Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações

Laís Fernandes Mucheroni

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito final para a obtenção do título de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Coorientadora
Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

2017

514.742 Mucheroni, Laís Fernandes
M942d Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações / Laís Fernandes Mucheroni. - Rio Claro, 2017
61 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Alice Kimie Miwa Libardi
Coorientador: Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

1. Fractais. 2. Dimensão fractal. 3. Geometria fractal. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Laís Fernandes Mucheroni
Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
Coorientadora

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE - UNESP

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
Departamento de Matemática - UFSCar

Rio Claro, 18 de Agosto de 2017

Resumo

Intuitivamente, um ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e um cubo tem dimensão 3. Porém, na geometria fractal encontramos objetos matemáticos que possuem dimensão fracionária. Esses objetos são denominados fractais cujo nome vem do verbo "frangere", em latim, que significa quebrar, fragmentar. Neste trabalho faremos um estudo sobre o conceito de dimensão, definindo dimensão topológica e dimensão de Hausdorff. O objetivo deste trabalho é, além de apresentar as definições de dimensão, também apresentar algumas aplicações da dimensão de Hausdorff na geometria fractal.

Palavras-chave: Dimensão, Dimensão de Hausdorff, Dimensão Fractal, Geometria Fractal, Fractais.

Abstract

We know, intuitively, that the dimension of a dot is 0, the dimension of a line is 1, the dimension of a square is 2 and the dimension of a cube is 3. However, in the fractal geometry we have objects with a fractional dimension. This objects are called fractals whose name comes from the verb "frangere", in Latin, that means breaking, fragmenting. In this work we will study about the concept of dimension, defining topological dimension and Hausdorff dimension. The purpose of this work, besides presenting the definitions of dimension, is to show an application of the Hausdorff dimension on the fractal geometry.

Keywords: Dimension, Hausdorff dimension, Fractal Dimension, Fractal Geometry, Fractals.

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, pretendemos apresentar um estudo sobre o conceito de dimensão. Ao pensar em dimensão lembramos, primeiramente, da dimensão Euclidiana, a qual origina-se na geometria euclidiana plana descrita nas obras de Euclides. O conceito de dimensão na geometria euclidiana relaciona objetos ao espaço no qual estão inseridos. Assim, pontos têm dimensão 0, retas e curvas têm dimensão 1, planos têm dimensão 2, sólidos têm dimensão 3 e indutivamente podemos generalizar para dimensões $n > 3$.

Para Euclides, todas as formas existentes poderiam ser reduzidas a formas simples como quadrados, circunferências, etc. Porém a geometria euclidiana não era suficiente para descrever curvas que preenchiam o espaço. Este foi um problema que preocupou matemáticos como Cantor, Poincaré e Lebesgue, dando início ao surgimento da Topologia.

O conceito de dimensão topológica está relacionado com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em Topologia, através de homeomorfismos, retas podem ser transformadas em curvas, círculos em quadrados, etc. Nestes casos suas dimensões topológicas são preservadas.

A partir da Topologia, foram surgindo várias noções de dimensão, nas quais objetos topologicamente equivalentes sempre tenham a sua dimensão mantida e que esta seja sempre um número natural. No capítulo 3 deste trabalho, apresentaremos duas definições de dimensão topológica: as dimensões indutivas pequena e grande. Existe também a chamada dimensão topológica por cobertura, porém não a abordaremos neste trabalho.

Para fazer este estudo mais aprofundado sobre o conceito de dimensão precisamos, inicialmente, de alguns conceitos e resultados da Topologia, os quais apresentaremos no capítulo 2.

Contudo, existe uma geometria, na qual encontramos objetos matemáticos que possuem uma dimensão fracionária. Esses objetos são denominados fractais. Com as noções acima apresentadas sobre dimensão não conseguimos uma boa definição para a dimensão dos fractais. Uma melhor definição neste caso é a dimensão de Hausdorff, a qual será apresentada no capítulo 4, no qual abordaremos a geometria fractal e o cálculo da dimensão de Hausdorff de alguns fractais clássicos. Apresentaremos também um Apêndice com uma outra abordagem da dimensão de Hausdorff.

2 Topologia dos Espaços Métricos

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, resultados e outros aspectos elementares da Topologia Geral, os quais serão necessários para o entendimento dos capítulos seguintes. As principais referências que utilizamos como base para este capítulo estão em [4] e [8].

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1. *Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ uma função. Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(M_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(M_2) $d(x, y) = d(y, x)$;
(M_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Nessas condições, cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e um par (M, d), onde d é uma métrica sobre M, é chamado espaço métrico.

Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $S \subset M (S \neq \emptyset)$, se considerarmos a restrição $d_1 = d|S$, obviamente d_1 é uma métrica sobre S e (S, d_1) é um espaço métrico. Nessas condições, dizemos que S é um subespaço do espaço métrico M e que a métrica d_1 é induzida de M. Em geral, indica-se a métrica do subespaço do mesmo modo que a métrica de M, isto é, faz-se $d_1 = d$.

Exemplo 2.1. Métrica zero-um (ou métrica discreta).

Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y; \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Vamos verificar se d satifaz as condições M_1, M_2 e M_3.

(1) De fato, d satisfaz M_1, pois $d(x,y)=0$ se, e somente se, $x=y$. Caso $x \neq y$, tem-se $d(x,y)=1 \neq 0$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$, pois:

Se $x=y \;\Rightarrow\; d(x,y)=d(x,x)=0=d(x,x)=d(y,x)$.

Se $x \neq y \;\Rightarrow\; d(x,y)=1=d(y,x)$.

(3) Para verificar que d satisfaz a condição M_3 temos três casos:

Caso 1: Como $x=y=z$, então $d(x,y)=0 \leq 0=d(x,z)+d(z,y)$.

Caso 2: Como $x=y$, $x \neq z$ e $y \neq z$, temos que $d(x,y)=0 \leq 1+1=d(x,z)+d(z,y)$.

Caso 3: Como $x \neq y$, $x \neq z$ e $y \neq z$, segue que $d(x,y)=1 \leq 1+1=d(x,z)+d(z,y)$.

Portanto, d é uma métrica sobre M.

Exemplo 2.2. Considerando-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a função $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, dada por $d(x,y)=|x-y|$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

De fato, basta usar as propriedades de valor absoluto de números reais.

Portanto, a reta usual, com a métrica definida acima (também chamada de métrica usual em $\mathbb{R}$), é um espaço métrico.

Exemplo 2.3. O conjunto $\mathbb{R}^n$ é formado por todas as n-uplas $(x_1,x_2,...,x_n)$, onde cada $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três métricas importantes sobre $\mathbb{R}^n$ definidas da seguinte forma:

Sendo $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ pontos arbitrários do $\mathbb{R}^n$, as métricas são definidas da seguinte forma:

Métrica euclidiana: $D(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$.

Métrica de Manhattan: $D_1(x,y)=|x_1-y_1|+...+|x_n-y_n|$.

Métrica do máximo: $D_2(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}$.

Todas as condições para que D, D_1 e D_2 sejam métricas no $\mathbb{R}^n$ são imediatas, menos a condição M_3 para a métrica D. Sua demonstração usa a Desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^n$, apresentada abaixo.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se $x_1,x_2,...,x_n$ e $y_1,y_2,...,y_n$ são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

De fato, observe que para quaisquer $r,s \in \mathbb{R}$, $2rs \leq r^2+s^2$, pois $(r-s)^2=r^2-2rs+s^2 \geq 0$.

Assim, considerando $r=\frac{|x_i|}{p}$ e $s=\frac{|y_i|}{q}$ e sendo $p=\sqrt{{x_1}^2+...+{x_n}^2}$ e $q=\sqrt{{y_1}^2+...+{y_n}^2}$, temos:

$$2\frac{|x_i|}{p}\frac{|y_i|}{q} \leq \frac{{x_i}^2}{p^2}+\frac{{y_i}^2}{q^2},\ \textit{com}\ 1 \leq i \leq n.$$

Somando em relação ao índice i, segue que:

$$\frac{2}{pq}\sum_{i=1}^{n}(|x_iy_i|) \leq \frac{{x_1}^2+...+{x_n}^2}{(\sqrt{{x_1}^2+...+{x_n}^2})^2}+\frac{{y_1}^2+...+{y_n}^2}{(\sqrt{{y_1}^2+...+{y_n}^2})^2} = 1+1 \Leftrightarrow \frac{2}{pq}\sum_{i=1}^{n}(|x_iy_i|) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(|x_iy_i|) \leq pq = \sqrt{{x_1}^2+...+{x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2+...+{y_n}^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Agora, podemos provar a desigualdade triangular (M_3) para a métrica D:

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\begin{aligned} D(x,y)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\begin{aligned} D(x,y)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\ &= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}\right]^2 \\ &= [D(x,z)+D(z,y)]^2. \end{aligned}$$

Assim, $D(x,y)^2 \leq [D(x,z)+D(z,y)]^2$.
Portanto, $D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$.
Entre as métricas D, D_1 e D_2 vale a seguinte relação, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$D_2(x,y) \leq D(x,y) \leq D_1(x,y) \leq nD_2(x,y).$$

De fato, para $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$D_2(x,y) = |x_r - y_r|$ para algum $1 \leq r \leq n$.
Assim, $D_2(x,y) = |x_r - y_r| = \sqrt{(x_r-y_r)^2} \leq D(x,y)$;

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \leq \sqrt{[|x_1-y_1|+...+|x_n-y_n|]^2} \\ &= |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| = D_1(x,y); \end{aligned}$$

Supondo que $|x_r - y_r| = \max\{|x_1-y_1|, ..., |x_n-y_n|\}$, com $1 \leq r \leq n$, então

$$|x_i - y_i| \leq |x_r - y_r|, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Logo, $D_1(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq n|x_r - y_r| = nD_2(x,y)$.

Sejam (M_1, d_1),...,(M_n, d_n) espaços métricos arbitrários. É possível tornar o conjunto $M = M_1 \times ... \times M_n$ um espaço métrico através de métricas relacionadas às métricas $d_1, ..., d_n$.

Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ pontos de M e D, D_1 e D_2 funções definidas do seguinte modo:

$$D(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + ... + d_n(x_n,y_n)^2};$$
$$D_1(x,y) = d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n);$$
$$D_2(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), ..., d_n(x_n,y_n)\}.$$

As funções D, D_1 e D_2 são métricas sobre M, mas não faremos as demonstrações. Note que, quando $M = M_1 = ... = M_n$ e $d_1 = ... = d_n$, onde $d(x,y) = |x - y|$, D, D_1 e D_2 coincidem, respectivamente, com as métricas D, D_1 e D_2 introduzidas no $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dados $p \in M$ e $A \subset M, A \neq \emptyset$, chama-se distância de p ao conjunto A, e indica-se por $d(p,A)$, o seguinte número real não negativo:*

$$d(p,A) = \inf\{d(p,x); x \in A\}.$$

Note que a existência de $d(p,A)$ está assegurada pelo fato de que o conjunto dos $d(p,x)$, com $x \in A$, é limitada inferiormente por zero.

Dados dois subconjuntos A e B de M, ambos não vazios, chama-se distância de A a B, e indica-se por $d(A,B)$, o número real não negativo definido da seguinte forma:

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y); x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

A existência de $d(A,B)$ é garantida pelo fato do conjunto das distâncias $d(x,y)$, com $x \in A$ e $y \in B$ ser limitado inferiormente por zero.

Note também que se $A \cap B = \emptyset$ então $d(A,B) \neq 0$. Mas, podemos ter $d(A,B) = 0$ com $A \cap B = \emptyset$, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 2.4. Consideremos o $\mathbb{R}^2$ munido com a métrica usual. Vamos mostrar que a distância entre $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ é zero.

Para isso, é suficiente provar que, dado $\epsilon > 0$, existem $p \in A$ e $q \in B$, de maneira que $d(p,q) < \epsilon$. Dado $\epsilon > 0$, existe um número natural $n > 0$ de modo que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Então, tomando $p = (n, 0) = (n, \frac{1}{n})$, teremos

$$d(p,q) = \sqrt{(n-n)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

Definição 2.3. *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico (M,d). Suponhamos que exista $k \in \mathbb{R}$, de maneira que $d(x,y) < k$, para quaisquer $x, y \in A$. Nessas condições, dizemos que A é um conjunto limitado e o supremo do conjunto $\{d(x,y); x, y \in A\}$ chama-se diâmetro de A e é denotado por $d(A)$, ou diam(A). Assim,*

$$d(A) = \sup\{d(x,y) | x, y \in A\}.$$

Se o conjunto A não é limitado, por definição temos que $d(A) = \infty$.

Exemplo 2.5. Consideremos o $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual e verifiquemos que o diâmetro de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 1\}$ é igual a 2.

Indiquemos por $p = (0,0)$ a origem do $\mathbb{R}^2$ e tomemos dois pontos arbitrários $r, q \in A$. Então,

$$d(q,r) \leq d(q,p) + d(p,r) < 1 + 1 = 2,$$

o que garante que o número 2 é um limitante superior do conjunto $\{d(q,r) | q, r \in A\}$.

Agora, devemos mostrar que 2 é o menor desses limitantes superiores. Seja L um limitante superior e suponhamos, por absurdo, que $L < 2$. Tomemos um número natural n, tal que $\dfrac{L}{2-L} < n$. Nessas condições $\left(\dfrac{n}{n+1}, 0\right)$ e $\left(-\dfrac{n}{n+1}, 0\right)$ são pontos de A cuja distância é

$$\sqrt{(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1})^2 + 0^2} = \frac{2n}{n+1}.$$

Mas, como $\frac{L}{2-L} < n$, segue que $L < 2n$ e, portanto, $L < \frac{2n}{1+n}$, ou seja, existem dois pontos de A cuja distância é maior que L. Absurdo, pois L é um limitante superior do conjunto dessas distâncias. Logo, $2 \leq L$, para todo limitante superior L desse conjunto e, então, $d(A) = 2$.

Os espaços vetoriais são exemplos importantes de espaços métricos. Abaixo alguns conceitos elementares sobre os mesmos.

Definição 2.4. *Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se para seus elementos (denominados vetores) forem válidas as seguintes operações:*

(Adição) A cada par de vetores $u, v \in V$ corresponde um vetor $u + v \in V$ que satisfaz:

- (A_1) *$u + v = v + u, \forall u, v \in V$. (comutativa)*

- (A_2) *$(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$. (associativa)*

- (A_3) *existe em V um vetor denominado vetor nulo, denotado por $\overrightarrow{0}$, (ou 0_v), tal que $u + 0_v = u$.*

- (A_4) *a cada vetor $v \in V$ existe um vetor em V, denotado por $-v$ e denominado oposto de v, tal que $v + (-v) = 0_v$.*

(Multiplicação por escalar) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ corresponde um vetor $\alpha.v \in V$, denominado produto de um escalar por um vetor, que satisfaz:

- (M_1), *$(\alpha.\beta)u = \alpha(u\beta), \forall \alpha, \beta, \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$. (associativa)*

- (M_2) *$1.v = v, \forall v \in V$ (onde 1 é a unidade de $\mathbb{K}$).*

- (M_3) *$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$. (distributiva à esquerda)*

- (M_4) *$(\alpha + \beta).v = \alpha v + \alpha v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V$. (distributiva à direita)*

Em particular, sobre $\mathbb{R}^n$ a adição e a multiplicação por escalar são definidas da seguinte forma:

Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ ... \ , x_n + y_n);$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ ... \ ,\alpha x_n).$$

Neste espaço vetorial, $0 = (0, ..., 0)$ é o elemento neutro da adição e, dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-x = (-x_1, ..., -x_n)$ é o elemento oposto ou simétrico de x.

Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma, cuja definição apresentamos abaixo.

Uma norma em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada elemento $u \in V$ um número real não negativo, indicado por $\|u\|$ e chamado norma de u, de modo que são satisfeitas as seguintes propriedades:

(n_1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(n_2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

(n_3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$.

Se V é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, então $d : V \times V \to \mathbb{R}$, definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica sobre V.

2.2 Alguns conceitos topológicos

Seja (M, d) um espaço métrico. Dados p um ponto de (M, d) e um número real $\epsilon > 0$, a bola aberta de centro p e raio ϵ, indicada por $B(p, \epsilon)$, é o subconjunto de M dado por:

$$B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\}.$$

Essa definição nos permite introduzir um dos conceitos mais importantes na Topologia que são os conjuntos abertos.

Definição 2.5. *Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A$, ou seja, se para cada $p \in A$, existe uma bola aberta com centro em p contida em A.*

Um ponto p de um subconjunto A de M é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de A é chamado interior de A e denotado por $int(A)$. Note que $int(A) \subset A$ e que o interior de um conjunto é um conjunto aberto.

Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se seu complementar em M, $M - F$, é aberto em M.

Observação 2.1. Um conjunto fechado não é, necessariamente, não aberto. Dependendo do espaço métrico, podemos ter um subconjunto que não é fechado nem aberto, bem como um subconjunto pode ser fechado e aberto, simultaneamente.

Um conjunto X é dito aberto-e-fechado, ou "*clopen set*", se for aberto e fechado, simultaneamente.

Apresentaremos agora conceitos que permitem caracterizar conjuntos abertos e/ou fechados.

Definição 2.6. *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ é dito ponto aderente ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale que $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fecho de A e é denotado por $\overline{A}$. Segue que $A \subset \overline{A}$.

Diz-se que um ponto $p \in M$ é ponto de acumulação de A se, para todo $\epsilon > 0$, $(B(p, \epsilon) \cap A) - \{p\} \neq \emptyset$, isto é, toda bola aberta de centro em p contém ao menos um ponto de A, distinto de p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A e é denotado por A'. Note que $A \subset B \subset M \Rightarrow A' \subset B'$.

Um ponto $p \in M$ é dito ponto isolado de M se existe $\epsilon > 0$, de maneira que $B(p, \epsilon) = \{p\}$, isto é, um ponto é isolado se não é de acumulação.

A fronteira de um conjunto X, denotada por ∂X, é definida como $\partial X = \overline{X} - int(X)$.

