

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Equações Diferenciais Funcionais com
Retardamento e o Modelo de Ciclo Econômico de
Kalecki**

Fábio Cestaro Christofolletti

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO
2024**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Fábio Cestaro Christofolletti

Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e o Modelo de Ciclo Econômico de Kalecki

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

**Rio Claro - SP
2024**

C556e Christofolletti, Fábio Cestaro
Equações diferenciais funcionais com retardamento e o modelo de
ciclo econômico de Kalecki / Fábio Cestaro Christofolletti. -- Rio
Claro, 2024
100 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Modelagem Matemática. 2. Equações Diferenciais com Delay. 3.
Modelo de Kalecki. 4. Flutuações Cíclicas na Economia. I. Título.

Impacto potencial desta pesquisa

As ciências econômicas sempre se singularizaram no conjunto das ciências sociais por sua afinidade natural com a matemática, pois estudam temas como preços, curvas de oferta e demanda, ciclos econômicos etc. No caminho trilhado pela teoria econômica, o uso da matemática foi se tornando cada vez mais frequente, firmando-se como abordagem paradigmática. Já em 1870, com o surgimento da teoria neoclássica, vemos o ingresso na profissão de cientistas e engenheiros treinados em física. A partir de 1925, constatamos uma mudança significativa no estilo discursivo de importantes periódicos especializados em países desenvolvidos. Na década de 40, a história da matematização das ciências econômicas remete ao ingresso de teóricos com formação matemática sólida, como John von Neumann e Oskar Morgenstern que publicaram em 1944 seu livro sobre teoria dos jogos. A matematização das ciências econômicas é um tema bastante discutido na atualidade. Há quem defenda essa abordagem, mas se preocupa com a intensidade desse processo, pois isso pode comprometer o diálogo dos economistas com a sociedade. Neste contexto, o presente trabalho, em seu caráter interdisciplinar, espera servir como exemplo de como um fenômeno econômico pode ser tratado pela matemática e seu formalismo.

Potential impact of this research

Economic sciences have always distinguished themselves within the social sciences due to their natural affinity with mathematics, as they study topics such as prices, supply and demand curves, economic cycles, etc. Along the path paved by economic theory, the use of mathematics became increasingly frequent, establishing itself as a paradigmatic approach. As early as 1870, with the emergence of neoclassical theory, we see the entry into the profession of scientists and engineers trained in physics. From 1925 onwards, we observe a significant change in the discursive style of important specialized journals in developed countries. In the 1940s, the history of the mathematization of economic sciences refers to the entry of theorists with solid mathematical training, such as John von Neumann and Oskar Morgenstern, who published their book on game theory in 1944. The mathematization of economic sciences is a widely discussed topic today. There are those who support this approach but are concerned about the intensity of this process, as it may compromise the dialogue between economists and society. In this context, the present work, in its interdisciplinary character, hopes to serve as an example of how an economic phenomenon can be addressed through mathematics and its formalism.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Fábio Cestaro Christofolletti

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM RETARDAMENTO E O
MODELO DE CICLO ECONÔMICO DE KALECKI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
IGCE - UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
IGCE - UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
ICMC - USP/São Carlos (SP)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 03 de dezembro de 2024

Dedico esta dissertação aos meus pais, pois sempre foram os pilares da minha formação como ser humano, à minha esposa Cinara, cuja presença sempre me enche de motivação e à minha orientadora Suzete, pela postura impecável durante toda essa jornada.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para que o presente trabalho se tornasse realidade. Uma dissertação de mestrado é o resultado de muitas horas de dedicação e, por isso, se faz importante reconhecer todos aqueles que, de alguma forma, permitiram sua realização.

Minha gratidão especial à Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, do Departamento de Matemática da Unesp câmpus de Rio Claro, minha orientadora e, sobretudo, uma grande amiga, pela pessoa e profissional que é. Obrigado pela sua dedicação e apoio ao longo desses 3 anos. Agradeço pela forma correta, simples e científica com que conduziu nossas reuniões. Isso, com certeza, fez a diferença para a concretização da dissertação.

Agradeço também a todos os docentes da graduação e do mestrado que fizeram parte da minha formação.

Um reconhecimento especial a todos os meus amigos e amigas que me acompanharam durante minha jornada universitária. Com certeza, nossas interações foram importantes para a construção do meu conhecimento.

Agradeço com muito amor aos meus pais Hélio e Célia e à minha irmã Flávia pelo profundo apoio e estímulo constante. Obrigado por sempre desejarem o melhor para mim.

Por fim, minha gratidão imensa à minha esposa Cinara pelo permanente incentivo nesta caminhada. Obrigado de coração por estar ao meu lado, pelo seu sorriso e por saber me fazer feliz.

*“A modelagem matemática consiste na representação matemática
do que acontece na natureza
a partir de um modelo conceitual,
idealizado com base no levantamento e
interpretação de dados e observações do sistema real,
tendo como objetivo uma melhor compreensão do sistema atual,
possibilitando prever situações futuras,
algumas vezes passadas,
porém sempre buscando direcionar ações de decisão.”*
Iritani, M. A.

O presente trabalho tem como objetivo conectar a teoria matemática das Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento a um modelo macroeconômico que incorpora defasagens temporais. Nesse contexto, além de explorar a estrutura dessas equações, apresentar um método de resolução e discutir o teorema de existência e unicidade, o estudo também detalha as principais contribuições de Michal Kalecki para a macroeconomia, como o princípio da demanda efetiva e seu impacto sobre as decisões de investimento. Vale ressaltar que os cálculos apresentados neste trabalho foram desenvolvidos pelo autor e não se encontram detalhados na literatura existente, evidenciando, de forma original e aprofundada, como a resolução da equação diferencial funcional com retardamento proposta reflete a tendência de sistemas econômicos a exibirem flutuações cíclicas, influenciadas por fatores de demanda.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Equações Diferenciais com Delay. Modelo de Kalecki. Flutuações Cíclicas na Economia.

Abstract

The present work aims to connect the mathematical theory of Functional Differential Equations with Delay to a macroeconomic model that incorporates time lags. In this context, in addition to exploring the structure of these equations, presenting a resolution method, and discussing the existence and uniqueness theorem, the study also details the main contributions of Michal Kalecki to macroeconomics, such as the principle of effective demand and its impact on investment decisions. It is worth noting that the calculations presented in this work were developed by the author and are not detailed in the existing literature, providing an original and in-depth demonstration of how the resolution of the proposed functional differential equation with delay reflects the tendency of economic systems to exhibit cyclical fluctuations, influenced by demand factors.

Keywords: Mathematical Modeling. Delay Differential Equations. Kalecki's Model. Cyclical Fluctuations in the Economy.

Lista de Figuras

1.1	Processo de modelagem	15
1.2	Problema da mistura de produtos	19
1.3	Gráfico da função $x(t) = 2 - e^{-0,05t}$	21
1.4	Gráfico da solução do PVI (1.13) no intervalo $[-1, 3]$	23
2.1	Gráfico da solução do PVI (2.7) no intervalo $[-1, 3]$	29
2.2	Gráfico da solução do PVI (2.12) no intervalo $[-1, 2]$	31
3.1	Linha do tempo - economistas	59
3.2	Interseções do gráfico da função $g(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ com a reta $y = \alpha/m$	72
3.3	Gráfico de h	74
3.4	Solução do PVI (3.44) no intervalo $[-1, 30]$	85
3.5	Solução do PVI (3.44) no intervalo $[-1, 50]$	85
3.6	Solução (3.61) do PVI (3.44) no intervalo $[0, 30]$	88
3.7	Solução (3.61) do PVI (3.44) no intervalo $[0, 50]$	88
3.8	Comparação entre os gráficos das soluções (3.56) e (3.61) nos intervalos $[0, 30]$ e $[0, 50]$, respectivamente	89
3.9	Gráfico de $J(t)$, dada em (3.63), no intervalo $[0, 50]$	91
3.10	Gráfico da solução aproximada de (I), no intervalo $[0, 50]$	91
3.11	Gráfico da solução aproximada de (II), no intervalo $[0, 50]$	92
A.1	Gráfico da função h	96

Introdução	12
1 Modelagem matemática e equações diferenciais	14
1.1 Modelagem matemática de fenômenos reais	14
1.2 Diferença entre EDO's e EDFR's através de modelos matemáticos popula- cionais	16
1.3 Como a diferença entre EDO e EDFR impacta na solução da equação . . .	18
2 Resolvendo EDFR's e o teorema de existência e unicidade	25
2.1 Método dos passos e a forma geral das EDFR's de primeira ordem	25
2.2 Definição formal de uma EDFR	32
2.3 O problema da determinação do tempo do retardo	34
2.4 O problema de primeira ordem com condição inicial	36
2.5 Existência e unicidade para o problema da função inicial	36
3 O Modelo de ciclo econômico de Kalecki	54
3.1 Fragmentos da vida e do legado intelectual de Kalecki	54
3.2 Uma breve história do pensamento econômico	55
3.3 Do princípio da demanda efetiva a uma EDFR	58
3.4 Funcionamento do ciclo econômico	66
3.5 Solução da EDFR do modelo de Kalecki	67
3.6 Resolvendo o PVI (3.22) utilizando o Método dos Passos	81
Referências	93
A Análise de alguns cálculos do Capítulo 3, Seção 3.5	96

A busca pelo entendimento dos fenômenos naturais que nos cercam remonta dos primórdios da nossa civilização. Contudo, foram os gregos que sistematizaram essa busca quando Tales de Mileto inaugurou o chamado período cosmológico da filosofia grega. Neste, os homens passaram a olhar para a natureza, tentando fornecer respostas consistentes para aquilo que se apresentava.

Com o passar do tempo, houve o desenvolvimento das ciências naturais e, com isso, as ferramentas matemáticas tornaram-se mais sólidas. A matemática passou a ser a linguagem através da qual o universo era desvendado e, assim, os fenômenos naturais passaram a ser explicados por equações cada vez mais elaboradas. Em algumas delas, observamos que os fenômenos ocorrem instantaneamente e recebem o nome de equações diferenciais ordinárias. Com elas, causa e efeito são imediatos. Em outras, observamos um termo chamado retardo, dando origem às equações diferenciais funcionais com retardamento, nas quais notamos um certo tempo entre causa e efeito. Este tipo de equação descreve a influência que o passado tem no momento presente.

Um exemplo clássico é o fenômeno das dinâmicas populacionais. É intuitivo supor que, quanto maior a população, mais rápido será seu crescimento. No entanto, é fundamental levar em conta que cada espécie possui um intervalo de tempo característico para que um indivíduo atinja a maturidade reprodutiva desde o nascimento. Como destacado em [1], variáveis como o tempo necessário para a maturação reprodutiva desempenham um papel crucial nas taxas de crescimento populacional.

Outro exemplo encontra-se na modelagem do uso de medicamentos, onde é essencial considerar o intervalo de tempo entre a administração e os efeitos observados, além das interações do fármaco com o organismo. De acordo com a referência [2], a farmacocinética oferece uma base analítica para compreender os processos de absorção, distribuição, metabolismo e eliminação de medicamentos, aspectos que são determinantes para maximizar a eficácia terapêutica e minimizar os potenciais riscos ao paciente.

O presente trabalho se divide em 3 capítulos. O primeiro capítulo tem o objetivo de mostrar a diferença entre modelar com equações diferenciais ordinárias (EDO's) e com equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFR's). Com isso, as diferenças nas estruturas das equações e como isso impacta na solução são temas abordados. O segundo capítulo trata da teoria matemática acerca das EDFR's. Dessa forma, observam-se a definição formal de uma EDFR de primeira ordem e uma técnica de resolução chamada método dos passos. Além disso, exploram-se as condições para que a equação tenha uma

única solução. Por fim, o terceiro capítulo une as ideias sobre macroeconomia de um dos maiores economistas do século passado, Michal Kalecki, com um modelo que usa defasagem temporal. O objetivo é mostrar como nasce a equação diferencial que modela um fenômeno após algumas hipóteses e definições consolidadas.

Esta dissertação tem como principais contribuições a execução de cálculos detalhados, a formulação de provas rigorosas para todos os teoremas discutidos e a criação de gráficos ilustrativos que elucidam os cálculos e as conclusões alcançadas, oferecendo um nível de detalhamento pouco encontrado na literatura existente. As demonstrações foram elaboradas com rigor lógico e clareza, enquanto os gráficos, produzidos com o auxílio de ferramentas como  MATLAB,  GeoGebra, TikZ e  Python, fornecem uma representação visual que facilita a compreensão das ideias e dos resultados apresentados. Essa abordagem integrada combina precisão analítica com suporte visual, reforçando a confiabilidade das conclusões e proporcionando uma exposição acessível e didática. Por fim, ressalta-se que o entendimento pleno do trabalho requer do leitor conhecimentos básicos em Análise Real, Equações Diferenciais Ordinárias e Espaços Métricos, para os quais sugerimos as referências [3, 4, 5, 6].

Modelagem matemática e equações diferenciais

Neste capítulo, abordaremos, em um primeiro momento, o papel das equações diferenciais na modelagem matemática. Em seguida, mostraremos, por meio de modelos populacionais, a diferença entre equações diferenciais ordinárias (EDO's) e equações diferenciais funcionais com retardo (EDFR's) no que se refere à estrutura das equações. Por último, mostraremos que modelar um fenômeno real com EDFR's pode ser mais realístico, embora seja mais difícil determinar propriedades essenciais a partir da sua solução.

1.1 Modelagem matemática de fenômenos reais

A modelagem matemática tem por objetivo descrever um fenômeno do mundo real frequentemente por meio de equações diferenciais. Uma equação deste tipo contém uma função desconhecida, suas derivadas e a própria variável independente. Não é surpresa que apareçam derivadas no modelo, já que variações são observadas nos fenômenos.

Historicamente, o desenvolvimento da área da matemática que estuda equações diferenciais aconteceu junto com o avanço da Física, servindo de ferramenta para o cálculo das equações de movimento da mecânica newtoniana, das equações de onda da física ondulatória e do eletromagnetismo. Mais tarde, observamos a presença das equações diferenciais nas áreas de mecânica quântica e relativística.

Na atualidade, as equações diferenciais estão presentes nas diversas áreas do conhecimento humano, como biologia, química e ciências econômicas, para citar alguns exemplos.

A grande dificuldade presente no processo de modelagem de um fenômeno é encontrar a equação que o descreve. Nesse momento, podemos utilizar o raciocínio intuitivo, um conjunto de dados observados na realidade ou mesmo uma lei física baseada em evidência experimental.

Podemos elencar alguns passos que nos auxiliam no difícil processo da modelagem matemática.

- 1º.: Identificar as variáveis dependentes e independentes e realizar hipóteses no sentido de simplificar o modelo de forma que ele possa ser tratado matematicamente.
- 2º.: Encontrar soluções para o modelo formulado. Neste momento, devemos ressaltar que algumas equações diferenciais possuem soluções analíticas. Porém, em muitos

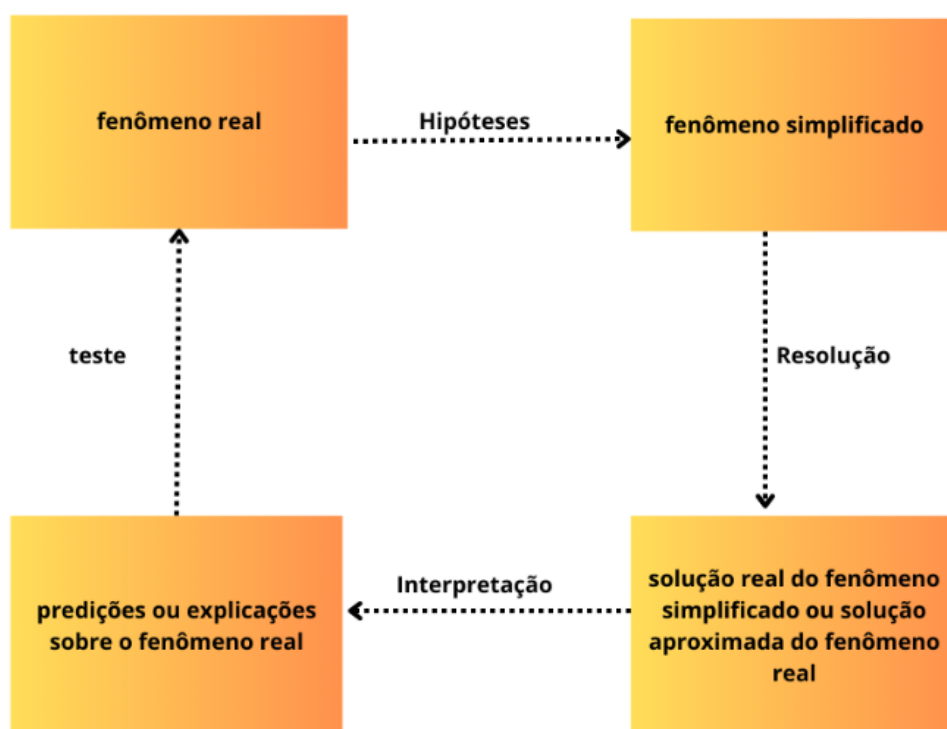
casos, a complexidade dos modelos impossibilita tal fato. Sendo assim, é necessário utilizar algumas técnicas computacionais (numéricas) para aproximar soluções.

3º.: Interpretações das soluções. Neste momento, podemos fazer previsões futuras.

4º.: Testar as previsões com o que está acontecendo no mundo real. Se elas não se ajustarem à realidade, então o modelo deve ser refinado.

Um modelo nunca é uma representação fiel da realidade. Trata-se de uma simplificação. Um bom modelo retrata a realidade, permitindo cálculos matemáticos, mantendo uma precisão confiável. Esta discussão está expressa na Figura 1.1 a seguir:

Figura 1.1: Processo de modelagem



Fonte: Referência [7], p. 25.

A partir da Figura 1.1, vemos que a simplificação do fenômeno real deve torná-lo matematicamente tratável. Assim, por algum método conhecido, chegamos a uma solução real. A pergunta que se faz aqui é a seguinte: Será que a solução real para o problema simplificado é uma boa solução aproximada para o problema real? A resposta só será conhecida submetendo as explicações ou previsões fornecidas pela solução a testes. Para mais informações sobre o processo de modelagem, indicamos ao leitor interessado as referências [7, 8, 9].

1.2 Diferença entre EDO's e EDFR's por meio de modelos matemáticos populacionais

Como vimos na Seção 1.1, podemos construir um modelo matemático com um raciocínio intuitivo. Dessa forma, é natural pensar que o crescimento de uma população baseia-se na premissa de que ela cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho.

É exatamente essa a ideia presente na obra de Thomas Robert Malthus de 1798, intitulada “Ensaio sobre o Princípio da População”, no contexto da revolução industrial. Tal obra inspirou o chamado modelo malthusiano, no qual temos a variável independente (t) e a variável dependente (P) que representa o número de indivíduos da população no instante t .

O modelo de Malthus é assim representado por uma equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = KP(t), \quad (1.1)$$

em que K é uma constante de proporcionalidade, que pode ser positiva ou negativa. Assim, podemos perceber que a taxa de crescimento da população $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ é proporcional ao tamanho da população.

A equação diferencial que representa este modelo é uma equação diferencial ordinária, pois relaciona os valores de uma função desconhecida, $P(t)$, e sua derivada, $\frac{dP}{dt}$, em um mesmo argumento (valor de t).

Podemos, então, definir uma equação diferencial ordinária (EDO) da seguinte forma:

Definição 1.1. Equações diferenciais ordinárias são aquelas que relacionam os valores de uma função desconhecida e algumas de suas derivadas em um mesmo argumento.

O modelo malthusiano apresenta uma falha importante. Se $K > 0$, então $\frac{dP}{dt} > 0$, para todo t , ou seja, a população está sempre aumentando. A solução da equação diferencial (1.1), sob a condição inicial $P(0) = p_0 > 0$, é $P(t) = p_0 e^{Kt}$, em que $P(0)$ é a população inicial. Dessa forma, a população cresce exponencial e indefinidamente. Isso não ocorre na prática, pois quando a população cresce em progressão geométrica e os alimentos em progressão aritmética, haverá escassez de alimentos no futuro, comprometendo o crescimento populacional.

Para resolver esse problema, o biólogo holandês Verhulst propôs um modelo, em meados do século XIX, que ficou conhecido como equação logística. Tal modelo nos diz que a população cresce até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar.

A equação diferencial que descreve a dinâmica populacional é a seguinte:

$$\frac{dP}{dt} = KP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{W}\right), \quad (1.2)$$

em que $K > 0$ é uma constante proporcionalidade ou parâmetro malthusiano, que reflete a taxa de crescimento da população sob condições ideais, ou seja, na ausência de qualquer limitante para o crescimento populacional. Já $W > 0$ representa a capacidade de suporte da população, isto é, o número máximo de indivíduos que o meio ambiente pode sustentar. Esse modelo captura os efeitos de fatores que limitam o crescimento populacional, como a competição intraespecífica (entre indivíduos da mesma espécie) por espaço e recursos. Esses fatores conduzem à estagnação do crescimento, ou seja, a uma situação de equilíbrio.

Observando a equação (1.2), apontamos que:

- quando P é muito menor que W , $\frac{P}{W}$ é próximo de 0 e, portanto, $\frac{dP}{dt} \approx KP$;
- se $P > W$, então $1 - \frac{P}{W} < 0$, $\frac{dP}{dt} < 0$ e, conseqüentemente, a população $P(t)$ decresce com respeito a t ;
- se $P < W$, então $\frac{dP}{dt} > 0$ e, portanto, a população $P(t)$ cresce com respeito a t .

Notamos, ainda, que o modelo de Verhulst faz uso de uma equação diferencial ordinária (1.2), já que a função desconhecida, $P(t)$, e sua derivada $\frac{dP}{dt}$ dependem do mesmo valor do argumento. Para uma melhor interpretação da equação (1.2) e do significado de W , recomendamos ao leitor a referência [10].

A solução da equação logística (1.2) é:

$$P(t) = \frac{p_0 W e^{Kt}}{W + p_0(e^{Kt} - 1)},$$

em que $p_0 = P(0)$ denota a população inicial.

Agora, pensemos em uma espécie em que o período de maturação é grande, ou seja, durante um certo tempo uma parte da população se encontra frágil na busca por espaço e comida e, além disso, os indivíduos não estão aptos à reprodução. Obviamente, tal parcela de indivíduos não contribuirá para o aumento da população até que eles amadureçam, o que leva um certo tempo para ocorrer. Dessa forma, o princípio da causalidade envolve um lapso de tempo entre causa e efeito. Devemos, então, incluir no modelo tal lapso temporal, a fim de captar, de forma mais realista, a influência do tempo passado na dinâmica dessa população.¹

Assim, incluiremos no modelo de equação logística os efeitos decorrentes da população possuir estrutura etária. Vimos que a equação logística expressa que a taxa de crescimento da população num determinado instante é uma função da população total nesse momento. Como os indivíduos imaturos não se reproduzem, devemos considerar seu montante no modelo. Dessa forma, teremos que a taxa de crescimento populacional depende não apenas da população no instante t , mas também em tempos anteriores. Com isso, surge o seguinte modelo expresso pela equação de Hutchinson (veja [11]):

$$\frac{dP}{dt} = KP(t) \left[1 - \frac{P(t-r)}{W} \right], \quad (1.3)$$

em que K e W têm a mesma interpretação que na equação logística e r pode ser interpretado como o tempo de maturação do indivíduo. Notemos que o referido modelo faz uso de uma equação diferencial funcional com retardo (1.3), já que a função desconhecida e sua derivada dependem de valores diferentes do argumento.

Podemos, então, definir uma equação diferencial funcional (EDF) e uma equação diferencial funcional com retardo (EDFR) de primeira ordem, conforme vemos a seguir.

Definição 1.2. Equações diferenciais funcionais são aquelas que relacionam os valores de uma função desconhecida e algumas de suas derivadas em diferentes valores do argumento.

¹Sempre que se concluir que um fenômeno real é melhor explicado utilizando a defasagem temporal, ele será modelado por uma EDFR. A equação logística de Verhulst explica bem a dinâmica populacional de bactérias, por exemplo, já que não se admite uma estrutura etária para esta população.

Definição 1.3. Equações diferenciais funcionais com retardo (ou retardamento) de primeira ordem constituem uma classe de equações diferenciais funcionais em que a derivada de primeira ordem da função desconhecida em um determinado momento é dada em termos dos valores da função em momentos anteriores.

Há, ainda, um outro tipo de equação diferencial funcional. Trata-se da equação diferencial funcional com retardo neutra (EDFRN).

Pensemos na equação de Hutchinson. Já vimos que ela incorporou um tempo r de retardo, pois indivíduos levam um certo tempo para começarem a se reproduzir. E se fosse incluído um retardo na taxa de crescimento da população? Neste caso, teríamos:

$$\frac{dP}{dt} = KP(t) \left[1 - \left(\frac{P(t-r) + \gamma \frac{dP}{dt}(t-r)}{W} \right) \right]. \quad (1.4)$$

Em (1.4), notamos que a taxa de variação da população depende do tamanho da população no instante t , retirando-se uma parcela da população que não está na idade para reproduzir mais uma parcela da variação num momento anterior. Nesse modelo, o retardo também está presente na derivada.

Definição 1.4. As equações diferenciais funcionais com retardo neutras de primeira ordem são equações diferenciais funcionais que dependem dos valores passados e presentes da função, de forma semelhante às equações diferenciais funcionais com retardo, no entanto também dependem da derivada de primeira ordem com atrasos.

As equações diferenciais funcionais com retardo neutras envolvem estados passados e derivadas de funções em estados passados e, por isso, modelam de forma mais realística fenômenos que dependem de estados passados e de taxas de variação de estados passados. Há modelos descritos por EDFs neutras em física, economia, dinâmica populacional, veja [4, 12].

Observação 1.5. Observando as Definições 1.3 e 1.4, podemos concluir que as equações diferenciais funcionais com retardo não envolvem a derivada da função dada com atrasos, enquanto as equações diferenciais neutras o fazem.

Notemos que desde o modelo de Malthus para dinâmicas populacionais, refinamentos foram seguidamente propostos. O modelo de Verhulst (1.2) utiliza uma EDO e inclui um fator limitante. O modelo de Hutchinson (1.3) e a modificação apresentada em (1.4) utilizam, respectivamente, uma EDFR e uma EDFRN.

Mais informações acerca do conteúdo desta seção podem ser encontradas nas referências [11], [13, Capítulo 5, p. 225] e [14].

1.3 Como a diferença entre EDO e EDFR impacta na solução da equação

Vimos, na Seção 1.2, que quando modelamos com EDO's, a variação do estado do processo dinâmico em cada instante t depende do estado nesse instante t . Considerando $x'(t)$ a taxa de variação do estado e $x(t)$ o estado, então $x'(t)$ é uma função de t e $x(t)$, podendo ser expressa na forma $x'(t) = f(t, x(t))$. Assim, o fenômeno é governado pelo

princípio da causalidade (causa e efeito), isto é, o futuro do sistema depende somente de seu presente. Podemos, portanto, prever estados futuros, pois o valor dele hoje nos dá a variação desse fenômeno. Vale ressaltar que é importante saber o valor do estado no instante inicial.

Trata-se de uma primeira abordagem do fenômeno. Será que ela é a mais indicada para descrevê-lo? Se, ao estudarmos o fenômeno, percebermos que há uma influência do passado em sua dinâmica, então devemos incluir o lapso de tempo (defasagem temporal) no modelo. Este será, assim, baseado numa EDFR.

Vimos que, quando modelamos com EDFR's, a variação de um estado depende em cada instante do estado em instantes anteriores a t . Um exemplo é exatamente a equação de Hutchinson (1.3). Vejamos outros exemplos de EDFR's:

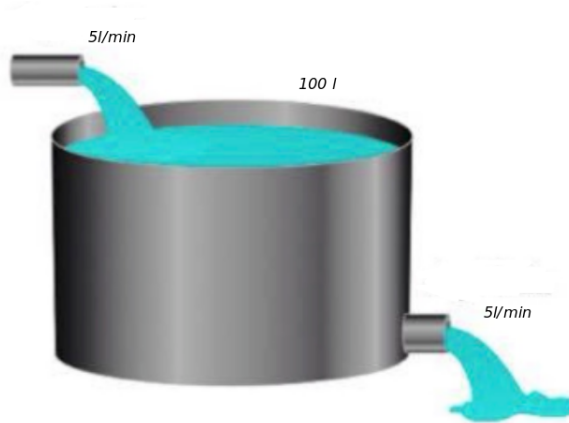
- $x'(t) = x(t - 1)$;
- $x'(t) = -2x(t - 3)$;
- $x'(t) = f(t, x(t - g_1(t)), \dots, x(t - g_k(t))), g_i(t) \geq 0$, para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Para entender a diferença entre modelar com EDO e EDFR, vejamos um exemplo prático modelado com esses dois tipos de equações diferenciais, e como isso impacta na solução das equações.

Consideremos o problema da mistura de produtos, extraído de [13, Capítulo 1 - p. 13–15].

Seja um tanque com 100 litros de salmoura (água saturada com sal). Uma torneira despeja 5 litros por minuto de salmoura contendo 2kg de sal por litro. Ao mesmo tempo, o fluido sai do tanque por um orifício à mesma taxa de 5 litros por minuto. A mistura no tanque é continuamente mexida para que a concentração esteja sempre uniforme. Se inicialmente a mistura contém um quilo de sal por litro, vamos elaborar um modelo que nos permita prever a concentração futura.

Figura 1.2: Problema da mistura de produtos



Fonte: <https://math.libretexts.org/>.

Seja $x(t)$ a concentração de sal no tanque em kg/ℓ no tempo t em minutos após o instante inicial $t = 0$. Então, a quantidade de sal no tanque no tempo t será de $100x(t)$

quilos. Sal está sendo adicionado ao tanque a uma taxa de $5 \cdot 2 = 10\text{kg/min}$ e saindo a uma taxa de $5x(t)\text{kg/min}$. Então, temos o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$100x'(t) = 10 - 5x(t) \quad \text{e} \quad x(0) = 1,$$

ou seja,

$$x'(t) + 0,05x(t) = 0,1 \quad \text{e} \quad x(0) = 1. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, pois está escrita na forma

$$x'(t) + P(t)x(t) = Q(t). \quad (1.6)$$

Para resolvê-la, devemos encontrar uma função adequada $\mu(t)$, chamada fator integrante, que torne o lado esquerdo da equação a derivada do produto $\mu(t)x(t)$. Assim, devemos ter

$$\mu(t)(x'(t) + P(t)x(t)) = (\mu(t)x(t))'. \quad (1.7)$$

Se pudermos encontrar $\mu(t)$, a equação (1.6) ficará sob a forma

$$(\mu(t)x(t))' = \mu(t)Q(t). \quad (1.8)$$

Integrando ambos os membros de (1.8) em relação a t , obtemos:

$$\mu(t)x(t) = \int \mu(t)Q(t)dt + C,$$

em que C é uma constante real.

Dessa forma, a solução de (1.6) será:

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)Q(t)dt + C \right].$$

A fim de encontrar $\mu(t)$, expandimos a equação (1.7) da seguinte forma:

$$\mu(t)x'(t) + \mu(t)P(t)x(t) = (\mu(t)x(t))' = \mu'(t)x(t) + \mu(t)x'(t). \quad (1.9)$$

Subtraindo o termo $\mu(t)x'(t)$ dos dois lados da igualdade (1.9), obtemos

$$\mu(t)P(t) = \mu'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = P(t). \quad (1.10)$$

A equação (1.10) é separável para $\mu(t)$; resolvê-la-emos integrando em relação a t ambos os seus membros, obtendo:

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} dt = \int P(t) dt \quad \Rightarrow \quad \ln |\mu(t)| = \int P(t) dt + c \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = Ae^{\int P(t) dt},$$

em que $A = \pm e^c$. Finalmente, tomando $A = 1^2$, o fator integrante da equação (1.6) é $\mu(t) = e^{\int P(t) dt}$.

