

Érica Pereira

**Dualidade e Condições de Otimalidade
em Programação não Linear com Tempo Contínuo**



1910000862



**DUALIDADE E CONDIÇÕES DE
OTIMALIDADE EM PROGRAMAÇÃO
NÃO LINEAR COM TEMPO
CONTÍNUO**

ÉRICA PEREIRA

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-042

Dualidade e Condições de Otimidade em Programação Não Linear com Tempo Contínuo

Érica Pereira

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto

Março de 1999



“Ninguém nasce forte, torna-se forte. É pela
repetição de atos, por pequenas vitórias e
sacrifícios reiterados, que se consegue um
coração generoso e uma grande coragem”.

P. de Ponlevoy



Agglomeramentos

Aos meus pais, Dorico e Maria,
aos meus irmãos, Edmilson,
Elaine e Edvaldo,
ao Fernando,
dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, expresso minha sincera gratidão às pessoas que, durante o desenvolvimento do mesmo, estiveram presentes e contribuíram de diferentes formas para sua realização.

Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pela orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do DCCE, pela ajuda durante esta caminhada, em especial, à Prof^a Dr^a Eliana Xavier Linhares de Andrade.

Aos meus pais e irmãos, que sempre estiveram ao meu lado, pelo amor e compreensão.

Ao meu namorado, Fernando, pela confiança e apoio durante este período.

Aos meus sobrinhos, Guilherme e Letícia, pelas alegrias que me proporcionaram.

Aos amigos pós-graduandos, pelo companheirismo.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

Neste trabalho, analisamos problemas de programação não linear com tempo contínuo quanto as condições necessárias e suficientes de primeira ordem para a otimalidade na forma dos Teoremas de Fritz-John e de Karush-Kuhn-Tucker, e a teoria de dualidade. As condições suficientes para otimalidade global são tratadas supondo que as funções envolvidas satisfazem algum tipo de convexidade generalizada. Verificamos que a desigualdade do ponto de sela é equivalente às condições de Karush-Kuhn-Tucker. Introduzimos um problema dual lagrangeano (tipo Wolfe) e estabelecemos resultados de dualidade para programação não linear. Então, aplicando o Teorema da Dualidade Forte demonstramos um Teorema de Gordan com tempo contínuo para funções invexas.

Abstract

This is a discussion of continuous-time nonlinear programming problems as regards first-order necessary and sufficient optimality conditions in the form of Fritz-John and Karush-Kuhn-Tucker Theorems, as well as duality theory. The sufficient conditions of global optimality are treated supposing that the involved functions satisfy some type of generalized convexity. It was verified that the saddlepoint inequalities are equivalent to the Karush-Kuhn-Tucker conditions. A Lagrangian dual problem (Wolfe's type) was introduced and duality results for nonlinear programming was established. Then, by applying the Strong Duality Theorem, Gordan's Theorem with continuous time for invex functions was proved.

Índice

Introdução	8
1 Preliminares	11
1.1 Definições e Resultados Básicos	11
1.2 Teorema de Alternativas	32
1.3 Integração de Multifunções	32
2 Condições Necessárias de Otimalidade	34
2.1 Caracterização Geométrica de um Mínimo	34
2.2 Condições Necessárias	39
2.2.1 Condições de Otimalidade de Fritz-John	39
2.2.2 Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker	48
3 Condições Suficientes de Otimalidade	52
3.1 Caso Lipschitz	52
3.2 Caso Regular	56
4 Dualidade e o Teorema de Gordan para Funções Invexas	62
4.1 Desigualdade do Ponto de Sela	62
4.2 Dualidade Invexa	67
4.3 Teorema de Gordan Generalizado para Funções Invexas	69
5 Considerações Finais	76
Referências	78



Introdução

Consideremos o problema primal de programação não linear com tempo contínuo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \phi(x) = \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ (P) \quad & \text{sujeito a} \quad g_i(t, x(t)) \leq 0 \quad \text{q.t.p. } t \in [0, T] \\ & i \in I = \{1, \dots, m\}, x \in Y. \end{aligned}$$

Aqui, *q.t.p.* denota quase todo ponto com relação à medida de Lebesgue, Y é um subconjunto convexo, aberto e não-vazio do espaço de Banach, $L_\infty^n[0, T]$, de todas as funções vetoriais n -dimensionais que são Lebesgue mensuráveis e essencialmente limitadas, definidas sobre o intervalo compacto $[0, T] \subset \mathbb{R}$, com norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \text{ess sup} \{|x_j(t)|, 0 \leq t \leq T\},$$

onde, para cada $t \in [0, T]$, $x_j(t)$ é a j -ésima componente de $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ϕ é uma função definida em Y tomando valores reais, $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$ e $f(t, x(t)) = \Gamma(x)(t)$, onde γ é uma aplicação com domínio em Y , tomando valores no espaço normado $\Lambda_1^m[0, T]$ de todas as funções vetoriais m -dimensionais que são Lebesgue mensuráveis e essencialmente limitadas, definidas sobre o intervalo $[0, T]$, com norma $\|\cdot\|_1$ definida por

$$\|y\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \int_0^T |y_j(t)| dt,$$

e Γ é uma aplicação de Y no espaço normado $\Lambda_1^1[0, T]$.

Essa classe de problemas foi introduzido em 1953 por Bellman [3] em conexão com os problemas de planejamento de produção integrado com estoque quando a linha de produção apresenta gargalo. Considerou um tipo de problema de otimização, que é agora



conhecido como programação linear com tempo contínuo, formulou um dual e estabeleceu relações de dualidade. Também sugeriu alguns procedimentos computacionais.

Por outro lado, condições de otimalidade do tipo Karush-Kuhn-Tucker para problemas não lineares com tempo contínuo foi pesquisado primeiro por Hanson e Mond [11]. Eles consideraram uma classe de problemas de programação não linear com restrições lineares. Supondo que o integrando da função custo era não linear e duas vezes diferenciável, linearizaram a função custo e aplicaram a teoria de dualidade de Levinson [15] para obter as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Farr e Hanson [9] também aplicaram linearização para obter condições necessárias e suficientes para uma classe mais geral de problemas não lineares com tempo contínuo (a função custo e as restrições eram não lineares).

A teoria de condições de otimalidade para problemas não lineares com tempo contínuo foi estendida usando métodos diretos e sob hipóteses de regularidade das restrições por Abraham e Buie [1], Reiland e Hanson [19], Scott e Jefferson [25] e Zalmai [28, 29, 30, 31, 32]. Condições necessárias de primeira ordem para (P) onde as funções envolvidas são localmente lipschitzianas e não diferenciáveis se encontram em Rojas-Medar, Brandão e Silva [21].

Resultados sobre condições suficientes de otimalidade para o problema (P) foi estudado por Zalmai [31] no caso diferenciável e por Rojas-Medar, Brandão e Silva [22] no caso não diferenciável.

Condições necessárias e resultados de dualidade podem ser obtidos a partir de teoremas de alternativas (ver, por exemplo, [6]). Um teorema de alternativas afirma sobre a incompatibilidade de dois sistemas alternativos de desigualdades e/ou igualdades, e pode ser enunciado da seguinte maneira: ou o sistema (i) tem solução, ou o sistema (ii) tem solução, mas nunca ambos simultaneamente.

Entre os mais famosos teoremas de alternativas estão o Lema de Farkas e o Teorema de Gordan [17]. Com o avanço da análise não diferenciável, muitos teoremas de alternativas para funções convexas generalizadas foram obtidos (ver, por exemplo, [7], [8], [12], [26]).

No contexto de tempo contínuo, o Teorema de Alternativas de Gordan para funções convexas foi obtido em [29] e para funções invexas em [23].

Este trabalho divide-se em quatro capítulos. No capítulo 1, introduziremos algumas definições e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Estudaremos as condições necessárias de otimalidade de Fritz-John e de Karush-Kuhn-Tucker no capítulo 2. No capítulo 3, discutiremos as condições suficientes de primeira ordem de otimalidade para os casos 1) Lipschitz e 2) regular. E, finalmente no capítulo 4, estudaremos a dualidade invexa e um Teorema de Gordan generalizado para funções invexas.



Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentarmos algumas definições e resultados básicos, que serão necessários posteriormente para o desenvolvimento de condições de otimalidade. O material contido aqui pode ser encontrado, em sua maioria, no livro do Clarke [4]. Quando este não for o caso, será referenciado dentro do texto.

1.1 Definições e Resultados Básicos

Neste trabalho, quando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ usaremos a norma do máximo, isto é,

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Seja X um espaço vetorial real normado e X^* seu dual topológico com norma dada por

$$\|\xi\|_* = \sup\{\langle \xi, v \rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a aplicação dual canônica entre X^* e X .

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação *localmente lipschitziana*, isto é, para todo $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ e uma constante k não negativa, dependendo de ϵ , tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in x + \epsilon B,$$



onde B é uma bola unitária aberta de X .

Dizemos também, que f é *lipschitziana com constante k na vizinhança de x* .

Seja F uma aplicação de X em um outro espaço de Banach Y . A *derivada direcional usual (lateral) de F em x na direção v* , é dada por

$$F'(x; v) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t}$$

quando esse limite existe.

Veremos a seguir uma generalização da derivada direcional usual, introduzida por Clarke, que é finita quando f é Lipschitz (Teorema 1.1.1).

Seja $v \in X$. A *derivada direcional generalizada de f em x na direção v* , denotada por $f^\circ(x; v)$, é definida da seguinte forma:

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

onde $y \in X$, $t \in (0, +\infty)$.

Seja p um funcional real sobre um espaço vetorial X . Dizemos que p é *sub-aditivo* se

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X$$

e *positivamente homogêneo* se

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall \alpha \geq 0 \text{ e } x \in X.$$

Quando p é sub-aditivo e positivamente homogêneo, dizemos que p é um *funcional sublinear*.

Teorema 1.1.1 *Seja f Lipschitz com constante k na vizinhança de x . Então, a função $v \rightarrow f^\circ(x; v)$ é finita, positivamente homogênea, sub-aditiva e satisfaz*

$$(i) \quad |f^\circ(x; v)| \leq k\|v\|;$$

$$(ii) \quad f^\circ(x; -v) = (-f)^\circ(x; v).$$

Demonstração:

Pela condição de Lipschitz, temos que



$$\frac{|f(y+tv) - f(y)|}{|t|} \leq k \frac{\|y+tv - y\|}{|t|} = k \frac{\|tv\|}{|t|} = k \frac{|t|\|v\|}{|t|} = k\|v\|.$$

Então,

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \left| \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \right| \leq k\|v\|.$$

Logo,

$$\left| \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \right| \leq k\|v\|,$$

ou seja,

$$|f^\circ(x; v)| \leq k\|v\|.$$

Assim, demonstramos (i) e que a função $v \rightarrow f^\circ(x; v)$ é finita.

• Mostremos que $f^\circ(x; v)$ é *positivamente homogênea*, isto é,

$$f^\circ(x; \lambda v) = \lambda f^\circ(x; v), \text{ para } \forall \lambda \geq 0.$$

De fato:

1) Para $\lambda = 0$

$$f^\circ(x; 0v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + t0v) - f(y)}{t} = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y) - f(y)}{t} = 0 = 0f^\circ(x; v).$$

2) Para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} f^\circ(x; \lambda v) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + t\lambda v) - f(y)}{t} = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\lambda f(y + t\lambda v) - f(y)}{\lambda t} \\ &= \lambda \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ s \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + sv) - f(y)}{s} = \lambda f^\circ(x; v). \end{aligned}$$

• $f^\circ(x; v)$ é *sub-aditiva*, ou seja, $f^\circ(x; v + w) \leq f^\circ(x; v) + f^\circ(x; w)$. De fato:

$$\begin{aligned} f^\circ(x; v + w) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tv + tw) - f(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tv + tw) - f(y + tw) + f(y + tw) - f(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tv + tw) - f(y + tw)}{t} + \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tw) - f(y)}{t}. \end{aligned}$$

Como $(y + tw) \rightarrow x$, podemos concluir que

$$f^\circ(x; v + w) \leq f^\circ(x; v) + f^\circ(x; w).$$

(ii) Mostremos que $f^\circ(x; -v) = (-f)^\circ(x; v)$. De fato:

$$f^\circ(x; -v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y - tv) - f(y)}{t}.$$

Tomando $y = u + tv$, temos

$$\begin{aligned} f^\circ(x; -v) &= \limsup_{\substack{u \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(u + tv - tv) - f(u + tv)}{t} = \limsup_{\substack{u \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(u) - f(u + tv)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{u \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{(-f)(u + tv) - (-f)(u)}{t} = (-f)^\circ(x; v). \end{aligned}$$

■

O *gradiente generalizado* de f em x , denotado por $\partial f(x)$, é o subconjunto de X^* dado por

$$\partial f(x) := \{\xi \in X^* / f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\}.$$

Dizemos que $x \in X$ é um *ponto estacionário* de f se $0 \in \partial f(x)$.

Exemplo 1.1.1 Seja $X = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x|$. Neste caso é fácil verificar que $\partial f(x) = \{1\}$ se $x > 0$, $\partial f(x) = \{-1\}$ se $x < 0$ e $\partial f(x) = [-1, 1]$ se $x = 0$. Observe que 0 é um ponto estacionário de f pois $0 \in \partial f(0)$.

Agora, introduziremos algumas noções de convexidade que serão usadas neste trabalho.

Um subconjunto $U \subset X$ é *convexo* se para todo $u, u' \in U$ e $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda u + (1 - \lambda)u' \in U.$$

Dado $S \subset X$ qualquer, define-se o *envoltório convexo* de S como sendo a intersecção de todos conjuntos convexos contendo S e é denotado por coS .

Seja U um subconjunto convexo e aberto de X . Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se, para todo $u, u' \in U$ e $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)u') \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(u').$$



O Teorema de Hahn-Banach será útil na demonstração do próximo teorema.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hahn-Banach, [14]-Teorema 4.2-1) *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Seja Z um subespaço de X e $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Suponha que*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in Z. \quad (1.1)$$

Então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z para X satisfazendo $\tilde{f}(x) \leq p(x), \forall x \in X$, isto é, $\tilde{f}$ é um funcional linear em X , satisfaz (1.1) em X e $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$.

Teorema 1.1.3 *Seja f Lipschitz com constante k na vizinhança de x . Então*

a) $\partial f(x)$ é um subconjunto de X^*

(i) não-vazio,

(ii) convexo,

(iii) $\|\xi\|_* \leq K$, para todo $\xi \in \partial f(x)$, e

(iv) compacto na topologia fraca estrela;

b) para todo $v \in X$, temos

$$f^\circ(x; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração:

Lembremos que

$$\partial f(x) := \{\xi \in X^* / f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \text{ para todo } v \in X\}.$$

a) (i) Sejam $v \in X$ fixo e Z um subespaço de X gerado por v .

Definemos um funcional linear $\xi : Z \rightarrow \mathbb{R}$ por $\xi(u) = \lambda f^\circ(x; v)$ onde $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O funcional ξ satisfaz $\xi(u) = f^\circ(x; u), \forall u \in Z$. De fato, se $u = \lambda v$ com $\lambda \geq 0$ então $\xi(\lambda v) = f^\circ(x; \lambda v)$ pelo Teorema 1.1.1. E se $u = \lambda v$ com $\lambda < 0$ então $\xi(\lambda v) = \xi((- \lambda)(-v)) = -\lambda f^\circ(x; -v)$. Novamente, segue do Teorema 1.1.1 que $\xi(\lambda v) = f^\circ(x, \lambda v)$.



Assim, todas as condições do Teorema de Hahn-Banach estão satisfeitas, de forma que existe uma extensão $\tilde{\xi}$ de ξ para todo X tal que $\tilde{\xi}(u) \leq f^\circ(x; u)$, $\forall u \in X$. Portanto, $\partial f(x) \neq \emptyset$.

(ii) Sejam $\begin{cases} a \in \partial f(x) \\ b \in \partial f(x) \end{cases}$ e $\lambda \in [0, 1]$.

$a \in \partial f(x) \implies f^\circ(x; v) \geq \langle a, v \rangle$, para todo $v \in X$.

$b \in \partial f(x) \implies f^\circ(x; v) \geq \langle b, v \rangle$, para todo $v \in X$.

Mostremos que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \partial f(x)$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda a + (1 - \lambda)b, v \rangle &= \langle \lambda a, v \rangle + \langle (1 - \lambda)b, v \rangle = \lambda \langle a, v \rangle + (1 - \lambda) \langle b, v \rangle \\ &\leq \lambda f^\circ(x; v) + (1 - \lambda) f^\circ(x; v) = f^\circ(x; v). \end{aligned}$$

Portanto, $\partial f(x)$ é convexo.

(iii) Lembremos que $\|\xi\|_* = \sup\{\langle \xi, v \rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\}$.