Observação 2.2. Se um conjunto X é aberto-e-fechado, $int(X) = X = \overline{X}$, então $\partial X = \overline{X} - int(X) = \emptyset$. De forma análoga, a recíproca também é válida. Ou seja, um conjunto X é aberto-e-fechado se, e só se, $\partial X = \emptyset$.

Exemplo 2.6. Nesse exemplo, vamos abordar todos os conceitos acima mencionados para o caso em que (M, d) é um espaço métrico discreto.

Sejam $p \in M$ e $\epsilon > 0$. Uma bola aberta nesse espaço com centro em p e raio ϵ pode ser considerada como:

(i) Quando $0 < \epsilon \leq 1$. Neste caso, $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\} = \{p\}$, porque o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio p.

(ii) No caso de $1 < \epsilon$, temos que $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon)\} = M$, porque a distância de todos os pontos de M a p é igual a zero ou a 1, e portanto, menor que ϵ.

Neste caso, todo conjunto $A \subset M$ é aberto e fechado.

De fato, se $A = \emptyset$ é trivial. Se $A \neq \emptyset$, então A é uma união de conjuntos da forma $\{p\}$, com $p \in A$. Como cada um desses conjuntos é uma bola aberta de centro p e raio $\epsilon < 1$, concluímos que A é aberto.

Segue então que o subconjunto $M - A$ é aberto, portanto A é fechado.

Para todo $A \subset M$, $A' = \emptyset$.

De fato, para qualquer $p \in M$, podemos tomar $0 < \epsilon \leq 1$, tal que $B(p, \epsilon) = \{p\}$. Assim, $(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$, ou seja, $p \notin A'$.

Observação 2.3. (Propriedade de Arquimedes) Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um número natural n, tal que $nx < y$, isto é, $x < \frac{y}{n}$.

Exemplo 2.7. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Dados um ponto $p \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, o conjunto $]p - \epsilon, p + \epsilon[$ é uma bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ϵ , pois:

$$B(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x - p| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} |\ p - \epsilon < x < p + \epsilon\} =]p - \epsilon, p + \epsilon[.$$

Neste caso, todos os intervalos do tipo $]a, b[$ são abertos.

De fato, dado $p \in (a, b)$ e tomando $\epsilon = \min\{\frac{p-a}{2}, \frac{b-p}{2}\}$ temos que:

$$B(p, \epsilon) =]p - \epsilon, p + \epsilon[\ \subset\ ]a, b[.$$

O intervalo $[a, b]$ é fechado. De fato, $\mathbb{R} - [a, b] =] - \infty, a[\ \cup\ ]b, +\infty[$ que é a união de dois intervalos abertos. Logo, $\mathbb{R} - [a, b]$ é aberto.

Em $\mathbb{R}$, com a métrica usual, o único ponto de acumulação do conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ é o zero. De fato, sabemos, pela Observação 2.3, que dado $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{r} < \epsilon$. Assim, a bola aberta $B(0, \epsilon) =] - \epsilon, \epsilon[$ contém elementos $\frac{1}{r} \in A$, ou seja, $r \in A'$. Porém, para qualquer outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas abertas $B(p, \epsilon) =]p - \epsilon, p + \epsilon[$ cuja intersecção com A é somente o ponto p, isto é, $p \notin A'$. Logo, $A' = \{0\}$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. O conjunto $\{a, b\}$ é a fronteira dos intervalos (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Além disso, a fronteira do conjunto $\{a, b\}$ também é $\{a, b\}$ em $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}$, se $A =]a, b[$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b]$, então $\overline{A} = [a, b]$.

De fato, os pontos a e b são aderentes a esses intervalos, porque qualquer bola aberta (isto é, intervalo aberto) centrado em um desses pontos intercepta o conjunto A.

Agora, dado $p \in \mathbb{R}$, se $a < p < b$ temos que $p \in A$, logo $p \in \overline{A}$.

Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$ e tomando $\epsilon = \frac{a-p}{2}$, temos que

$$B(p, \epsilon) \cap A =]p - \epsilon, p + \epsilon[\cap A = \emptyset.$$

Então, neste caso, $p \notin \overline{A}$.

Proposição 2.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$. Então, A é um subconjunto aberto se, e somente se, $int(A) = A$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que A é aberto. Então, para todo ponto $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \in A$. Assim, pela definição anterior, $p \in int(A)$. Logo, $A \subset int(A)$. Como $int(A) \subset A$ é imediato, concluímos que $int(A) = A$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $int(A) = A$. Assim, todo ponto $p \in A$ é ponto interior de A e, então, existe $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. Logo, A é aberto. □

Proposição 2.2. *Seja (M, d) um espaço métrico.*

Então, para todo $A \subset M$, $M - \overline{A} = int(M - A)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} p \in M - \overline{A} &\Leftrightarrow \text{ existe } \epsilon > 0, \text{ tal que } B(p, \epsilon) \cap A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \text{ existe } \epsilon > 0, \text{ tal que } B(p, \epsilon) \subset M - A \\ &\Leftrightarrow p \in int(M - A) \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $F \subset M$. Então, F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração.

Suponhamos que F é fechado. Então, $M - F$ é aberto. Assim, pela Proposição 2.1, $int(M - F) = M - F$. Além disso, da Proposição 2.2, concluímos que $int(M - F) = M - (\overline{F})$.

Logo, $M - F = M - (\overline{F})$, o que implica que $\overline{F} = F$.

Para a recíproca, suponhamos que $F = \overline{F}$.

Pela Proposição 2.2, temos que $int(M - F) = M - (\overline{F}) = M - F$. Logo, $M - F$ é aberto e, portanto, F é fechado. □

Proposição 2.3. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, como $d(p, A) = \inf\{d(p, x) | x \in A\} = 0$ existe $a \in A$, tal que $0 \leq d(p, a) < \epsilon$ (caso contrário teríamos $0 < \epsilon \leq d(p, x)$, para todo $x \in A$, o que não é possível, pois, por hipótese $d(p, A) = 0$). Então, $a \in B(p, \epsilon)$ e, portanto, $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Logo, $p \in \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $d(p, A) = \epsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$, tal que $d(a, p) < \epsilon$.

Assim, $\epsilon = d(p, A) \leq d(p, a) < \epsilon$, o que é um absurdo. Logo, $d(p, A) = 0$. □

Proposição 2.4. *Sejam $(M_1, d_1), ..., (M_n, d_n)$ espaços métricos e consideremos sobre $M = M_1 \times ... \times M_n$ a métrica D_2 definida por*

$$D_2(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), ..., d_n(x_n, y_n)\},$$

para quaisquer $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$.

Nessas condições, para todo $a = (a_1, ..., a_n) \in M$, $B(a, \epsilon) = B(a_1, \epsilon) \times ... \times B(a_n, \epsilon)$.

Demonstração. Seja $p = (p_1, ...p_n) \in M$. Temos que:

$$\begin{aligned} p \in B(a, \epsilon) &\Leftrightarrow D_2(p, a) < \epsilon \Leftrightarrow \max\{d_1(p_1, a_1), ..., d_n(p_n, a_n)\} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow d_i(p_i, a_i) < \epsilon, \forall i = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow p_i \in B(a_i, \epsilon), \forall i = 1, 2, ..., n \\ &\Leftrightarrow p \in B(a_1, \epsilon) \times ... \times B(a_n, \epsilon). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. *Se $\mathbb{A}$ é a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico (M, d). Então:*

(i) $\emptyset$, $M \in \mathbb{A}$;

(ii) Se $A, B \in \mathbb{A}$, então $A \cap B \in \mathbb{A}$;

(iii) Se $(A_i)_{i \in J}$ é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathbb{A}$, $i \in J \subset \mathbb{N}$, então $\bigcup_{i \in J} A_i \in \mathbb{A}$.

Demonstração.

(i) É imediato que $\emptyset$ é aberto, pois não contém pontos e, então, não é possível contrariar a definição.

Já M é aberto, pois, por definição, toda bola aberta de centro em $p \in M$ é um subconjunto aberto de M.

(ii) Se $A \cap B = \emptyset$ pelo item (i) já temos o resultado. Se $A \cap B \neq \emptyset$, então existe $p \in A \cap B$, isto é, existe $p \in A$ e $p \in B$. Como A e B são abertos, existem $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, tais que $B(p, \epsilon_1) \subset A$ e $B(p, \epsilon_2) \subset B$. Então, tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, por propriedades de bolas abertas temos que $B(p, \epsilon) \subset A \cap B$. Logo, $A \cap B$ é um conjunto aberto.

(iii) Seja $p \in \bigcup_{i \in J}(A_i)$, qualquer. Então, existe um índice t, tal que $p \in A_t$. Como A_t é aberto, existe $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A_t$. Logo, $B(p, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in J}(A_i)$ e, portanto, $\bigcup_{i \in J}(A_i)$ é um conjunto aberto. □

Observação 2.4. Por indução, podemos provar que dados $A_1, ..., A_n \in \mathbb{A}(n \geq 1)$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathbb{A}$.

Porém, a intersecção de uma família infinita de conjuntos abertos, pode não ser um conjunto aberto. De fato, na família $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde $A_i = (\frac{-1}{i}, \frac{1}{i})$, $i = 1, 2, ...$, cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$ considerando a métrica usual. Entretanto, $\bigcap A_i = \{0\}$ que não é um conjunto aberto, já que não é um intervalo em $\mathbb{R}$ formado apenas pelo ponto 0.

Por passagem ao complementar, temos o seguinte resultado para subconjuntos fechados.

Proposição 2.6. *Se $\mathbb{F}$ é a coleção dos subconjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathbb{F}$;

(ii) Se $H, F \in \mathbb{F}$, então $H \cup F \in \mathbb{F}$;

(iii) Se $(F_i)_{i \in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, é uma família de conjuntos fechados, então $\bigcap_{i \in J} F_i \in \mathbb{F}$.

2.3 Métricas Equivalentes

Consideremos duas métricas d e d', não necessariamente iguais, sobre um mesmo conjunto M. Nessas condições, indicaremos por $B_d(p, \epsilon)$ uma bola de centro p e raio ϵ, segundo a métrica d e, por $B_{d'}(p, \epsilon)$ a bola de centro p e raio ϵ quando se tratar da métrica d'.

Definição 2.7. *Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Diz-se que d e d' são métricas equivalentes se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p, \epsilon)$, existe $\lambda > 0$, tal que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \epsilon)$ e, vice-versa, dada uma bola qualquer $B_{d'}(p, \epsilon)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$. Se d e d' são métricas equivalentes, indicaremos este fato por $d \sim d'$.*

Proposição 2.7. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem números reais $r, s > 0$, tais que $rd(x, y) \leq d'(x, y) \leq sd(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e consideremos $B_d(p, \epsilon)$.

Primeiramente, devemos mostrar que existe $\lambda_1 > 0$, tal que $B_{d'}(p, \lambda_1) \subset B_d(p, \epsilon)$.

Tomando $\lambda_1 = r\epsilon$, se $x \in B_{d'}(p, r\epsilon)$, então $d'(x, p) < r\epsilon$. Como, por hipótese, $rd(x, p) \leq d'(x, p)$, segue que, $rd(x, y) \leq d'(x, p) < r\epsilon$.

Assim, $rd(x, p) < r\epsilon$, e, portanto, $d(x, p) < \epsilon$. Logo, $x \in B_d(p, \epsilon)$.

Agora, considerando a bola $B_{d'}(p, \epsilon)$ provaremos que $B_d(p, \lambda_2) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$.

Se $\lambda_2 = \frac{\epsilon}{s}$ e dado $x \in B_d(p, \frac{\epsilon}{s})$, então $d(x, p) < \frac{\epsilon}{s}$. Então, $sd(x, p) < \epsilon$. Mas, como $d'(x, p) \leq sd(x, p)$, temos que $d'(x, p) \leq sd(x, p) < \epsilon$. Portanto, $d'(x, p) < \epsilon$ o que garante que $x \in B'_d(p, \epsilon)$.

Concluímos que:

$$B_{d'}(p, \lambda_1) \subset B_d(p, \epsilon) \text{ e } B_d(p, \lambda_2) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$$

Logo, $d \sim d'$. □

Portanto, pela proposição anterior, podemos concluir que as métricas D, D_1 e D_2 definidas no $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, pois como já vimos são válidas, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, as relações:

$$D_2(x, y) \leq D(x, y) \leq D_1(x, y) \leq nD_2(x, y) \leq nD(x, y).$$

2.4 Sequências em Espaços Métricos

Definição 2.8. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $n \to x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M, é uma sequência de elementos de M, denotada por $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ou, simplesmente, (x_n).*

Dada a sequência (x_r) em M, se $\{r_1, r_2, ...\} \subset \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < ...$, então a aplicação dada por $r_i \to x_{r_i}$ é indicada por $(x_{r_1}, x_{r_2}, ...)$ e recebe o nome de subsequência de (x_r).

Por exemplo, temos que $(a, a, b, a, a, b, a, a, b, \ldots)$ é uma sequência de elementos do conjunto $\{a, b\}$.

A sequência $(a, a, a, a, \ldots)$ é uma subsequência da sequência do exemplo anterior.

Definição 2.9. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \epsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$, tal que se $n \geq r$ então $x_n \in B(p, \epsilon)$.*

Para indicar que p é limite da sequência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$, ou ainda, $x_n \to p$ ou $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = p$. Neste caso, dizemos que (x_n) é uma sequência convergente ou que (x_n) converge para p.

Proposição 2.8. *Uma sequência (x_n) de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um índice r, de maneira que*

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon.$$

Se existe o limite, então ele é único.

Demonstração. Pelo fato de que $x_n \in B(p, \epsilon) \Leftrightarrow d(x_n, p) < \epsilon$, como x_n converge para p, temos que $n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \epsilon) \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon$.

Provemos agora a unicidade do limite, caso ele exista

Suponhamos que $lim\ x_n = p$ e $lim\ x_n = q$. Se $p \neq q$, então $d(p, q) > 0$. Assim, tomando $\epsilon = \dfrac{d(p, q)}{2}$ temos que existem índices r, s, de maneira que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon;$$
$$n \geq s \Rightarrow d(x_n, q) < \epsilon.$$

Tomando $t = \max\{r, s\}$, então $n \geq t \Rightarrow (d(x_n, p) < \epsilon$ e $d(x_n, q) < \epsilon)$

Logo, para todo $n \geq t$:

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(p, q).$$

Disto segue que $d(p, q) < d(p, q)$, o que é um absurdo. Portanto, $p = q$, isto é, o limite da sequência (x_n) é único. □

Proposição 2.9. *Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço (M, d) converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Demonstração. Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, ...)$ uma subsequência de (x_n) e consideremos $\epsilon > 0$. Por hipótese, *lim* $x_n = p$, então existe $k \in \mathbb{N}^*$, tal que $n \geq k \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon$.

Como cada $r_i \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r_2 < ...$, existe $r_t > k$. Portanto, para todo $r_i \geq r_t$, vale que $d(x_{r_i}, p) < \epsilon$. Logo, *lim* $x_{r_i} = p$. □

Definição 2.10. *Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico M se diz limitada se o conjunto $\{x_n | \ n = 1, 2, ...\}$ dos termos dessa sequência é limitada, isto é, existe $k > 0$, tal que $d(x_r, x_s) < k$, para quaisquer termos x_r e x_s da sequência dada.*

Proposição 2.10. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de um espaço métrico (M, d), convergente para $p \in M$. Considerando $0 < \epsilon_0 \leq 1$, dada a bola $B(p, \epsilon_0)$, então existe um único índice r, tal que $n \geq r \Longrightarrow x_n \in B(p, \epsilon_0)$.

Seja $k > \max\{d(x_i, p); i = 1, ..., r-1\}$ e consideremos a bola $B(p, \epsilon)$, onde $\epsilon = \max\{\epsilon_0, k\}$. Então, todos os pontos do conjunto $\{x_n | \ n = 1, 2, ...\}$ pertencem a essa bola e, portanto, para quaisquer x_i e x_j da sequência, vale que:

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, p) + d(p, x_j) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Logo, a sequência (x_n) é limitada. □

Observação 2.5. Nem toda sequência limitada é convergente. De fato, em $\mathbb{R}$ a sequência (1,2,1,2,...) é limitada, mas não é convergente.

As sequências nos permitem dar uma caracterização aos pontos aderentes de um subconjunto A de um espaço métrico.

Proposição 2.11. *Se A é um subconjunto de um espaço métrico (M, d) e p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência (x_n) de pontos de A, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.*

Demonstração. Como $p \in \overline{A}$, então para toda bola aberta $B(p, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $B(p, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Dessa forma, considere a sequência $(x_1, x_2, ...)$, onde $x_n \in A \cap B(p, \frac{1}{n})$, para todo $n \geq 1$. Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, temos, pela Observação 2.3, que existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{r} < \epsilon$. Então, $B(p, \frac{1}{r}) \subset B(p, \epsilon)$. Logo, para todo $n \geq r$ temos que $x_n \in B(p, \epsilon)$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, com (x_n) sequência em A. □

Definição 2.11. *Uma sequência (x_n) de números reais é dita crescente se $x_r \leq x_{r+1}$, para qualquer índice $r \in \mathbb{N}^*$. Se $x_r < x_{r+1}$, $\forall r \geq 1$, então (x_n) é dita estritamente crescente.*

Por outro lado, se $x_{r+1} \leq x_r$, para todo $r \in \mathbb{N}^*$, então (x_n) é dita decrescente. Quando $x_{r+1} < x_r$, $\forall r \in \mathbb{N}^*$, a sequência é dita estritamente decrescente.

Definição 2.12. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$, tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$, $\forall m, n \geq r$.*

Proposição 2.12. *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em M. Se (x_n) é convergente, com $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = p$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$, tal que $d(x_m, p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall m, n \geq r$. Logo, como $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n)$, então $d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n \geq r$. Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. $\square$

Proposição 2.13. *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em um espaço vetorial normado E, então existe uma bola aberta, de centro no vetor nulo, que contém todos os termos da sequência. Em outras palavras, toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E. Então, tomando $\epsilon > 1$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$, tal que $d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1, \forall m, n \geq r$.

