



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE BAURU

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Felipe Alves Anezio

Análise de ressonadores não lineares aplicados ao controle passivo de vibração em guias de onda unidimensionais

**Bauru
2025**

Felipe Alves Anezio

Análise de ressonadores não lineares aplicados ao controle passivo de vibração em guias de onda unidimensionais

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Co-orientador: Douglas Roca Santo

**Bauru
2025**

A614a

Anezio, Felipe Alves

Análise de ressonadores não lineares aplicados ao controle passivo de vibração em guias de onda unidimensionais / Felipe Alves Anezio. -- Bauru, 2025

93 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Bauru

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Coorientador: Douglas Roca Santo

1. Estruturas periódicas. 2. Ressonadores de rigidez não linear. 3. Método polinomial. 4. Continuação por homotopia. 5. Transmissibilidade. I. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE FELIPE ALVES ANEZIO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 10 dias do mês de dezembro do ano de 2024, às 14h, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de FELIPE ALVES ANEZIO, intitulada **Análise de ressonadores não lineares aplicados ao controle de vibração em guias de onda unidimensionais**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Estadual Paulista Unesp Faculdade de Engenharia Câmpus Bauru, Prof. Dr. AMERICO BARBOSA DA CUNHA JUNIOR (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática Aplicada / Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Prof. Dr. FABIO MAZZARIOL SANTICIOLLI (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Estadual Paulista. Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: _____Aprovado_____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES



Documento assinado digitalmente

PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES

Data: 15/12/2024 20:03:55-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A COMISSÃO EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO:
FELIPE ALVES ANEZIO

DE: "ANÁLISE DE RESSONADORES NÃO LINEARES APLICADOS AO CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM GUIAS DE ONDA UNIDIMENSIONAIS"

PARA: ANÁLISE DE RESSONADORES NÃO LINEARES APLICADOS AO CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÃO EM GUIAS DE ONDA UNIDIMENSIONAIS

Bauru, 10 de dezembro de 2024.

Documento assinado digitalmente
 **PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES**
Data: 15/12/2024 20:03:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves
Orientador

*Dedico este trabalho de Mestrado a minha família,
pelo suporte e incentivo durante meus estudos.*

Epígrafe

"Aqueles que se sentem satisfeitos sentam-se e nada fazem.
Os insatisfeitos são os únicos benfeitores do mundo."

Walter S. Landor

Agradecimentos

Agradeço à Deus em primeiro lugar por me conceder saúde todos os dias e oportunidades para buscar meus sonhos.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” pelo oferecimento do curso de graduação e pós-graduação.

Ao Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves pela orientação, pelas oportunidades, confiança, amizade e ensinamentos.

Ao Dr. Douglas Roca Santo pela ajuda e suporte na confecção desta dissertação.

Aos professores da área de projetos deste Programa de Pós-Graduação por me proporcionarem o conhecimento necessário para o processo da minha formação.

A minha família que, com muito apoio e compreensão, fizeram de tudo para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

A todos que me ajudaram e estiveram presentes durante esta etapa, principalmente os colegas do Núcleo de Dinâmica em Engenharia (NDE) da Faculdade de Engenharia de Bauru.

À Jacto Agrícola pelo apoio para que eu conseguisse realizar as atividades do programa de pós-graduação.

Resumo

Atualmente, estruturas periódicas com ressonadores anexados ao longo de seu comprimento estão sendo muito estudadas para controle de vibração. Este conceito está intimamente ligado às pesquisas na área dos metamateriais. Quando ondas elásticas se propagam através dessas estruturas, elas são remodeladas, resultando em intervalos de frequência onde não podem se propagar livremente, conhecidos como *bandgaps*. A ideia central nesta dissertação é modelar a célula unitária de uma estrutura periódica unidimensional com ressonador não linear anexado. As frequências de ressonância da estrutura acoplada a dispositivos não lineares dependem dos níveis de deslocamento, podendo deslocar as ressonâncias dentro do intervalo. Isso torna a resposta não linear interessante, pois o efeito metamaterial é alcançado devido aos diferentes níveis de vibração de cada ressonador. O método analítico denominado Balanço Harmônico é usado para produzir uma equação polinomial aproximada que permite calcular as funções de resposta em frequência (FRFs). São feitas comparações com soluções numéricas, integrando deslocamentos pelo método Runge-Kutta e implementação de um modelo de elementos finitos (FEM). Além disso, uma estratégia diferente é proposta usando o algoritmo de continuação por homotopia para um sistema de polinômios algébricos não lineares utilizando Bertini. Para o caso não linear, as funções de transmissibilidade de deslocamento estrutural mostraram um aumento na região do *bandgap*, onde também ocorreram três respostas possíveis, em comparação ao ressonador puramente linear. A rigidez não linear associada ao absorvedor de vibrações gerou algumas vantagens em frequências mais baixas, ilustrando ser possível a melhoria da resposta sem acréscimo substancial de massa, quando comparado ao linear. As constatações abrem perspectivas interessantes sobre o controle passivo de vibrações de estruturas periódicas.

Palavras-chave: Estruturas Periódicas · Ressonadores de rigidez não linear · Método polinomial · Continuação por homotopia · Transmissibilidade

Abstract

Currently, periodic structures with resonators attached along their length are being studied for passive vibration control. The study is closely linked to the field of metamaterials. When elastic waves propagate through these structures, they are reshaped, resulting in frequency intervals where the waves cannot freely propagate, known as bandgaps. A key idea in this research is to model a unitary cell of the periodic structure with a non-linear resonator attachment. The resonant frequencies of a structure coupled to non-linear systems depend on the displacement levels, which can be translated into a broadening frequency range. This makes the non-linear response interesting as the effect of grading metamaterials is achieved due to the different levels each resonator vibrates. The Harmonic Balance analytical method is used to produce an approximate polynomial equation for accurately calculating frequency response functions (FRFs). Comparisons were made with numerical solutions, integrating displacements using the Runge-Kutta method and implementing a finite element model (FEM). Furthermore, a different strategy is proposed using the Homotopy continuation algorithm for a system of algebraic nonlinear polynomials using the Bertini. The displacement transmissibility shows an increase in the bandgap region, where three possible responses also occurred, compared to the purely linear resonator. The non-linear stiffness associated with the added vibration absorber changed the dynamic behavior of the device, generating some advantages at lower frequencies, allowing for a reduction in mass. These findings open interesting perspectives on vibration control in periodic structures connected to non-linear resonators.

Palavras-chave: Periodic structures · Nonlinear resonators · Polynomial method · Homotopy continuation · Transmissibility

Lista de Figuras

1.1	Evolução da pesquisa em metaestruturas	3
1.2	Sistema de barra composto de N células com ressonadores anexados. A n -ésima célula é mostrada em detalhes.	4
2.1	Metamaterial com ressonadores locais: (a) esquema da célula unitária de um metamaterial incluindo ressonadores de anel tipo C, (b) micrografia eletrônica mostrando a regularidade de toda a estrutura (Wang et al., 2022).	7
2.2	Modelo esquemático: (a) metaestrutura com ressonadores locais distribuídos periodicamente, (b) estrutura principal (Reichl, 2017).	8
2.3	Material unidimensional onde a massa depende da frequência e pode ser negativa (Milton and Willis, 2007).	9
2.4	Representação esquemática de um amortecedor de massa sintonizada anexado a estrutura principal (Edalath et al., 2013).	9
2.5	Modelo de metaestrutura com várias unidades ressonadores. (b) O j -ésimo subsistema na n -ésima célula unitária com forças aplicadas, (Milton and Willis, 2007).	11
2.6	Feixe de sanduíche com ressonadores internos: (a) estrutura com vários ressonadores distribuídos, (b) Diagrama da célula unitária do sistema e seu modelo equivalente (Chen et al., 2011)	11
2.7	Modelo 3D da (a) estrutura principal e (b) metaestrutura com absorvedores de vibração (Hobeck et al., 2015).	12

2.8	Metaestrutura com resposta não linear: (a) configuração experimental, (b) inserção em ziguezague de ressonadores tipo ímans (Hobeck and Inman, 2015).	13
2.9	Esquema de uma viga articulada de metamaterial com osciladores não lineares (Casalotti et al., 2018).	15
3.1	Esquema de uma célula unitária anexada: (a) a uma mola não linear; (b) a um ressonador não linear.	16
3.2	Diagrama esquemático da mola não linear presa na extremidade direita e sua força restauradora f_s , governada por uma equação cúbica.	17
3.3	Força restauradora da mola contra o deslocamento, quando $s_1 = 1$ e $s_3 = 0,1$ (linha azul) e quando $s_1 = 1$ e $s_3 = -0,1$ (linha vermelha).	17
3.4	Sistema massa mola não linear e força externa atuante.	19
3.5	Comportamento da frequência natural do sistema massa mola com a variação da rigidez não linear.	20
3.6	Função Resposta em Frequência com variação da rigidez não linear (sem amortecimento): (a) caso <i>hardening</i> ; (b) caso <i>softening</i>	22
3.7	Função Resposta em Frequência com variação do amortecimento viscoso: (a) caso <i>hardening</i> ; (b) caso <i>softening</i>	22
3.8	Representação da célula unitária com ressonador não linear como um modelo discreto.	23
3.9	Função resposta em frequência para célula unitária com uma mola não linear: (a) comparação entre o método numérico (Runge Kutta) e o método da continuação (algoritmo Bertini); (b) efeito não linear próximo a uma das ressonâncias.	25
3.10	Função resposta em frequência para célula unitária com ressonador não linear: (a) comparação entre o método numérico (Runge Kutta) e o método da continuação (algoritmo Bertini); (b) efeito não linear próximo a uma das ressonâncias.	26

4.1	Barra sujeita a vibração longitudinal: (a) sistema de coordenadas na barra, (b) forças atuantes num elemento infinitesimal de comprimento dx .	28
4.2	Função receptância $kl \mapsto U_3 $, quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a linha tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear); (b) as linhas azuis contínuas mostram a variação das frequências naturais.	34
4.3	Função receptância $kl \mapsto U_3 $, quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = -10$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a linha tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear); (b) as linhas vermelhas contínuas mostram a variação das frequências naturais.	35
4.4	Função receptância $kl \mapsto U_3 $, quando $\mu = 0,1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a curva tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear), (b) as linhas azuis contínuas mostram a variação das frequências naturais.	36
4.5	Função receptância $kl \mapsto U_3 $, quando $\mu = 0,1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = -10$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a curva tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear), (b) as linhas vermelhas contínuas mostram a variação das frequências naturais.	36
5.1	Representação da célula unitária do sistema periódico com amortecimento.	37
5.2	Transformações das matrizes de admitancia, transmissão e impedancia (Rubin, 1967)	38
5.3	Resposta linear: (a) atenuação - linha preta contínua, fase - linha vermelha tracejada, para $\gamma_1 = 10$; (b) para $\gamma_1 = 50$; (c) Transmissibilidade dB (U_3/U_1) - linha contínua, mínimos - linha preta tracejada, para $\gamma_1 = 10$; (d) para $\gamma_1 = 50$; (e) Receptância (U_1/F_1) início da estrutura - linha preta contínua e (U_3/F_1) final da estrutura - linha vermelha contínua, para $\gamma_1 = 10$; (f) para $\gamma_1 = 50$. Quadrados vermelhos representam o início e os círculos azuis o final das frequências de <i>bandgap</i> .	41

- 5.4 Resposta linear: (a) atenuação - linha preta contínua, fase - linha vermelha tracejada, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (b) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$; (c) Transmissibilidade dB (U_3/U_1) - linha contínua, mínimos - linha preta tracejada, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (d) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$; (e) Receptância (U_1/F_1) início da estrutura - linha preta contínua e (U_3/F_1) final da estrutura - linha vermelha contínua, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (f) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$. Quadrados vermelhos representam o início e os círculos azuis o final das frequências de *bandgap*. 42
- 5.5 Resposta linear com alteração dos parâmetros do anexo: (a) variação da razão de rigidez da mola anexada γ_1 ; (b) variação da razão de rigidez γ_1 e massa μ do absorvedor anexado. 43
- 5.6 Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1000$ - linha preta contínua. A linha tracejada em preto representa o caso linear, a linha tracejada vermelha representa o ramo instável da função. Os círculos azuis mostram o final das frequências de *bandgap*. 44
- 5.7 Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$, $\eta = 0,01$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância. 46
- 5.8 Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1000$, $\eta = 0,01$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância. 47

5.9	Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$, $\gamma_3 = 100$, $\eta = 0,01$ e $\beta = 0,05$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.	49
5.10	Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$, $\gamma_3 = 1000$, $\eta = 0,01$ e $\beta = 0,05$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.	50
5.11	Resposta não linear quando $\gamma_3 = 1000$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (b) para $\gamma_1 = 3$, $\mu = 1,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (d) para $\gamma_1 = 3$, $\mu = 1,5$ e $\gamma_1 = 1000$	51
5.12	Representação de um elemento da barra e seus respectivos nós.	52
5.13	Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 1000$. Círculos vermelhos re- presentam a resposta pelo método dos elementos finitos (FEM); as linhas pontilhadas em preto pelo método da continuação (Bertini).	54
5.14	Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 1000$ e $\mu = 0,5$. Círculos ver- melhos representam a resposta pelo método dos elementos finitos (FEM); as linhas pontilhadas em preto pelo método da continuação (Bertini). . .	54
A.1	Resposta linear (linha tracejada) e não linear (linha contínua) pelo mé- todo polinomial, célula com uma mola anexada: (a) caso <i>hardening</i> ; (b) caso <i>softening</i>	65

A.2	Resposta linear (linha tracejada) e não linear (linha contínua) pelo método polinomial, célula com ressonador anexado: (a) receptância; (b) transmissibilidade.	65
A.3	Resposta linear e não linear pelo método FEM célula com uma mola anexada (<i>hardening</i>): (a) receptância; (b) transmissibilidade.	71
A.4	Resposta linear e não linear pelo método FEM célula com um ressonador anexado: (a) caso <i>hardening</i> ; (b) caso <i>softening</i>	71
A.5	Transmissibilidade linear e não linear pelo método FEM célula com um ressonador anexado.	71

Lista de Abreviações

Abreviação	Descrição
EDO	Equação Diferencial Ordinária (Ordinary Differential Equations)
FEM	Métodos dos Elementos Finitos (Finite Element Method)
FRF	Função de Resposta em Frequência (Frequency Response Function)
HB	Balanço Harmônico (Harmonic Balance)
LR	Ressonância Local (Local Resonance)
TMD	Amortecedor de Massa Sintonizada (Tuned Mass Damper)

Lista de Símbolos

Símbolos em Latim

Símbolo	Descrição
A	Área da seção transversal
$\mathbf{B}$	Matriz de deslocamento deformação
c	Coefficiente de amortecimento viscoso
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento viscoso da barra
$\mathbf{D}$	Rigidez dinâmica
D_a	Rigidez dinâmica do amortecedor
D_1, D_2	Elementos da matriz de rigidez dinâmica
$D(U)$	Rigidez dinâmica não linear
E	Módulo de Young
$\mathbf{f}$	Força externa
F	Amplitude da força externa
$\mathbf{f}_s$	Força na mola não linear
F_s	Amplitude da força na mola não linear
i	Posição da referência
j	Número complexo
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
k	Número de onda
l	Comprimento da barra

l_e	Comprimento do elemento de barra
m	Massa principal da estrutura
M	Matriz de massa do elemento
n	Número de molas não lineares
N	Matriz de função de forma do elemento
O	Matriz de zeros
p_i	Coefficiente polinomial
q	Vetor de deslocamentos nodais
s	Rigidez da mola
s_1	Rigidez linear
s_3	Rigidez não linear
S	Matriz de rigidez da barra
t	Tempo
T	Trasmissibilidade
u	Deslocamento
U	Amplitude de deslocamento
x	Posição do sistema
y	Vetor de estado do sistema
Y	Matriz de estado do sistema
z	Deslocamento relativo
Z	Amplitude relativa de deslocamento

Símbolos em grego

Símbolo	Descrição
α	Coeficiente harmônico
β	Fator de amortecimento da barra
γ_1	Coeficiente de rigidez da mola linear
γ_3	Coeficiente de rigidez da mola não linear
δ_{st}	Deformação estática
μ	Relação entre a massa estrutural e do absorvedor
ξ	Razão de amortecimento
ω	Frequência
ω_0	Frequência natural
Ω	Frequência adimensional
ϕ	Ângulo de fase
τ	Adimensional de tempo
ζ	Razão de amortecimento

Sumário

Lista de Abreviações	xvii
Lista de Símbolos	xviii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Enunciado do problema	3
1.3 Estrutura da Dissertação	5
2 Revisão da literatura	6
2.1 Estudo de estruturas periódicas	6
2.1.1 Estruturas periódicas com ressonadores locais	9
2.1.2 Influências da rigidez não linear em estruturas	14
3 Avaliação de sistemas com anexo de rigidez não linear	16
3.1 Método Polinomial	16
3.2 Comportamento de um sistema massa mola amortecedor não linear	19
3.2.1 Célula unitária com ressonador não linear - sistema discreto	22
3.2.2 Comparação com o método de Runge-Kutta	24
4 Estudo de um sistema contínuo	28
4.1 Análise de um sistema contínuo	28
4.1.1 Vibração livre	30
4.1.2 Vibração forçada	31

5	Influência da rigidez não linear na função de transmissibilidade	37
5.1	Função transmissibilidade para o caso linear	37
5.1.1	Transmissibilidade não linear com amortecimento	44
5.2	Implementação Método dos Elementos Finitos	52
6	Considerações finais	55
6.1	Trabalhos futuros	56
6.2	Contribuições	57
	Referências Bibliográficas	58
A	Apêndice	63
A.1	Método polinomial Matlab	63
A.1.1	Exemplos de respostas obtidas pelo método polinomial Matlab . .	64
A.2	Desenvolvimento pacote Bertini no Matlab	66
A.3	Desenvolvimento método FEM no Matlab	68
A.3.1	Cálculo dos deslocamentos para o método FEM	70
A.3.2	Exemplos de respostas obtidas pelo método FEM no Matlab . . .	70

Capítulo 1

Introdução

Estruturas periódicas com matrizes de dispositivos lineares como subsistemas massa-mola ou molas puras, exibem um comportamento dinâmico único em longos comprimentos de onda, atribuído ao aparecimento de faixas de frequência com níveis de vibração baixos (do inglês intervalo de *bandgap*). Estes portanto, podem ser devido aos efeitos de espalhamento de Bragg (Kushwaha et al., 1993), efeitos de ressonância local (do inglês *Local Resonance*, *LR*) ou os dois efeitos coexistindo na mesma estrutura (Hussein et al., 2014; Huang et al., 2016).

Nesse contexto, o escopo de interesse nos sistemas periódicos se expandiu nos últimos anos. Os conceitos vinculados à ressonância local foram introduzidos para amplificar os intervalos de suspensão, produzindo novos *bandgaps* em frequências mais baixas (Hussein et al., 2014). A implementação tornou o mecanismo interessante para suspensão de vibração permitindo controle em faixas usuais de frequências (Reichl, 2017).