²Tomamos $A = 1$, pois o objetivo principal é encontrar um fator integrante válido que permita resolver a equação diferencial. Qualquer constante $A \neq 0$ poderia ser utilizada, já que o fator integrante é determinado até uma constante multiplicativa arbitrária. Entretanto, escolher $A = 1$ simplifica os cálculos, sem prejuízo para a solução, uma vez que múltiplos escalares do fator integrante não alteram o resultado final da equação diferencial.

Em conclusão, de posse do fator integrante $\mu(t)$, multiplicamos ambos os membros de (1.6) por ele e depois realizamos uma integração em relação a t .

Voltando em (1.5) e considerando o método de resolução explicado anteriormente, temos: $\mu(t)(x'(t) + 0,05x(t)) = (\mu(t)x(t))'$.

Assim, $\mu(t)x'(t) + \mu(t)0,05x(t) = \mu(t)x'(t) + \mu'(t)x(t) \Rightarrow \mu(t)0,05 = \mu'(t)$ e, portanto, $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = 0,05$. Integrando esta última equação separável em relação a t , o fator integrante será $\ln|\mu(t)| = 0,05t + C \Rightarrow |\mu(t)| = C_1 e^{0,05t}$, $C_1 > 0$. Concluimos, assim, que $\mu(t) = C_2 e^{0,05t}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Tomando $C_2 = 1$, $\mu(t) = e^{0,05t}$ é o fator integrante da equação $x' + 0,05x = 0,1$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} e^{0,05t}(x'(t) + 0,05x(t)) &= e^{0,05t}0,1 \\ \therefore (e^{0,05t}x(t))' &= 0,1e^{0,05t}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Integrando em relação a t ambos os membros da equação (1.11), obtemos:

$$e^{0,05t}x(t) = \frac{0,1}{0,05}e^{0,05t} + K \Rightarrow e^{0,05t}x(t) = 2e^{0,05t} + K$$

e, portanto,

$$x(t) = 2 + Ke^{-0,05t}. \quad (1.12)$$

Como $x(0) = 1$, obtemos

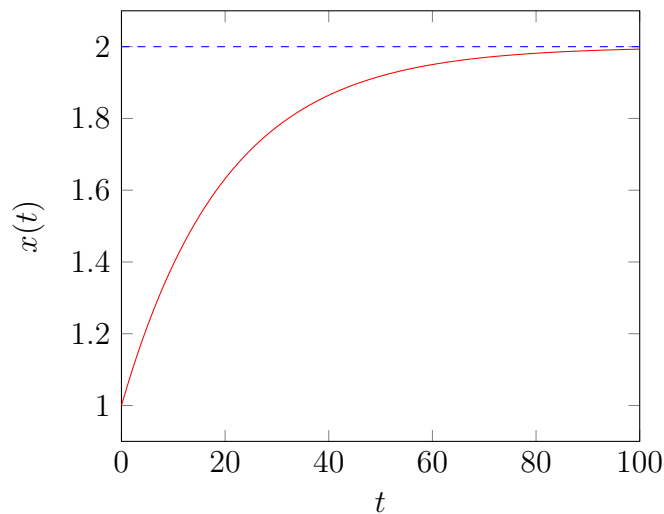
$$x(0) = 2 + Ke^{-0,05 \cdot 0} \Rightarrow 1 = 2 + K \Rightarrow K = -1.$$

Voltando em (1.12), temos a seguinte solução do PVI (1.5):

$$x(t) = 2 - e^{-0,05t}.$$

Como esperado, essa função mostra que a concentração que se inicia com $1\text{kg}/\ell$ em $t = 0$ se aproxima de $2\text{kg}/\ell$ quando $t \rightarrow +\infty$, conforme podemos constatar pela Figura 1.3.

Figura 1.3: Gráfico da função $x(t) = 2 - e^{-0,05t}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esse modelo parte da hipótese de que a mistura é sempre perfeita e o que deixa o tanque no instante t tem a mesma concentração em relação ao tanque como um todo neste instante. Em outras palavras, o modelo pressupõe que o fluido que sai do tanque pelo orifício tem a mesma concentração dos 100 litros que estão no tanque, ou seja, o modelo considera a homogeneidade da concentração em todo tanque em qualquer instante.

Isso parece problemático e pode afetar a previsão futura. Na verdade, um problema nesse tipo de modelagem com EDO se resume a uma palavra: simultaneidade.

Vamos então admitir mais realisticamente que a mistura não tem a mesma concentração por todo o tanque instantaneamente. Isso leva um tempo para ocorrer. Então, a concentração de salmoura que deixa o tanque no tempo t será igual à concentração média num instante anterior, digamos $t - r$, em que r é uma constante positiva e sua determinação deverá ser medida. Assim, temos a seguinte equação diferencial funcional para o problema da mistura:

$$100x'(t) = 10 - 5x(t - r),$$

ou seja,

$$x'(t) = 0,1 - 0,05x(t - r).$$

Notemos que r é o atraso e, portanto, temos agora, uma equação diferencial funcional com retardo representando o modelo matemático.

A pergunta que se segue é: que condição inicial devemos usar para obter uma única solução como aconteceu quando modelamos com uma EDO?

Veremos no Capítulo 2 que a resposta natural é tomar uma função inicial em algum intervalo de comprimento r , digamos $[t_0 - r, t_0]$, e a solução deve satisfazer a equação $x'(t) = 0,1 - 0,05x(t - r)$ para $t \geq t_0$. Assim, vamos estabelecer $x(t) = \varphi(t)$ para $t_0 - r \leq t \leq t_0$, na qual φ é alguma função dada. Portanto, neste caso, assumiremos que a concentração de sal no tanque em um passado é conhecida e isso será representado pela função φ .

Vamos, então, explorar a determinação do atraso r no problema da mistura, a fim de obtermos uma EDFR com função inicial.

O problema nos diz que $x(0) = 1\text{kg}/\ell$, ou seja, a concentração de sal inicial na mistura é $1\text{kg}/\ell$. Medimos, com um refratômetro para salinidade, em quanto tempo temos uma variação na concentração de sal que sai do tanque. Suponhamos que durante um minuto a concentração do fluido que sai não se altere. Logo depois, o refratômetro começa a detectar uma variação. Passamos, então, a contar o início do tempo e esse minuto que se passou em que a concentração não se alterou representa o passado do fenômeno. Assim, estipulamos a função inicial por $\varphi(t) = 1$ para $-1 \leq t \leq 0$, ou seja, a concentração depois de um minuto passa a ser nosso $x(0)$ e o minuto anterior é o retardo $r = 1$.

O problema de valor inicial (PVI) fica assim determinado:

$$\begin{cases} x'(t) = 0,1 - 0,05x(t - 1), & t \geq 0, \\ \varphi(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

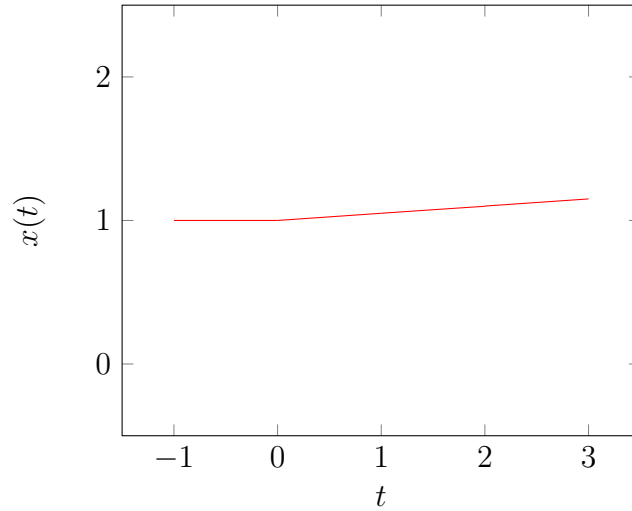
A função que satisfaz a situação apresentada é a seguinte (veremos como encontrá-la

no Capítulo 2, Seção 2.3):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [-1, 0], \\ 0,05t + 1, & \text{se } t \in [0, 1], \\ 0,0525t - 0,05^2 \frac{t^2}{2} + 0,99875, & \text{se } t \in [1, 2], \\ 0,05275t - 0,00275 \frac{t^2}{2} + 0,000625 \frac{t^3}{3} + 0,998583338, & \text{se } t \in [2, 3], \\ \vdots \end{cases}$$

Graficamente, temos:

Figura 1.4: Gráfico da solução do PVI (1.13) no intervalo $[-1, 3]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

É possível notar que, apesar de mais realista, a modelagem com EDFR nos levou a uma solução na qual não conseguimos suas propriedades essenciais, como por exemplo, o que acontece quando $t \rightarrow +\infty$.

Como dissemos na Seção 1.1, um fenômeno real é complexo e deve ser simplificado mediante o uso de hipóteses para que ele possa ser tratado matematicamente. Sabemos que hipóteses são argumentos que necessitam ser confirmados por observação ou experimentação. Para a construção de um modelo que tem por objetivo retratar a realidade da forma mais precisa possível, precisamos ter cuidado com o estabelecimento delas. Quando elas são fracas, os modelos serão falhos ao explicar o fenômeno real. Sendo assim, no caso do problema da mistura, como a modelagem com EDO foi construída com uma hipótese problemática, os resultados não serão tão próximos da realidade quanto o modelo construído com a hipótese da não simultaneidade.

Esse último exemplo apresentado, adaptado de [13, Capítulo 5, p. 226–228], teve um duplo objetivo:

- (i) mostrar a diferença em relação às equações quando modelamos com EDO e com EDFR;
- (ii) exibir a solução analítica de uma EDFR e analisar o que podemos concluir a partir dela.

A explicação de como chegamos à solução da modelagem com EDFR será abordada no próximo capítulo, no qual introduziremos o método dos passos.

Resolvendo EDFR's e o teorema de existência e unicidade

Neste capítulo, apresentaremos o método dos passos para resolver uma classe específica de EDFRs. Em seguida, forneceremos uma definição formal de uma EDFR de primeira ordem e discutiremos o problema da determinação do retardo. Analisaremos a diferença entre a condição inicial dada a uma EDO e a uma EDFR. Por fim, exploraremos as hipóteses necessárias para garantir a existência e unicidade da solução para um problema de condição inicial envolvendo uma EDFR.

2.1 Método dos passos e a forma geral das EDFR's de primeira ordem

Como vimos no Capítulo 1, as EDFR's relacionam os valores de uma função desconhecida e algumas de suas derivadas em diferentes valores do argumento.

O método dos passos consiste numa técnica que visa a resolução de uma determinada classe de EDFR's de primeira ordem, a saber, as chamadas EDFR's lineares escalares escritas sob a forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-r),$$

em que $r > 0$ é a constante que representa o retardo e $a, b: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. A fim de explicar o método dos passos de forma mais simples e didática, vamos considerar a como sendo a função nula e $b(t) = c \in \mathbb{R}$ uma função constante, ou seja, vamos considerar a equação:

$$\frac{dx}{dt} = cx(t-r). \quad (2.1)$$

Para que o método seja aplicado, é necessário que tenhamos uma função inicial definida em algum intervalo de comprimento r , digamos $[t_0 - r, t_0]$. Sendo assim, a solução deve satisfazer a equação (2.1) para $t \geq t_0$. Vamos estabelecer, então,

$$x(t) = \theta(t), \text{ para } t_0 - r \leq t \leq t_0, \quad (2.2)$$

em que $\theta: [t_0 - r, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada. O objetivo é encontrar uma extensão contínua de θ para o futuro. Esta extensão deve satisfazer a equação (2.1) para $t \geq t_0$.

Notemos que $\frac{dx}{dt}(t_0)$ é interpretada como uma derivada à direita de t_0 da função x . Isso ocorre, pois exigimos, em geral, que antes de t_0 a função seja contínua e, como sabemos, continuidade não implica em diferenciabilidade.

Para facilitar ainda mais a explanação sobre o método, vamos considerar a função θ de (2.2) constante igual a θ_0 , com $\theta_0 > 0$. Tomemos, então, o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx(t-r), & t \geq t_0, \\ x(t) = \theta_0, & [t_0 - r, t_0]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Para resolver o PVI (2.3) vamos considerar intervalos de comprimento r . O primeiro passo é considerar o intervalo $[t_0, t_0 + r]$. Não nos esqueçamos que queremos uma extensão contínua de $x(t) = \theta_0$ para $t \geq t_0$. Quando $t \in [t_0, t_0 + r]$, $t - r$ pertencerá ao intervalo $[t_0 - r, t_0]$ e $x(t - r)$ assumirá o valor da solução de (2.3) no intervalo $[t_0 - r, t_0]$, ou seja, θ_0 . Assim, devemos resolver a EDO separável

$$\frac{dx}{dt} = c\theta_0,$$

no intervalo $[t_0, t_0 + r]$.

A solução dessa EDO é $x(t) = c\theta_0 t + K$, com $K \in \mathbb{R}$. Mas $x(t_0) = \theta_0$. Assim, $K = \theta_0 - c\theta_0 t_0$. Finalmente, temos a solução de (2.3):

$$x(t) = c\theta_0 t + \theta_0 - c\theta_0 t_0 = \theta_0 + c\theta_0(t - t_0), \quad (2.4)$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + r$.

O segundo passo é considerar o intervalo $[t_0 + r, t_0 + 2r]$. Quando $t \in [t_0 + r, t_0 + 2r]$, temos $t_0 \leq t - r \leq t_0 + r$. Daí, por (2.4), temos

$$x(t - r) = \theta_0 + c\theta_0(t - r - t_0).$$

Sendo assim, no intervalo $[t_0 + r, t_0 + 2r]$, temos a seguinte EDO separável para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = c\theta_0 + c^2\theta_0(t - r - t_0),$$

cujas solução é

$$x(t) = c\theta_0 t + \frac{c^2\theta_0 t^2}{2} - c^2\theta_0 r t - c^2\theta_0 t_0 t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Como $x(t_0 + r) = \theta_0 + c\theta_0 r$, obtemos

$$\theta_0 + c\theta_0 r = c\theta_0(t_0 + r) + \frac{c^2\theta_0}{2}(t_0 + r)^2 - c^2\theta_0 r(t_0 + r) - c^2\theta_0 t_0(t_0 + r) + K_1,$$

de onde segue que

$$K_1 = \theta_0 + c\theta_0 r - c\theta_0(t_0 + r) - \frac{c^2\theta_0}{2}(t_0 + r)^2 + c^2\theta_0 r(t_0 + r) + c^2\theta_0 t_0(t_0 + r),$$

cujos desenvolvimento

$$K_1 = \theta_0 + c\theta_0 r - c\theta_0 t_0 - c\theta_0 r - \frac{c^2\theta_0 t_0^2}{2} - c^2\theta_0 t_0 r - \frac{c^2\theta_0 r^2}{2} + c^2\theta_0 r t_0 + c^2\theta_0 r^2 + c^2\theta_0 t_0^2 + c^2\theta_0 t_0 r$$

permite-nos obter

$$K_1 = \theta_0 - c\theta_0 t_0 + \frac{c^2\theta_0 t_0^2}{2} + \frac{c^2\theta_0 r^2}{2} + c^2\theta_0 r t_0. \quad (2.6)$$

Finalmente, por (2.5) e (2.6), obtemos como solução de (2.3) no intervalo $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ a função

$$x(t) = c\theta_0 t + \frac{c^2\theta_0 t^2}{2} - c^2\theta_0 r t - c^2\theta_0 t_0 t + \theta_0 - c\theta_0 t_0 + \frac{c^2\theta_0 t_0^2}{2} + \frac{c^2\theta_0 r^2}{2} + c^2\theta_0 r t_0,$$

ou melhor

$$x(t) = \theta_0 + c\theta_0(t - t_0) - c^2\theta_0 r(t - t_0) + \frac{c^2\theta_0}{2}(t^2 + t_0^2 + r^2) - c^2\theta_0 t_0 t,$$

para $t_0 + r \leq t \leq t_0 + 2r$.

Esse procedimento pode continuar tão longe quanto desejarmos, ou seja, podemos encontrar $x(t)$ para $t \in [t_0 + 2r, t_0 + 3r]$, em seguida para $t \in [t_0 + 3r, t_0 + 4r]$, e assim por diante. Essa técnica é chamada de **método dos passos**. Notemos que os cálculos vão ficando mais complicados (veja [13, Capítulo 5, p. 226–228])¹.

Para compreender melhor o método dos passos, vamos utilizá-lo para resolver dois problemas de valor inicial para EDFR's lineares escalares.

Exemplo 2.1. Vamos considerar o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(t-1), & t \geq 0, \\ x(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Devemos considerar intervalos de comprimento 1. Sendo assim, inicialmente, consideramos o intervalo $[0, 1]$. Para $t \in [0, 1]$, $t-1$ assumirá valores entre -1 e 0 . Assim, $x(t-1) = 1$ e temos a seguinte EDO separável:

$$\frac{dx}{dt} = -1,$$

cujas soluções são $x(t) = -t + K_1$, com $K_1 \in \mathbb{R}$.

Mas $x(0) = 1$ e, portanto, $K_1 = 1$. Logo, a solução de (2.7) no intervalo $[0, 1]$ é

$$x(t) = -t + 1. \quad (2.8)$$

Vamos, agora, considerar o intervalo $[1, 2]$. Para $t \in [1, 2]$, temos $0 \leq t-1 \leq 1$. Por (2.8), temos

$$x(t-1) = -(t-1) + 1 = -t + 2$$

e a seguinte EDO separável para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = -[-(t-1) + 1] = t - 2,$$

cujas soluções são

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$

¹Como vimos, em cada etapa do método, temos que resolver um PVI de EDO. Os métodos de resolução, neste caso, sempre envolvem integrações. Pode ocorrer de encontrarmos uma integral sem solução analítica e, assim, devemos recorrer a métodos numéricos (veja [15]).

Como $x(1) = 0$, temos $K_2 = \frac{3}{2}$ e a seguinte solução de (2.7) no intervalo $[1, 2]$:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}. \quad (2.9)$$

Agora, vamos considerar o intervalo $[2, 3]$. Para $t \in [2, 3]$, temos $1 \leq t - 1 \leq 2$. Portanto, de (2.9) segue que

$$\begin{aligned} x(t-1) &= \frac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{t^2 - 2t + 1}{2} - 2t + 2 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{t^2 - 2t + 1 - 4t + 4 + 3}{2} \\ &= \frac{t^2 - 6t + 8}{2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, no intervalo $[2, 3]$, devemos resolver a seguinte EDO separável

$$\frac{dx}{dt} = -x(t-1) = \frac{-t^2 + 6t - 8}{2},$$

que equivale a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2}{2} + 3t - 4,$$

cuja solução é

$$x(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + K_3, \quad K_3 \in \mathbb{R}.$$

Por (2.9), temos $x(2) = -\frac{1}{2}$ e, portanto, $K_3 = \frac{17}{6}$. Logo, a solução de (2.7) no intervalo $[2, 3]$ é

$$x(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}.$$

A equação pode continuar a ser resolvida para $t \in [3, 4]$, $t \in [4, 5]$, $t \in [n, n+1]$, para qualquer $n \in \mathbb{N} \cap [5, +\infty)$. Contudo, observamos que os cálculos vão se tornando cada vez mais trabalhosos.

Temos, então, a seguinte solução para o PVI (2.7):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [-1, 0], \\ -t + 1, & \text{se } t \in [0, 1], \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & \text{se } t \in [1, 2], \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}, & \text{se } t \in [2, 3], \\ \vdots \end{cases} \quad (2.10)$$

A fim de comprovar que a função x dada em (2.10) é, de fato, solução do sistema (2.7), observamos que

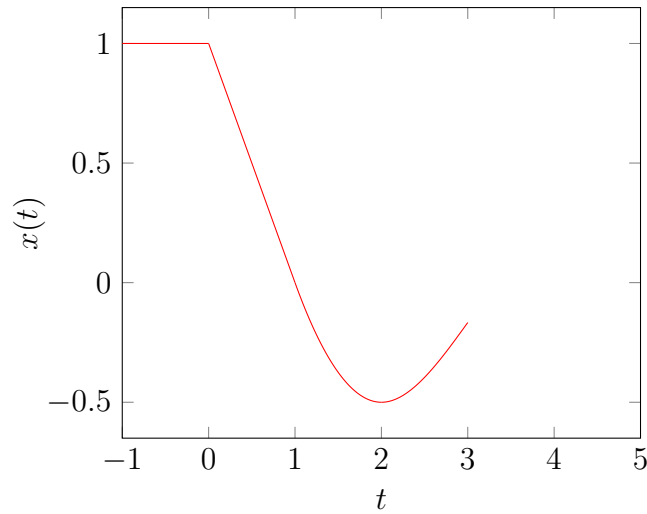
$$x'(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \in [0, 1], \\ t - 2, & \text{se } t \in [1, 2], \\ -\frac{t^2}{2} + 3t - 4, & \text{se } t \in [2, 3], \\ \vdots \end{cases} \quad (2.11)$$

enquanto que

$$-x(t-1) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \in [0, 1], \\ t-2, & \text{se } t \in [1, 2], \\ -\frac{t^2}{2} + 3t - 4, & \text{se } t \in [2, 3], \\ \vdots & \end{cases}$$

O sistema está, portanto, satisfeito. Logo, a solução de (2.7) é a função $x: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (2.10), tal que $x(t) = 1$ para $t \in [-1, 0]$ e $x'(t) = -x(t-1)$ para $t \in [0, +\infty)$. Veja, na Figura 2.1, o gráfico da referida solução restrita ao intervalo $[-1, 3]$.

Figura 2.1: Gráfico da solução do PVI (2.7) no intervalo $[-1, 3]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Notemos que $x: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Isso é facilmente verificado calculando a igualdade dos limites laterais nos extremos dos intervalos e observando que confere com o valor da função nesses pontos. Como temos polinômios em cada intervalo, x é contínua nos pontos interiores.

Resta-nos comprovar que x é, de fato, derivável em $[0, +\infty)$, embora já tenhamos observado isso em (2.11). Como x é definida por partes e temos funções polinomiais em seus respectivos intervalos, segue que x é derivável em pontos interiores. Contudo, devemos analisar se x é derivável em pontos de extremos dos intervalos, como $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, etc. Para isso, vamos utilizar o seguinte resultado: “se as derivadas à esquerda e à direita de t_0 , $x'_-(t_0)$ e $x'_+(t_0)$, existem e são iguais, então a função é derivável em t_0 ”.

Iniciemos analisando a função x , dada em (2.10), em $t = 1$. Temos

$$x'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(1+h) - x(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(1+h) + 1 - 0}{h} = -1$$

e

$$\begin{aligned}
 x'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(1+h) - x(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 4(1+h) + 3 - 0}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h + h^2}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h(1 - \frac{h}{2})}{2h} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Como $x'_-(1) = x'_+(1)$, concluímos que x é derivável em $t = 1$. De forma similar, podemos constatar que x é derivável em $t = 2$, $t = 3$, $t = n$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cap [4, +\infty)$.

No instante $t = 0$, consideramos somente a derivada lateral à direita, que existe e vale

$$x'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h + 1 - 1}{h} = -1.$$

Segue, portanto, que a função $x: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (2.10) e encontrada como solução do PVI (2.7), é contínua em $[-1, +\infty)$ e derivável em $[0, +\infty)$.

Exemplo 2.2. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) - 2x(t-1), & t \geq 0, \\ x(t) = 3, & t \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (2.12)$$

Utilizemos o método dos passos para encontrar a solução de (2.12). Como $r = 1$, devemos novamente considerar intervalos de comprimento 1.

Para $t \in [0, 1]$, $t - 1$ assumirá valores entre -1 e 0 . Assim, $x(t-1) = 3$ e temos a seguinte EDO separável para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = x - 6, \quad (2.13)$$

cujas solução é

$$x(t) = K_1 e^t + 6, \quad K_1 \in \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = 3$, temos $3 = K_1 + 6$, ou seja, $K_1 = -3$. Logo, a solução da equação (2.13) é

$$x(t) = -3e^t + 6, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

Para $t \in [1, 2]$, $t - 1$ assumirá valores entre 0 e 1 . Assim, por (2.14), temos $x(t-1) = -3e^{t-1} + 6$ e a seguinte EDO para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2(-3e^{t-1} + 6),$$

que equivale a

$$\frac{dx}{dt} - x = 6e^{t-1} - 12. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) é uma EDO linear de primeira ordem da forma $x' + P(t)x = Q(t)$. Para resolvê-la, devemos determinar o fator integrante² $\mu(t)$. Como $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$, segue que $\mu(t) = e^{\int -1dt} = e^{-t}$. A solução de (2.15) é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \left[K_2 + \int (6e^{t-1} - 12)e^{-t} dt \right] \\ &= K_2 e^t + e^t \left[\int 6e^{-1} dt - 12 \int e^{-t} dt \right] \\ &= K_2 e^t + e^t \frac{6t}{e} + 12e^{-t} e^t \\ &= K_2 e^t + 6te^{t-1} + 12. \end{aligned}$$

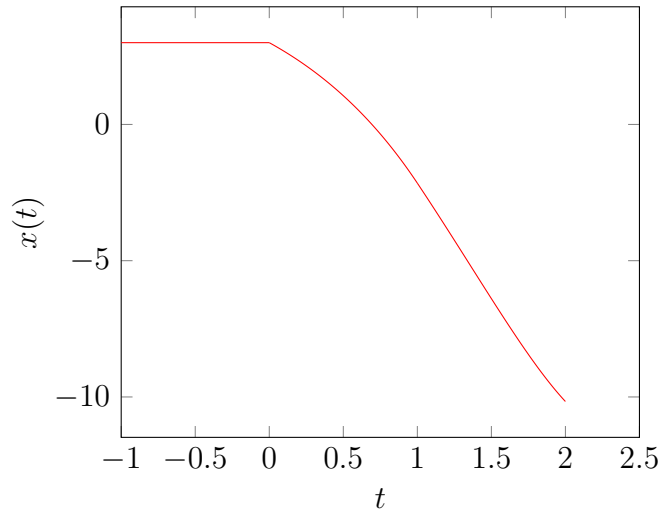
Por (2.14), temos $x(1) = -3e + 6$. Daí, $-3e + 6 = K_2 e + 6 + 12$, o que nos dá $K_2 = -7.4146$.

Portanto, a solução da equação (2.15) é $x(t) = -7.4146e^t + 6te^{t-1} + 12$, para $t \in [1, 2]$. A equação pode continuar a ser resolvida para $t \in [2, 3]$, $t \in [3, 4]$, $t \in [n, n+1]$, para $n \in \mathbb{N} \cap [4, +\infty)$. Novamente, observamos que os cálculos vão se tornando mais trabalhosos a cada passo.

A solução do PVI (2.12), cujo gráfico restrito ao intervalo $[-1, 2]$ se encontra na Figura 2.2, é dada por

$$x(t) = \begin{cases} 3, & \text{se } t \in [-1, 0], \\ -3e^t + 6, & \text{se } t \in [0, 1], \\ -7.4146e^t + 6te^{t-1} + 12, & \text{se } t \in [1, 2], \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.16)$$

Figura 2.2: Gráfico da solução do PVI (2.12) no intervalo $[-1, 2]$



Elaborado pelo autor (2024).

Assim como no Exemplo 2.1, é possível comprovar (inclusive, de forma similar) que a função x encontrada (2.16) é contínua em $[-1, +\infty)$, derivável em $[0 + \infty)$ e satisfaz o sistema (2.12).

²Veja a explicação sobre a solução de uma EDO linear de primeira ordem no Capítulo 1, Seção 1.3, página 20.

Dos Exemplos 2.1 e 2.2, notamos que a determinação da solução de uma equação diferencial funcional com retardo depende não apenas do conhecimento da mesma num instante t_0 mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a t_0 , ou seja, para determinar a solução de uma EDFR é necessário conhecermos uma dada função inicial.

Ainda, dos Exemplos 2.1 e 2.2, é possível notar que, dados $t \geq 0$ e $r > 0$ (nos exemplos, $r = 1$), as funções contínuas $x: [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas em (2.10) e (2.16) são soluções das EDFR's (2.7) e (2.12), respectivamente. O intervalo $[-r, +\infty)$ contém o intervalo $[t-r, t]$. Daí, denotamos por x_t a função $x_t: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, para $-r \leq \theta \leq 0$.

Grosso modo, a função x_t é uma cópia, em $[-r, 0]$, da restrição da função x ao intervalo $[t-r, t]$. Ela é uma função definida numa r -vizinhança à esquerda do ponto t . Dessa forma, ao interpretarmos o número t como o instante t , podemos interpretar a r -vizinhança à esquerda de t como o passado em relação ao instante t .

As equações diferenciais funcionais com retardo de primeira ordem têm a seguinte forma geral:

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad (2.17)$$

em que t é a variável independente, x_t são estados em t e em instantes anteriores a t e f é uma função tal que $f: I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que I é um intervalo e C é o espaço vetorial das funções contínuas definidas em $[-r, 0]$, tomando valores em $\mathbb{R}^n$.

As equações dos Exemplos 2.1 e 2.2, que têm a forma geral

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-r),$$

em que a e b são funções reais contínuas em $[0, +\infty)$, podem ser escritas na forma (2.17), a saber, como

$$x'(t) = a(t)x_t(0) + b(t)x_t(-r) = f(t, x_t).$$

Para finalizar esta seção, notemos que em ambos os exemplos, temos $t \geq 0$ e $r = 1$. Assim, as funções $x: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dadas em (2.10) e (2.16), são soluções das EDFR's (2.7) e (2.12), respectivamente, com informação inicial representada por uma função contínua, a saber, $x_0(\theta) = x(0+\theta) = 1$ (no Exemplo 2.1) e $x_0(\theta) = x(0+\theta) = 3$ (no Exemplo 2.2) para $-1 \leq \theta \leq 0$.

2.2 Definição formal de uma EDFR

Como vimos na Seção 2.1, as informações iniciais para as EDFR's são geralmente funções contínuas num intervalo compacto. Este fato as diferencia das EDO's com problema de valor inicial, pois nestas as informações iniciais são pontos no espaço euclidiano.

Vimos também como são as soluções de uma classe específica de EDFR's via método dos passos. Contudo, vamos formalizar matematicamente o que foi visto na Seção 2.1, tendo como base as referências [13], [16] e [17].

Sejam r, H com $0 \leq r < +\infty$, $0 < H < +\infty$ e $C_H = \{\varphi \in C: \|\varphi\| < H\}$, em que $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma do supremo, a saber,

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)|: -r \leq \theta \leq 0\}.$$

Sejam A , $0 < A \leq +\infty$, e $x(t)$ uma função contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Seja t tal que $t_0 \leq t < t_0 + A$. Definimos x_t como a função de $[-r, 0]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, dada por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$.

Na sequência, veremos que $x_t \in C$ para $t \in [t_0, t_0 + A]$, se $x: [t_0 - r, t_0 + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ for contínua.

Para o próximo lema, consideraremos o espaço de Banach das funções contínuas φ de $[t_0 - r, t_0 + A]$ em $\mathbb{R}^n$, com a norma do supremo, $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)|: t_0 - r \leq \theta \leq t_0 + A\}$, denotado por $C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$.

Lema 2.3. *Seja $x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$. A aplicação $F: [t_0, t_0 + A] \rightarrow C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, dada por $F(t) = x_t$ para $t \in [t_0, t_0 + A]$, é uma função contínua.*

Demonstração. Como x é uma função contínua em $[t_0 - r, t_0 + A]$, que é um conjunto compacto, segue que x é uniformemente contínua (veja [6, Capítulo 7]), isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z, w \in [t_0 - r, t_0 + A], |z - w| < \delta \Rightarrow |x(z) - x(w)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.18)$$

Portanto, de (2.18) segue que para $t, s \in [t_0, t_0 + A]$ tal que $|t - s| < \delta$, tem-se

$$|x(t + \theta) - x(s + \theta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \theta \in [-r, 0], \quad (2.19)$$

uma vez que se $t, s \in [t_0, t_0 + A]$ então $t + \theta, s + \theta \in [t_0 - r, t_0 + A]$ quando $\theta \in [-r, 0]$. Ademais, se $|t - s| < \delta$ então

$$|t + \theta - (s + \theta)| = |t - s| < \delta.$$

De (2.19), temos:

$$t, s \in [t_0, t_0 + A], |t - s| < \delta \Rightarrow \|x_t - x_s\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |x_t(\theta) - x_s(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t, s \in [t_0, t_0 + A], |t - s| < \delta \Rightarrow \|F(t) - F(s)\| = \|x_t - x_s\| < \varepsilon.$$

Logo, F é uniformemente contínua em $[t_0, t_0 + A]$ e, conseqüentemente, F é contínua. $\square$

Definição 2.4. Seja $f: [0, +\infty) \times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. A equação

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad (2.20)$$

é chamada de equação diferencial funcional com retardamento de primeira ordem, a qual, por simplicidade, nos referimos como EDFR.