Em particular, $\|x_m\| = \|x_m - x_r + x_r\| \leq \|x_m - x_r\| + \|x_r\|$ e, portanto, para todo $m \geq r$, $\|x_m\| < 1 + \|x_r\|$.

Seja $\lambda > \max\{\|x_1\|, ..., \|x_{r-1}\|, \|x_r\| + 1\}$. Então, para todo índice $n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda$, o que prova que $x_n \in B(0, \lambda), \forall n \geq 1$. $\square$

Proposição 2.14. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (M, d). Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $p \in M$, então $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n), tal que $\lim\limits_{k \to \infty} (x_{n_k}) = p$, para algum $p \in M$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $n_k \in \mathbb{N}^*$, tal que se $n_i \geq n_k$, então $d(x_{n_i}, p) < \frac{\epsilon}{2}$.

Por outro lado, sendo (x_n) de Cauchy, existe um índice $s \in \mathbb{N}^*$, tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}, \forall m, n \geq s$. Tomando $t = \max\{n_k, s\}$ e considerando $n, n_j > t$, segue que $d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \epsilon$, o que garante que (x_n) converge para o ponto p. $\square$

Corolário 2.2. *Se uma sequência de pontos de um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos distintos desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.*

Proposição 2.15. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente para um ponto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então, (x_n) é limitada, isto é, existe $k > 0$, tal que $|x_n| < k, \forall n \geq 1$. Este fato nos permite concluir a existência, para cada índice $m \in \mathbb{N}^*$, de $y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, ...\}$. Assim, obtemos uma sequência (y_n), tal que $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n \leq ... \leq k$. Mas ainda, (y_n) converge para $p = \sup\{y_n; n = 1, 2, ...\}$, que é um ponto de $\mathbb{R}$. A seguir, mostraremos que $\lim x_n = p$.

Da convergência de (y_n), dado $\epsilon > 0$, existe $r \in \mathbb{N}^*$, tal que se $n \geq r$, então $|y_n - p| < \frac{\epsilon}{3}$. Além disso, como (x_n) é de Cauchy, existe um índice $s \in \mathbb{N}^*$, de maneira que $|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}, \forall m, n \geq s$.

Seja $t > \max\{r, s\}$. Pelo fato de $y_t = \inf\{x_t, x_{t+1}\}$, existe $j \in \mathbb{N}^*, j \geq t$, para o qual $y_t \leq x_j < y_t + \frac{\epsilon}{3}$ e, portanto, $|x_j - y_t| < \frac{\epsilon}{3}$. Assim, para todo $n > t$,

$$|x_m - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. □

2.5 Espaços Topológicos

Definição 2.13. *Seja E um conjunto não vazio. Uma coleção τ de subconjuntos de E é chamada topologia sobre E se:*

(I) $\emptyset, E \in \tau$;

(II) Se $G_1, ..., G_n \in \tau$ $(n \geq 1)$, então $G_1 \cap ... \cap G_n \in \tau$;

(III) Se $(G_i)_{i\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, é uma família qualquer de conjuntos de τ, então $\bigcup\limits_{i\in J} G_i \in \tau$.

Nessas condições dizemos que o par (E, τ) é um espaço topológico; os membros da classe τ são chamados conjuntos abertos do espaço e cada elemento de E é designado por ponto.

Observação 2.6. Seja (E, τ) um espaço topológico. Dado $X \subset E, X \neq \emptyset$, a coleção $\tau_X = \{G \cap X | G \in \tau\}$ é uma topologia sobre X à qual chamamos topologia induzida por τ sobre X. O par (X, τ_X) é um subespaço de (E, τ).

Exemplo 2.8. Se $E = \{a, b, c, d\}$, a coleção $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ satisfaz as condições (I), (II) e (III) da Definição 2.13.

Exemplo 2.9. Dado $E \neq \emptyset$, a coleção $\tau = \mathscr{P}(E)$, conjunto das partes de E, é uma topologia sobre E.

Essa topologia é chamada topologia discreta sobre E. Note que $(E, \mathscr{P}(E))$ é metrizável: a coleção dos abertos de (E, d), onde d é a métrica discreta, é exatamente $\mathscr{P}(E)$.

Exemplo 2.10. Seja M, d um espaço métrico. A coleção de conjuntos abertos desse espaço satisfaz a definição de espaço topológico pois, pela Proposição 2.5, segue que:

(i) $\emptyset$ e M são abertos.

(ii) Se G e H são abertos, $G \cap H$ é aberto.

(ii) Se (G_i) é uma família de conjuntos abertos de (M, d), então $\cup G_i$ também é um conjunto aberto desse espaço.

Essa topologia é chamada de topologia induzida pela métrica d sobre M. Assim, todo espaço métrico é um espaço topológico.

Bases

Definição 2.14. *Uma coleção $\mathscr{B}$ de conjuntos abertos de um espaço topológico (E, τ)é dita base desses espaço, se todo aberto de E pode ser obtido como reunião de conjuntos da coleção $\mathscr{B}$, isto é, se para todo $G \in \tau$ existe uma subcoleção $\mathscr{B}'$, de maneira que*

$$G = \bigcup_{B \in \mathscr{B}'} B.$$

Ou ainda, equivalentemente, para qualquer $G \in \tau$, se $p \in G$, existe então $B \in \mathscr{B}$, de modo que $p \in B \subset G$.

Observação 2.7. Note que a subcoleção $\mathscr{B}$ pode ser vazia, caso em que se obtém $\bigcup_{B \in \emptyset} B = \emptyset$.

Observação 2.8. Um base $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$ de um espaço topológico X, com $n \in \mathbb{N}$, é uma base enumerável de X.

Exemplo 2.11. Seja $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$, onde $E = \{a, b, c\}$. Claramente, τ é uma topologia sobre E e $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ é uma base de (E, τ), pois todo conjunto de τ, inclusive o $\emptyset$ (devido à Observação 2.7), pode ser representado como reunião de elementos de $\mathscr{B}$.

Exemplo 2.12. Seja (E, τ) um espaço cuja topologia é a discreta.

Então, $\mathscr{B} = \{\{a\} | a \in E\}$ é uma base de E, pois $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, para todo $a \in A$.

Exemplo 2.13. A coleção de todos os intervalos abertos $\left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right)$, com raio $\frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, e centro em um número racional r é uma base enumerável para $\mathbb{R}$. De fato, dados um aberto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $x \in A$, existe $\epsilon > 0$, tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$. Tomemos um número racional r, tal que $|r - x| < \frac{1}{n}$, onde $\frac{2}{n} < \epsilon$. Então, $x \in \left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right) \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$.

Definição 2.15. *Uma vizinhança de um subconjunto S de um espaço topológico X é um conjunto V, tal que $S \subset int(V)$. Em outras palavras, existe um aberto A com $S \subset A \subset V$.*

Definição 2.16. *Um sistema fundamental de vizinhanças de um subconjunto S de um espaço topológico X é uma coleção $\mathscr{C}$ de vizinhanças de S, tal que dada qualquer vizinhança V de S, existe $U \in \mathscr{C}$ com $S \subset U \subset V$.*

Lema 2.1. *Se um espaço topológico X tem uma base contável, então toda base $\mathscr{B}$ para o espaço métrico X contém uma família contável $\mathscr{B}_0$ que é uma base para X.*

Demonstração. Seja $\mathscr{D} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base contável para o espaço X.

Para $i = 1, 2, ...$ defina $\mathscr{B}_i = \{U \in \mathscr{B} : U \subset V_i\}$. Como $\mathscr{B}$ é uma base para X, nós temos $\bigcup \mathscr{B}_i = V_i$. O subespaço V_i do espaço X também tem uma base contável, então a cobertura aberta $\mathscr{B}_i$ de V_i contém uma subcobertura contábel $\mathscr{B}_{0,i}$.

A família $\mathscr{B}_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{0,i} \subset \mathscr{B}$ é contável e é uma base para X. De fato, todo subconjunto aberto não-vazio de X pode ser representado como a união de uma subfamília de $\mathscr{D}$, e assim pode ser também ser representado como a união de uma subfamília $\mathscr{B}_0$. □

2.6 Continuidade

A continuidade de aplicações, intuitivamente, leva pontos próximos em pontos próximos. Quando o espaço é métrico, temos a noção de distância.

Definição 2.17. *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de maneira que: se $d(x, p) < \delta$, então $d'(f(x), f(p)) < \epsilon$.*

Dizer que f é contínua significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 2.16. *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ em N, existe uma bola $B(p, \delta)$ em M, tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que f seja contínua, isto é, dada a bola $B(f(p), \epsilon)$, existe $\delta > 0$, tal que se $d(x, p) < \delta$, então $d'(f(x), f(p)) < \epsilon$.

Consideremos a bola $B(p, \delta)$, queremos mostrar que sua imagem por f está contida em $B(f(p), \epsilon)$. De fato, se $y \in f(B(p, \delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$. Assim, $d(x, p) < \delta$. Então, como f é contínua, temos que $d'(f(x), f(p)) < \epsilon$. Logo, $y = f(x) \in B(f(p), \epsilon)$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que para toda bola $B(f(p), \epsilon)$, existe uma bola $B(p, \delta)$, tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$. Queremos mostrar que f é contínua em p. De fato, se $x \in B(p, \delta)$, então $d(x, p) < \delta$ e $f(x) \in f(B(p, \delta))$. Como $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$, segue que $f(x) \in B(f(p), \epsilon)$ e assim, $d'(f(x), f(p)) < \epsilon$. Logo, f é contínua em p. □

Exemplo 2.14. (Aplicação Lipschitziana)

Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz), tal que $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana.

Neste caso, f é contínua (em cada ponto $a \in M$). De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Então $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c.d(x, a) < c.\delta = \epsilon$.

Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f + g$ e $k.f$, onde $k \in \mathbb{R}$. Daí, toda combinação linear $k_1.f_1 + ... + k_n.f_n$ de funções reais lipschitzianas é lipschitziana.

Para uma função real de variável real f, a condição de Lipschitz significa que $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq c$ e isto equivale a afirmar que a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, em valor absoluto, menor ou igual a c.

Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se localmente lipschitziana quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = B(a, r)$, tal que a restrição $f|B$ é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é, evidentemente, contínua.

Exemplo 2.15. (Contrações fracas)

Se $f : M \to N$ é, tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma contração fraca. Neste caso, f é lipschitziana (com $c = 1$) e, portanto, contínua. Vejamos alguns exemplos de contrações fracas:

a) As aplicações constantes $f : M \to N$, $f(x) = k \in N$, para todo $x \in M$ são contrações fracas, pois $d(f(x), f(y)) = d(k, k) = 0 \leq d(x, y), \forall x, y \in M$.

b) Para cada $i = 1, ..., n$ a projeção $p_i : M_1 \times ... \times M_n \to M_i$, definida por $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$, é uma contração fraca, se tomamos no produto cartesiano qualquer uma das três métricas introduzidas anteriormente.

c) Num espaço vetorial normado E, a norma $|| \cdot || : E \to \mathbb{R}$ é uma contração fraca, pois $||x| - |y|| = |d(x, 0) - d(y, 0)| \leq d(x, y) = |x - y|$.

Definição 2.18. *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \longrightarrow N$ é chamada de homeomorfismo de M em N se satisfaz as seguintes condições:*

(a) f é bijetora;

(b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Neste caso, os espaços M e N se dizem homeomorfos.

O fato de $f : M \longrightarrow N$ ser contínua e bijetora não assegura que $f^{-1} : N \longrightarrow M$ seja contínua.

Observação 2.9. É comum usar-se a mesma designação para todos os espaços de uma mesma classe de espaços homeomorfos. Por exemplo, todo espaço homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$ chama-se arco e todo espaço homeomorfo ao círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ do plano euclidiano chama-se curva fechada simples, ou curva de Jordan.

Observação 2.10. Se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ são homeomorfismos, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ também é um homeomorfismo.

Exemplo 2.16. Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. O gráfico de $f : M \longrightarrow N$ é uma função contínua. O gráfico de f, $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}$ é homeomorfo ao domínio M dessa função. De fato, temos que a função $F : M \longrightarrow G(f)$, dada por $F(x) = (x, f(x))$, é contínua, já que suas componentes $x \mapsto x$ e $x \mapsto f(x)$ são funções contínuas. F também é bijetora pois, se $(x, f(x)) = (x', f(x'))$, então $x = x'$, e, dado $(x, f(x)) \in G(f)$, então existe $x \in M$, tal que $F(x) = (x, f(x))$.

Além disso, F^{-1} é contínua, por ser a restrição da projeção na primeira coordenada do gráfico de $G(f)$, isto é, $F^{-1}(x, f(x)) = p_1(x, f(x)) = x$.

Em um caso particular desse homeomorfismo, temos que a reta $\mathbb{R}$ é homeomorfa à parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$ uma vez que esta parábola é o gráfico da função $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

2.7 Tipos importantes de espaços topológicos

Um dos espaços topológicos em que podemos falar em separação é o Espaço de Hausdorff que definiremos abaixo. Os demais tipos de espaços em que se fala em separação exigem que sejam de Hausdorff.

Definição 2.19. *Um espaço topológico X é dito um espaço de Hausdorff se para cada par x, y de pontos distintos de X, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.*

Proposição 2.17. *Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$. Tomando $r = \frac{1}{3}d(x, y)$, temos que $x \in B_r(x)$, $y \in B_r(y)$ e $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$. □

Definição 2.20. *Um espaço topológico de Hausdorff X é dito normal quando dados conjuntos fechados $F, G \subset X$, com $F \cap G = \emptyset$, existem abertos $U, V \subset X$ com $F \subset U, G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 2.21. *Um espaço X é regular se todo ponto $x \in X$ possuir um sistema fundamental de vizinhanças fechadas.*

Observação 2.11. Para que um espaço X seja regular, é necessário e suficiente que, dados arbitrariamente um aberto $A \subset X$ e um ponto $x \in A$, exista um aberto U, tal que $x \in U$ e $\overline{U} \subset A$. Tomando $F = X - A$, vemos que X é regular se, e somente se, para todo fechado F em X e todo ponto $x \notin F$, existir um aberto U, tal que $x \in U$ e $\overline{U} \cap F = \emptyset$.

Exemplo 2.17. Todo espaço de Hausdorff normal X é regular.

De fato, a condição de regularidade de X pode ainda ser expressa assim: dados um fechado $F \subset X$ e um ponto $x \notin F$, existem abertos U, V em X com $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. (Basta tomar $V = X - \overline{U}$ como feito na Observação 2.11). Como no espaço de Hausdorff X todo ponto x é um subconjunto fechado, esta condição de regularidade é um caso particular da condição de normalidade, onde um dos fechados se reduziu a um ponto. Segue que todo espaço de Hausdorff compacto é regular e que todo espaço métrico é regular. (Num espaço métrico, toda vizinhança de x contém uma bola $B(x, \epsilon)$ e $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \subset B(x, \epsilon)$).

Definição 2.22. *Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é compacto se, para toda sequência (x_n) de pontos de K, existe uma subsequência (x_{n_i}) que converge para um ponto $p \in K$.*

Um espaço métrico (M, d) se diz compacto se o conjunto M é compacto.

Exemplo 2.18. Se K é finito e $(x_1, x_2, ...)$ é uma sequência de pontos de K, então existe um termo x_r, tal que $(x_r, x_r, ...)$ é uma subsequência da sequência dada. Como $(x_r, x_r, ...) \longrightarrow x_r$, então K é compacto.

Exemplo 2.19. Na reta real todo intervalo $[a, b]$ é compacto. De fato, seja $(x_1, x_2, ...)$ uma sequência de pontos de $[a, b]$ e consideremos a sequência $(s_1, s_2, ...)$, onde $s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Obviamente, temos que $a \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq b$ e, portanto, se $s = \sup\{s_n; n \geq 1\}$, então $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Assim, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, para todo $n \geq n_1$, considerando algum índice $m \geq n_1$, como $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, ...\}$, existe um índice $i_1 \geq m$, de modo que $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$. Logo, $|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1$.

Analogamente, para $\epsilon = \frac{1}{4}$, existe um índice $n_2 \in N^*$, tal que $|s_n - s| < \frac{1}{4}$, para todo $n \geq n_2$. Tomando um índice m, tal que $m > n_2$ e $m > i_1$, sendo $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, ...\}$, existe um índice $i_2 \geq m$, de maneira que $|x_{i_2} - s_m| < \frac{1}{4}$. Assim, $|x_{i_2} - s| \leq |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Procedendo dessa forma, obtemos uma sequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, ...)$, que é subsequência de $(x_1, x_2, ...)$, tal que $|x_{i_r} - s| < \frac{1}{2^{r-1}}, r \geq 1$. Como $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{2^{r-1}} = 0$, então $\lim\limits_{r\to\infty} x_{i_r} - s = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{r\to\infty} x_{i_r} = s$, ou seja, mostramos que toda sequência em $[a, b]$ possui uma subsequência convergente. Portanto, $[a, b]$ é compacto.

Proposição 2.18. *Seja M um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M, tais que F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F também é compacto.*

Demonstração. Se $(x_1, x_2, ...)$ é uma sequência de pontos de F, é também um sequência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, ...)$ de (x_i), tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Para esta subsequência há duas possibilidades:

(i) $A = x_{i_1}, x_{i_2}, ...$ é finito.

Neste caso, existem subsequências de (x_{i_r}) que são constantes e, devendo cada uma delas convergir para p, então seus termos são todos iguais a p e, portanto, $p \in F$.

(ii) A é infinito.