Dentre os trabalhos sobre o tema, a pesquisa de Pai (2010) considera uma barra isotrópica longitudinal com pequenos subsistemas de massa e mola integrados separadamente. O conceito de suspensão utiliza a oscilação de entrada para ressonar os dispositivos de absorção dispostos no material e controlar a propagação de ondas. Zhu et al. (2014) tem enfoque no projeto de uma estrutura de viga composta de osciladores que é desenvolvida para a atenuação de vibração em uma ampla faixa de frequência, utilizando o *bandgaps* individuais. O interessante nos estudos é que as novas lacunas produzidas por elementos anexados (LR) coexistiram com o *bandgap* tipo Bragg, provenientes da periodicidade sistemática do material integrando um meio de absorção de vibrações. Os dois estudos mostram os ganhos relacionados à presença dos ressonadores.

O impedimento é que pode ser provável que esses intervalos de atenuação apareçam em frequências mais altas do que aquelas frequentemente encontradas em problemas de engenharia, pois mesmo com o uso de ressonadores locais a sintonização deles em baixa frequência exige dispositivos de massa elevada. Tal condição limitaria o emprego

dos sistemas para controlar os níveis de vibração na faixa de baixa frequência, restringindo muitas aplicações em situações reais. Nesse cenário, os dispositivos não lineares apresentam propriedades adicionais interessantes para essas frequências, principalmente em regiões próximas a primeira ressonância estrutural (Wang et al., 2016b). Por isso, cresceu muito o interesse relacionado ao controle passivo de estruturas lineares sujeitas a vibração usando anexos de rigidez não linear (Santo et al., 2020).

As frequências de ressonância de uma estrutura acoplada à molas não lineares dependem dos níveis de deslocamento e, portanto, podem ser transladas para altas frequências dentro do intervalo de análise. Fenômenos de ressonância, podem ser associados ao efeito não linear onde os níveis de vibração podem ser bem atenuados (Zhu et al., 2014). O obstáculo existente é que o estudo das vibrações livres e forçadas de estruturas lineares com anexos de rigidez não linear ainda não foi realizado extensivamente. Entre os trabalhos realizados na área estão a análise das frequências naturais de estruturas simples, como barras e vigas, com limites não lineares. Nesse sentido, a avaliação dinâmica da rigidez não linear ainda é considerada um desafio, dada a dificuldade relacionada à modelagem não linear e, à descrição do comportamento das estruturas em todo intervalo (Santo et al., 2020).

Alguns métodos analíticos podem ser utilizados, dentre eles está o método de Balanço Harmônico (HB) (Brennan et al., 2008; Holmes, 1981; Kevorkian and Cole, 2013). Esses métodos focam principalmente na análise do efeito da mola não linear na primeira frequência natural. Geralmente são baseados na equação do oscilador tipo *Duffing* (Kovacic and Brennan, 2011; Nayfeh and Mook, 2008), que é adequada para representar não linearidades de rigidez em aplicações típicas de engenharia, por exemplo, sistemas de cabos, isoladores mecânicos e sistemas eletromecânicos (Carrella et al., 2007; Gao et al., 2019; Santo et al., 2018).

Essa dissertação investiga configurações estruturais que incorporem o conceito de *bandgap*, derivando suas equações. Efetua-se a modelagem das estruturas com rigidez não linear para a descrição da resposta em frequência em todo intervalo. O comportamento dinâmico é compreendido realizando um estudo detalhado de uma célula unitária da estrutura periódica sujeita a vibração longitudinal. Serão desenvolvidos estudos utilizando as equações exatas de rigidez dinâmica para uma barra (vibração longitudinal). A rigidez cúbica em questão, será do tipo *hardening* ou *softening*.

O método polinomial é proposto para descrever os níveis de deslocamento e o método de integração numérica também serve como fonte de comparação para as análises. O método polinomial (balanço harmônico de primeira ordem) é analítico e constitui um meio preciso para analisar a resposta dinâmica de uma célula com rigidez não linear associada (Worden and Tomlinson, 2019). Para estruturas com alto número de molas ou ressonadores não lineares a aplicação do método polinomial se torna mais complicada, devido ao alto número de termos. No caso numérico os deslocamentos são mensurados

no domínio do tempo utilizando o método de Runge-Kutta. Nessa etapa, também foram desenvolvidos estudos com o método de elementos finitos não linear para representação da barra. Fatores de amortecimento são inseridos em algumas das investigações e as funções de transmissão estrutural são apresentadas. A utilização do algoritmo de continuação por homotopia para um sistema de polinômios algébricos não lineares utilizando o pacote Bertini será feita para o caso com amortecimento. Com a abordagem proposta, avaliam-se as vantagens e restrições dos método para representar o comportamento de elementos não lineares. Em suma, busca-se contribuir para o desenvolvimento das análises dinâmicas relacionadas à pesquisa de estruturas periódicas com anexo não linear. A Fig. 1.1 apresenta uma evolução resumida da pesquisa em metaestruturas.

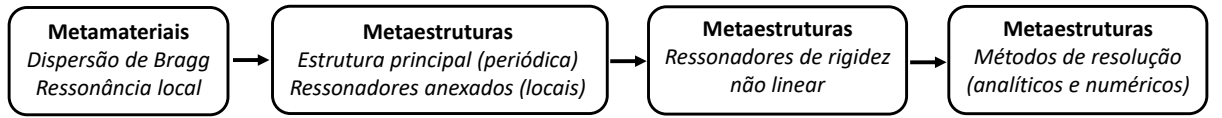


Figura 1.1: Evolução da pesquisa em metaestruturas

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é avaliar o comportamento de uma célula unitária unidimensional do sistema periódico com ressonador não linear anexado. Os objetivos específicos podem ser citados:

1. Implementação de métodos aproximados, como o balanço harmônico de primeira ordem, para avaliar o efeito não linear;
2. Investigação dos intervalos de atenuação (*bandgaps*) nas funções transmissibilidade estrutural considerando amortecimento;
3. Utilizar um algoritmo de continuação para polinômios algébricos não lineares e comparar os resultados obtidos com métodos de integração numérica.

1.2 Enunciado do problema

As características de propagação de ondas em estruturas periódicas estão diretamente relacionadas com as propriedades dinâmicas de uma célula unitária. Uma célula pode ser entendida como uma unidade de construção do sistema periódico que se repete ao longo de sua formulação.

O sistema mostrado na Fig. 1.2 consiste em uma barra composta de N células idênticas (Cél. 1 a N) sujeita a vibração longitudinal. A n – ésima célula é ilustrada

em detalhes, onde a barra possui área de seção transversal constante A , Módulo de Young E , densidade de massa ρ e o comprimento total $2l$. No ponto central há um ressonador constituído de uma massa m_a e uma mola não linear caracterizada pelas constantes s_1 e s_3 (discutido mais adiante na seção 3.2). A amplitude complexa de deslocamento em ambos os lados da barra definidos como U_1 (esquerdo) e U_3 (direito) e uma força harmônica de amplitude F_1 aplicada no lado esquerdo da barra. No ponto central o deslocamento é definido com U_2 e a massa acoplada à mola de rigidez não linear possui amplitude de deslocamento definida como U_a .

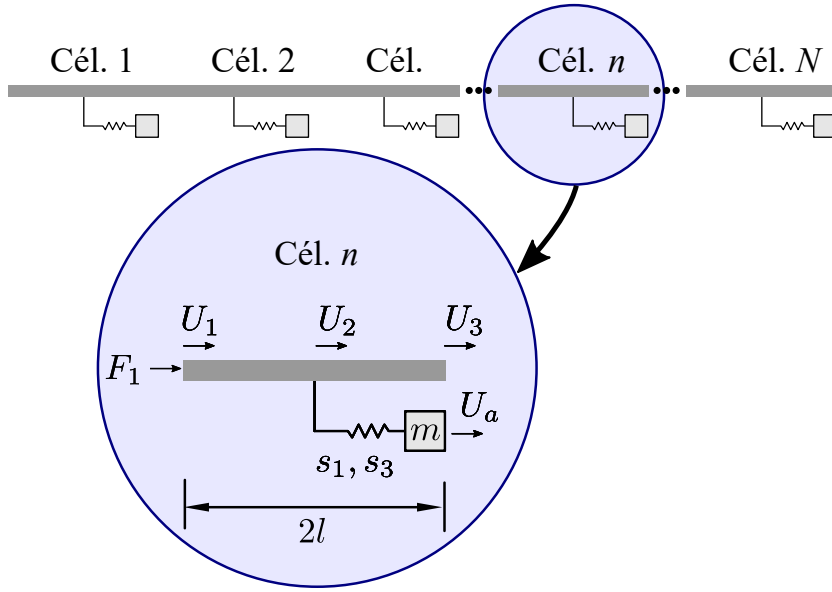


Figura 1.2: Sistema de barra composto de N células com ressonadores anexados. A n -ésima célula é mostrada em detalhes.

De acordo com (Gonçalves et al., 2021) as propriedades da estrutura completa podem ser determinadas a partir da função de transmissibilidade de um único elemento. Se o elemento é simétrico, as expressões que descrevem os intervalos de atenuação dinâmico são particularmente simples.

A modelagem foi desenvolvida empregando inicialmente a teoria de sistemas discretos e em seguida, utilizou-se a teoria de sistemas contínuos. Será utilizado um método polinomial aproximado de primeira ordem. Este produz equações polinomiais escalares que devem ser resolvidas através da função *roots* no MATLAB. As raízes do polinômio forneceram as amplitudes de deslocamento do sistema para todo o intervalo de frequência analisado. Somente as raízes reais são consideradas nesta etapa, pois possuem sentido físico.

A rigidez tipo *hardening* e *softening* são analisadas e o desenvolvimento das equações para os dois tipos de rigidez são mostrados em detalhes no Capítulo 3. Para o caso *hardening* a parcela não linear possui sinal positivo e para o caso *softening* negativo. O comportamento da força de restauração da mola varia para os dois tipos e essa influência foi notada nas funções de receptância.

A análise numérica utiliza o método de Runge-Kutta para a comparação dos resultados. Nesse caso as amplitudes de deslocamento são mensuradas no domínio do tempo e integradas para todo o intervalo de frequência. A função ODE45 é aplicada para resolução das equações diferenciais ordinárias de quarta ordem. O método dos elementos finitos é desenvolvido para a estrutura contínua. Divide-se a barra em elementos iguais e a solução é conseguida dispondo as equações na forma de espaço de estados.

O algoritmo de continuação polinomial utilizando o software Bertini também será desenvolvido para o caso com amortecimento. Aqui os elementos de rigidez dinâmica, força não linear e deslocamentos, são complexos. As equações polinomiais, parte real e imaginária, são escritas e solucionadas. BertiniLab é uma interface MATLAB para Bertini. Bertini pode encontrar soluções isoladas e soluções de dimensão positiva usando continuação por homotopia.

Todos os métodos de solução foram implementados com o uso do software MATLAB.

1.3 Estrutura da Dissertação

Essa dissertação é estruturada como segue:

- Capítulo 1 introduz a motivação para o estudo com um resumo do tema controle de vibrações em estruturas periódicas, objetivos, enunciado da dissertação e estrutura da dissertação.
- Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica mais extensa, com as pesquisas disponíveis na literatura e trabalhos relevantes sobre o tema. Discute-se sobre a atenuação de vibrações em estruturas periódicas, como se iniciou a pesquisa e suas motivações atuais.
- Capítulo 3 descreve minuciosamente a modelagem matemática para a análise dinâmica de estruturas não lineares. Contém modelos de sistemas discretos em vibração livre e forçada para o caso de excitação harmônica. Nesse capítulo, o foco é mostrar as influências da rigidez não linear em uma célula unitária e o comportamento dinâmico para rigidez do tipo *hardening* e *softening*.
- Capítulo 4 apresenta a modelagem matemática da célula unitária (sistema contínuo) com uma mola e um ressonador não lineares com uso das funções resposta em frequência.
- Capítulo 5 apresenta a análise das funções de transmissibilidade linear e não linear. Realizou-se a implementação de amortecimento estrutural e viscoso e a comparação com o método FEM.
- Capítulo 6 apresenta as conclusões e contribuições desta dissertação.

Capítulo 2

Revisão da literatura

Este capítulo apresenta uma revisão da literatura. Nele estão dispostos o desenvolvimento das pesquisas ao longo do tempo e as iniciativas atuais que norteiam o tema estruturas periódicas.

As tendências relacionadas ao controle de vibração são apresentadas principalmente com o emprego de ressonância local. A origem do conceito metamaterial é introduzida e implicações na engenharia explicitadas. Os estudos envolvendo os efeitos de rigidez não linear são abordados na sequência.

2.1 Estudo de estruturas periódicas

Um meio periódico é um material ou sistema estrutural que exhibe alguma forma de periodicidade espacial. O estudo de estruturas e materiais de matriz periódica tem um enfoque muito grande na engenharia, principalmente no campo de vibração e acústica. Ao longo do tempo, tornou-se comum referir a um material ou estrutura periódica, mesmo na escala de tamanho de um grande sistema de engenharia, como um “material fonônico” ou uma “estrutura fonônica”.

Um cristal fotônico é uma estrutura periódica que afeta a propagação de fótons. Essa conexão já existente entre materiais periódicos e a física fotônica ficou ainda mais próxima nos últimos anos. Assim, novas estruturas periódicas começaram a se aproximar do conceito.

Nos chamados metamateriais elásticos o conceito foi expandido ainda mais e, além de serem periódicos possuem recurso adicional de exibir ressonância local associada, como mostrado na Fig. 2.1.

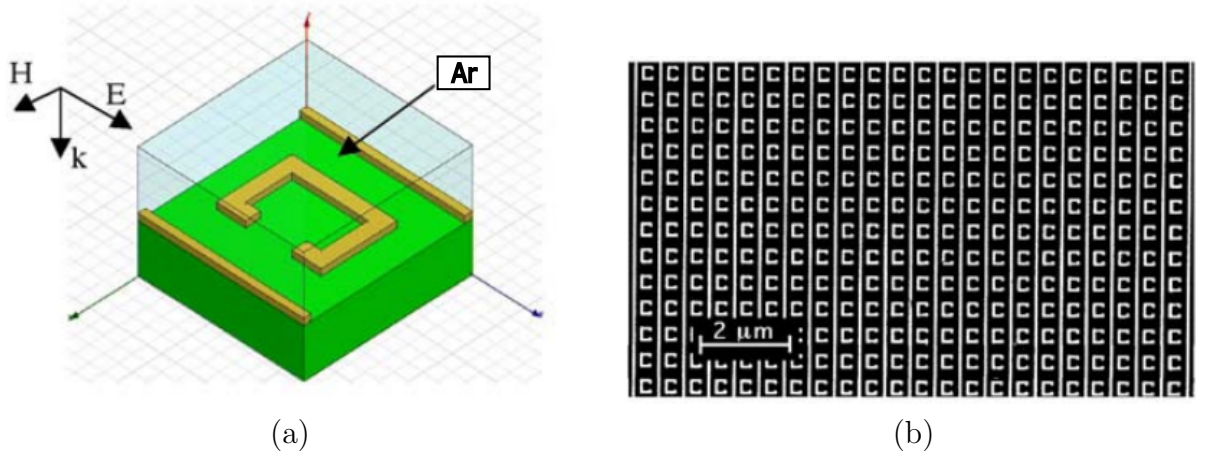


Figura 2.1: Metamaterial com ressonadores locais: (a) esquema da célula unitária de um metamaterial incluindo ressonadores de anel tipo C, (b) micrografia eletrônica mostrando a regularidade de toda a estrutura (Wang et al., 2022).

Desse modo, as pesquisas em metamateriais têm uma base de desenvolvimento em eletromagnetismo, e variações de aplicação no campo da acústica e elastodinâmica, mostrando-se uma classe de materiais altamente promissora. A analogia entre ondas eletromagnéticas e ondas acústicas estimulou o desenvolvimento de metamateriais para lidar com ondas mecânicas (Pai et al., 2014).

A pesquisa aplicada em materiais fonônicos foi muito abundante, principalmente a inspeção de uma perspectiva fundamental da mecânica, e particularmente do ponto de vista de sistemas dinâmicos. Por exemplo, as técnicas já desenvolvidas para o tratamento de amortecimento e não linearidades na dinâmica estrutural fornecem um recurso rico para aplicação ao problema de propagação de ondas em materiais e estruturas periódicos. Do mesmo modo, o tratamento numérico e abordagens experimentais originalmente desenvolvidas para a caracterização de materiais e estruturas convencionais são uma fonte de ferramentas indispensáveis que podem ser empregadas para uma melhor compreensão e exploração desse novo conceito.

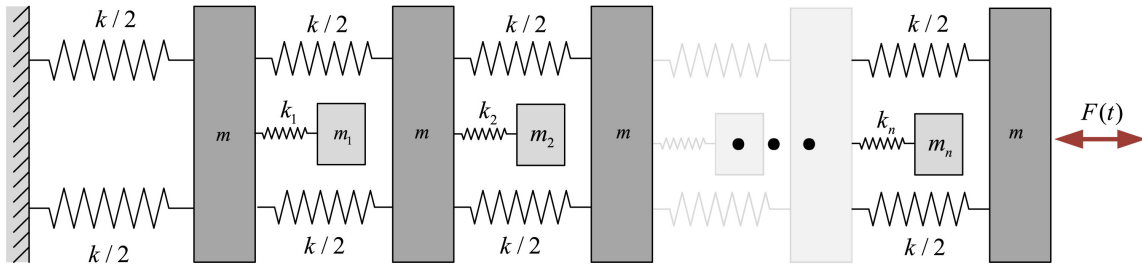
Em vários estudos, os cálculos baseados na formulação por matriz, como as abordagens por meio da matriz de transferência são aplicados para investigar propriedades de dispersão e propagação de ondas harmônicas através da estrutura (Hussein et al., 2014).

Metamateriais tradicionais são construídos com base na teoria de lacunas de banda do tipo Bragg, sua atividade se baseia em redes de espalhamento que efetuam o controle destrutivo das ondas refletidas no material (Reichl, 2017). Essas estruturas apresentam constantes elásticas distribuídas de forma periódica. Ondas elásticas, quando modeladas periodicamente pelas constantes elásticas do material geram intervalos de atenuação denominados *bandgaps* ou *stop bands*, por consequência, ondas de faixas específicas de frequência são proibidas na estrutura.

Nos sistemas periódicos estruturados artificialmente com defeitos pontuais ou defeitos lineares, as ondas elásticas com frequência dentro da faixa de *bandgap* ficam restritas aos defeitos pontuais ou só se propagam ao longo dos defeitos lineares. As propriedades advindas das regiões de atenuação permitem muitas aplicações do conceito para potencial redução de vibração e ruído (Wen et al., 2008).

Atualmente, muitos mecanismos de controle são projetados com subunidades construídas em um material para ressonar com as ondas mecânicas que se propagam nele Fig. 2.2. A ressonância local pode ser usada na estruturação de metamateriais de comportamento peculiar, semelhante a um massa e rigidez efetivas negativas, dependentes da dinâmica (Pai et al., 2014).

