, 2025.
- [37] ANDRADE, A. A. de; FACINI, L. S.; ESTEVES, L. C. Algebraic integers of pure sextic extensions. *Journal of Prime Research in Mathematics*, v. 18, p. 112–124, 2022.
- [38] HAMEED, A.; NAKAHARA, T. Integral bases and relative monogeneity of pure octic fields. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, v. 4, p. 419–433, 2015.
- [39] ESTEVES, L. C. *Anel de inteiros algébricos e discriminante de uma família de corpos de números cujo grau é uma potência de 2*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2024.
- [40] JAKHAR, S. K. K. A.; SANGWAN, N. *On integral basis of pure number fields*. Pakistan: Mathematika, 2021.
- [41] JAKHAR, S. K. K. A.; SANGWAN, N. *On the discriminant of pure number fields*. 167. ed. [S.l.]: Colloquium Mathematicum, 2022.
- [42] ANDRADE, A. A. de. *Uma introdução a teoria algébrica dos números*. 1. ed. São José do Rio Preto - SP: Amazon.com, 2021.
- [43] SAMUEL, P. *Algebraic Theory of Numbers*. Paris: Hermann, 1970.
- [44] FACINI, L. S. *Uma introdução aos corpos não abelianos de grau menor ou igual a 6*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2021.
- [45] LANG, S. *Algebra*. New York: Springer, 2002.
- [46] MARCUS, D. A. *Number fields*. 2. ed. Switzerland: Springer International Publishing AG, 2018.
- [47] ALACA, K. S. W. S. *Introductory Algebraic Number Theory*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [48] NARKIEWICZ, W. *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*. 3. ed. New Your: Springer, 2004.
- [49] CONRAD, K. *Dedekind’s index theorem*. [s.d.]. Acesso em: 28 Nov. 2025. Disponível em: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/dedekind-index-thm.pdf>.
- [50] ARAUJO, R. R. de. *Anéis de inteiros de corpos de números e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2015.

-
- [51] FACINI, L. S.; ANDRADE, A. A.; NETO, T. P. N. Constructions of algebraic lattice via pure fields. Manuscrito. 2025.
- [52] NEBE, G. *Table of Densest Packings Presently Known*. 2014. Acesso em: 28 Nov. 2025. Disponível em: <https://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html>.
- [53] FERRARI, A. J. *Reticulados Algébricos via Corpos Abelianos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-IBILCE, 2008.
- [54] ANDRADE, A. A. de; FACINI, L. S.; ESTEVES, L. C. Algebraic integers of certain cubic extensions. *Brazilian Journal of Development*, v. 8, p. 56768–56786, 2022.
- [55] ANDRADE, A. A. de; FACINI, L. S.; ESTEVES, L. C. Algebraic integers of pure quartic extensions. *International Journal of Applied Mathematics*, v. 36, p. 99–106, 2023.
- [56] ANDRADE, T. G. de. *O Pequeno Teorema de Fermat*. 2019. Acesso em: 28 Nov. 2025. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br>.
- [57] FLORES, A. L. *Reticulados em Corpos Abelianos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2000.