Como $p = \lim x_{i_r}$, então para cada $\epsilon > 0$ a bola aberta $B = B(p, \epsilon)$ contém infinitos termos de (x_{i_r}) e, portanto, é infinita a intersecção $B - \{p\} \cap A$. Segue que $p \in A'$ e, então, $p \in F'$, uma vez que $A \subset F$. Como $F' \in F$ (pois F é fechado), então $p \in F$. □

Proposição 2.19. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado.*

Demonstração. Basta provar que $\overline{K} \subset K$. Se $p \in \overline{K}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale a desiqualdade:

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Assim, tomando em cada umas dessas intersecções, um e apenas um elemento, obtemos uma sequência de pontos de K que converge para p. Assim, todas as subsequências dessa sequência convergem para p. Como K é compacto, pelo menos uma delas converge para um ponto de K. Logo, $p \in K$. □

Definição 2.23. *Um subconjunto A de um espaço métrico M se diz totalmente limitado se, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, de maneira que:*

$$A \subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup ... \cup B(x_n, \epsilon).$$

Proposição 2.20. *Sejam M e N espaços métricos e consideremos sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas equivalentes D, D_1 ou D_2. Se K e L são subconjuntos de M e N, respectivamente, então $K \times L$ é compacto se, e somente se, K e L são compactos.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Sendo $K \times L$ compacto, como as projeções $p_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $p_2 : M \times N \longrightarrow N$ são contínuas (Exemplo 2.15), então $p_1(K \times L) = K$, $p_2(K \times L) = L$ também são compactos.

($\Longleftarrow$) Seja $(z_n) = ((x_n, y_n))$ uma sequência de pontos de $K \times L$. Então (x_n) é uma sequência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ de (x_n), tal que $x_{n_i} \longrightarrow p \in K$. Considerando a subsequência y_{n_i} da sequência y_n, sendo L compacto existe uma subsequência $(y_{n_{i_k}})$, tal que $\lim y_{n_{i_k}} = q \in L$. Assim, $(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}})$ é uma subsequência de (z_n) e

$$\lim(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}}) = (p, q) \in K \times L.$$

□

Corolário 2.3. *Se $K_1, K_2, ..., K_n$ são respectivamente subconjuntos compactos dos espaços métricos $M_1, M_2, ..., M_n$ e se em $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ considerarmos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), então $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$ é compacto se, e somente se, $K_1, K_2, ..., K_n$ são compactos.*

Observação 2.12. Da definição anterior segue que todo conjunto totalmente limitado é limitado.

Proposição 2.21. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é totalmente limitado.*

Demonstração. Suponhamos que K seja compacto e não totalmente limitado. Então, existe $\epsilon > 0$, tal que:

$K \not\subset B(x_1, \epsilon)$, $\forall x_1 \in K$

$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, $\forall x_2 \in K - B(x_1, \epsilon)$

$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, $\forall x_3 \in K - \bigcup_{i \in J} B(x_1, \epsilon)$, onde $J = \{1, 2\}$

...

Faremos agora a sequência $(x_1, x_2, ...)$, de maneira que $x_1 \in K$, $x_2 \in K - B(x_1, \epsilon)$, ..., o que nos é possibilitado pelas considerações anteriores. Como seus termos estão em K, que é compacto, (x_n) admite uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ que converge para $p \in K$. Como os termos de (x_{n_i}) são disjuntos entre si, a bola aberta $B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$ contém infinitos desses termos. Assim, tomando $x_r, x_s \in B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$, de maneira que $x_r \neq x_s$ e $r < s$, temos:

$$d(x_r, x_s) \leq d(x_r, p) + d(p, x_s) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Segue que $x_s \in B(x_r, \epsilon)$ o que é um absurdo. □

Corolário 2.4. *Todo subconjunto compacto de um espaço métrico M é limitado.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.21 e da Observação 2.12. □

Proposição 2.22. *Um subconjunto A do espaço $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Segue do Corolário 2.4 e da Proposição 2.22, pois $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico.

($\Longleftarrow$) Sendo A limitado existe $a > 0$, tal que:

$$A \subset [-a, a] \times ... \times [-a, a] \quad (n \text{ cópias})$$

Como cada $[-a, a]$ é compacto em $\mathbb{R}$, então o produto

$$[-a, a] \times ... \times [-a, a]$$

é compacto em $\mathbb{R}^n$. Assim, A é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que está contido num compacto deste espaço. Logo, pela Proposição 2.18, A também é compacto. □

Observação 2.13. Uma outra definição de espaços compactos é dada através de coberturas.

Definição 2.24. *Seja X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma cobertura de S é uma família $\mathscr{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$, tal que $s \in C_\lambda$.*

Equivalentemente, pode-se considerar uma cobertura de S como uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X (sem índices), tal que para cada $s \in S$ existe um conjunto C da coleção $\mathscr{C}$ com $s \in C$.

Definição 2.25. *Seja $\mathscr{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S. Uma subcobertura de $\mathscr{C}$ é uma subfamília $\mathscr{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}, L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de S, isto é, continua válida a propriedade $S \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$.*

Definição 2.26. *Um espaço topológico M é compacto se, para toda cobertura por abertos de M, existe uma subcobertura finita.*

Exemplo 2.20. Para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = (-n, n)$ o intervalo aberto da reta de extremos $-n$ e n. A família $\mathscr{C} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável da reta $\mathbb{R}$. Seja $L \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito qualquer (por exemplo, o conjunto dos números pares). A família $\mathscr{C}' = (I_n)_{n \in L}$ é uma subcobertura de $\mathscr{C}$. Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto finito $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ de inteiros positivos, temos $I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k} = I_{n_k}$, logo, $\mathscr{C}'' = (I_{n_1}, \dots , I_{n_k})$ não é uma subcobertura de $\mathscr{C}$. Em outras palavras, $\mathscr{C}$ não possui subcobertura finita.

Definição 2.27. *Um espaço métrico (M, d) se diz desconexo quando existem dois subconjuntos abertos G e H de M, ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Neste caso, dizemos que o par de abertos G e H forma uma desconexão, ou cisão, de M e usamos a notação $M = G \setminus H$.*

Um espaço conexo é um espaço que não é desconexo. Portanto, dizer que M é conexo, significa dizer que não existe nenhuma desconexão em M.

Um subconjunto $A \subset M$ se diz conexo quando o subespaço (A, d), onde d é a métrica induzida sobre A pela métrica de M, é conexo.

Observação 2.14. Da definição anterior, note que, se G e H são abertos, tais que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$, então $G = M - H$ e $H = M - G$, o que implica que G e H também são subconjuntos fechados de M.

Exemplo 2.21. Seja M um conjunto com mais de um elemento e consideremos em M a métrica discreta. Então, (M, d) é desconexo. De fato, para todo $a \in M$, são abertos e não vazios os subconjuntos $G = \{a\}$ e $H = M - G = M - \{a\}$ e, obviamente, $M = G \setminus H$.

Exemplo 2.22. O subconjunto $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ é desconexo. De fato, tomemos $U = \{0\}$ e $V = \{1\}$. Note que U e V são disjuntos, não vazios e sua união é o conjunto dado. Além disso, $U =]-1, \frac{1}{2}[\cap \{0, 1\}$ e $V =]\frac{1}{2}, 2[\cap \{0, 1\}$ então, U e V são abertos em $\{0, 1\}$, o que completa a justificativa.

Proposição 2.23. *Um espaço M é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0,1\}$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que M é desconexo. Então, existem abertos G e H do espaço, de maneira que $M = G \setminus H$. Consideremos $f : M \longrightarrow \{0,1\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in G; \\ 1, & \text{se } x \in H. \end{cases}$$

Dessa forma, f é sobrejetora, uma vez que $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$, e contínua, pois, considerando os abertos de $\{0,1\}$, que são $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$, todos tem como imagem inversa por f um aberto de M, posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = G, f^{-1}(\{1\}) = H$ e $f^{-1}(\{0,1\}) = M$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que exista uma função $f : M \longrightarrow \{0,1\}$ sobrejetora e contínua. Assim, os conjuntos $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$ são abertos e não-vazios. Além disso, $G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $G \cup H = f^{-1}(\{0,1\}) = M$. Então, $M = G|H$, ou seja, M é desconexo. □

Corolário 2.5. *Um espaço M é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas de M em $\{0,1\}$ são as constantes.*

Proposição 2.24. *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um conjunto conexo de N.*

Demonstração. Suponhamos que $f(M)$ é desconexo.

Então, existe uma função $g : f(M) \longrightarrow \{0,1\}$ contínua e sobrejetora. Tomemos $f_1 : M \longrightarrow f(M)$ definida por $f_1(x) = f(x), \forall x \in M$. Assim, f_1 é sobrejetora e contínua. Portanto, a função $g \circ f_1 : M \longrightarrow \{0,1\}$ é contínua e sobrejetora, o que é um absurdo, pois M é conexo.

Logo, $f(M)$ é conexo. □

Proposição 2.25. *Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.*

Demonstração. Se $A \cup B$ fosse desconexo, existiria uma função $f : A \cup B \longrightarrow \{0,1\}$ contínua e sobrejetora. Então, dado $p \in A \cap B$ e suponhamos que $f(p) = 0$. Além disso, existe $q \in A \cap B$, de maneira que $f(q) = 1$. Digamos, por exemplo, que $q \in A$. Assim, a função $f|_A : A \longrightarrow \{0,1\}$ é contínua, pois é a restrição de uma função contínua, e também sobrejetora, pois $(f|_A)(p) = 0$ e $(f|_A)(q) = 1$, o que é um absurdo, visto que A é conexo.

No caso de termos $q \in B$, basta procedermos como acima para $g|_B : B \longrightarrow \{0,1\}$.

□

Proposição 2.26. *Seja M um espaço métrico, tal que para qualquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então, M é conexo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que M é desconexo.

Então, existe $f : M \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Dessa forma, podemos considerar $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$.

Seja $A \subset M$ um subconjunto conexo, tal que $p, q \in A$.

Logo, a função $f|_A : A \longrightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora, o que contradiz o fato de A ser conexo. □

Proposição 2.27. *Dados dois espaços métricos M e N, então $M \times N$ é conexo se, e somente se, M e N são conexos.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $M \times N$ é conexo.

Como as projeções p_1 e p_2 são contínuas e $p_1(M \times N) = M$ e $p_2(M \times N) = N$, então o fato de $M \times N$ ser conexo acarreta a conexidade de M e N.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que M e N são conexos.

Sejam $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ pontos arbitrários de $M \times N$. Note que $\{a\} \times N$ é conexo, pois é homeomorfo a N (pela aplicação $y \mapsto (a, y)$), $M \times \{d\}$ também conexo e vale a relação $(\{a\} \times N) \cap (M \times \{d\}) \neq \emptyset$. Então, pela Proposição 2.25, $(\{a\} \times N) \cup (M \times \{d\})$ é conexo. Assim, para quaisquer $p, q \in M \times N$, existe um subconjunto conexo de $M \times N$ que contém esses pontos. Portanto, a Proposição 2.26 garante que $M \times N$ é conexo. □

Corolário 2.6. *O produto cartesiano $M = M_1 \times ... \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada M_i é conexo, $1 \leq i \leq n$.*

Proposição 2.28. *Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ é a usual, então são conexos todos os intervalos do tipo $[a, b], [a, b[,]a, b]$.*

Demonstração. Faremos a demonstração para um intervalo da forma $]a, b] = J$. Se J fosse desconexo, existiria uma função $f : J \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Podemos supor que $f(b) = 1$ pois, caso contrário, tomando $g(x) = 1 - f(x)$ (com g também contínua e sobrejetora), teríamos $g(b) = 0$.

Seja $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$. Dessa forma, como f é contínua em $c \in J$, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in J$ e $|x - c| < \delta$, então, $|f(x) - f(c)| < 1$.

Assim, como $f(x) = 0$ e $|f(x) - f(c)| < 1$ temos que $|f(c)| < 1$ e, portanto, $f(c) = 0 = f(x)$.

Então, concluímos que $f(x) = f(c)$, para todo $x \in J$, tal que $c - \delta < x < c + \delta$.

Mas ainda, como $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$, existe $u \in J$, tal que $c - \delta < u \leq c$ e $f(u) = 0$, o que implica que $c - \delta < u < c + \delta$ e $f(c) = f(u) = 0$.

Por outro lado, tomando $v \in J$ de modo que se tenha $c < v < c + \delta$, então $f(v) = 1$ e $f(c) = f(v) = 1$, o que é um absurdo, pois $f(c)$ não pode ter duas imagens distintas.

Portanto, J é conexo.

O caso em que $J = [a, b[$ segue de maneira análoga, considerando-se $f(a) = 1$ e $c = \inf\{x \in J | f(x) = 0\}$.

Já para $J = [a, b]$ a demonstração acima é suficiente. $\square$

Corolário 2.7. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é conexo, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a todo bola aberta da forma $]-a, a[$, $a \in \mathbb{R}$, e estas bolas são conexas, então $\mathbb{R}$ é conexo. Então, o Corolário 2.6 nos garante a conexidade de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. $\square$

Definimos conjuntos conexos em espaços métricos. Porém, num espaço topológico X, a existência de um subconjunto simultaneamente aberto e fechado, diferente de X e de $\emptyset$, é equivalente a existência de uma decomposição $A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$, A e B ambos abertos (e, por conseguinte fechados) e não-vazios. Basta tomar $B = X - A$.

Portanto, um espaço topológico X é conexo se, e somente se, não pode ser expresso como reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não-vazios.

Definição 2.28. *Um espaço topológico X é conexo quando $\emptyset$ e X são os únicos subconjuntos de X, simultaneamente, abertos e fechados.*

Definição 2.29. *Um espaço métrico M é chamado completo, ou espaço de Banach, se toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M.*

Exemplo 2.23. Segue da Proposição 2.15 que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Proposição 2.29. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Da compacidade de M temos que existe uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...)$ de (x_n) que converge para um ponto $p \in M$. Mas, da Proposição 2.14, garantimos que a sequência (x_n) também converge para o ponto p, isto é, $x_n \longrightarrow p$, quando $n \longrightarrow \infty$, implicando que M é completo. $\square$

Definição 2.30. *Um subconjunto A de um espaço X é denso em X se o fecho de A, $\overline{A}$, é igual ao conjunto X.*

De maneira equivalente, podemos dizer que um subconjunto A de um espaço X é denso se, para todo o ponto $x \in X$, qualquer vizinhança de x contém um elemento de A.

Exemplo 2.24. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Da mesma forma, $(0, 1)$ é denso em $[0, 1]$.

Definição 2.31. *Um espaço métrico X é separável se existe um subconjunto enumerável denso em X.*

Exemplo 2.25. Todo espaço métrico totalmente limitado M é separável. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto finito $E_n = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}\}$, $p = p(n)$, tal que cada ponto $x \in M$ dista menos de $\frac{1}{n}$ de algum ponto de E_n. Segue, então, que a reunião $E = \cup E_n$ é um subconjunto enumerável denso em M.

Em particular, todo espaço métrico compacto, é separável.

Definição 2.32. *Diz-se que um espaço topológico X é um espaço de Lindelöf quando toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável.*

Proposição 2.30. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

(1) M tem base enumerável;

(2) M é um espaço de Lindelöf;

(3) M é separável.

A demonstração da Proposição 2.30 pode ser encontrada em [8].

3 Dimensão Topológica

Da geometria euclidiana criamos uma noção intuitiva do conceito de dimensão, isto é, que um ponto tem dimensão 0, uma reta ou curva tem dimensão 1, planos dimensão 2, sólidos dimensão 3 e por indução podemos generalizar para dimensões $n > 3$. Entretanto, como podemos definir formalmente o conceito de dimensão? Neste capítulo, veremos uma primeira definição formal para esse conceito, a dimensão topológica. O fato de ser chamada topológica quer dizer que se dois conjuntos são homeomorfos, então eles têm a mesma dimensão.

Abordaremos duas das principais definições para a Dimensão Topológica:

1. Dimensão Indutiva Pequena (ind);

2. Dimensão Indutiva Grande (Ind);

Também existe uma outra definição, a de dimensão topológica por cobertura (dim), porém esta não será abordada neste trabalho.

Na verdade, para espaços separáveis, essas definições são equivalentes.

Se tomarmos novamente um cubo cuja dimensão é 3, sabemos que sua fronteira é composta por quadrados, cuja dimensão é 2. Já a fronteira de um quadrado são linhas cuja dimensão é 1. A fronteira de uma linha é composta por pontos cuja dimensão é 0. Assim, intuitivamente, pensamos na dimensão de um espaço como sendo 1 somado à dimensão de sua fronteira.

A partir dessa ideia, veremos as definições, alguns exemplos e resultados sobre a Dimensão Indutiva Pequena e, em seguida, a Dimensão Indutiva Grande.

Neste capítulo, utilizamos [5], [10] e também [7] como principais referências.

3.1 Dimensão Indutiva Pequena

Definição 3.1. *A Dimensão Indutiva Pequena de um espaço métrico X, denotada por* $\operatorname{ind} X$, *onde* $\operatorname{ind} X \in \{-1, 0, 1, 2, ..., \infty\}$, *é definida como segue:*

1. $\operatorname{ind} X = -1$ *se, e somente se,* $X = \emptyset$.

2. Considerando $X \neq \emptyset$ *e* $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\operatorname{ind} X \leq n$ *se para todo* $x \in X$ *e para todo conjunto aberto* U *existe um aberto* V*, com* $x \in V$*, tal que* $\overline{V} \subseteq U$*, e* $\operatorname{ind} \partial V \leq n - 1$*, onde* ∂V *é a fronteira de* V.

3. Se $\operatorname{ind} X \leq n$ *e* $\operatorname{ind} X > n - 1$ *então* $\operatorname{ind} X = n$.

4. Se ind $X > n$, *para todo* n, *dizemos que* ind $X = \infty$.

Observação 3.1. A condição 2 da Definição 3.1 pode ser reescrita, de maneira equivalente, como: ind $X \leq n$ se existe uma base para X consistindo de conjuntos U com ind $\partial U \leq n - 1$.

Da Definição 3.1 e da Observação 3.1, um espaço métrico X é zero-dimensional se, e somente se, X tem uma base em que seus conjuntos abertos consistem em conjuntos com fronteira vazia, isto é, uma base constituída de conjuntos, simultaneamente, abertos e fechados.

Teorema 3.1. ***(Teorema do Subespaço)*** *Para todo subespaço M de um espaço regular X tem-se que* ind $M \leq$ ind X.