Se $\xi \in \partial f(x)$ então $\|\xi\|_*$ é limitado, pois, pelo Teorema 1.1.1,

$$\xi(v) \leq f^\circ(x; v) \leq k\|v\|, \forall v \in X.$$

Tomando o supremo sobre v , com $\|v\| \leq 1$, na desigualdade $\xi(v) \leq k\|v\|$, $\forall v \in X$, obtemos

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \xi(v) \leq \sup_{\|v\| \leq 1} k\|v\| \leq k.$$

Logo, $\|\xi\|_* \leq k$. Como $\xi \in \partial f(x)$ é arbitrário, segue (iii).

(iv) Aqui usaremos o Teorema de Alaoglu que diz: A bola unitária $B^* = \{f : \|f\| \leq 1\}$ de X^* é compacta na topologia fraca estrela.

Por (iii) temos que $\partial f(x)$ é limitado.

Agora, demonstraremos que $\partial f(x)$ é fechado, isto é, $\overline{\partial f(x)} = \partial f(x)$. Sabemos que $\partial f(x) \subset \overline{\partial f(x)}$. Então, mostraremos a outra inclusão.

Seja $\xi \in \overline{\partial f(x)}$, então, $\exists \xi_i \in \partial f(x)$ tal que $\xi_i \xrightarrow{*} \xi$, isto é, $\xi_i(v) \rightarrow \xi(v)$, $\forall v \in X$.

Mas, como $\xi_i \in \partial f(x)$, $\xi_i(v) \leq f^\circ(x; v)$, $\forall v \in V$. Passando o limite quando $i \rightarrow \infty$ obtemos $\xi(v) \leq f^\circ(x; v)$, $\forall v \in V$, isto é, $\xi \in \partial f(x)$.

Logo, $\overline{\partial f(x)} \subset \partial f(x)$ e concluímos que $\partial f(x)$ é fechado.

Portanto, pelo Teorema de Alaoglu, $\partial f(x) \subset X^*$ é compacto na topologia fraca estrela.

b) $\xi \in \partial f(x) \implies f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle$, $\forall v \in X$. Suponhamos que para algum $v \neq 0$,

$$f^\circ(x; v) > \max \{ \langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(x) \}.$$

Tomemos $Z = \{ \alpha v : \alpha \in \mathbb{R} \}$ e $\xi_\circ(\alpha v) = \alpha f^\circ(x; v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

• $\xi_\circ : Z \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, pois para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$1. \xi_\circ((\alpha + \beta)v) = (\alpha + \beta)f^\circ(x; v) = \xi_\circ(\alpha v) + \xi_\circ(\beta v).$$

$$2. \xi_\circ(\beta(\alpha v)) = \xi_\circ(\beta \alpha v) = \beta \alpha f^\circ(x; v) = \beta \xi_\circ(\alpha v).$$

• $\xi_\circ(u) = f^\circ(x; u)$, $\forall u \in Z$. De fato, se $u \in Z$ então, $u = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, mostraremos que

$$\xi_\circ(u) = \xi_\circ(\alpha v) = \alpha f^\circ(x; v) = f^\circ(x; u) \text{ para todo } \alpha \text{ real.}$$

Para $\alpha \geq 0$, $f^\circ(x; u) = \alpha f^\circ(x; v)$, pelo Teorema 1.1.1 e para $\alpha < 0$, $f^\circ(x; u) = f^\circ(x; \alpha v) = f^\circ(x; -\alpha(-v)) = -\alpha f^\circ(x; -v) = \xi_\circ(-\alpha(-v)) = \xi_\circ(\alpha v) = \alpha f^\circ(x; v)$.

Assim, concluímos que $\xi_\circ : Z \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e $\xi_\circ(u) = f^\circ(x; u)$, $\forall u \in Z$.

Agora, podemos aplicar o Teorema de Hahn-Banach, o que implica que existe $\gamma \in X^*$ tal que

$$\gamma(u) \leq f^\circ(x; u), \forall u \in X \quad \text{e} \quad \gamma(u) = \xi_\circ(u), \forall u \in Z.$$

Daí, podemos concluir que $\gamma \in \partial f(x)$. Tomando $u = v$, temos que

$$\gamma(v) = f^\circ(x; v) > \max \{ \langle \xi, v \rangle, \forall \xi \in \partial f(x) \}.$$

Absurdo, pois $\gamma(v) > \max \{ \langle \xi, v \rangle, \forall \xi \in \partial f(x) \}$ e $\gamma \in \partial f(x)$.

Portanto,

$$f^\circ(x; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(x)\},$$

o que conclui a demonstração. ■

Seja F uma aplicação de X em um outro espaço de Banach Y . F admite uma *derivada de Gâteaux* em x , um elemento no espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ das aplicações lineares contínuas de X em Y denotada por $DF(x)$, se, para todo $v \in X$, $F'(x; v)$ existe e é igual a $\langle DF(x), v \rangle$ e a convergência do quociente é uniforme em relação a v em conjuntos **finitos**.

Se a palavra “**finitos**” na sentença anterior for substituída por “**compactos**”, a derivada é conhecida como *derivada de Hadamard*; e por “**limitados**”, obtemos a derivada de *Fréchet*.

Dizemos que F admite uma *derivada estrita em x* , um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ denotada por $D_S F(x)$, se, para cada v ,

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} = \langle D_S F(x), v \rangle,$$

e a convergência é uniforme em relação a v em conjuntos compactos.

Teorema 1.1.4 *Seja F uma aplicação de uma vizinhança de x em Y e seja ξ um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- a) F é estritamente diferenciável em x e $D_S F(x) = \xi$;
- b) F é Lipschitz na vizinhança de x e, para cada $v \in X$, temos

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} = \langle \xi, v \rangle.$$

Demonstração:

(i) $b) \implies a)$

Suponhamos que $b)$ seja verdadeiro. Seja V um subconjunto compacto de X e ϵ um número positivo qualquer.

Por $b)$, para cada $v \in V$, existe um número $\delta(v) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} - \langle \xi, v \rangle \right\| < \epsilon, \quad (1.2)$$

para todo $x' \in B(x, \delta)$ e $t \in (0, \delta)$.

Como

$$\left\| \frac{F(x' + tv') - F(x')}{t} - \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} \right\|$$

é limitado superiormente por $k\|v - v'\|$ (onde k é uma constante de Lipschitz para F e x' , t estão suficientemente próximos de x e 0, respectivamente), deduzimos de (1.2), redefinindo $\delta_1(v) = \min\{\epsilon/2k, \delta\}$, que

$$\left\| \frac{F(x' + tv') - F(x')}{t} - \langle \xi, v' \rangle \right\| < 2\epsilon, \quad (1.3)$$

para todo $x' \in B(x, \delta_1(v))$, $v' \in B(v, \delta_1(v))$ e $t \in (0, \delta_1(v))$. Os detalhes seguem abaixo:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(x' + tv') - F(x')}{t} - \langle \xi, v' \rangle \right\| &= \left\| \frac{F(x' + tv') - F(x')}{t} - \langle \xi, v \rangle + \langle \xi, v \rangle - \langle \xi, v' \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} - \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{F(x' + tv') - F(x')}{t} - \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} \right\| \\ &\quad + \|\langle \xi, v \rangle - \langle \xi, v' \rangle\| + \left\| \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} - \langle \xi, v \rangle \right\| \\ &\leq k\|v - v'\| + \|\langle \xi, v - v' \rangle\| + \epsilon \\ &= k\|v - v'\| + \left\| \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(x' + t(v - v')) - F(x')}{t} \right\| + \epsilon \\ &= k\|v - v'\| + \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \left\| \frac{F(x' + t(v - v')) - F(x')}{t} \right\| + \epsilon \\ &\leq k\|v - v'\| + \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{k\|t(v - v')\|}{t} + \epsilon \\ &= k\|v - v'\| + \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{kt\|v - v'\|}{t} + \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k\|v - v'\| + k\|v - v'\| + \epsilon \\
&= 2k\|v - v'\| + \epsilon \\
&< 2k\delta_1(v) + \epsilon \\
&< 2\epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $x' \in B(x, \delta_1(v))$, $v' \in B(v, \delta_1(v))$ e $t \in (0, \delta_1(v))$.

Como V é compacto, podemos cobrí-lo com uma quantidade finita de bolas abertas $\{B(v_i, \delta_1(v_i)) : v_i \in V, i = 1, \dots, n\}$. Suponhamos $\delta' = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_1(v_i)$ e $v \in V$.

Daí, $v \in B(v_k, \delta_1(v_k))$, para algum $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Logo, (1.3) é satisfeita, ou seja, (1.2) vale (com 2ϵ ao invés de ϵ) para todo $v \in V$, $x' \in B(x, \delta')$ e $t \in (0, \delta')$.

Assim, ξ é a derivada estrita de F em x .

(ii) $a) \implies b)$.

Suponhamos que o item $a)$ seja verdadeiro. Assim, a igualdade em $b)$ é verdadeira, e basta demonstrarmos que F é Lipschitz na vizinhança de x . Suponhamos que F não seja Lipschitz na vizinhança de x . Então, existem sequências $\{x_i\}$ e $\{x'_i\}$ convergindo para x tal que, $x_i, x'_i \in B(x, \frac{1}{i})$ e $\|F(x'_i) - F(x_i)\|_Y > i\|x'_i - x_i\|_X$.

Tomemos $t_i > 0$, $x'_i = x_i + t_i v_i$ e $\|v_i\| = i^{-1/2}$. Assim, temos que $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ (pois $\|x'_i - x_i\| = \|t_i v_i\| \implies t_i \|v_i\| < 1/i \implies t_i i^{-1/2} < 1/i \implies t_i < i^{-1/2}$).

Seja V o conjunto dos pontos da sequência $\{v_i\}$ união com zero. Notemos que V é compacto (pois $v_i \rightarrow 0$). Então, pela definição de $D_S F(x)$, para todo $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que para todo $i \geq n_\epsilon$ e $v \in V$,

$$\left\| \frac{F(x_i + t_i v) - F(x_i)}{t_i} - \langle D_S F(x), v \rangle \right\| < \epsilon. \quad (1.4)$$

Mas isso é impossível quando $v = v_i$, pois

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{F(x_i + t_i v_i) - F(x_i)}{t_i} \right\| &= \frac{\|F(x'_i) - F(x_i)\|}{t_i} > \frac{i\|x'_i - x_i\|}{t_i} \\
&= \frac{i\|t_i v_i\|}{t_i} = i\|v_i\| = i \cdot i^{-1/2} = i^{1/2};
\end{aligned}$$

e, quando $i \rightarrow \infty$, $(i^{1/2}) \rightarrow \infty$ contradizendo (1.4).

Logo, F é Lipschitz na vizinhança de x . ■

Dizemos que F é *continuamente (Gâteaux) diferenciável em x* se sobre uma vizinhança de x a derivada de Gâteaux, DF , existe e é contínua como uma aplicação de X em $\mathcal{L}(X, Y)$.

A definição acima é a mesma para as derivadas de Hadamard e Fréchet.

Usaremos o Teorema 1.1.5 abaixo para demonstrar o Corolário 1.1.1 dado em seguida.

Teorema 1.1.5 (Teorema do Valor Médio) *Sejam $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1$ e $a, b \in X$. Então, existe μ pertencente ao segmento de reta $[a, b]$ tal que:*

$$F(b) - F(a) = \langle DF(\mu), (b - a) \rangle.$$

Corolário 1.1.1 *Se F é continuamente diferenciável em x , então F é estritamente diferenciável em x e, portanto, Lipschitz na vizinhança de x .*

Demonstração:

Para demonstrar que $DF(x)$ é na realidade a derivada estrita, é suficiente demonstrar a igualdade em b) do Teorema 1.1.4 para todo v .

Segue do Teorema 1.1.5 que F é Lipschitz na vizinhança de x , pois, caso contrário, existem $\epsilon > 0$ e $[a, b] \subset B(x, \epsilon)$ tais que

$$\|F(a) - F(b)\| > k\|b - a\|, \text{ para todo } k. \quad (1.5)$$

Mas, pelo Teorema 1.1.5, existe $\mu \in [a, b]$ tal que $F(b) - F(a) = \langle DF(\mu), (b - a) \rangle$. Logo,

$$\|F(b) - F(a)\| \leq \|DF(\mu)\| \|b - a\|$$

e

$$\|F(b) - F(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

Tomando $k = M$ em (1.5) chegamos a uma contradição. Portanto, F é Lipschitz na vizinhança de x .



Para demonstrar a igualdade em b) do Teorema 1.1.4 é suficiente mostrar que para todo $v \in X$ e qualquer dupla de seqüências $\{x_i\}$ e $\{t_i\}$ (com $t_i > 0$) convergindo para x e 0, respectivamente, tem-se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{F(x_i + t_i v) - F(x_i)}{t_i} - \langle DF(x), v \rangle \right) = 0.$$

Pelo Teorema 1.1.5, existe x_i^* entre x_i e $x_i + t_i v$ tal que

$$\frac{F(x_i + t_i v) - F(x_i)}{t_i} = \frac{\langle DF(x_i^*), t_i v \rangle}{t_i}.$$

Assim,

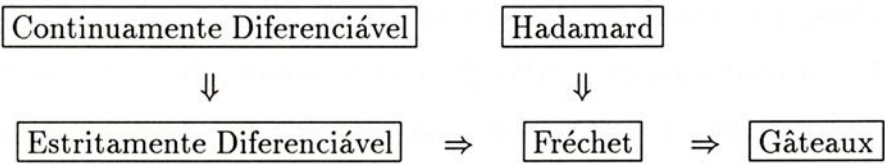
$$\frac{F(x_i + t_i v) - F(x_i)}{t_i} - \langle DF(x), v \rangle = \langle DF(x_i^*), v \rangle - \langle DF(x), v \rangle = \langle (DF(x_i^*) - DF(x)), v \rangle.$$

Isso vai para zero quando $i \rightarrow \infty$, pela continuidade de DF . Então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{F(x_i + t_i v) - F(x_i)}{t_i} - \langle DF(x), v \rangle \right) = 0,$$

concluindo a demonstração. ■

Agora resumimos as relações entre as diversas derivadas introduzidas neste capítulo. No esquema abaixo temos que, por exemplo, funções continuamente diferenciáveis são também estritamente diferenciáveis, etc.



Uma *multifunção* $\Gamma : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de X em subconjuntos de Y . Quando X e Y são espaços de Banach, definimos *semicontinuidade superior* da seguinte maneira: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\Gamma(x') \subset \Gamma(x) + \epsilon B_Y, \text{ para todo } x' \in x + \delta B_X,$$



onde B_Y e B_X são as bolas unitárias abertas de Y e X , respectivamente.

Multifunções são extensões de funções, pois uma função é uma multifunção cuja imagem de cada ponto é um conjunto unitário. Observemos que quando uma multifunção se reduz a uma função, a semicontinuidade superior se reduz a continuidade.

Uma multifunção $\Gamma : X \rightarrow Y$ é *mensurável* se para todo subconjunto aberto (ou fechado) C de Y , o conjunto

$$\{x \in X : \Gamma(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

é mensurável no sentido de Lebesgue.

Enunciaremos a seguinte proposição, a qual nos auxiliará nas próximas demonstrações.

Proposição 1.1.1

- a) $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se, $f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle$ para todo $v \in X$;
- b) Se X tem dimensão finita, então ∂f é semicontínuo superior em x .

Agora, estamos preparados para explorar a relação entre as diversas derivadas definidas acima e o gradiente generalizado.

Teorema 1.1.6 *Suponhamos que f seja Lipschitz na vizinhança de x e que admita uma derivada $Df(x)$ de Gâteaux (ou Hadamard, ou estrita, ou Fréchet). Então, $Df(x) \in \partial f(x)$.*

Demonstração:

Por definição, a derivada direcional $f'(x; v)$ existe para cada v e é igual a $\langle Df(x), v \rangle$. Claramente temos $f' \leq f^\circ$. Assim, $f^\circ(x; v) \geq \langle Df(x), v \rangle$ para todo $v \in X$. Pela Proposição 1.1.1, temos que $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se, $f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle$ para todo $v \in X$ e a conclusão do teorema segue. ■

Exemplo 1.1.2 $\partial f(x)$ pode conter pontos diferentes de $Df(x)$. Ilustremos a afirmação com o exemplo sobre $\mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Essa função é Lipschitz na vizinhança do 0 e $f^\circ(0; v) = |v|$. Disso segue que $\partial f(0) = [-1, 1]$, um conjunto que contém a derivada $Df(0) = 0$.