Definição 2.5. Uma função $x: [t_0 - r, t_0 + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, com $0 < A \leq +\infty$ e $t_0 \geq 0$, é dita solução da EDFR (2.20) em $[t_0, t_0 + A]$ se existir a derivada de $x(t)$ em $[t_0, t_0 + A]$ e satisfazer a equação $x'(t) = f(t, x_t)$ para $t \in [t_0, t_0 + A]$. Cabe destacar que, em t_0 , considera-se a derivada à direita de x .

Observação 2.6. Quando $r = 0$, uma equação diferencial funcional com retardamento de primeira ordem se reduz a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, pois para $r = 0$ temos $\theta = 0$ e, portanto, $x_t(\theta) = x_t(0) = x(t)$, obtendo $x'(t) = f(t, x(t))$.

Nos Exemplos 2.1 e 2.2, vimos que as funções dadas em (2.10) e (2.16) são contínuas em $[-1, +\infty)$, deriváveis em $[0, +\infty)$, considerando a derivada à direita em $t_0 = 0$, e satisfizeram as equações (2.7) e (2.12), respectivamente.

2.3 O problema da determinação do tempo do retardo

Na Seção 1.3, analisamos a EDFR que representava a concentração de sal na salmoura presente num tanque. Naquele momento, chegamos à seguinte EDFR: $x'(t) = 0,1 - 0,05x(t - r)$, em que r é o atraso.

Foi admitida a condição inicial $x(t) = 1$ para $[-1, 0]$, ou seja, o atraso foi estabelecido em $r = 1$. Desse modo, obtivemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = 0,1 - 0,05x(t - 1), & t \geq 0, \\ x(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Vamos resolver o PVI (2.21) pelo método dos passos, explicado na Seção 2.1. Como $r = 1$, devemos considerar intervalos de comprimento 1.

Pois bem, para $t \in [0, 1]$, $t - 1$ assumirá valores entre -1 e 0 . Daí, $x(t - 1) = 1$ e temos a seguinte EDO separável para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = 0,1 - 0,05 \cdot 1 = 0,05,$$

cujas solução é

$$x(t) = 0,05t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = 1$, obtemos $K_1 = 1$ e a seguinte solução da equação (2.21) no intervalo $[0, 1]$:

$$x(t) = 0,05t + 1. \quad (2.22)$$

Para $t \in [1, 2]$, $t - 1$ assumirá valores entre 0 e 1 . Daí, por (2.22), temos

$$x(t - 1) = [0,05(t - 1) + 1]$$

e a seguinte EDO separável para resolver:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0,1 - 0,05[0,05(t - 1) + 1] \\ &= 0,1 - 0,05(0,05t - 0,05 + 1) \\ &= 0,1 - (0,05)^2 t - 0,0475, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = 0,0525 - (0,05)^2 t,$$

cujas solução é

$$x(t) = 0,0525t - (0,05)^2 \frac{t^2}{2} + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$

Por (2.22), temos $x(1) = 1,05$. Então, $K_2 = 0,99875$ e $x(t) = 0,0525t - 0,05^2 \frac{t^2}{2} + 0,99875$ é a solução da equação (2.21) no intervalo $[1, 2]$.

Esse procedimento, como vimos, pode continuar para $t \in [2, 3]$, $t \in [3, 4]$, $t \in [n, n + 1]$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cap [4, +\infty)$.

Portanto, a função $x(t)$ que satisfaz $x'(t) = 0,1 - 0,05x(t-1)$ para $t \geq 0$ e $x(t) = 1$ para $-1 \leq t \leq 0$ é:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [-1, 0], \\ 0,05t + 1, & \text{se } t \in [0, 1], \\ 0,0525t - 0,05^2 \frac{t^2}{2} + 0,99875, & \text{se } t \in [1, 2], \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.23)$$

Note que x , dada em (2.23), é uma função contínua até onde calculamos e derivável para $t \geq 0$. Note também que x será sempre positiva, o que condiz com a realidade, pois a concentração de sal não pode ser negativa.

Analisemos, agora, um outro problema. Consideremos um tanque com 100 litros de salmoura. Água fresca flui a uma taxa de 10 litros por minuto; a mistura é continuamente mexida e escorre para fora por um buraco à mesma taxa de 10 litros por minuto.

Seja $x(t)$ a concentração de sal na mistura no tempo t . É bem razoável pensar que a mistura da salmoura com água fresca que está entrando no tanque não ocorra instantaneamente em todo tanque. Então, a concentração de salmoura que deixa o tanque no tempo t será igual à mesma concentração num instante anterior, digamos $t - r$, em que $r > 0$ (tempo de retardo). A equação que modela tal fenômeno é uma EDR assim expressa:

$$x'(t) = -\frac{10}{100}x(t-r) = -0,1x(t-r). \quad (2.24)$$

Vamos supor que a concentração de sal no tanque antes de entrar água fresca seja $1\text{kg}/\ell$. Assim, $x(t) = 1$, se $[t_0 - r, t_0]$.

Vamos tentar encontrar uma função $x(t)$ que satisfaz (2.24) para $t \geq t_0$ e $x(t) = 1$ para $[t_0 - r, t_0]$. Para isso, utilizaremos o método dos passos.

Para $t \in [t_0, t_0 + r]$, $t - r$ assumirá valores entre $t_0 - r$ e t_0 . Assim, $x(t - r) = 1$ e temos a seguinte EDO separável para resolver:

$$x'(t) = -0,1 \cdot 1 = -0,1, \quad (2.25)$$

cuja solução é:

$$x(t) = -0,1t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}.$$

Como $x(t_0) = 1$, temos $K_1 = 1 + 0,1t_0$ e a seguinte solução de (2.25):

$$x(t) = -0,1t + 1 + 0,1t_0 = 1 - 0,1(t - t_0). \quad (2.26)$$

Para $t \in [t_0 + r, t_0 + 2r]$, $t - r$ assumirá valores entre t_0 e $t_0 + r$. Assim, por (2.26), temos $x(t - r) = 1 - 0,1(t - r - t_0)$ e a seguinte EDO separável para resolver:

$$x'(t) = -0,1x(t-r) = -0,1[1 - 0,1(t - r - t_0)] = -0,1 + 0,1^2(t - r - t_0),$$

sujeita à condição inicial: $x(t_0 + r) = 1 - 0,1(t_0 + r - t_0) = 1 - 0,1r$. Neste momento, vamos introduzir uma questão importante. Sabemos que $x(t)$ representa a quantidade de sal na salmoura. Então, $x(t)$ deve ser maior ou igual a 0 para todo t . Assim, $0,1r \leq 1$. Portanto, a determinação de r deve acontecer de modo que $x(t)$ não se torne negativa e, assim, r deve ser menor ou igual a 10.

2.4 O problema de primeira ordem com condição inicial

Como vimos nos Exemplos 2.1 e 2.2 da Seção 2.1, a determinação da solução de uma EDFR, sujeita a uma condição inicial, depende geralmente de funções contínuas definidas num intervalo compacto. Isso difere do problema de valor inicial para EDO's, nos quais a informação inicial é, em geral, um ponto no espaço euclidiano.

A determinação do tipo de condição inicial (função) das EDFR's não é algo óbvio. Lembremos do exemplo da mistura de produtos presente na Seção 1.3. Inicialmente, a concentração de sal era de 1 kg/ℓ e uma torneira passou a despejar 2 kg de sal por minuto. Como a concentração não se torna a mesma em todo tanque instantaneamente, usou-se um refratômetro para salinidade para medir o exato momento em que ocorreu uma variação na concentração do fluido que escorria por um orifício no fundo do tanque. Ao supor uma variação após um minuto, pôde-se determinar a função inicial, a saber, $\varphi(t) = 1$ para $-1 \leq t \leq 0$.

Considerando ainda o exemplo da mistura, obtivemos o seguinte problema de primeira ordem com condição inicial, que pode ser constatado em (1.13):

$$\begin{cases} x'(t) = 0, 1 - 0,05x(t-1), & t \geq 0, \\ \varphi(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Assim, tais problemas com condição (função) inicial têm a seguinte forma geral

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0, \\ \varphi(t) = \theta(t), & t_0 - r \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.27)$$

em que f é uma função definida em $[t_0, +\infty) \times C_H$, $t_0 \geq 0$ é o instante inicial (no exemplo citado, $t_0 = 0$), r é o retardo a ser determinado e θ é a função contínua que representa a condição inicial.

Para uma classe especial de EDFR's de primeira ordem, a saber, as chamadas EDFR's lineares escalares, podemos utilizar o método dos passos para encontrar uma solução, como vimos na Seção 2.1. Mas, se não for possível determinar a solução analítica de um problema com condição inicial por algum método conhecido, será que é possível saber se tal problema tem solução e se essa solução é única?

Inspirados por este questionamento, na próxima seção buscaremos estudar as condições impostas sobre a função f da equação $x'(t) = f(t, x_t)$ que asseguram a existência de uma solução única para um problema de valor inicial do tipo (2.27).

2.5 Existência e unicidade para o problema da função inicial

Vimos na Seção 2.1 casos em que podemos determinar explicitamente uma solução para uma EDFR com função inicial dada. Muitos outros casos podem ser tratados. Mas, em geral, equações diferenciais funcionais com retardo não apresentam soluções simples, ou seja, não se pode esperar deduzir que alguma função particular simples seja uma solução, tampouco a única solução, de uma dada equação diferencial funcional com retardo, sujeita a uma condição inicial. Assim, procuramos obter informação indiretamente sobre o problema. As duas principais questões que surgem são:

(Q1) A solução existe?

(Q2) Há uma ou mais de uma solução?

Portanto, vamos analisar as condições que asseguram a existência e unicidade de solução de uma EDO.

Inicialmente, faremos uma comparação com as EDO's que conhecemos desde os cursos de Cálculo. Para isso, analisaremos três exemplos. Mas antes, vamos recordar a definição de um problema de valor inicial para EDO's, envolvendo funções reais definidas em abertos de $\mathbb{R}^2$, por simplicidade. Em [4], o leitor pode encontrar a teoria de EDO's para aplicações de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.7. A solução da EDO com problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, com $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, é uma função real contínua em um intervalo $J \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 tal que

(i) $t_0 \in J$ e $x(t_0) = x_0$ e

(ii) para todo $t \in J$, $(t, x(t)) \in D$ e $x'(t) = f(t, x(t))$.

Notamos que essa definição implica que x deve ser diferenciável em J e se f for contínua, então x' também será contínua.

Exemplo 2.8. Vamos considerar a seguinte EDO:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = tx^2. \quad (2.28)$$

Note que $x(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é solução dessa equação. Além disso, resolvendo-a pelo método da separação de variáveis, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = tx^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = t dt \Rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = \int t dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

de onde segue que

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^2 + 2K}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{-2}{t^2 + K_1},$$

com $K_1 = 2K$ e $t^2 + K_1 \neq 0$.

Agora, consideremos a equação (2.28) sujeita às seguintes condições iniciais:

(i) $x(1) = 0$. Neste caso,

$$x(1) = \frac{-2}{1^2 + K_1} \Rightarrow 0 = \frac{-2}{1 + K_1} \Rightarrow 0 = -2,$$

o que é impossível. Logo, temos somente a solução $x(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo o PVI: $\frac{dx}{dt} = tx^2$ com $x(1) = 0$.

(ii) $x(0) = 1$. Neste caso,

$$x(0) = \frac{-2}{0 + K_1} \Rightarrow K_1 = -2.$$

Assim, $x(t) = \frac{-2}{t^2 - 2}$ satisfaz o PVI: $\frac{dx}{dt} = tx^2$ com $x(0) = 1$. O domínio de x é o intervalo aberto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, que contém $t = 0$. Observe que a função nula não satisfaz $x(0) = 1$ e, portanto, não é solução do PVI considerado.

(iii) $x(0) = -1$. Neste caso,

$$x(0) = \frac{-2}{t^2 + K_1} \Rightarrow -1 = \frac{-2}{K_1} \Rightarrow K_1 = 2.$$

Assim, $x(t) = \frac{-2}{t^2 + 2}$ satisfaz o PVI: $\frac{dx}{dt} = tx^2$ com $x(0) = -1$. O domínio de x é $\mathbb{R}$. Novamente, observe que a função nula não satisfaz $x(0) = -1$ e, consequentemente, não é solução do PVI considerado.

Nos problemas de valor inicial apresentados no Exemplo 2.8, em (i), (ii) e (iii), a solução existe e parece ser única.

Exemplo 2.9. Vamos, agora, considerar o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Inicialmente, notamos que $x(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é solução do PVI (2.29). Sendo a equação em questão uma EDO separável, vamos resolvê-la pelo método da separação de variáveis. Assim:

$$\frac{dx}{dt} = x^{2/3} \Rightarrow \frac{1}{x^{2/3}} dx = dt \Rightarrow \int x^{-2/3} dx = \int dt \Rightarrow 3x^{1/3} = t + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

de onde segue que

$$x^{1/3} = \frac{t + K}{3} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t + K}{3} \right)^3.$$

Como $x(0) = 0$, temos

$$0 = \left(\frac{K}{3} \right)^3 \Rightarrow K = 0.$$

Logo, $x(t) = \frac{t^3}{27}$ é solução do PVI (2.29) para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observamos que a solução do PVI (2.29) não é única, pois $x(t) = 0$ para $t \in \mathbb{R}$ é uma solução dele, assim como $x(t) = \frac{t^3}{27}$ para $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.10. Consideremos, agora, o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = x^{4/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Tratando-se novamente de uma EDO separável, aplicamos o método da separação de variáveis para resolvê-la, obtendo

$$\frac{1}{x^{4/3}} dx = dt \Rightarrow \int x^{-4/3} dx = \int dt \Rightarrow -3x^{-1/3} = t + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$x^{-1/3} = \frac{-t - K}{3} \Rightarrow x(t) = \frac{27}{(-t - K)^3}.$$

Considerando $x(0) = 0$, temos

$$x(0) = -\frac{27}{K^3} \Rightarrow 0 \cdot K^3 = -27 \Rightarrow 0 = -27,$$

o que é impossível. Logo, só temos a solução $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Os dois últimos exemplos parecem ser semelhantes, mas um apresentou mais de uma solução, enquanto o outro apresentou solução única. Podemos intuir que isso se deve às equações diferenciais consideradas. De fato, vamos analisar uma forma de determinar a unicidade examinando a equação diferencial.

Note que não estamos preocupados, neste instante, com a existência das soluções, pois fomos capazes, através da utilização de métodos, como o da separação de variáveis, de encontrá-la(s). Assim, queremos buscar um teorema da unicidade.

Iniciemos essa busca estabelecendo o PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Seja D um retângulo aberto $(\alpha, \beta) \times (\gamma, d)$ em $\mathbb{R}^2$. Se f for uma função real, contínua em D e x for uma função contínua tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in J = (\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$, então

$$\begin{aligned} x \text{ será solução do PVI (2.31) em } J &\iff x'(t) = f(t, x(t)) \\ &\iff \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ &\iff x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ &\iff x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Mas $x(t_0) = x_0$. Daí, obtemos:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \text{ para todo } t \in J. \quad (2.32)$$

Note que a solução do PVI (2.31) foi definida como uma função x em um certo intervalo J . O que acontece se mudarmos J , ou seja, se tomarmos $J_1 = (\alpha_2, \beta_2)$ um intervalo contido em (α, β) ? Rigorosamente falando, teremos uma função diferente, pois trata-se, agora, da solução x definida em J_1 e não em J .

Voltemos ao item (ii) do Exemplo 2.8. Vimos que a solução desse PVI é a função $x: (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(t) = -2/(t^2 - 2)$. Se considerarmos $x: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ com

a mesma lei de formação supracitada, teremos outra função. Neste caso, podemos dizer que ambas são soluções do problema?

Como a diferença entre tais funções reside no domínio, então é fácil notar que o gráfico de $x: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ está contido no gráfico de $x: (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.

É natural pensar que se qualquer outra solução do PVI do Exemplo 2.8 - (ii) definida em $(a, b) \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ tiver seu gráfico contido no gráfico de $x: (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, então teremos a unicidade da solução. Notemos que estamos considerando o intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ por ser o maior intervalo aberto no qual a função x está definida, contendo $t = 0$.

Temos, portanto, a seguinte definição:

Definição 2.11. A solução x do PVI (2.31) é única se qualquer outra solução dele, onde quer que esteja definida, tem seu gráfico coincidente com o de x na interseção de seus domínios, contendo t_0 .

Retomemos o PVI do Exemplo 2.9, a saber,

$$\begin{cases} x'(t) = x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Vimos que $x_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x_1(t) = t^3/27$ é uma solução desse PVI. Vimos também que a função identicamente nula é solução de (2.33). Chamaremos de $x_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a solução $x_2(t) = 0$, com $t \in \mathbb{R}$. É fácil perceber que os gráficos de x_1 e x_2 não coincidem em subintervalo algum $(a, b) \subset \mathbb{R}$ contendo $t = 0$. Logo, por contrariar a Definição 2.11, podemos afirmar que tal PVI não tem solução única.

Da análise desses dois exemplos - Exemplos 2.8 - (ii) e 2.9, vale ressaltar que:

- (1) se x for uma solução do PVI (2.31), então seu domínio deverá conter t_0 ;
- (2) se formos capazes de encontrar uma solução do PVI (2.31) utilizando algum método (nos exemplos referenciados, Exemplos 2.8 - (ii) e 2.9, utilizamos o método da separação de variáveis), então será seguro afirmar que o PVI (2.31) tem pelo menos uma solução.

Após essas considerações, o objetivo da seção é investigar, sem resolver o PVI (2.31), condições que nos levam a concluir que ele possui no máximo uma solução.

Considerando a equação $x' = f(t, x(t))$, vamos fazer as seguintes suposições:

- (S1) f é contínua em D ;
- (S2) $\tilde{f} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ existe e é limitada em D .

De (S2) segue que existe $K > 0$ tal que

$$|\tilde{f}(t, x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq K, \text{ para todo } (t, x) \in D. \quad (2.34)$$

Suponhamos que o PVI (2.31) tenha duas soluções x e $\tilde{x}$ no intervalo $J = (\alpha_1, \beta_1)$, que contém t_0 .

Por (2.32), temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{e} \\ \tilde{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds. \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações acima, temos:

$$x(t) - \tilde{x}(t) = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))] ds, \quad \forall t \in J,$$

de onde segue que

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))| ds. \quad (2.35)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio³, concluímos que para cada s fixado, há um número θ_s entre $x(s)$ e $\tilde{x}(s)$ tal que

$$\left| \frac{f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))}{x(s) - \tilde{x}(s)} \right| = |\tilde{f}(s, \theta_s)|,$$

ou seja,

$$|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))| = |\tilde{f}(s, \theta_s)| |x(s) - \tilde{x}(s)|.$$

Como $|\tilde{f}(t, x(t))| \leq K$ em D (veja (2.34)), concluímos que

$$|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))| \leq K |x(s) - \tilde{x}(s)|.$$

Portanto, voltando em (2.35), obtemos

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_{t_0}^t K |x(s) - \tilde{x}(s)| ds. \quad (2.36)$$

Completemos nossa análise mostrando que de (2.36) teremos $|x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$, para todo $t \in J$.

Vejamos dois casos:

(i) $t_0 \leq t < \beta_1$. Definamos $Q(t) = K \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)| ds$.

Daí,

$$\begin{aligned} Q'(t) &= K |x(t) - \tilde{x}(t)| \Big|_{t_0}^t \\ &= K [|x(t) - \tilde{x}(t)| - |x(t_0) - \tilde{x}(t_0)|] \\ &= K [|x(t) - \tilde{x}(t)| - |x_0 - \tilde{x}_0|] \\ &= K |x(t) - \tilde{x}(t)|. \end{aligned} \quad (2.37)$$

De (2.36) e (2.37), segue que

$$Q'(t) = K |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq K Q(t). \quad (2.38)$$

Por (2.38), obtemos a seguinte inequação diferencial linear:

$$Q'(t) - K Q(t) \leq 0, \quad \text{com } Q(t_0) = 0. \quad (2.39)$$

³O **Teorema do Valor Médio** (também conhecido como Teorema de Lagrange) afirma que, dada uma função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se g for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , existirá algum ponto c em (a, b) tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.39) por e^{-Kt} , obtemos

$$e^{-Kt}Q'(t) - e^{-Kt}KQ(t) \leq 0,$$

que equivale a

$$\left(e^{-Kt}Q(t)\right)' \leq 0.$$

Integrando ambos os membros da última desigualdade de t_0 a t , obtemos

$$\int_{t_0}^t \left(e^{-Kt}Q(t)\right)' dt \leq \int_{t_0}^t 0 dt,$$

ou seja,

$$e^{-Kt}Q(t) - e^{-Kt_0}Q(t_0) \leq 0.$$

Como $Q(t_0) = 0$, segue que

$$e^{-Kt}Q(t) \leq 0,$$

o que implica $Q(t) \leq 0$ para todo $t \in [t_0, \beta_1)$, uma vez que $e^{-Kt} > 0$. Como, por definição, $Q(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, \beta_1)$, concluímos que

$$Q(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [t_0, \beta_1). \quad (2.40)$$

De (2.38) segue que

$$K|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq KQ(t) \quad \Leftrightarrow \quad |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq Q(t)$$

e

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq 0.$$

Por conseguinte, $|x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$ para $t_0 \leq t < \beta_1$. Logo, $x(t) = \tilde{x}(t)$ para $t_0 \leq t < \beta_1$.

- (ii) $\alpha_1 < t \leq t_0$. Definamos $Q(t) = K \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)| ds$ como em (i). Assim como em (2.37), temos

$$Q'(t) = K|x(t) - \tilde{x}(t)| \Big|_{t_0}^t = K|x(t) - \tilde{x}(t)|.$$

Como $t \leq t_0$, $K > 0$ e o integrando $(|x(s) - \tilde{x}(s)|)$ é não-negativo, segue que $Q(t) \leq 0$. De (2.36) segue que

$$Q'(t) = K|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq K|Q(t)| = -KQ(t). \quad (2.41)$$

Por (2.41), obtemos a seguinte inequação diferencial linear:

$$Q'(t) + KQ(t) \leq 0, \quad \text{com } Q(t_0) = 0. \quad (2.42)$$

Agora, multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.42) por e^{Kt} , obtemos

$$e^{Kt}Q'(t) + e^{Kt}KQ(t) \leq 0,$$

isto é,

$$\left(e^{Kt}Q(t)\right)' \leq 0.$$

Integrando ambos os membros da última desigualdade de t a t_0 , obtemos

$$\int_t^{t_0} (e^{Kt}Q(t))' dt \leq \int_t^{t_0} 0 dt,$$

ou seja,

$$e^{Kt_0}Q(t_0) - e^{Kt}Q(t) \leq 0.$$

Como $Q(t_0) = 0$, segue que

$$-e^{Kt}Q(t) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{Kt}Q(t) \geq 0,$$

o que implica $Q(t) \geq 0$ para todo $t \in (\alpha_1, t_0]$, uma vez que $e^{Kt} > 0$ para todo $t \in (\alpha_1, t_0]$. Como, por definição, $Q(t) \leq 0$ para todo $t \in (\alpha_1, t_0]$, concluímos que $Q(t) = 0$ para todo $t \in (\alpha_1, t_0]$.

Por (2.41), temos

$$K|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq -KQ(t) \quad \Rightarrow \quad |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq 0,$$

o que nos permite concluir que $x(t) = \tilde{x}(t)$, para $\alpha_1 < t \leq t_0$.

Pelo que vimos anteriormente, em (i) e (ii), podemos inferir que as suposições (S1) e (S2) são suficientes para garantir a unicidade de solução do PVI (2.31) em $J = (\alpha_1, \beta_1)$.

Vimos no Exemplo 2.10 que a equação $x' = x^{4/3}$, sujeita à condição inicial $x(0) = 0$, tem solução única. Contudo, apesar de $f(t, x) = x^{4/3}$ ser contínua em $\mathbb{R}^2$,

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$$

é ilimitada em $\mathbb{R}^2$. No entanto, se restringirmos o domínio da f a um retângulo fechado e limitado contendo $(0, 0)$, teremos $\tilde{f}$ limitada nesse retângulo.

O mesmo argumento para explicar a unicidade da solução do PVI (2.30), tendo como base as suposições (S1) e (S2), se aplica para explicar a unicidade da solução do PVI do Exemplo 2.8 - (ii), a saber, $x' = tx^2$, com $x(0) = 1$. Com efeito, $f(t, x) = tx^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e embora

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2tx$$

seja ilimitada em $\mathbb{R}^2$, se restringirmos o domínio da f a um retângulo fechado e limitado contendo $(0, 1)$, teremos $\tilde{f}$ limitada nesse retângulo.

O PVI (2.29) do Exemplo 2.9, a saber, $x' = x^{2/3}$ com $x(0) = 0$, não apresenta solução única em intervalos contendo $t_0 = 0$ e não apresentará nem se diminuirmos o domínio da f . Para este PVI segue que

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

não é limitada em vizinhança alguma de $(0, 0)$.

Veremos a seguir um teorema de unicidade de solução para o PVI (2.31) que apresenta uma condição suficiente que substitui a condição (S2) e explica diretamente, por exemplo, a unicidade das soluções dos PVI's dos Exemplos 2.8 - (ii) e 2.10. Antes, veremos um resultado auxiliar, cuja prova segue diretamente do Teorema de Weierstrass⁴.

⁴**Teorema de Weierstrass.** Se $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no compacto Y de $\mathbb{R}^n$, então φ assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em Y , ou seja, φ é limitada em Y .

Lema 2.12. *Se $\tilde{f}$ for contínua em D , então $\tilde{f}$ será limitada em cada retângulo compacto $A \subset D$.*

Teorema 2.13 (Teorema de unicidade para EDO's, [13], Teorema A, Capítulo 2). *Se f e $\tilde{f}$ forem contínuas em D e se $(t_0, x_0) \in D$, então o PVI (2.31) terá no máximo uma solução em um intervalo aberto J contendo t_0 .*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existam duas soluções x e $\tilde{x}$ em $J = (\alpha_1, \beta_1)$, com $x \neq \tilde{x}$. Assim, $x(t_0) = x_0 = \tilde{x}(t_0)$.

Vamos assumir que $x(t) \neq \tilde{x}(t)$ para algum $t \in J_2 = (t_0, \beta_1)$. O caso em que $x(t) \neq \tilde{x}(t)$ para algum $t \in J_1 = (\alpha_1, t_0)$ pode ser tratado de forma similar.

Sejam

$$M = \{t \in (t_0, \beta_1) : x(t) = \tilde{x}(t)\} \quad \text{e} \quad N = \{t \in (t_0, \beta_1) : x(t) \neq \tilde{x}(t)\}.$$

Como x e $\tilde{x}$ são funções contínuas, segue que $x - \tilde{x} : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Pela definição de M , temos $(x - \tilde{x})(t) = 0$ para todo $t \in M$, ou seja, $(x - \tilde{x})(M) = \{0\}$ e $M = (x - \tilde{x})^{-1}(\{0\})$. Como $\{0\}$ é um conjunto fechado e $x - \tilde{x}$ é contínua, podemos concluir que M é fechado⁵.

Se M é fechado, então seu complementar N é aberto. Como $N \subset (t_0, \beta_1)$ é um subconjunto limitado e não vazio (por suposição) de $\mathbb{R}$, N possui ínfimo. Seja $t_1 = \inf N$.

Afirmção. $t_1 \in M$.

De fato, suponhamos que $t_1 \in N$. Como N é aberto, então t_1 é ponto interior de N , ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset N$. Notemos que

$$t_1 - \frac{\delta}{2} \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \quad \text{e, portanto,} \quad t_1 - \frac{\delta}{2} \in N.$$

Assim,

$$x\left(t_1 - \frac{\delta}{2}\right) \neq \tilde{x}\left(t_1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Mas $t_1 - \delta/2 < t_1$, o que contraria o fato de que t_1 é o ínfimo do conjunto N . Assim, $t_1 \notin N$ e, conseqüentemente, $t_1 \in M$. Sendo assim, temos $x(t_1) = \tilde{x}(t_1) = x_1$.

Como $(t_1, x_1) \in D$ e D é aberto, existem $\tilde{a} > 0$ e $\tilde{b} > 0$ tais que $(t_1 - \tilde{a}, t_1 + \tilde{a}) \times (x_1 - \tilde{b}, x_1 + \tilde{b}) \subset D$. Assim, podemos escolher a e b positivos tais que $a < \tilde{a}$, $b < \tilde{b}$ e

$$A = [t_1 - a, t_1 + a] \times [x_1 - b, x_1 + b] \subset (t_1 - \tilde{a}, t_1 + \tilde{a}) \times (x_1 - \tilde{b}, x_1 + \tilde{b}) \subset D.$$

Sendo A um produto cartesiano de conjuntos compactos, A é compacto pelo Teorema de Tychonoff⁶. Por hipótese, $\tilde{f}$ é contínua e como $A \subset D$ é compacto, segue que $\tilde{f}$ é limitada em $A \subset D$, pelo Lema 2.12. Assim, existe $K > 0$ tal que $|\tilde{f}(s, w)| \leq K$, para todo $(s, w) \in A$. Claramente, se $\tilde{f}$ é limitada em $A \subset D$, então $\tilde{f}$ é limitada em $D_* = (t_1 - a, t_1 + a) \times (x_1 - b, x_1 + b)$, pois $D_* \subset A$.

Afirmamos que os pontos $(t, x(t))$ e $(t, \tilde{x}(t))$ devem permanecer em D_* em algum intervalo J_* que contém t_1 . De fato, pela continuidade de x segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta_1 < a$ tal que

$$|t - t_1| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_1| < \varepsilon.$$

⁵Para essa conclusão, usamos o seguinte resultado da teoria de espaços métricos, que pode ser encontrado em [5, Proposição 9, §4]: “Sejam B e C espaços métricos e $f : B \rightarrow C$ uma função. A fim de que f seja contínua é necessário e suficiente que $f^{-1}(F)$ seja fechado em B para todo fechado F em C .”

⁶O Teorema de Tychonoff afirma que o produto de uma coleção arbitrária de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto em relação à topologia produto.

Tomemos $0 < \varepsilon < b$. Daí, teremos

$$t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \subset (t_1 - a, t_1 + a) \Rightarrow x(t) \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \subset (x_1 - b, x_1 + b),$$

ou seja, $(t, x(t)) \in D_*$ para todo $t \in I_1 = (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$. O mesmo vale para a função $\tilde{x}$, posto que $\tilde{x}$ é contínua, ou seja, existe $I_2 = (t_1 - \delta_2, t_1 + \delta_2)$ tal que $(t, \tilde{x}(t)) \in D_*$ para todo $t \in I_2$. Portanto, $J_* = I_1 \cap I_2 = (t_1 - \mu, t_1 + \mu)$, com $\mu = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, é um intervalo contendo t_1 para o qual vale $(t, x(t)), (t, \tilde{x}(t)) \in D_*$ para todo $t \in J_*$.

Conforme supusemos no início, x e $\tilde{x}$ são duas soluções em J tais que $x \neq \tilde{x}$. Como $x(t_1) = x_1 = \tilde{x}(t)$, temos

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds$$

e

$$\tilde{x}(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds.$$

Subtraindo as equações acima e utilizando o Teorema do Valor Médio, chegamos a

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq K \int_{t_1}^t |x(s) - \tilde{x}(s)| ds, \quad (2.43)$$

como fizemos para obter (2.36).

Definindo $Q(t) = K \int_{t_1}^t |x(s) - \tilde{x}(s)| ds$ e derivando Q em relação a t , chegamos a

$$Q'(t) = K|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq KQ(t) \Rightarrow Q'(t) - KQ(t) \leq 0,$$

com $Q(t_1) = 0$.