(a) **Metaestrutura:** Com absorvedores de vibração



(b) **Estrutura principal:** sem absorvedores de vibração

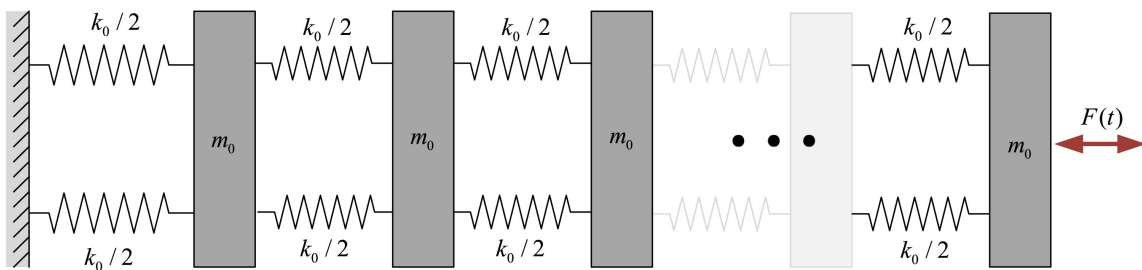


Figura 2.2: Modelo esquemático: (a) metaestrutura com ressonadores locais distribuídos periodicamente, (b) estrutura principal (Reichl, 2017).

Para estruturas que utilizam mecanismo de espalhamento é difícil conseguir um *bandgap* em baixa frequência, pois a frequência central determinada pela condição desse espalhamento é inversamente proporcional à dimensão da célula unitária. Para se verificar intervalos de atenuação em frequências mais baixas, a constante da rede precisaria estar em uma escala muito grande o que não é adequado para muitas aplicações reais. Nesse contexto, investigações de sistemas com ressonadores locais ganharam destaque. A frequência central de *bandgap* do metamaterial com ressonadores não é dependente da constante de rede, mas sim determinada pela frequência de ressonância do oscilador. Assim, intervalos de atuação em baixas frequências podem ser gerados (Zhou et al., 2017).

2.1.1 Estruturas periódicas com ressonadores locais

Estruturas podem ser construídas a partir de uma unidade geradora empregada diversas vezes em sua constituição Fig. 2.3. Elementos idênticos conectados lado a lado conferem à estrutura um carácter repetitivo, próximo de um ideal teórico periódico (Zhu et al., 2014; Chen et al., 2011). As pesquisas focam cada vez mais na geração de intervalos de *bandgaps* nos quais as ondas são totalmente atenuadas. A análise da propagação de ondas mostram que a vibração pode causar danos às estruturas e como a atenuação pode aumentar a vida útil da mesma (Wang et al., 2016a).

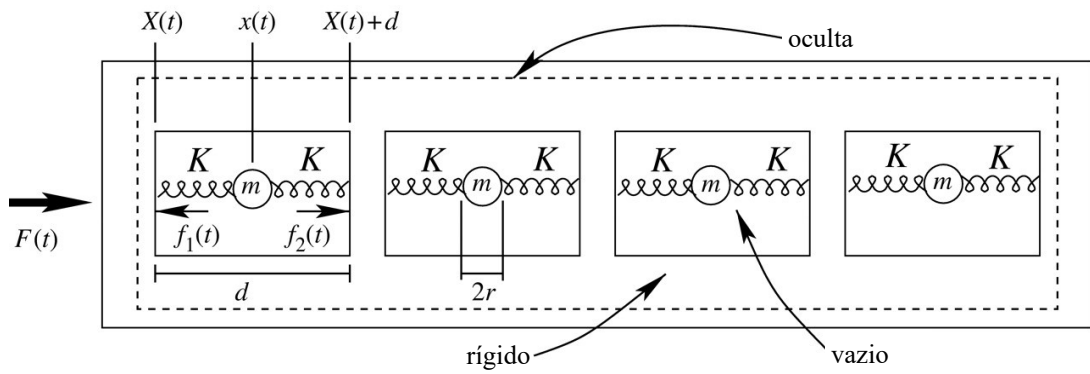


Figura 2.3: Material unidimensional onde a massa depende da frequência e pode ser negativa (Milton and Willis, 2007).

O mecanismo de ressonância local fornece intervalos de *bandgaps* em comprimento de onda baixos (Hobeck and Inman, 2015), permitindo a utilização em problemas reais de engenharia.

A ideia dos absorvedores mecânicos não é algo recente (absorvedor mecânico Fig. 2.4). O absorvedor de vibração está entre os mais antigos dispositivos de absorção de propagação de ondas (Rana and Soong, 1998).

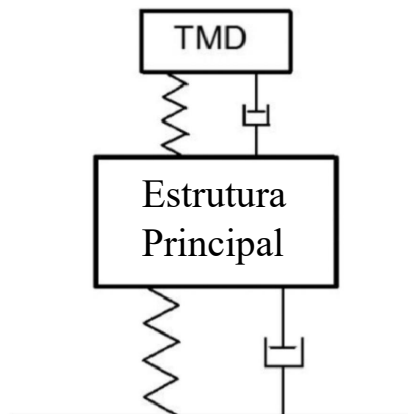


Figura 2.4: Representação esquemática de um amortecedor de massa sintonizada anexo a estrutura principal (Edalath et al., 2013).

O oscilador consiste em uma massa ligada ao sistema mecânico principal por uma mola, muitas vezes referido como TMD (*do inglês Tuned Mass Damper*). O dispositivo usa a ressonância externa entre a frequência da excitação forçada no sistema principal e a frequência de ressonância local, para transferir energia de vibração para o mecanismo e interromper o movimento do sistema principal (Pai et al., 2014).

Na literatura, ressonadores locais são conectados com intuito de gerar intervalos de suspensão para ondas: longitudinais (Pai, 2010), transversais Wang et al. (2005) (Chen et al., 2011) e torcionais (Yu et al., 2006; Wang et al., 2016a). A engenharia de estruturas comuns, como barras, vigas e placas, que abrigam ressonadores locais, permite um comportamento metamaterial em toda a estrutura.

Em pesquisa Liu et al. (2000) consideram uma estrutura física contínua contendo esferas de chumbo revestidas em camada de borracha numa matriz de epóxi. O sistema mecânico de ressonadores locais apresentou *bandgap* em intervalo de frequência duas ordens de magnitude menor do que a do limite de Bragg, existente devido a periodicidade estrutural. Em suma, é mostrado que o conceito de ressonância local produz metamateriais efetivos para atenuação ondas de baixa frequência sem a necessidade de grandes extensões estruturais.

Pai (2010) considera uma barra isotrópica longitudinal com pequenos subsistemas de massa e mola integrados separadamente. O conceito de suspensão utiliza a onda elástica axial de entrada para ressonar os dispositivos de absorção dispostos e controlar a propagação de vibração. O objetivo é ilustrar o efeito de massa efetiva negativa e revelar o real mecanismo de trabalho dos absorvedores dinâmicos.

Um estudo teórico do sistema de barras de metamateriais de ressonadores locais de vários graus de liberdade foi apresentado por Xiao et al. (2012). Eles demonstraram que os intervalos de banda do tipo Bragg e ressonância coexistem em hastes metamateriais. Devido à periodicidade sistemática estrutural as faixas de controle tipo Bragg são identificadas junto com *bandgaps* produzidos através de ressonadores locais. São avaliadas em detalhes influências paramétricas no comportamento do *bandgap* e seus mecanismos de formação.

Em publicação, Zhu et al. (2014) foca no projeto de uma metaestrutura de viga composta de matrizes de múltiplos osciladores que é desenvolvida para a atenuação de vibração de banda larga, utilizando os *bandgaps* individuais. Foco é dado na determinação quantitativa do número de unidades necessárias do ressonador para reduzir a vibração dentro de uma banda de frequência desejada.

Portanto, os ressonadores distribuídos ao longo da estrutura são capazes de induzir as faixas de controle, como mostrado na Fig. 2.5.

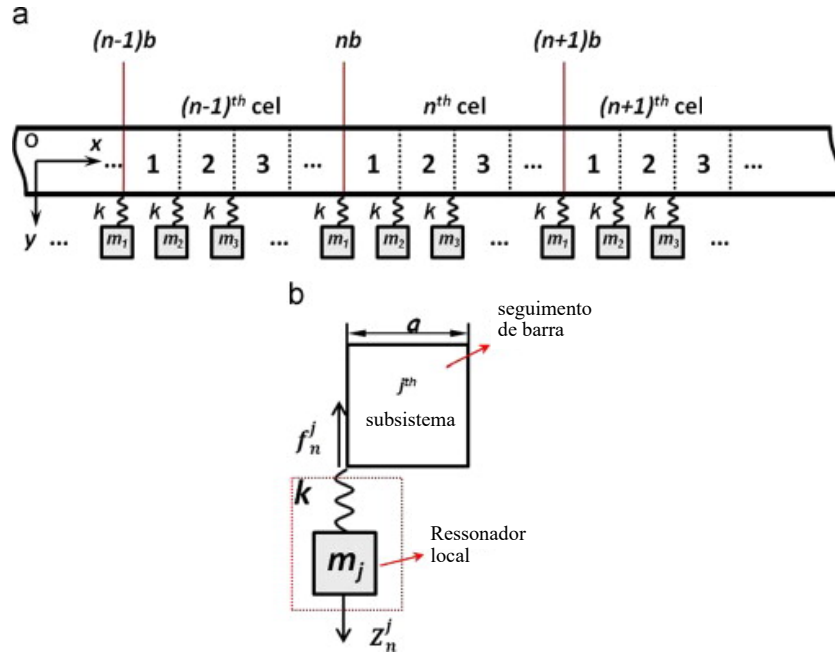


Figura 2.5: Modelo de metaestrutura com várias unidades ressonadoras. (b) O j -ésimo subsistema na n -ésima célula unitária com forças aplicadas, (Milton and Willis, 2007).

Chen et al. (2011) realizaram uma investigação analítica e experimental sobre o comportamento da propagação de ondas num feixe sanduíche com ressonadores tipo massa-mola internos Fig. 2.6. A estrutura mostrou-se eficaz na suspensão das ondas numa faixa de frequência específica, próxima à frequência de ressonância local do ressonador.

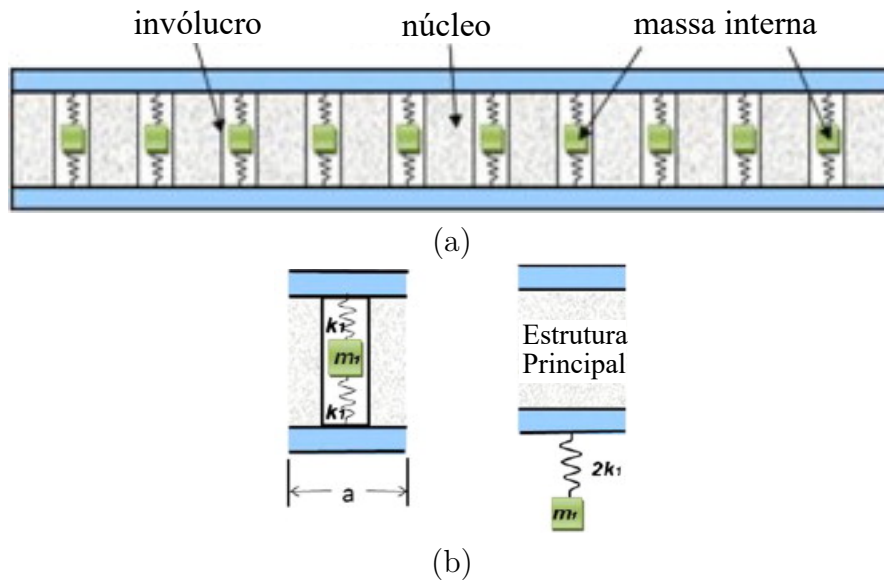


Figura 2.6: Feixe de sanduíche com ressonadores internos: (a) estrutura com vários ressonadores distribuídos, (b) Diagrama da célula unitária do sistema e seu modelo equivalente (Chen et al., 2011) .

A manufatura aditiva permitiu desenvolver protótipos estruturais com geometrias

mais complexas. Hobeck et al. (2015) consideram um elemento de impressão 3D, com absorvedores considerados idênticos Fig. 2.7. Eles demonstram a capacidade de suspensão de vibração em banda larga do protótipo, ao constatar que poucos ressonadores foram responsáveis por grande atenuação de vibração axial.

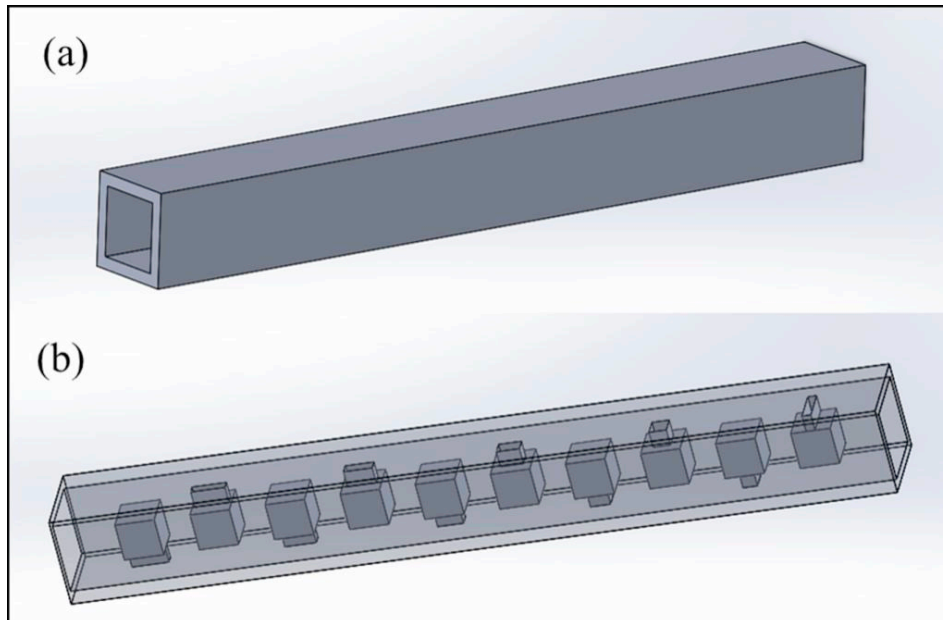


Figura 2.7: Modelo 3D da (a) estrutura principal e (b) metaestrutura com absorvedores de vibração (Hobeck et al., 2015).

Utilizar a não linearidade também é uma maneira eficaz para ampliar as lacunas de banda dos metamateriais elásticos (Fang et al., 2018). As estruturas não lineares podem exibir fenômenos extremamente complexos. O princípio da superposição, que é a base da teoria linear, não se aplica a sistemas não lineares (Kerschen et al., 2009). Ao tratar sistemas não lineares, uma investigação não linear pode ser iniciada e isso requer um conjunto mais sofisticado de ferramentas matemáticas (Carrella and Ewins, 2011).

Nesse sentido, a análise de estruturas periódicas não lineares ficou um pouco mais restrita devido às dificuldades adicionais na modelagem e caracterização (Khajehtourian and Hussein, 2014).

Alguns estudos aplicam os conceitos não lineares aos metamateriais, como por exemplo com osciladores não lineares conectados a cadeias periódicas. Se os osciladores conectados forem não lineares, a resposta apresenta dependência entre a amplitude e a frequência.

Hobeck and Inman (2015) demonstram que a resposta a vibração de uma metaestrutura magnoelástica, fundamentada no conceito de absorvedores altamente não lineares pela introdução de ímãs, foi muito mais satisfatória quando comparada a uma metaestrutura com absorvedores lineares. Observe a Fig 2.8.

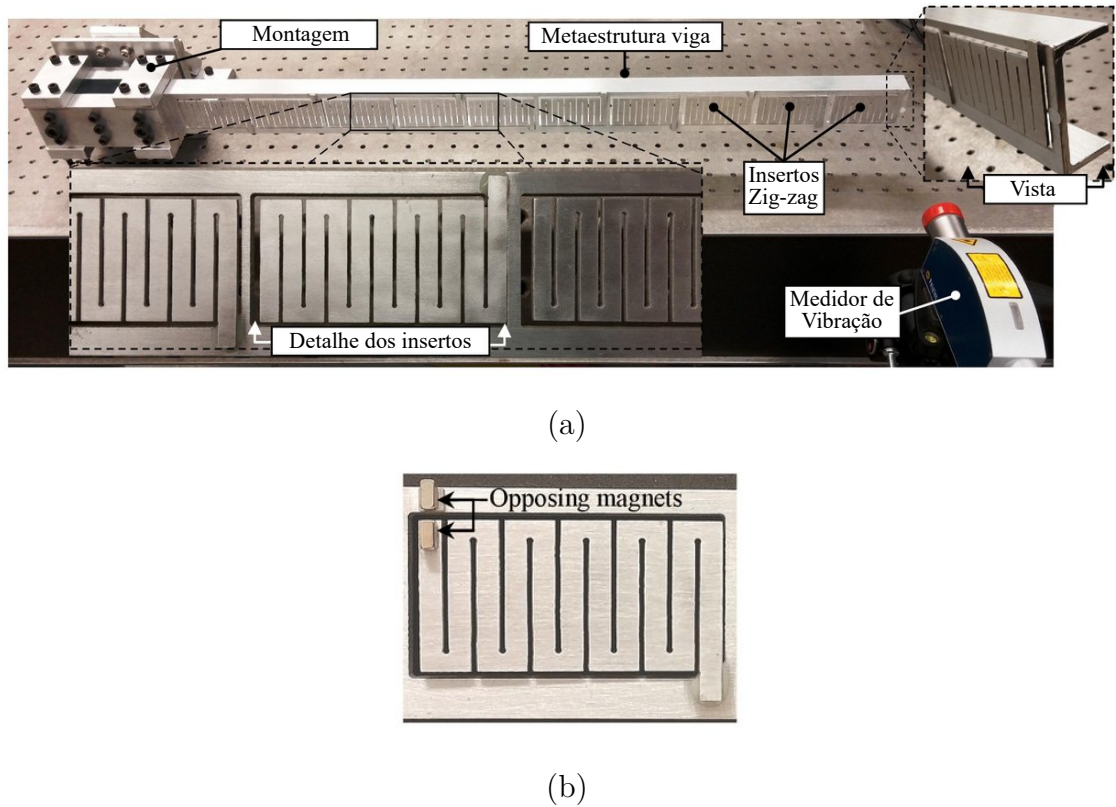


Figura 2.8: Metaestrutura com resposta não linear: (a) configuração experimental, (b) inserção em zigzag de ressonadores tipo ímans (Hobeck and Inman, 2015).

Em alguns casos a não linearidade considerada decorre de grande deformação elástica da estrutura principal, enquanto o comportamento metamaterial está associado à dinâmica de ressonadores locais. O efeito da não linearidade nas características do *bandgap* estrutural, incluindo tamanho, localização e caráter das lacunas do *bandgap* é verificado no trabalho de Khajehtourian and Hussein (2014).

Podem ser encontrados alguns métodos analíticos que descrevem o comportamento dinâmico de sistemas não lineares, dentre estes há o método do balanço harmônico, tais métodos avaliam o efeito não linear principalmente na primeira frequência natural dos sistemas. Em geral, esses estudos visam as equações referentes ao oscilador do tipo *Duffing* que é adequado para muitas aplicações práticas de engenharia (Santo et al., 2020).

Recentemente, os pesquisadores também vem demonstrando grande interesse pelas estruturas periódicas não uniformes, cujas seções transversais variam periodicamente em cada célula unitária, buscando melhorar a capacidade de controle em amplas faixas de frequência. Xu et al. (2016) projetaram uma célula para constituição de uma viga com duas seções transversais distintas. Posteriormente, propuseram várias estruturas periódicas como combinações variáveis da célula de viga, examinando influências para diferentes combinações nas frequências naturais e lacunas de banda. Gao et al. (2019) analisaram de forma numérica e experimental os comportamentos de *bandgap* de uma

estrutura periódica com seções transversais variável e descobriram que a periodicidade da seção transversal entre as unidades de construção pode gerar mais intervalos de *bandgap* (Wen et al., 2020).