Demonstração. Observe que o teorema é válido se ind $X = \infty$, então vamos supor que ind $X < \infty$. Vamos aplicar o princípio da indução sobre ind X. Inicialmente, note que a igualdade é válida se ind $X = -1$.

Como hipótese de indução, vamos assumir que o teorema é válido para todo espaço regular cuja dimensão não excede $n - 1 \geq -1$.

Considere um espaço regular X com ind $X = n$, um subespaço M do espaço X, um ponto $x \in M$ e uma vizinhança V do ponto x em M. Por definição de subespaço topológico, existe um subconjunto aberto V_1 do espaço X satisfazendo a igualdade $V = M \cap V_1$.

Como ind $X \leq n$, existe um conjunto aberto $U_1 \subset X$, tal que

$$x \in U_1 \subset V_1 \text{ e ind } \partial U_1 \leq n - 1.$$

A intersecção $U = M \cap U_1$ é um conjunto aberto em M e satisfaz $x \in U \subset V$.

A fronteira $\partial_M U$ do conjunto U no espaço M é igual a $M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M - U_1}$.

Então a fronteira $\partial_M U$ é um subespaço do espaço ∂U_1. Assim, pela hipótese de indução, ind $\partial_M U \leq n - 1$, o que juntamente com o item 2 da Definição 3.1 garante a desigualdade ind $M \leq n =$ ind X. □

Lema 3.1. *Se X é um conjunto não vazio formado por um número finito de pontos, então* ind $X = 0$.

Demonstração. Como X é um conjunto formado por um número finito de pontos, considere a topologia discreta (X, τ), onde $\tau = \mathscr{P}(X)$ e (X, d) é um espaço métrico, com d a métrica discreta.

Note que, considerando a topologia discreta, cada subconjunto de $\mathscr{P}(X)$ é, simultaneamente, aberto e fechado. Em particular, os subconjuntos de $\mathscr{P}(X)$ formados por um único elemento formam uma base de X composta por conjuntos que são abertos e fechados, simultaneamente. Então, ind $X \leq 0$.

Como $X \neq \emptyset$ então ind $X \neq -1$. Portanto, ind $X = 0$. □

Teorema 3.2. *Se X é um espaço métrico conexo com pelo menos dois elementos, então X não tem dimensão indutiva pequena 0, ou seja,* $\operatorname{ind} X \neq 0$.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então existem conjuntos abertos disjuntos $U, V \subset X$, tais que $x \in U$ e $y \in V$ já que todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

Temos que U e V são subconjuntos não-vazios de X que também não são todo o conjunto X, pois $x \in U$ e $y \in V$, mas $y \notin U$ e $x \notin V$. Então, devem existir elementos de uma base de X, B_u e B_v, com $x \in B_u$ e $y \in B_v$, que não são $\emptyset$ nem X, tais que $B_u \subset U$ e $B_v \subset V$.

Assim, qualquer base $\mathscr{B}$ de X contém os elementos B_u e B_v, que não são nem vazios nem todo o conjunto X, desde que U e V são subconjuntos disjuntos de X.

Como X é conexo, B_u e B_v não são abertos e fechados, simultaneamente.

Então, não existe uma base para os abertos de X constituída somente de conjuntos abertos e fechados, simultaneamente. Logo, $\operatorname{ind} X \neq 0$. □

Corolário 3.1. *$\mathbb{R}$ não tem dimensão indutiva pequena 0, ou seja,* $\operatorname{ind}(\mathbb{R}) \neq 0$.

Demonstração. Como $\mathbb{R}$ é conexo, segue do teorema anterior que $\operatorname{ind}(\mathbb{R}) \neq 0$. □

Teorema 3.3. *$\mathbb{R}$ tem dimensão indutiva pequena 1.*

Demonstração. A base padrão para $\mathbb{R}$ é a coleção $\mathscr{B}$ de intervalos abertos $(x-r, x+r)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. A fronteira de cada um desses intervalos é um conjunto de dois pontos $\{x-r, x+r\}$.

Pelo Lema 3.1, o conjunto $\{x-r, x+r\}$, que é um conjunto com um número finito de pontos, tem dimensão indutiva pequena 0. Assim, a dimensão indutiva pequena da fronteira dos conjuntos de uma base de $\mathbb{R}$ é 0. Então, $\operatorname{ind}(\mathbb{R}) \leq 1$.

Pelo corolário anterior, $\operatorname{ind}(\mathbb{R}) \neq 0$. Logo, $\operatorname{ind}(\mathbb{R}) = 1$. □

Definição 3.2. *Sejam X um espaço topológico e A, B um par de subconjuntos disjuntos do espaço X. Dizemos que um conjunto $L \subset X$ é uma partição de A e B , se existem conjuntos abertos $U, W \subset X$ satisfazendo as condições:*

$$A \subset U, \;\; B \subset W, \;\; U \cap W = \emptyset \;\; e \;\; X - L = U \cup W. \qquad (*)$$

Note que a partição L é um subconjunto fechado de X.

Proposição 3.1. *Um espaço regular X satisfaz a desigualdade* $\operatorname{ind} X \leq n$ *e $n \geq 0$ se, e somente se, para todo ponto $x \in X$ e cada conjunto fechado $B \subset X$, tal que $x \notin B$ existe uma partição L entre x e B, tal que* $\operatorname{ind} L \leq n-1$.

Demonstração. Seja X um espaço regular satisfazendo $\operatorname{ind} X \leq n$, com $n \geq 0$. Considere um ponto $x \in X$ e um conjunto fechado $B \subset X$, tal que $x \notin B$. Existe uma vizinhança $V \subset X$ do ponto x, tal que $\overline{V} \subset X - B$ e um conjunto aberto $U \subset X$, tal que $x \in U \subset V$ e $\operatorname{ind} \partial U \leq n-1$. Note que o conjunto $L = \partial U$ é uma partição entre $\{x\}$ e B; os conjuntos U e $W = X - \overline{U}$ satisfazem as condições (1) da definição anterior.

Agora, assumimos que um espaço regular X satisfaz as condições do teorema. Considere um ponto $x \in X$ e uma vizinhança $V \subset X$ do ponto x. Seja L uma partição entre x e $B = X - V$, tal que $\operatorname{ind} L \leq n-1$ e sejam $U, W \subset X$ subconjuntos disjuntos de X satisfazendo as condições da Definição 3.2. Temos

$$x \in U \subset X - W \subset X - B = V$$

e

$$\partial U \subset (X - U) \cap (X - W) = X - (U \cup W) = L,$$

então $\operatorname{ind} \partial U \leq n - 1$ em virtude do Teorema 3.1. Portanto, $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teorema 3.4. *Um espaço métrico separável X satisfaz a desigualdade* $\operatorname{ind} X \leq n$ *e* $n \geq 0$ *se, e somente se, X tem uma base contável B, tal que* $\operatorname{ind} \partial U \leq n-1$*, para todo* $U \in B$.

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Decorre da definição de dimensão indutiva pequena.

($\Longrightarrow$) Da definição de $\operatorname{ind} X \leq n$ segue que para todo $x \in X$ e para todo conjunto aberto U existe um aberto V, $x \in V$, tal que $\overline{V} \subseteq U$ e $\operatorname{ind} \partial V \leq n - 1$, onde ∂V é a fronteira de V.

Basta tomarmos $B = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base contável para o espaço X e usarmos o Lema 2.1. □

Teorema 3.5. ***(Primeiro Teorema da Separação para dimensão 0)****: Se X é um espaço métrico separável zero-dimensional, então para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X o conjunto vazio é uma partição entre A e B, isto é, existe um conjunto, simultaneamente, aberto e fechado $U \subset X$, tal que $A \subset U$ e $B \subset X - U$.*

Demonstração. Para todo $x \in X$ existe um conjunto, simultaneamente, aberto e fechado $W_x \subset X$, tal que $x \in W_x$ e ou $A \cap W_x = \emptyset$ ou $B \cap W_x = \emptyset$.

A cobertura aberta $\{W_x\}_{x \in X}$ do espaço X tem uma subcobertura contável $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

Os conjuntos $U_i = W_{x_i} - \bigcup_{j<i} W_{x_j} \subset W_{x_i}$, onde $i = 1, 2, ...$ são abertos e constituem uma cobertura do espaço X.

Vamos definir $U = \bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\}$ e $W = \bigcup\{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}$.

Claramente, $A \subset U$ e segue que $B \subset W$. Já que os conjuntos U_i são dois a dois disjuntos, $W = X - U$, o que implica que o conjunto U é aberto e fechado, simultaneamente, e que $B \subset X - U$. □

Os próximos resultados serão necessários para as próximas demonstrações.

Lema 3.2. *Para todo par A, B de conjuntos separáveis em um espaço métrico X existem conjuntos $U, W \subset X$, tais que*

$$A \subset U, \;\; B \subset W \;\; e \;\; U \cap W = \emptyset. \qquad (1)$$

Demonstração. Seja ϱ uma métrica no espaço X e sejam $f(x) = \varrho(x, A)$ e $g(x) = \varrho(x, B)$ as distâncias do ponto $x \in X$ até A e B, respectivamente. Já que as funções f e g são contínuas, os conjuntos

$$U = \{x \in X : f(x) - g(x) < 0\} \text{ e } W = \{x \in X : f(x) - g(x) > 0\}$$

são abertos. As inclusões em (1) seguem das igualdades $f^{-1}(0) = \overline{A}$ e $g^{-1}(0) = \overline{B}$. A igualdade $U \cap W = \emptyset$ segue diretamente da definição de U e W. □

Lema 3.3. *Sejam M um subespaço de um espaço métrico X e A, B um par de subconjuntos fechados disjuntos de X. Para toda partição L' no espaço M entre $M \cap \overline{V}_1$ e $M \cap \overline{V}_2$, onde V_1, V_2 são subconjuntos abertos de X, tais que $A \subset V_1$, $B \subset V_2$ e $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$, exite uma partição L no espaço X entre A e B que satisfaz a inclusão $M \cap L \subset L'$.*

Se M é um subespaço fechado do espaço métrico X e A, B um par de subconjuntos fechados disjuntos de X, então para toda partição L' no espaço X entre $M \cap A$ e $M \cap B$ existe uma partição L no espaço X entre A e B que satisfaz a inclusão $M \cap L \subset L'$.

Demonstração. Sejam U', W' subconjuntos abertos de M satisfazendo as condições

$$M \cap \overline{V}_1 \subset U', \;\; M \cap \overline{V}_2 \subset W', \;\; U' \cap W' = \emptyset \;\text{ e }\; M - L' = U' \cup W'.$$

Observe que

$$A \cap \overline{W}' = \emptyset = B \cap \overline{U}'. \qquad (1)$$

De fato, como $V_1 \cap W' = M \cap V_1 \cap W' \subset U' \cap W' = \emptyset$ e como o conjunto V_1 é aberto, temos $V_1 \cap \overline{W}' = \emptyset$, o que implica que $A \cap \overline{W}' = \emptyset$; analogamente, também vale $B \cap \overline{U}' = \emptyset$.

Os conjuntos U' e W' são disjuntos e abertos na união $U' \cup W'$, e então são separáveis, isto é,

$$U' \cap \overline{W}' = \emptyset = \overline{U}' \cap W'. \qquad (2)$$

Segue de (1) e (2) que os conjuntos $A \cup U'$ e $B \cup W'$ também são separáveis. Portanto, pelo Lema 3.2, existem conjuntos abertos disjuntos $U, W \subset X$, tais que

$$A \cup U' \subset U, \;\; B \cup W' \subset W \;\text{ e }\; U \cap W = \emptyset.$$

O conjunto $L = X - (U \cup W)$ é uma partição do espaço X entre A e B.

Como

$$M \cap L = M - (U \cup W) \subset M - (U' \cup W') = L',$$

a primeira parte do lema está provada.

Para provar a segunda parte, considere subconjuntos fechados disjuntos U_1, W_1 do espaço M satisfazendo as condições

$$M \cap A \subset U_1, \;\; M \cap B \subset W_1, \;\; U_1 \cap W_1 = \emptyset \;\text{ e }\; M - L' = U_1 \cup W_1.$$

Como $A \cap (M - U_1) = \emptyset$, $B \cap (M - W_1) = \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, existem conjuntos abertos $V_1, V_2 \subset X$, tais que

$$A \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset X - (M - U_1),\, B \subset V_2 \subset \overline{V}_2 \subset X - (M - W_1) \text{ e } \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset.$$

Logo, L' é uma partição no espaço M entre $M \cap \overline{V}_1$ e $M \cap \overline{V}_2$, então a partição L existe pela primeira parte do lema. □

Teorema 3.6. ***(Segundo Teorema da Separação para dimensão 0)****: Se X é um espaço métrico arbitrário e Z é um subespaço separável zero-dimensional de X, então para cada par A, B de subconjuntos disjuntos fechados de X existe uma partição L entre A e B, tal que $L \cap Z = \emptyset$.*

Demonstração. Considere os conjuntos abertos $V_1, V_2 \subset X$, tais que $A \subset V_1, B \subset V_2$ e $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. Pelo Teorema 3.5 (Primeiro Teorema da Separação para dimensão 0), o conjunto vazio é uma partição no espaço Z entre $Z \cap V_1$ e $Z \cap V_2$. Aplicando a primeira parte do Lema 3.3 obtemos a partição desejada. □

Proposição 3.2. *Um subespaço métrico separável M de um espaço métrico arbitrário X é zero-dimensional se, e somente se, M é não-vazio e para todo ponto $x \in M$ (ou, equivalentemente, para todo ponto $x \in X$) e cada vizinhança V do ponto x no espaço X existe um conjunto aberto $U \subset X$, tal que $x \in U \subset V$ e $M \cap \partial U = \emptyset$.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Pelo Teorema 3.6, se M é um espaço métrico separável, então para cada par de subconjuntos fechados disjuntos A, B de X existe L de modo que $L \cap M = \emptyset$. Basta tomar $B \subset X$, tal que $x \notin B$ e existe uma vizinhança $V \subset X$ do ponto x, tal que $x \in U \subset V$ e ind $\partial U \leq n - 1$. O resultado segue tomando $L = \partial U$.

($\Leftarrow$) Temos que mostrar que M possui uma base em que seus conjuntos abertos consistem em conjuntos com fronteira vazia.

Para cada vizinhança V do ponto x no espaço X existe um conjunto aberto $U \subset X$, tal que $x \in U \subset V$ e $M \cap \partial U = \emptyset$. A cobertura aberta $U_i = W_{x_i} - \bigcup_{j<i} W_{x_j}$ do espaço X tem uma subcobertura contável. Seja $U = \bigcup \{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\}$ e $W = \bigcup \{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}$, onde $U_i = W_{x_i} - \bigcup_{j<i} W_{x_j} \subset W_{x_i}$ são abertos e constituem uma cobertura do espaço X.

Temos que $A \subset U$ e segue que $B \subset W$. Já que os conjuntos U_i são dois a dois disjuntos, $W = X - U$, o que implica que o conjunto U é aberto e fechado, simultaneamente e que $B \subset X - U$. □

Proposição 3.3. *Um subespaço M de um espaço métrico X é zero-dimensional se, e somente se, M é não-vazio e tem uma base contável B, tal que $M \cap U = \emptyset$, $\forall U \in B$.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.2 e do Lema 2.1. □

Teorema 3.7. ***(Teorema da Soma para dimensão 0)*** *Se um espaço métrico separável X pode ser representado como a união de uma sequência $F_1, F_2, ...$ de subespaços fechados zero-dimensionais, então X é zero-dimensional.*

Demonstração. Considere um par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de um espaço X. Devemos provar que existem conjuntos abertos $U, W \subset X$, tais que

$$A \subset U, \ \ B \subset W, \ \ U \cap W = \emptyset \ \text{ e } \ X = U \cup W, \qquad (1)$$

isto é, que o conjunto vazio é uma partição entre A e B.

Sejam U_0, W_0 subconjuntos abertos de X, tais que

$$A \subset U_0, \ \ B \subset W_0 \ \text{ e } \ \overline{U}_0 \cap \overline{W}_0 = \emptyset. \qquad (2)$$

Vamos definir indutivamente duas sequências $U_0, U_1, U_2, ...$ e $W_0, W_1, W_2, ...$ de subconjuntos abertos de X satisfazendo para $i = 0, 1, 2, ...$ as condições:

$$U_{i-1} \subset U_1, \ \ W_{i-1} \subset W_i \ \text{ se } i \geq 1 \ \text{ e } \ \overline{U}_1 \cap \overline{W}_1 = \emptyset. \qquad (3)$$
$$F_i \subset U_i \cap W_i, \text{ onde } F_0 = \emptyset. \qquad (4)$$

Note que os conjuntos U_0, W_0 definidos acima satisfazem ambas as condições para $i = 0$.

Vamos assumir que os conjuntos U_i, W_i satisfazendo (3) e (4) são definidos para todo $i < k$.