Resolvendo essa inequação diferencial linear obtida acima, notaremos que $Q(t) = 0$ para todo $t \in J_*$ (os cálculos já foram feitos anteriormente, veja (2.40)). Isso nos permitirá concluir que $|x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$ para $t \in J_*$. Daí, teremos $J_* \subset M$, permitindo-nos concluir que t_1 pertence ao interior de M . Porém, isso contradiz o fato de que $t_1 = \inf N$, pois, por definição de ínfimo, $t_1 \in \bar{N}$ e, por essa razão⁷, toda vizinhança de t_1 deve conter pontos de N , o que não ocorre com J_* (por estar contido em M , complementar de N). A contradição obtida nos possibilita concluir que não existem duas soluções x e $\tilde{x}$ em $J_2 = (t_0, \beta_1)$.

O caso em que $x(t) \neq \tilde{x}(t)$ para algum t em (α_1, t_0) é estudado de forma semelhante (considerando $t_2 = \sup N$ e realizando uma análise similar) e nos permite inferir que não existem duas soluções do PVI (2.31) em $J_1 = (\alpha_1, t_0)$. Por conseguinte, não há duas soluções do PVI (2.31) em $J = J_1 \cup J_2$, ou seja, a solução do PVI (2.31) quando existe, é única, desde que f e $\tilde{f}$ sejam contínuas em D .

Note que a limitação de $\tilde{f}$ foi usada para obter (2.43) e veio do fato de $\tilde{f}$ ser contínua em D . $\square$

Na sequência, enunciaremos um resultado um pouco mais geral do que o Teorema 2.13. Antes, porém, veremos uma definição preliminar, um resultado e duas observações relevantes para abordá-lo.

Definição 2.14. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Uma função real f será dita lipschitziana em A , com respeito à segunda variável, se existir uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq K|x - \tilde{x}| \quad (2.44)$$

para quaisquer (t, x) e $(t, \tilde{x}) \in A$. A constante $K > 0$ é denominada constante de Lipschitz.

⁷ $\bar{N}$ denota o fecho de N , ou seja, o conjunto de todos os pontos aderentes de N .

Proposição 2.15. *Se a condição (S2) for válida num retângulo $A \subset D$, então f satisfará a condição de Lipschitz (2.44) em A .*

Demonstração. Sendo $\tilde{f}$ limitada em A , existe $K > 0$ tal que

$$|\tilde{f}(t, x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq K, \quad \forall (t, x) \in A. \quad (2.45)$$

Dados (t, x) e $(t, \tilde{x})$ em A , existe, pelo Teorema do Valor Médio, θ_t entre x e $\tilde{x}$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \theta_t) \right| |x - \tilde{x}|. \quad (2.46)$$

De (2.45) e (2.46) segue que

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq K|x - \tilde{x}|.$$

Sendo (t, x) e $(t, \tilde{x})$ arbitrários em A , obtemos o resultado. $\square$

Observação 2.16. Se $\tilde{f}$ for contínua em D , então f será lipschitziana com respeito à segunda variável em cada compacto $A \subset D$. Realmente, se $\tilde{f}$ for contínua em D , então $\tilde{f}$ será limitada em cada retângulo compacto $A \subset D$ (Lema 2.12). Assim, a afirmação seguirá da Proposição 2.15.

Observação 2.17. Tendo em vista a Proposição 2.15 e Observação 2.16, podemos concluir que a condição de Lipschitz (2.44) é ligeiramente mais fraca do que a condição (S2) e a condição de $\tilde{f}$ ser contínua em D . Com efeito, a função contínua $f(t, x) = |x|$ satisfaz a condição de Lipschitz em $\mathbb{R}^2$, pois

$$|f(t, x) - f(t, y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

para quaisquer $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$, mas $\tilde{f}$ não existe em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, a saber, nos pontos $(t, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$, tampouco é contínua ou limitada em $\mathbb{R}^2$.

Pela Observação 2.17, o seguinte teorema é ligeiramente mais forte do que o Teorema 2.13.

Teorema 2.18 (Teorema de unicidade para EDO's, [13], Teorema B, Capítulo 2). *Se f for contínua em D , lipschitziana em cada retângulo compacto $A \subset D$ com respeito à segunda variável e $(t_0, x_0) \in D$, então o PVI (2.31) terá no máximo uma solução em qualquer intervalo aberto J contendo t_0 .*

A prova do Teorema 2.18 é essencialmente a mesma que a do Teorema 2.13 e por isso será omitida aqui. Na verdade, é um pouco mais simples, pois na demonstração do Teorema 2.13, primeiro tivemos que “produzir” a condição de Lipschitz a partir das propriedades de $\tilde{f}$ (utilizando o Teorema do Valor Médio) para obter a desigualdade (2.43). Agora, já temos a condição de Lipschitz e podemos proceder a partir dela, seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 2.13.

Refazendo nossa análise dos PVI's dos Exemplos 2.8 - (ii), 2.9 e 2.10, podemos fazer os apontamentos descritos na sequência.

- (Exemplo 2.10) Para $x' = x^{4/3}$ com $x(0) = 0$, temos $f(t, x) = x^{4/3}$. Trata-se de uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, uma vez que é a composição das funções contínuas $f(x) = x^4$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Sua derivada em relação à segunda variável, a saber,

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

também é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, por ser uma composição de funções contínuas, uma vez que $h(x) = \frac{4}{3}x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Ao restringirmos o domínio de $\tilde{f}$ para um retângulo compacto $A \subset D$, seguirá, pela Observação 2.16, que f é lipschitziana em A . Pelo Teorema 2.18, o PVI considerado tem no máximo uma solução em um intervalo contendo $t_0 = 0$.

- (Exemplo 2.8 - (ii)) Para $x' = tx^2$ com $x(0) = 1$, temos $f(t, x) = tx^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ por ser uma função polinomial. Sua derivada em relação à segunda variável, a saber,

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2tx$$

também é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ pela mesma razão. Se restringirmos o domínio de $\tilde{f}$ para um retângulo compacto $A \subset D$, seguirá, pela Observação 2.16, que f é lipschitziana em A . Pelo Teorema 2.18, o PVI em questão tem no máximo uma solução em um intervalo contendo $t_0 = 0$.

- (Exemplo 2.9) Para $x' = x^{2/3}$ e $x(0) = 0$, temos $f(t, x) = x^{2/3}$, que é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, uma vez que as funções $l(x) = x^2$ e $p(x) = \sqrt[3]{x}$ são contínuas em $\mathbb{R}$. Sua derivada em relação à segunda variável, a saber,

$$\tilde{f}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

não está definida em pontos $(t, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$, portanto não está definida em $(0, 0)$. Logo, f não será lipschitziana com respeito à segunda variável quando restrita a retângulos compactos contidos em $\mathbb{R}^2$ que contêm os pontos $(t, 0)$, pois $\tilde{f}$ não será contínua e nem limitada nesses retângulos compactos. Como não estamos nas condições do Teorema 2.13 nem nas condições do Teorema 2.18, não podemos garantir a unicidade da solução desse PVI.

Observação 2.19 (Sobre a existência de solução para o PVI (2.31)). Para garantir somente a existência de solução para o PVI (2.31), a hipótese de que f é contínua em D é suficiente. Isso é o que afirma o Teorema de Peano, cuja prova pode ser encontrada [4, Teorema 1.1].

Observação 2.20 (Sobre a existência e unicidade de solução para o PVI (2.31)). Embora tenhamos provado que as hipóteses do Teorema 2.18 são suficientes para assegurar a unicidade da solução do PVI (2.31), sob as mesmas hipóteses, pode-se provar que a solução do referido PVI existe e é única. Isso é o que afirma o Teorema de Picard-Lindelöf, cuja prova pode ser encontrada em [4, Teorema 3.1].

Até aqui, vimos condições para a existência e unicidade de solução para problemas de valor inicial de EDO's. Vejamos, agora, considerações para EDO's submetidas a uma condição inicial.

Vamos relembrar algumas notações e definições presentes na Seção 2.2 antes de enunciarmos e provarmos o Teorema de Existência e Unicidade para as EDFR's.

Sejam r, H com $0 \leq r < +\infty$, $0 < H < +\infty$, $C_H = \{\varphi \in C: \|\varphi\| < H\}$, em que $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma do supremo, $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)|: -r \leq \theta \leq 0\}$, em que $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $t_0 \geq 0$, A , $0 < A \leq +\infty$, e $x(t)$ contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Seja t tal que $t_0 \leq t < t_0 + A$. Definimos x_t como o elemento de C dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$.

Definição 2.21. Sejam $t_0 \geq 0$, $\psi \in C_H$, $0 < H < +\infty$, $A > 0$ e $f: [0, +\infty) \times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Uma função $x: [t_0 - r, t_0 + A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$, é dita solução de $x'(t) = f(t, x_t)$ com função inicial ψ em t_0 se

- (i) $x_t \in C_H$ para $[-r, 0]$;
- (ii) $x_{t_0} = \psi$;
- (iii) $x'(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Definição 2.22. Dizemos que $f(t, \varphi)$ satisfaz a condição de Lipschitz ou é lipschitziana relativamente a φ em $[0, \tau] \times C_{H_1}$, $0 < H_1 < H$, se existir $L = L(\tau, H_1)$ tal que

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

para $0 \leq t \leq \tau$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{H_1}$.

Dizemos que $f(t, \varphi)$ é localmente lipschitziana relativamente a φ em $[0, +\infty) \times C_H$ se $f(t, \varphi)$ for lipschitziana relativamente a φ em $[0, \tau] \times C_{H_1}$, para todo (τ, H_1) , com $0 < \tau < +\infty$ e $0 < H_1 < H$.

Notemos que o Teorema da Existência e Unicidade para EDFR's apresenta hipóteses similares do seu correspondente para EDO's, conforme veremos a seguir.

Teorema 2.23 ([17], Capítulo 2, Teorema 1). *Seja $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a φ em $[0, +\infty) \times C_H$. Então, para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$, existem $B > 0$ e uma função $x: [t_0 - r, t_0 + B] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é solução de $x'(t) = f(t, x_t)$ com função inicial ψ em t_0 . Ainda mais, esta solução é única.*

Demonstração. Seja

$$F = \{x \in C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n): \|x\| \leq H_1 \text{ e } x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), -r \leq \theta \leq 0\},$$

em que

- (A1) H_1 é escolhido de modo que $\|\psi\| < H_1 < H$;
- (A2) $B > 0$ será fixado convenientemente;
- (A3) $C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[t_0 - r, t_0 + B]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma do supremo, a saber,

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|: t_0 - r \leq t \leq t_0 + B\}. \quad (2.47)$$

Assim, F é o espaço das funções contínuas em $[t_0 - r, t_0 + B]$ que tomam valores em $\mathbb{R}^n$, com B conveniente, dotado da norma do supremo, dada em (2.47), tais que $x(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, isto é, a restrição das funções pertencentes a F ao intervalo $[t_0 - r, t_0]$ equivale à função ψ .

Consideremos a seguinte aplicação T de F em $C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$:

$$(Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \text{ para } -r \leq \theta \leq 0$$

e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + B.$$

Note que $(Tx)(t_0 - r) = \psi(-r)$ e $(Tx)(t_0) = (Tx)(t_0 + 0) = \psi(0)$, ou seja, a aplicação T leva a restrição de x ao intervalo $[t_0 - r, t_0]$ nela mesma, pois $x(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, para $-r \leq \theta \leq 0$. Quanto ao intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + B$, observamos que, para $x'(t) = f(t, x_t)$, como f é contínua, por hipótese, temos:

$$\int_{t_0}^t x'(t) dt = \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds.$$

Como $(Tx)(t_0) = \psi(0)$, então

$$(Tx)(t) = (Tx)(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \Rightarrow (Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds.$$

Primeiramente, precisamos mostrar que T , para B conveniente, é uma aplicação de F em F . Para isso, resta-nos chegar à conclusão de que $\|Tx\| \leq H_1$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &= \left| \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \right| \\ &\leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x_s)| ds \\ &\leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+B} |f(s, x_s)| ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + B. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tomando $B \leq 1$ e observando que $\|x_s\| \leq H_1$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + B$, obtemos

$$|f(s, x_s)| = |f(s, x_s) - f(s, 0) + f(s, 0)| \leq |f(s, x_s) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq LH_1 + K,$$

em que $K = \sup_{t_0 \leq s \leq t_0+1} |f(s, 0)|$ e $L = L(t_0 + 1, H_1)$ é a constante de Lipschitz da f (lembrando que f é localmente lipschitziana relativamente à segunda variável, por hipótese, em $[0, +\infty) \times C_H$, ou seja, f é lipschitziana relativamente à segunda variável em $[0, \tau] \times C_{H_1}$ para todo (τ, H_1) , com $0 < \tau < +\infty$ e $0 < H_1 < H$).

Portanto, voltando em (2.48), temos:

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+B} (LH_1 + K) ds \\ &= |\psi(0)| + LH_1(t_0 + B) + K(t_0 + B) - LH_1t_0 - Kt_0 \\ &= |\psi(0)| + LH_1t_0 + LH_1B + Kt_0 + KB - LH_1t_0 - Kt_0 \\ &= |\psi(0)| + B(LH_1 + K), \end{aligned} \quad (2.49)$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + B$. Por outro lado, como $\|\psi\| < H_1$ (por (A1)), podemos tomar $H_2 > 0$ tal que $\|\psi\| < H_2 < H_1$.

Logo, de (2.49) segue que

$$|(Tx)(t)| < H_2 + B(LH_1 + K), \quad t \in [t_0, t_0 + B]. \quad (2.50)$$

Tomemos

$$B \leq \min \left\{ 1, \frac{H_1 - H_2}{H_1 L + K} \right\}. \quad (2.51)$$

Para tal B , vale (2.49) e $|(Tx)(t)| < H_1$, para todo $t \in [t_0, t_0 + B]$ (por (2.50)). Portanto,

$$\|Tx\| = \sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0 + B} |(Tx)(t)| \leq H_1,$$

completando a prova de que $Tx \in F$ para $x \in F$. Logo, T é uma aplicação de F em F .

Escolhendo, agora, B não só com a restrição anterior expressa em (2.51), mas também de forma que $B < \frac{1}{L}$, vamos mostrar que T é também uma contração de F em F .

De fato, sejam x e y funções pertencentes a F . Então, $(Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$ e $(Ty)(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$,

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$$

e

$$(Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + B$. Daí,

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0, \quad \text{para } t_0 - r \leq t \leq t_0 \text{ e}$$

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_s) - f(s, y_s)| ds \leq \int_{t_0}^{t_0+B} L \|x_s - y_s\| ds, \quad (2.52)$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + B$. Como $\|x_s - y_s\| \leq \|x - y\|$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + B$, por (2.52), temos

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq BL \|x - y\|, \quad \text{para todo } t_0 \leq t \leq t_0 + B,$$

de onde segue que

$$\|Tx - Ty\| = \sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0 + B} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq BL \|x - y\|$$

e, consequentemente, T é uma contração, pois $BL < 1$.

Queremos garantir que T tem um único ponto fixo, que será a única solução da equação $x'(t) = f(t, x_t)$ com função inicial ψ em t_0 . Para isso, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como Teorema da Contração Uniforme, enunciado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [5, Capítulo 7, Proposição 23].

Teorema 2.24 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja X um espaço métrico completo. Se $f: X \rightarrow X$ for uma contração uniforme⁸, então f terá um único ponto fixo, ou seja, existirá um ponto $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

⁸Seja X um espaço métrico completo, munido de uma métrica d . Uma aplicação $f: X \rightarrow X$ é dita uma **contração uniforme** quando existe uma constante $0 \leq \beta < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in X$.

No entanto, para utilizar o referido resultado, precisamos mostrar que F é um espaço métrico completo. Para isso, vamos definir a seguinte função em $F \times F$:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t)| \stackrel{(*)}{=} \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t)|,$$

em que a igualdade $(*)$ se deve ao fato de $|x - y|$ ser uma função contínua no intervalo compacto $[t_0 - r, t_0 + B]$ e ao Teorema de Weierstrass. Mostremos que $d: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ é métrica.

- (i) Dados $x, y \in F$, provemos que $\|x - y\| \geq 0$ e $\|x - y\| = 0$ se, e somente se, $x = y$. A afirmação $\|x - y\| \geq 0$ é válida pelo fato de $|\cdot|$ ser uma norma em $\mathbb{R}^n$. E mais,

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t)| = 0 &\iff |x(t) - y(t)| = 0, \forall t \in [t_0 - r, t_0 + B] \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

- (ii) Dados $x, y \in F$, como $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, segue que

$$d(x, y) = \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t)| = \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |y(t) - x(t)| = d(y, x).$$

- (iii) Dados $x, y, z \in F$, mostremos que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. De fato, novamente como $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - z(t)| \\ &= \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t) + y(t) - z(t)| \\ &\leq \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |x(t) - y(t)| + \max_{[t_0 - r, t_0 + B]} |y(t) - z(t)| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Portanto, (F, d) é um espaço métrico. Mostraremos, agora, que F é completo com a métrica d . Para isso, utilizaremos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [5, Capítulo 7, Proposição 6].

Lema 2.25 (Resultado auxiliar). *Um subespaço X de um espaço métrico completo M é completo se, e somente se, X é fechado.*

Como $F \subset C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$ e sabemos que $C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$ é completo com a norma do supremo (veja [5, Capítulo 7, Corolário 3], pelo resultado auxiliar descrito anteriormente, basta verificar que F é fechado.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em F , isto é, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$, $\|x_n\| \leq H_1$ e $x_n(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $x_n \rightarrow f$ uniformemente. Como cada x_n é contínua, podemos afirmar que $f \in C([t_0 - r, t_0 + B], \mathbb{R}^n)$. Mostremos que $f \in F$.

- (I) Afirmamos que $\|f\| \leq H_1$. De fato, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um subconjunto de F , $\|x_n\| \leq H_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $a_n = \|x_n\| \in \mathbb{R}$. Então, $a_n \rightarrow \|f\|$.

Vamos supor, por contradição que $\|f\| > H_1$. Então, para $\varepsilon = \frac{\|f\| - H_1}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \|f\|| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Porém, note que

$$\begin{aligned} |a_n - \|f\|| < \frac{\|f\| - H_1}{2} &\Leftrightarrow \frac{-\|f\| + H_1}{2} < a_n - \|f\| < \frac{\|f\| - H_1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\|f\| + H_1}{2} < a_n < \frac{3\|f\| - H_1}{2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\|x_n\| = a_n > \frac{\|f\| + H_1}{2} = \frac{\|f\|}{2} + \frac{H_1}{2} > \frac{H_1}{2} + \frac{H_1}{2} = H_1, \quad \forall n \geq n_0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\|f\| \leq H_1$.

(II) Mostremos que $f(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, para todo $\theta \in [-r, 0]$. De fato, como $x_n \rightarrow f$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t_0 + \theta) = f(t_0 + \theta)$. Como $x_n(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$ para $\theta \in [-r, 0]$, pela unicidade do limite, temos $f(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, para todo $\theta \in [-r, 0]$.

Por (I) e (II), $f \in F$. Disso segue que F é fechado e, portanto, completo.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma e uma só função $x \in F$ tal que $Tx = x$. Em outras palavras, existe uma única função $x \in F$ tal que $x(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$ e

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + B.$$

□

Para finalizar este capítulo, vamos analisar os problemas de valor inicial para EDFR's expostos e resolvidos na Seção 2.1, mais precisamente nos Exemplos 2.1 e 2.2. Aqui o objetivo será verificar, sem resolvê-los, se cada um deles tem solução única. Os problemas aos quais nos referimos são:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(t-1), & \text{se } t \geq 0, \\ x(t) = 1, & \text{se } -1 \leq t \leq 0; \end{cases} \\ (2) \quad &\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) - 2x(t-1) & \text{se } t \geq 0, \\ x(t) = 3, & \text{se } -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Em (1), vemos que a equação $x'(t) = -x(t-1)$, com $t \geq 0$, está sujeita à condição inicial ψ em $t_0 = 0$ dada por $\psi(t) = x_0(t) = x(0+t) = 1$, para $t \in [-1, 0]$. Notando que $\|\psi\| = 1$, para escrever o problema nas condições do Teorema 2.23, podemos considerar $H = 3$, por exemplo (uma vez que $\|\psi\| = 1 < 3$). Portanto, $f: [0, +\infty) \times C_3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t, x_t) = -x(t-1) = -x_t(-1), \quad \text{para } t \geq 0, \quad x_t \in C_3. \quad (2.53)$$

Como x é implicitamente derivável em $[0, +\infty)$ por satisfazer a equação dada em (1) e é contínua em $[-1, 0]$ por ser constante, podemos afirmar que a função x é contínua

em $[-1, +\infty)$ pelo Lema da Colagem⁹, uma vez que $x(0)$ deve ser igual a 1. Portanto, a função f é contínua em $[0, +\infty) \times C_3$.

Além disso, de (2.53) segue que

$$|f(t, x_t) - f(t, y_t)| = |-x_t(-1) + y_t(-1)| \leq \| -x_t + y_t \| = \|x_t - y_t\|,$$

mostrando que f é lipschitziana com respeito à segunda variável em $[0, +\infty) \times C_3$. Então, pelo Teorema 2.23, existem $B_1 > 0$ e uma função $x: [-1, B_1) \rightarrow \mathbb{R}$ que é a única solução da equação dada em (1) no intervalo $[-1, B_1)$, satisfazendo $x(t) = 1$, para $t \in [-1, 0]$.

Em (2), vemos que a equação $x'(t) = x(t) - 2x(t-1)$, com $t \geq 0$, está sujeita à condição inicial ψ em $t_0 = 0$ dada por $\psi(t) = x_0(t) = x(0+t) = 3$, para $t \in [-1, 0]$. Notando que $\|\psi\| = 3$, a fim de escrever o problema nas condições do Teorema 2.23, podemos considerar $H = 5$, por exemplo (pois $\|\psi\| = 3 < 5$). Portanto, $f: [0, +\infty) \times C_5 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t, x_t) = x(t) - 2x(t-1) = x_t(0) - 2x_t(-1), \quad \text{para } t \geq 0, \quad x_t \in C_5. \quad (2.54)$$

Como x é implicitamente derivável em $[0, +\infty)$ por satisfazer a equação dada em (2) e é contínua em $[-1, 0]$ por ser constante, podemos afirmar que a função x é contínua em $[-1, +\infty)$ pelo Lema da Colagem, uma vez que $x(0)$ deve ser igual a 3. Disso segue que a função f é contínua em $[0, +\infty) \times C_5$.

Ademais, por (2.54), temos

$$\begin{aligned} |f(t, x_t) - f(t, y_t)| &= |x_t(0) - 2x_t(-1) - (y_t(0) - 2y_t(-1))| \\ &\leq |x_t(0) - y_t(0)| + 2|x_t(-1) - y_t(-1)| \\ &\leq \|x_t - y_t\| + 2\|x_t - y_t\| \\ &= 3\|x_t - y_t\|, \end{aligned}$$

mostrando que f é lipschitziana com respeito à segunda variável em $[0, +\infty) \times C_5$. Portanto, pelo Teorema 2.23, existem $B_2 > 0$ e uma função $x: [-1, B_2) \rightarrow \mathbb{R}$ que é a única solução da equação dada em (2) no intervalo $[-1, B_2)$, satisfazendo $x(t) = 3$, para $t \in [-1, 0]$.

O próximo capítulo será dedicado a uma aplicação de EDFR's de primeira ordem, a saber, ao modelo de ciclo econômico de Kalecki. Agora que já apresentamos parte da teoria básica desse tipo de equações diferenciais, estamos prontos para apresentá-lo.

⁹**Lema da Colagem.** Sejam X e Y espaços topológicos, com $X = A \cup B$, sendo A e B fechados em X . Sejam $l: A \rightarrow Y$ e $g: B \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Se $l(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então a aplicação $h: X \rightarrow Y$, dada por $h(x) = l(x)$, se $x \in A$, e $h(x) = g(x)$, se $x \in B$, será contínua. Ao aplicar o Lema da Colagem como justificativa em (1) e em (2), consideramos $X = [-1, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$, $B = [0, +\infty)$, $l = \psi$ e $g = x$ (função x).

O Modelo de ciclo econômico de Kalecki

Neste capítulo, construído com o auxílio das referências [18, 19, 20, 21, 22], veremos um modelo matemático no campo das ciências econômicas baseado em uma EDFR. Trata-se de um modelo que procura explicar as flutuações cíclicas num sistema econômico. Ele foi concebido a partir das contribuições de Michal Kalecki [18] para a macroeconomia, como a elaboração do princípio da demanda efetiva e a proposição de uma defasagem temporal entre os estágios do processo de investimento. Dessa forma, buscaremos vincular o arcabouço teórico de Kalecki com um modelo consolidado que usa uma EDFR.

3.1 Fragmentos da vida e do legado intelectual de Kalecki

Michal Kalecki nasceu em Lodz, Polônia, em 22 de junho de 1899. Estudou engenharia civil na Escola Politécnica de Varsóvia mas precisou parar para servir como recruta no conflito entre a Polônia e a Ucrânia. Depois disso, frequentou a Escola Politécnica de Danzig mas, novamente, teve que abandonar os estudos, pois o negócio de seu pai veio à falência. Depois de mais velho, aos 57 anos, já internacionalmente reconhecido, o governo polonês o nomeou professor universitário. Em 1964, a Universidade de Varsóvia lhe conferiu o título de Doutor Honoris Causa. Esse título é atribuído somente a personalidades eminentes que tenham se destacado numa determinada área do conhecimento.

O pensamento de Kalecki teve influência das obras de Marx e outros autores, como Rosa Luxemburgo e Tugan Baranovski. Seu primeiro trabalho como economista (era autodidata e não economista de formação) se deu no Instituto de Pesquisa de Conjuntura e Preços de Varsóvia, em 1927. Em 1933, publicou seu estudo inovador em teoria dos ciclos econômicos, o que lhe rendeu grande reputação, possibilitando-o estudar na Suécia com bolsa de estudos. Em 1936, mudou-se para a Inglaterra, pois era o local onde estavam as mais relevantes pesquisas em Economia. Trabalhou na Escola de Economia de Londres, depois na Universidade de Cambridge (de 1937 a 1939) e, por fim, no Instituto de Estatística da Universidade de Oxford (de 1940 a 1945).

Terminada a Segunda Grande Guerra, Kalecki foi para o departamento econômico do secretariado da ONU, onde ficou até 1954. Por fim, retornou à Polônia e ocupou vários

cargos, com destaque para a posição de professor da Escola Central de Planificação e Estatística de 1956 a 1969.

Kalecki morreu em Varsóvia, em abril de 1970, e foi um dos economistas mais destacados do século XX. Contudo, não teve a fama de Keynes, o grande economista do século passado, pois escreveu suas obras em polonês e era adepto das ideias de Marx, o que lhe trouxe alguns obstáculos.

Os trabalhos de Kalecki podem ser separados em três grupos: sobre as economias capitalistas desenvolvidas (que o capítulo dará ênfase), sobre as economias subdesenvolvidas e sobre as economias socialistas. Nota-se sua grande contribuição para a macroeconomia que é o ramo da ciência econômica preocupado em compreender os fenômenos que afetam uma economia nacional ou regional, como nível de renda, de investimento, de emprego, taxa de câmbio, taxa de juros etc.

Seus primeiros escritos (de 1929 a 1932) sobre as economias capitalistas abordam problemas de produção e comercialização de mercadorias específicas. A grande crise econômica na bolsa de Nova York em 1929 exerceu grande influência em Kalecki. Disso, resultou seu grande trabalho intitulado “*Esboço de uma Teoria do Ciclo Econômico*”. Dessa época até o fim de sua vida, ele se empenhou em entender as causas da dinâmica das economias capitalistas, como as flutuações cíclicas.

Devido ao seu trabalho na ONU, Kalecki passou a ter contato com países subdesenvolvidos e a interessar-se por seus problemas econômicos. Quando regressou à Polônia, Kalecki testemunhou a derrubada do governo stalinista e a instalação de um governo socialista. Isso o estimulou a escrever trabalhos sobre economias socialistas, ressaltando o papel central do investimento e a participação dos trabalhadores no planejamento das empresas.

Kalecki é reconhecido pelo pioneirismo em formalizar uma teoria dos ciclos econômicos usando modelos mais sofisticados, contribuindo para alavancar estudos das características de suas soluções. Assim, nos aprofundaremos em suas ideias no que diz respeito ao modo de funcionamento e desenvolvimento de uma economia capitalista. Exploraremos a análise do princípio da demanda efetiva e como isto nos leva a uma EDFR. Antes, porém, na próxima seção, veremos um pouco da história do pensamento econômico. Com isso, seremos capazes de entender melhor a contribuição de Kalecki.

3.2 Uma breve história do pensamento econômico

A grande contribuição de Kalecki para o entendimento do modo como funciona e se desenvolve a economia capitalista está em sua formulação e seu aprofundamento do princípio da demanda efetiva. Vamos analisar brevemente a história do pensamento econômico para compreender a grandeza de sua contribuição.

Iniciemos com as ideias de Adam Smith, pai da economia moderna e grande filósofo escocês do século XVIII. Sua grande obra, dividida em 5 volumes, é intitulada “*A Riqueza das Nações*”. Por discutir assuntos diferentes de tudo aquilo que já havia sido escrito sobre economia até então, podemos considerá-lo um revolucionário. Diante de uma diversidade enorme de temas, vamos enfatizar aquilo que nos interessa para melhor entender a contribuição de Kalecki.

Adam Smith dizia que o crescimento da produtividade do trabalho, que tem origem em mudanças na divisão e especialização do processo de trabalho, proporcionava aumento de excedente sobre salários (lucros), o que permitia o crescimento do estoque de capital, variável determinante do volume de emprego produtivo. O aumento do emprego, salários

e população ampliava o tamanho dos mercados. Sendo assim, novo crescimento de estoque de capital ocorria. Temos aí uma espiral de crescimento. Contudo, ele nunca disse que este processo se sustentava a longo prazo. Na verdade, como veremos no modelo Kaleckiano, a economia funciona em ciclos. Adam Smith dizia que a redução da taxa de lucro devido a alguns fatores, como exaustão das oportunidades de investimento e aumento de salários devido a um rápido e sustentado aumento do estoque de capital, promovia um estado estacionário.

Sendo assim, Adam Smith passou a analisar as forças que comandavam o mercado e elaborou, portanto, sua teoria da dinâmica do mercado. Esta dizia que a oferta e a demanda se ajustavam devido a variações no emprego de capital nos setores da economia. Assim, se havia excessos ou insuficiências de oferta, recursos eram alocados e o mercado se equilibrava. É a ideia da mão invisível. Com isso, ele acabou sugerindo que devido a essa “lei dos mercados” toda oferta tendia a ser necessariamente comprada. Essa ideia influenciou os economistas posteriores.

Algumas décadas depois, James Mill e Jean-Baptiste Say na França formularam o que ficou conhecido como “lei dos mercados de Say”. Esta dizia que toda produção criava uma demanda necessária para absorvê-la, ou seja, a demanda de uma nação era sempre igual a sua produção. Em outras palavras, um produto, no mesmo instante em que era criado, gerava um mercado para outros produtos em toda a grandeza de seu próprio valor. Na verdade, segundo Say, quando o produtor dava o acabamento final ao seu produto, ele ficava ansioso para vendê-lo imediatamente, para que seu valor não diminuísse em suas mãos. Uma vez dispondo do dinheiro, ele realizava a compra de outra mercadoria. Assim, a mera circunstância da criação de um produto abria imediatamente mercado para outros. O dinheiro desempenhava apenas uma função momentânea de dupla troca e quando a transação se fechava, sempre se descobria que um tipo de mercadoria era trocado por outro.

A “lei de Say” se baseia, portanto, em duas premissas:

(P1) A produção (renda) é sempre gasta.

(P2) Todo o nível de produção é vendável.

Os indivíduos irão utilizar toda sua renda proveniente da venda de sua produção no mercado para adquirir outras mercadorias. Isso porque a satisfação das necessidades é o móvel da produção, de tal maneira que a simples ocorrência de atividade produtiva demonstra que os indivíduos desejam comprar outras mercadorias. Dessa forma, ficava inválida a crítica à lei que dizia que a oferta pode se tornar excessiva porque os indivíduos com capacidade para adquirir bens, decidiam não fazê-lo.