2.1.2 Influências da rigidez não linear em estruturas

As técnicas mostram que é possível obter propriedades efetivas dos metamateriais por meio das células unitárias. Além disso, embora a maioria dos estudos tenha se concentrado em modelos reais de estruturas elásticas ressonantes localmente, muito pode ser aprendido explorando o problema no contexto de um modelo simples de parâmetros agrupados em massa, como realizado por Huang et al. (2009). Existem vários métodos propostos para avaliar o comportamento da região de *bandgap*. Os métodos incluem: o método dos elementos de contorno, o método da matriz de transferência, o método dos elementos espectrais no domínio do tempo e o método dos elementos finitos. Em geral, a escolha depende muito dos objetivos da análise (Wen et al., 2020).

O Método dos Elementos Finitos (FEM, *do inglês Finite Element Method*) é um método computacional muito poderoso e abundantemente empregado para prever o comportamento de frequência de estruturas periódicas. O FEM também comporta resoluções de equações no domínio do tempo, onde as equações são resolvidas usando de integração numérica, e pode ser aplicado a um grande número de problemas com diferentes geometrias, condições de contorno e variações de materiais para vibração livre e forçada (Hou and Assouar, 2008).

Recentemente para tornar a estrutura capaz de atenuar vibrações numa faixa ampla de frequência (Ding and Zhao, 2011; Hussein et al., 2014), creceu o interesse nas associações de subsistemas não lineares (Zhu et al., 2014). Para essas análises os métodos de avaliação necessitam ser cada vez mais robustos (Wang et al., 2016b).

A associação não linear permite faixas de controle em regiões promissoras adicionando-se pouca massa à estrutura. Enikov et al. (2005) constatam que a posição do *bandgap* pode ser deslocada conforme se modifica o nível de não linearidade dos osciladores, o que pode permitir que a estrutura seja utilizada em filtros ajustáveis na faixa de baixa frequência. Casalotti et al. (2018) investigaram o caso de um metamaterial constituído por uma viga com absorvedores não lineares embutidos em toda sua extensão, determinando as funções de resposta em frequência do mecanismo de controle Fig 2.9.

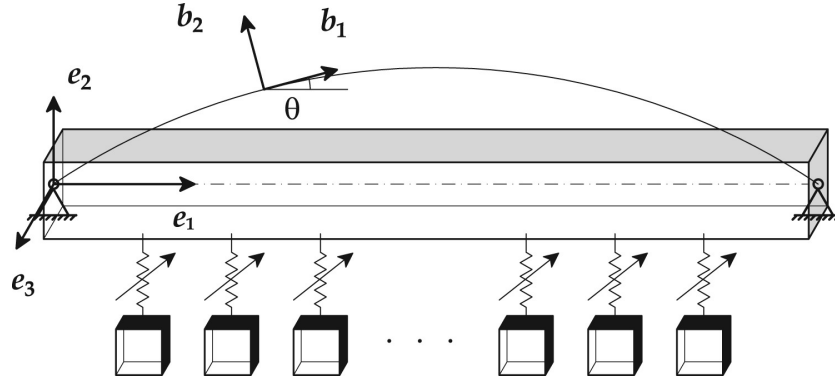


Figura 2.9: Esquema de uma viga articulada de metamaterial com osciladores não lineares (Casalotti et al., 2018).

Entretanto, o estudo das vibrações livres e forçadas de estruturas lineares contínuas com rigidez não linear ainda não foi realizado extensivamente. Ao filtrar os trabalhos realizados sobre esse tema verifica-se a análise das frequências naturais de estruturas simples, como barras e vigas com não linearidade limitada. Nesse sentido, a avaliação dinâmica não linear ainda é considerada um desafio (Casalotti et al., 2018).

A questão central nessa tese refere-se à modelagem de estruturas com ressonadores não lineares e, principalmente, à descrição da resposta em frequência em todo intervalo (em que ocorrem várias ressonâncias). Diversos métodos analíticos para entender o comportamento dinâmico não linear podem ser citados, por exemplo, métodos de várias escalas, perturbação, métodos de medição e o equilíbrio harmônico (Brennan et al., 2008; Holmes, 1981; Kevorkian and Cole, 2013). Como mencionado anteriormente, eles se concentram principalmente na avaliação do efeito na primeira frequência natural e geralmente, são baseados na equação do oscilador *Duffing* (Kovacic and Brennan, 2011; Nayfeh and Mook, 2008).

O método polinomial aqui empregado constitui um meio preciso para analisar a resposta dinâmica da barra ressonador não linear. Para estruturas com alto número de graus de liberdade, ou seja, maior número de massas e molas, a aplicação do método polinomial se torna mais restrita (Santo et al., 2020). Outras técnicas são avaliadas como integração numérica e o emprego de continuação por homotopia com uso do Bertini.

Capítulo 3

Avaliação de sistemas com anexo de rigidez não linear

As influências da rigidez não linear no comportamento estrutural são exploradas nesse capítulo. Considera-se vibração longitudinal, obtendo-se as equações de resposta em frequência sobre vibração livre e forçada.

Deriva-se as equações de movimento com base na matriz de rigidez dinâmica dos sistemas. Utiliza-se inicialmente o método do Balanço Harmônico de primeira ordem. O método gera um polinômio com várias raízes, dependendo do número de molas ou ressonadores não lineares anexados.

O desenvolvimento é feito em detalhes e usado para entender a influência não linear na resposta dinâmica. O estudo considera a formulação de sistemas discretos. O método numérico de Runge-Kutta é empregado como fonte de comparação ao método polinomial, fatores de amortecimento são introduzidos.

3.1 Método Polinomial

A célula unitária que compõe a estrutura periódica é representada na Fig. 3.1.

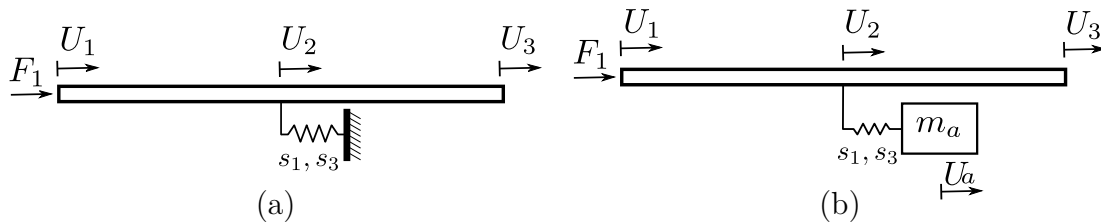


Figura 3.1: Esquema de uma célula unitária anexada: (a) a uma mola não linear; (b) a um ressonador não linear.

No caso exposto na Fig. 3.1(a) a mola está presa na extremidade direita e acoplada à célula na posição u_2 .

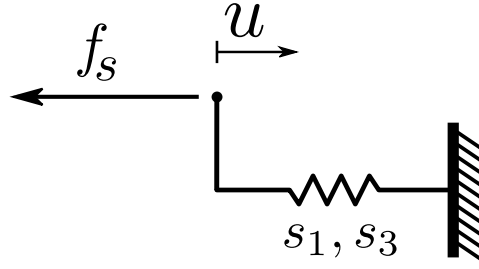


Figura 3.2: Diagrama esquemático da mola não linear presa na extremidade direita e sua força restauradora f_s , governada por uma equação cúbica.

Assume-se que a mola (tipo *Duffing*) é regida por uma função cúbica (Kovacic and Brennan, 2011; Kargarnovin et al., 2005; Worden and Tomlinson, 2019; Santo et al., 2020), como descrito na Eq. 3.1, que liga a força restauradora $f_s = f_s(t)$ ao deslocamento $u = u(t)$ da região central da célula (ver Fig. 3.2).

$$f_s = s_1 u \pm s_3 u^3 \quad (3.1)$$

Os exemplos que seguem na Fig. 3.3 apresentam o comportamento da magnitude da força de restauração da mola, para dois coeficientes de rigidez não linear: positivo (*hardening* - linha azul) e negativo (*softening* - linha vermelha).

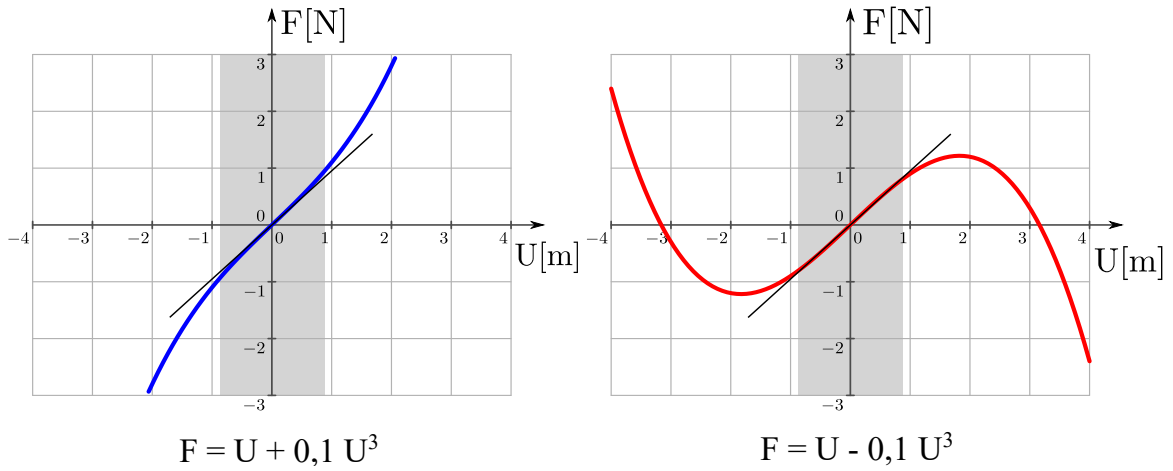


Figura 3.3: Força restauradora da mola contra o deslocamento, quando $s_1 = 1$ e $s_3 = 0,1$ (linha azul) e quando $s_1 = 1$ e $s_3 = -0,1$ (linha vermelha).

Na Fig. 3.3 pode-se notar que para o caso da rigidez tipo *hardening* ($s_3 > 0$) a mola está enrijecendo com o aumento da deformação. Entretanto, para o caso da mola *softening* ($s_3 < 0$) a rigidez equivalente está se tornando negativa quando a magnitude do deslocamento excede um determinado valor, ou seja, o sistema está se tornando instável. Para pequenos valores de deslocamentos, uma rigidez linear equivalente pode ser definida, representada pela inclinação das curvas mostradas (ver região em cinza).

Assumindo força harmônica com frequência ω , isto significa, $f(t) = F \cos(\omega t)$ o

deslocamento pode ser expresso por $u(t) = U \cos(\omega t)$, por expansão de série de Fourier de primeira ordem (Mickens, 2001). Como resultado, a Eq. 3.1 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_s \cos(\omega t) = s_1 U \cos(\omega t) \pm s_3 U^3 \cos^3(\omega t) \quad (3.2)$$

Para a rigidez equivalente da mola, uma expressão correspondente à frequência pode ser obtida com a relação trigonométrica $\cos^3(\omega t) = 3/4 \cos(\omega t) + 1/4 \cos(3\omega t)$ e cancelando o termo associado a terceiro harmônico (3ω). O termo 3ω pode ser cancelado pois a parcela corresponde a $1/4$, sendo 3 vezes menor do que a parcela relacionada a ω . Contudo, isso implica numa aproximação da função, sendo gerados valores de deslocamentos aproximados. A rigidez dinâmica equivalente da mola não linear $D(U)$ pode ser expressa em termos desses parâmetros:

$$D(U) = \frac{F_s}{U} = s_1 \pm \frac{3}{4} s_3 U^2 \quad (3.3)$$

A Eq. 3.3 será utilizada na análise de sistemas de parâmetros contínuos. Observe que a rigidez não linear equivalente $D(U)$ é função da amplitude de deslocamento U , dependente do ponto no qual a mola foi anexada.

Ao tratar do caso ilustrado na Fig. 3.1(b), que representa a barra com ressonador não linear, considera-se o deslocamento relativo $z = u_2 - u_a$, sendo u_a o deslocamento referente a massa do ressonador. Assim, a Eq. 3.1 é reescrita em função do deslocamento relativo do absorvedor.

$$f_s = s_1 z \pm s_3 z^3, \quad (3.4)$$

Como resultado, a Eq. 3.4 pode ser reescrita considerando movimento harmônico e o somatório de forças no absorvedor, nessa situação o termo inercial deve ser acrescentado:

$$F_s \cos(\omega t) = -\omega^2 m_a \cos(\omega t) Z + s_1 Z \cos(\omega t) \pm s_3 Z^3 \cos^3(\omega t), \quad (3.5)$$

utilizando a mesma relação trigonométrica descrita anteriormente.

$$D(Z) = \frac{F_s}{Z} = -\omega^2 m_a + s_1 \pm \frac{3}{4} s_3 Z^2 \quad (3.6)$$

As equações que representam a rigidez dinâmica da mola e do absorvedor não linear serão utilizadas na seção 3.2.

3.2 Comportamento de um sistema massa mola amortecedor não linear

O comportamento de uma massa acoplada a uma mola não linear é analisado inicialmente como forma de compreensão do efeito dinâmico não linear, mostrado na Fig. 3.4.

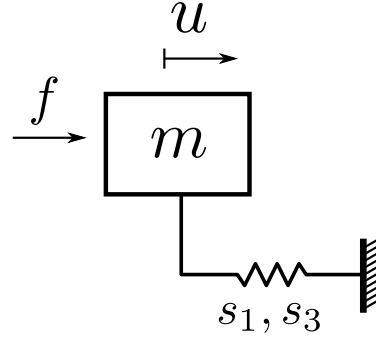


Figura 3.4: Sistema massa mola não linear e força externa atuante.

A força harmônica de magnitude $f(t) = F \cos(\omega t)$ atua no lado esquerdo do sistema, assim, a função deslocamento será do tipo $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$. Sendo ϕ o ângulo de fase entre força e deslocamento. Definindo a equação do movimento do sistema não linear, tem-se:

$$-s_1 u - s_3 u^3 - c\dot{u} + f = m\ddot{u} \quad (3.7a)$$

sendo $\dot{\bullet}$ e $\ddot{\bullet}$, a primeira e a segunda derivada em relação ao tempo, respectivamente. Dividindo ambos os lados pela massa:

$$\frac{1}{m}[m\ddot{u} + c\dot{u} + s_1 u + s_3 u^3] = \frac{1}{m}[F \cos(\omega t)] \quad (3.7b)$$

A parametrização pode ser realizada considerando a razão de rigidez não linear $\gamma = s_3/s$ e de amortecimento $\zeta = c/c_c$, onde $c_c = 2\zeta m\omega_0$ é a constante de amortecimento crítico.

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u + \gamma\omega_0^2 u^3 = \frac{F}{m\omega_0^2} \cos(\omega t) \quad (3.8)$$

Reescrevendo a primeira e a segunda derivada do deslocamento na Eq. 3.8, sendo $\dot{u} = \omega_0 u^I$ e $\ddot{u} = \omega_0^2 u^{II}$ ao considerar o adimensional de tempo $\tau = \omega_0 t$, obtém-se:

$$u^{II} + 2\zeta u^I + u + \gamma u^3 = \frac{F}{m\omega_0^2} \cos(\Omega\tau) \quad (3.9)$$

a função deslocamento $u(\tau) = U \cos(\Omega\tau + \phi)$, com a primeira e a segunda derivada, $u^I = U \sin(\Omega\tau + \phi)$, $u^{II} = -\Omega^2 U \cos(\Omega\tau + \phi)$, respectivamente em relação a τ . Por simplificação $\alpha = \Omega\tau + \phi$.

Para a resposta livre $F = 0$, substituindo os termos na Eq. (3.9).

$$-\Omega^2 U \cos \alpha - 2\zeta \Omega U \sin \alpha + U \cos \alpha + \gamma U^3 \cos^3 \alpha = 0 \quad (3.10)$$

A partir da relação trigonométrica $\cos^3 \alpha = 3/4 \cos \alpha + 1/4 \cos(3\alpha)$ e cancelando o termo associada a 3α , tem-se.

$$-\Omega^2 U \cos \alpha - 2\zeta \Omega U \sin \alpha + U \cos \alpha + \frac{3}{4} \gamma U^3 \cos \alpha = 0 \quad (3.11)$$

Desprezando o amortecimento para a resposta livre, a frequência natural pode ser escrita em termos de Ω .

$$(-\Omega^2 + 1 + \frac{3}{4} \gamma U^2) U \cos \alpha = 0$$

$$\Omega = \left[1 + \frac{3}{4} \gamma U^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

As funções geradas pela Eq. 3.12 são comumente denominadas “*backbone curves*”. O nome deriva da característica da função de resposta em frequência (FRF, *do inglês Frequency Response Function*) que apresenta uma inclinação devido à influência não linear, como mostrado na Fig. 3.5. Existe uma infinidade de valores correspondentes para a frequência natural da estrutura não linear.

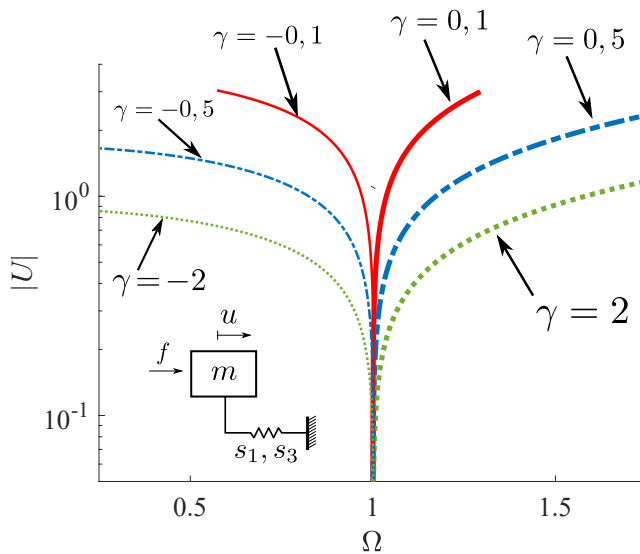


Figura 3.5: Comportamento da frequência natural do sistema massa mola com a variação da rigidez não linear.

A inclinação da resposta foi alterada devido ao aumento da parcela não linear de

rigidez γ .

No caso da resposta forçada, tem-se a Eq. 3.13.

$$-\Omega^2 U \cos \alpha - 2\zeta \Omega U \sin \alpha + U \cos \alpha + \frac{4}{3} \gamma U^3 \cos \alpha = \frac{F}{m\omega_0^2} \cos(\alpha - \phi) \quad (3.13)$$

Separando a parcela referente ao amortecimento viscoso:

$$(-\Omega^2 + 1 + \gamma U^2)U = \frac{F}{m\omega_0^2} \cos \phi \quad (3.14)$$

$$-2\zeta \Omega U = \frac{F}{m\omega_0^2} \sin \phi \quad (3.15)$$

as equações devem ser somadas, elevando-as ao quadrado. Utilizando $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$.

$$[(-\Omega^2 + 1 + \gamma U^2)U]^2 + [-2\zeta \Omega U]^2 = \left(\frac{F}{m\omega_0^2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Obtém-se o polinômio $p_3 U^3 + p_2 U^2 + p_1 U + p_0 = 0$ para o deslocamento, cujo coeficientes são determinados.