Teorema 1.1.7 Se f é estritamente diferenciável em x , então f é Lipschitz na vizinhança de x e $\partial f(x) = \{D_S f(x)\}$. Reciprocamente, se f é Lipschitz na vizinhança de x e $\partial f(x)$ se reduz ao conjunto unitário $\{\xi\}$, então f é estritamente diferenciável em x e $D_S f(x) = \xi$.

Demonstração:

Como f é estritamente diferenciável, então existe $D_S f(x)$ (de modo que f é Lipschitz na vizinhança de x pelo Teorema 1.1.4).

Então, pela definição de f° , temos $f^\circ(x; v) = \langle D_S f(x), v \rangle$ para todo $v \in X$ e, pela Proposição 1.1.1 a), temos que $\partial f(x)$ se reduz a $\{D_S f(x)\}$, pois

$$\begin{aligned} \xi \in \partial f(x) &\implies \langle \xi, v \rangle \leq \langle D_S f(x), v \rangle = f^\circ(x; v), \quad \forall v \in X \\ &\implies \langle \xi - D_S f(x), v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in X \\ &\implies \langle \xi - D_S f(x), -v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in X \\ &\implies \langle \xi - D_S f(x), v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in X \\ &\implies \langle \xi - D_S f(x), v \rangle = 0, \quad \forall v \in X \\ &\implies \xi - D_S f(x) = 0 \\ &\implies \xi = D_S f(x) \end{aligned}$$

Para demonstrar a recíproca, é suficiente mostrar que a igualdade em b) do Teorema 1.1.4 vale para cada $v \in X$.

Mostraremos primeiro que $f^\circ(x; v) = \langle \xi, v \rangle$ para cada $v \in X$. Notemos que, pelo Teorema 1.1.3 (b), para todo $v \in X$, $f^\circ(x; v) = \max \{ \langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(x) \}$. Como $\partial f(x) = \{\xi\}$ segue que $f^\circ(x; v) = \langle \xi, v \rangle$, para todo $v \in X$.

Agora, fazendo $y = x' + tv$, temos

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} &= - \limsup_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(x') - f(x' + tv)}{t} \\ &= - \limsup_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(x' + tv - tv) - f(x' + tv)}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y - tv) - f(y)}{t} \\
&= -f^\circ(x; -v) \\
&= f^\circ(x; v)
\end{aligned}$$

(a última igualdade segue do Teorema 1.1.1 (ii)). Isto mostra que

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} = \langle \xi, v \rangle,$$

concluindo a demonstração. ■

Corolário 1.1.2 *Se f é Lipschitz na vizinhança de x e X tem dimensão finita, então $\partial f(x')$ reduz-se a um conjunto unitário para todo $x' \in B(x, \epsilon)$ se, e somente se, f é continuamente diferenciável em $B(x, \epsilon)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Pelo Teorema 1.1.7, temos que f é estritamente diferenciável em x' . Pelo Teorema 1.1.6, $Df(x') \in \partial f(x')$ e como $\partial f(x')$ se reduz a um conjunto unitário, então $\{Df(x')\} = \partial f(x')$.

Pela Proposição 1.1.1 temos que se X tem dimensão finita, ∂f é semicontínuo superior em x' , isto é, dado $\alpha > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que

$$\partial f(x'') \subset \partial f(x') + \alpha B_Y, \forall x'' \in B_X(x', \delta).$$

Isto implica que

$$Df(x'') \in Df(x') + \alpha B_Y, \forall x'' \in B_X(x', \delta).$$

Como a semicontinuidade de ∂f reduz-se à continuidade por ∂f ser um conjunto unitário, a demonstração está concluída.

($\Leftarrow$) Se f é continuamente diferenciável em $B(x, \epsilon)$ então, pelo Corolário 1.1.1, f é estritamente diferenciável em $B(x, \epsilon)$. Pelo Teorema 1.1.7, $\partial f(x')$ reduz-se a um conjunto unitário para todo $x' \in B(x, \epsilon)$. ■

Observe que o gradiente generalizado não se reduz à derivada, a não ser nas condições do corolário anterior. O Exemplo 1.1.2 onde $\partial f(0) = [-1, 1]$ e $Df(0) = 0$ ilustra este caso.

O próximo resultado mostrará que funções convexas são Lipschitz, com raríssimas exceções.

Teorema 1.1.8 *Sejam U um subconjunto convexo e aberto de X e f uma função convexa limitada superiormente em uma vizinhança de algum ponto de U . Então, para qualquer $x \in U$, f é Lipschitz na vizinhança de x .*

Demonstração:

Começamos demonstrando que f é limitada sobre uma vizinhança de x .

Sem perda de generalidade, suponhamos que f é limitada superiormente por M na $B(0, \epsilon) \subset U$.

Escolhemos $\rho > 1$ tal que $y = \rho x \in U$. Se $\lambda = 1/\rho$, então o conjunto

$$V = \{v : v = (1 - \lambda)x' + \lambda y, x' \in B(0, \epsilon)\}$$

é uma vizinhança de $x = \lambda y$ com raio $(1 - \lambda)\epsilon$ pois $B(x, (1 - \lambda)\epsilon) = V$. De fato:

(i) Seja $x'' \in B(x, (1 - \lambda)\epsilon)$. Então, $\|x'' - \lambda y\| < (1 - \lambda)\epsilon$. Tomemos

$$x' = x''/(1 - \lambda) - \lambda y/(1 - \lambda).$$

Daí,

$$\|x'\| = \|x''/(1 - \lambda) - \lambda y/(1 - \lambda)\| = 1/(1 - \lambda)\|x'' - \lambda y\| < (1 - \lambda)\epsilon/(1 - \lambda) = \epsilon.$$

Logo,

$$\|x'\| < \epsilon.$$

Assim, $x'' = (1 - \lambda)x' + \lambda y$ com $\|x'\| < \epsilon$ e, portanto, $x'' \in V$.

Logo, $B(x, (1 - \lambda)\epsilon) \subset V$.

(ii) Seja $x'' \in V$. Então, $x'' = (1 - \lambda)x' + \lambda y$ com $\|x'\| < \epsilon$. Subtraindo λy de ambos os lados, temos $x'' - \lambda y = (1 - \lambda)x'$. Daí,

$$\|x'' - \lambda y\| = (1 - \lambda)\|x'\| < (1 - \lambda)\epsilon.$$



Assim, $x'' \in B(\lambda y, (1 - \lambda)\epsilon)$. Portanto, $V \subset B(x, (1 - \lambda)\epsilon)$.

De (i) e (ii), concluímos que $V = B(x, (1 - \lambda)\epsilon)$.

Para todo $v \in V$, temos, pela convexidade de f , que

$$\begin{aligned} f(v) &= f((1 - \lambda)x' + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x') + \lambda f(y) \\ &< M + \lambda f(y). \end{aligned}$$

Assim, f é limitada superiormente em uma vizinhança de x .

Se z é qualquer ponto na $B(x, (1 - \lambda)\epsilon) = V$, existe outro ponto z' tal que $x = (z + z')/2$. Então,

$$f(x) = f\left(\frac{z}{2} + \frac{z'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(z').$$

Daí,

$$f(z) \geq 2f(x) - f(z') \geq 2f(x) - M - \lambda f(y),$$

de modo que agora f é também limitada inferiormente na vizinhança de x .

Concluímos então que f é limitada na vizinhança de x .

Seja N uma cota superior de $|f|$ na $B(x, 2\delta)$, onde $\delta > 0$. Para $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in B(x, \delta)$, tomemos $x_3 = x_2 + \delta(x_2 - x_1)/\alpha$ onde $\alpha = \|x_2 - x_1\|$ e notemos que $x_3 \in B(x, 2\delta)$, pois

$$\begin{aligned} \|x_3 - x\| &= \left\| x_2 + \frac{\delta}{\alpha}(x_2 - x_1) - x \right\| = \left\| x_2 + \frac{\delta}{\|x_2 - x_1\|}(x_2 - x_1) - x \right\| \\ &\leq \|x_2 - x\| + \frac{\delta}{\|x_2 - x_1\|}\|x_2 - x_1\| < \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Da equação $x_3 = x_2 + \delta(x_2 - x_1)/\alpha$, obtemos

$$x_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \delta}x_3 + \frac{\delta}{\alpha + \delta}x_1$$

e então, pela convexidade de f , temos que

$$f(x_2) \leq \frac{\delta}{\alpha + \delta}f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}f(x_3).$$

Assim,

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\delta}{\alpha + \delta}f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}f(x_3) - f(x_1)$$



$$= \frac{\delta - \alpha - \delta}{\alpha + \delta} f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(x_3)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \delta} [f(x_3) - f(x_1)]$$

$$\leq \frac{\alpha}{\delta} [f(x_3) - f(x_1)],$$

que, de $|f| \leq N$ e $\alpha = \|x_2 - x_1\|$, fornece

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\alpha}{\delta} (f(x_3) - f(x_1)) \leq \frac{\alpha}{\delta} |f(x_3) - f(x_1)|$$

$$\leq \frac{\alpha}{\delta} (|f(x_3)| + |f(x_1)|)$$

$$\leq \frac{\|x_2 - x_1\|}{\delta} 2N = \frac{2N}{\delta} \|x_2 - x_1\|.$$

Trocando as posições de x_1 e x_2 no exposto acima, obtêm-se

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{2N}{\delta} \|x_1 - x_2\|.$$

Logo, f é Lipschitz na vizinhança de x . ■

A demonstração acima mostrou que

Corolário 1.1.3 *Seja f convexo com $|f| \leq N$ em um conjunto convexo aberto U , que contém uma δ -vizinhança de um subconjunto V . Então f satisfaz a condição de Lipschitz com constante $2N/\delta$ sobre V .*

Dizemos que f é regular em $x \in X$ se

- (i) $\forall v \in X$, existe a derivada direcional $f'(x; v)$;
- (ii) $\forall v \in X$, $f'(x, v) = f^\circ(x; v)$.

Quando f é regular em todo ponto de um subconjunto C de X , dizemos que f é regular sobre C .



A *função suporte* de um subconjunto D não-vazio de X é a função $\sigma_D : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\sigma_D(\xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle / x \in D\}.$$

Enunciaremos agora alguns resultados básicos de funções suporte bem conhecidos, que serão utilizados a seguir.

Proposição 1.1.2 (Hörmander [13]) *Sejam C, D subconjuntos de X , convexos, fechados e não-vazios, e sejam Σ, Δ subconjuntos de X^* , não-vazios, convexos e fechados na topologia fraca estrela. Então,*

$$C \subseteq D \iff \sigma_C(\xi) \leq \sigma_D(\xi), \forall \xi \in X^*$$

e

$$\Delta \subseteq \Sigma \iff \sigma_\Delta(x) \leq \sigma_\Sigma(x), \forall x \in X.$$

Proposição 1.1.3 (Hörmander [13]) *Sejam C, D subconjuntos de X , convexos, fechados e não-vazios, e sejam Σ, Δ subconjuntos de X^* , não-vazios, convexos e fechados na topologia fraca estrela. Sejam, também, $\mu, \lambda \geq 0$ escalares dados. Então,*

$$\mu\sigma_C(\xi) + \lambda\sigma_D(\xi) = \sigma_{\{\mu C + \lambda D\}}(\xi),$$

$$\mu\sigma_\Delta(x) + \lambda\sigma_\Sigma(x) = \sigma_{\{\mu\Delta + \lambda\Sigma\}}(x).$$

Lembremos que a *subdiferencial* de uma função (convexa) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto convexo de X , em x é definida como sendo o conjunto dos $\xi \in X^*$ satisfazendo

$$f(x') - f(x) \geq \langle \xi, x' - x \rangle, \text{ para todo } x' \in U.$$

Utilizaremos o teorema abaixo na demonstração do Teorema 1.1.10.

Teorema 1.1.9 (Rockafellar [20]-Teorema 23.1) *Sejam f uma função convexa e x um ponto onde f é finita. Para cada y , o quociente, na definição de $f'(x; y)$, é uma função não-decrescente de $\lambda > 0$. Assim, $f'(x; y)$ existe e*

$$f'(x; y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

O próximo teorema garante que o gradiente generalizado reduz-se ao subdiferencial no sentido de análise convexa se f for convexo, e à derivada se f for continuamente diferenciável.

Teorema 1.1.10 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz na vizinhança de x . Então,*

- a) *Se f é uma função convexa, $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial no sentido de análise convexa;*
- b) *Se f é continuamente (Gâteaux) diferenciável em x , $\partial f(x) = \{Df(x)\}$.*

Demonstração:

a) Sabemos, da análise convexa, que $f'(x; v)$ existe para cada v e que $f'(x; \cdot)$ é a função suporte do subdiferencial em x , isto é,

$$f'(x; v) = \max \{ \langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial_C f(x) \}.$$

Pelo Teorema 1.1.3 b), temos que

$$f^\circ(x; v) = \max \{ \langle \xi, v \rangle : \xi^* \in \partial f(x) \}.$$

Portanto, é suficiente demonstrar que para qualquer v , $f^\circ(x; v) = f'(x; v)$.

Sabemos que $f^\circ(x; v) \geq f'(x; v)$. Mostremos que $f^\circ(x; v) \leq f'(x; v)$. De fato, podemos escrever $f^\circ(x; v)$ da seguinte maneira:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|x' - x\| < \epsilon \delta} \sup_{0 < t < \epsilon} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t},$$

onde δ é um número positivo fixo qualquer.

Segue, do Teorema 1.1.9, que a função

$$t \rightarrow \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}$$

é não-decrescente e assim

$$f^\circ(x; v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|x' - x\| < \epsilon \delta} \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x')}{\epsilon}.$$

Agora, pela condição de Lipschitz, para qualquer $x' \in x + \epsilon \delta B$, temos

$$\left| \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x')}{\epsilon} - \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} \right| \leq 2\delta k,$$

pois

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x')}{\epsilon} - \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} \right| &= \left| \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x + \epsilon v)}{\epsilon} + \frac{f(x) - f(x')}{\epsilon} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x + \epsilon v)}{\epsilon} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x')}{\epsilon} \right| \\ &\leq \frac{k\|x' + \epsilon v - x - \epsilon v\|}{\epsilon} + \frac{k\|x - x'\|}{\epsilon} \\ &\leq \frac{k\epsilon\delta}{\epsilon} + \frac{k\epsilon\delta}{\epsilon} = 2\delta k, \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} f^\circ(x; v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|x' - x\| < \epsilon\delta} \frac{f(x' + \epsilon v) - f(x')}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|x' - x\| < \epsilon\delta} \left(\frac{f(x' + \epsilon v) - f(x')}{\epsilon} + \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} - \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} \right) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|x' - x\| < \epsilon\delta} \left(\frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} + 2\delta k \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon} + 2\delta k \\ &= f'(x; v) + 2\delta k. \end{aligned}$$

Como δ é arbitrário, deduzimos que $f^\circ(x; v) \leq f'(x; v)$, concluindo a demonstração do item a).

b) Como f é continuamente diferenciável em x temos, pelo Corolário 1.1.1, que f é estritamente diferenciável em x e assim, pelo Teorema 1.1.7, $\partial f(x) = \{Df(x)\}$. ■

1.2 Teorema de Alternativas

Agora, enunciaremos um teorema de alternativas para sistemas convexos com tempo contínuo. Este resultado será bastante útil neste trabalho. No capítulo 4, será apresentado uma versão deste resultado para funções invexas, usando dualidade.

Teorema 1.2.1 (Zalmai [29]-Teorema 3.2) *Seja $A \subset [0, T]$ um conjunto de medida de Lebesgue positiva e seja X um subconjunto de $L_\infty^n(A)$, convexo e não-vazio e $p_i : V \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$ definido por $p_i(t, x(t)) = \pi_i(x)(t)$, onde V é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ é uma aplicação de X em $\Lambda_1^m(A)$ e suponhamos que p_i é convexo com relação a sua segunda variável sobre V para todo A . Então,*

a) *existe $x \in X$ tal que $p_i(t, x(t)) < 0$ q.t.p. $t \in A$, $i \in I$,*

ou

b) *existe uma função m -vetorial não nula $u \in L_\infty^m(A)$, $u_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in A$, $i \in I$, tal que*

$$\int_A \sum_{i \in I} u_i(t) p_i(t, x(t)) dt \geq 0, \text{ para todo } x \in X,$$

mas nunca ambos.