Diante disso, podemos perguntar como a “lei de Say” explicava as crises. Segundo Say e seus seguidores, podiam ocorrer divergências entre a composição setorial da oferta e a composição setorial da demanda, de forma que haveria excesso de mercadorias. A contrapartida dessa situação é que existiriam outras mercadorias em excesso de demanda. A nível agregado, contudo, a magnitude da oferta seria sempre igual à magnitude da demanda.

Economistas famosos, como David Ricardo, considerado o legítimo sucessor de Adam Smith, e John Stuart Mill, transformaram a lei de Say em dogma. Ela, então, exerceu grande influência nos economistas do século XIX.

Se é a produção que cria a demanda, então esta última tem um papel passivo. A acumulação de capital e o progresso econômico dependem apenas da produção, não encontrando obstáculos por parte da demanda. O raciocínio é o seguinte: a produção gera

renda. Parte dela é gasta em consumo e parte é poupada. Mas isso não significa para Ricardo e seus seguidores que essa parte gera um excedente de produção, um volume invendável de mercadorias. A parte poupada da renda de um capitalista seria usada de duas maneiras:

- (i) diretamente para a acumulação de capital, ou seja, o próprio capitalista usa sua poupança para a compra de mercadorias (máquinas, por exemplo);
- (ii) sua poupança serve para a realização de empréstimos a outros capitalistas que a usariam para a acumulação de capital.

Vale ressaltar que um capitalista pode usar parte de sua poupança para si, enquanto que outro montante de sua poupança é destinada a empréstimos, ou seja, sua poupança abrange os itens (i) e (ii).

Sendo assim, toda renda estaria sendo gasta: uma parte para o consumo e outra para a acumulação de capital.

No caso circunstancial de haver excesso de produção em alguns setores específicos de atividade, isso seria corrigido, pois os capitalistas estabelecidos nele se deslocariam para setores nos quais há demanda.

Como a demanda não constitui obstáculo para a produção, pois é criada por esta, então a acumulação de capital e o desenvolvimento econômico passam a ser determinados apenas pelas condições de produção. Assim, pensemos na situação em que há aumento de salários. Como os preços são determinados pelas condições de concorrência, maiores salários determinam menores lucros. Se estes estão menores, haverá menos poupança e, portanto, menor acumulação de capital. Se há menor investimento, então o desenvolvimento econômico é menor.

Voltando ao fato de que toda produção cria sua própria demanda, se a renda for distribuída em benefício de salários, isso significaria apenas que os trabalhadores consumiriam mais e os capitalistas, com menores lucros, comprariam menos. Contudo, o montante total de produção e da renda não seria modificado. Se, por acaso, o Estado aumentasse tributos, isso não afetaria a produção, pois transferiria para ele (Estado) uma parte do poder de compra dos indivíduos.

A lei de Say e suas implicações não passaram sem críticas. Thomas Robert Malthus, o mesmo conhecido por um modelo populacional que mencionamos no Capítulo 1, Seção 1.2, dizia que a demanda tende a ser inferior à produção. Os trabalhadores gastam toda sua renda para consumir, enquanto os capitalistas gastam parte dela nesse intento e outra parte é poupada. Parte da poupança é usada na acumulação de capital mas uma parte restante não é usada para coisa alguma. Malthus chamou tal comportamento como “preferência pela indolência”. Keynes, economista influente do século passado, chamou tal fato como “propensão para poupar”. Esse raciocínio de Malthus abre espaço para outra conclusão: se a demanda não é necessariamente igual à produção, então o progresso econômico depende não apenas do acréscimo na capacidade produtiva (investimento) mas também dos determinantes do aumento da demanda efetiva (parte da demanda agregada que realmente se realiza), imprescindível para pôr em funcionamento a acrescida capacidade. Assim, novos tópicos passam a ser importantes, como redistribuição de renda, aumento das exportações e gastos improdutivos do governo.

Marx também se opôs à lei de Say. Para ele, a demanda não é necessariamente igual à produção. Mais que isso, a produção ou oferta de mercadorias tende naturalmente, no capitalismo, a ser maior que a demanda. Vejamos a situação: de posse de um montante de dinheiro (D), os capitalistas adquirem um determinado volume de mercadorias (M) de

dois tipos: meios de produção (matérias-primas, equipamentos etc) e força de trabalho. Operando com os meios de produção, os trabalhadores geram novas mercadorias que valem o montante M' ($M' > M$). A transformação de D em M e de M em M' constitui o processo de criação de valor. Mas este processo ainda não foi concluído, pois o valor criado ainda não foi realizado. Para isso, é preciso que as mercadorias sejam vendidas, ou seja, convertidas em D' . Assim, o processo completo pode ser expresso como

$$D \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow D'.$$

Os momentos $D \rightarrow M$ e $M \rightarrow M'$ dependem das condições próprias da produção, ou seja, existência de matérias-primas, equipamentos, força de trabalho etc. A transformação de M' em D' depende das condições de realização (venda). Nada garante que o valor criado M' seja necessariamente realizado, tornando-se real para o capitalista.

Assim, para Marx, e contrariamente à lei de Say, a demanda não é necessariamente igual à produção.

Estamos diante de duas abordagens. A primeira nos diz que a oferta cria a demanda e esta tem papel passivo na economia. A segunda nos diz que a demanda e a oferta não são necessariamente iguais e o crescimento da economia passa também pelos determinantes da demanda.

A grande crise econômica iniciada em 1929 acabaria por forçar o reconhecimento da demanda efetiva como algo importante para explicar a dinâmica da economia capitalista. Tal crise foi causada, dentre outros fatores, pela superprodução, ou seja, houve excesso de oferta e o mercado não teve condições de absorvê-lo. Ficou claro que não era apenas ofertar que já se criaria mercado consumidor (demanda). A oferta de produtos devia passar por uma expectativa de renda do capitalista, ou seja, de quanto ele pensava em ganhar com sua produção (princípio da demanda efetiva). O foco de Kalecki será, portanto, no processo de realização, pois ele considerou o processo de criação muito bem explicado por Marx. Sendo assim, exploraremos, agora, as ideias de Kalecki e como elas levaram a um modelo baseado em uma EDFR.

Maiores informações podem ser encontradas na Coleção Economistas [20], que é constituída num conjunto de livros que explica as ideias dos principais economistas da história.

A linha do tempo presente na Figura 3.1 ilustra um pouco da história contada nas Seções 3.1 e 3.2.

3.3 Do princípio da demanda efetiva a uma EDFR

Vimos, na Seção 3.2, que a criação e a realização da produção apresentam, em seus momentos específicos, diferentes condições.

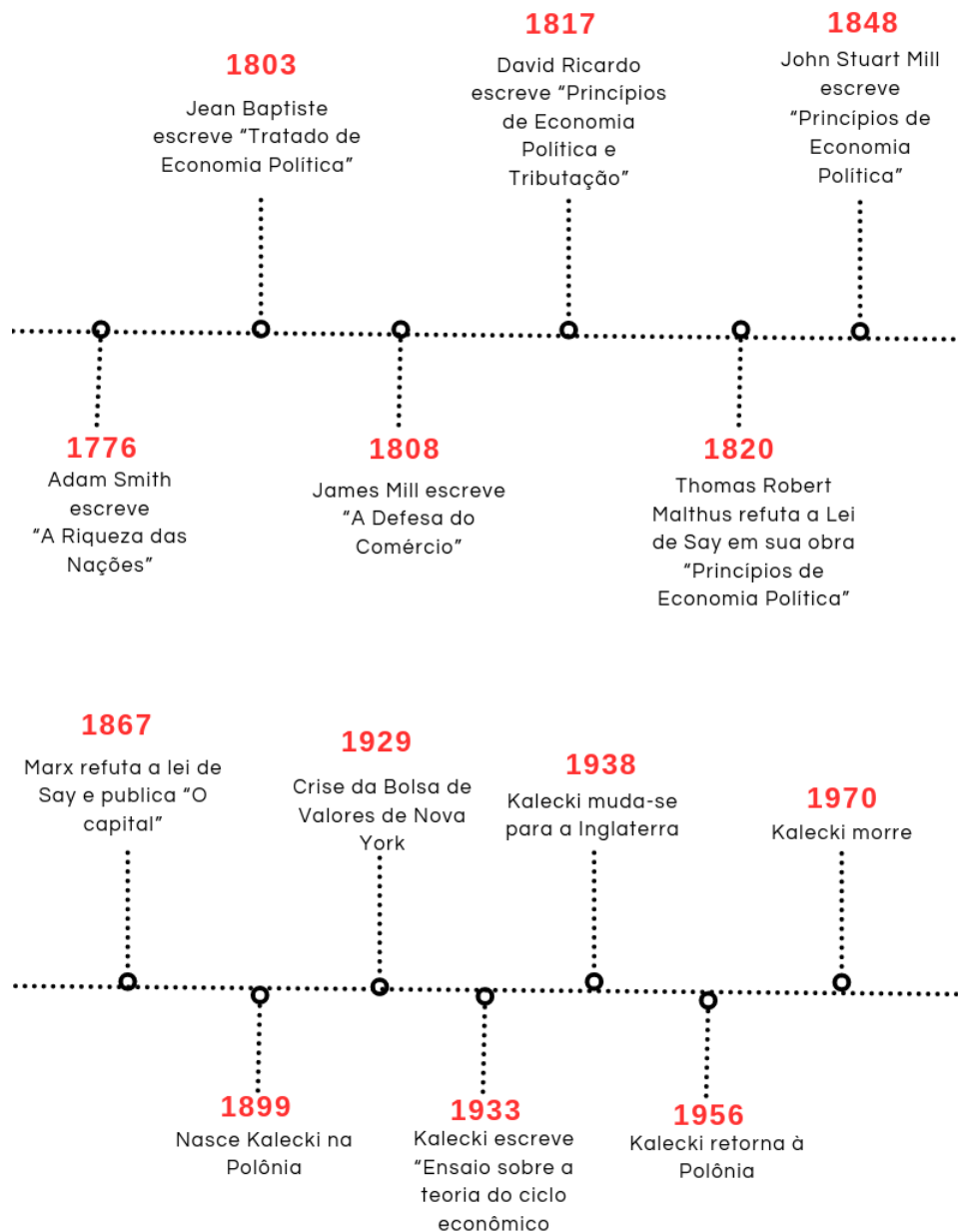
A criação depende essencialmente da capacidade produtiva da sociedade, ou seja, da disponibilidade de matérias-primas, equipamentos e força de trabalho. Já a realização é explicada pelos motivos que levam a sociedade a adquirir os produtos criados.

Considerando a separação teórica das condições de criação (o lado da oferta do processo produtivo) e as condições de realização (o lado da demanda), temos as seguintes perguntas:

(P1) Com condições de demanda dada, quais os determinantes da oferta?

(P2) Com condições de oferta dada, quais os determinantes da demanda?

Figura 3.1: Linha do tempo - economistas



Elaborado pelo autor (2024).

Kalecki focou seus estudos nas condições de realização, ou seja, nos determinantes da demanda dos produtos criados e como isto impacta no processo capitalista de reprodução.¹

¹Aqui se faz necessário explicitar dois conceitos importantes presentes nas Ciências Econômicas. O primeiro diz respeito ao processo capitalista de reprodução ou acumulação de capital que ocorre quando o capitalista, não consumindo toda a mais valia (diferença entre o salário pago ao trabalhador e o valor produzido pelo trabalho) de que se apropria para a satisfação de suas necessidades (consumo pessoal), consagra parte da mesma à produção e a transforma em capital complementar que lhe trará uma nova mais valia. O segundo diz respeito ao processo capitalista de produção que ocorre quando, pelo trabalho, se transforma matéria-prima em bens de consumo que vão satisfazer as necessidades do homem. Portanto, produzir é dar nova combinação, pelo trabalho, aos elementos da Natureza. A venda se constitui no momento no qual a produção é realizada.

Segundo ele, o principal obstáculo ao processo de acumulação nas economias capitalistas reside no lado da demanda.

Dizia Kalecki:

“Em meu entender, o problema central do sistema capitalista de *laissez-faire*²... é o da demanda efetiva, isto é, de encontrar mercados para seus produtos, com plena utilização de recursos.” [19, p. 123]

Em outras palavras, Kalecki aponta como principal obstáculo ao crescimento econômico a insuficiência de demanda, ou seja, de procura por bens de todo tipo. Devemos lembrar que Kalecki escreve após a crise de 1929.

As economias capitalistas desenvolvidas raramente enfrentam problemas de escassez de força de trabalho e capital. Essas economias não entram em recessão por falta de recursos. Se utilizassem plenamente seus equipamentos de capital poderiam absorver toda força de trabalho disponível e, conseqüentemente, eliminar o desemprego, aumentar a produção e evitar crises. Na realidade, o capital instalado não é plenamente utilizado e a força de trabalho não é plenamente empregada.

Segundo Kalecki:

“O principal problema de uma economia capitalista desenvolvida é a adequação da demanda efetiva. Tal economia possui um equipamento de capital que mais ou menos se equipara à força de trabalho existente e, portanto, poderia gerar um bem mais elevado da renda per capita se recursos fossem plenamente utilizados. Isso, todavia, não é necessariamente o caso.” [19, p. 133]

Façamos, agora, as seguintes perguntas equivalentes:

- Por que não há mercado? Ou seja, por que não há consumo suficiente para que a produção seja totalmente vendida?

A resposta que iremos explorar a partir daqui é a seguinte: devido aos gastos dos capitalistas. Há falta de demanda porque os capitalistas não consomem e não investem o suficiente.

Veremos que os gastos dos capitalistas em consumo e em acumulação desempenham um papel fundamental na dinâmica das economias capitalistas. Numa economia monetária, a decisão de gastar é a única autônoma nas transações econômicas e, assim, esse gasto irá determinar uma receita de mesma magnitude. Se comprarmos um objeto que custa x reais em uma loja, nosso gasto será x e a receita do dono da loja será x também. Assim, é natural pensar que o gasto realizado vai determinar a renda.

Vimos no Capítulo 1, Seção 1.1, que um modelo é uma descrição de um fenômeno real feita por meio de uma equação. Como a realidade é complexa, há uma simplificação dela para que um tratamento matemático seja possível. Tal simplificação é feita quando hipóteses são utilizadas. Assim, no modelo de Kalecki, cujo objetivo é explicar os ciclos econômicos, algumas hipóteses são consideradas, sem que se perca, segundo o autor, a correspondência com a realidade (veja [18]). À medida que as hipóteses vão aparecendo, elas serão devidamente apontadas.

² *Laissez-faire* é a expressão escrita em francês que simboliza o liberalismo econômico. É a versão mais pura de capitalismo de que o mercado deve funcionar livremente, sem interferência, taxas nem subsídios, apenas com regulamentos suficientes para proteger os direitos de propriedade.

A primeira hipótese do modelo diz respeito à existência de duas classes sociais: capitalistas, ou seja, aqueles que detêm os meios de produção, e os trabalhadores. Outra hipótese é a de que os trabalhadores gastam tudo que ganham. Seja W (de wage em inglês, cuja tradução para o português é remuneração) o montante dos salários dos trabalhadores na economia. Seja P (de profit em inglês, cuja tradução para o português é lucro) o lucro bruto real que os capitalistas conseguem ao vender suas mercadorias. Como acabamos de mencionar que todo gasto gera uma receita de mesma magnitude, então podemos olhar a renda nacional pela ótica das receitas dos agentes econômicos e pela ótica de seus gastos. Assim, pela ótica das receitas, temos a seguinte equação:

$$Y = P + W. \quad (3.1)$$

Pela ótica dos gastos, temos a seguinte equação:

$$Y = A + C_c + C_w, \quad (3.2)$$

em que A é a expansão do capital fixo que acontece mediante investimentos, C_c é o consumo dos capitalistas e C_w é o consumo dos trabalhadores.

Vale ressaltar que Kalecki considera uma economia fechada e sem governo para se assegurar que o poder de compra dos agentes econômicos não seja transferido para o exterior e/ou para o governo.

Considerando as duas equações da renda nacional (Y), dadas por (3.1) e (3.2), e que $W = C_w$ (trabalhadores gastam o que ganham), obtemos:

$$A + C_c + C_w = P + W = P + C_w,$$

de onde segue que

$$P = A + C_c. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) nos diz que o lucro dos capitalistas é determinado pelos gastos dos próprios capitalistas em consumo e investimentos. Isso demonstra que os gastos dos capitalistas são fundamentais para o ciclo econômico, uma vez que podem ser revertidos em expansão do capital (A). Por esse motivo, há uma importante diferença em relação aos gastos dos trabalhadores. Uma implicação importante é que as flutuações na renda nacional são causadas pelas flutuações nos gastos capitalistas em consumo e investimentos.

Como nas economias há a existência do desemprego involuntário, o investimento se torna o principal determinante do ciclo econômico na teoria desenvolvida por Kalecki em comparação com outros componentes do gasto agregado, a saber, C_c e C_w .

O papel relevante do investimento para os ciclos de negócios fez Kalecki analisar dados de diversos ciclos, procurando padrões para o estabelecimento de um modelo dinâmico. Isso evidencia a importância da coleta de informações na elaboração de modelos. Como veremos, o modelo será definido considerando variáveis em diferentes períodos de tempo, o que mostra a imensa contribuição de Kalecki para o campo da dinâmica macroeconômica.

Kalecki analisa o ciclo guiado por duas questões:

- (1) O que determina a decisão de investir?
- (2) Qual a influência dos investimentos sobre os lucros e a renda nacional?

Diante dessas perguntas, o modelo desenvolvido deverá mostrar ciclos gerados endogenamente pela influência positiva de maiores investimentos na renda nacional e lucros e

pela influência negativa de maior estoque de capital na decisão de investir. *Grosso modo*, pois vamos explicar melhor mais adiante, investimentos podem gerar mais lucros, o que gera um otimismo e, conseqüentemente, isso se refletirá em mais investimento, gerando uma fase positiva na economia. Contudo, grandes investimentos aumentam o estoque de capital e isso tem a tendência de frear novas compras de máquinas, por exemplo, gerando uma fase mais negativa da economia. Aí está o comportamento cíclico.

Na teoria de Kalecki, não há conceito de equilíbrio, ou seja, o sistema tem tendência cíclica, uma vez que há uma defasagem temporal entre a decisão de investir e a concretização do investimento. Sendo assim, faz sentido modelar os ciclos econômicos por uma EDFR.

Voltemos à equação $P = C_c + A$ (eq. (3.3)). Outra hipótese lançada por Kalecki é a de que o consumo dos capitalistas, (C_c), é relativamente inelástico, ou seja, tem uma parte praticamente constante, que chamaremos de B_0 , e outra parte que depende dos lucros brutos. Sendo assim, o consumo dos capitalistas pode ser expresso como

$$C_c = B_0 + \lambda P, \quad (3.4)$$

com $0 < \lambda < 1$. A palavra inelástico aqui significa que um determinado percentual de variação no lucro irá causar uma variação percentual menor no consumo dos capitalistas. Dessa forma, por (3.3) e (3.4), temos

$$P = B_0 + \lambda P + A \quad \Rightarrow \quad P - \lambda P = B_0 + A \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)P = B_0 + A,$$

implicando

$$P = \frac{B_0 + A}{1 - \lambda}. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) sugere que o lucro do capitalista, P , depende de B_0 , que é fixo, e da expansão de capital. Mas só há expansão se houver investimento. Assim, o lucro depende de B_0 e do investimento.

Está bem clara a importância do investimento nos ciclos de negócios. Isto posto, Kalecki define a existência de um período médio de gestação que diz respeito ao intervalo temporal exigido para construção deste investimento. Este período vai depender das condições estruturais da economia. Sendo assim, há um intervalo de tempo entre a decisão de investir e a entrega dos equipamentos concluídos. Chamaremos esse período médio de gestação de θ , sendo θ uma constante positiva. Essa defasagem decorre do fato de que a decisão e concretização ocorrem em tempos distintos. Vale ressaltar que a constante θ é meramente uma média de todos os tempos reais observados na prática para a concretização das encomendas.

Segundo Kalecki, constata-se 3 estágios desde a encomenda do investimento até sua entrega. São eles:

1. Pedidos ou encomendas do investimento. É o momento em que o capitalista decide investir baseado em sua expectativa de renda (princípio da demanda efetiva). Dessa forma, ele encomenda um bem de capital (máquina, por exemplo) que servirá ao propósito de produzir determinado bem de consumo. Kalecki chama $I(t)$ a função que relaciona o volume de encomendas de investimento num dado instante t .
2. Produção de bens de capital. Este estágio representa o volume de produção de todos os bens de capital, que são aqueles cujo propósito é servir de recurso e ferramenta para a produção de bens de consumo. Kalecki chama de $A(t)$ tal volume de produção por unidade de tempo.

3. Entregas de bens de capital. Neste momento, temos a entrega das encomendas já finalizadas num tempo t . Kalecki chama de $D(t)$ a função que relaciona o volume de bens de capital finalizados por unidade de tempo t .

Temos uma relação intuitiva entre I e D expressa por $D(t) = I(t - \theta)$, ou seja, tudo que é entregue no tempo t dependeu de uma encomenda feita no tempo $t - \theta$, já que o período de gestação é θ . Vejamos a relação entre A e I .

Seja $Z(t)$ uma função que expressa o total de pedidos (encomendas) feitos no período $(t - \theta, t)$. Neste período, os investimentos não estão finalizados, já que o período de gestação é θ . Considerando o instante t , qualquer pedido feito antes de $t - \theta$ já estará finalizado até o tempo t . Assim, é natural definir $Z(t)$ da seguinte forma:

$$Z(t) = \int_{t-\theta}^t I(r)dr.$$

Como vimos, $A(t)$ representa a produção de bens de capital num dado instante t . Como cada investimento precisa do tempo θ para ser finalizado, então Kalecki define $A(t)$ da seguinte forma:

$$A(t) = \frac{Z}{\theta} = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t I(r)dr.$$

Por esta definição, vemos que a produção de bens de capital no tempo t é igual a uma média em termos contínuos de todas as encomendas feitas no período $(t - \theta, t)$.

Façamos uma interpretação das ideias que foram expostas acima. Suponhamos que θ seja igual a 4 meses, ou seja, o período médio para a entrega de uma encomenda de investimento é 4 meses. Suponhamos também que a função que expressa as encomendas de investimento no tempo t seja dada por $I(t) = 1,3 \sin(0,6t) + 10$. Veremos como determinar $I(t)$ na Seção 3.5. Determinemos $Z(10)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} Z(10) &= \int_{10-4}^{10} [1,3 \sin(0,6t) + 10]dt \\ &= \int_6^{10} [1,3 \sin(0,6t) + 10]dt \\ &= \left[-1,3 \frac{\cos(0,6t)}{0,6} + 10t \right] \Big|_6^{10} \\ &\approx -2,16 \cos(6) + 100 + 2,16 \cos(3,6) - 60 \\ &\approx -2,07 - 1,93 + 40 \\ &= 36. \end{aligned}$$

Temos, portanto, um total de 36 encomendas de investimento no período de 4 meses. Notar que o intervalo considerado é $(t - \theta, t) = (10 - 4, 10) = (6, 10)$.

Calculando $A(10)$, temos:

$$A(10) = \frac{1}{\theta} Z(10) \approx \frac{36}{4} = 9.$$

Assim, 9 encomendas estão em curso de produção no décimo mês. Vale mencionar que, em cada instante t , temos encomendas sendo feitas, encomendas em curso de produção e encomendas sendo entregues. Notemos que $D(10)$ corresponde às encomendas feitas 4 meses atrás, pois $D(10) = I(10-4) = I(6)$. Como $D(10) = I(6) \approx 9$, então, as 9 máquinas

que estão em curso de produção serão entregues no final desse mês. A interpretação dada teve o intuito de deixar menos abstratas as ideias de Kalecki. Obviamente, num sistema econômico, muito mais do que 9 máquinas estão em produção por unidade de tempo, que nesta ilustração corresponde a 1 mês.

Kalecki define $K(t)$ como uma função que nos fornece o estoque de capital num dado instante t . Temos aqui o volume total de bens de capital de uma economia. Sua primeira derivada em relação ao tempo equivale à variação líquida $K'(t) = D(t) - U$, em que U indica o volume de equipamento industrial descartado, ou seja, fora de uso. Kalecki chama U de necessidade de reposição de capital. Na verdade, temos aí a ideia da depreciação, ou seja, os equipamentos industriais (bens tangíveis) perdem valor conforme o tempo passa e essas perdas devem ser calculadas segundo certos critérios³. Kalecki considera U constante durante o ciclo econômico. Segundo ele, o estoque de capital K flutua neste período ao redor de um estoque de capital médio, que ele chama de K_0 . Deve-se calcular U com base em K_0 . Entradas de novas máquinas na economia não terão influência no montante de U , já que estas máquinas terão vida útil maior que a duração do ciclo. Portanto, em cada tempo t , teremos U constante, pois foi calculado com base em K_0 . Se, nesse tempo t , $D(t) > U$, teremos $K'(t) > 0$ e, portanto, K cresce. Se $D(t) < U$, então K estará decrescendo. Na Seção 3.5, será dado um exemplo do cálculo de U .

Por fim, Kalecki propõe uma função de investimento. A decisão de investir depende de dois fatores, a saber, da rentabilidade bruta P/K e da taxa de juros da economia, que será denotada por i .

Em relação à taxa de juros i , é natural pensar que quanto maior seu valor, menores serão as encomendas de investimento. Isto se deve ao fato de que se o capitalista precisar tomar dinheiro em uma instituição financeira para realizar as encomendas, este dinheiro terá um custo muito alto, fazendo-o, provavelmente, recuar. Além disso, se a taxa de juros i estiver muito alta, será mais vantajoso para o capitalista que possui recursos próprios deixá-los aplicados em bancos do que gastá-los em encomendas de investimento. Contrariamente, se i for baixa, temos um cenário propício às encomendas.

Em relação à rentabilidade bruta P/K , se esta aumentar, então P subirá numa proporção maior que K . Isto significará que os capitalistas estão extraindo maiores lucros (tomados coletivamente) em relação ao capital existente na economia. Sendo assim, suas expectativas de renda aumentarão e, pelo princípio da demanda efetiva, eles decidirão realizar suas encomendas de investimento.

Contudo, Kalecki nos diz que esses fatores não influenciam diretamente I (volume de encomendas) mas a razão I/K , ou seja, seu nível relativo ao estoque de capital. Quando P/K aumenta, I aumenta, provavelmente, na mesma proporção que P , aumentando o quociente I/K . Quanto à taxa de juros i , quanto maior seu valor menores serão I , como foi visto, reduzindo I/K .

Assim,

$$\frac{I}{K} = f\left(\frac{P}{K}, i\right),$$

ou seja, o quociente I/K pode ser visto como uma função de P/K e i ; f é uma função crescente de P/K e decrescente de i .

Nesse ponto, Kalecki faz uma simplificação ao supor que a taxa de juros acompanha o crescimento ou o decrescimento de P/K . Assim, i (taxa de juros) é pró-cíclica, subindo lentamente durante a recuperação e caindo lentamente durante a recessão. Daí, pode-se

³No Brasil, é necessário seguir os critérios estabelecidos pela Receita Federal no Regulamento do Imposto de Renda de 1999 (RIR/1999).

estipular que o quociente I/K depende somente de P/K , escrevendo-o como

$$\frac{I}{K} = F\left(\frac{P}{K}\right), \quad (3.6)$$

sendo F uma função real crescente de uma variável real.

Segue de (3.5) que P é diretamente proporcional a $(B_0 + A)$. Portanto, podemos reescrever (3.6) como

$$\frac{I}{K} = \phi\left(\frac{B_0 + A}{K}\right), \quad (3.7)$$

sendo ϕ uma função real de uma variável real.

Assumindo que ϕ é uma função afim e crescente, a equação (3.7) pode ser reescrita como:

$$\frac{I}{K} = m\left(\frac{B_0 + A}{K}\right) - n, \quad (3.8)$$

em que m e n são constantes positivas. A constante m deve ser positiva dado que ϕ é crescente. Quanto a n , Kalecki assume que o investimento chega próximo de 0 quando a taxa de lucro cai para um mínimo determinado, implicando $n > 0$. Nesse caso, teremos uma condição fundamental para que o ciclo econômico ocorra. Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.8) por K , obtemos

$$I = m(B_0 + A) - nK. \quad (3.9)$$

Notemos que as encomendas de investimento crescem quando a expansão de capital A aumenta, mas decresce quando o estoque de capital é alto.

A equação (3.9) possibilitou, por parte de Kalecki, o estabelecimento de uma equação diferencial funcional com retardamento para $I(t)$.

Temos até aqui as seguintes relações:

$$D(t) = I(t - \theta), \quad (3.10)$$

$$A(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t I(r) dr, \quad (3.11)$$

$$K'(t) = D(t) - U \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t). \quad (3.13)$$

Derivando (3.11) e (3.13) em relação a t , temos:

$$A'(t) = \frac{I(t) - I(t - \theta)}{\theta} \quad \text{e} \quad (3.14)$$

$$I'(t) = mA'(t) - nK'(t). \quad (3.15)$$

De (3.10) e (3.12) segue que

$$K'(t) = I(t - \theta) - U. \quad (3.16)$$

Por (3.14), (3.15) e (3.16), obtemos

$$I'(t) = m \left[\frac{I(t) - I(t - \theta)}{\theta} \right] - n[I(t - \theta) - U]. \quad (3.17)$$

Chamemos de $J(t) = I(t) - U$, uma função que se refere ao desvio do volume de encomendas de investimento em relação à necessidade de reposição do capital (U). Aqui, façamos uma interpretação acerca dessa função. Sabemos que $I(t)$ representa o volume de encomendas de máquinas e equipamentos no instante t e U representa a demanda por restauração de equipamentos. Conforme o valor de $J(t)$, podemos inferir a situação da economia nesse instante. Caso $J(t)$ seja maior que 0, então as encomendas de investimento superarão a necessidade de reposição e, portanto, a expectativa futura é que haverá mais máquinas entrando na economia do que o número delas saindo pelo desgaste. No caso em que $J(t) < 0$, a queda das encomendas abaixo da reposição do capital terá como consequência uma entrada menor de novas máquinas no ambiente econômico do que a quantidade delas descartada pelo excessivo uso. Por fim, denotando $J(t) = I(t) - U$, a equação (3.17) fica assim expressa:

$$J'(t) = \frac{m}{\theta}[J(t) - J(t - \theta)] - n[J(t - \theta)], \quad (3.18)$$

haja vista que $J'(t) = I'(t)$. A equação (3.18), por sua vez, pode ser reescrita como

$$J'(t) = \frac{m}{\theta}J(t) - \left(\frac{m + \theta n}{\theta}\right)J(t - \theta), \quad t \geq 0, \quad (3.19)$$

que é uma equação diferencial funcional com retardamento, linear com coeficientes constantes. Lembremos que m e n são constantes positivas, θ é um retardo positivo dado (período de gestação dos investimentos).

A solução da EDFR (3.19), sujeita a uma função inicial ψ no intervalo $[-\theta, 0]$, possibilitar-nos-á expressar $J(t)$ como uma função de t e descobrir quais são as flutuações cíclicas endógenas em um sistema econômico.

Portanto, Kalecki explica a dinâmica do ciclo econômico por meio da inserção da defasagem de tempo na função de investimento. Para mais informações sobre o modelo descrito nesta seção, indicamos ao leitor as referências [18, 21, 22].

O próximo passo é resolver a EDFR (3.19) e com a solução em mãos analisar um caso particular. Antes disso, como o modelo tem o objetivo de perceber flutuações cíclicas, a próxima seção abordará como é o funcionamento do ciclo econômico.

3.4 Funcionamento do ciclo econômico

O Princípio da Demanda Efetiva nos diz que a decisão de gastar por parte dos capitalistas reside na expectativa de venda (realização da produção). O empresário determina seu nível de produção de acordo com a quantia que espera vender. Se há um otimismo, o investimento aumenta e se a expectativa se confirmar, novos investimentos acontecem. Na verdade, um aumento das encomendas de investimento I gera um aumento na produção de bens de capital A (máquinas, equipamentos etc) e isto, por sua vez, estimula novas encomendas, como mostra a equação $I = m(B_0 + A) - nK$. Observemos que estamos numa fase economicamente próspera do ciclo. Em um determinado momento, haverá um aumento de K e isto gera um efeito negativo sobre a rentabilidade de I . Diminuem-se, assim, as encomendas de investimento e começa a fase economicamente decadente do ciclo.