Os conjuntos $\overline{U}_{k-1} \cap F_k$ e $\overline{W}_{k-1} \cap F_k$ são fechados e disjuntos; como o espaço F_k é zero-dimensional, pelo Teorema 3.5 existe um subconjunto, simultaneamente, aberto e fechado V de F_k, tal que

$$\overline{U}_{k-1} \cap F_k \subset V \ \text{ e } \ \overline{W}_{k-1} \cap F_k \subset F_k - V. \qquad (5)$$

O conjunto F_k sendo fechado em X, os conjuntos V e $F_k - V$ são também fechados em X; de (5) segue que

$$(\overline{U}_{k-1} \cup V) \cap [\overline{W}_{k-1} \cup (F_k - V)] = (V \cap \overline{W}_{k-1}) \cup [\overline{U}_{k-1} \cap (F_k - V)] = \emptyset,$$

então existem conjuntos abertos $U_k, W_k \subset X$ satisfazendo

$$\overline{U}_{k-1} \cup V \subset U_k, \ \ \overline{W}_{k-1} \cup (F_k - V) \subset W_k \ \text{ e } \ \overline{U}_k \cap \overline{W}_k = \emptyset.$$

Os conjuntos U_k, W_k satisfazem (3) e (4), para $i = k$. Portanto, a construção das sequências $U_0, U_1, U_2, ...$ e $W_0, W_1, W_2, ...$ está completa. Segue de (2), (3) e (4) que as uniões $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ e $W = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$ satisfazem (1). □

Lema 3.4. *Se um espaço métrico X pode ser representado como a união de dois subespaços Y e Z, tais que* $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ *e* $\operatorname{ind} Z \leq 0$*, então* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Demonstração. Considere um ponto $x \in X$ e uma vizinhança $V \subset X$ do ponto x. Pelo Teorema 3.6, existem conjuntos abertos disjuntos $U, W \subset X$, tais que $x \in U$, $X - V \subset W$ e $[X - (U \cup W)] \cap Z = \emptyset$. Claramente, $x \in U \subset V$. Como $\partial U \subset [X - (U \cup W)] \subset X - Z \subset Y$, temos $\operatorname{ind} \partial U \leq n - 1$. Portanto, $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teorema 3.8. ***(Teorema da Soma)*** *Se um espaço métrico separável X pode ser representado como a união de uma sequência $F_1, F_2, ...$ de subespaços fechados, tais que* $\operatorname{ind} F_i \leq n$*, para $i = 1, 2, ...$, então* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre o número n. Para $n = 0$ o teorema já foi provado. Assumimos que o teorema é válido para dimensão menor do que n e considere o espaço $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, onde F_i é fechado e $\operatorname{ind} F_i \leq n \geq 1$ para $i = 1, 2, ...$

Aplicando o Teorema 3.4, escolha para $i = 1, 2, ...$, uma base contável $\mathscr{B}_i$ para o espaço F_i, tal que $\operatorname{ind} \partial U \leq n - 1$ para todo $U \in \mathscr{B}_i$.

Por indução assumimos que o subespaço $Y = \bigcup \left\{ \partial U : U \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i \right\}$ do espaço X satisfaz a desigualdade $\operatorname{ind} Y \leq n - 1$.

Agora, a Proposição 3.3 implica que para $i = 1, 2, ...$ o subespaço $Z_i = F_i - Y$ do subespaço F_i satisfaz a desigualdade $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$, portanto, pelo Teorema 3.7, o subespaço $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = X - Y$ do espaço X também satisfaz a desigualdade $\operatorname{ind} Z \leq 0$ (isso segue da relação $Z_i = F_i - Y = F_i \cap Z$ que todo Z_i é fechado em Z). Então, pelo Lema 3.4, segue que $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teorema 3.9. ***(Primeiro Teorema da Decomposição)*** *Um espaço métrico separável X satisfaz a desigualdade* $\operatorname{ind} X \leq n$*, com $n \geq 0$, se, e somente se, X pode ser escrito como a união de dois subespaços Y e Z, tais que* $\operatorname{ind} Y \leq n - 1$ *e* $\operatorname{ind} Z \leq 0$.

Demonstração. Considere o espaço métrico separável X, tal que $\operatorname{ind} X \leq n$, com $n \geq 0$. Em virtude do Teorema 3.4, o espaço X possui uma base contável B, tal que $\operatorname{ind} \partial U \leq n - 1$, para todo $U \in B$. Segue, a partir do Teorema 3.8, que o subespaço $Y = \bigcup \{\partial U : U \in B\}$ tem dimensão $\leq n - 1$ e a partir da Proposição 3.3 que o subespaço $Z = X - Y$ tem dimensão ≤ 0. Para completar a prova basta aplicar o Lema 3.4. □

Teorema 3.10. ***(Segundo Teorema da Decomposição)*** *Um espaço métrico separável X satisfaz a desigualdade* ind $X \leq n$, $n \geq 0$, *se, e somente se, X pode ser representado como a união de $n+1$ subespaços $Z_1, Z_2, ..., Z_{n+1}$, tais que* ind $Z_i \leq 0$ *para $i = 1, 2, ..., n+1$.*

Demonstração. Aplica-se o Princípio da Indução para i.

(1) Pelo Teorema 3.9 temos que o resultado é verdadeiro para $i = 1, 2$.

(2) Hipótese de Indução: Suponhamos que o resultado seja válido para $i = n$ subespaços, ou seja, X pode ser representado como a união de n subespaços $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, tais que ind $Z_i \leq 0$, para $i = 1, ..., n-1$ e ind $Z_n \leq 0$.

O resultado procurado segue aplicando o Teorema 3.9, considerando $Y = Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_n$ e $Z = Z_{n+1}$. □

Teorema 3.11. ***(Teorema da Adição)*** *Para todo par X, Y de subespaços separáveis de um espaço métrico temos*

$$\text{ind}(X \cup Y) \leq \text{ind } X + \text{ind } Y + 1.$$

Demonstração. Se X e Y são espaços métricos separáveis e ind $X \leq n$ e ind $Y \leq m$ pelo Teorema 3.10 segue que $X \cup Y$ pode ser representado como a união de $Z_{x,1}$, ..., $Z_{x,n+1}, Z_{y,1}$, ..., $Z_{y,m+1}$.

Assim,

$$\text{ind } (X \cup Y) \leq (n+1) + (m+1) - 1 \leq \text{ind } X + \text{ind } Y + 1.$$

□

Teorema 3.12. ***(Primeiro Teorema da Separação)****: Se X é um espaço métrico separável, tal que* ind $X \leq n$ *e $n \geq 0$, então para todo par A,B de subconjuntos fechados e disjuntos de X existe uma partição L entre A e B, tal que* ind $L \leq n-1$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.9, $X = Y \cup Z$, onde ind $Y \leq n-1$ e ind $Z \leq 0$. Aplicando o Teorema 3.6 , obtemos uma partição L entre A e B, tal que $L \cap Z = \emptyset$. Como $L \subset X - Z \subset Y$ temos ind $L \leq n-1$, pelo Teorema 3.1. □

Teorema 3.13. ***(Segundo Teorema da Separação)*** *Se X é um espaço métrico arbitrário e M é um subespaço separável de X, tal que* ind $M \leq n$ *e $n \geq 0$, então para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X existe uma partição L entre A e B, tal que* ind $(L \cap M) \leq n-1$.

Demonstração.

Basta aplicar o Teorema 3.9 para o subespaço M.

M é um subespaço separável de X, A, B são fechados e disjuntos, $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ são abertos em X e $\overline{U} \cap \overline{W} = \emptyset$.

Para toda partição L' de $M \cap U$, $M \cap W$ existe uma partição L de A, B, tal que $M \cap L \subseteq L'$ então ind $(M \cap L) \leq n-1$. □

A seguir, veremos um exemplo sobre a dimensão topológica do Conjunto de Cantor. Neste capítulo, apresentaremos brevemente este conjunto, porém falaremos mais sobre ele no Capítulo 4.

O Conjunto de Cantor, o qual denotaremos por C, é um subconjunto infinito do intervalo $[0,1]$ definido como segue. Consideremos, inicialmente, o intervalo $[0,1]$. Agora, dividiremos este intervalo em três partes iguais e retiraremos o terço médio, ou seja, ficaremos apenas com os intervalos $[0,\frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3},1]$. Repetiremos esse processo em cada um dos intervalos restantes e assim sucessivamente e indefinidamente.

A partir dessa ideia, denotaremos $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$ e assim por diante. Podemos chamar cada um desses C_i, onde $i = 0,1,2,...$, de níveis do Conjunto de Cantor. Generalizando, obtemos

$$C_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_{n,k}, \text{ tal que } I_{n,k} = \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{b_k}{3^n}\right],$$

onde a_k, b_k seguem o padrão indicado anteriormente.

O conjunto de Cantor é definido como

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Proposição 3.4. *O Conjunto de Cantor tem Dimensão Indutiva Pequena 0.*

Demonstração. Como $0 \in C$, então $C \neq \emptyset$. Consequentemente, $\text{ind}\, C \neq -1$. Devemos provar que C tem uma base constituída de conjuntos, simultaneamente, abertos e fechados. Primeiro, vamos mostrar que para todo conjunto aberto $U \subset C$, para todo $x \in U$, existem $n, k \in \mathbb{N}$, tais que $x \in I_{n,k} \subset U$.

Dado $\epsilon > 0$ e $x \in C$, tomemos $n, k \in \mathbb{N}$, tal que $3^{-n} < \epsilon$ e $x \in I_{n,k}$. Tal $I_{n,k}$ existe, pois $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ e, então, $C \subset C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A bola aberta $B(x,\epsilon)$, centrada em x e de raio ϵ, é um elemento de uma base de $\mathbb{R}$ que contém x. Sabemos que $I_{n,k} \subset B(x,\epsilon)$ já que o comprimento de $I_{n,k}$ é menor do que o raio de $B(x,\epsilon)$ e $B(x,\epsilon)$ é centrada em x. Então, $x \in C \cap I_{n,k} \subset C \cap B(x,\epsilon)$, pois $x \in C \cap I_{n,k}$ e $I_{n,k} \subset B(x,\epsilon)$.

Agora, vamos mostrar que $C \cap I_{n,k}$ é aberto e fechado. Sabemos que $I_{n,k}$ é fechado, pois é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Portanto, $C \cap I_{n,k}$ é fechado em C, considerando a topologia para um subespaço.

Para finalizar, cada $I_{n,k}$ tem comprimento $\dfrac{1}{3^n}$ e a distância $d(I_{n,k}, I_{n,j}) \geq \dfrac{1}{3^n}$, para todo $k \neq j \in \{1, ..., 2^{n-1}\}$, por construção. Portanto, $C \cap I_{n,k} = C \cap \left(\dfrac{a_k - 1}{3^n}, \dfrac{b_k + 1}{3^n}\right)$ que é aberto em C. Logo, $C \cap I_{n,k}$ é aberto e fechado em C. Portanto, $\text{ind}\, C = 0$, já que $\text{ind}\, C \neq -1$ e C tem uma base constituída de conjuntos abertos e fechados. $\square$

3.2 Dimensão Indutiva Grande

Definição 3.3. *Sejam A e B subconjuntos disjuntos de um espaço métrico X. Um conjunto $L \subset X$ separa A e B, se existem conjuntos abertos disjuntos U e V em X, tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $L = X - (U \cup V)$.*

Definição 3.4. *A Dimensão Indutiva Grande de um espaço normal X , denotada por* Ind X*, onde* Ind $X \in \{-1, 0, 1, 2, ..., \infty\}$ *é definada da seguinte forma:*

1. Ind $X = -1$ *se, e somente se,* $X = \emptyset$.

2. Ind $X \leq n$, *onde* $n = 0, 1, 2, ...$, *se para todo conjunto fechado* $A \subset X$ *e cada conjunto aberto* $V \subset X$ *o qual contém* A, *existe um conjunto aberto* $U \subset X$ *tal que* $A \subset U \subset V$ *e* Ind $\partial U \leq n - 1$.

3. Ind $X = n$ *se* Ind $X \leq n$ *e* Ind $X > n - 1$.

4. Ind $X = \infty$ *se* Ind $X > n$ *para* $n = -1, 0, 1, ...$

Aplicando indução sobre Ind X, podemos verificar que qualquer espaço normal X e Y homeomorfos, temos que Ind X = Ind Y.

Analogamente ao feito na Proposição 3.1, podemos provar a Proposição 3.5, a qual fornece uma equivalência para a definição de Dimensão Indutiva Grande.

Proposição 3.5. *Um espaço normal X satisfaz* Ind $X \leq n$ *e* $n \geq 0$ *se, e somente se, para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X existe uma partição L entre A e B, tal que* Ind $L \leq n - 1$.

Teorema 3.14. *Em um espaço topológico, conjuntos formados por um número finito de pontos tem dimensão indutiva grande 0.*

Demonstração. Considere $X = \{x_1, ..., x_k\}$, isto é, X é um conjunto com um número finito k de pontos. Note que Ind $X \neq -1$, já que $X \neq \emptyset$.

Sejam $A = \{x_{n_1}, ..., x_{n_i}\}$ e $B = \{x_{m_1}, ..., x_{m_j}\}$ subconjuntos de X, tais que $A \cap B = \emptyset$. Como X tem um número finito de pontos, consideramos a topologia discreta assim como no Lema 3.1, então A e B são abertos em X.

Considere $U = A$ e $V = X - A$. Dessa forma, U e V são disjuntos e abertos em X, tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Seja $L = X - (U \cup V)$. Note que L é uma partição entre U e V. Mas $U \cup V = A \cup (X - A) = X$, então $L = X - (U \cup V) = X - X = \emptyset$.

Como $L = \emptyset$, então Ind $L = -1$ e, portanto, Ind $X \leq 0$. Como Ind $X \neq -1$, segue que Ind $X = 0$. □

Lema 3.5. *Se X é um espaço métrico separável com* ind $X = 0$, *então* Ind $X = 0$.

Demonstração. Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos em X. Se ind $X = 0$, então existe uma base $\mathscr{B}$ para X formada por conjuntos abertos e fechados, simultaneamente.

Para todo X escolha $U_x \in \mathscr{B}$, tal que $x \in U_x$ e ou $U_x \cap A = \emptyset$ ou $U_x \cap B = \emptyset$. Podemos fazer isso, pois se $x \notin A$, então $X - A$ é um conjunto aberto contendo x já que A é fechado. Analogamente, se $x \notin B$, então $X - B$ é um aberto contendo x. Todo $x \in X$ satisfaz uma dessas condições já que A e B são disjuntos. Então, $\{U_x | x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X.

Como X é separável, pela Proposição 2.30, existe uma subcobertura enumerável de $\{U_x | x \in X\}$, $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ...\}$ de X.

Defina $V_1 = U_{x_1}$ e $V_n = U_{x_n} - (V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{n-1})$. Cada V_n é, simultaneamente, aberto e fechado, pois é contruído a partir de U_{x_n} o qual é um elemento da base, simultaneamente, aberto e fechado.

Além disso, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_{x_n} = X$. Cada V_n satisfaz ou $V_n \cap A = \emptyset$ ou $V_n \cap B = \emptyset$. Considere $U = \bigcup \{V_n | V_n \cap B = \emptyset\}$. U é aberto pelo fato de V_n ser, simultaneamente, aberto e fechado e $U \cap B = \emptyset$, por construção.

Assim, $V = X - U = \bigcup \{V_n | V_n \cap B \neq \emptyset\}$. V é aberto já que V_n é aberto e fechado. Então, U é fechado já que $X - U = V$ e $V \cap A = \emptyset$, porque para todo $V_n \subset V$, $V_n \cap B \neq \emptyset$ e A, B são disjuntos. Consequentemente, $A \subset U$ e $U \cap B = \emptyset$, o que implica que $\emptyset$ é uma partição dos cojuntos disjuntos A e B. Logo, Ind $X \leq 0$. Como ind $X = \emptyset$, segue que $X \neq \emptyset$. Portanto, Ind $X = 0$. □

Aplicando indução sobre Ind X, podemos verificar o seguinte teorema.

Teorema 3.15. *Para todo espaço normal X temos* ind $X \leq$ Ind X.

Teorema 3.16. *Se X é um espaço métrico separável, então* ind $X =$ Ind X.

Demonstração. Basta mostrar que Ind $X \leq$ ind X. Podemos supor que ind $X \leq \infty$. Vamos aplicar indução sobre ind X. A desigualdede vale para ind $X = 1$. Assumimos que a desigualdade é válida para todo espaço métrico separável com dimensão indutiva pequena menor do que $n \geq 0$ e consideremos um espaço métrico separável X, tal que ind $X = n$.

Sejam A e B um par de subconjuntos fechados disjuntos de X. Em virtude do Teorema 3.12, existe uma partição L entre A e B, tal que ind $L \leq n - 1$. Segue da hipótese de indução que Ind $L \leq n-1$, então Ind $X \leq n$ pela Proposição 3.5. Portanto, Ind $X \leq$ ind X. □

4 Dimensão de Hausdorff

Neste capítulo, apresentamos brevemente a dimensão de Hausdorff, também chamada de dimensão fractal, e futuramente estudaremos suas aplicações na geometria fractal. Para estudos iniciais sobre essa geometria seguimos [2] e [9]. Escolhemos seguir [3] como principal referência para este capítulo. No final deste trabalho, adicionamos como apêndice a abordagem encontrada em [6]. Porém, para estudos mais aprofundados dessa outra abordagem, são necessários muitos conceitos que vão além do objetivo deste trabalho.

O nome dimensão de Hausdorff vem do matemático alemão Felix Hausdorff (1868-1942), o qual publicou trabalhos na área de topologia e introduziu a ideia dessa dimensão. Alguns autores também se referem a ela por dimensão de Hausdorff-Besicovitch, pelo fato de seu desenvolvimento ter recebido grandes contribuições do matemático russo Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970). Anos mais tarde, o matemático francês Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) retomou os estudos de Hausdorff e Besicovitch em seus trabalhos sobre a geometria fractal.

Inicialmente, vamos abordar uma noção intuitiva do conceito de dimensão de Hausdorff. Para isso, vamos explorar o conceito de dimensão de objetos através de subdivisões destes.

Denotaremos por N o número de partes que o objeto foi dividido e r o fator de redução. Assim a dimensão D de um objeto da geometria euclidiana pode ser verificada pela seguinte relação:

$$N = \frac{1}{r^D}. \qquad (1)$$

Considere um segmento de reta e o dividimos em três partes iguais. Assim, cada parte será $\frac{1}{3}$ do segmento inicial. Nesse caso, temos $N = 3$ e $r = \frac{1}{3}$. Utilizando a relação (1), obtemos:

$$3 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^1}.$$

Portanto, a dimensão de um segmento é $D = 1$, o que é válido na geometria euclidiana.

Agora, considere um quadrado e o dividimos em 9 quadrados menores de lado $\frac{1}{3}$ do inicial. Assim, $N = 9$ e $r = \frac{1}{3}$. Utilizando, novamente, a relação (1), obtemos:

$$9 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2}.$$

Portanto, a dimensão do quadrado é $D = 2$, o que também é válido na geometria euclidiana.