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{9}{6} \gamma^2 \\ p_2 &= \frac{3}{2} \gamma (1 - \Omega^2) \\ p_1 &= 4\Omega^2 \zeta^2 + (1 - \Omega^2)^2 \\ p_0 &= \frac{F^2}{m^2 \omega_0^4} \end{aligned} \quad (3.17)$$

A partir das raízes do polinômio, a função FRF não linear é encontrada.

Na Fig. 3.6, a resposta em frequência apresenta uma inclinação no intervalo que corresponde à frequência natural. Ao aumentar a parcela não linear há uma amplificação deste efeito. Observe que a função de resposta do deslocamento acompanha a inclinação da frequência natural a medida que se aumenta ou diminui γ .

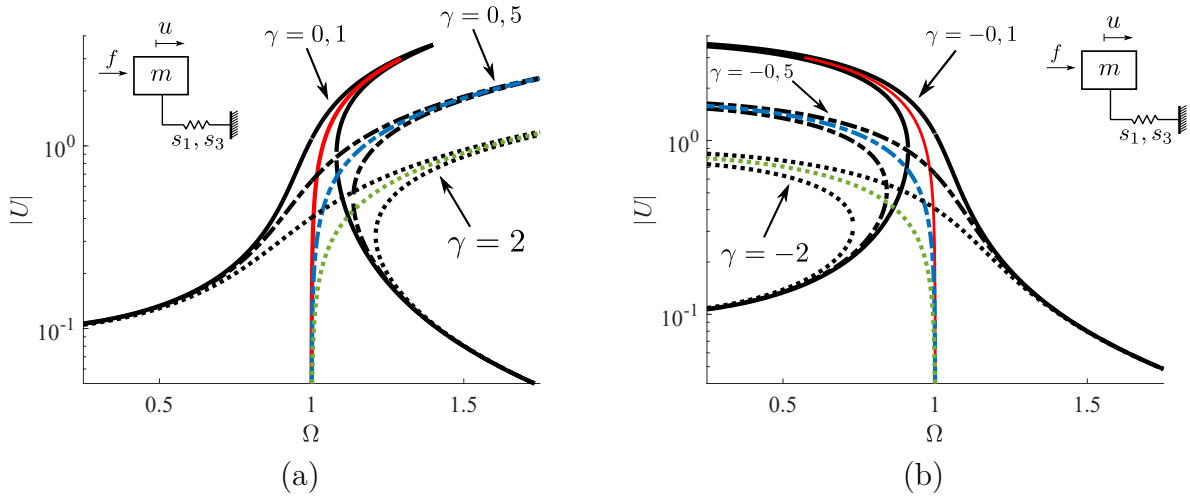


Figura 3.6: Função Resposta em Frequência com variação da rigidez não linear (sem amortecimento): (a) caso *hardening*; (b) caso *softening*.

Na Fig. 3.7, efeitos de amortecimento são observados pela dissipação de energia principalmente próximo a frequência natural. O pico de ressonância é atenuado e há uma redução na percepção da influência não linear a medida que se aumenta ζ .

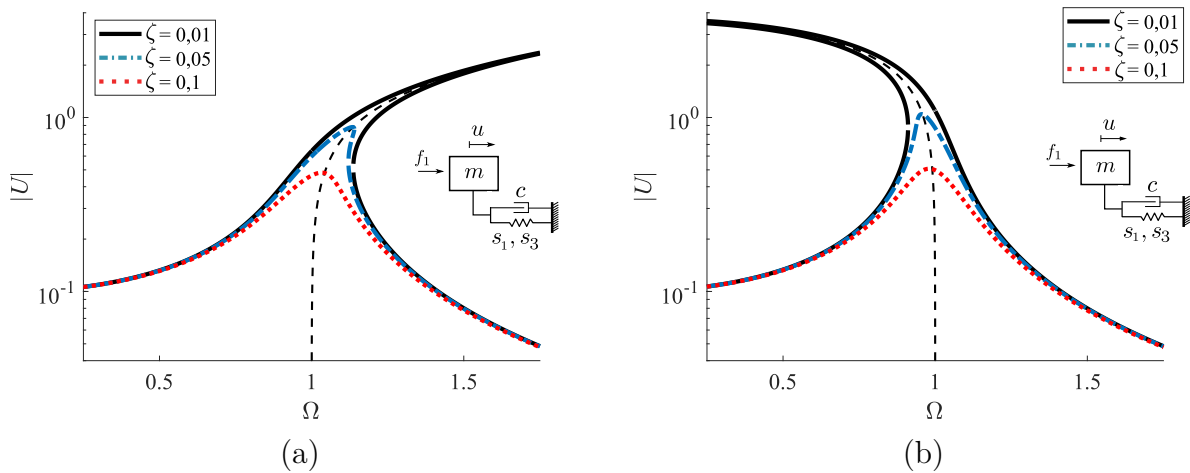


Figura 3.7: Função Resposta em Frequência com variação do amortecimento viscoso: (a) caso *hardening*; (b) caso *softening*.

Na próxima seção o sistema estudado apresenta três graus de liberdade.

3.2.1 Célula unitária com ressonador não linear - sistema discreto

Numa primeira abordagem a célula unitária que compõe a estrutura periódica geral é representada como um sistema discreto.

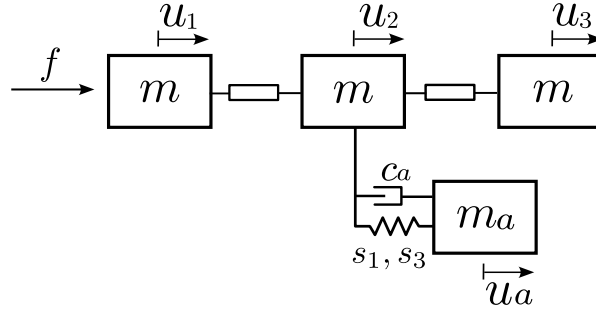


Figura 3.8: Representação da célula unitária com ressonador não linear como um modelo discreto.

Na Fig. 3.8, as massas que compõem a célula unitária são representadas por m , a rigidez por s e o amortecimento viscoso por c . O ressonador possui massa m_a e constante de amortecimento viscoso c_a . De acordo com o somatório de forças no sistema, tem-se:

$$u_1^{II} - 2\zeta(u_2^I - u_1^I) - (u_2 - u_1) = f_1 \cos(\Omega\tau) \quad (3.18)$$

$$u_2^{II} + 2\zeta(u_2^I - u_1^I) + (u_2 - u_1) - 2\zeta(u_3^I - u_2^I) - (u_3 - u_2) + 2\zeta\beta z^I + \gamma_1 z + \gamma_3 z^3 = 0 \quad (3.19)$$

$$u_3^{II} + 2\zeta(u_3^I - u_2^I) + (u_3 - u_2) = 0 \quad (3.20)$$

$$\mu u_a^{II} - 2\zeta\beta z^I - \gamma_1 z - \gamma_3 z^3 = 0 \quad (3.21)$$

para chegar nas relações de movimento da célula a modelagem matemática foi feita de forma semelhante ao massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade, desenvolvido anteriormente. Sendo $\beta = c_a/c$ e $\mu = m_a/m$, a razão de amortecimento e de massa do ressonador, respectivamente. Novamente $z = u_2 - u_a$, considerando movimento harmônico.

$$-\Omega^2 U_1 - 2j\Omega\zeta(U_2 - U_1) - (U_2 - U_1) = F_1 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 U_2 + 2j\Omega\zeta(U_2 - U_1) + (U_2 - U_1) \\ & - 2j\Omega\zeta(U_3 - U_2) - (U_3 - U_2) + 2j\Omega\zeta\beta Z + \gamma_1 Z + F_{NL} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$-\Omega^2 U_3 + 2j\Omega\zeta(U_3 - U_2) + (U_3 - U_2) = 0 \quad (3.24)$$

$$-\mu\Omega^2 U_a - 2j\Omega\zeta\beta Z - \gamma_1 Z - F_{NL} = 0 \quad (3.25)$$

A força restauradora cúbica é expandida em variáveis reais e imaginárias $F_{NL} = F_{NL(r)} - jF_{NL(j)}$. Os subscritos r e j são as partes reais e imaginárias, respectivamente. Ao expandir a força restauradora cúbica considera-se o deslocamento relativo Z :

$$F_{NL(r)} = \frac{3}{4}\gamma_3(Z_{(r)}^3 + Z_{(j)}^2 Z_{(r)}) \quad (3.26)$$

$$F_{NL(j)} = \frac{3}{4}\gamma_3(Z_{(j)}^3 + Z_{(r)}^2 Z_{(j)}) \quad (3.27)$$

sendo $Z_{(r)} = (U_{2(r)} - U_{a(r)})$ e $Z_{(j)} = (U_{2(j)} - U_{a(j)})$ as parcelas real e imaginária referente ao deslocamento relativo do amortecedor. Todas as variáveis de deslocamento apresentam parte real e imaginária $U = U_{(r)} + U_{(j)}$ que devem ser expandidas e separadas posteriormente.

$$\begin{aligned} -\Omega^2(U_{1(r)} + U_{1(j)}) - 2j\Omega\zeta(U_{2(r)} - U_{1(r)} + U_{2(j)} - U_{1(j)}) \\ -(U_{2(r)} - U_{1(r)} + U_{2(j)} - U_{1(j)}) = F_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} -\Omega^2(U_{2(r)} + U_{2(j)}) + 2j\Omega\zeta(U_{2(r)} - U_{1(r)} + U_{2(j)} - U_{1(j)}) \\ +((U_{2(r)} - U_{1(r)} + U_{2(j)} - U_{1(j)}) - 2j\Omega\zeta(U_{3(r)} - U_{2(r)} + U_{3(j)} - U_{2(j)}) \\ -(U_{3(r)} - U_{2(r)} + U_{3(j)} - U_{2(j)}) + 2j\Omega\zeta\beta(Z_{(r)} + Z_{(j)}) + \gamma_1(Z_{(r)} + Z_{(j)}) \\ + F_{NL} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} -\Omega^2(U_{3(r)} + U_{3(j)}) + 2j\Omega\zeta(U_{3(r)} - U_{2(r)} + U_{3(j)} - U_{2(j)}) \\ +(U_{3(r)} - U_{2(r)} + U_{3(j)} - U_{2(j)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$-\mu\Omega^2(U_{a(r)} + U_{a(j)}) - 2j\Omega\zeta\beta(Z_{(r)} + Z_{(j)}) - \gamma_1(Z_{(r)} + Z_{(j)}) - F_{NL} = 0 \quad (3.31)$$

Note que para esse caso efeitos de amortecimento são considerados. As equações serão resolvidas pelo método da continuação utilizando Bertini.

3.2.2 Comparação com o método de Runge-Kutta

Em condições não lineares muitas vezes utiliza-se de integração numérica empregando, por exemplo, o método de Runge-Kutta. Para isso, um sistema geral qualquer

pode ser escrito na forma de espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{y}_2 \quad (3.32)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \quad (3.33)$$

sendo $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ vetores de estados e $\mathbf{g}$ são as funções dos estados do sistema. A análise é realizada com o intuito de validar a resolução obtida pelo método da continuação, propõe-se uma comparação entre as respostas dinâmicas fazendo a resolução das equações diferenciais não lineares utilizando o método Runge-Kutta (RK45 de quinta ordem para estimar o erro e obter precisão de quarta ordem, com passo variável).

A comparação entre os dois métodos descritos é apresentada na sequência. Inicialmente para o sistema discreto acoplado a mola não linear para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 10$ e $F_1 = 0,1$.

Observe na Fig. 3.9 que ambos os métodos de análise foram capazes de descrever com precisão a influência não linear principalmente próximo aos intervalos de ressonância. Para o método numérico há apenas uma solução em todo intervalo (círculos vermelhos). A solução encontrada por continuação por homotopia (pontos em preto), há regiões em coexistem mais de uma solução. A inclinação gerada pela rigidez cúbica do anexo é bem representada por ambos.

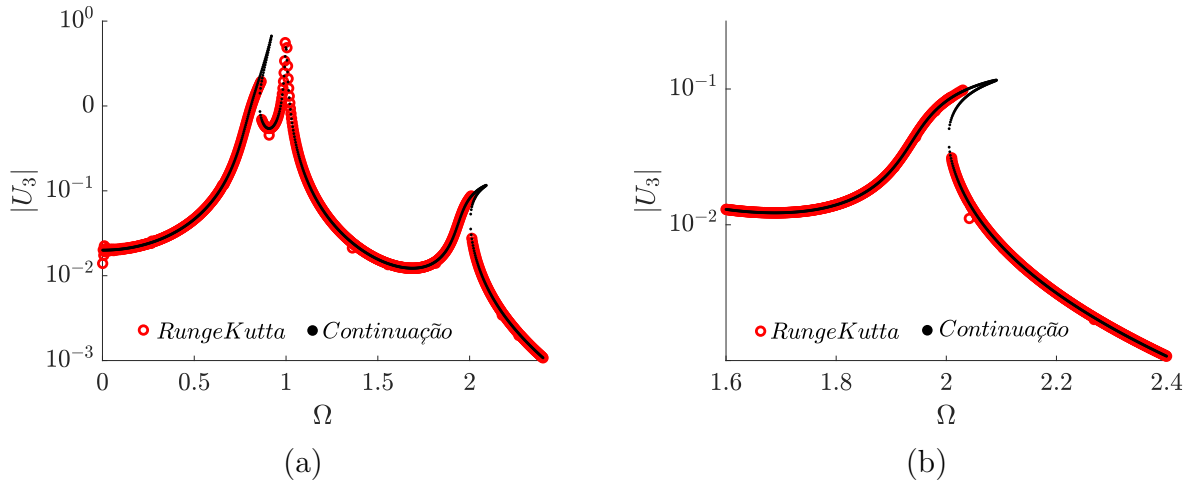


Figura 3.9: Função resposta em frequência para célula unitária com uma mola não linear: (a) comparação entre o método numérico (Runge Kutta) e o método da continuação (algoritmo Bertini); (b) efeito não linear próximo a uma das ressonâncias.

Para a célula com ressonador o dispositivo foi ajustado para frequência específica. A massa do absorvedor m_a foi assumida como sendo 50% da massa do sistema m , logo, $\mu = 0,50$. Para a parcela linear do ressonador $\gamma_1 = 5$, o amortecimento viscoso no sistema primário foi considerado fixo nas simulações $\zeta = 0,01$. Altera-se o valor de γ_3 para se observar influência não linear.

Novamente ambos os métodos de análise foram capazes de descrever com precisão a influência não linear principalmente próximo ao intervalo de ressonância do absorvedor, como mostrado na Fig. 3.10. O método numérico apresenta uma solução em todo intervalo (círculos vermelhos) e na solução por continuação (pontos em preto) há regiões em coexistem mais de uma solução. O ressonador de vibração abriu um intervalo de atenuação na região em que foi sintonizado, atenuando a ressonância nessa região.

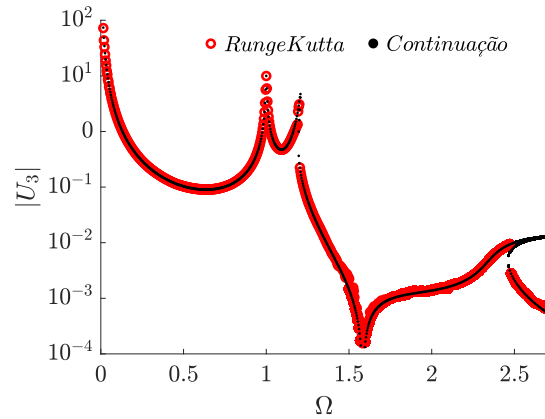


Figura 3.10: Função resposta em frequência para célula unitária com ressonador não linear: (a) comparação entre o método numérico (Runge Kutta) e o método da continuação (algoritmo Bertini); (b) efeito não linear próximo a uma das ressonâncias.

Explicação dos métodos utilizados:

O método de Runge-Kutta é um dos mais utilizados para obter soluções aproximadas de valor inicial. O método de Runge-Kutta permite eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo. O método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função (do Valle et al., 2012). No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo. De modo geral, se calcula a solução por um esquema de quarta ordem e um de quinta ordem e pela comparação dos valores podemos obter não só o erro local como também uma estimativa para o incremento h ideal, estabelecendo um esquema adaptativo. Assim, num esquema em que o valor de h varia automaticamente a partir de um valor de tolerância imposto pelo usuário. A ordem do método indica o número de pontos usado em um subintervalo para determinar o valor da inclinação (Gilat and Subramaniam, 2009).

O BertiniLab é uma interface MATLAB para Bertini, que consiste em um solucionador de uso geral para sistemas de equações polinomiais. Bertini pode encontrar soluções isoladas e soluções de dimensão positiva usando continuação por homotopia. Bertini usa multiprecisão adaptativa e fornece valores para calcular raízes singulares com precisão. Ele também tem métodos de continuação de parâmetros eficientes para

famílias de sistemas que são relacionados por um ou mais parâmetros.

Teoria de homotopia é uma das ramos da matemática que surge com a noção de grupos de homotopia introduzidos. A teoria da homotopia é um estudo sistemático de situações em que os mapas vêm com homotopias entre eles. Sabe-se que, se existir uma função contínua entre os espaços topológicos, significa que são homotópicos (Vick, 2012).

Na teoria da homotopia, normalmente não se trabalha com um espaço topológico arbitrário. Em vez disso, presume-se que um espaço é um espaço razoável, que pode significar que é um espaço gerado compactamente e cujos dois pontos distintos quaisquer têm vizinhanças disjuntas, ou que é um complexo.

Em resumo, o conceito de homotopia é baseado na ideia de deformar continuamente uma aplicação contínua em outra (uma função em outra). Nesse sentido, surge a concepção de homotopia de caminhos, que é a definição de homotopia adicionada as condições de que os caminhos têm o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final e, para cada tempo fixado da deformação, a homotopia é um caminho de mesmos pontos inicial e final (Aguilar et al., 2002; Hu, 1959; Nirenberg, 1983).

No MATLAB defini-se um sistema de equações de parte real e imaginária. Utilizou-se da função *polysym* que emula alguns dos recursos para as variáveis de deslocamento da equação. A função *polysystem.solve* considera as variáveis de deslocamentos definidas simbolicamente na solução das equações de deslocamento.

Capítulo 4

Estudo de um sistema contínuo

Este capítulo apresenta o estudo de uma barra contínua com acoplamento não linear (mola e ressonador). A rigidez empregada é do tipo cúbica. As equações de movimento são obtidas por meio do método dos elementos espectrais.

A modelagem descreve o comportamento dinâmico da barra linear uniforme em vibração longitudinal com comprimento $2l$. As extremidades esquerda ($x = 0$) e direita ($x = 2l$) estão livres, sendo que a extremidade esquerda está sujeita a uma força de magnitude F_1 . Nos problemas estudados, a mola e o ressonador não linear são conectados na posição central da barra u_2 .

4.1 Análise de um sistema contínuo

A modelagem matemática é realizada com base na avaliação das forças atuantes num elemento infinitesimal da barra. A Fig. 4.1 mostra o diagrama de corpo livre de um infinitesimal de comprimento dx .