Portanto, o ciclo de Kalecki é causado pelo papel duplo do investimento que, ao mesmo tempo em que gera demanda por bens de capital e estimula novos investimentos, também aumenta o estoque de capital K , afetando a rentabilidade e diminuindo o volume de

novos investimentos. Kalecki, em 1933, expande essa análise baseada na modelagem, ao decompor o ciclo em 4 fases: recuperação, expansão, recessão e depressão.

Vejamos uma caracterização rápida sobre cada fase do ciclo econômico.

- ▷ A **recuperação** é a fase do ciclo durante a qual as encomendas de investimento excedem o nível da necessidade de reposição U . Sendo assim, $I(t) > U$, o que nos leva a concluir que $J(t) > 0$ (ver esta função definida no final da Seção 3.3). Como há um período de gestação (θ), o estoque de capital (K) ainda não começou a crescer, pois as entregas de novos equipamentos ainda são menores do que as necessidades de reposição. Assim, $K'(t) < 0$, pois $D(t) < U$. Sendo assim, a produção de bens de capital (A) cresce mas K ainda está diminuindo.
- ▷ Na **expansão**, vemos que um aumento de A (expansão dos bens de capital) promove um aumento de I , conforme mostra a equação $I = m(B_0 + A) - nK$. Continuamos com grandes volumes de encomendas de investimento, com estas excedendo o nível das necessidades de reposição U . Sendo assim, $I(t) > U$ e, portanto, temos novamente $J(t) > 0$. Após o período médio de entrega θ , o estoque de capital K começa a crescer, pois $K' > 0$, já que $D(t) > U$.
- ▷ Na **recessão**, as encomendas de investimento estão abaixo do nível necessário para cobrir a demanda por reposição do capital e, assim, $I(t) < U$, o que faz com que $J(t)$ seja negativo. Porém, as entregas $D(t)$ ainda superam U e, assim, $K' > 0$, já que $K'(t) = D(t) - U$.
- ▷ Na **depressão**, as encomendas de investimento caem acentuadamente, ficando abaixo do nível de U e, assim, $J(t) < 0$. Como na fase anterior $I(t) < U$ e o período de gestação é θ , segue que, nesta fase, $D(t) < U$ e, portanto, $K' < 0$, ou seja, o estoque de capital K decresce na economia.

Notemos que $J(t) > 0$ na recuperação e expansão e $J(t) < 0$ na recessão e depressão. Notemos também que na expansão e na recessão o estoque de capital K cresce. Esse crescimento, como vimos, irá diminuir a rentabilidade de I . Com isso, as encomendas de investimento vão caindo e esse efeito é capturado pela equação $I = m(B_0 + A) - nK$. Isso, segundo Kalecki, logo promove a retomada da produção, levando o ciclo à recuperação. Talvez fique mais claro, nesse momento, o porquê a defasagem temporal leva a dinâmica da economia a flutuações cíclicas.

Assim, a atividade de investimento não se estabiliza nem a um nível que excede as necessidades de reposição (U), nem a um nível inferior. Daí, se conclui que ela nunca se ajusta ao nível desejado da capacidade produtiva instalada, ou seja, a economia nunca alcança o equilíbrio.

Em suma, no modelo de ciclo econômico de Kalecki, o principal componente é o investimento que é impulsionado pelo princípio da demanda efetiva. Seu papel duplo promoverá as flutuações cíclicas inerentes ao sistema.

Para mais informações sobre o funcionamento do ciclo econômico, indicamos ao leitor interessado a referência [19].

3.5 Solução da EDFR do modelo de Kalecki

Como vimos na Seção 3.3, as ideias de Kalecki sobre a dinâmica do sistema econômico levaram a uma equação diferencial funcional com retardamento linear e com coeficientes

constantes. Submetendo a equação (3.19) a uma função inicial ψ no intervalo $[-\theta, 0]$, com $\theta > 0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} J'(t) = \frac{m}{\theta}J(t) - \left(\frac{m + \theta n}{\theta}\right)J(t - \theta), & t \in [0, +\infty), \\ J_0(t) = \psi(t), & t \in [-\theta, 0]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Ao resolver o PVI (3.20), nosso objetivo será encontrar J , que é a função desconhecida. Lembremos que m e n são constantes positivas e θ é o período de gestação dos investimentos (retardo positivo).

Como mencionamos no final da Seção 3.1, o modelo elaborado por Kalecki para explicar os ciclos econômicos permitiu estudos sobre os modos de resolução de PVI's com EDFR's lineares de primeira ordem. Como ψ (função inicial) não foi especificada, não faremos uso, neste momento, do Método dos Passos para resolver o PVI (3.20). Sendo assim, utilizaremos as ideias de Kalecki entremeadas com explicações e comentários objetivando tornar algumas passagens mais claras. Na seção seguinte, a última do capítulo, tomaremos uma função inicial e, assim, resolveremos um PVI pelo método dos passos explicado na Seção 2.1 do Capítulo 2. Vamos, então, iniciar a resolução fazendo uma mudança na escala temporal.

Consideraremos

$$r = \frac{t}{\theta} \quad \text{e} \quad J(t) = x\left(\frac{t}{\theta}\right).$$

Desse modo,

$$J'(t) = \frac{1}{\theta}x'\left(\frac{t}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}x'(r) \quad \text{e} \quad J(t - \theta) = x\left(\frac{t - \theta}{\theta}\right) = x\left(\frac{t}{\theta} - 1\right) = x(r - 1). \quad (3.21)$$

Para simplificar, denotemos $a = m + \theta n$. Assim, por (3.21) vemos que o PVI (3.20) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta}x'(r) = \frac{m}{\theta}x(r) - \frac{a}{\theta}x(r - 1), & r \in [0, +\infty), \\ x_0(r) = \psi(r), & r \in [-1, 0], \end{cases}$$

ou equivalentemente como

$$\begin{cases} x'(r) = mx(r) - ax(r - 1), & r \in [0, +\infty), \\ x_0(r) = \psi(r), & r \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (3.22)$$

A EDFR dada em (3.22) é linear, como vimos na Seção 2.1. Quando nos deparamos com uma EDO do tipo $x'(t) = mx(t)$, sabemos que a solução $x(t)$ é uma função exponencial da forma ke^{mt} (com $k \neq 0$ neste contexto), pois esta é uma função que ao ser derivada nos fornece ela mesma multiplicada pela constante m .⁴ No caso de nosso problema, temos uma situação parecida para $x'(r)$. Porém, agora, $x'(r)$ é igual a uma subtração da função $x(r)$ em momentos distintos multiplicados por suas respectivas constantes, a saber, m e a . Sendo assim, podemos fazer duas observações, as quais estão expressas a seguir.

- (i) A solução procurada não pode ser mais ke^{mr} , pois $(ke^{mr})' \neq kme^{mr} - ake^{m(r-1)}$, salvo se $a = 0$. Mas $a = 0$ não pode ocorrer, visto que m, n e θ são constantes maiores que zero.

⁴Para constatar tal fato, basta utilizar o método da separação de variáveis em $x'(t) = mx(t)$ para encontrar como solução a função $x(t) = ke^{mt}$.

- (ii) Devido à linearidade da equação (3.22), devemos procurar soluções exponenciais da forma $x(r) = ke^{\rho r}$, com ρ real ($\rho \neq m$) ou complexo. Para explicar tal escolha, pensemos nas EDO's. Não podemos tomar $x'(r) = ke^{\rho r}$ como tentativa de solução para qualquer EDO, mas somente para as lineares homogêneas com coeficientes constantes. Uma razão para tal fato é que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra⁵, um polinômio de grau n tem n raízes (incluindo multiplicidades). Quando assumirmos que $ke^{\rho r}$ é solução, temos como consequência uma equação característica que é polinomial de grau n e, portanto, tem n valores para ρ (incluindo multiplicidades). Sendo assim, conseguiremos n soluções linearmente independentes que formarão um subespaço vetorial no qual estarão todas as soluções da EDO, ou seja, teremos, nesse espaço, todas as combinações lineares que serão soluções da EDO. Voltando para a nossa EDFR, vemos que $x'(r) - mx(r) + ax(r-1) = 0$ é uma EDFR linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes. Assim, a exemplo das EDO's com estas características, escolhemos $x(r) = ke^{\rho r}$ como tentativa de solução.

Sendo assim, substituindo a função $x(r) = ke^{\rho r}$ na equação (3.22), obtemos

$$\rho ke^{\rho r} = mke^{\rho r} - ake^{\rho(r-1)}. \quad (3.23)$$

Dividindo ambos os membros da equação (3.23) por $ke^{\rho r}$, já que $ke^{\rho r} \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\rho - m + ae^{-\rho} = 0. \quad (3.24)$$

A equação (3.24) é chamada equação característica da equação (3.22), cuja solução é $\rho = m - ae^{-\rho}$. Notemos que, diferentemente das EDO's lineares homogêneas com coeficientes constantes, a equação característica não é polinomial. Trata-se de uma equação transcendental⁶. Como ρ é raiz de (3.24), segue que $x(r) = ke^{\rho r}$ satisfaz $x'(r) = mx(r) - ax(r-1)$.

Busquemos soluções da equação característica (3.24) em $\mathbb{C}$. Logo, tomemos ρ como $\rho = \beta + i\alpha$, em que β e α são números reais. Como $\rho = m - ae^{-\rho}$, então

$$\beta + i\alpha = m - ae^{-\beta}e^{-i\alpha}. \quad (3.25)$$

Sabemos que $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ pela fórmula de Euler. Então, a equação (3.25) pode ser reescrita como:

$$\beta + i\alpha = m - ae^{-\beta}(\cos \alpha - i \sin \alpha). \quad (3.26)$$

Comparando as partes real e imaginária de (3.26), chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \beta = m - ae^{-\beta} \cos \alpha \\ \alpha = ae^{-\beta} \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.27)$$

⁵O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não constante de grau n possui n raízes complexas, não necessariamente todas distintas.

⁶Uma equação transcendental é uma equação que envolve funções transcendentais, ou seja, funções que não podem ser expressas como combinações finitas de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação). Exemplos típicos de funções transcendentais são as funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e suas inversas. Ao contrário das equações algébricas (que envolvem polinômios), as equações transcendentais geralmente não podem ser resolvidas por métodos analíticos. Em muitos casos, é necessário recorrer ao cálculo numérico para obter uma solução. Como exemplos de equações transcendentais, podemos citar $x + 1 = \lg x$; $e^x = x$; $x \ln(x) = 10$.

Portanto, buscaremos soluções para o sistema (3.27) com α e β reais. Para tanto, consideraremos três casos, a saber, quando $\alpha = 0$, quando $\beta = 0$ e quando $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Caso 1. $\alpha = 0$.

Neste caso, teremos que ρ é um número real. Como estamos buscando $x(r) = ke^{\rho r}$ para a solução da EDR (3.22), segue que a solução será puramente exponencial. Assim,

$$\beta = m - ae^{-\beta} \cos 0 \Rightarrow \beta = m - ae^{-\beta} \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{-m + \beta}{-a} \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{m - \beta}{a}.$$

Lembremos que m , n e θ são constantes maiores do que zero. Como $a = m + \theta n$, temos $a > 0$ e $a > m$.

Denotemos

$$f(\beta) = e^{-\beta} + \frac{\beta - m}{a}.$$

Como queremos encontrar β , devemos achar as raízes da função f . Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} f(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^{-\beta} + \frac{\beta - m}{a} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^{-\beta} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\beta - m}{a} = 0 + \infty = +\infty \\ \lim_{\beta \rightarrow -\infty} f(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{-\beta} + \frac{\beta - m}{a} = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{-\beta} \left[1 + \left(\frac{\beta - m}{a} \right) e^{\beta} \right] = +\infty, \end{aligned} \quad (3.28)$$

posto que

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{-\beta} \left[1 + \left(\frac{\beta - m}{a} \right) e^{\beta} \right] &= \left(\lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{-\beta} \right) \cdot \left(\lim_{\beta \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left(\frac{\beta - m}{a} \right) e^{\beta} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} +\infty \cdot 1 = +\infty. \end{aligned}$$

Em (*) usamos que

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left(\frac{\beta - m}{a} \right) e^{\beta} = 0,$$

cujo cálculo pode ser feito usando a Regra de L'Hôpital.

Portanto, f possui um ponto de mínimo β_0 , o qual podemos encontrar por meio da relação $f'(\beta) = 0$, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Assim,

$$f'(\beta) = -e^{-\beta} + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow e^{-\beta} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow -\beta = \ln \left(\frac{1}{a} \right) \Rightarrow \beta_0 = \ln a.$$

Portanto,

$$\gamma = f(\ln a) = \frac{1}{a} + \frac{\ln a - m}{a}$$

é o valor mínimo da f , que pode ser positivo, zero ou negativo.

(C1) Se $\gamma > 0$, então f não terá raízes, uma vez que (3.28) ocorre.

(C2) Se $\gamma = 0$, então f terá uma única raiz, também em virtude de (3.28).

(C3) Se $\gamma < 0$, então f terá duas raízes distintas, em razão de (3.28), do Teorema do Valor Intermediário e do fato de que f' só se anula em $\beta_0 = \ln a$.

Note que o valor de γ dependerá dos valores de m e a . Vejamos, então, para quais valores de m e a a equação característica (3.24) tem uma única solução, duas soluções ou nenhuma solução, lembrando que estamos resolvendo o sistema já apresentado que veio da equação característica tomando ρ em $\mathbb{C}$. Para esta análise, consideremos

$$m - \ln a = \xi.$$

Observe que os casos distintos (C3), (C2) e (C1) ocorrem quando $\xi > 1$, $\xi = 1$ e $\xi < 1$, respectivamente.

Analisemos os três casos distintos:

(i) Consideremos $\xi = 1$, ou seja, o caso (C2).

Neste caso, $\ln a - m = -1$ e $f(\ln a) = 0$. Com isso, a equação característica tem uma única solução $\beta_0 = \ln a$ e $x_1(r) = k_1 e^{\beta_0 r}$ será uma solução da EDFR (3.22). Notemos que $x_2(r) = r k_2 e^{\beta_0 r}$ também é solução da equação (3.22). De fato,

$$\begin{aligned} x_2(r) = r k_2 e^{\beta_0 r} \text{ é solução de (3.22)} &\Leftrightarrow x_2'(r) = m x_2(r) - a x_2(r-1) \\ &\Leftrightarrow k_2 e^{\beta_0 r} + \beta_0 r k_2 e^{\beta_0 r} = m r k_2 e^{\beta_0 r} - a(r-1) k_2 e^{\beta_0(r-1)} \\ &\Leftrightarrow r k_2 e^{\beta_0 r} (\beta_0 - m + a e^{-\beta_0}) + k_2 e^{\beta_0 r} (1 - a e^{-\beta_0}) = 0. \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre porque

$$\beta_0 - m + a e^{-\beta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_0 = \ln a \Rightarrow 1 - a e^{-\beta_0} = 0.$$

Logo, para $\xi = 1$, $x_1(r) = k_1 e^{\beta_0 r}$ e $x_2(r) = r k_2 e^{\beta_0 r}$ são soluções da EDFR (3.22).

(ii) Consideremos, agora, $\xi > 1$, ou seja, o caso (C3).

Se $\xi > 1$, então $m - \ln a > 1$. Sendo assim, teremos um valor mínimo negativo para f e, esta terá, portanto, duas raízes distintas, que denotaremos por β e β' . Com isso, concluímos que a equação característica (3.24) tem duas soluções e, consequentemente, a EDFR (3.22) tem como soluções $x_1(r) = k_1 e^{\beta r}$ e $x_2(r) = k_2 e^{\beta' r}$.

(iii) Por fim, consideremos, $\xi < 1$, ou seja, o caso (C1).

Se $\xi < 1$, então $m - \ln a < 1$. Sendo assim, teremos um valor mínimo positivo para f e, esta, portanto, não terá raiz. Com isso, concluímos que a equação característica (3.24) não tem solução real. Nesse caso, a EDFR (3.22) não terá solução puramente exponencial.

Em suma, para $\alpha = 0$, de acordo com os valores de m e a , se $\xi \geq 1$ teremos soluções $x(r) = D_1 e^{\beta r} + D_2 e^{\beta' r}$ ou $x(r) = D_1 e^{\beta r} + D_2 r e^{\beta r}$. Notemos que para este último argumento, utilizamos o princípio da superposição de soluções, já que a EDFR considerada é linear.

Caso 2. $\beta = 0$.

Neste caso, a raiz ρ será puramente imaginária. Então, o sistema (3.27), que vem da equação característica (3.24), torna-se o seguinte:

$$\begin{cases} m = a \cos \alpha \\ \alpha = a \sin \alpha, \end{cases}$$

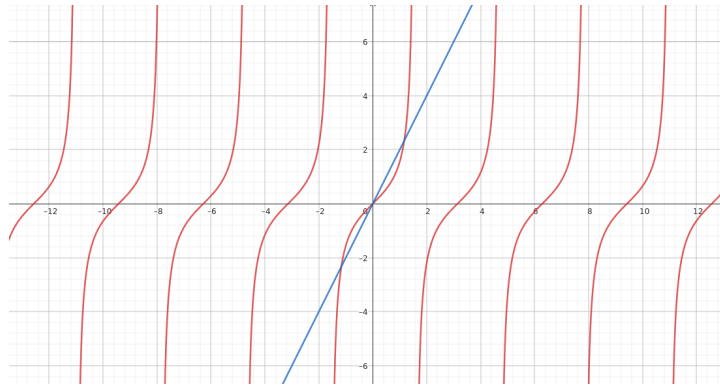
de onde extraímos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha}{m}.$$

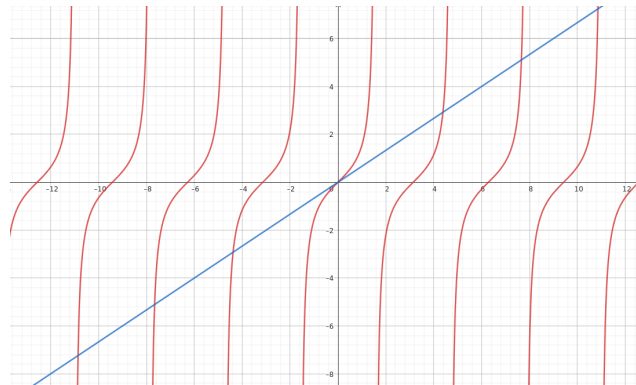
Note que se α é solução dessa equação, $-\alpha$ também é. Isso decorre do fato da função seno ser ímpar, ou seja, $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$. Assim, as soluções da equação característica (3.24) serão as interseções do gráfico da função $g(\alpha) = \tan \alpha$ com a reta $y = \alpha/m$, para cada intervalo $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podendo ser observadas na Figura 3.2.

Figura 3.2: Interseções do gráfico da função $g(\alpha) = \tan \alpha$ com a reta $y = \alpha/m$

(a) Interseções do gráfico da função $g(\alpha) = \tan \alpha$ com a reta $y = \alpha/m$, com $m < 1$ ($m = 0,5$).



(b) Interseções do gráfico da função $g(\alpha) = \tan \alpha$ com a reta $y = \alpha/m$, com $m > 1$ ($m = 1,5$).



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, neste caso, existem infinitas soluções para a equação (3.22), que são combinações lineares das soluções $x_{1k}(r) = e^{\alpha_k r} = \cos(\alpha_k r) + i \sin(\alpha_k r)$ e $x_{2k}(r) = e^{-\alpha_k r} = \cos(-\alpha_k r) + i \sin(-\alpha_k r) = \cos(\alpha_k r) - i \sin(\alpha_k r)$, ou seja, que podem ser escritas da forma

$$x_k(r) = A_k \cos \alpha_k r + B_k \sin \alpha_k r, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}, A_k, B_k \in \mathbb{C}. \quad (3.29)$$

Neste caso, observe que as soluções dadas por (3.29), associadas à EDFR (3.22), serão periódicas, uma vez que as funções seno e cosseno são periódicas.

Caso 3. Outras raízes ($\alpha, \beta \neq 0$).

De posse do sistema (3.27), temos

$$\beta = m - ae^{-\beta} \cos \alpha \quad (3.30)$$

e

$$\alpha = ae^{-\beta} \sin \alpha. \quad (3.31)$$

Vamos destacar duas igualdades decorrentes de (3.31) que nos serão úteis:

$$(i) \quad \frac{1}{e^{-\beta}} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \Rightarrow e^{\beta} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha};$$

$$(ii) \quad \frac{1}{e^{-\beta}} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{\alpha}{a \operatorname{sen} \alpha}.$$

De (3.30) e (ii), segue que

$$\beta = m - a \frac{\alpha}{a \operatorname{sen} \alpha} \cos \alpha \Rightarrow \beta = m - \alpha \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \ln e^{\beta} = m - \alpha \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Utilizando (i), obtemos

$$\ln \left(\frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) = m - \alpha \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \ln a + \ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) = m - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha},$$

de onde segue que

$$\ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = m - \ln a.$$

Consideremos novamente $m - \ln a = \xi$. Para determinar α , devemos resolver a equação

$$h(\alpha) = \xi$$

em $\mathbb{R}$, em que

$$h(\alpha) = \ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (3.32)$$

Portanto, os valores de α serão dados pela interseção do gráfico de h com a reta horizontal $y = \xi$.

Vamos analisar a função $h(\alpha)$. Como o domínio da função logaritmo natural é $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, devemos ter

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} > 0. \quad (3.33)$$

Isso ocorrerá nos intervalos

(I1) $(2j\pi, (2j+1)\pi)$, para j inteiro não-negativo e

(I2) $((2j+1)\pi, (2j+2)\pi)$, para j inteiro negativo.

Note que, nos intervalos do tipo descrito em (I2), $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\alpha < 0$, o que acarreta (3.33).

Além disso, temos na lei de formação de $h(\alpha)$ o termo $\alpha/\operatorname{tg} \alpha$. Devemos, então, excluir dos intervalos acima os valores de α nos quais a tangente é igual a 0 e os valores nos quais ela não está definida. Notemos que os referidos intervalos são abertos, o que já exclui os valores nos quais $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Resta-nos excluir os valores $\alpha = \pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Outro ponto a ser analisado é o que ocorre com a função h quando α se aproxima de 0. Para isso, devemos calcular o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\alpha) = \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)}_{(I)} + \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}_{(II)}.$$

Iniciemos analisando (I). Como $\ln$ é uma função contínua em $x = 1$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, segue que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = \ln \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = \ln 1 = 0.$$

Quanto ao limite (II), temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Assim, utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\tan \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 \alpha} = 1.$$

Portanto, $h(\alpha)$ se aproxima de 1 quando α se aproxima de 0.

Ademais, temos os seguintes limites laterais:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} h(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \ln \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) + \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\infty$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\pi^+} h(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\pi^+} \ln \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) + \lim_{\alpha \rightarrow -\pi^+} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\infty,$$

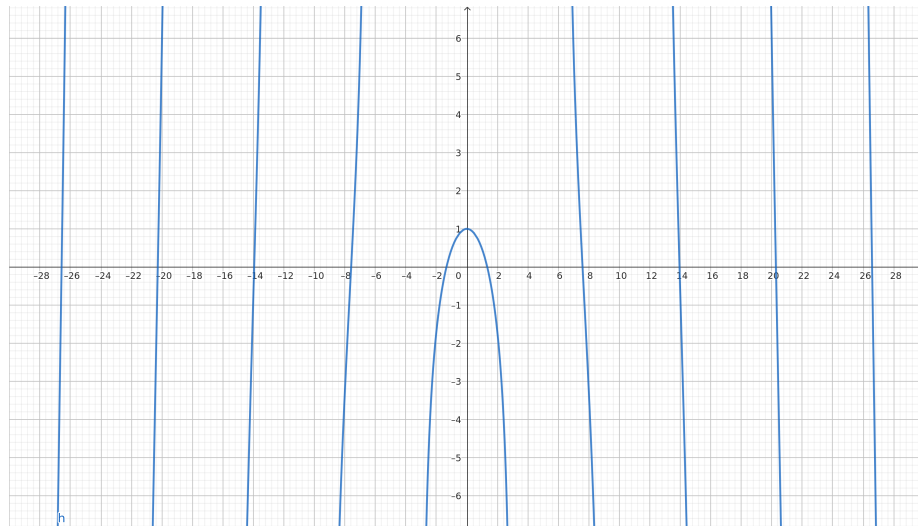
ou seja, quando α se aproxima de π pela esquerda, $h(\alpha)$ tende a menos infinito, bem como quando α se aproxima de $-\pi$ pela direita.

Portanto, nos intervalos $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$ a função tem como imagem o intervalo $(-\infty, 1)$. Para os outros intervalos para os quais α é positivo, quando α se aproxima do extremo esquerdo do intervalo pela direita, $h(\alpha)$ tende a $+\infty$ e quando α se aproxima do extremo direito pela esquerda, $h(\alpha)$ tende a $-\infty$. Por outro lado, para os outros intervalos nos quais α é negativo, quando α se aproxima do extremo direito pela esquerda, $h(\alpha)$ tende a $+\infty$ e quando α se aproxima do extremo esquerdo pela direita, $h(\alpha)$ tende a $-\infty$.

Para melhor compreensão do que foi exposto acima sobre os limites de $h(\alpha)$, consulte o Apêndice A.

A Figura 3.3 ilustra o comportamento da função h , descrito anteriormente.

Figura 3.3: Gráfico de h



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como vimos, obtemos a parte imaginária, α , da raiz da equação característica (3.24) por meio das interseções do gráfico de h com a reta horizontal $y = \xi = m - \ln a$. Resta-nos

determinar, para cada α obtido, a parte real, β , da raiz. Para isso, utilizemos a equação dada em (i).

Note que

$$e^\beta = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \Rightarrow \ln e^\beta = \ln \left(\frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) \Rightarrow \beta = \ln a + \ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right). \quad (3.34)$$

Mas sabemos que

$$\ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = m - \ln a \Rightarrow \ln \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) = m - \ln a - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (3.35)$$

Portanto, por (3.34) e (3.35), obtemos

$$\beta = \ln a + m - \ln a - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \beta = m - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Toda vez que encontramos α pela interseção de $h(\alpha)$ com a reta horizontal $y = \xi = m - \ln a$ temos um β correspondente. Como $h(\alpha)$ é uma função par, segue que o eixo das ordenadas funciona como um espelho e, assim, $-\alpha$ também será encontrado e para ele temos o mesmo valor de β , já que $\beta = m - \alpha/\operatorname{tg} \alpha$ e $\alpha/\operatorname{tg} \alpha$ é uma função par. Então, $\rho = \beta \pm i\alpha$ são raízes complexas da equação característica (3.24), tomando dois intervalos simétricos, em particular, definidos em (I1) e (I2). Se $\rho = \beta \pm i\alpha$ são raízes da equação característica, então $x_{11}(r) = k_1 e^{(\beta+i\alpha)r}$ e $x_{12}(r) = k_2 e^{(\beta-i\alpha)r}$ são soluções da EDR. Pelo princípio da superposição, temos

$$\begin{aligned} x_1(r) &= x_{11}(r) + x_{12}(r) \\ &= k_1 e^{\beta r} (\cos(\alpha r) + i \operatorname{sen}(\alpha r)) + k_2 e^{\beta r} (\cos(-\alpha r) + i \operatorname{sen}(-\alpha r)) \\ &= k_1 e^{\beta r} \cos(\alpha r) + k_1 e^{\beta r} i \operatorname{sen}(\alpha r) + k_2 e^{\beta r} \cos(\alpha r) - k_2 e^{\beta r} i \operatorname{sen}(\alpha r) \\ &= e^{\beta r} \cos(\alpha r) (k_1 + k_2) + e^{\beta r} i \operatorname{sen}(\alpha r) (k_1 - k_2). \end{aligned}$$

Fazendo $G = k_1 + k_2$ e $F = i(k_1 - k_2)$, obtemos

$$x_1(r) = e^{\beta r} (F \operatorname{sen}(\alpha r) + G \cos(\alpha r))$$

como solução da EDR (3.22).

Consideremos $y = \xi = m - \ln a < 1$. Neste caso, para cada par de intervalos simétricos definidos em (I1) e (I2), encontraremos α e $-\alpha$ e um β correspondente a estes valores da parte imaginária. Temos, portanto, uma infinidade de números complexos da forma $\rho_k = \beta_k \pm i\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, que serão raízes da equação característica. Novamente, pelo princípio da superposição, a solução da EDR é dada pela soma das soluções correspondentes a todas as raízes $\beta_k \pm i\alpha_k$ da equação característica, ou seja, temos como solução a função

$$\begin{aligned} x(r) &= e^{\beta_0 r} (F_0 \operatorname{sen}(\alpha_0 r) + G_0 \cos(\alpha_0 r)) + e^{\beta_1 r} (F_1 \operatorname{sen}(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)) \\ &\quad + e^{\beta_2 r} (F_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 r) + G_2 \cos(\alpha_2 r)) + e^{\beta_3 r} (F_3 \operatorname{sen}(\alpha_3 r) + G_3 \cos(\alpha_3 r)) + \dots \end{aligned}$$

Observemos que há uma solução cíclica para cada par de intervalos simétricos com período determinado por $T = 2\pi\theta/\alpha$. Notemos que para o primeiro par de intervalos simétricos, o período é maior que 2θ , pois $\alpha \in (0, \pi)$ e $-\alpha \in (-\pi, 0)$ (para efeito do cálculo do período sempre se considera o valor positivo de α). Nas outras situações, o período T é menor que θ , já que $\alpha > 2\pi$ e $-\alpha < -2\pi$.

Concluimos, então, que para $\xi < 1$ a solução $x(r)$ é uma soma de funções cíclicas com exatamente uma exibindo um ciclo maior que 2θ e todas as outras com ciclo menor que θ .

Consideremos, agora, $y = \xi = m - \ln a > 1$. Neste caso, não existe valor de α no primeiro par de intervalos simétricos, a saber, $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$, pois não há interseção entre $h(\alpha)$ e a reta horizontal $y = \xi$. Notemos que nos outros pares de intervalos simétricos, encontramos os valores α_k e $-\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$, o que nos leva a concluir que $\rho_k = \beta_k \pm i\alpha_k$ são raízes da equação característica e, então, uma solução cíclica com período menor que θ se faz presente para cada par de intervalos simétricos. O mesmo fato se observa quando $\xi = 1$. Portanto, para $\xi \geq 1$, a solução de (3.22), pelo princípio da superposição, será uma soma de funções cíclicas também. A diferença em relação a $\xi < 1$ é que, agora, não há uma função cíclica na soma cujo período é maior do que 2θ , pois não há interseção de $h(\alpha)$ e $\xi = m - \ln a$ nos intervalos simétricos $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$.

Com tudo que foi exposto, será que podemos afirmar que para $\xi \geq 1$ e $\xi < 1$ há a ocorrência de variações cíclicas no sistema econômico?