Demonstração:

A demonstração deste teorema segue as mesmas linhas da do Teorema 3.2 em [29], substituindo-se $[0, T]$ por A e fazendo os ajustes necessários. ■

1.3 Integração de Multifunções

Dada uma multifunção $G : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por $S^1([0, T])$, o seguinte conjunto:

$$S^1([0, T]) = \{f \in L_1^n[0, T], f(t) \in G(t) \text{ q.t.p. } t \in [0, T]\}.$$

Definimos a *integral de G* , denotado por $\int_0^T G(t) dt$, como sendo o seguinte subconjunto do $\mathbb{R}^n$:

$$\int_0^T G(t) dt := \left\{ \int_0^T f(t) dt : f \in S^1([0, T]) \right\}.$$

Uma multifunção G é limitada por uma função integrável se G for mensurável e se existir uma função integrável $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|G(t)\| \leq z(t) \text{ q.t.p. } t \in [0, T].$$

Teorema 1.3.1 (Aubin [2]-Proposição 8.6.2) *Se G é uma multifunção limitada por uma função integrável tomando valores em subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\sigma_{\int_0^T G(t)dt}(v) = \int_0^T \sigma_{G(t)}(v)dt, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$



Capítulo 2

Condições Necessárias de Otimidade

Neste capítulo, estudamos as condições necessárias de otimalidade de Fritz-John e de Karush-Kuhn-Tucker. Primeiro vimos uma caracterização geométrica de um ponto de mínimo. Depois, transformamos as condições geométricas de otimalidade em condições algébricas, que são as conhecidas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem referidas acima. A referência básica para este capítulo é [21].

2.1 Caracterização Geométrica de um Mínimo

Consideremos o problema (P) da introdução:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \phi(x) = \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ (P) & \text{sujeito a} && g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T] \\ & && i \in I = \{1, \dots, m\}, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas soluções factíveis do problema (P) (suponhamos não-vazio), isto é,

$$\mathcal{F} = \{x \in Y : g_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I\}.$$



Seja V um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo o conjunto

$$\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{F}, t \in [0, T]\}.$$

As funções $f, g_i, i \in I$, estão definidas em $[0, T] \times V$ e tomam valores em $\mathbb{R}$. Suponhamos que a função $t \rightarrow f(t, x(t))$ seja Lebesgue mensurável e integrável em $x \in Y$.

Para todo $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e $i \in I$, seja $A_i(\bar{x})$ o conjunto dado por

$$A_i(\bar{x}) := \{t \in [0, T] : g_i(t, \bar{x}(t)) = 0\}.$$

Daqui para frente iremos supor que, dado $a \in V$, existe um $\epsilon > 0$ e uma constante K positiva tal que $\forall t \in [0, T]$ e $\forall x_1, x_2 \in a + \epsilon B$ (B denota a bola unitária do $\mathbb{R}^n$) teremos

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

e

$$|g_i(t, x_1) - g_i(t, x_2)| \leq K \|x_1 - x_2\|, \quad i \in I.$$

Por esta razão, $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot), i \in I$, são Lipschitz na vizinhança de qualquer $\bar{x} \in V$, sobre o intervalo $[0, T]$.

Podemos supor que a constante de Lipschitz seja a mesma para todas as funções envolvidas. Essa suposição da constante de Lipschitz ser uniforme, implica que $\gamma_i, i \in I$, é Lipschitz com constante TK , pois

$$\begin{aligned} \|\gamma(x) - \gamma(y)\|_1 &= \max_{1 \leq i \leq m} \int_0^T |\gamma_i(x)(t) - \gamma_i(y)(t)| dt = \max_{1 \leq i \leq m} \int_0^T |g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))| dt \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \int_0^T k \|x(t) - y(t)\| dt = \max_{1 \leq i \leq m} k \int_0^T \|x(t) - y(t)\| dt \\ &= \max_{1 \leq i \leq m} k \int_0^T \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t) - y_i(t)| dt \leq \max_{1 \leq i \leq m} k \int_0^T \max_{1 \leq i \leq n} \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} |x_i(t) - y_i(t)| dt \\ &= \max_{1 \leq i \leq m} k \int_0^T \|x - y\|_\infty dt = \max_{1 \leq i \leq m} k \|x - y\|_\infty \int_0^T dt \\ &= T \max_{1 \leq i \leq m} k \|x - y\|_\infty = Tk \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos dados $\bar{x} \in Y$ e $h \in L_\infty^n[0, T]$. Então, as derivadas direcionais generalizadas de Clarke

$$g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) := \gamma_i^\circ(\bar{x}; h)(t) := \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\gamma_i(y + \lambda h)(t) - \gamma_i(y)(t)}{\lambda}$$

e

$$f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) := \Gamma^\circ(\bar{x}; h)(t) := \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\Gamma(y + \lambda h)(t) - \Gamma(y)(t)}{\lambda}$$

são finitas q.t.p. $t \in [0, T]$ e $\phi^\circ(\bar{x}; h)$ é finita.

Para facilitar a leitura e apresentação do trabalho, também podemos usar as notações $\Gamma^\circ(\bar{x}; h)(t)$ e $\gamma_i^\circ(\bar{x}; h)(t)$ ao invés de $f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))$ e $g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))$.

Segue facilmente das hipóteses que as funções

$$t \rightarrow f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))$$

e

$$t \rightarrow g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)), \quad i \in I,$$

são Lebesgue mensuráveis e integráveis para todo $\bar{x} \in Y$ e $h \in L_\infty^n[0, T]$.

Observemos que os seguintes conjuntos

$$\mathcal{K}(\phi; \bar{x}) = \{h \in L_\infty^n[0, T] : \phi^\circ(\bar{x}; h) < 0\}$$

e

$$\mathcal{K}(g_i; \bar{x}) = \{h \in L_\infty^n[0, T] : g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x})\}, \quad i \in I,$$

são cones em $L_\infty^n[0, T]$. De fato:

1) Seja $h \in \mathcal{K}(\phi; \bar{x})$. Então, $\phi^\circ(\bar{x}; h) < 0$. Tomemos $\alpha > 0$. Pelo Teorema 1.1.1,

$$\phi^\circ(\bar{x}; \alpha h) = \alpha \phi^\circ(\bar{x}; h) < 0.$$

Logo, $\alpha h \in \mathcal{K}(\phi; \bar{x})$ e, portanto, $\mathcal{K}(\phi; \bar{x})$ é um cone em $L_\infty^n[0, T]$.

2) Seja $h \in \mathcal{K}(g_i; \bar{x})$. Então, $g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0$ q.t.p. $t \in A_i(\bar{x})$, $i \in I$. Seja $\alpha > 0$.

Como, pelo Teorema 1.1.1,

$$g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \alpha h(t)) = \alpha g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x}),$$

temos que $\alpha h \in \mathcal{K}(g_i; \bar{x})$.

Assim, $\mathcal{K}(g_i; \bar{x})$ é um cone em $L_\infty^n[0, T]$.

Agora, estamos em condições de estabelecer uma caracterização geométrica do mínimo local para o problema (P).

Teorema 2.1.1 *Seja $\bar{x}$ uma solução ótima do problema (P). Então,*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{K}(g_i; \bar{x}) \cap \mathcal{K}(\phi; \bar{x}) = \emptyset. \quad (2.1)$$

Demonstração:

Suponhamos que a intersecção dos cones (2.1) seja não-vazia e tomemos $h \in L_\infty^n[0, T]$ nessa intersecção.

Então,

$$\begin{aligned} \phi^\circ(\bar{x}; h) &< 0, \\ g_i^\circ(t, \bar{x}(t), h(t)) &< 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x}), i \in I. \end{aligned}$$

Segue, das propriedades de lim sup e da continuidade das funções envolvidas, que existe um número real $\delta > 0$, $0 < \lambda < \delta$, $\bar{x} + \lambda h \in Y$, tal que

- (i) $g_i(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$;
- (ii) $\phi(\bar{x} + \lambda h) < \phi(\bar{x})$.

De fato:

- (i) Por hipótese,

$$g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) = \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\gamma_i(y + \lambda h)(t) - \gamma_i(y)(t)}{\lambda} < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x}), i \in I.$$

Seja $y \equiv \bar{x}$. Então,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_i(\bar{x} + \lambda h)(t) - \gamma_i(\bar{x})(t)}{\lambda} < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x}), i \in I.$$

Como $t \in A_i(\bar{x})$ então $\gamma_i(\bar{x})(t) = 0$. Assim,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_i(\bar{x} + \lambda h)(t)}{\lambda} < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x}), i \in I.$$



Sendo $\lambda > 0$, temos que $\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \gamma_i(\bar{x} + \lambda h)(t) < 0$ q.t.p. $t \in A_i(\bar{x})$, $i \in I$. Sabemos que γ_i é Lipschitz e, portanto, γ_i é contínua. Então, existe $\delta' > 0$, tal que $\gamma_i(\bar{x} + \lambda h)(t) < 0$, $\forall \lambda \in (0, \delta')$.

Agora, se $t \notin A_i(\bar{x})$, $g_i(t, \bar{x}(t)) < 0$. Como $g_i(t, \cdot)$ é contínua, existe $\lambda_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$g_i(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t)) < 0, \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Assim, $\exists \delta = \min\{\delta', \lambda_1\} > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \delta)$,

$$\gamma_i(\bar{x} + \lambda h)(t) = g_i(t, (\bar{x} + \lambda h)(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I.$$

(ii) Por hipótese,

$$\begin{aligned} \phi^\circ(\bar{x}; h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\phi(y + \lambda h) - \phi(y)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\int_0^T f(t, (y + \lambda h)(t)) dt - \int_0^T f(t, y(t)) dt}{\lambda} < 0 \end{aligned}$$

Tomando $y \equiv \bar{x}$ temos

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^T f(t, (\bar{x} + \lambda h)(t)) dt - \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt}{\lambda} < 0.$$

Como $\lambda > 0$, então

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\int_0^T f(t, (\bar{x} + \lambda h)(t)) dt - \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt \right) < 0$$

Mas f é contínua, pois é Lipschitz, então

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \int_0^T f(t, (\bar{x} + \lambda h)(t)) dt - \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt < 0, \quad \forall \lambda \in (0, \delta).$$

Logo,

$$\int_0^T f(t, (\bar{x} + \lambda h)(t)) dt - \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt = \phi(\bar{x} + \lambda h) - \phi(\bar{x}) < 0,$$

o que implica

$$\phi(\bar{x} + \lambda h) < \phi(\bar{x}).$$

Por conseguinte, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \delta)$,

$$\phi(\bar{x} + \lambda h) < \phi(\bar{x}).$$

Assim, temos que $\bar{x} + \lambda h$, $0 < \lambda < \delta$, é uma solução factível para o problema (P) com valor objetivo melhor do que $\bar{x}$. Isso contradiz a otimalidade de $\bar{x}$ para o problema (P).

Portanto, a intersecção dos cones (2.1) é vazia. ■

2.2 Condições Necessárias

2.2.1 Condições de Otimalidade de Fritz-John

Nesta seção, obtemos as condições necessárias de otimalidade análogas às de Fritz-John para problemas com tempo contínuo transformando as condições de otimalidade geométrica em algébricas. Isso é possível de ser feito através do Teorema de Gordan generalizado (Teorema 1.2.1).

Antes de enunciarmos o teorema generalizado de Fritz-John, enunciaremos e demonstraremos uma forma levemente diferente que é a Proposição 2.2.1. Como uma consequência, obteremos a versão completa do teorema de Fritz-John.

Denotaremos por $A(\bar{x})$ e $\mathcal{K}(g, \bar{x})$ os conjuntos:

$$A(\bar{x}) = \{t \in [0, T] : g(t, \bar{x}(t)) = 0\}$$

e

$$\mathcal{K}(g, \bar{x}) = \{h \in L_{\infty}^n[0, T] : g^{\circ}(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0, t \in A(\bar{x})\}.$$

Proposição 2.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Sejam $f(t, \cdot)$ e $g(t, \cdot)$ Lipschitz na vizinhança de $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$. Se $\bar{x}$ é uma solução ótima local do problema (P), então existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_{\infty}[0, T]$, tais que*

$$0 \leq \int_0^T \{\bar{u}_0 f^{\circ}(t, \bar{x}(t); h(t)) + \bar{u}(t) g^{\circ}(t, \bar{x}(t); h(t))\} dt, \quad \forall h \in L_{\infty}^n[0, T]; \quad (2.2)$$

$$\bar{u}_0 \geq 0, \quad \bar{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.3)$$

$$(\bar{u}_o, \bar{u}(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.4)$$

$$\bar{u}(t)g(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Demonstração:

Se $\bar{x}$ é uma solução ótima local do problema (P) então, pelo Teorema 2.1.1,

$$\mathcal{K}(g; \bar{x}) \cap \mathcal{K}(\phi; \bar{x}) = \emptyset.$$

Logo, não existe $h \in L_\infty^n[0, T]$ tal que

$$\phi^\circ(\bar{x}; h) < 0,$$

e

$$g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A(\bar{x}).$$

Usando o Teorema 1.2.1 e tomando $p_o(t, h(t)) = \phi^\circ(\bar{x}; h)$ e $p_1(t, h(t)) = g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))$, concluímos que existem $u_o, u \in L_\infty(A(\bar{x}))$, com $u_o(t) \geq 0, u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in A(\bar{x})$, nem todos nulos em todos subconjuntos de $[0, T]$ com medida de Lebesgue positiva tais que

$$0 \leq \int_{A(\bar{x})} \{u_o(t)\phi^\circ(\bar{x}; h) + u(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))\}dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Tomando $\bar{u}_o = \int_{A(\bar{x})} u_o(t)dt$ e $\bar{u}(t) = u(t)$ para $t \in A(\bar{x})$ e $\bar{u}(t) = 0$ caso contrário, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A(\bar{x})} u_o(t)\phi^\circ(\bar{x}; h)dt + \int_{A(\bar{x})} u(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))dt \\ &= \phi^\circ(\bar{x}; h) \int_{A(\bar{x})} u_o(t)dt + \int_{A(\bar{x})} u(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))dt \\ &= \bar{u}_o \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\phi(y + \lambda h) - \phi(y)}{\lambda} + \int_0^T \bar{u}(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))dt \\ &= \bar{u}_o \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\int_0^T \{f(t, (y + \lambda h)(t)) - f(t, y(t))\}dt}{\lambda} + \int_0^T \bar{u}(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bar{u}_o \int_0^T \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{f(t, (y + \lambda h)(t)) - f(t, y(t))}{\lambda} dt + \int_0^T \bar{u}(t) g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) dt \\
&= \bar{u}_o \int_0^T f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) dt + \int_0^T \bar{u}(t) g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) dt \\
&= \int_0^T \{ \bar{u}_o f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \bar{u}(t) g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \} dt,
\end{aligned}$$

$\forall h \in L_\infty^n[0, T]$ (a última desigualdade segue do Teorema de Fatou [24]) e (2.2) está demonstrada.

As afirmações (2.3), (2.4), (2.5) seguem imediatamente. ■

Na Proposição 2.2.1 se supuzermos que f e g são funções regulares, então a afirmação (2.2) poderá ser reescrita da seguinte maneira:

$$0 \leq \int_0^T \{ \bar{u}_o f'(t, \bar{x}(t); h(t)) + \bar{u}(t) g'(t, \bar{x}(t); h(t)) \} dt, \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Agora, enunciaremos as condições necessárias do tipo Fritz-John para uma restrição. Posteriormente, enunciaremos o teorema completo com m restrições.

Teorema 2.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Sejam f, g Lipschitz na vizinhança de $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é uma solução ótima do problema (P), então existem $\bar{u}_o \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_\infty[0, T]$, tais que*

$$0 \in \int_0^T \{ \bar{u}_o \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt; \quad (2.6)$$

$$\bar{u}_o \geq 0, \quad \bar{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.7)$$

$$(\bar{u}_o, \bar{u}(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.8)$$

$$\bar{u}(t) g(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Demonstração:

Se $\bar{x}$ é uma solução ótima local do problema (P) então, pela Proposição 2.2.1, existem $\bar{u}_o \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_\infty[0, T]$, satisfazendo (2.2) e (2.7)-(2.9). Resta, então, demonstrar

a afirmação (2.6). Pelo Teorema 1.1.3 b) e Proposição 1.1.3, a desigualdade (2.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \{ \bar{u}_0 \sigma_{\partial_x f(t, \bar{x}(t))}(h(t)) + \bar{u}(t) \sigma_{\partial_x g(t, \bar{x}(t))}(h(t)) \} dt \\ &= \int_0^T [\sigma_{\{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \}}(h(t))] dt, \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T]. \end{aligned}$$

Desde que a desigualdade acima vale para todo $h \in L_\infty^n[0, T]$, vale em particular para uma função constante $h(t) = v \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, T]$.

A multifunção

$$t \rightarrow \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t))$$

é limitada por uma função integrável ($\psi(t) = \bar{u}_0 M' + \bar{u}(t) M'$, onde M' é uma constante) e toma valores em subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema 1.3.1,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T [\sigma_{\{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \}}(v)] dt \\ &= \sigma_{\int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt}(v). \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\sigma_{\{0\}}(v) \leq \sigma_{\int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt}(v).$$

Pela Proposição 1.1.2, temos

$$\{0\} \subseteq \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt,$$

ou seja,

$$0 \in \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \bar{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt,$$

e o teorema está demonstrado. ■

O próximo resultado é uma generalização de um teorema do tipo Fritz-John tratado por Zalmai ([30]-Teorema 3.3).