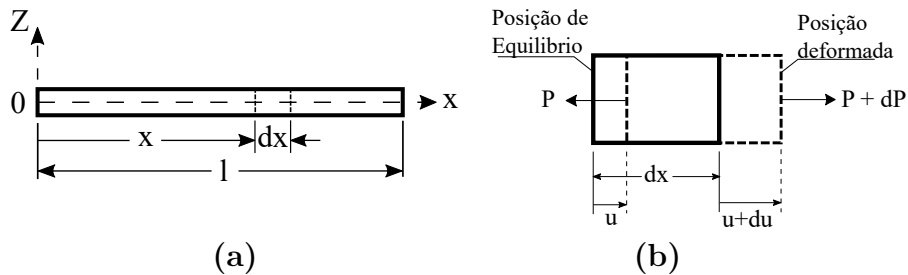


Figura 4.1: Barra sujeita a vibração longitudinal: (a) sistema de coordenadas na barra, (b) forças atuantes num elemento infinitesimal de comprimento dx .

As forças resultantes na seção transversal do elemento, são P e $P + dP$. Da relação entre força e deformação, $P = \sigma A = EA(\partial u / \partial x)$, sendo σ a tensão axial, E o módulo de Young e $\partial u / \partial x$ a deformação axial. O somatório de forças na porção infinitesimal dx resulta:

$$P(x,t) + dP - P(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

$$dP = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (4.1)$$

onde ρ é a densidade do material. Substituindo a igualdade $dP = (\partial P / \partial x) dx$ todos os termos da Eq. 4.1 apresentam dx , logo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

a equação do movimento para a vibração longitudinal da barra uniforme (E , A , ρ , constantes) pode ser expressa.

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad (4.3)$$

Substituindo $u'' = \partial^2 u(x,t) / \partial x^2$ e $\ddot{u} = \partial^2 u(x,t) / \partial t^2$ na Eq. 4.3 e as derivadas em relação ao espaço e tempo, obtém-se a Eq. 4.4.

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0 \quad x \in]0, 2l[\quad (4.4)$$

Logo, para a barra uniforme e não amortecida, sua equação governante local pode ser escrita.

$$u'' - \frac{\rho}{E} \ddot{u} = 0 \quad x \in]0, 2l[\quad (4.5)$$

As condições de contorno para as extremidades esquerda ($x = 0$), posição central ($x = l$) e extremidade direita ($x = 2l$), são dadas por:

$$EAu'(0,t) = f_1, \quad EAu'(l,t) = f_s, \quad EAu'(2l,t) = 0, \quad (4.6)$$

onde f_1 é a força externa que atua na extremidade esquerda e f_s a força de restauração da mola ou ressonador conectado. Para movimento harmônico $f_1(t) = F_1 \cos(\omega t)$, portanto, a solução particular do deslocamento foi escrita como $u = u(x,t) = U(x) \cos(\omega t)$. A solução da Eq. 4.5 pode ser obtida através do método de separação de variáveis.

Para o método de separação a deformação foi reescrita como $u(x,t) = U(x) \cdot T(t)$, sendo $U = U(x)$ e $T = T(t)$, funções de x e t , respectivamente. Nesse ponto, uma relação dependente apenas da posição foi obtida, escreve-se a relação $\partial^2 u / \partial x^2 = (d^2 U / dx^2) T(t)$ para o espaço e $\partial^2 u / \partial t^2 = U(x) (d^2 T / dt^2)$ correspondente ao tempo.

$$\frac{E}{\rho U} \frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (4.7)$$

Na Eq. 4.7 o lado esquerdo depende apenas da posição (x) e o lado direito somente de (t), seu valor comum é uma constante representada por um número negativo $-\omega^2$.

Logo, reescreve a Eq. 4.7 como duas igualdades separadas.

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2 \rho}{E} U(x) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4.9)$$

A constante ω representa a própria frequência de vibração da barra. O número de onda da barra sujeita a vibração longitudinal $k = \omega \sqrt{\rho/E}$, portanto:

$$U'' - k^2 U = 0 \quad x \in]0, 2l[\quad (4.10)$$

e a solução geral do deslocamento é definida na Eq. 4.11.

$$U = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (4.11)$$

Sendo C_1 e C_2 constantes, determinadas com base nas condições de contorno da barra, em $(x = 0)$, $(x = l)$ e $(x = 2l)$. As constantes serão obtidas com base na Eq. 4.6 no domínio da frequência:

$$EAU'_1 = F_1, \quad EAU'_2 = D(U_2)U_2, \quad EAU'_3 = 0 \quad (4.12)$$

onde $U_1 = U(0)$, $U_2 = U(l)$ e $U_3 = U(2l)$ são os deslocamentos nas respectivas posições da barra. A rigidez dinâmica $D_a = D(U_2) = s_1 \pm (3/4)s_3 U(l)^2$ para a mola e $D_a = D(U_2) = -\omega^2 m + s_1 \pm (3/4)s_3 Z^2$ para o ressonador, sendo $Z = U(l) - U(a)$ e $U(a)$ o deslocamento da massa do absorvedor (posição a), ver seção 3.1.

4.1.1 Vibração livre

Nessa seção a extremidade esquerda não possui força externa atuante, logo, $F_1 = 0$. Deseja-se investigar a influência da não linearidade local na variação das frequências naturais da célula unitária.

Da solução geral para o deslocamento Eq. 4.11 junto as condições de contorno da barra Eq. 4.12, na posição $x = 0$, tem-se $C_2 = 0$. Substituindo C_2 na condição de contorno referente a posição $x = l$, obtém-se:

$$E A k \sin(kl) C_1 = D_a U_2, \quad C_1 = -\frac{D_a}{E A k \sin(kl)} U_2 \quad (4.13)$$

utilizando a Eq. 4.11 determina-se o deslocamento para posição do anexo de rigidez não linear.

$$U_2 = \frac{D_a \cos(kl)}{E A k \sin(kl)} U_2 \quad (4.14)$$

Simplificando os termos U_2 que aparecem.

$$\tan(kl) = \frac{D_a}{EAk} \quad (4.15)$$

Para a célula unitária com a mola não linear, obtém-se a Eq. 4.16:

$$\begin{aligned} \tan(kl) &= \frac{D_a}{EAk} = \frac{s_1}{EAk} \pm \frac{3}{4} \frac{s_3}{EAk} U_2^2 \\ \tan(kl) &= \frac{\gamma_1}{kl} \pm \frac{3}{4} \frac{\gamma_3}{kl} U_2^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo $\gamma_1 = s_1 l / EA$ e $\gamma_3 = s_3 l^3 / EA$ os coeficientes linear e não linear adimensionais da mola. Para o caso linear $\gamma_3 = 0$, a Eq. 4.16 da frequência se reduz.

$$\tan(kl) = \frac{\gamma_1}{kl} \quad (4.17)$$

As curvas obtidas com as variações das frequências naturais, em função do deslocamento são denominadas curvas *backbones*. Novamente dois casos são avaliados $\gamma_3 > 0$ (mola *hardening*) e $\gamma_3 < 0$ (mola *softening*). Ao modelar a célula unitária com ressonador não linear, tem-se a Eq. 4.18:

$$\tan(kl) = -\frac{\omega^2 m}{kl} + \frac{\gamma_1}{kl} \pm \frac{3}{4} \frac{\gamma_3}{kl} Z_2^2 \quad (4.18)$$

e para o caso linear ($\gamma_3 = 0$):

$$\tan(kl) = -\frac{\omega^2 m}{kl} + \frac{\gamma_1}{kl} \quad (4.19)$$

4.1.2 Vibração forçada

As propriedades dinâmicas da célula unitária são descritas por meio da matriz de rigidez dinâmica que relaciona forças e deslocamentos. As respostas são apresentadas como funções no domínio da frequência (FRFs). Condições de contorno são avaliadas junto às equações de deslocamento desenvolvidas nas seções anteriores, assim, escreve-se a igualdade matricial.

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & 2D_1 + D_a & D_2 \\ 0 & D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

As condições de contorno da barra, para extremidade esquerda ($x = 0$) e central ($x = l$), são expressas por:

$$-EAU'_1 = F_1 \quad (4.21)$$

$$-EAU_2' = D_a U_2 \quad (4.22)$$

da solução geral do deslocamento junto a Eq. 4.21, determina-se C_1 e C_2 .

$$-EAcC_2 = F_1, \quad C_2 = -\frac{F_1}{EAk} \quad (4.23)$$

$$-EAc[-C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl)] = D_a U_2, \quad C_1 = \frac{D_a U_2 - F_1 \cos(kl)}{EAk \sin(kl)} \quad (4.24)$$

A solução geral pode ser reescrita substituindo C_1 e C_2 .

$$U(x) = \frac{D_a U_2 - F_1 \cos(kl)}{EAk \sin(kl)} \cos(kx) - \frac{F_1}{EAk} \sin(kx) \quad (4.25)$$

Para determinação dos valores D_1 e D_2 da matriz de rigidez dinâmica, sucede-se para $x = 0$ a condição:

$$D_a U_2 = F_1 \cos(kl) + U_1 EAk \sin(kl) \quad (4.26)$$

e para posição $x = l$:

$$U_2 = \frac{D_a U_2 \cos(kl)}{EAk \sin(kl)} - \frac{F_1}{EAk} [\cos^2(kl) + \sin^2(kl)]$$

$$F_1 = D_a U_2 \cos(kl) - U_2 EAk \sin(kl) \quad (4.27)$$

substituindo a Eq. 4.27 na Eq. 4.21 e com a relação $\sin^2(kl) = 1 - \cos^2(kl)$.

$$F_1 [1 - \cos^2(kl)] = U_1 EAk \sin(kl) \cos(kl) - U_2 EAk \sin(kl)$$

$$EAk \frac{\cos(kl)}{\sin(kl)} U_1 - \frac{EAk}{\sin(kl)} U_2 = F_1 \quad (4.28)$$

Note que a Eq. 4.28 se assemelha a primeira linha da matriz de rigidez dinâmica, com $D_1 U_1 + D_2 U_2 = F_1$. Portanto, os elementos $D_1 = EAk \cot(kl)$ e $D_2 = -EAk / \sin(kl)$ são definidos de acordo com a Eq. 4.28.

Dada a matriz de rigidez dinâmica três equações são provenientes (D_a representa a rigidez do anexo não linear definida anteriormente).

$$D_1 U_1 + D_2 U_2 = F_1, \quad U_1 = \frac{F_1 - D_2 U_2}{D_1} \quad (4.29)$$

$$D_2 U_2 + D_1 U_3 = 0, \quad U_3 = -\frac{D_2 U_2}{D_1} \quad (4.30)$$

$$D_2U_1 + (2D_1 + D_a)U_2 + D_2U_3 = 0 \quad (4.31)$$

Pode-se substituir os valores encontrados para os elementos de rigidez dinâmica D_1 e D_2 .

$$U_1 = \frac{F_1 \sin(kl) + E Ak U_2}{E Ak \cot(kl) \sin(kl)} \quad (4.32)$$

$$U_2 = \frac{E Ak F_1 \cot(kl) \sin(kl)}{2E Ak \cot^2(kl) \sin^2(kl) + D_a \cot(kl) \sin^2(kl) - 2E Ak} \quad (4.33)$$

$$U_3 = \frac{U_2}{\cot(kl) \sin(kl)} \quad (4.34)$$

A partir deste ponto pode-se obter um polinômio dependente da variável de deslocamento que se desejar. Os coeficientes (p_0 , p_1 e p_3) do polinômio definem a função deslocamento para a barra e podem ser determinados, de forma semelhante ao realizado anteriormente, para o caso de 1 grau de liberdade.

$$p_3U^3 + p_2U^2 + p_1U + p_0 = 0 \quad (4.35)$$

Na metodologia polinomial apenas as raízes reais são consideradas, as soluções complexas não apresentam significado físico para essa análise (note que as raízes da equação cúbica representam as amplitudes de deslocamento de um sistema mecânico, o que significa que devem ter valores reais). Em alguns intervalos do gráfico o polinômio produz três raízes reais, e portanto, uma região de frequência onde o deslocamento compartilha três valores diferentes. Para a maioria das regiões da função, a solução apresentará múltiplos valores reais com raízes iguais.

Efeitos de amortecimento estrutural serão considerados posteriormente no Capítulo 5 através de um fator de perda η . Nesse caso, o módulo de Young será complexo, ou seja, $E = E_b(1 + j\eta)$ onde j é a unidade imaginária e E_b o módulo de Young do material da barra. Isso significa que o número de onda também será complexo. Desse modo, emprega-se um algoritmo de continuação por homotopia para solução polinomial utilizando o software Bertini. Por hora, os efeitos de amortecimento foram desprezados.

As funções de resposta com o método polinomial representam o comportamento multimodo (várias ressonâncias) da célula unitária em uma ampla faixa de frequência. A análise de um conjunto de dados agregados a um número arbitrário (n) de fontes não lineares, para um sistema não amortecido, envolve uma equação polinomial da ordem 3^n , cuja solução pode ser complexa. Por exemplo, a avaliação da resposta de um sistema sem considerar o amortecimento com duas e três molas envolve polinômios da ordem 9 e 27, respectivamente, como mostrado por Santo et al. (2020). Em todos os casos, uma determinação analítica dos coeficientes da equação polinomial não é direta por conta do

grande número de coeficientes. A solução do polinômio foi alcançada através da função *roots* no *software* MATLAB.

As respostas obtidas através do método polinomial para o sistema contínuo estão nas Figs. 4.2 e 4.3, para $\gamma_3 > 0$ (mola *hardening*) e $\gamma_3 < 0$ (mola *softening*), respectivamente. A função é dependente do número de onda e comprimento da barra.

A resposta do sistema de parâmetros distribuídos apresenta infinitos picos de ressonância em razão do número infinito de graus de liberdade da análise. Os intervalos destacados (regiões em azul) mostram as faixas de frequência em que coexistem mais de uma solução para o deslocamento.

As linhas azuis mostram que as frequências naturais do sistema aumentam Fig. 4.2(b) e as linhas vermelhas mostram que as frequências naturais diminuem Fig. 4.3(b), quando U_3 aumenta. As frequências de ressonância na curva não linear foram transladadas no intervalo. No caso *hardening* para altas frequências o que gerou alguns ganhos em intervalos de baixa frequência em relação à mola linear.

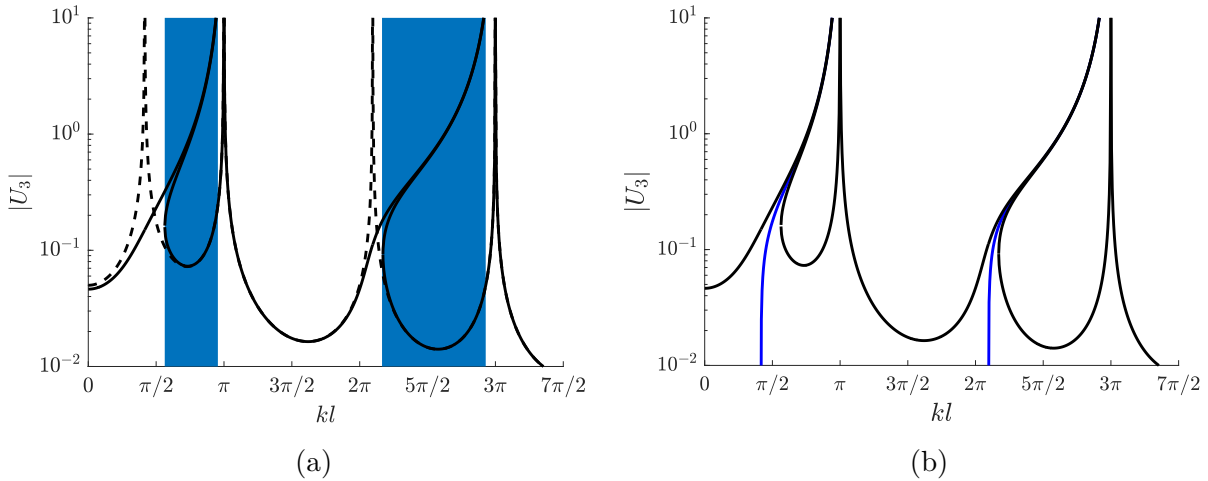


Figura 4.2: Função receptância $kl \mapsto |U_3|$, quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a linha tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear); (b) as linhas azuis contínuas mostram a variação das frequências naturais.

Observe que na Fig. 4.2(a) os valores de deslocamento para o caso não linear se distanciam em relação a linha tracejada (caso linear). Nesse sentido, começam a aparecer bandas em baixa frequência onde os níveis de vibração permanecem um pouco mais atenuados, quando se desloca a função. Tal condição é interessante sobre a ótica de como a rigidez não linear pode influenciar os valores de deslocamento. Essa ideia será mostrada com mais detalhes no Capítulo 5 nas funções de transmissibilidade destacando as regiões de *bandgap* gerados. Nessa etapa os efeitos de amortecimento não foram levados em consideração, os picos de ressonância do sistema atingem valores infinitos.

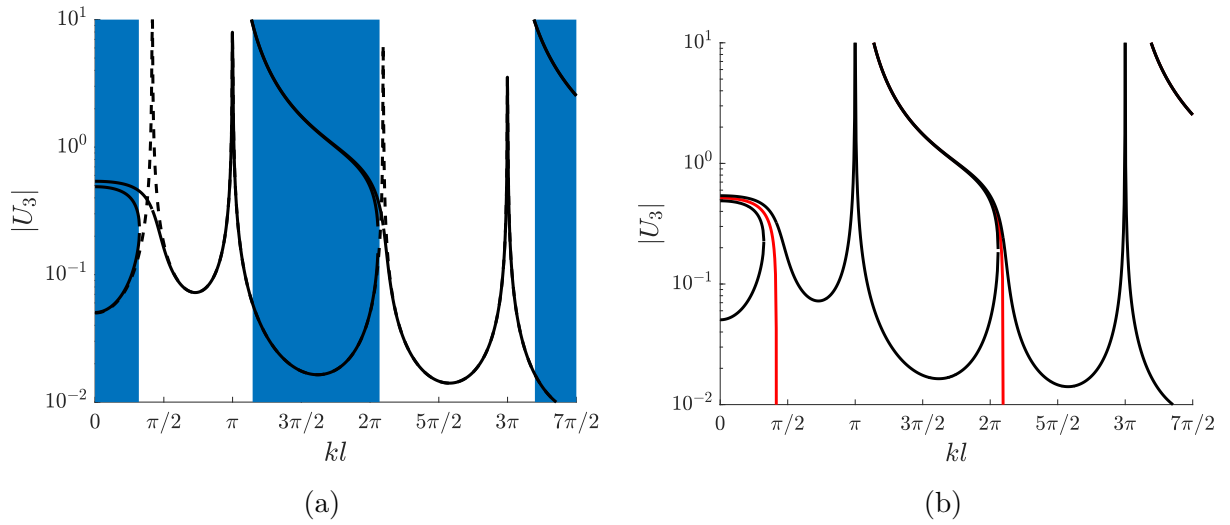


Figura 4.3: Função receptância $kl \mapsto |U_3|$, quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = -10$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a linha tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear); (b) as linhas vermelhas contínuas mostram a variação das frequências naturais.

Observe que para o caso *softening* a rigidez não linear é tomada como negativa.

Nos casos subsequentes um ressonador não linear é anexado. Nesse sentido, uma região de atenuação é gerada no ponto de sintonização do dispositivo, os efeitos não lineares estão presentes.