Se tivermos um cubo e o dividimos em 27 cubos cujas arestas valem $\frac{1}{3}$ da inicial. Assim, $N = 27$ e $r = \frac{1}{3}$. Utilizando a relação (1), obtemos:

$$27 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3}.$$

Portanto, a dimensão do cubo é $D = 3$, o que também é válido na geometria euclidiana.

Esses objetos ocupam totalmente o espaço delimitado pela figura inicial. Porém, veremos posteriormente que um fractal pode ocupar partes ou ultrapassar esse espaço. Assim, intuitivamente, a "dimensão fractal" seria o quanto de espaço um objeto ocupa dentro de onde ele está inserido.

Sabemos que $N = \frac{1}{r^D}$ é equivalente à $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, assim se aplicarmos logaritmo nos dois lados dessa igualdade obtemos:

$$\log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow \log(N) = D.\log\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})} \qquad (2)$$

A dimensão de Hausdorff de um objeto, intuitivamente, é dada por $D = \dfrac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$.

Agora, vamos utilizar, no exemplo abaixo, essa mesma noção para calcular a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor. Este cálculo será feito com mais detalhes no final deste capítulo.

Exemplo 4.1. Na construção do Conjunto de Cantor, vimos que a cada nova divisão do intervalo, isto é, a cada nível, o comprimento dos segmentos é reduzido em $\frac{1}{3}$ e o número de segmentos é o dobro do nível anterior. Portanto, $r = \frac{1}{3}$ e $N = 2$. Assim, segue que:

$$D = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \simeq 0,63.$$

Logo, a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor é, aproximadamente, 0,63. Esse valor não chega a ser 1 (dimensão de um segmento), porém é maior que zero (dimensão de um ponto).

4.1 Definição

A partir daqui, veremos algumas definições e resultados para formalizar a definição de dimensão de Hausdorff.

Definição 4.1. *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Denotemos por $\mathscr{H}(X)$ o espaço formado por todos os subconjuntos não vazios compactos de X.*

Sejam (X,d) um espaço métrico completo, $x \in X$ e $B \in \mathscr{H}(X)$. Como vimos,

$$d(x,B) = \min\{d(x,y); y \in B\}$$

é a distância do ponto x ao conjunto B. Note que, tomamos o mínimo no lugar do ínfimo, pois B é compacto.

Dessa forma, se $A, B \in \mathscr{H}(X)$, define-se

$$d(A,B) = \max\{d(x,B) | x \in A\}.$$

Assim, $d(A,B)$ é chamado distância do conjunto A ao conjunto B.

Definição 4.2. *Seja (X,d) um espaço métrico completo. A distância de Hausdorff entre os pontos A e B de $\mathscr{H}(X)$ é definida por*

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A),$$

onde $x \vee y$ representa o máximo entre x e y.

Observação 4.1. Sejam $A, B \in \mathscr{H}(X)$. Nem sempre temos $d(A,B) = d(B,A)$. Por exemplo, se $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}\}$ e $B = \{\frac{1}{2}\}$, então, $A, B \in \mathscr{H}(X)$ e segue que:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \max\{d(x,B); x \in A\} = \max\{\min\{d(x,y); y \in B\}; x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d(0,\tfrac{1}{2}), d(1,\tfrac{1}{2}), d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), d(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}), ..., d(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{2}), ...\}\} \\ &= \max\{\tfrac{1}{2}, 0, ..., \tfrac{n-2}{2n}, ...\} = \tfrac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B,A) &= \max\{d(x,A); x \in B\} = \max\{\min\{d(x,y); y \in A\}; x \in B\} \\ &= \max\{\min\{d(\tfrac{1}{2},0), d(\tfrac{1}{2},1), d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), ..., d(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{n}), ...\}\} \\ &= \max\{0\} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $d(A,B) \neq d(B,A)$.

Proposição 4.1. *Seja $h(A,B)$ a distância de Hausdorff definida acima, então h é uma métrica no espaço $\mathscr{H}(X)$.*

Demonstração. Sejam $A, B, C \in \mathscr{H}(X)$. Mostraremos que h satisfaz as três propriedades da definição de métrica.

(i) Suponhamos que $h(A, B) = 0$.

Então, $d(A, B) \vee d(B, A) = 0$, isto é, $\max\{d(A, B), d(B, A)\} = 0$, o que implica que $0 \leq d(A, B) \leq 0$ e $0 \leq d(B, A) \leq 0$.

Portanto, $d(A, B) = d(B, A) = 0$.

Por outro lado,

$$d(A, B) = \max\{d(x, B); x \in A\} \text{ e } d(B, A) = \max\{d(y, A); y \in B\}.$$

Assim, para todo $x \in A$, $0 \leq d(x, B) \leq d(A, B) = 0$, ou seja, $d(x, B) = 0$.

Pela Proposição 2.3, segue que $x \in \overline{B} = B$, pois B é compacto. Logo, $A \subset B$.

Analogamente, para todo $y \in B$, $d(y, A) = 0$, o que implica que $y \in \overline{A} = A$. Logo, $B \in A$.

Portanto, se $h(A, B) = 0$, então $A = B$.

Reciprocamente, se $A = B$, então $d(x, B) = d(y, A) = 0, \forall x \in A, \forall y \in B$, implicando que $d(A, B) = \max\{d(x, B); x \in A\} = 0 = \max\{d(y, A), y \in B)\} = d(B, A)$.

Dessa forma, $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = 0$.

(ii) Por definição,

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = d(B, A) \vee d(A, B) = h(B, A).$$

(iii) Agora precisamos mostrar a desigualdade triangular. Para isso, mostraremos antes que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Para todo $a \in A$, temos $d(a, B) = \min\{d(a, b); b \in B\}$. Além disso, como d é uma métrica, para todo $c \in C$, $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$. Logo,

$$\begin{aligned}
d(a, B) &= \min\{d(a, b); b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b); b \in B\} \\
&= d(a, c) + \min\{d(c, b); b \in B\} \\
&= d(a, c) + d(c, B), \forall c \in C.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$d(a, B) \leq \min\{d(a, c) + d(c, B); c \in C\}.$$

Note ainda que $d(c, B) \leq \max\{d(z, B); z \in C\} = d(C, B), \forall c \in C$. Assim,

$$\begin{aligned}
d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) + d(c, B); c \in C\} \leq \min\{d(a, c) + d(C, B); c \in C\} \\
&= \min\{d(a, c); c \in C\} + d(C, B) \\
&= d(a, C) + d(C, B).
\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar que $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} h(A,B) &= d(A,B) \vee d(B,A) \leq (d(A,C) \vee d(C,A)) + (d(C,B) \vee d(C,A)) \\ &= h(A,C) + h(C,B). \end{aligned}$$

Logo, de (i), (ii) e (iii), segue que h é uma métrica em $\mathscr{H}(X)$. □

Definição 4.3. *Sejam (X,d) um espaço métrico completo, $A \in \mathscr{H}(X)$ e $\epsilon > 0$. Defina $\mathscr{N}(A,\epsilon)$ como sendo o menor número de bolas fechadas de raio ϵ necessárias para cobrir o conjunto A. Isto é, $\mathscr{N}(A,\epsilon)$ é o menor inteiro positivo M, tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{M} B(x_n,\epsilon)$, para algum conjunto de pontos distintos $\{x_n; n = 1,2,...,M\} \subset X$.*

Definição 4.4. *Seja $A \in \mathscr{H}(X)$, onde (X,d) é um espaço métrico. Se*

$$D = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \right\},$$

existe, então D, é chamada dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal de A. Também pode ser usada a notação $D = D(A)$.

Exemplo 4.2. Considere X o espaço métrico $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana. Sejam $a \in X$ e $A = \{a\}$. Assim, para cada $\epsilon > 0$, temos que $\mathscr{N}(A,\epsilon) = 1$. Então,

$$D = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \frac{\ln(1)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \right\} = 0.$$

Logo, $D(A) = 0$.

Teorema 4.1. *Seja $A \in \mathscr{H}(X)$, onde X é um espaço métrico. Considere $\epsilon_n = Cr^n$, para r e C números reais, tais que $0 < r < 1$ e $C > 0$, e inteiros $n = 1,2,3,....$ Se*

$$D = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_n))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})} \right\},$$

então A tem dimensão fractal D.

Demonstração. Sejam r e C números reais e $E = \{\epsilon_n : n = 1,2,3,...\}$ uma sequência como definida no Teorema. Defina $f(\epsilon) = \max\{\epsilon_n \in E : \epsilon_n \leq \epsilon\}$. Assuma que $\epsilon \leq r$. Então,

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq \frac{f(\epsilon)}{r} \text{ e } \mathscr{N}(A,f(\epsilon)) \geq \mathscr{N}(A,\epsilon) \geq \mathscr{N}\left(A, \frac{f(\epsilon)}{r}\right).$$

Como $\ln(x)$ é uma função positiva crescente de x, para $x \geq 1$, segue que

$$\left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}(A,\frac{f(\epsilon)}{r}))}{\ln(\frac{1}{f(\epsilon)})} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}(A,f(\epsilon)))}{\ln(\frac{r}{f(\epsilon)})} \right\}. \quad (1)$$

Assuma que $\mathscr{N}(A,\epsilon) \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, caso contrário o teorema é válido. Então, para o lado direito de (1) vale que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,f(\epsilon)))}{\ln(\frac{r}{f(\epsilon)})}\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_n))}{\ln(\frac{r}{\epsilon_n})}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_n))}{\ln(r)+\ln(\frac{1}{\epsilon_n})}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_n))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})}\right\}.\end{aligned}$$

Para o lado esquerdo de (1) vale que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\frac{f(\epsilon)}{r}))}{\ln(\frac{1}{f(\epsilon)})}\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_{n-1}))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_{n-1}))}{\ln(\frac{1}{r})+\ln(\frac{1}{\epsilon_{n-1}})}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}(A,\epsilon_n))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})}\right\}.\end{aligned}$$

Logo, a medida que $\epsilon \to 0$, tanto o lado esquerdo quanto o direito da equação (1) aproximam-se do mesmo valor, afirmado no teorema. Pelo Teorema do Confronto, do Cálculo Diferencial, o limite quando $\epsilon \to 0$ do valor do meio da equação (1) também existe e é o mesmo valor. $\square$

Para o próximo teorema, considere $A \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^m)$ com a métrica euclidiana. Cubra $\mathbb{R}^m$ por caixas quadradas fechadas que apenas se tocam, com lado de tamanho $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Considere também $\mathscr{N}_n(A)$ como o número de caixas com lado de tamanho $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ que interceptam A.

Teorema 4.2. *(Teorema Box Counting) No contexto acima, se*

$$D = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_n(A))}{\ln(2^n)}\right\},$$

então A tem dimensão fractal D.

Demonstração. Note que para $m = 1,2,3,...,$

$$2^{-m}\mathscr{N}_{n-1} \leq \mathscr{N}\left(A,\frac{1}{2^n}\right) \leq \mathscr{N}_{k(n)}, \quad \text{para todo } n = 1,2,3,...$$

onde $k(n)$ é o menor inteiro k que satisfaz $k \geq n-1+\frac{1}{2}\log_2 m$.

A primeira inequação é válida porque uma bola de raio $\frac{1}{2^n}$ pode interceptar no máximo 2^m caixas de lado $\frac{1}{2^{n-1}}$.

A segunda inequação segue pelo fato de que uma caixa de lado s pode caber dentro de uma bola de raio r, em que $r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m\left(\frac{s}{2}\right)^2$ pelo Teorema de Pitágoras.

Como $\frac{k(n)}{n} \to 1$, quando $n \to \infty$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \cdot \frac{\ln(\mathscr{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{k(n)\cdot\ln(2)}{n\cdot\ln(2)} \cdot \frac{\ln(\mathscr{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})}\right\} = D.$$

Desde que também

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(2^{-m}\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(2^{-m}) + \ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^n)}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(2^{-m})}{\ln(2^n)}\right\} + \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-m}{n}\cdot\frac{\ln(2)}{\ln(2)}\right\} + \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^n)}\right\} =$$
$$= 0 + \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(2^{n-1})}{\ln(2^{n-1})}\cdot\frac{\ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n-1)\ln(2)}{(n)\ln(2)}\cdot\frac{\ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})}\right\} = D,$$

pelo Teorema 4.1 com $r = \frac{1}{2}$. □

Note que no Teorema 4.2 usamos caixas de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Porém, de modo análodo, podemos usar caixas de lado Cr^n, onde $C > 0$ e $0 < r < 1$ são números reais fixos.

Exemplo 4.3. Considere $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Note que $\mathscr{N}_1(Q) = 4$, $\mathscr{N}_2(Q) = 16$, $\mathscr{N}_3(Q) = 64$, ..., $\mathscr{N}_n(Q) = 4^n$, para $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Então,

$$D(Q) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathscr{N}_n(Q))}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(4^n)}{\ln(2^n)}\right\} = 2.$$

4.2 Aplicações na geometria fractal

A natureza em geral é constituída por diversas formas nas quais predominam a irregularidade e o caos. Tentar simplificá-las usando figuras da geometria clássica, como triângulos, círculos ou esferas seria inadequado. Em contrapartida, encontramos uma boa aproximação para estas formas na geometria fractal, cujas estruturas fornecem certa ordem ao irregular. Por tal motivo ela está intimamente ligada à ciência do Caos podendo até ser considerada a linguagem do caos.

A geometria fractal estuda objetos que foram denominados fractais por Benoit Mandelbrot, iniciador dos estudos dessa geometria. A palavra fractal surgiu do adjetivo fractus que vem do verbo frangere, em latim, cujo significado é quebrar, fragmentar.

A geometria fractal de Mandelbrot reflete a natureza cheia de irregularidades e fragmentação. Uma de suas indagações foi "Que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?" cuja possível resposta varia de acordo com a escala de medição. Sua obra mais famosa é *The Fractal Geometry of Nature*, *New York*, *Freeman*, 1977.

Inicialmente, Mandelbrot definia um fractal como sendo um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff excede estritamente a dimensão topológica. Porém, essa definição recebeu críticas pois não abrangia alguns objetos que também eram considerados fractais. Com isso, Mandelbrot passou a considerar que um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.

Sendo assim, um fractal ainda não possui uma definição formal. Entretanto, esses objetos possuem algumas das seguintes características:

1. Autossemelhança: Refere-se a propriedade de que suas partes se assemelham ao fractal como um todo.

2. Complexidade infinita: Refere-se ao fato de que podem ser obtidos a partir de um procedimento recursivo ou iterativo, isto é, a aplicação de uma mesma regra de construção infinitamente dentro de si mesmos.

3. Dimensão fracionada: A dimensão fractal de vários desses objetos não é um número inteiro.

Em geral, os fractais tornam-se figuras com grande beleza e complexidade, nas quais cada parte é semelhante ao todo. Por exemplo, o fractal conhecido como samambaia de Barnsley forma uma figura que é muito semelhante a uma folha de samambaia, porém é uma figura que pode ser construída computacionalmente.

Figura 4.1: Samambaia de Barnsley construída no software Geometricks.

Muitos matemáticos, ao longo da história, como Georg Cantor, Giusepe Peano, Waclaw Sierpinski e outros, estudaram algumas figuras que não se enquadravam nas definições da geometria euclidiana. Tais figuras ficaram conhecidas como "monstros matemáticos". Tempos depois, com os estudos de Benoit Mandelbrot, esses monstros matemáticos passaram a ser chamados de Fractais Clássicos.

4.2.1 Conjunto de Cantor

Georg Cantor (1845-1918) foi um importante matemático que focou seus estudos na fundamentação da matemática e o primeiro a estudar a Teoria dos Conjuntos no século XIX. Em 1883, publicou um trabalho sobre um determinado conjunto conhecido hoje como "Conjunto de Cantor" ou "Poeira de Cantor".

Como visto no capítulo 3 deste trabalho, o Conjunto de Cantor é um subconjunto infinito do intervalo [0,1] obtido dividindo esse intervalo em três partes iguais, retirando o terço médio e repetindo este procedimento, sucessivamente e indefinidamente, nos intervalos restantes. Os pontos que restarem após essas infinitas sucessões formam o Conjunto de Cantor, denotado por $\mathscr{C}$.

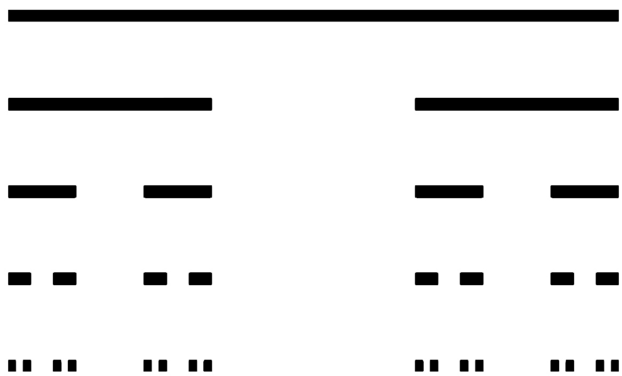

Figura 4.2: Conjunto de Cantor - Níveis 0, 1, 2, 3 e 4.

Algumas propriedades do Conjunto de Cantor são: $\mathscr{C}$ é um conjunto não-vazio, fechado, compacto, não-enumerável, possui interior vazio e seu complementar é denso em $[0,1]$. Todas essas propriedades estão demonstradas em [1].

Exemplo 4.4. Como $\mathscr{C}$ é compacto, podemos usar o Teorema 4.2, de modo análogo ao feito no Exemplo 4.3, mas agora com caixas cujos lados tem medida $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ para o cálculo da dimensão de Hausdorff desse conjunto.

Temos que $\mathscr{N}_1(\mathscr{C}) = 2$, $\mathscr{N}_2(\mathscr{C}) = 4$, ..., $\mathscr{N}_n(\mathscr{C}) = 2^n$, para $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Então,

$$D(\mathscr{C}) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}_n(\mathscr{C}))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor é $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,63$.