Teorema 2.2.2 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Sejam f, g Lipschitz na vizinhança de $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é uma solução ótima do problema (P), então existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$, tais que*

$$0 \in \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt; \quad (2.10)$$

$$\bar{u}_0 \geq 0, \bar{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.11)$$

$$(\bar{u}_0, \bar{u}(t)) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_m(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.12)$$

$$\bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (2.13)$$

Demonstração:

Suponhamos que o problema (P) tenha m restrições $g_i(t, x(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ e que $\bar{x}$ seja solução ótima local.

Definindo $g(t, x(t)) = \max_{1 \leq i \leq m} g_i(t, x(t))$ q.t.p. $t \in [0, T]$ reduzimos as m restrições do problema (P) para apenas uma restrição. O ponto $\bar{x}$ também é solução ótima do problema modificado. De fato, se $\bar{x}$ é solução ótima do problema (P), então $\phi(\bar{x}) < \phi(x)$, $\forall x$ tal que $g_i(t, x(t)) \leq 0$. Suponhamos que $\bar{x}$ não seja solução ótima do problema modificado. Assim, existe $\hat{x}$ tal que $\phi(\bar{x}) > \phi(\hat{x})$ e $g(t, \hat{x}(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$. Isto implica que

$$g_i(t, \hat{x}(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T],$$

contradizendo a otimalidade de $\bar{x}$ para (P). Portanto, $\bar{x}$ é solução ótima do problema modificado.

Seja

$$I(t, x) := \{i \in I : g_i(t, x(t)) = g(t, x(t))\}.$$

Pelo Teorema 2.2.1, existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $u \in L_\infty[0, T]$, satisfazendo

$$0 \in \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + u(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt; \quad (2.14)$$

$$\bar{u}_0 \geq 0, u(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.15)$$

$$(\bar{u}_0, u(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.16)$$

$$u(t)g(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]. \quad (2.17)$$

Podemos deduzir, de (2.14) e da definição de integração de multifunções (seção 1.3), que existe uma função mensurável $e(t) \in \partial_x g(t, \bar{x}(t))$ q.t.p. $t \in [0, T]$, tal que

$$0 \in \int_0^T \{\bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + u(t)e(t)\} dt. \quad (2.18)$$

Temos o seguinte lema:

Lema 2.2.1 *Existe $v \in L_\infty^m[0, T]$, $v \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, satisfazendo:*

- a) $v_i(t) = 0$ sempre que $g_i(t, \bar{x}(t)) \neq g(t, \bar{x}(t))$, $i = 1, \dots, m$;
- b) $\sum_{i=1}^m v_i(t) = 1$ q.t.p. $t \in [0, T]$;
- c) $e(t) \in \sum_{i=1}^m v_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t))$ q.t.p. $t \in [0, T]$.

Demonstração:

Para cada t onde $\partial_x g(t, \bar{x}(t))$ está bem definida segue, de (Clarke [4]), que

$$\partial_x g(t, \bar{x}(t)) \subset \text{co}\{\partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) : i \in I(t, \bar{x})\}.$$

Desde que $e(t) \in \partial_x g(t, \bar{x}(t))$ q.t.p. $t \in [0, T]$, temos

$$e(t) \in \text{co}\{\partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) : i \in I(t, \bar{x})\}.$$

Defina

$$V(t) := \{(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m v_i = 1, v_i \geq 0,$$

$$v_i = 0 \text{ se } g_i(t, \bar{x}(t)) < g(t, \bar{x}(t)),$$

$$e(t) \in \sum_{i=1}^m v_i \partial_x g_i(t, \bar{x}(t))\}.$$

O conjunto $V(t)$ é não-vazio e fechado q.t.p. $t \in [0, T]$, isto é, $V(t) = \overline{V(t)}$. V é uma multifunção mensurável definida em $[0, T]$. Segue, do teorema da seleção mensurável (ver [4]-Teorema 3.1.1), que existe uma função mensurável $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$ definida em $[0, T]$ tal que $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t)) \in V(t)$ q.t.p. $t \in [0, T]$. Assim, a demonstração do lema segue imediatamente. ■



Definindo $\bar{u}_i(t) := u(t)v_i(t)$ segue, do Lema 2.2.1 e (2.18), que as afirmações (2.10)-(2.13) são verdadeiras. De fato, pela inclusão (2.18) e pelo Lema 2.2.1 c) temos

$$\begin{aligned} 0 &\in \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + u(t) \sum_{i=1}^m v_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt \\ &= \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u(t)v_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt \\ &= \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt, \end{aligned}$$

demonstrando (2.10).

Agora, como $\bar{u}_i(t) = u(t)v_i(t)$ e existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $u \in L_\infty[0, T]$ satisfazendo (2.15)-(2.17) temos que (2.11) é verdadeira por (2.15). Para demonstrar (2.12), temos dois casos:

(i) se $\bar{u}_0 = 0$ então demonstraremos que $(u_1(t), \dots, u_m(t)) \neq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$.

Sabemos que $\bar{u}_i(t) = u(t)v_i(t)$. Logo,

$$\sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) = \sum_{i=1}^m u(t)v_i(t) = u(t) \sum_{i=1}^m v_i(t) = u(t),$$

(a última igualdade segue do Lema 2.2.1 b)), o que demonstra (2.12).

(ii) se $\bar{u}_0 \neq 0$, (2.12) já está demonstrada.

E para demonstrar (2.13) também temos dois casos:

(i) se t satisfaz $g_i(t, \bar{x}(t)) < g(t, \bar{x}(t))$, da definição de $V(t)$ segue que (2.13) é válida.

(ii) se t satisfaz $g_i(t, \bar{x}(t)) = g(t, \bar{x}(t))$, (2.13) segue de (2.17).

Assim, concluímos a demonstração do teorema. ■

No Teorema 2.2.2 se f e g forem funções regulares, então poderemos trocar a inclusão (2.10) por

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, u_0, u),$$

onde

$$L(\bar{x}, u_0, u) := \int_0^T \{ \bar{u}_0 f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt.$$

De fato, sabemos que se f, g são regulares, tem-se

$$(f + g)^\circ(\bar{x}; v) = f^\circ(\bar{x}; v) + g^\circ(\bar{x}; v).$$



Isto implica que

$$\sigma_{\partial(f+g)(\bar{x})}(v) = \sigma_{\partial f(\bar{x})}(v) + \sigma_{\partial g(\bar{x})}(v) = \sigma_{\{\partial f(\bar{x}) + \partial g(\bar{x})\}}(v)$$

(a última igualdade segue da Proposição 1.1.3).

Por [4], página 40, Corolário 3, temos

$$\partial(f+g)(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \partial g(\bar{x}). \quad (2.19)$$

Mostraremos que se f é regular então

$$\int_0^T \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt = \partial_x \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt.$$

Primeiro mostraremos que se f é regular então ϕ é regular. Por hipótese, f é regular, ou seja, $f'(x, v) = f^\circ(x; v)$, o que implica

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda} = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \phi^\circ(x; v) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\phi(y + \lambda v) - \phi(y)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\int_0^T f(t, (y + \lambda v)(t)) dt - \int_0^T f(t, y(t)) dt}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{\int_0^T \{f(t, (y + \lambda v)(t)) - f(t, y(t))\} dt}{\lambda} \\ &\leq \int_0^T \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \rightarrow 0^+}} \frac{f(t, (y + \lambda v)(t)) - f(t, y(t))}{\lambda} dt \\ &= \int_0^T \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t, (x + \lambda v)(t)) - f(t, x(t))}{\lambda} dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^T \frac{f(t, (x + \lambda v)(t)) - f(t, x(t))}{\lambda} dt \\ &= \phi'(x; v) \end{aligned}$$

(a desigualdade acima segue do Teorema de Fatou [24]), isto é, $\phi^\circ(x; v) \leq \phi'(x, v)$. Por outro lado, sabemos que $\phi^\circ(x; v) \geq \phi'(x, v)$. Assim, $\phi^\circ(x; v) = \phi'(x, v)$, ou seja, ϕ é regular. Agora calculemos

$$\begin{aligned} \int_0^T f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) dt &= \int_0^T f'(t, \bar{x}(t); h(t)) dt = \int_0^T \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t)) - f(t, \bar{x}(t))}{\lambda} dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^T \frac{f(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t)) - f(t, \bar{x}(t))}{\lambda} dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\phi(\bar{x} + \lambda h) - \phi(\bar{x})}{\lambda} \\ &= \phi'(\bar{x}, h) = \phi^\circ(\bar{x}; h) = \sigma_{\partial_x \phi(\bar{x})}(h), \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como vale para todo $h(t) \in L_\infty^n[0, T]$, vale em particular para uma função constante $h(t) = v \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, T]$. Então,

$$\int_0^T f^\circ(t, \bar{x}(t); v) dt = \int_0^T \sigma_{\partial_x f(t, \bar{x}(t))}(v) dt = \sigma_{\int_0^T \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt}(v),$$

(a última igualdade segue do Teorema 1.3.1). Assim,

$$\sigma_{\partial_x \phi(\bar{x})}(v) = \sigma_{\int_0^T \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt}(v)$$

e, pela Proposição 1.1.2, temos

$$\partial_x \phi(\bar{x}) = \int_0^T \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt.$$

Por definição

$$\partial_x \phi(\bar{x}) = \partial_x \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt = \partial_x \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt. \quad (2.20)$$

Como f e g_i , $i \in I$, são regulares, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt \\ &= \int_0^T \bar{u}_0 \partial_x f(t, \bar{x}(t)) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) dt \\ &= \partial_x \int_0^T \bar{u}_0 f(t, \bar{x}(t)) dt + \partial_x \int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_x \left\{ \int_0^T \bar{u}_0 f(t, \bar{x}(t)) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) dt \right\} \\
&= \partial_x \int_0^T \left\{ \bar{u}_0 f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt.
\end{aligned}$$

No exposto acima, a segunda igualdade segue de (2.20) e a terceira, de (2.19).

2.2.2 Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Nas condições necessárias estudadas na seção anterior, não tínhamos garantia de que o multiplicador de Lagrange associado à função objetivo seria diferente de zero. Se estivermos procurando a solução ótima precisamos das informações contidas na sub-derivada da função objetivo. Porém, se $u_0 = 0$ esta informação será completamente perdida e consequentemente as condições de Fritz-John não terão utilidades. Para contornar essa situação é comum supor algum tipo de condição de regularidade sobre as restrições do problema. Essas condições de regularidade são usualmente referidas como qualificação nas restrições. Para o problema com tempo contínuo no caso convexo diferenciável, Zalmai [30] usa uma qualificação nas restrições do tipo Slater. E no caso convexo não diferenciável, em Zalmai [28], o conceito de estabilidade substitui a qualificação nas restrições. Em problemas de programação não linear de dimensão finita ou em problemas com um número finito de restrições é comum usar qualificação nas restrições a qual consiste em supor que um certo cone aproximante das restrições tem interior não-vazio (Contesse Becker [5]). Adotemos um condição análoga, a qual se adapta às nossas necessidades:

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{K}(g_i, \bar{x}) \neq \emptyset. \quad (2.21)$$

Teorema 2.2.3 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e suponha que a condição de qualificação nas restrições (2.21) seja satisfeita para uma função g . Se $\bar{x}$ é um mínimo local do problema (P), então existe $\tilde{u} \in L_\infty[0, T]$, tal que*

$$0 \in \int_0^T \{ \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \tilde{u}(t) \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \} dt; \quad (2.22)$$

$$\tilde{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (2.23)$$

$$\tilde{u}(t)g(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]. \quad (2.24)$$

Demonstração:

Se $\bar{x}$ é solução ótima do problema (P), então pela Proposição 2.2.1, existem $\bar{u}_o \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in L_\infty[0, T]$ tais que (2.2)-(2.5) são verdadeiras. Se $\bar{u}_o = 0$, então (2.2) se reduzirá a

$$0 \leq \int_0^T \bar{u}(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t))dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Portanto, pelo Teorema de Gordan generalizado (Teorema 1.2.1), não existe $h \in X$ tal que $g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, contradizendo a condição de qualificação nas restrições (2.21).

Agora, se $\bar{u}_o \neq 0$, podemos reescrever (2.2) da seguinte maneira:

$$0 \leq \int_0^T \bar{u}_o \left\{ f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \frac{1}{\bar{u}_o} \bar{u}(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \right\} dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T];$$

$$0 \leq \bar{u}_o \int_0^T \left\{ f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \frac{\bar{u}(t)}{\bar{u}_o} g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \right\} dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T];$$

$$0 \leq \int_0^T \left\{ f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \frac{\bar{u}(t)}{\bar{u}_o} g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \right\} dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Tomando

$$\tilde{u}(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{u}_o},$$

temos

$$0 \leq \int_0^T \{ f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \tilde{u}(t)g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \} dt, \forall h \in L_\infty^n[0, T]$$

e o teorema segue da inequação acima, usando os mesmos argumentos da demonstração da afirmação (2.6) do Teorema 2.2.1. ■

Teorema 2.2.4 (Karush-Kuhn-Tucker) *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e suponha que a condição de qualificação nas restrições (2.21) seja satisfeita para funções g_i , $i \in I$. Se $\bar{x}$ é um mínimo local do problema (P), então existe $\tilde{u}_i \in L_\infty[0, T]$, $i \in I$, tal que*

$$0 \in \int_0^T \{ \partial_x f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i \in I} \tilde{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t)) \} dt; \quad (2.25)$$

$$\tilde{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I; \quad (2.26)$$

$$\tilde{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (2.27)$$

Demonstração:

Usaremos o lema abaixo:

Lema 2.2.2 *Se a condição de qualificação nas restrições (2.21) é válida, então $\mathcal{K}(g, \bar{x}) \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja

$$\Gamma(t) = \{(v_1, \dots, v_n) : v \in \partial_x g(t, \bar{x}(t)) \text{ e } g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) = vh(t), \forall h \in L_\infty^n[0, T]\}.$$

O conjunto $\Gamma(t)$ é fechado e não-vazio. Γ é uma multifunção mensurável.

Pelo Teorema da Seleção Mensurável [4], existe $\xi \in L_\infty^n[0, T]$ tal que $\xi(t) \in \Gamma(t)$ q.t.p. $t \in [0, T]$, isto é,

$$\xi(t) \in \partial_x g(t, \bar{x}(t))$$

e

$$g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) = \sum_{i=1}^n \xi_i h_i(t) \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Seja $h \in L_\infty^m[0, T]$ dado, mas arbitrário. Aplicando o Lema 2.2.1 e a Proposição 1.1.2 concluimos que existe $u(t) \in V(t)$ q.t.p. $t \in [0, T]$ ($V(t)$ definido como na demonstração do Lema 2.2.1) tal que

$$\xi(t) \in \sum_{i \in I} u_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t));$$

$$g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \leq \sigma_{\sum_{i \in I} u_i(t) \partial_x g_i(t, \bar{x}(t))}(h(t))$$

q.t.p. $t \in [0, T]$. Segue, da desigualdade acima e da Proposição 1.1.3, que

$$\begin{aligned} g^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) &\leq \sum_{i \in I} u_i(t) \sigma_{\partial_x g_i(t, \bar{x}(t))}(h(t)) \text{ q.t.p. } t \in [0, T] \\ &= \sum_{i \in I} u_i(t) g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \text{ q.t.p. } t \in [0, T]. \end{aligned}$$



Portanto,

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{K}(g_i, \bar{x}) \neq \emptyset \text{ implica que } \mathcal{K}(g, \bar{x}) \neq \emptyset.$$

Agora, se $\bar{x}$ é solução ótima local para o problema (P) com m restrições então também será ótimo para o problema (P) com a restrição $g(t, x(t)) \leq 0$, onde $g(t, x(t)) = \max_{1 \leq i \leq m} g_i(t, x(t))$. Segue, do Lema 2.2.2 e do Teorema 2.2.3, que existe $u \in L_\infty[0, T]$, tal que (2.22)-(2.24) são válidas. Usando argumentos similares aos da demonstração do Teorema 2.2.2, temos o resultado desejado. ■

Supondo que as funções f e g_i , $i \in I$, são regulares, podemos reescrever o Teorema 2.2.4 da seguinte maneira:

Corolário 2.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e suponha que a condição de qualificação nas restrições (2.21) é satisfeita para funções g_i , $i \in I$. Se $\bar{x}$ é um mínimo local do problema (P) , então existe $\tilde{u}_i \in L_\infty[0, T]$, $i \in I$, tal que*

$$0 \in \partial_x \int_0^T \left\{ f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i \in I} \tilde{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt; \quad (2.28)$$

$$\tilde{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I; \quad (2.29)$$

$$\tilde{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I. \quad (2.30)$$



Capítulo 3

Condições Suficientes de Otimalidade

Neste capítulo, tratamos das condições suficientes de primeira ordem para otimalidade para problemas de programação não linear com tempo contínuo. Na seção 3.1 será estudado o caso em que as funções envolvidas são Lipschitz e na seção 3.2 o caso regular. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [22].