Já vimos que se ρ é raiz da equação característica (3.24), então $x(r) = ke^{\rho r}$ é solução da EDFR (3.22). O caso 3 ($\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$) mostrou que há infinitas raízes complexas de (3.24) e, portanto, a solução da EDFR pode ser representada como uma soma de funções cíclicas. Isso ocorre para $\xi \geq 1$ e $\xi < 1$. Contudo, vimos após a análise do caso 1, a saber, quando $\alpha = 0$, que a equação característica também pode apresentar raízes reais. Naquele momento, vimos que $\xi > 1$ determinava a existência de duas raízes reais para a equação característica e, assim, uma solução da EDFR era da forma $x(r) = k_1e^{\beta r} + k_2e^{\beta' r}$. Para $\xi = 1$, observamos a existência de uma raiz real da equação característica e, assim, uma solução da EDFR era da forma $x(r) = k_1e^{\beta r} + k_2re^{\beta r}$. Portanto, para $\xi > 1$, $x(r)$ é a soma de duas exponenciais com expoentes diferentes e, para $\xi = 1$, $x(r)$ é a soma de uma exponencial pura com ela mesma multiplicada por r . Quando $\xi < 1$, o caso 1 mostrou que não havia raízes reais da equação característica. Pelo princípio da superposição temos, agora, as seguintes possibilidades:

- Para $\xi > 1$, a solução $x(r)$ da EDFR (3.22) é escrita como

$$x(r) = k_1e^{\beta r} + k_2e^{\beta' r} + e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)) \\ + e^{\beta_2 r}(F_2 \sin(\alpha_2 r) + G_2 \cos(\alpha_2 r)) + e^{\beta_3 r}(F_3 \sin(\alpha_3 r) + G_3 \cos(\alpha_3 r)) + \dots$$

- Para $\xi = 1$, a solução $x(r)$ da EDFR (3.22) é escrita como

$$x(r) = k_1e^{\beta r} + k_2re^{\beta r} + e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)) \\ + e^{\beta_2 r}(F_2 \sin(\alpha_2 r) + G_2 \cos(\alpha_2 r)) + e^{\beta_3 r}(F_3 \sin(\alpha_3 r) + G_3 \cos(\alpha_3 r)) + \dots$$

- Para $\xi < 1$, a solução $x(r)$ da EDFR (3.22) é escrita como

$$x(r) = e^{\beta_0 r}(F_0 \sin(\alpha_0) + G_0 \cos(\alpha_0 r)) + e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)) \\ + e^{\beta_2 r}(F_2 \sin(\alpha_2 r) + G_2 \cos(\alpha_2 r)) + e^{\beta_3 r}(F_3 \sin(\alpha_3 r) + G_3 \cos(\alpha_3 r)) + \dots$$

Notemos que, para $\xi \geq 1$, é necessário levar em conta a presença do termo puramente exponencial. Tal termo é dominante e, portanto, ocorre a ausência de variações cíclicas no sistema econômico. Para $\xi < 1$, $x(r)$ é soma somente de funções cíclicas. Esta é, portanto, a única situação em que há a ocorrência de variações cíclicas.

Um detalhe importante a ser discutido diz respeito à determinação dos parâmetros m , n e θ . Vimos na Seção 3.3 que θ é o período de gestação das encomendas de investimento.

A coleta de dados estatísticos sobre os tempos de execução delas nos permite determinar θ como um tempo médio que leva para uma encomenda ser finalizada. Sabemos também, ainda pela Seção 3.3, que $I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t)$ expressa a quantidade de encomendas de investimento por unidade de tempo. Pela coleta de dados estatísticos, conseguimos o número de encomendas de investimento $I(t)$ em diversos momentos, bem como a quantidade delas em curso de produção, $A(t)$. Uma coleta mais específica permite-nos saber o total de máquinas e equipamentos na economia, $K(t)$. A determinação de B_0 vem da coleta de informações sobre alguns dados econômicos (veremos um exemplo da determinação de B_0 mais adiante nesta mesma seção). Dessa forma, a determinação de m e n parece possível pela definição de $I(t)$. De posse de m , n e θ , temos um valor para $a = m + \theta n$. Com isso, seremos capazes de determinar o valor de ξ e saberemos, portanto, se haverá flutuações cíclicas no sistema econômico.

Vamos, agora, dar ênfase à situação em que $\xi = m - \ln a = m - \ln(m + \theta n) < 1$. Nesta, vimos que a solução da EDFR é uma soma de funções cíclicas sem a ocorrência de funções puramente exponenciais.

Os valores de F_k e G_k dependem da forma da função inicial $x_0(r) = \psi(r)$ em $[-1, 0]$ do PVI (3.22). Mesmo que a função inicial seja desconhecida, podemos observar que $x(r)$ será uma função que representará flutuações cíclicas no sistema econômico. Contudo, $x(r)$ nessa forma não nos permite afirmar coisa alguma sobre o período do ciclo econômico, já que cada função que compõe $x(r)$ tem um período diferente devido aos diferentes valores de α . A fim de melhorar nossa análise, vamos ordenar os β'_k s de maneira decrescente. Assim, para um tempo t suficientemente distante do intervalo inicial (não esquecer que $r = t/\theta$), o termo $e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r))$ é o maior, pois ordenamos os β'_k s de forma decrescente. Então, dividindo $x(r)$ por este termo, teremos

$$\frac{x(r)}{e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r))} = 1 + \omega,$$

no qual ω representa um erro pequeno. De fato, notemos que, como $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots$, então ω será igual a termos com a exponencial elevada a $(\beta_k - \beta_1)r$, com $k \neq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, o que significa que a exponencial será elevada a um valor negativo. Para um tempo t suficientemente grande, segue que estes termos serão muito pequenos, justificando o fato de que ω é um erro que pode ser descartado.

Portanto, podemos expressar a solução da EDFR (3.22) como

$$x(r) = e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)).$$

Notemos que, agora, há informação sobre o período das oscilações, pois temos α_1 que pode estar em qualquer intervalo ((I1)) e ((I2)). Também saberemos se as amplitudes das oscilações serão crescentes ($\beta > 0$), decrescentes ($\beta < 0$) ou constantes ($\beta = 0$). Essas considerações foram possíveis mesmo sem sabermos a expressão da função inicial. Basta que saibamos os valores dos parâmetros m , n , θ e a .

Em conclusão, caso $\xi = m - \ln a < 1$, teremos oscilações cíclicas no sistema e a solução da EDFR (3.22) é da forma

$$x(r) = e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r)).$$

Assim, pode-se estudar seu comportamento. Quando $\xi = m - \ln(m + \theta n) < 1$, o período e a taxa de crescimento/decrescimento não dependerão mais da forma da função x (ou J) no intervalo inicial. Logo, os parâmetros m e n da função investimento

$$I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t),$$

bem como θ (retardo temporal), determinarão o período de oscilação e a taxa de progressão/regressão da amplitude das oscilações. Por outro lado, quando os parâmetros são tais que $\xi = m - \ln(m + \theta n) \geq 1$, é necessário levar em conta a presença do termo puramente exponencial. Assim, podemos dizer que para esses valores de parâmetros, tal termo é dominante e, portanto, ocorre a ausência de variações cíclicas no sistema.

Vamos, agora, refinar a análise da solução $x(r) = e^{\beta_1 r}(F_1 \sin(\alpha_1 r) + G_1 \cos(\alpha_1 r))$.

Como $x(r) = x(t/\theta) = J(t)$, então

$$J(t) = e^{\beta_1 \frac{t}{\theta}} \left(F_1 \sin \left(\alpha_1 \frac{t}{\theta} \right) + G_1 \cos \left(\alpha_1 \frac{t}{\theta} \right) \right). \quad (3.36)$$

Assumindo que $J(0) = 0$ ⁷, temos $G_1 = 0$ e, portanto, a equação (3.36) pode ser reescrita como

$$J(t) = e^{\beta_1 \frac{t}{\theta}} F_1 \sin \left(\alpha_1 \frac{t}{\theta} \right). \quad (3.37)$$

Lembremos que $J(t) = I(t) - U$ se refere ao desvio do volume de encomendas de investimento (I) em relação à necessidade de reposição do capital (U). Portanto, de (3.37) segue que

$$I(t) - U = e^{\beta_1 \frac{t}{\theta}} F_1 \sin \left(\alpha_1 \frac{t}{\theta} \right). \quad (3.38)$$

A equação (3.38) nos permite afirmar que o período das oscilações depende de α_1 , pois $T = 2\pi\theta/\alpha_1$, e a amplitude das oscilações depende de $e^{\beta_1 \frac{t}{\theta}} F_1$.

Segundo Kalecki, após constatações de oscilações cíclicas históricas, um caso aparece como sendo de grande importância, a saber, o caso em que a amplitude das flutuações permanece constante. Embora a realidade não mostre a existência de uma regularidade perfeita na intensidade das oscilações, o que é de se esperar, pois ele está modelando decisões humanas (decisões de investimento), ele o trata como a condição mais próxima da realidade. Assim, o valor de β_1 na equação (3.38) é próximo de zero. Kalecki, então, faz uma suposição considerando-o como igual a zero. Portanto, (3.38) se torna:

$$I(t) - U = F_1 \sin \left(\alpha_1 \frac{t}{\theta} \right), \quad (3.39)$$

em que F_1 é a amplitude constante.

Como $\beta_1 = 0$, voltemos ao sistema (3.27) com $\beta_1 = 0$ e α_1 :

$$\begin{cases} 0 = m - ae^0 \cos \alpha_1 \\ \alpha_1 = ae^0 \sin \alpha_1, \end{cases}$$

de onde obtemos as relações

$$\cos \alpha_1 = \frac{m}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_1 = \frac{m}{m + \theta n}, \quad (3.40)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{m + \theta n}. \quad (3.41)$$

⁷Para que $J(0) = 0$, devemos ter $I = U$ em $t = 0$. Em qualquer ciclo, teremos momentos em que $J(t) = 0$. A suposição $J(0) = 0$ se explica por uma translação em t unidades do gráfico que representa o ciclo. Isso não trará efeito algum para a duração do ciclo. O benefício de tal suposição foi eliminar o termo do cosseno, já que $G_1 = 0$.

Como $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha$, segue de (3.40) e (3.41) que

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{m} \Rightarrow m = \frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (3.42)$$

Lembremos que os parâmetros m e n estão relacionados pela equação (3.13), a saber, $I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t)$. Lembremos também das (3.10), (3.11) e (3.12), a saber,

$$D(t) = I(t - \theta),$$

$$A(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t I(r) dr \quad \text{e}$$

$$K'(t) = D(t) - U$$

A partir dessas relações, como a amplitude do ciclo é constante, Kalecki [18] estabelece uma média de I , A e D ao redor da qual eles oscilariam. Essa média foi estabelecida pelo valor de U . Kalecki também estabelece que K_0 é a constante em torno da qual K está flutuando, igual ao volume médio dos equipamentos industriais K durante um ciclo. Assim, fazendo $I(t) = A(t) = D(t) = U$ e $K(t) = K_0$, a equação do investimento $I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t)$ pode ser reescrita como:

$$U = m(B_0 + U) - nK_0 \Rightarrow nK_0 = mB_0 + mU - U,$$

de onde se obtém

$$n = (m - 1) \frac{U}{K_0} + m \frac{B_0}{K_0}. \quad (3.43)$$

Temos, então, que procurar os valores de U/K_0 e B_0/K_0 para determinarmos m e n . Assim, saberemos a duração do ciclo, pois encontraremos α . Mais uma vez, constataremos a importância da obtenção de dados empíricos para a determinação dos parâmetros m e n . Inicialmente, Kalecki utilizou dados estatísticos do Instituto Alemão para Pesquisa Econômica para determinar o período de gestação θ em 0,6 ano. Para determinar U/K_0 e B_0/K_0 , combinou dados da Alemanha e dos Estados Unidos das décadas de 10 e 20. Assim, Kalecki chegou aos valores 0,05 e 0,13 para U/K_0 e B_0/K_0 , respectivamente. Para ficar mais clara a determinação de tais valores, pensemos, primeiramente, em U/K_0 . Nesse momento, será construído um exemplo hipotético. Vamos supor que $K_0 = 1.200.000$ máquinas, ou seja, este é o volume médio de bens de capital no exemplo presente na economia. Vamos supor que a vida média útil das máquinas seja de 15 anos. Com isso, estamos em condições de determinar U cujo valor é obtido dividindo K_0 por 15. Temos, então, que

$$U = \frac{1.200.000}{15} = 80.000,$$

ou seja, 80.000 máquinas deixam de operar na economia pelo desgaste por unidade de tempo. Sendo assim,

$$\frac{U}{K_0} = \frac{80.000}{1.200.000} = 0,0666.$$

Concluimos, então, que todo ano se faz necessária a reposição dessa quantidade de máquinas, ou seja, é preciso repor cerca de 6.66% dos bens de capital no sistema econômico. Quanto à B_0/K_0 , voltemos à literatura e consideremos uma explicação dada por Kalecki. Ele considerou o período de 1909 – 1918 nos Estados Unidos. Neste, o lucro médio dos capitalistas foi de 16 bilhões de dólares. A cada ano, ocorreu um incremento médio no

estoque de capital de 5 bilhões de dólares. Dessa forma, considerando a fórmula já vista de que $P = A + C_c$, obtemos $16 = 5 + C_c$, o que implica que o consumo pessoal dos capitalistas foi de 11 bilhões de dólares. Como a renda nacional média do período citado foi de 36 bilhões de dólares, segue que cerca de 0,3 dela corresponde ao consumo dos capitalistas. Tomando, agora, um período posterior ao citado, a média da renda nacional passou a ser 70 bilhões de dólares. Sendo assim, temos um consumo pessoal dos capitalistas em torno de 21 bilhões de dólares. Já que $C_c = B_0 + \lambda P$, como já foi visto, o passo seguinte foi determinar a parte constante do gasto dos capitalistas em consumo pessoal, a saber, B_0 . Para isso, Kalecki utilizou dados estatísticos para concluir que quando o lucro se desvia da média por volta de 20%, o gasto dos capitalistas em consumo pessoal cresce apenas 5%, ou seja, 4 vezes menos. Vale lembrar que C_c é relativamente inelástico em relação ao aumento dos lucros (P). Isto, aliás, foi apresentado como uma hipótese do modelo. Kalecki observou, via dados estatísticos, que o lucro cresceu por volta de 20% no período analisado e se constituiu na média deste período. Assim, temos:

$$C_c + 0,05C_c = B_0 + \lambda P + \lambda 0,2P.$$

Notemos que $0,05C_c = \lambda 0,2P$, o que implica que $0,25C_c = \lambda P$, $0 < \lambda < 1$. Como $C_c = B_0 + \lambda P$, então $C_c = B_0 + 0,25C_c$, de onde se conclui que $B_0 = (3/4)C_c$. Como $C_c = 21$ bilhões de dólares, segue que $B_0 = 16$ bilhões de dólares, aproximadamente. Com isso, Kalecki pôde calcular B_0/K_0 , a saber, $B_0/K_0 = 16/120 = 0,13$. Notemos que Kalecki fixou K_0 em 120 bilhões de dólares (valor do volume médio dos bens de capital da economia), de acordo com estimativa oficial do tesouro dos Estados Unidos.

Substituindo tais valores em (3.43) e nas equações (3.40) e (3.41), obtemos

$$m = 0,95, \quad n = 0,121 \text{ e } \alpha = 0,378.$$

Neste caso, a duração do ciclo será $T = (2\pi/\alpha) \cdot \theta \approx 10$ anos. Para compreender melhor os cálculos de m , n e α , consulte o Apêndice A.

Finalmente, voltando em (3.39), a função de investimento passa a ser

$$I(t) = U + F_1 \sin(0,63t).$$

Uma vez que $J(t) = I(t) - U$, podemos reescrever a solução como $J(t) = F_1 \sin(0,63t)$, que seria a solução da EDFR do modelo Kaleckiano, utilizando os dados estatísticos da Alemanha e dos Estados Unidos⁸.

Portanto, a solução que encontramos para o PVI do início da seção é uma função que apresenta comportamento cíclico de período de 10 anos ($2\pi/0,63$). Nesse intervalo de tempo, ocorrerão as 4 fases descritas na Seção 3.4, a saber, recuperação, expansão, recessão e depressão, pois a função capta o papel duplo exercido pelo investimento, ou seja, ao mesmo tempo que promove a produção de mais máquinas e equipamentos, aumentando A e, conseqüentemente, P , também aumenta K , reduzindo a rentabilidade de I , fazendo-o recuar. Tudo isso é determinado pelo Princípio da Demanda Efetiva que está ligado à expectativa de renda do capitalista quando ele decide produzir algo. Vemos que a solução não traz a noção de equilíbrio, capta a natureza instável das economias capitalistas. Dessa forma, Kalecki consegue mostrar que a instabilidade intrínseca ao sistema econômico é derivada de forças endógenas (internas) presentes no sistema, sobretudo, o investimento.

⁸Aqui vale comentar a metodologia de Kalecki baseada em tentar analisar as semelhanças de diversos ciclos para a construção de seu modelo econômico.

Vale ressaltar, para finalizar esta Seção, que as ideias de Kalecki expostas aqui foram retiradas de seu trabalho intitulado “Esboço de uma Teoria de Ciclo Econômico” de 1933. Trata-se da primeira contribuição teórica de Kalecki. Obviamente, seu modelo sofreu críticas. Alguns economistas argumentaram que ele deveria ter explorado em seu modelo a influência de choques externos, como guerras, pandemias etc. O próprio Kalecki o aperfeiçoou em 1954 em seu livro “Teoria da Dinâmica Econômica” e existe ainda uma terceira versão escrita em 1968. Na verdade, o que ele propõe nesse seu primeiro trabalho é mostrar a instabilidade intrínseca ao sistema econômico derivada das forças internas presentes, ou seja, a dinâmica da economia está relacionada à interação entre o investimento, os rendimentos e a acumulação de capital.

3.6 Resolvendo um PVI com parâmetros kaleckianos e função inicial cíclica utilizando o método dos passos

Nesta última seção do Capítulo 3, consideraremos o PVI (3.22) assumindo valores para m e a e estabelecendo uma função inicial. Suponhamos que, de posse de dados empíricos, fomos capazes de determinar os parâmetros m , θ e n . Como $a = m + \theta n$, segue que temos um valor para a também. Assim, sejam, por suposição, $m = 1$ e $a = 1,1$. Suponhamos também que a função inicial ψ seja $\psi(r) = \sin r$. Notemos que o estabelecimento dessa função reflete a ideia de Kalecki de que a economia funciona em ciclos não atingindo, portanto, o equilíbrio. Sendo assim, faz sentido a adoção de uma função inicial cíclica para $r \in [-1, 0]$.

Temos, portanto, o seguinte PVI:

$$\begin{aligned} x'(r) &= x(r) - 1,1x(r-1), \quad r \in [0, +\infty), \\ x_0(r) &= \psi(r) = \sin r, \quad r \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Notemos que, como $m = 1$ e $a = 1,1$, então $m - \ln a = 1 - \ln 1,1 = 0,90468 < 1$, o que, pelo que foi exposto na seção anterior, deve fornecer uma solução de comportamento cíclico.

Vamos, então, resolver o PVI (3.44) pelo Método dos Passos. Esperamos encontrar uma função definida por partes, contínua e que tenha comportamento cíclico.

Para $r \in [0, 1]$, temos $r-1 \in [-1, 0]$. Assim, segue que $x(r-1) = \sin(r-1)$ e

$$x'(r) = x(r) - 1,1 \sin(r-1) \quad \text{ou} \quad x'(r) - x(r) = -1,1 \sin(r-1). \quad (3.45)$$

Notemos que (3.45) se trata de uma EDO linear de primeira ordem que se resolve pelo método do fator integrante já explicado no Capítulo 1 (Seção 1.3, página 20). Dado que o fator integrante da equação (3.45) é a função $\mu(r) = e^{-r}$, sua solução será a função $x(r)$ descrita abaixo:

$$x(r) = e^r \left[k_1 - 1,1 \int \sin(r-1)e^{-r} dr \right]. \quad (3.46)$$

Resolvendo a integral $\int \sin(r-1)e^{-r} dr$ pelo método de integração por partes, obtemos

$$-e^{-r} \left[\frac{\sin(r-1) + \cos(r-1)}{2} \right] = \int \sin(r-1)e^{-r} dr.$$

Voltando em (3.46), vemos que

$$x(r) = k_1 e^r - 1,1 e^r \left[-e^{-r} \left(\frac{\sin(r-1) + \cos(r-1)}{2} \right) \right],$$

de onde segue que

$$x(r) = k_1 e^r + 0,55(\sin(r-1) + \cos(r-1)). \quad (3.47)$$

Para finalizar este primeiro passo, resta-nos determinar a constante k_1 em (3.47). A partir de agora, vale mencionar que usaremos duas casas decimais em todos os cálculos para facilitá-los. Como $x(0) = 0$, então

$$0 = x(0) = k_1 + 0,55(-0,84 + 0,54),$$

implicando

$$k_1 = 0,46 - 0,29 = 0,17.$$

Portanto, a solução de (3.44) no intervalo $[0, 1]$ é dada pela função

$$x(r) = 0,17e^r + 0,55(\sin(r-1) + \cos(r-1)). \quad (3.48)$$

Agora, observe que se $r \in [1, 2]$, então $r-1 \in [0, 1]$. Assim,

$$x(r-1) = 0,17e^{r-1} + 0,55(\sin(r-2) + \cos(r-2))$$

que, substituindo em (3.44), fornece a equação

$$x'(r) = x(r) - 1,1(0,17e^{r-1} + 0,55(\sin(r-2) + \cos(r-2))),$$

que equivale a EDO linear de primeira ordem

$$x'(r) - x(r) = -0,18e^{r-1} - 0,6(\sin(r-2) + \cos(r-2)), \quad (3.49)$$

cujas solução pode ser obtida pelo método do fator integrante, com $\mu(r) = e^{-r}$ novamente. Sendo assim, a solução de (3.49) é dada por

$$x(r) = e^r \left[k_2 + \int [-0,18e^{r-1} - 0,6(\sin(r-2) + \cos(r-2))] e^{-r} dr \right],$$

ou seja,

$$x(r) = e^r k_2 - 0,18e^r \int e^{-1} dr - 0,6e^r \int (\sin(r-2) + \cos(r-2)) e^{-r} dr,$$

que por sua vez equivale a

$$x(r) = e^r k_2 - 0,06e^r r - 0,6e^r \int (\sin(r-2) + \cos(r-2)) e^{-r} dr. \quad (3.50)$$

Resolvendo a integral $\int (\sin(r-2) + \cos(r-2)) e^{-r} dr$ pelo método de integração por partes, obtemos

$$\int (\sin(r-2) + \cos(r-2)) e^{-r} dr = -\cos(r-2) e^{-r}.$$

Voltando em (3.50), obtemos

$$x(r) = e^r k_2 - 0,06re^r - 0,6e^r [-\cos(r-2)e^{-r}],$$

que equivale a

$$x(r) = k_2 e^r - 0,06re^r + 0,6 \cos(r-2). \quad (3.51)$$

Para finalizar o segundo passo, resta-nos determinar a constante k_2 presente em (3.51). Pois bem, como $x(1) = 1,01 \approx 1$ por (3.48), temos

$$1 = x(1) = k_2 e^1 - 0,06e^1 + 0,6 \cos(-1),$$

de onde obtemos

$$k_2 = \frac{1 + 0,06e^1 - 0,6 \cos(-1)}{e^1} = 0,3.$$

Voltando em (3.51), concluímos que a solução do PVI (3.44) no intervalo $[1, 2]$ é dada por

$$x(r) = 0,3e^r - 0,06re^r + 0,6 \cos(r-2). \quad (3.52)$$

Prosseguiremos com o terceiro passo da solução do PVI (3.44). Se $r \in [2, 3]$, então $r-1 \in [1, 2]$. Assim, por (3.52), temos

$$x(r-1) = 0,3e^{r-1} - 0,06(r-1)e^{r-1} + 0,6 \cos(r-3),$$

que substituindo na equação (3.44) fornece a seguinte EDO linear de primeira ordem:

$$x'(r) - x(r) = -1,1[0,3e^{r-1} - 0,06(r-1)e^{r-1} + 0,6 \cos(r-3)],$$

equivalente a

$$x'(r) - x(r) = -0,39e^{r-1} + 0,06re^{r-1} - 0,66 \cos(r-3). \quad (3.53)$$

A EDO (3.53) é resolvida pelo método do fator integrante, com $\mu(r) = e^{-r}$. Sendo assim, a solução de (3.53) é dada por

$$x(r) = k_3 e^r + e^r \left[\int [-0,39e^{r-1} + 0,06re^{r-1} - 0,66 \cos(r-3)] e^{-r} dr \right],$$

ou seja,

$$x(r) = k_3 e^r - 0,39e^r e^{-1}r + 0,06e^{-1}e^r \int r dr - 0,66e^r \int (\cos(r-3))e^{-r} dr.$$

Sabendo que $e^{-1} \approx 0,36$, $\int r dr = r^2/2$ e

$$\int (\cos(r-3))e^{-r} dr = \frac{(\sin(r-3) - \cos(r-3))e^{-r}}{2},$$

obtemos como solução de (3.53), a função

$$x(r) = k_3 e^r - 0,14re^r + 0,01r^2 e^r - 0,33[\sin(r-3) - \cos(r-3)]. \quad (3.54)$$

Para finalizar o terceiro passo, basta-nos determinar a constante k_3 presente na equação (3.54). Com efeito, como

$$x(2) = 0,3e^2 - 0,06(2e^2) + 0,6 \cos(0) = 1,93,$$

por (3.52), temos

$$1,93 = x(2) = k_3 e^2 - 0,14(2e^2) + 0,01(2^2 e^2) - 0,33[\text{sen}(-1) - \cos(-1)],$$

de onde obtemos

$$k_3 = \frac{1,93 + 0,14(2e^2) - [0,01(2^2 e^2) - 0,33(\text{sen}(-1) - \cos(-1))]}{e^2} = 0,44.$$

Voltando em (3.54), concluímos que a solução do PVI (3.44) no intervalo $[2, 3]$ é dada por

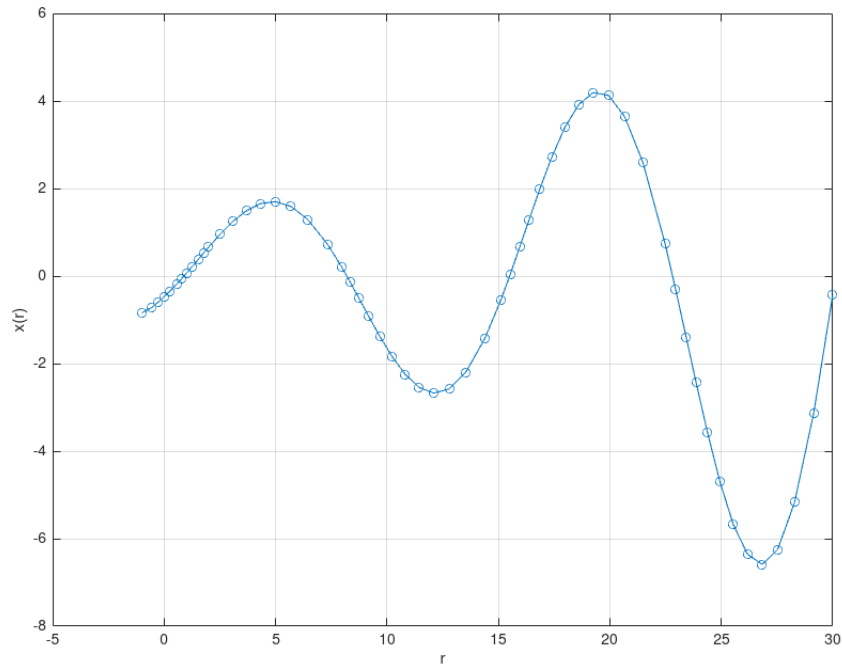
$$x(r) = 0,44e^r - 0,14re^r + 0,01r^2e^r - 0,33[\text{sen}(r-3) - \cos(r-3)]. \quad (3.55)$$

O método dos passos pode continuar indefinidamente, nos intervalos $[3, 4]$, $[4, 5]$, $[n, n+1]$, para todo $n \geq 5$. Contudo, como foi possível observar anteriormente, os cálculos vão se tornando cada vez mais trabalhosos. A seguir, explicitamos a solução nos intervalos $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, mostrando que se trata, como esperado, de uma função definida por partes e contínua. Posteriormente, a fim de ilustrar o comportamento cíclico da solução, usando o software  MATLAB, exibimos o gráfico da solução aproximada do PVI (3.44) nos intervalos $[-1, 30]$ e $[-1, 50]$ - veja as Figuras 3.4 e 3.5. Portanto, a solução do PVI (3.44) é dada por

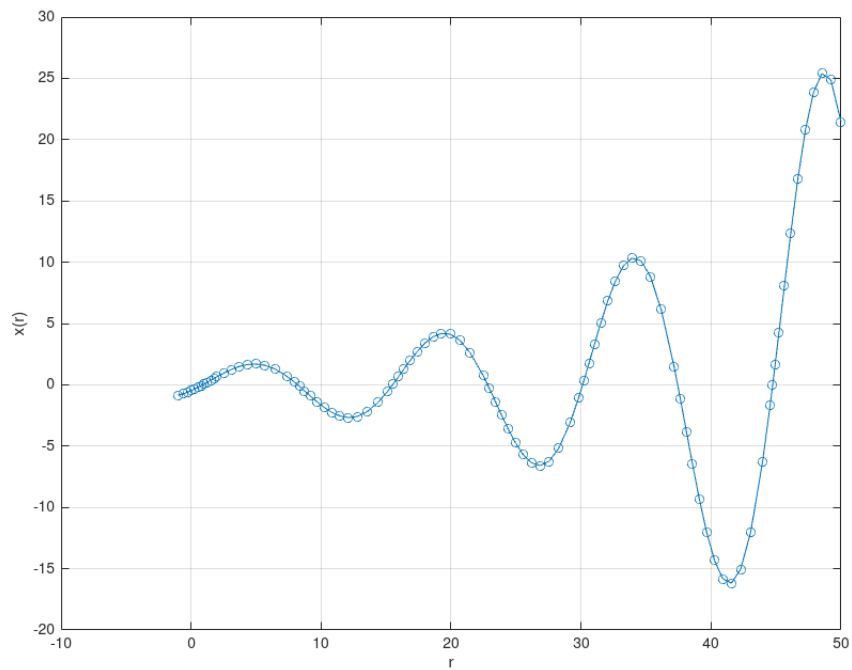
$$x(r) = \begin{cases} \text{sen}(r), & r \in [-1, 0], \\ 0,17e^r + 0,55(\text{sen}(r-1) + \cos(r-1)), & r \in [0, 1], \\ 0,3e^r - 0,06re^r + 0,6\cos(r-2), & r \in [1, 2], \\ 0,44e^r - 0,14re^r + 0,01r^2e^r - 0,33[\text{sen}(r-3) - \cos(r-3)], & r \in [2, 3], \\ \vdots & \end{cases} \quad (3.56)$$

De posse da solução (3.56) do PVI (3.44), encontrada pelo método dos passos, vamos calcular alguns valores de $x(r)$.

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \quad x(0,5) \approx 0,5, \quad x(1) \approx 1,01, \quad x(1,5) \approx 1,46, \quad x(2) \approx 1,93, \\ x(2,5) \approx 2,3 \quad \text{e} \quad x(3) \approx 2,53. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Figura 3.4: Solução do PVI (3.44) no intervalo $[-1, 30]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.5: Solução do PVI (3.44) no intervalo $[-1, 50]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vimos na Seção 3.5 que, caso $\xi < 1$, então a solução seria da forma:

$$x(r) = e^{\beta_1 r} (F_1 \sin \alpha_1 r + G_1 \cos \alpha_1 r) + e^{\beta_2 r} (F_2 \sin \alpha_2 r + G_2 \cos \alpha_2 r)$$

$$+e^{\beta_3 r}(F_3 \sin \alpha_3 r + G_3 \cos \alpha_3 r) + \dots$$

Como $\xi < 1$, então temos interseções da reta horizontal $y = 1 - \ln(1, 1) = 0,90469$ com a função $h(\alpha)$, descrita em (3.32), na Seção 3.5, nos intervalos simétricos $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$, $(-3\pi, -2\pi)$ e $(2\pi, 3\pi)$, $(-5\pi, -4\pi)$ e $(4\pi, 5\pi)$ e assim por diante. Essas interseções, como vimos, nos davam os valores de α_k , $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Vamos aqui determinar apenas α_1 , α_2 e α_3 a fim de entender o raciocínio de Kalecki. Para tal, temos que encontrar as raízes da equação

$$\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\tan \alpha} - 0,90469 = 0.$$

Utilizando o método da bissecção, chegamos aos valores $\alpha_{11} = 0,435$, $\alpha_{12} = -0,435$, $\alpha_{21} = 7,473$, $\alpha_{22} = -7,473$, $\alpha_{31} = 13,88$ e $\alpha_{32} = -13,88$.