4.2.2 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um dos fractais clássicos e foi objeto de estudo do matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Para construir este fractal, considere um triângulo retângulo isósceles. Desse triângulo retira-se outro triângulo cujos vértices são os pontos médios do inicial obtendo o nível 1 do fractal. Neste nível restaram 3 triângulos cujos lado são reduzidos em $\frac{1}{2}$ do inicial. Repetindo o mesmo processo para esses três triângulos restantes obteremos o nível 2 do fractal, o qual é formado por 9 triângulos de lados reduzidos em $\frac{1}{4}$ do original e assim por diante. O nível n será composto por 3^n triângulos de lados medindo $\frac{1}{2^n}$ dos lados do triângulo original. O limite desse processo, fazendo n tender ao infinito, gera o Triângulo de Sierpinski.

Note que podemos partir de qualquer outro triângulo para obter uma figura cuja dimensão e outras propriedades são equivalentes, porém não abordaremos esse conceito com muitos detalhes neste trabalho.

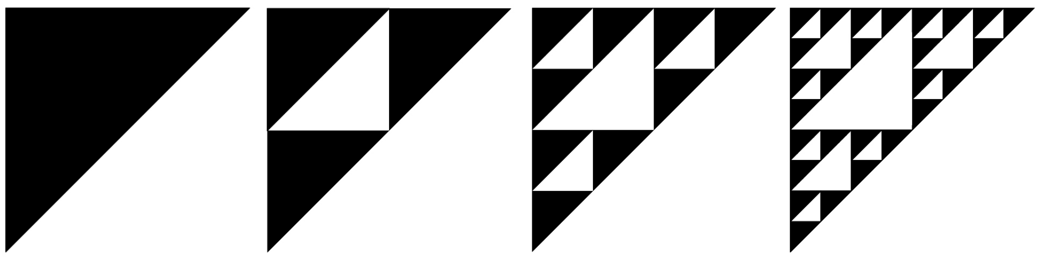

Figura 4.3: Triângulo de Sierpinski - Níveis 0, 1, 2 e 3.

Exemplo 4.5. Considere o Triângulo de Sierpinski como um subconjunto compacto T do espaço $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual.

Vamos cobrir $\mathbb{R}^2$ com caixas de lado $\frac{1}{2^n}$, como ilustrado na Figura 4.4. Se $n = 1$, teremos caixas com lado de medida $\frac{1}{2}$. Assim, 3 dessas caixas interceptam T. Para $n = 2$, teremos caixas com lado de medida $\frac{1}{4}$. Neste caso, 9 dessas caixas interceptam T. Continuando esse processo sucessivamente, teremos 3^n caixas com lado de medida $\frac{1}{2^n}$ que interceptam T.

Assim, $\mathscr{N}_1(T) = 3$, $\mathscr{N}_2(T) = 9$, $\mathscr{N}_3(T) = 27$, ..., $\mathscr{N}_n(T) = 3^n$, para $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Então,

$$D(T) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(\mathscr{N}_n(T))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} \right\} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do Triângulo de Sierpinski é $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,58$.

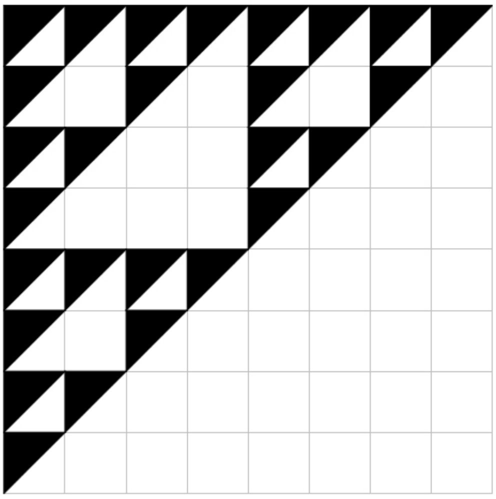

Figura 4.4: Triângulo de Sierpinski - Box Counting.

4.2.3 Tapete de Sierpinski

Analogamente ao feito no Triângulo de Sierpinski, podemos partir de um quadrado unitário, dividi-lo em 9 quadrados congruentes e retirar o central. Repetindo o mesmo procedimento nos 8 quadrados restantes e assim por diante, indefinidamente, obteremos o fractal conhecido como Tapete de Sierpinski.

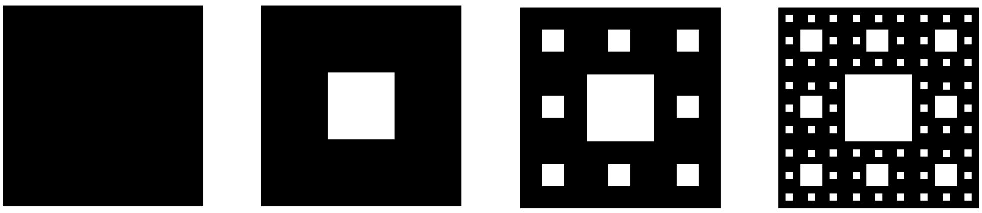

Figura 4.5: Tapete de Sierpinski - Níveis 0, 1, 2 e 3.

Exemplo 4.6. Considere o Tapete de Sierpinski como um subconjunto compacto S do espaço $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual.

Assim como no Exemplo 4.4, usaremos o Teorema 4.2 com caixas de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Temos que $\mathcal{N}_1(S) = 8$, $\mathcal{N}_2(S) = 64$, ..., $\mathcal{N}_n(S) = 8^n$, para $n \in \{1, 2, ...\}$. Então,

$$D(S) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(S))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\ln(8^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \frac{\ln(8)}{\ln(3)}.$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do Tapete de Sierpinski é $\dfrac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1,89$.

4.2.4 Curva de Peano

O matemático italiano Giusepe Peano (1858-1932) descreveu, em um de seus trabalhos, uma curva que preenchia toda uma superfície plana quadrangular. Esta curva ficou conhecida como a Curva de Peano ou o Monstro de Peano.

A Curva de Peano é contruída através de um processo iterativo. Para isso, considere inicialmente um segmento de reta de qualquer tamanho. Divida este segmento em três partes iguais e substitúa o segmento intermediário por 9 segmentos de medida $\frac{1}{3}$ do inicial, formando dois quadrados de lado $\frac{1}{3}$. Em seguida, repita o mesmo processo substituindo cada um dos segmentos da curva por outros 9 segmentos reduzidos em $\frac{1}{3}$, isto é, de medida $\frac{1}{9}$ do inicial. Repetindo esse processo sucessivamente e indefinidamente obtém-se a Curva de Peano.

Note que esta curva vai preenchendo o quadrado cuja diagonal é dada pelo segmento inicial.

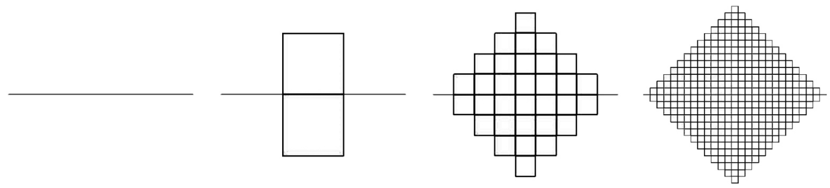

Figura 4.6: Curva de Peano - Níveis 0, 1, 2 e 3.

Exemplo 4.7. Intuitivamente, na construção da Curva de Peano, vimos que a cada nível o comprimento dos segmentos é reduzido em $\frac{1}{3}$ e o número de segmetos é 9 vezes o do nível anterior.

Portanto, $r = \frac{1}{3}$ e $N = 9$. Assim, segue que:

$$D = \frac{\log(9)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2.$$

Portanto, a dimensão da Curva de Peano é 2, ou seja, esta curva tem a mesma dimensão de um quadrado.

Agora, vamos verificar que esse valor é o mesmo utilizando o Teorema 4.2. Para isso, considere a Curva de Peano como um subconjunto compacto P do espaço $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. Novamente, usaremos o Teorema 4.2 com caixas de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, iniciando com uma caixa de lado unitário cuja diagonal coincide com o segmento inicial da contrução da curva. Note que se a caixa tem lado 1, o segmento inicial teria medida $\sqrt{2}$.

Note que $\mathcal{N}_1(P) = 4$, $\mathcal{N}_2(P) = 16$, ..., $\mathcal{N}_n(P) = 4^n$. Logo,

$$D(P) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(\mathcal{N}_n(P))}{\ln(2^n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(4^n)}{\ln(2^n)}\right\} = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2.$$

5 Referências

[1] ALVES, M. T. *O Conjunto de Cantor*. 2008. 42 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119561/Marcos.pdf?sequence=1>. Acesso em: 7 out. 2016.

[2] BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[3] BARNSLEY, M. *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press, 1988.

[4] DOMINGUES, H. H. *Espacos Métricos e Introducão à Topologia*. São Paulo: Atual, 1934.

[5] ENGELKING, R. *Dimension Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[6] FALKONER, K. *Fractal Geometry, Mathematical Foudations and Applications*. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1990.

[7] KOHAVI, Y.; DAVDOVICH, H. *Topological dimensions, Hausdorff dimensions & fractals*. Bar-llan University, p.1-16, maio 2006. Disponível em: <http://u.math.biu.ac.il/∼megereli/final_topology.pdf>. Acesso em: 7 jul. 2016.

[8] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral* . Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[9] NUNES, R. S. R. *Geometria Fractal e Aplicações*. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2015.

[10] WALSH, D. *Dimension Theory*. 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Wake Forest University, Winston-salem, North Carolina, 2014. Disponível em: <https://wakespace.lib.wfu.edu/bitstream/handle/10339/39274/Walsh_wfu_0248M_10559.pdf>. Acesso em: 31 mar. 2016.

6 Apêndice

Os conceitos de medida e de dimensão de Hausdorff que têm sua importância no estudo de fractais, serão aqui apresentados em uma abordagem diferente.

Definição 6.1. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Uma coleção $\{U_i\}$ é enumerável (ou finita) de conjuntos $U_i \subset \mathbb{R}^n$ com diâmetro $U \leq \delta$ e que cobre F é dita uma δ-cobertura de F.*

Dado $\delta > 0$, definimos

$$\mathscr{H}_\delta^s := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mid U_i \mid, \{U_i\} \textit{é uma } \delta - \textit{cobertura de } F\}$$

,
onde $\mid U_i \mid^s$ é a s-ésima potência dos diâmetros dos U_i's.

Se o limite abaixo existir para todo $F \subset \mathbb{R}^n$

$$(\lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta s(F) = \mathscr{H}^s(F))$$

chamamos $\mathscr{H}^s$ a medida de Hausdorff s-dimensional de F.

Tem-se que $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$ e se $E \subset F$, então $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{H}^s(F)$ e, se $\{F_i\}$ é uma coleção enumerável de conjuntos disjuntos de Borel, então

$$\mathscr{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^s(F_i)$$

Observemos que se $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, então $\mathscr{H}^s(\lambda F) = \lambda \mathscr{H}^s(F))$, onde $\lambda F = \{\lambda x, x \in F\}$.

De fato, seja $\{U_i\}$ uma δ-cobertura de F. Então, $\{\lambda U_i\}$ é uma $\lambda\delta$-cobertura de λF.

Logo

$$\mathscr{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F)) \leq \sum \mid \lambda U_i \mid^s = \lambda^s \sum \mid U_i \mid^s \leq \lambda^s \mathscr{H}_\delta^s(F)$$

,

para qualquer δ-cobertura $\{U_i\}$. Fazendo $\delta \longrightarrow 0$, tem-se $\mathscr{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathscr{H}^s(F)$. Trocando λ por $1/\lambda$ e F por λF, obtem-se a outra desigualdade.

Proposição 6.1. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação, tal que $\mid f(x) - f(y) \mid \leq c \mid x - y \mid^\alpha$ para todos $x, y \in F, c > 0$ e $\alpha > 0$. Então $\forall s, \mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathscr{H}^s(F)$.*

Demonstração. Seja uma δ-cobertura $\{U_i\}$ de F. Como $\mid f(F \cap U_i \mid \leq c \mid U_i \mid^{\alpha}$, temos que o diam$(f(F \cap U_i)) \leq c(diam(U_i))^{\alpha}$.

Lembrando que diam$(f(F \cap U_i)) = \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid, x, y \in F \cap U_i\}$, então $\mid f(x) - f(y) \mid \leq c \mid x - y \mid^{\alpha}$.

Segue que o supremo é menor do que ou igual a $c \cdot \sup(\mid x - y \mid^{\alpha}) = c \cdot \sup(\mid x - y \mid)^{\alpha}$.

Portanto, $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ε-cobertura de $f(F)$, $\varepsilon + c\delta\alpha$.

Segue que $\sum \mid f(F \cap U_i) \mid^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum \mid U_i \mid^{s}$, o que implica $\mathscr{H}_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}_{\delta}^{s}(F)$, quando $\delta \to 0$

A reciproca segue trocando λ por $1/\lambda$ e F por λF. □

Definição 6.2. *Dizemos que* $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz uma condição de Holder de expoente* α *se existe* $c > 0$, *tal que* $\mid f(x) - f(y) \mid \leq c \mid x - y \mid^{\alpha}$. *Quando* $\alpha = 1$ *dizemos que satisfaz uma condição de Lipschitz. Observe que quando vale a igualdade e* f *é sobrejetora, então dizemos que* f *é uma isometria.*

Proposição 6.2. *Seja* $F \subset \mathbb{R}^m$ *e* $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação que satisfaz uma condição de Holder para* α. *Então, para cada* s , $\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^{s}(F)$.

Demonstração. Se $\{U_i\}$ é uma δ-cobertura de F, então, como $\mid f(F \cap U_i) \mid \leq c \mid U_i\mid^{\alpha}$, segue que $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ϵ-cobertura de $f(F)$, onde $\epsilon = c\delta^{\alpha}$. Assim, $\sum_i \mid U_i\mid^{s}$, então $\mathscr{H}_{\epsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}_{\delta}^{s}(F)$. Quando $\delta \to 0$, temos que $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^{s}(F).$$

□

Definição 6.3. *Tem-se que dados* F *e* $\delta < 1$, $\mathscr{H}^{s}(\lambda F)$ *é não decrescente em relação a* s, *assim* $\mathscr{H}^{s}(F)$ *tambem não é. Na realidade, se* $t > s$ *e* $\{U_i\}$ *é uma* δ*-cobertura de* F, *tem -se :*

$$\sum \mid U_i \mid^{t} \leq \delta t - s \sum \mid U_i \mid^{s}$$

e assim, tomando-se o ínfimo, obtêm-se: $\mathscr{H}_{\delta}^{t}(F) \leq \delta\hat{\ } t - s\mathscr{H}_{\delta}^{s}(F)$ *e fazendo* $\delta \longrightarrow 0$, *tem-se que se* $\mathscr{H}^{s}(F) < \infty$, *então* $\mathscr{H}^{t}(F) = 0, t > s$. *Assim, o gráfico de* $\mathscr{H}^{s}(F)$ *por* s *mostra que existe um valor crítico de* s *no qual* $\mathscr{H}^{s}(F)$ *dá um salto de* ∞ *para* 0. *Este valor crítico é chamado de dimensão de Hausdorff de* F *e denotada por* $\dim_H F$.

Formalmente,

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathscr{H}^{s}(F) = 0\} = \sup\{\mathscr{H}^{s}(F) = \infty\}$$

e então

$$\mathscr{H}^{s}(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad s < \dim_H F \\ 0, & \text{se} \quad s > \dim_H F. \end{cases}$$

Se $s = \dim_H F$, então $\mathscr{H}^s(F)$ pode ser 0 ou ∞, ou pode satisfazer $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$.

A dimensão de Hausdorff satisfaz as aeguintes propriedades:

- Conjuntos abertos. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_H F = n$, pelo fato de F conter uma bola de volume n-dimensional positivo.

- Conjuntos Suaves. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície m-dimensional suave (isto é, continuamente diferenciável) de $\mathbb{R}^n$ então $\dim_H F = m$. Em particular, curvas suaves tem dimensão 1 e superfícies suaves tem dimensão 2.

- Monotonicidade. Se $E \subset F$ então $\dim_H E \leq \dim_H F$. Isto segue imediatamente da propriedade de medida em que $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{H}^s(F)$ para cada s.

- Estabilidade enumerável. Se $F_1, F_2, ...$ é uma sequência (enumerável) de conjuntos, então $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1\leq i<\infty} \{\dim_H F_i\}$. Claramente, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ para cada j vindo da propriedade de monotonicidade. Por outro lado, se $s > \dim_H F_i$ para todo i, então $\mathscr{H}^s(F_i) = 0$. Portanto, $\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$, o que garante a inequação oposta.

- Conjuntos enumeráveis. Se F é enumerável, então $\dim_H F = 0$. Se F_i é formado por um único ponto, $\mathscr{H}^0(F_i) = 1$ e $\dim_H F_i = 0$, então, pela estabilidade enumerável, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.

Proposição 6.3. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que $f : F \to \mathbb{R}^m$ satisfaz a condição de Holder, então $\dim_H f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_H f(F)$.*

Demonstração. Se $s > \dim_H f(F)$, então pela Proposição 6.2

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F) = 0.$$

Logo, $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$, para todo $s > \dim_H F$. □

Corolário 6.1.

(a) Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação Lipschitziana, então $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

(b) Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é bi-Lipschitz, isto é,

$$c_1 \mid x - y \mid \leq \mid f(x) - f(y) \mid \leq c_2 \mid x - y \mid, \ x, y \in F,$$

onde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, então $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

Demonstração. A parte (a) segue da Proposição 6.3 tomando $\alpha = 1$. Aplicando isso para $f^{-1} : f(F) \to F$ obtemos a outra inequação requerida em (b). □

Observe que a dimensão de Hausdorff é invariante por aplicações bi-Lipschitz. Então se dois conjuntos tem dimensões diferentes, não existe uma aplicação bi-Lipschitz entre eles. Na geometria fractal, dois objetos são vistos como o mesmo, se existe uma aplicação bi-Lipschitz entre eles. Dessa forma, a dimensão de Hausdorff nos dá uma maneira de distinguir características entre fractais.