3.1 Caso Lipschitz

Nesta seção obtemos condições suficientes de otimalidade global para o problema (P) no caso Lipschitz sem qualquer suposição de convexidade sobre suas funções. Mais precisamente, estudamos as condições suficientes de otimalidade global de Fritz-John (Teorema 3.1.1) e de Karush-Kuhn-Tucker (Teorema 3.1.2) supondo que as funções do problema (P) sejam invexas.

Veremos agora algumas definições importantes sobre convexidade generalizada.

Uma função f é *pseudo-convexa* em $x_1 \in X$ se, para todo $x_2 \in X$,

$$f'(x_1; x_2 - x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$$

e f é *estritamente pseudo-convexa* em $x_1 \in X$ se a desigualdade acima for estrita para $x_1 \neq x_2$.



Uma função f é *quase-convexa* em $x_1 \in X$ se, para todo $x_2 \in X$,

$$f(x_2) \leq f(x_1) \implies f'(x_1; x_2 - x_1) \leq 0$$

e f é *estritamente quase-convexa* em $x_1 \in X$ se a desigualdade acima for estrita para $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sejam U um subconjunto não-vazio de X e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana sobre U . A função f é *invexa* em $\bar{z} \in U$ com relação a U , se existe uma função $\eta : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) - f(\bar{z}) \geq f^\circ(\bar{z}; \eta(z, \bar{z})),$$

para todo $z \in U$. Dizemos que f é *invexa* sobre um subconjunto U se for invexa em todos os pontos de U . Se a desigualdade acima for estrita para $z \neq \bar{z}$ dizemos que f é *estritamente invexa*.

Sejam U um subconjunto não-vazio do $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in Y$. Suponhamos que uma dada função $f : [0, T] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ seja localmente lipschitziana com respeito à sua segunda variável em todo $[0, T]$. A função $f(t, \cdot)$ é *invexa* no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ se existe $\eta : [0, T] \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a função $t \rightarrow \eta(t, x(t), \bar{x}(t))$ pertence a $L_\infty^n[0, T]$ e

$$f(t, x(t)) - f(t, \bar{x}(t)) \geq f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, x(t), \bar{x}(t))) \text{ q.t.p. } t \in [0, T],$$

para todo $x \in Y$. Se não houver ambiguidade escreveremos simplesmente η ao invés de $\eta(t, x(t), \bar{x}(t))$.

Sabemos que se uma dada função é convexa então ela é pseudo-convexa, quase-convexa e invexa, mas nem sempre vale a recíproca. Veremos então, alguns exemplos.

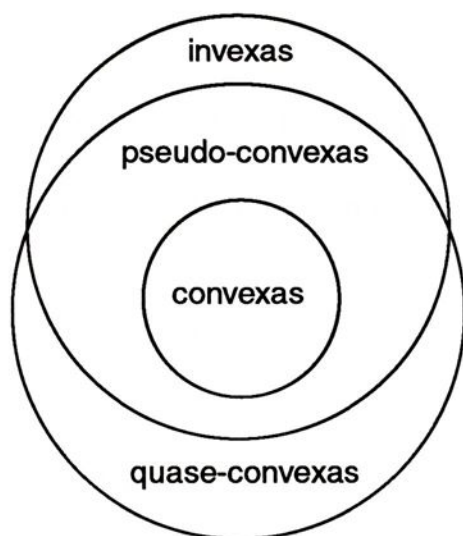
Exemplo 3.1.1 As funções :

- $f(x) = x^3$ é *quase-convexa* e *não invexa*;
- $f(z) = z^3 + z$ é *pseudo-convexa* e *invexa*;
- $f(y) = y_1^3 + y_1 - 10y_2^3 - y_2$ *não é quase-convexa* e *é invexa*.

Porém, nenhuma das funções acima são convexas.

Ilustraremos a relação entre as diferentes formas de convexidade e invexidade (ver, por exemplo, [10]).





Teorema 3.1.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $f(t, \cdot)$ seja invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ e que, para cada $i \in I$, $g_i(t, \cdot)$ seja estritamente invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$, com o mesmo $\eta(t, x(t), \bar{x}(t))$ para todas funções. Suponha também que existam $\bar{u}_o \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tais que*

$$0 \leq \int_0^T \{ \bar{u}_o f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \} dt, \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T], \quad (3.1)$$

$$\bar{u}_o \geq 0, \quad \bar{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$(\bar{u}_o, \bar{u}(t)) \not\equiv 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad (3.3)$$

$$\bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I. \quad (3.4)$$

Então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Demonstração:

Suponhamos que $\bar{x}$ não seja solução ótima global para o problema (P). Então, existe $\tilde{x} \in \mathcal{F}$, $\tilde{x} \neq \bar{x}$, tal que

$$\int_0^T f(t, \tilde{x}(t)) dt < \int_0^T f(t, \bar{x}(t)) dt. \quad (3.5)$$

Desde que $f(t, \cdot)$ é invexa e, para cada $i \in I$, $g_i(t, \cdot)$ é estritamente invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$, temos as desigualdades abaixo:

$$f(t, \tilde{x}(t)) - f(t, \bar{x}(t)) \geq f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))) \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad (3.6)$$

$$g_i(t, \tilde{x}(t)) - g_i(t, \bar{x}(t)) > g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))) \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I, \quad (3.7)$$

para algum $\eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))$. Como $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ e $\bar{u}_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, para cada $i \in I$, temos que

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, \tilde{x}(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (3.8)$$

Concluimos, de (3.2)-(3.8), que

$$0 > \int_0^T \left\{ \bar{u}_0 f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))) \right\} dt,$$

o que, com $h(t) = \eta(t, \tilde{x}(t), \bar{x}(t))$, contradiz (3.1). Portanto, $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P). ■

Observação: A partir da demonstração acima, fica claro que se para cada $i \in I$, $g_i(t, \cdot)$ é invexa, e se pelo menos uma dessas funções, digamos $g_k(t, \cdot)$, é estritamente invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ tal que a função multiplicador de Lagrange correspondente, $\bar{\lambda}_k$, é não-nula em um subconjunto do intervalo $[0, T]$ com medida de Lebesgue positiva, então a afirmação do teorema permanece válida.

Teorema 3.1.2 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, sejam invexas no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$, com relação à mesma função $\eta(t, x(t), \bar{x}(t))$. Suponha também que exista $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que*

$$0 \leq \int_0^T \{ f^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) \} dt, \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T], \quad (3.9)$$

$$\bar{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I, \quad (3.10)$$

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (3.11)$$

Então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Demonstração:

Seja $x \in \mathcal{F}$ dado. Segue, de (3.10) e (3.11), que

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, x(t)) \leq 0 = \bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I.$$

Desde que para cada $i \in I$, $g_i(t, \cdot)$ é invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ e $\bar{u}_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ temos que $\bar{u}_i(t)g_i(t, \cdot)$ também é invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ com relação à mesma função $\eta(t, x(t), \bar{x}(t))$. A partir da invexidade de $\bar{u}_i(t)g_i(t, \cdot)$, obtemos

$$\bar{u}_i(t)g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, x(t), \bar{x}(t))) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (3.12)$$

Agora, tomando $h(t) = \eta(t, x(t), \bar{x}(t))$ em (3.9), obtemos

$$0 \leq \int_0^T \left\{ f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, x(t), \bar{x}(t))) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, x(t), \bar{x}(t))) \right\} dt. \quad (3.13)$$

Concluimos, de (3.12) e (3.13), que

$$\int_0^T f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, x(t), \bar{x}(t))) dt \geq 0.$$

A hipótese de que f é invexa junto com a última desigualdade implica que

$$\phi(\bar{x}) \leq \phi(x).$$

Portanto, como $x \in \mathcal{F}$ é arbitrário, concluimos que $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P). ■

3.2 Caso Regular

Nesta seção, obtemos condições suficientes de otimalidade global para o problema (P) sob hipóteses de regularidade e convexidade generalizada. Os resultados enunciados abaixo generalizam o caso diferenciável tratado por Zalmai [31].

Iremos supor que a hipótese de regularidade (seção 1.1) sobre as funções envolvidas, seja válida durante esta seção.

Definimos a *função lagrangeana* $L : X \times \mathbb{R} \times L_\infty^n[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(x, u_0, u) := \int_0^T \left\{ u_0 f(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)g_i(t, x(t)) \right\} dt.$$

Quando $u_0 \neq 0$, supomos que $u_0 = 1$ normalizando os multiplicadores de Lagrange. Neste caso, denotamos $L(x, 1, u)$ por $L(x, u)$.

Na sequência, $L'_x(\bar{x}, u_o, u; h)$ denota a derivada direcional usual de $L(\cdot, u_o, u)$ em $\bar{x}$ na direção $h \in L_\infty^n[0, T]$ e $\partial_x L(\bar{x}, u_o, u)$ denota o gradiente generalizado de $L(\cdot, u_o, u)$ em $\bar{x}(t) \in X$.

Chamamos a atenção de que as condições (3.1)-(3.4) ((3.9)-(3.11)) no Teorema 3.1.1 (Teorema 3.1.2), em geral, não podem ser escritas em termos do gradiente generalizado da função lagrangeana. Nesta seção, mostramos que isso é possível sob hipóteses de regularidade. Na verdade, se f e g_i , $i \in I$, são regulares, então a condição (3.1) é equivalente a $L'_x(\bar{x}, \bar{u}_o, \bar{u}; h) \geq 0$ para todo $h \in L_\infty^n[0, T]$ e, portanto, $0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u}_o, \bar{u})$. Formalmente, temos os seguintes corolários:

Corolário 3.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $f(t, \cdot)$ seja invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ e que, para cada $i \in I$, $g_i(t, \cdot)$ seja estritamente invexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ com relação ao mesmo $\eta(t, x(t), \bar{x}(t))$ para todas as funções. Suponha também que existam $\bar{u}_o \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tais que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u}_o, \bar{u}); \quad (3.14)$$

$$\bar{u}_o \geq 0, \bar{u}(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (3.15)$$

$$(\bar{u}_o, \bar{u}(t)) = (\bar{u}_o, \bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_m(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T]; \quad (3.16)$$

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (3.17)$$

Então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Corolário 3.2.2 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, sejam invexas no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$ com relação à mesma função $\eta(x(t), \bar{x}(t))$. Suponha também que exista $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u}); \quad (3.18)$$

$$\bar{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I, \quad (3.19)$$

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I. \quad (3.20)$$

Então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

O próximo resultado nos fornecerá um critério de mínimo global, no qual iremos supor que somente a função lagrangeana será invexa na sua primeira variável.

Proposição 3.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Se existe $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz (3.9)-(3.11), e se a função lagrangeana $L(x; \bar{u})$ é inverte no ponto $\bar{x}$ (com relação a $\mathcal{F}$), então $\bar{x}$ é uma solução ótima global do problema (P).*

Demonstração:

A condição (3.9) implica que $0 \leq L'_x(\bar{x}, \bar{u}; \eta(x, \bar{x})), \forall x \in \mathcal{F}$. De fato, como a função lagrangeana é regular, reescrevemos (3.9) da seguinte maneira:

$$0 \leq \int_0^T \left\{ f'(t, \bar{x}(t); h(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g'_i(t, \bar{x}(t); h(t)) \right\} dt, \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T].$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \left\{ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t, \bar{x}(t) + sh(t)) - f(t, \bar{x}(t))}{s} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g_i(t, \bar{x}(t) + sh(t)) - g_i(t, \bar{x}(t))}{s} \right\} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^T \left\{ \frac{f(t, \bar{x}(t) + sh(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t) + sh(t))}{s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t))]}{s} \right\} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^T \{f(t, \bar{x}(t) + sh(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t) + sh(t))\} dt}{s} \\ &\quad - \frac{\int_0^T \{f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t))\} dt}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{L(\bar{x} + sh, \bar{u}) - L(\bar{x}, \bar{u})}{s} \\ &= L'(\bar{x}, \bar{u}; h), \quad \forall h \in L_\infty^n[0, T]. \end{aligned}$$

Em particular, para $h = \eta(x, \bar{x})$, obtemos

$$0 \leq L'(\bar{x}, \bar{u}, \eta(x, \bar{x})).$$



Pelas hipóteses de invexidade e regularidade da função lagrangeana concluímos que

$$L(x, \bar{u}) - L(\bar{x}, \bar{u}) \geq L'(\bar{x}, \bar{u}; \eta(x, \bar{x})) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

Logo

$$L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(x, \bar{u}), \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

Essa desigualdade implica que $\phi(\bar{x}) \leq \phi(x)$, $\forall x \in \mathcal{F}$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Agora, mostraremos dois resultados sobre as condições suficientes de Karush-Kuhn-Tucker. O primeiro é obtido sob hipóteses de pseudo-convexidade sobre as restrições e o segundo resultado mostra que a otimalidade global é mantida se supormos quase-convexidade sobre uma certa função definida em termos das restrições g_i , ao invés de supormos quase-convexidade sobre cada g_i .

Proposição 3.2.2 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $\phi(\cdot)$ seja pseudo-convexa em $\bar{x}$ e que exista $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u}), \quad (3.21)$$

$$\bar{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I \quad (3.22)$$

e

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I. \quad (3.23)$$

Suponha também que para cada $i \in I$, $\bar{u}_i(t)g_i(t, \cdot)$ seja quase-convexa no ponto $\bar{x}(t)$ em todo $[0, T]$. Então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Demonstração:

Já que para cada $i \in I$, $\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) = 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ e $\bar{u}_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, temos a seguinte desigualdade

$$\bar{u}_i(t)g_i(t, x(t)) \leq 0 = \bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}(t)) \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I, \quad \forall x \in \mathcal{F}. \quad (3.24)$$

Agora, mostraremos que

$$\int_0^T f'(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t))dt \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{F}. \quad (3.25)$$

De (3.24) temos que $\bar{u}_i(t)[g_i(t, x(t)) - g_i(t, \bar{x}(t))] \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ para todo $x \in \mathcal{F}$. Da hipótese de quase-convexidade sobre $\bar{u}_i(t)g_i(t, \cdot)$ em $\bar{x}(t)$ por todo $[0, T]$, segue que

$$\bar{u}_i(t)g'_i(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \forall x \in \mathcal{F}.$$

Isto implica que

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)g'_i(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t))dt \leq 0, \forall x \in \mathcal{F}. \quad (3.26)$$

Por outro lado, a hipótese (3.21) e a Proposição 1.1.2, implica que

$$0 \leq \sigma_{\partial_x L(\bar{x}, \bar{u})}(h), \forall h \in L_n^\infty[0, T].$$

Pelo Teorema 1.1.3, temos

$$0 \leq L^\circ(\bar{x}, \bar{u}; h), \forall h \in L_n^\infty[0, T].$$

Já que a função lagrangeana é regular, segue que

$$0 \leq L'(\bar{x}, \bar{u}; h), \forall h \in L_n^\infty[0, T].$$

Em particular, temos que

$$0 \leq L'_x(\bar{x}, \bar{u}, x - \bar{x}), \forall x \in \mathcal{F}.$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \left\{ f'(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)g'_i(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t)) \right\} dt, \forall x \in \mathcal{F}. \quad (3.27)$$

Combinando (3.26) e (3.27), chegamos em (3.25).

Já que ϕ é pseudo-convexa em $\bar{x}$, segue, de (3.25), que

$$\int_0^T f(t, \bar{x}(t))dt \leq \int_0^T f(t, x(t))dt, \forall x \in \mathcal{F}.$$

Portanto, concluímos que $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P). ■

Proposição 3.2.3 *Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Suponha que $\phi(\cdot)$ seja pseudo-convexa em $\bar{x}$. Se existe $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz (3.21)-(3.23) e se a função $G(\cdot, \bar{u}) : L_\infty^n[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$G(x, \bar{u}) = \int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, x(t)) dt,$$

é quase-convexa em $\bar{x}$ (com relação a $\mathcal{F}$), então $\bar{x}$ é solução ótima global do problema (P).

Demonstração:

Para cada $x \in \mathcal{F}$, as condições (3.22) e (3.23) implicam que $G(x, \bar{u}) \leq 0 = G(\bar{x}, \bar{u})$.