De posse da fórmula

$$\beta = m - \frac{\alpha}{\tan \alpha}$$

e lembrando que estamos considerando $m = 1$, encontramos $\beta_1 = 0,0638$, $\beta_2 = -1,993$ e $\beta_3 = -2,65$. Assim,

$$0,0638 \pm 0,435i, \quad -1,993 \pm 7,473i \quad \text{e} \quad -2,65 \pm 13,88i$$

são raízes da equação característica (3.24).

Portanto, chegamos à seguinte configuração para a solução do PVI (3.44) com apenas 3 termos. Observemos que os valores de α_1 , α_2 e α_3 que queremos determinar são positivos.

$$x(r) = e^{0,0638r}(F_1 \sin(0,435r) + G_1 \cos(0,435r)) + e^{-1,993r}(F_2 \sin(7,473r) + G_2 \cos(7,473r)) + e^{-2,65r}(F_3 \sin(13,88r) + G_3 \cos(13,88r)). \quad (3.58)$$

Resta-nos encontrar as constantes F_k e G_k , $k \in \{1, 2, 3\}$. Para isso, vamos considerar a solução encontrada pelo método dos passos. A partir dela, chegamos ao seguinte sistema de equações, considerando $r = 0$, $r = 0,5$, $r = 1$, $r = 1,5$, $r = 2$ e $r = 2,5$:

$$\begin{cases} G_1 = -G_2 - G_3 \\ 0,22F_1 + 1,01G_1 - 0,21F_2 - 0,3G_2 + 0,16F_3 + 0,21G_3 = 0,5 \\ 0,45F_1 + 0,97G_1 + 0,13F_2 + 0,02G_2 + 0,03F_3 - 0,07G_3 = 1,01 \\ 0,67F_1 + 0,87G_1 - 0,05F_2 + 0,01G_2 + 0,01F_3 + 0,02G_3 = 1,46 \\ 0,87F_1 + 0,73G_1 + 0,01F_2 - 0,01G_2 = 1,93 \\ 1,04F_1 + 0,54G_1 - 0,01F_2 - 0,01G_2 = 2,3, \end{cases}$$

para o qual obtemos a seguinte solução, com quatro casas decimais:

$$\begin{cases} F_1 = 2,2159 \\ F_2 = 0,3938, \\ F_3 = -0,2448, \\ G_1 = -0,0061, \\ G_2 = -0,2731, \\ G_3 = 0,2793. \end{cases}$$

Com os valores das constantes obtidos acima, a configuração de (3.58) fica assim expressa:

$$x(r) = e^{0,0638r}(2,2159 \sin(0,435r) - 0,0061 \cos(0,435r))$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-1.993r}(0,3938\sin(7,473r) - 0,2731\cos(7,473r)) \\
& +e^{-2,65r}(-0,2448\sin(13,88r) + 0,2793\cos(13,88r)).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

A partir de (3.59), temos os seguintes valores para $x(r)$:

$$\begin{aligned}
x(0) = 0,0001, \quad x(0,5) = 0,5086, \quad x(1) = 1,0137, \quad x(1,5) = 1,4467, \quad x(2) \approx 1,9266, \\
x(2,5) \approx 2,2955 \quad \text{e} \quad x(3) \approx 2,5874.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Notemos que os valores descritos em (3.60) são bem próximos àqueles encontrados com a solução fornecida pelo método dos passos, descritos em (3.57).

Em (3.59), nota-se, claramente, que o termo

$$e^{0,0638r}(2,2159\sin(0,435r) - 0,0061\cos(0,435r))$$

é o maior. Assim, vamos dividir ambos os membros de $x(r)$ por ele. Com isso, obtemos:

$$x(r) = e^{0,0638r}(2,2159\sin(0,435r) - 0,0061\cos(0,435r)) + \omega,$$

em que ω é um erro pequeno, como vimos na Seção 3.5. Vamos calcular os valores de $x(r)$ considerando somente $x(r) = e^{0,0638r}(2,2159\sin(0,435r) - 0,0061\cos(0,435r))$. Assim, obtemos os seguintes valores:

- $x(0) = -0,0061$ com $\omega = -0,006$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(0,5) = 0,4875$ com $\omega = 0,0211$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(1) = 0,9894$ com $\omega = 0,0243$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(1,5) = 1,4752$ com $\omega = -0,0285$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(2) = 1,9197$ com $\omega = 0,00690$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(2,5) = 2,2981$ com $\omega = -0,0026$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$;
- $x(3) = 2,5872$ com $\omega = 0,0002$ e, portanto, $|\omega| \approx 0$.

Fazendo $x(0) = 0$, como em (3.37), obtemos

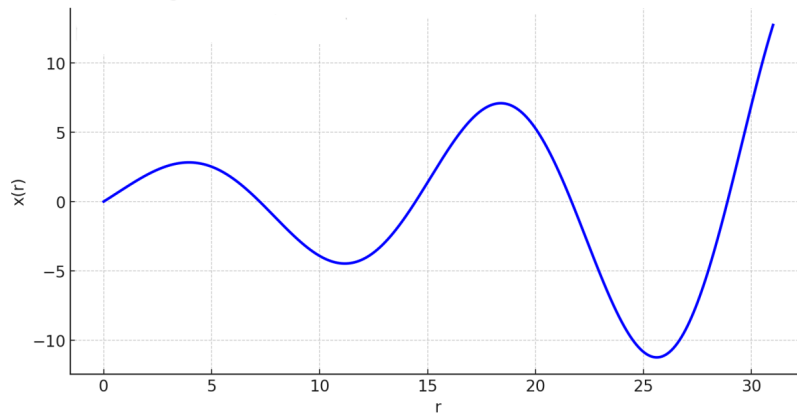
$$x(r) = e^{0,0638r}(2,2159\sin(0,435r)) \tag{3.61}$$

que é a forma final para a solução do PVI (3.44), assim como considerou Kalecki e expomos na Seção 3.5. Com esta última configuração, os valores para $x(r)$ são:

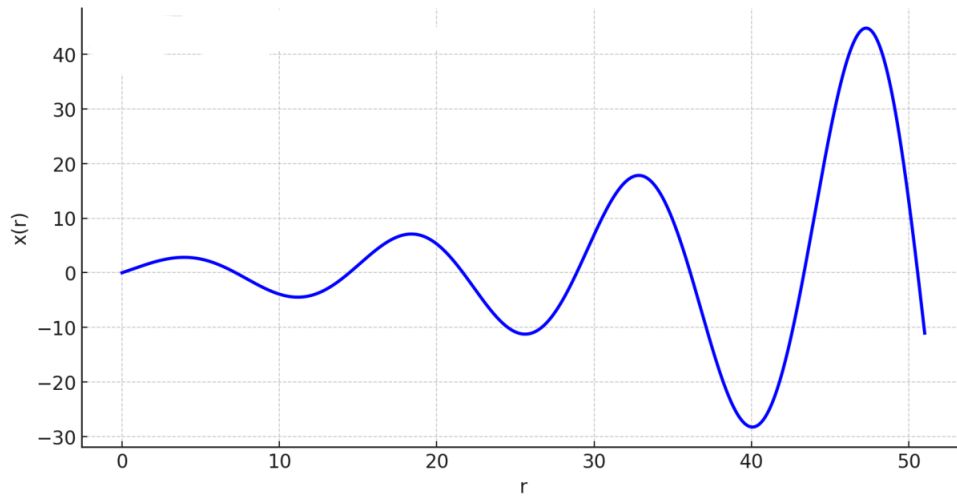
$$x(0) = 0, \quad x(0,5) \approx 0,4937, \quad x(1) \approx 0,9953, \quad x(1,5) \approx 1,4806, \quad x(2) \approx 1,9242,$$

$$x(2,5) \approx 2,3014 \quad \text{e} \quad x(3) \approx 2,5891.$$

Podemos notar que tanto a solução proposta pelo método dos passos (veja (3.56)), quanto esta última (3.61) apresentam valores muito próximos para $x(r)$. A vantagem desta última é poder afirmar que o período é $T = \frac{2\pi}{0,435} \approx 14,4$ anos e que a amplitude do gráfico vai crescendo, pois $\beta_1 = 0,0638 > 0$. Vejamos abaixo o gráfico da solução (3.61), esboçado pelo software  Python.

Figura 3.6: Solução (3.61) do PVI (3.44) no intervalo $[0, 30]$ 

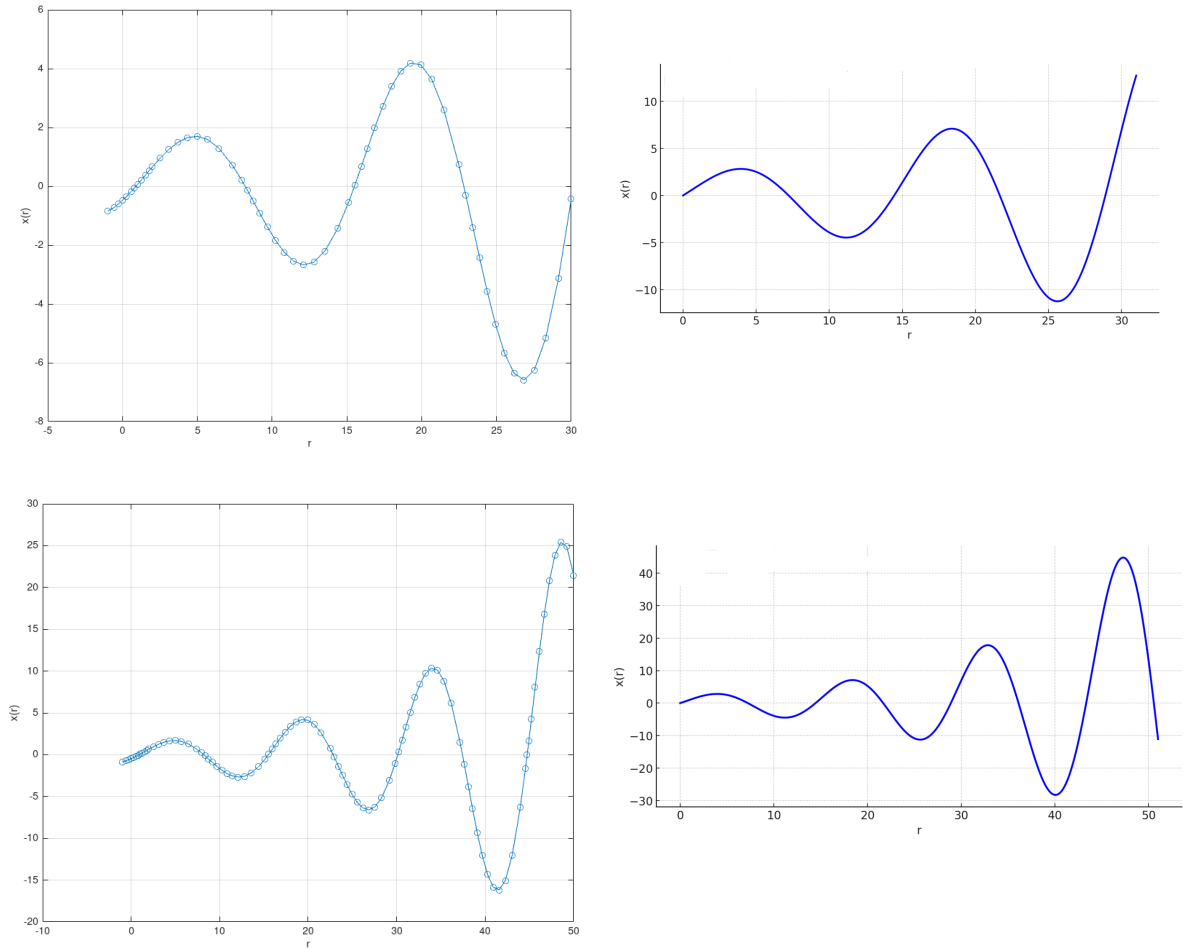
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.7: Solução (3.61) do PVI (3.44) no intervalo $[0, 50]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Nas figuras exibidas na sequência, é possível notar a semelhança das Figuras 3.6 e 3.7 com as Figuras 3.4 e 3.5, respectivamente, que representam a solução do PVI (3.44), encontrada pelo método dos passos.

Figura 3.8: Comparação entre os gráficos das soluções (3.56) e (3.61) nos intervalos $[0, 30]$ e $[0, 50]$, respectivamente



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No entanto, não é a função $x(r)$ o objetivo de Kalecki, e sim a função $J(t)$ que representa a diferença entre a quantidade de encomendas de investimento, $I(t)$, e a necessidade de reposição do capital, U . Como vimos na Seção 3.4, os valores dessa função nos permitirão tirar conclusões sobre a fase do ciclo em que a economia se encontra. Como $r = t/\theta$, temos

$$x(r) = x\left(\frac{t}{\theta}\right) = J(t) = e^{0,0638 \frac{t}{\theta}} \left(2,2159 \sin\left(\frac{0,435t}{\theta}\right) \right). \quad (3.62)$$

No início desta seção, propusemos uma EDFR com os parâmetros $m = 1$ e $a = 1,1$. Sabemos que $a = m + \theta n$. Sendo assim, se temos a é porque sabemos o valor de θ . Vamos supor que seu valor seja igual a 0,6. Dessa forma, (3.62) se torna:

$$J(t) = e^{0,1063t}(2,2159 \sin(0,725t)). \quad (3.63)$$

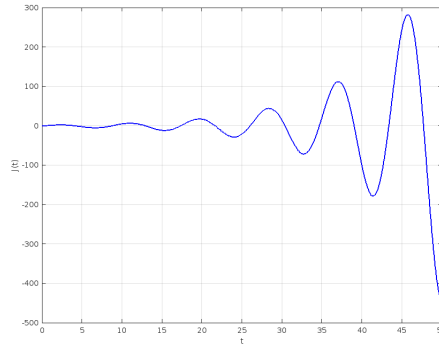
Vejamos abaixo alguns valores de $J(t)$ comparativamente com $x(r)$ dada em (3.61).

- Para $t = 0$, $J(0) = 0$ e $x(0) = 0$.
- Para $t = 0,5$, $J(0,5) \approx 0,8281$ e $x\left(\frac{0,5}{0,6}\right) = x(0,833) \approx 0,8303$.

- Para $t = 1$, $J(1) \approx 1,6166$ e $x\left(\frac{1}{0,6}\right) = x(1,66) \approx 1,6163$.
- Para $t = 1,5$, $J(1,5) \approx 2,3167$ e $x\left(\frac{1,5}{0,6}\right) = x(2,5) \approx 2,3165$.

Notemos o comportamento da função $J(t)$. Ela atinge antes os mesmos valores que a função $x(r)$, com exceção do tempo zero. Dessa forma, é de se esperar que seu período seja menor. De fato, $J(t)$ tem período igual a $T = 2\pi/0,725 = 8,67$ anos. Portanto, é durante esse período que o sistema econômico experiencia as 4 fases de um ciclo, já descritas na Seção 3.4.

Um último detalhe em relação a $J(t)$ é que, tomando a solução (3.59) e substituindo por t/θ , teremos um termo com período maior que $2\theta = 2 \cdot 0,6 = 1,2$ (de fato, o período aqui é $8,67$), chamado ciclo maior, enquanto os outros dois termos têm períodos menores que $\theta = 0,6$, chamados ciclos menores (um deles é $0,5$ e o outro $0,27$). Isso foi observado por Kalecki e apontado na Seção 3.5. Vejamos, na Figura 3.9, o gráfico de $J(t)$, que é a função buscada por Kalecki e que se constitui no objetivo de todo seu processo de modelagem.

Figura 3.9: Gráfico de $J(t)$, dada em (3.63), no intervalo $[0, 50]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para finalizar esta seção e concluir o trabalho, daremos dois exemplos em que $\xi \geq 1$. Sabemos que, nestas situações, não teremos como soluções das EDFR's funções com comportamentos cíclicos. Aqui, não os resolveremos por método algum. Apenas, com a ajuda do software  Python, mostraremos os gráficos das soluções.

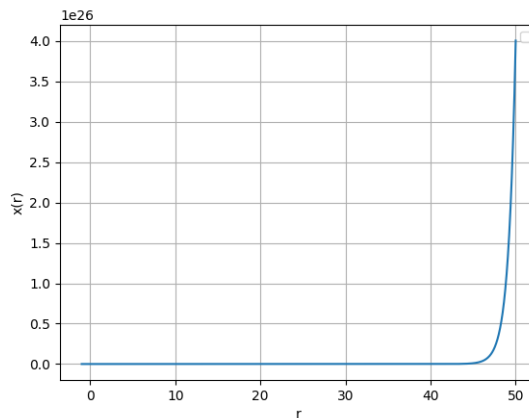
Vamos considerar os seguintes PVIs:

$$(I) \begin{cases} x'(r) = 2x(r) - 2, 4x(r-1), & r \in [0, +\infty), \\ x_0(r) = \psi(r) = \sin r, & r \in [-1, 0]. \end{cases}$$

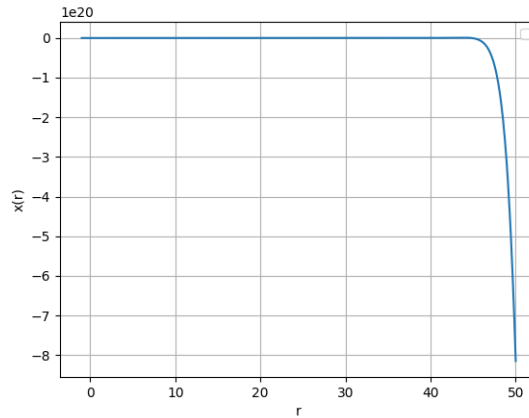
$$(II) \begin{cases} x'(r) = 2x(r) - 2, 718281828459x(r-1), & r \in [0, +\infty), \\ x_0(r) = \psi(r) = \sin r, & r \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Em (I), temos $\xi = 1,124 > 1$, enquanto que, em (II), temos $\xi = 1$.

Nas Figuras 3.10 e 3.11 observamos os gráficos das soluções aproximadas de (I) e (II), respectivamente.

Figura 3.10: Gráfico da solução aproximada de (I), no intervalo $[0, 50]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.11: Gráfico da solução aproximada de (II), no intervalo $[0, 50]$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Essas duas últimas situações dificilmente ocorreriam na prática, uma vez que as decisões de investimento dos capitalistas são guiadas pelo Princípio da Demanda Efetiva. Assim, é improvável que as encomendas de investimento cresçam indefinidamente, pois, em determinado momento, diante de uma redução nas taxas de lucro, os capitalistas optarão por reduzir seus investimentos. Com isso, o volume de encomendas tenderá a diminuir. Em outras palavras, haverá períodos de alta demanda por encomendas e períodos de baixa, evidenciando o caráter cíclico do sistema econômico. Portanto, o cenário mais realista é aquele em que $\xi < 1$, razão pela qual Kalecki focou sua análise nesse caso.

Referências

- [1] BEGON, M.; TOWNSEND, C. R.; HARPER, J. L. *Ecology: From Individuals to Ecosystems*. Wiley, 2009. ISBN 9781405151986. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Lsf1lkYKoHEC>>.
- [2] BRUNTON, L.; LAZO, J.; PARKER, K. *Goodman & Gilman's The Pharmacological Basis of Therapeutics, Eleventh Edition*. McGraw-Hill Education, 2005. (Goodman and Gilman's the Pharmacological Basis of Therapeutics). ISBN 9780071608916. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PtWdBgnQdjMC>>.
- [3] BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1988.
- [4] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Dover Publications, 2009. (Dover Books on Mathematics Series).
- [5] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [6] LIMA, E. L. *Análise Real - Volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [7] STEWART, J. *Cálculo Volume 1 - Tradução da 6ª Edição norte-americana*. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda, 2010.
- [8] BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais Ordinárias: Um curso Introdutório*. São Paulo: Coleção BC&T - UFABC Textos Didáticos, 1995.
- [9] POSSANI, C. *Cálculo IV - Aula 16 - Equações Diferenciais Ordinárias - Parte 1*. UNIVESP, 2014. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=XHyX5M6G06w>.
- [10] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 2021. ISBN 9781119868866. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=DX9zEAAAQBAJ>>.
- [11] COUTINHO, R. M. *Equações diferenciais com retardo em biologia de populações*. São Paulo: Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Física Teórica, 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/110607>>.

-
- [12] GOPALSAMY, K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Springer Netherlands, 1992. (Mathematics and Its Applications). ISBN 9780792315940. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=BXbK_T_PSdwC>.
- [13] DRIVER, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1977. (Applied mathematical sciences). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tY0JswEACAAJ>>.
- [14] TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. G. Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 2, n. 2, p. 86–99, 2013. Disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>>.
- [15] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Company, 1997. (Mathematics Series). ISBN 9780534955328. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PV4ZAQAIAAJ>>.
- [16] ESTEVAM, L. A. L. *Tópicos de equações diferenciais com retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic*. Rio Claro: Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94345>>.
- [17] ONUCHIC, N. *Equações diferenciais com retardamento*. São Carlos: ICMC – Universidade de São Paulo, 1971. (Biblioteca de autores e publicações brasileiras de matemática).
- [18] KALECKI, M. A macrodynamic theory of business cycles. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 3, n. 3, p. 327–344, 1935. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1905325>>.
- [19] KALECKI, M. *Crescimento e ciclo das economias capitalistas*. São Paulo: Hucitec, 1970.
- [20] KALECKI, M. *Os economistas: Teoria da dinâmica econômica/ Ensaios sobre as mudanças cíclicas e a longo prazo da economia capitalista*. São Paulo: Nova Cultural Ltda, 1977.
- [21] LIMA, A. C. B. *Sistemas dinâmicos através de modelagem em macroeconomia: o modelo de ciclo econômico de Kalecki*. Belo Horizonte: Monografia - UFMG, 2016.
- [22] POSSAS, M. L.; BALTAR, P. E. A. O modelo de ciclo econômico de Kalecki. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 3, p. 5–28, 1983.

- Contração uniforme, [50](#)
- Equação
 - característica, [69](#)
 - transcendental, [69](#)
- Equação Diferencial Funcional, [17](#)
 - com Retardo, [18](#), [33](#)
 - Neutra, [18](#)
- Equação Diferencial Ordinária, [16](#)
- Função lipschitziana com respeito à segunda variável, [45](#), [48](#)
- Lei
 - dos mercados, [56](#)
 - dos mercados de Say, [56](#)
- Modelo
 - de Malthus, [16](#)
 - de Verhulst, [16](#)
- Método dos Passos, [25](#)
- Princípio da Demanda Efetiva, [66](#)
- Princípio da superposição de soluções, [71](#)
- Solução
 - de um problema de valor inicial para EDFR's, [48](#)
 - de um problema de valor inicial para EDO's, [37](#)
 - de uma EDFR, [33](#)
- Teorema
 - de Tychonoff, [44](#)
 - de unicidade para EDO's, [44](#), [46](#)
 - de Weierstrass, [43](#)
 - do Valor Intermediário, [70](#)
- Teorema de Existência e Unicidade
 - para EDFR's, [48](#)
 - Teorema do Ponto Fixo de Banach, [50](#)
 - Teorema Fundamental da Álgebra, [69](#)

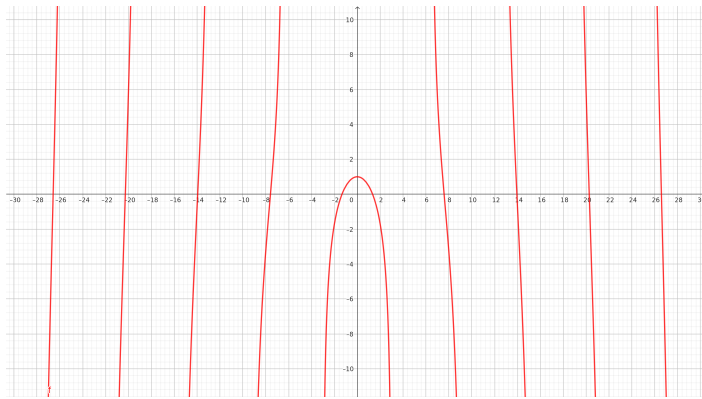
Análise de alguns cálculos do Capítulo 3, Seção 3.5

Na Seção 3.5, deparamo-nos com o caso 3, a saber, o caso em que α e β são diferentes de zero. Após alguns desenvolvimentos, chegamos à função

$$h(\alpha) = \ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) + \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

e concluímos que para intervalos nos quais α é positivo, quando α se aproxima do extremo esquerdo do intervalo pela direita, $h(\alpha)$ tende a $+\infty$, conforme observamos na Figura A.1.

Figura A.1: Gráfico da função h



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, excetuando-se o intervalo $(0, \pi)$, que foi analisado na própria seção, para os outros intervalos no domínio de $h(\alpha)$, que são da forma $(2j\pi, (2j+1)\pi)$, para j inteiro positivo, a função tende a $+\infty$ ao nos aproximarmos do extremo esquerdo do intervalo pela direita. Tomando $j = 1$, temos o intervalo $(2\pi, 3\pi)$. Analisemos, então, $\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} h(\alpha)$. De forma análoga, se analisa $\lim_{\alpha \rightarrow 4\pi^+} h(\alpha)$, quando $j = 2$, $\lim_{\alpha \rightarrow 6\pi^+} h(\alpha)$, quando $j = 3$, e assim por diante.

Vamos calcular, então, $\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) + \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Note que

$$\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) + \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right].$$

Daí, devemos calcular

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} \left[\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right] = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} \right] \left[\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}} + \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \alpha \cos \alpha \right]. \quad (\text{A.1})$$

Temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \alpha \cos \alpha = 2\pi. \quad (\text{A.2})$$

Resta-nos calcular

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}}.$$

Observe que $\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) = -\infty$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} = +\infty$. Neste caso, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{\frac{\alpha[\alpha \cos \alpha - \sin \alpha]}{\alpha^2 \sin \alpha}}{\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} - \left[\frac{\sin \alpha(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)}{\alpha \cos \alpha} \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} -\sin \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha \cos \alpha} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Voltando em (A.1), por (A.2) e (A.3), obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} \left[\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right] = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^+} \frac{1}{\sin \alpha} \right] [0 + 2\pi] = +\infty.$$

Já para os intervalos nos quais α é negativo, quando α se aproxima do extremo direito pela esquerda, $h(\alpha)$ tende a $+\infty$. Assim, excetuando-se o intervalo $(-\pi, 0)$, pois já foi analisado na Seção 3.5, nos outros intervalos do domínio da função $h(\alpha)$, que são da forma $((2j+1)\pi, (2j+2)\pi)$, para j inteiro negativo, ao nos aproximarmos do extremo direito pela esquerda, a função tende a $+\infty$. Tomando $j = -2$, temos o intervalo $(-3\pi, -2\pi)$. Analisemos, então, $\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} h(\alpha)$. De forma análoga, se analisa $\lim_{\alpha \rightarrow -4\pi^-} h(\alpha)$, quando $j = -3$, $\lim_{\alpha \rightarrow -6\pi^-} h(\alpha)$, quando $j = -4$, e assim por diante.

Vamos, então, constatar que $\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) + \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = +\infty$.

Utilizando cálculos similares aos utilizados no caso em que α é positivo, chegamos ao seguinte limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \frac{1}{\sin \alpha} \left[\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}} + \lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \alpha \cos \alpha \right].$$

Note que, neste caso,

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \frac{1}{\sin \alpha} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \alpha \cos \alpha = -2\pi.$$

Novamente usando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \frac{\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2\pi^-} \frac{1}{\sin \alpha} \left[\ln\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right] = -\infty(0 - 2\pi) = +\infty.$$

Em relação aos limites de $h(\alpha)$, para α positivo, quando nos aproximamos do extremo direito pela esquerda e, os limites de $h(\alpha)$, para α negativo, quando nos aproximamos do extremo esquerdo pela direita, como não há indeterminação, então estes são calculados diretamente não necessitando de explicitar os cálculos.

Um outro fato importante a ser analisado na Seção 3.5 é a determinação dos parâmetros m , n e θ . Como vimos, se $\xi = m - \ln(m + \theta n) < 1$, a solução do PVI (3.20) terá um comportamento cíclico. Baseando-se em dados empíricos, Kalecki fixa o parâmetro θ em 0,6, ou seja, o período de gestação das encomendas de investimento é 0,6 ano. Em outras palavras, esse é o período de tempo médio que um bem de capital leva para ficar pronto. Considerando o sistema (3.27) e baseando-se também em oscilações cíclicas históricas (o que o leva a concluir que $\beta = 0$), chegamos às seguintes equações:

$$(i) \quad \cos \alpha = \frac{m}{m + 0,6n};$$

$$(ii) \quad m = \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Uma última equação a ser somada às duas acima vem da equação do investimento $I(t) = m(B_0 + A(t)) - nK(t)$ que foi reescrita como $U = m(B_0 + U) - nK_0$, da qual obtemos a equação

$$n = (m - 1) \frac{U}{K_0} + m \frac{B_0}{K_0}.$$

Como $U/K_0 = 0,05$ e $B_0/K_0 = 0,13$, segue que

$$(iii) \quad n = 0,05(m - 1) + 0,13m = 0,18m - 0,05.$$

De posse das equações (i), (ii) e (iii), vamos encontrar m , n e α . A determinação de α será importante para definir numericamente o comportamento do ciclo de acordo com a equação (3.38).

Temos:

$$(1) \quad n = 0,18m - 0,05 \Rightarrow 0,6n = 0,108m - 0,03;$$

$$(2) \quad m = \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \Leftrightarrow m = \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{m}{m + 0,6n} = \frac{\alpha \cos \alpha}{(m + 0,6n) \sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\alpha}{m + 0,6n}.$$

Como $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 &\Rightarrow \frac{m^2}{(m + 0,6n)^2} + \frac{\alpha^2}{(m + 0,6n)^2} = 1 \\ &\Rightarrow m^2 + \alpha^2 = (m + 0,6n)^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2 = -m^2 + m^2 + 2m0,6n + (0,6n)^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2 = (2m + 0,6n)(0,6n).\end{aligned}$$

Como $0,6n = 0,108m - 0,03$, temos

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (2m + 0,108m - 0,03)(0,108m - 0,03) = (2,108m - 0,03)(0,108m - 0,03) \\ &= 0,227664m^2 - 0,06648m + 0,0009.\end{aligned}$$

Sabendo que $m = \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$, temos

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (0,227664)\frac{\alpha^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 0,06648\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + 0,0009 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha &= (0,227664)\alpha^2 - 0,06648\alpha \operatorname{tg} \alpha + 0,0009 \operatorname{tg}^2 \alpha,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 0,0009 \operatorname{tg}^2 \alpha = (0,227664)\alpha^2 - 0,06648\alpha \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{A.4})$$

Neste momento, temos duas opções para encontrar α , descritas a seguir.

- (1^a.) Podemos usar um recurso computacional, como o software  [GeoGebra](#). Com ele, procuraremos a interseção dos gráficos das funções $f(\alpha) = \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 0,0009 \operatorname{tg}^2 \alpha$ e $g(\alpha) = (0,227664)\alpha^2 - 0,06648\alpha \operatorname{tg} \alpha$.
- (2^a.) Podemos considerar a série de Taylor para a tangente centrada no 0 com raio de convergência $\frac{\pi}{2}$ e substituir na equação (A.4). Após a substituição, teremos um polinômio cuja incógnita é α e o desafio será encontrar uma raiz que se encontra no intervalo $(0, \pi/2)$. Para encontrar tal raiz, podemos usar um método numérico. Como Kalecki não dispunha de computadores na década de 30, é provável que ele tenha usado esta opção.

Usando o  [GeoGebra](#), obtemos para α o valor de 0,378.

Como $m = \alpha/\operatorname{tg} \alpha$, temos $m = 0,378/\operatorname{tg} 0,378 = 0,95$. Daí,

$$n = 0,05(0,95 - 1) + (0,13)(0,95) = 0,121.$$

Note que $\xi = m - \ln(m + \theta n) = 0,95 - \ln(0,95 - (0,6)(0,121)) = 0,8192 < 1$, o que nos leva a concluir que a solução do PVI (3.20) tem comportamento cíclico. Ademais, o ciclo tem duração de aproximadamente 10 anos, pois

$$T = \frac{2\pi}{\frac{0,378}{0,6}} \approx 10.$$