Novamente os intervalos destacados (regiões em azul) na Fig. 4.4 mostram as faixas de frequência em que coexistem mais de uma solução para o deslocamento. As ressonâncias produzidas pela presença do ressonador foram deslocadas no intervalo devido a não linearidade associada ao dispositivo. As curvas *backbones* são plotadas mostrando o deslocamento das ressonâncias para os dois casos, *hardening* Fig. 4.4 e *softening* Fig. 4.5.

A abordagem polinomial fez uso de soluções de forma fechada da equação de movimento da barra presa a uma mola e um ressonador não linear, o que levou a equações polinomiais cúbicas escalares.

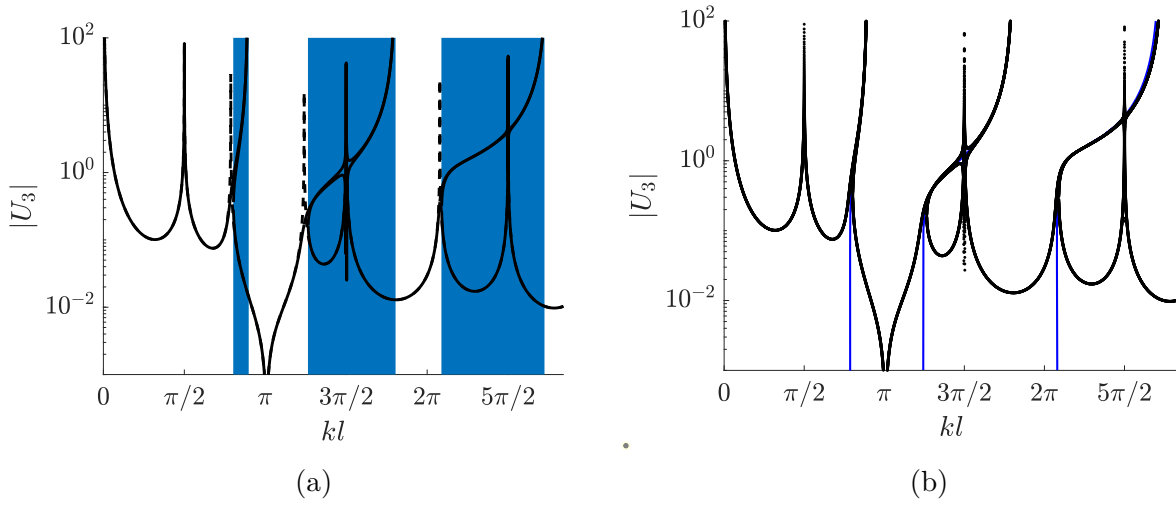


Figura 4.4: Função receptância $kl \mapsto |U_3|$, quando $\mu = 0,1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a curva tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear), (b) as linhas azuis contínuas mostram a variação das frequências naturais.

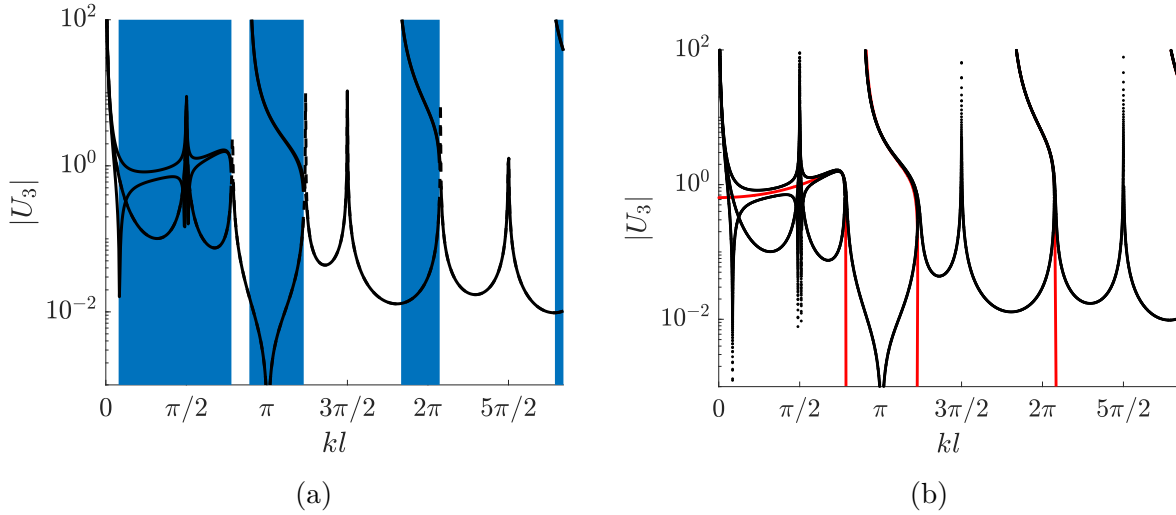


Figura 4.5: Função receptância $kl \mapsto |U_3|$, quando $\mu = 0,1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = -10$ e $F_1 = 0,1$ - linha preta contínua: (a) a curva tracejada mostra a função de resposta quando $\gamma_3 = 0$ (caso linear), (b) as linhas vermelhas contínuas mostram a variação das frequências naturais.

Para destacar a precisão da abordagem proposta, comparações com o método de continuação e numérico serão feitas, para o caso *hardening*, no Capítulo 5. Será mostrado que as curvas de receptância emitidas pelo método polinomial correspondem de perto ao comportamento obtido pelo método de continuação e numérico.

Capítulo 5

Influência da rigidez não linear na função de transmissibilidade

Neste capítulo, os efeitos não lineares na célula unitária (sistema contínuo) são mostrados com base no conceito de transmissibilidade. Mecanismos de amortecimento são incorporados na estrutura sujeita a vibração longitudinal. Os resultados são comparados com o caso linear. A não linearidade é representada por uma função de rigidez dinâmica obtida usando o equilíbrio harmônico de primeira ordem. Cada seção deste capítulo contém as análises e resultados de cada modelo estudado.

5.1 Função transmissibilidade para o caso linear

A célula unitária com ressonador é representada na Fig. 5.1. Aqui é introduzido amortecimento estrutural através de um fator de perda associado ao módulo de elasticidade da barra, portanto, $E = E_b(1 + \eta)$. Em paralelo a mola, um amortecimento viscoso é considerado, sendo c a constante de amortecimento.

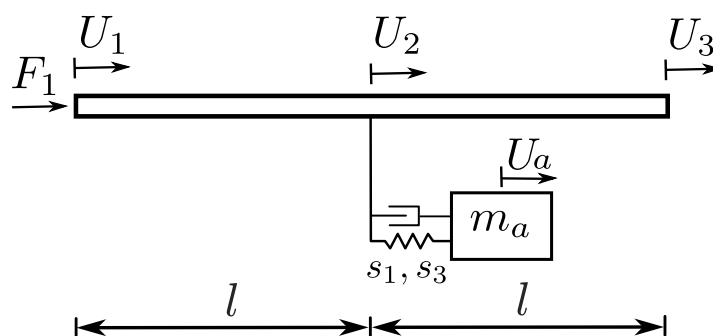


Figura 5.1: Representação da célula unitária do sistema periódico com amortecimento.

A matriz de transmissibilidade da célula unitária relaciona os vetores de forças externas e deslocamentos nos terminais de saída de cada lado (esquerdo e direito).

$$\psi_{\text{dir}} = \mathbf{T}_{\text{cel}} \psi_{\text{esq}} \quad (5.1)$$

Sendo $\psi = [F \ U]^T$ o vetor de estado que define as forças e deslocamentos. Subdividindo a estrutura ao meio, a matriz de transferência $\mathbf{T}_{\text{cel}}$ é calculada considerando a configuração da Fig. 5.1 e pode ser encontrada a partir da matriz de rigidez dinâmica do sistema.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

No esquema da Fig. 5.2 são exemplificadas as transformações entre a admitância, transmissão e impedância, segundo Rubin que serão utilizadas para o caso linear (Rubin, 1967).

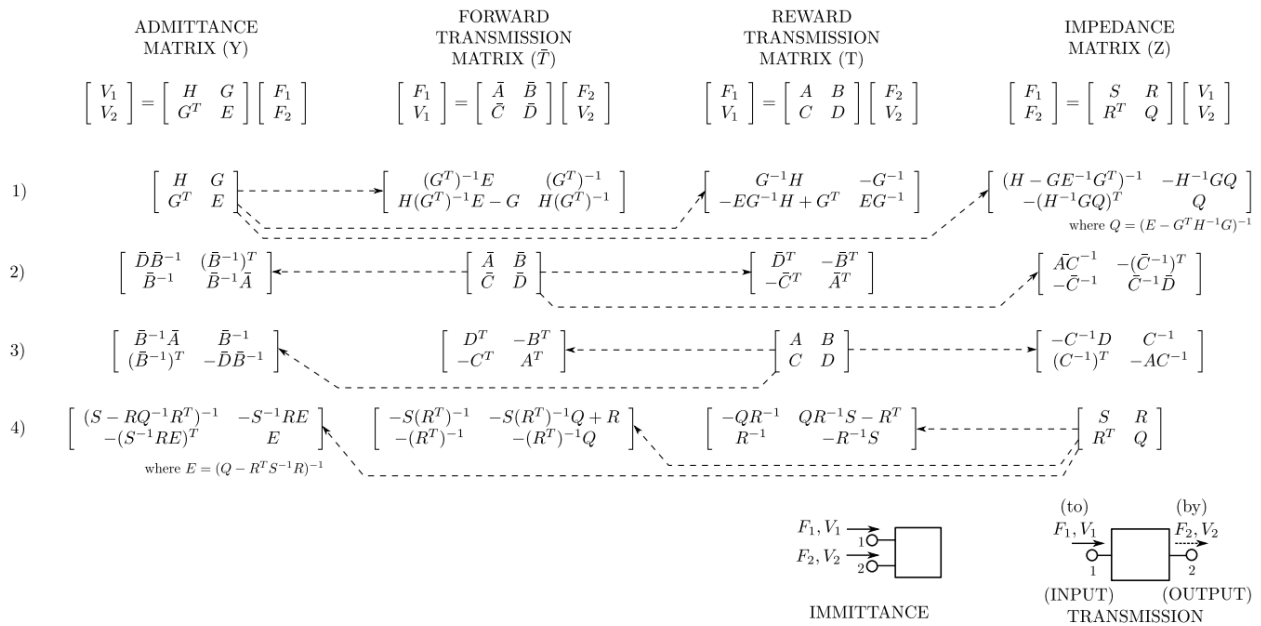


Figura 5.2: Transformações das matrizes de admitância, transmissão e impedância (Rubin, 1967)

Dessa forma pode-se obter a transformação e encontrar a matriz de transmissão da célula unitária, Eq. 5.3.

$$T = \begin{bmatrix} -D_{22}D_{12}^{-1} & D_{22}D_{12}^{-1}D_{11} - D_{21} \\ D_{12}^{-1} & -D_{12}^{-1}D_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1D_2^{-1} & D_1D_2^{-1}D_1 - D_2 \\ D_2^{-1} & -D_2^{-1}D_1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A transmissibilidade da célula unitária é definida como a razão entre o deslocamento no lado direito (final) e esquerdo (início) da estrutura, quando uma força é aplicada no

lado esquerdo. Nesse sentido, a Eq. 5.4 de transmissibilidade pode ser escrita.

$$T_{barra} = \frac{U_3}{U_1} = \frac{1}{T_{celula}(1,1)} \quad (5.4)$$

Quando a célula unitária é simétrica, a transmissibilidade depende apenas do termo da primeira linha e primeira coluna da matriz de transferência, portanto, $T_{barra}(1,1)$. A atenuação de vibrações acontece quando os valores da função de transmissibilidade são menores do que 10^0 ou seja $|T_{barra}| < 1$, isso significa que os deslocamentos no final da barra (lado direito) são menores do que no início da estrutura (lado esquerdo). Tais faixas correspondem a *bandgaps* estruturais por conta da configuração simétrica e periódica do sistema. Quando $|T_{barra}| > 1$, correspondendo a um intervalo onde as ondas podem se propagar sem atenuação (Mead, 1975).

Neste caso, a solução do polinômio característico obtido do problema de autovalor definido pelas matrizes de transferência permitem o cálculo dos autovalores do sistema, resultando nas curvas Fase e Atenuação.

$$\lambda_{(1,2)} = \frac{1}{T} \pm \sqrt{\frac{1}{T^2} - 1} \quad (5.5)$$

Quando o amortecimento é desprezado, T é uma função com valor real. Portanto, se a transmissibilidade $|T| \leq 1$, os dois autovalores são reais, correspondendo a uma banda de atenuação, e quando $|T| > 1$, os dois autovalores tornam-se pares complexos, correspondendo a uma faixa onde as ondas podem se propagar sem atenuação. Em suma, a Eq. 5.5 fornece informações sobre o comportamento da estrutura periódica completa com base na resposta de um elemento de célula unitária.

Para a estrutura anexada à mola linear os valores mínimos da função são dados pela Eq. 5.6.

$$T_m = \left(1 + \left(\frac{s_1}{E A k} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (5.6)$$

Nas Figs. 5.3 e 5.4 os quadrados vermelhos representam o início da frequência de *bandgap*, espaçados de π . Os círculos azuis representam o final da frequência de *bandgap*. Nesse capítulo os resultados são apresentados na unidade de medida decibel (dB).

As regiões destacadas em azul representam os intervalos de *bandgaps* da função de transmissão. Note que eles são determinados pelos quadrados vermelhos (início da frequência de *bandgap*) e círculos azuis (final da frequência de *bandgap*). Nessas regiões a função transmissibilidade em dB apresenta valores menores do que zero (linha pontilhada), o que é equivalente a $|T_{barra}| < 1$, ver Fig. 5.3(c) e (d). Portanto, as faixas de frequência representam regiões onde as ondas não podem se propagar livremente (banda de atenuação) e os deslocamentos no final da estrutura são menores do que a entrada. Para as demais regiões de frequência as ondas podem se propagar sem atenua-

ção na estrutura, correspondendo principalmente aos picos da transmissão. As funções de fase e atenuação acompanham as bandas de atenuação e passagem da transmissão, ver Fig. 5.3(a) e (b). Observe que conforme a frequência aumenta as regiões em destaque (faixas em azul) e os níveis de atenuação (linha preta contínua) vão diminuindo proporcionalmente. Por fim, note que nos pontos onde as curvas das Fig. 5.3(e) e (f) se tocam são responsáveis por determinar o início e fim das regiões de *bandgap* estrutural. Para as Figs. 5.3(a), (c) e (e) a rigidez linear do anexo possui valor $\gamma_1 = 10$. Nas Figs. 5.3(b), (d) e (f) aumentou-se a rigidez linear do anexo para $\gamma_1 = 50$. Note que as regiões de *bandgap* sofreram um proporcional aumento e as faixas de propagação livres de ondas diminuíram. Nesse sentido os níveis de atenuação também aumentaram. Para a estrutura com o ressonador anexado um novo *bandgap* foi gerado na frequência de sintonização do dispositivo. Na zona de atenuação na qual o dispositivo foi sintonizado os níveis de transmissão são muito baixos. Com o aumento da rigidez e massa do ressonador o intervalo de suspensão de ondas fica ainda mais extenso.

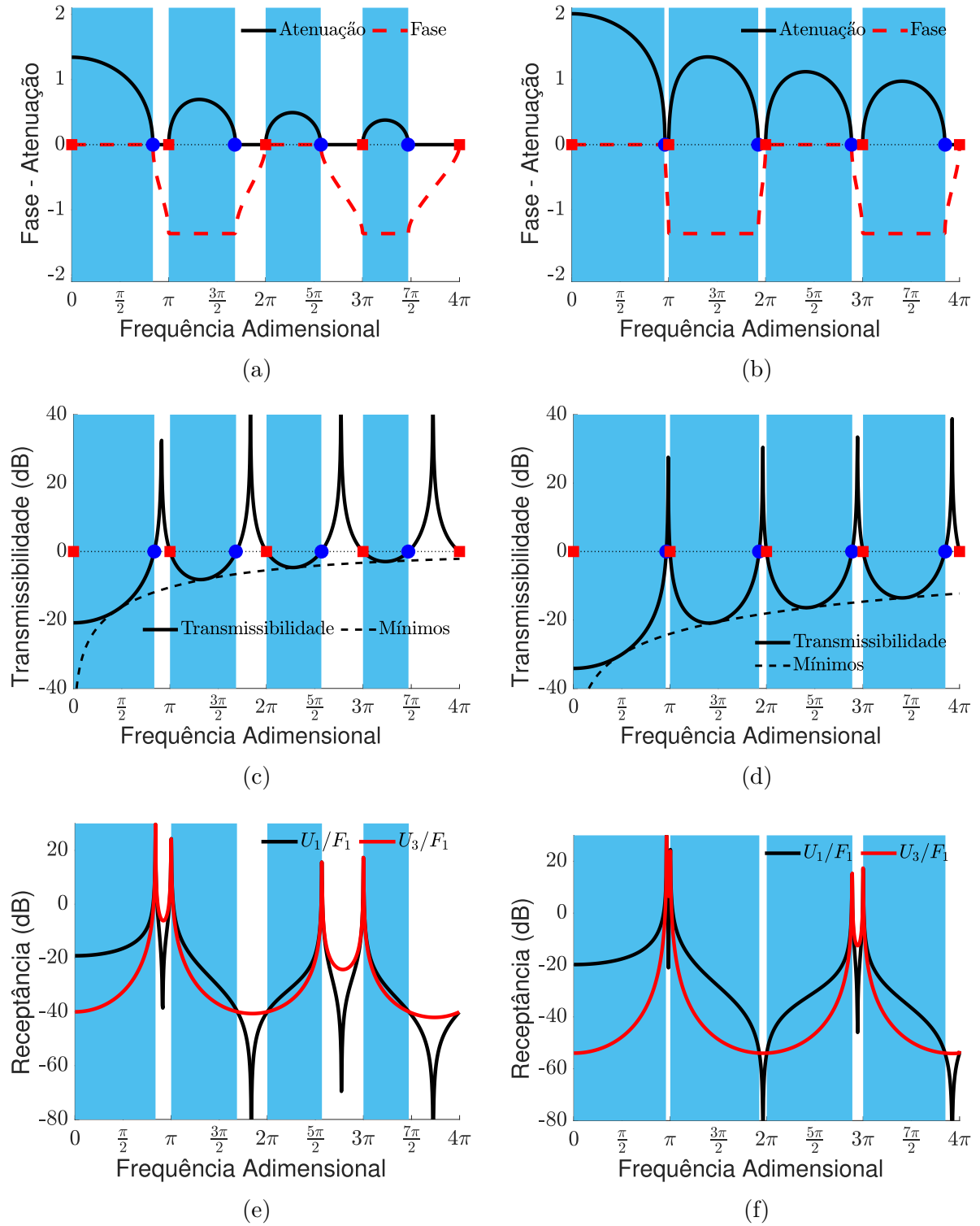


Figura 5.3: Resposta linear: (a) atenuação - linha preta contínua, fase - linha vermelha tracejada, para $\gamma_1 = 10$; (b) para $\gamma_1 = 50$; (c) Transmissibilidade dB (U_3/U_1) - linha contínua, mínimos - linha preta tracejada, para $\gamma_1 = 10$; (d) para $\gamma_1 = 50$; (e) Receptância (U_1/F_1) início da estrutura - linha preta contínua e (U_3/F_1) final da estrutura - linha vermelha contínua, para $\gamma_1 = 10$; (f) para $\gamma_1 = 50$. Quadrados vermelhos representam o início e os círculos azuis o final das frequências de *bandgap*.