Como G é quase-convexa em $\bar{x}$, temos que

$$G'(\bar{x}, \bar{u}; x - \bar{x}) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{F},$$

isto é,

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g'_i(t, \bar{x}(t); x(t) - \bar{x}(t)) dt \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

A conclusão da demonstração segue usando-se os mesmos argumentos da demonstração da proposição anterior. ■



Capítulo 4

Dualidade e o Teorema de Gordan para Funções Invexas

Neste capítulo, vemos, sob hipóteses de invexidade, que as desigualdades do ponto de sela são equivalentes às condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Então formulamos um problema dual lagrangeano não regular com tempo contínuo (tipo Wolfe, [27]) e demonstramos teoremas de dualidade fraca e forte. Finalmente, alguns dos resultados previamente estudados são utilizados na demonstração de uma versão do Teorema de Gordan com tempo contínuo para funções invexas.

Fechamos este capítulo com um corolário, que é uma generalização de ([29]-Teorema 3.5) de funções convexas para funções invexas.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [23].

4.1 Desigualdade do Ponto de Sela

Consideremos o problema (P) da introdução. O objetivo desta seção é mostrar a equivalência das desigualdades do ponto de sela com as condições de Karush-Kuhn-Tucker. Antes, porém, serão necessárias algumas considerações iniciais.



Na proposição abaixo, usaremos a seguinte notação:

$$\left(f + \sum_{i \in I} u_i g_i\right)(t, x) := f(t, x(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) g_i(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad x \in Y.$$

Proposição 4.1.1 *Sejam $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e $u \in L_\infty^m[0, T]$, $u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, dados. Se $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são inversas em $\bar{x}(t)$ com respeito ao mesmo η em todo $[0, T]$, então $L(\cdot, u)$ é localmente lipschitziana em Y e inversa em $\bar{x}$ com respeito a $\hat{\eta} : Y \times Y \rightarrow L_\infty^n[0, T]$, onde $\hat{\eta}(x, \bar{x})(t) := \eta(t, x(t), \bar{x}(t))$, $\forall x \in Y$.*

Demonstração:

Como $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são localmente lipschitzianas então, dado $\bar{x} \in Y$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x, y \in \bar{x} + \epsilon B$, a desigualdade $|L(x, u) - L(y, u)| \leq M\|x - y\|_\infty$, onde $M = Tk(1 + m\|u\|_\infty)$, é verdadeira. De fato:

$$\begin{aligned} |L(x, u) - L(y, u)| &= \left| \int_0^T \left\{ f(t, x(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) g_i(t, x(t)) \right\} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \left\{ f(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) g_i(t, y(t)) \right\} dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \left\{ f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))] \right\} dt \right| \\ &\leq \int_0^T \left| f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))] \right| dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| + \left| \sum_{i \in I} u_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))] \right| \right\} dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| + \|u\|_\infty \sum_{i \in I} |g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))| \right\} dt \\ &\leq \int_0^T \{ k\|x(t) - y(t)\| + \|u\|_\infty m k \|x(t) - y(t)\| \} dt \\ &= \int_0^T k(1 + m\|u\|_\infty) \|x(t) - y(t)\| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k(1 + m\|u\|_\infty) \int_0^T \|x(t) - y(t)\| dt \\
&= k(1 + m\|u\|_\infty) \int_0^T \max_{1 \leq i \leq m} |x_i(t) - y_i(t)| dt \\
&\leq k(1 + m\|u\|_\infty) \int_0^T \max_{1 \leq i \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} |x_i(t) - y_i(t)| dt \\
&= k(1 + m\|u\|_\infty) \int_0^T \|x - y\|_\infty dt \\
&= k(1 + m\|u\|_\infty) \|x - y\|_\infty \int_0^T dt \\
&= M\|x - y\|_\infty,
\end{aligned}$$

onde $M = Tk(1 + m\|u\|_\infty)$. Assim, $L(\cdot, u)$ é localmente lipschitziana.

Agora, sejam $x \in Y$ e $u \in L_\infty^m[0, T]$ dados. Temos que

$$\begin{aligned}
L(x, u) - L(\bar{x}, u) &= \int_0^T \left\{ [f(t, x(t)) - f(t, \bar{x}(t))] + \sum_{i \in I} u_i(t) [g_i(t, x(t)) - g_i(t, \bar{x}(t))] \right\} dt \\
&\geq \int_0^T \left\{ f^\circ(t, \bar{x}(t); \eta) + \sum_{i \in I} u_i(t) g_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta) \right\} dt \\
&\geq \int_0^T \left(f + \sum_{i \in I} u_i g_i \right)^\circ(t, \bar{x}(t); \eta) dt \\
&= \int_0^T \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ s \rightarrow 0^+}} \frac{(f + \sum_{i \in I} u_i g_i)(t, y + s\eta) - (f + \sum_{i \in I} u_i g_i)(t, y)}{s} dt \\
&\geq \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{x} \\ s \rightarrow 0^+}} \frac{\int_0^T (f + \sum_{i \in I} u_i g_i)(t, y + s\eta) dt - \int_0^T (f + \sum_{i \in I} u_i g_i)(t, y) dt}{s} \\
&= L_x^\circ(\bar{x}, u; \hat{\eta}).
\end{aligned}$$

No exposto acima, a primeira desigualdade segue da hipótese de $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$ serem funções invexas, a segunda segue de [4] e a terceira do Teorema de Fatou (ver, por exemplo, [24]).

Portanto, $L(\cdot, u)$ é invexa em $\bar{x}$ com relação a $\hat{\eta}$. ■

O seguinte resultado será muito útil neste capítulo.

Lema 4.1.1 ([18]-Teorema 4.1) *Sejam F um espaço vetorial real e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função lipschitziana. Então f é invexa em F se, e somente se, todo ponto estacionário de f em F é um mínimo global.*

Como consequência, sob as hipóteses de invexidade da Proposição 4.1.1, dado $(\bar{x}, \bar{u}) \in Y \times L_\infty^m[0, T]$, $\bar{u}(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u})$ se, e somente se, $\bar{x}$ minimiza $L(\cdot, \bar{u})$ sobre Y . Aqui, $\partial_x L(\bar{x}, \bar{u})$ denota o gradiente generalizado de $L(\cdot, \bar{u})$ em $\bar{x}$.

Neste capítulo, dizemos que um ponto $(\bar{x}, \bar{u}) \in Y \times L_\infty^m[0, T]$ satisfaz às condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) se, e somente se, $\bar{x}$ é uma solução factível para o problema (P) e

- a) $\bar{u}_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$;
- b) $\bar{u}_i(t)g_i(t, \bar{x}_i(t)) = 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$;
- c) $0 \in \partial_x L(\bar{x}, \bar{u})$.

Uma solução ótima do problema (P) satisfaz às condições de Karush-Kuhn-Tucker, como definido, se as funções envolvidas em (P) forem regulares e satisfazerem (2.21) (Corolário 2.2.1).

O próximo resultado é uma generalização do teorema do ponto de sela para funções invexas.

Teorema 4.1.1 *Suponhamos que $\bar{x} \in \mathcal{F}$ seja dado e que $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, sejam funções invexas no ponto $\bar{x}(t)$ com relação ao mesmo η em todo $[0, T]$. Então, o ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz às condições de otimalidade a) - c) de Karush-Kuhn-Tucker se, e somente se, $\bar{u}(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $\bar{x} \in Y$ e as desigualdades do ponto de sela*

$$L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(x, \bar{u})$$

valem para todo $u \in L_\infty^m[0, T]$, $u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ e todo $x \in Y$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaça às condições de otimalidade $a)$ - $c)$ de (KKT) . Como $f(t, \cdot)$ e $g_i(t, \cdot)$ são funções invexas concluímos, pela Proposição 4.1.1, que $L(\cdot, \bar{u})$ é invexa em $\bar{x}$ com respeito a $\hat{\eta}$. A partir da condição $c)$ de (KKT) e do Lema 4.1.1, temos que

$$L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(x, \bar{u}), \quad \forall x \in Y,$$

que é a segunda desigualdade do ponto de sela.

Agora, mostraremos que $L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u})$, $\forall u \in L_\infty^m[0, T]$. Para isto temos que mostrar que dado $u \in L_\infty^m[0, T]$,

$$\int_0^T \left\{ f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt \leq \int_0^T \left\{ f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt.$$

Segue da condição $b)$ de (KKT) por simples manipulação algébrica que a desigualdade acima é equivalente a

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) dt \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T].$$

Como, por hipótese, $u_i(t) \geq 0$ e $\bar{x} \in \mathcal{F}$, segue que a desigualdade acima é verdadeira, ou seja,

$$L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u}), \quad \forall u \in L_\infty^m[0, T].$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que a desigualdade do ponto de sela seja verdadeira para todo $u \in L_\infty^m[0, T]$, $u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$ e $x \in Y$.

A segunda desigualdade do ponto de sela junto com a Proposição 2.3.2 de [4] implica na condição $c)$ de (KKT) . A afirmação $a)$ das condições de (KKT) é válida pelas hipóteses. Então, resta demonstrar a afirmação $b)$.

A desigualdade

$$L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u}), \quad \forall u \in L_\infty^m[0, T], \quad u(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T],$$

acarreta a seguinte cadeia de implicações :

$$\int_0^T \left\{ f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt \leq \int_0^T \left\{ f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T \left\{ \left[f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right] - \left[f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \right] \right\} dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^m (u_i(t) - \bar{u}_i(t)) g_i(t, \bar{x}(t)) \right\} dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \int_0^T (u_i(t) - \bar{u}_i(t)) g_i(t, \bar{x}(t)) dt \leq 0,$$

$\forall u \in L_\infty^m[0, T], u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$.

Seja $K_i = \{t \in [0, T] : g_i(t, \bar{x}(t)) > 0\}, i \in I$.

Tomando

$$u_i(t) = \begin{cases} \bar{u}_i(t) + 1, & \text{se } t \in K_i \\ \bar{u}_i(t), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

obtemos

$$\sum_{i \in I} \int_{K_i} g_i(t, \bar{x}(t)) dt \leq 0,$$

o que implica que $K_i, i \in I$, tem medida de Lebesgue nula. Portanto, $g_i(t, \bar{x}(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T], i \in I$. Como $\bar{u}_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T], i \in I$, fica claro que $\bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T], i \in I$.

Agora, se para algum $i \in I, \bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) \leq 0$ em um subconjunto de $[0, T]$ com medida de Lebesgue positiva, então

$$L(\bar{x}, 0) > L(\bar{x}, \bar{u}),$$

contradizendo a primeira desigualdade do ponto de sela. Portanto, a afirmação b) vale e a demonstração do teorema está completa. ■

4.2 Dualidade Invexa

Nesta seção formulamos um problema dual de (P) e estudamos teoremas de dualidade fraca e forte.

Consideremos o dual (tipo Wolfe) de (P):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & L(x, u) = \int_0^T \{f(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, x(t))\} dt \\ (D) \quad \text{sujeito a} \quad & u(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \\ & (x, u) \in Y \times L_\infty^m[0, T], \\ & 0 \in \partial_x \int_0^T \{f(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t, x(t))\} dt. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.1 (Dualidade Fraca) *Suponha que $f(t, \cdot)$, $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são invexas em V com relação ao mesmo η , em todo $[0, T]$. Então $\phi(x) \geq L(y, u)$ para todo $x \in \mathcal{F}$ e (y, u) solução factível para o problema (D).*

Demonstração:

Sejam (y, u) uma solução factível para (D) e $x \in Y$. Como $L(\cdot, u)$ é invexa (Proposição 4.1.1) e $0 \in \partial_x L(y, u)$, segue do Lema 4.1.1, que y é um mínimo global para $L(\cdot, u)$ em Y , isto é, $L(y, u) \leq L(x, u)$, $\forall x \in Y$. Em particular, para $x \in \mathcal{F}$, temos

$$\begin{aligned} L(y, u) &\leq \int_0^T \{f(t, x(t)) + \sum_{i \in I} u_i(t) g_i(t, x(t))\} dt \\ &\leq \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

Assim, $L(y, u) \leq \phi(x)$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 4.2.2 (Dualidade Forte) *Suponha que $f(t, \cdot)$, $g_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são invexas em V com relação ao mesmo η , em todo $[0, T]$. Se $\bar{x}$ é solução ótima para (P) e existe $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que as condições de (KKT) são satisfeitas em $(\bar{x}, \bar{u})$, então (D) atinge o máximo em $(\bar{x}, \bar{u})$, e os valores ótimos de (P) e (D) são iguais.*

Demonstração:

Sejam $\bar{x}$ solução ótima para (P) e $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que o par $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz às condições a) - c) de (KKT). Então, $(\bar{x}, \bar{u})$ é factível para (D).

Desde que a condição b) de (KKT) vale, aplicando o teorema da dualidade fraca (Teorema 4.2.1), temos

$$L(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}) \geq L(x, u),$$

para todo (x, u) factível para (D) .

Portanto, (D) atinge o máximo em $(\bar{x}, \bar{u})$ e os valores ótimos de (P) e (D) coincidem. ■

4.3 Teorema de Gordan Generalizado para Funções Invexas

O Teorema de Gordan usual é enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.3.1 (Ver, por exemplo, [17]) *Seja X um subconjunto convexo do $\mathbb{R}^n$ e $p_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ funções convexas. Então,*

(i) existe $x \in X$ tal que $p_i(x) < 0$, $i \in I$,

ou

(ii) para algum $u \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m u_i p_i(x) \geq 0$ para todo $x \in X$,

mas nunca ambos.

Uma generalização deste teorema para funções convexas com tempo contínuo é encontrado em Zalmai [29]. Aqui apresentamos uma versão do Teorema de Gordan para funções invexas com tempo contínuo e um corolário.

Teorema 4.3.2 *Sejam X um subconjunto não-vazio de $L_\infty^n[0, T]$ e $p_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$ definidas por $p_i(t, x(t)) = \pi_i(x)(t)$, onde $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ é uma aplicação de X em $\Lambda_1^m[0, T]$ e suponha que p_i , $i \in I$, sejam localmente lipschitzianas, regulares e invexas em relação ao segundo argumento em todo $[0, T]$ para uma mesma função η . Também suponha que existe $\hat{x} \in X$ tal que*

$$h(t, x(t)) = \max_{i \in I} p_i(t, x(t)) \geq h(t, \hat{x}(t)), \quad \forall x \in X. \quad (4.1)$$

Então,

(i) existe $x \in X$ tal que $p_i(t, x(t)) < 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$,

ou

(ii) existe uma função m -vetorial $u \in L_\infty^m[0, T]$, com $\sum_{i=1}^m \int_0^T u_i(t) dt = 1$, $u_i(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$, tal que

$$\int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t) p_i(t, x(t)) dt \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Nunca ambos os sistemas estão satisfeitos simultaneamente.

Demonstração:

Suponhamos que (i) não tenha solução $x \in X$. Consideremos o seguinte problema de otimização não linear:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \lambda \\ (\bar{P}) \quad &\text{sujeito a} \quad p_i(t, x(t)) - \lambda \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T] \\ &\lambda \in \mathbb{R}, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Desde que (i) não tem solução $x \in X$, então qualquer solução factível do problema $(\bar{P})$ tem valor não negativo.

$$\text{Sejam} \quad \begin{cases} F_0(t, x(t), \lambda) := \lambda; \\ F_i(t, x(t), \lambda) := p_i(t, x(t)) - \lambda, \quad i \in I. \end{cases}$$

As funções F_0 , F_i , $i \in I$, são simultaneamente Lipschitz em relação ao segundo e terceiro argumentos em todo intervalo $[0, T]$ e suas derivadas direcionais generalizadas em (x, λ) na direção $(u, v) \in L_\infty^m[0, T] \times \mathbb{R}$ são dadas por

$$F_0^\circ(t, x(t), \lambda; u, v) = v;$$

$$F_i^\circ(t, x(t), \lambda; u, v) = p_i^\circ(t, x(t); u(t)) - v, \quad i \in I.$$

De fato:

$$\begin{aligned} \bullet \quad F_0^\circ(t, x(t), \lambda; u, v) &= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{F_0(t, (y_1(t), y_2) + s(u(t), v)) - F_0(t, y_1(t), y_2)}{s} \\ &= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{F_0(t, y_1(t) + su(t), y_2 + sv) - F_0(t, y_1(t), y_2)}{s} \\ &= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{y_2 + sv - y_2}{s} \\ &= v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet F_i^\circ(t, x(t), \lambda; u, v) &= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{F_i(t, (y_1(t), y_2) + s(u(t), v)) - F_i(t, y_1(t), y_2)}{s} \\
&= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{F_i(t, y_1(t) + su(t), y_2 + sv) - F_i(t, y_1(t), y_2)}{s} \\
&= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{\pi_i(y_1 + su)(t) - y_2 - sv - \pi_i(y_1)(t) + y_2}{s} \\
&= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \left[\frac{\pi_i(y_1 + su)(t) - \pi_i(y_1)(t)}{s} \right] - v \\
&= \lim_{\substack{(y_1(t), y_2) \rightarrow (x(t), \lambda) \\ s \rightarrow 0^+}} \sup \frac{p_i(t, (y_1 + su)(t)) - p_i(t, y_1(t))}{s} - v \\
&= p_i^\circ(t, x(t); u(t)) - v.
\end{aligned}$$

Além disso, $F_o(t, \cdot, \cdot)$ e $F_i(t, \cdot, \cdot)$ são invexas sobre $V \times \mathbb{R}$ em todo intervalo $[0, T]$ com relação à mesma função $\tilde{\eta}$ dada por

$$\tilde{\eta}(t, x(t), \lambda, x'(t), \lambda') = (\eta(t, x(t), x'(t)), \lambda - \lambda').$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\bullet F_o(t, x(t), \lambda) - F_o(t, x'(t), \lambda') &= \lambda - \lambda' \\
&= F_o^\circ(t, x'(t), \lambda'; \eta(t, x(t), x'(t)), (\lambda - \lambda')) \\
&= F_o^\circ(t, x'(t), \lambda'; \tilde{\eta}(t, x(t), x'(t)), \lambda, x'(t), \lambda') \\
\bullet F_i(t, x(t), \lambda) - F_i(t, x'(t), \lambda') &= \pi_i(x)(t) - \lambda - \pi_i(x')(t) + \lambda' \\
&= p_i(t, x(t)) - \lambda - p_i(t, x'(t)) + \lambda' \\
&\leq p_i^\circ(t, x'(t); \eta(t, x(t), x'(t))) - (\lambda - \lambda') \\
&= F_i^\circ(t, x'(t), \lambda'; \eta(t, x(t), x'(t)), (\lambda - \lambda')) \\
&= F_i^\circ(t, x'(t), \lambda'; \tilde{\eta}(t, x(t), \lambda, x'(t), \lambda')).
\end{aligned}$$

Sob a hipótese (4.1) concluímos que $(\bar{P})$ tem uma solução ótima $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}$. Por outro lado, tomando $\hat{x} \in L_n^\infty[0, T]$, com $\hat{x} \neq \bar{x}$, $\hat{\lambda} > [p_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t))) + \bar{\lambda}]$ e $\tilde{h}(t) = (\eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t)), \hat{\lambda} - \bar{\lambda})$ temos que

$$F_i^\circ(t, \bar{x}(t), \lambda; \tilde{h}(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], i \in I.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
 F_i^\circ(t, \bar{x}(t), \lambda; \tilde{h}(t)) &= F_i^\circ(t, \bar{x}(t), \lambda; \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t)), \hat{\lambda} - \bar{\lambda}) \\
 &= p_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t))) - (\hat{\lambda} - \bar{\lambda}) \\
 &= p_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t))) - \hat{\lambda} + \bar{\lambda} \\
 &< p_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t))) - p_i^\circ(t, \bar{x}(t); \eta(t, \hat{x}(t), \bar{x}(t))) - \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Então, pelo Corolário 2.2.1, existe $\bar{u} \in L_\infty^m[0, T]$ tal que as condições a) - c) de (KKT) são verificadas em $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})$.

Agora, consideremos o dual de $(\bar{P})$:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & L(x, \lambda, u) = \lambda + \int_0^T \sum_{i \in I} u_i(t)(p_i(t, x(t)) - \lambda) dt \\
 (\bar{D}) \quad \text{sujeito a} \quad & (x, \lambda, u) \in X \times \mathbb{R} \times L_\infty^m[0, T], \\
 & u(t) \geq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T], \\
 & 0 \in \partial_{(x, \lambda)} L(x, \lambda, u).
 \end{aligned}$$

O teorema da dualidade forte (Teorema 4.2.2) implica que o problema dual é maximizado em $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})$ e $L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = \bar{\lambda} \geq 0$.

Pela Proposição 4.1.1, $L(\cdot, \cdot, \bar{u})$ é Lipschitz e invexa em $X \times \mathbb{R}$. Desde que $0 \in \partial_{(x, \lambda)} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u})$, o Lema 4.1.1 implica que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ minimiza $L(\cdot, \cdot, \bar{u})$ em $X \times \mathbb{R}$, isto é,

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) < L(x, \lambda, \bar{u}), \quad \forall (x, \lambda) \text{ factível para } (P).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) \\
 &< \lambda + \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t)(p_i(t, x(t)) - \lambda) dt \\
 &= \lambda + \sum_{i \in I} \int_0^T [\bar{u}_i(t)p_i(t, x(t)) - \bar{u}_i(t)\lambda] dt \\
 &= \lambda \left\{ 1 - \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t) dt \right\} + \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t)p_i(t, x(t)) dt.
 \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo em x e em λ temos a desigualdade abaixo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{(x,\lambda)} \left\{ \lambda + \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t)(p_i(t, x(t)) - \lambda) dt \right\} \\ &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda \left\{ 1 - \sum_{i \in I} \int_0^T u_i(t) dt \right\} + \inf_{x \in X} \int_0^T \sum_{i \in I} \bar{u}_i(t) p_i(t, x(t)) dt. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^T \sum_{i \in I} \bar{u}_i(t) p_i(t, x(t)) dt \geq 0.$$

Portanto, se (i) não tem solução $x \in X$, (ii) é satisfeita sob as condições do teorema.

Agora, demonstraremos a recíproca.

Suponhamos que (i) tenha solução, isto é, existe $\bar{x} \in X$ tal que $p_i(t, \bar{x}(t)) < 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$. Então, claramente

$$\int_0^T \sum_{i \in I} \bar{u}_i(t) p_i(t, x(t)) dt = \sum_{i \in I} \int_0^T \bar{u}_i(t) p_i(t, x(t)) dt < 0,$$

desde que $u_i \geq 0$ e $(u_1(t), \dots, u_n(t)) \neq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $i \in I$.

Assim, se (i) tem solução $x \in X$, (ii) não é satisfeita sob as condições do teorema. ■

Corolário 4.3.1 *Sejam X um subconjunto compacto de $L_\infty^n[0, T]$ e p_i , $i \in I$, uma família (finita ou infinita) de funções $p_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $p_i(t, x(t)) = \pi_i(x)(t)$, onde π_i são aplicações de X em $\Lambda_1[0, T]$, e $p_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são localmente lipschitzianas, regulares e invexas em $\mathbb{R}^n$ por todo $[0, T]$, com relação à mesma função η . Suponhamos também que existe $\hat{x} \in X$ tal que (4.1) é satisfeita. Se o sistema*

$$p_i(t, x(t)) \leq 0 \quad \text{q.t.p. } t \in [0, T], \quad i \in I, \quad (4.2)$$

não tem solução $x \in X$, então para alguma sub-família finita $(p_{i_1}, \dots, p_{i_m})$ de p_i , $i \in I$, existe $u \in L_\infty^m[0, T] \setminus \{0\}$ tal que

$$u(t) \geq 0 \quad \text{q.t.p. } t \in [0, T],$$

$$\int_0^T \sum_{j=1}^m u_j(t) p_{i_j}(t, x(t)) dt > 0$$

para todo $x \in X$.

Demonstração:

Já que (4.2) não tem solução $x \in X$, temos que para todo $\epsilon > 0$, o sistema

$$p_i(t, x(t)) < \epsilon, \quad i \in I \quad (4.3)$$

não tem solução $x \in X$. De fato, suponhamos que $p_i(t, x(t)) < \epsilon$ q.t.p. $t \in [0, T]$, tenha solução. Então, existe $x \in X$ tal que $g_i(t, x(t)) < \epsilon$ q.t.p. $t \in [0, T]$, para todo ϵ . Passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_i(t, x(t)) < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \implies p_i(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. } t \in [0, T].$$

Absurdo, pois por hipótese $p_i(t, x(t)) \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, não tem solução. Portanto, $p_i(t, x(t)) < \epsilon$ q.t.p. $t \in [0, T]$, não tem solução.

Como $p_i(t, \cdot)$, $i \in I$, são contínuas, então os conjuntos

$$A(i, \epsilon) := \{x \in X : p_i(t, x(t)) \leq \epsilon \text{ q.t.p. } t \in [0, T]\}, \quad i \in I, \quad \epsilon > 0$$

são subconjuntos fechados do conjunto compacto X .

De (4.3) temos que $\bigcap_{\substack{i \in I \\ \epsilon > 0}} A(i, \epsilon) = \emptyset$.

Por [16], página 210, existem $i_1, \dots, i_k$ e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k > 0$ tais que

$$\bigcap_{j=1}^k A(i_j, \epsilon_j) = \emptyset,$$

o que significa que o sistema $p_{i_j}(t, x(t)) - \epsilon_j \leq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, k$, não tem solução em X . Pelo Teorema 4.3.2, existem $u \in L_\infty^m[0, T]$, $u(t) \geq 0$ q.t.p. $t \in [0, T]$, tais que

$$\int_0^T \sum_{j=1}^k u_j [p_{i_j}(t, x(t)) - \epsilon_j] dt \geq 0, \quad \forall x \in X$$

e

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T u_j(t) dt = 1.$$



Seja $\epsilon^* = \min_{1 \leq j \leq k} \{\epsilon_j\} > 0$. Logo,

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T u_j(t) \epsilon_j dt \geq \sum_{j=1}^k \int_0^T u_j(t) \epsilon^* dt = \sum_{j=1}^k \epsilon^* \int_0^T u_j(t) dt = \epsilon^* \sum_{j=1}^k \int_0^T u_j(t) dt = \epsilon^* > 0.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^k \int_0^T u_j p_{i_j}(t, x(t)) dt > 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, consideramos problemas de programação não linear com tempo contínuo e estudamos condições necessárias e suficientes de primeira ordem e dualidade invexa.

No capítulo 1, seguindo o livro do Clarke [4], introduzimos algumas definições e resultados básicos como por exemplo, de derivada direcional usual e generalizada, derivada de Gâteaux, gradiente generalizado, funções estritamente e continuamente diferenciáveis, convexidade, regularidade, funções suporte, entre outros. Vimos também o Teorema de Gordan para funções convexas.

No capítulo 2, estudamos as condições necessárias de otimalidade [21]. Na seção 2.1 vimos a caracterização geométrica de um mínimo. Na sub-seção 2.2.1 discutimos as condições necessárias do tipo Fritz-John, que generalizam o caso diferenciável tratado por Zalmai [30] e na sub-seção 2.2.2 estudamos as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker sob a hipótese de que a intersecção dos cones

$$\mathcal{K}(g_i, \bar{x}) = \{h \in L_\infty^n[0, T] : g_i^\circ(t, \bar{x}(t); h(t)) < 0 \text{ q.t.p. } t \in A_i(\bar{x})\}, \quad i \in I = \{1, \dots, m\},$$

é diferente do vazio, ou seja,

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{K}(g_i, \bar{x}) \neq \emptyset.$$

No capítulo 3, discutimos as condições suficientes de otimalidade [22]. Na seção 3.1 introduzimos algumas definições sobre invexidade e vimos as condições suficientes de



otimalidade global de Fritz-John e de Karush-Kuhn-Tucker supondo invexidade sobre as funções envolvidas, enquanto que na seção 3.2 definimos a função lagrangeana e estudamos o caso em que as funções envolvidas são regulares. Além disso, vimos um resultado que fornece um critério de mínimo global, onde supuzemos invexidade sobre a primeira variável da função lagrangeana.

No capítulo 4, estudamos dualidade invexa [23]. Mostramos que as desigualdades do ponto de sela são equivalentes às condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Formulamos um problema dual lagrangeano (tipo Wolfe) e estudamos teoremas de dualidade fraca e forte. Por fim, vimos um Teorema de Gordan com tempo contínuo para funções invexas.

Este trabalho pode ser continuado, por exemplo, em duas direções:

- a) obtenção de algoritmos numéricos para achar a solução ótima de problemas de programação não linear com tempo contínuo;
- b) enfraquecimento da hipótese de regularidade para a obtenção de uma versão mais forte do Teorema de Gordan generalizado.

Além disso, o aprendizado aqui adquirido pode ser utilizado em outros ramos da otimização e de controle ótimo.



Referências

- [1] ABRAHAM, J., BUIE, N. *Kuhn-Tucker conditions and duality in continuous programming*. Utilitas Math., n.16, p.15-37, 1979.
- [2] AUBIN, J-P., FRANKOWSKA, H. *Set-valued analysis*. Boston, Birkhäuser, 1990.
- [3] BELLMAN, R. *Bottleneck problems and dynamincs programming*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., n.39, p.947-951, 1953.
- [4] CLARKE, F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*. New York, Wiley, 1983.
- [5] CONTESSE BECKER, L. *Introducción a la optimización con restricciones*. Universidade de Chile, Santiago, 1984.
- [6] CRAVEN, B. D. *Mathematical programming and control theory*. London, Chapman and Hall, 1978.
- [7] CRAVEN, B. D., JEYAKUMAR, V. *Alternative and duality theorems with weakend convexity*. Utilitas Math, n.31, p.149-159, 1987.
- [8] CRAVEN, B. D., YANG, X. Q. *A nonsmooth version of alternative theorem and nonsmooth multiobjective programming*. Utilitas Math, n.40, p.117-128, 1991.
- [9] FARR, W. H., HANSON, M. A. *Continuous-time programming with nonlinear constraints*. J. Math. Anal. Appl., n.45, p.96-115, 1974.
- [10] GIORGI, G. *A note on the relationships between convexity and invexity*. J. Austral. Math. Soc. Ser. B, n.32, p.97-99, 1990.



- [11] HANSON, M. A., MOND, B. *A class of continuous convex programming problems.* J. Math. Anal. Appl., n.22, p.427-437, 1968.
- [12] HAYASHI, M., KOMIYA, H. *Perfect duality and convexlike programs.* J. Optim. Theory and Appl., n.38, p.179-189, 1980.
- [13] HÖRMANDER, L. *Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe.* Ark. Math., n.3, p.181-186, 1954.
- [14] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* University of Windsor, New York, John Wiley & Sons, 1989.
- [15] LEVINSON, N. *A class of continuous linear programming problems.* J. Math. Anal. Appl., n.16, p.73-83, 1966.
- [16] LIMA, E. L. *Espaços métricos.* 2.ed. Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1983.
- [17] MANGASSARIAN, O. L. *Nonlinear programming.* Classics in Applied Mathematics, SIAM, n.10, 1994.
- [18] PHUONG, T. D., SACH, P. H., YEN, N. D. *Strict lower semicontinuity of the level sets and invexity of a locally lipschitz function.* J. Optim. Theory and Appl., n.87, p.579-594, 1995.
- [19] REILAND, T. W., HANSON, M. A. *Generalized Kuhn-Tucker conditions and duality for continuous nonlinear programming problems.* J. Math. Anal. Appl., p.578-598, 1980.
- [20] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis.* New Jersey, Princeton University Press, 1970.
- [21] ROJAS-MEDAR, M. A., BRANDÃO, A. J., SILVA, G. N. *Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions and nonconvex duality.*



- [22] ROJAS-MEDAR, M. A., BRANDÃO, A. J., SILVA, G. N. *Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.227, n.2, p.305-318, 1998.
- [23] ROJAS-MEDAR, M. A., BRANDÃO, A. J., SILVA, G. N. *Nonconvex duality and an invex continuous-time generalization of Gordan's Theorem*. 5ème Congrès Franco-Latinoaméricain de Mathématiques Appliquées, Universidad de Chile, Santiago-Chile, p.57, 1998.
- [24] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. 2.ed. New York, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [25] SCOTT, C. H., JEFFERSON, T. R. *Duality in infinite-dimensional multithematical programming: convex integral functionals*. J. Math. Anal. Appl., n.61, p.251-261, 1977.
- [26] WEIR, T., MOND, B. *Pre-invex functions in multiple objective optimization*. J. Math. Anal. Appl., v.19, p.239-244, 1961.
- [27] WOLFE, P. *A duality theorem for non-linear programming*. Quarterly of Applied Mathematics, n.19, p.239-244, 1961.
- [28] ZALMAI, G. J. *Optimality conditions and Lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming*. J. Math. Anal. Appl., n.109, p.426-452, 1985.
- [29] ZALMAI, G. J. *A continuous-time generalization of Gordan's transposition theorem*. J. Math. Anal. Appl., n.110, p.130-140, 1985.
- [30] ZALMAI, G. J. *The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming*. J. Math. Anal. Appl., n.110, p.503-518, 1985.
- [31] ZALMAI, G. J. *Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming*. J. Math. Anal. Appl., n.111, p.130-147, 1985.
- [32] ZALMAI, G. J. *Duality in continuous-time homogeneous programming*. J. Math. Anal. Appl., n.111, p.433-448, 1985.