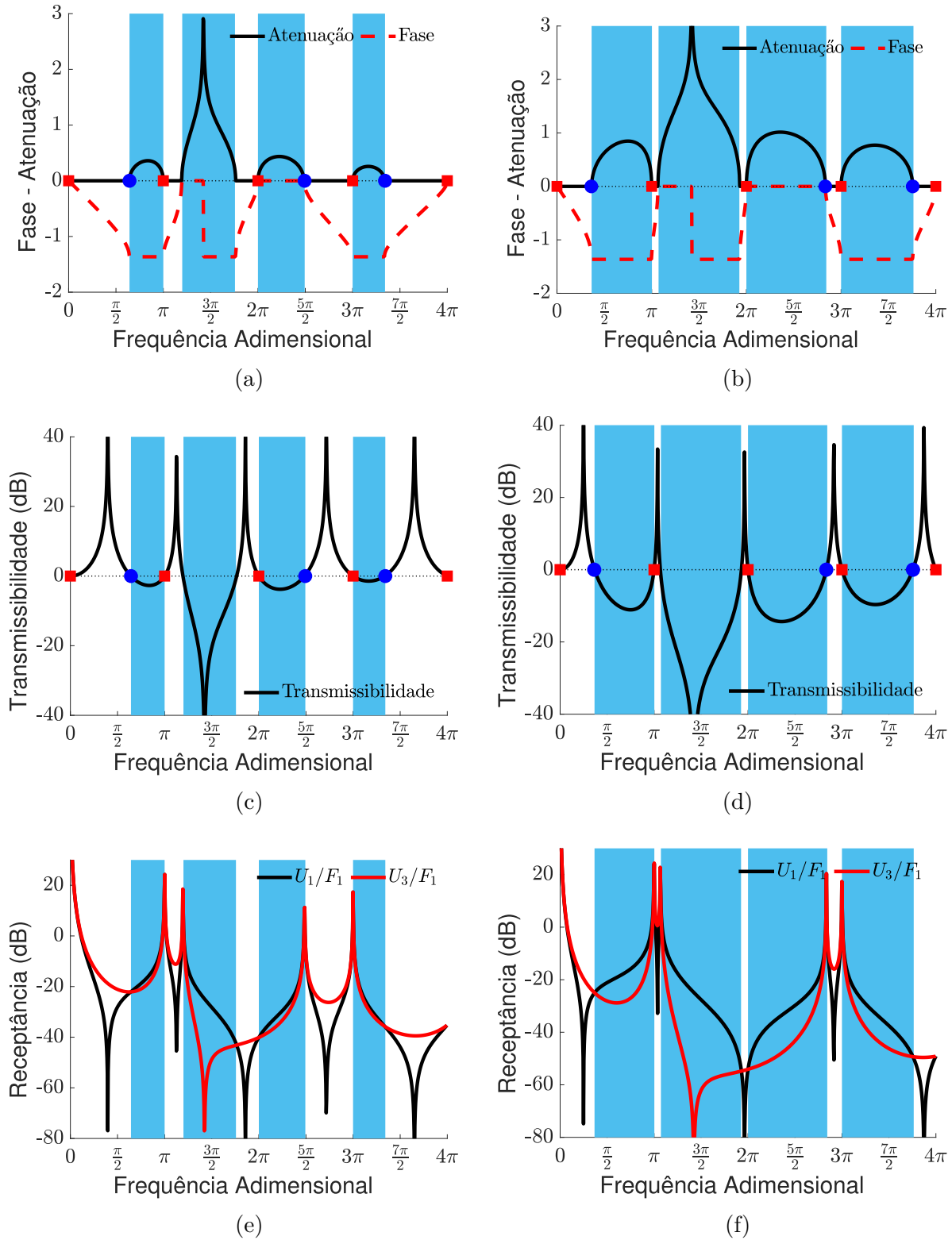


Figura 5.4: Resposta linear: (a) atenuação - linha preta contínua, fase - linha vermelha tracejada, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (b) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$; (c) Transmissibilidade dB (U_3/U_1) - linha contínua, mínimos - linha preta tracejada, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (d) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$; (e) Receptância (U_1/F_1) início da estrutura - linha preta contínua e (U_3/F_1) final da estrutura - linha vermelha contínua, para $\gamma_1 = 10$ e $\mu = 0,5$; (f) para $\gamma_1 = 50$ e $\mu = 2,5$. Quadrados vermelhos representam o início e os círculos azuis o final das frequências de *bandgap*.

As discussões geradas anteriormente para a estrutura acoplada a uma mola linear são válidas para este caso. Na Fig. 5.5 variou-se os parâmetros do anexo linear. Novamente com o aumento da rigidez linear γ_1 as regiões de atenuação aumentaram. Observe que a magnitude do deslocamento diminui na função de transmissão com o aumento de γ_1 . Nesse sentido os possíveis intervalos de *bandgaps* (regiões em que a magnitude do deslocamento fica abaixo da linha pontilhada, zero da função) são amplificados, estendendo as zonas de atenuação. Para o caso com ressonador anexado o efeito é semelhante e o aumento dos intervalos de suspensão foram proporcionais ao aumento da robustez do dispositivo. Contudo, isso implica no acréscimo de massa do absovedor e consequentemente na célula unitária da estrutura, o que muitas das vezes não é viável para soluções de engenharia. Nesse contexto a rigidez não linear associada ao ressonador pode produzir efeitos benéficos amplificando as zonas de controle de vibração sem acréscimo de grande massa na estrutura. Por fim, note que os pontos de início do *bandgap* (quadrados vermelhos) não sofreram alteração com a variação dos parâmetros do anexo linear.

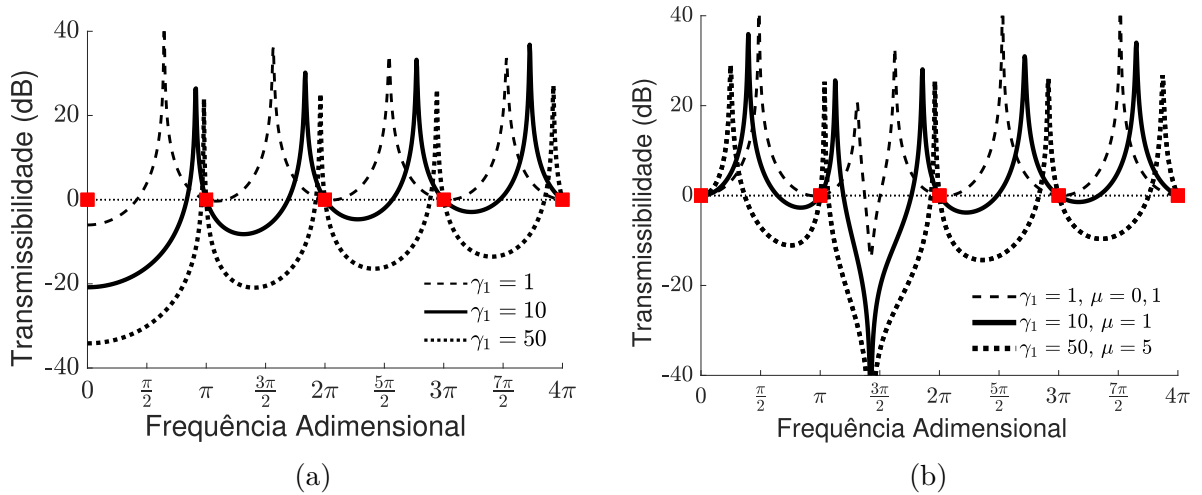


Figura 5.5: Resposta linear com alteração dos parâmetros do anexo: (a) variação da razão de rigidez da mola anexada γ_1 ; (b) variação da razão de rigidez γ_1 e massa μ do absorvedor anexado.

Para o caso não linear o método polinomial foi utilizado para a estrutura sem amortecimento. No caso da célula anexada a uma mola não linear a função Transmissibilidade sofreu efeitos principalmente próximo as ressonâncias, ver Fig. 5.6. A rigidez não linear proporcionou um pequeno aumento na largura da zona de atenuação próxima ao primeiro pico da função de transmissão, contudo nessa região o sistema passa a apresentar três amplitudes possíveis. Observe que os pontos que representam o fim das frequências de *bandgap* não sofreram alteração em comparação com o caso linear, pois estão relacionados somente com a rigidez linear.

A resposta mostrada na Fig. 5.6 foi obtida através do método polinomial.

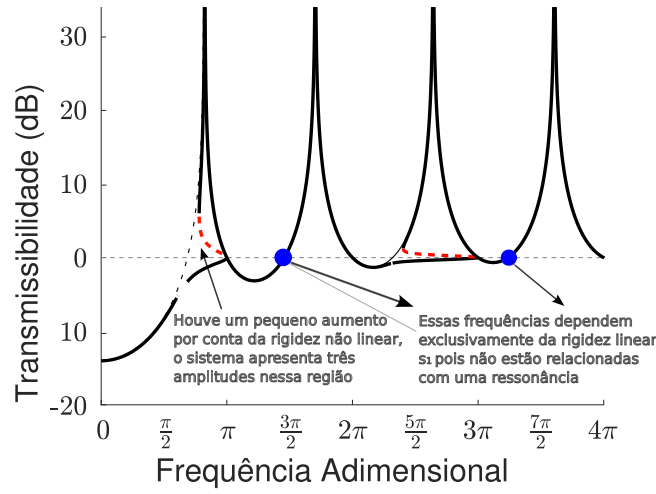


Figura 5.6: Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1000$ - linha preta contínua. A linha tracejada em preto representa o caso linear, a linha tracejada vermelha representa o ramo instável da função. Os círculos azuis mostram o final das frequências de *bandgap*.

5.1.1 Transmissibilidade não linear com amortecimento

A influência não linear na transmissibilidade da célula unitária é avaliada com mais detalhes. O método da matriz de transferência descrito anteriormente não pode ser usado devido à interdependência dos graus de liberdade estrutural. A rigidez do anexo é $D_a = s_1 \pm (3/4)s_3U^2$ para a mola. Nessa etapa o sistema possui mecanismos de amortecimento, portanto $U = Re\{U\} - iIm\{U\}$. A força não linear F_{NL} possui parte real e imaginária para os dois casos (Tatzko and Jahn, 2019).

$$Re\{F_{NL}\} = \frac{3}{4}s_3 \left(Re\{U^3\} + Re\{U\}Im\{U\}^2 \right) \quad (5.7a)$$

$$Im\{F_{NL}\} = \frac{3}{4}s_3 \left(Im\{U^3\} + Im\{U\}Re\{U\}^2 \right) \quad (5.7b)$$

As equações precisam ser separadas em partes reais e imaginárias, o que duplicará o número de igualdades matemáticas. Nesse capítulo, o algoritmo de continuação por homotopia para um sistema de polinômios algébricos não lineares utilizando Bertini (Bates et al., 2013) foi empregado. A vantagem do método em Bertini é que ele pode encontrar soluções isoladas e controla os processos numéricos internamente. Conforme a matriz de rigidez dinâmica da célula unitária, tem-se:

$$D_1U_1 + D_2U_2 = F_1 \quad (5.8a)$$

$$D_2U_1 + 2(D_1 + D_a)U_2 + D_2U_3 + F_{NL} = 0 \quad (5.8b)$$

$$D_2 U_2 + D_1 U_3 = 0 \quad (5.8c)$$

onde $D_1 = E A k \cot(kl)$ e $D_2 = -E A k / \sin(kl)$, $D_a = s_1 - j\omega c$ (parcela linear e amortecimento viscoso do anexo) e F_{NL} é o componente da força devido ao termo não linear que depende do deslocamento. A Eqs. 5.8a a 5.8c devem ser definidas em termos de variáveis complexas e possuem componentes reais e imaginários.

$$D_1 = D_{1(r)} - jD_{1(j)}, \quad D_2 = D_{2(r)} - jD_{2(j)} \quad (5.9a)$$

$$U_1 = U_{1(r)} - jU_{1(j)}, \quad U_2 = U_{2(r)} - jU_{2(j)}, \quad U_3 = U_{3(r)} - jU_{3(j)} \quad (5.9b)$$

Portanto, reescreve-se as equações da forma:

$$D_{1(r)} U_{1(r)} - D_{1(j)} U_{1(j)} + D_{2(r)} U_{2(r)} - D_{2(j)} U_{2(j)} = F_1 \quad (5.10a)$$

$$D_{1(r)} U_{1(j)} + D_{1(j)} U_{1(r)} + D_{2(r)} U_{2(j)} + D_{2(j)} U_{2(r)} = 0 \quad (5.10b)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)} U_{1(r)} - D_{2(j)} U_{1(j)} + 2D_{1(r)} U_{2(r)} - 2D_{1(j)} U_{2(j)} \\ & + D_{a(r)} U_{2(r)} - D_{a(j)} U_{2(j)} + D_{2(r)} U_{3(r)} - D_{2(j)} U_{3(j)} + F_{NL(r)} = 0 \end{aligned} \quad (5.10c)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)} U_{1(j)} + D_{2(j)} U_{1(r)} + 2D_{1(r)} U_{2(j)} + 2D_{1(j)} U_{2(r)} \\ & + D_{a(r)} U_{2(j)} + D_{a(j)} U_{2(r)} + D_{2(r)} U_{3(j)} + D_{2(j)} U_{3(r)} + F_{NL(j)} = 0 \end{aligned} \quad (5.10d)$$

$$D_{2(r)} U_{2(r)} - D_{2(j)} U_{2(j)} + D_{1(r)} U_{3(r)} - D_{1(j)} U_{3(j)} = 0 \quad (5.10e)$$

$$D_{2(r)} U_{2(j)} + D_{2(j)} U_{2(r)} + D_{1(r)} U_{3(j)} + D_{1(j)} U_{3(r)} = 0 \quad (5.10f)$$

para o caso do sistema anexado a mola não linear $D_{a(r)} = s_1$ e $D_{a(j)} = \omega c$. A força F_{NL} é escrita.

$$F_{NL(r)} = \frac{3}{4} s_3 \left(U_{2(r)}^3 + U_{2(r)} U_{2(j)}^2 \right) \quad (5.11a)$$

$$F_{NL(j)} = \frac{3}{4} s_3 \left(U_{2(j)}^3 + U_{2(j)} U_{2(r)}^2 \right) \quad (5.11b)$$

As Figs. 5.7 e 5.8 mostram os resultados obtidos com amortecimento para o caso linear (mola puramente linear) e não linear (caso *hardening*). A magnitude da trans-

missibilidade está em decibel (dB).

A Fig. 5.7(a) mostra a transmissibilidade $|U_3/U_1|$ em dB para a célula (com amortecimento) anexada a mola não linear. A função de transmissibilidade é viável para demonstrar como a variação de alguns dos parâmetros pode alterar as regiões de atenuação no intervalo de frequência. A rigidez não linear gerou alguns saltos no deslocamento próximos a ressonância, um deles é mostrado em detalhes na Fig. 5.7(b). Essas regiões já puderam ser notadas na Fig. 5.6, obtida com o método polinomial, que evidenciou regiões que apresentam mais de uma amplitude de deslocamento. Na Fig. 5.7(c) nota-se a influência não linear próximo as ressonâncias, com a inclinação da função de resposta com aumento da frequência. Observe que tal efeito produz os saltos que são observados nas Figs. 5.7(a) e (b).

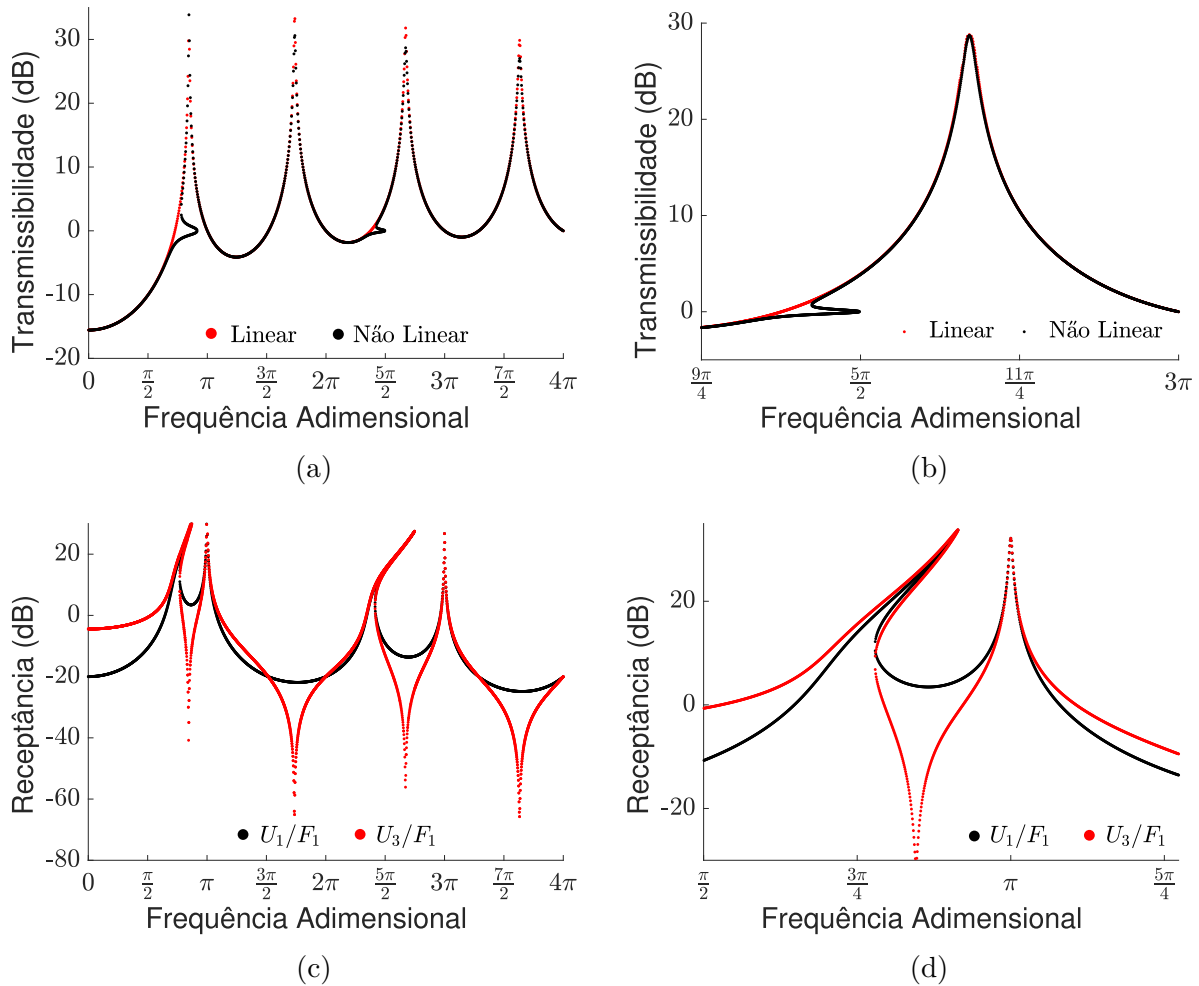


Figura 5.7: Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 100$, $\eta = 0,01$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.

Na Fig. 5.8 aumentou-se a parcela de rigidez não linear em 10 vezes, $\gamma_3 = 100$ para

$\gamma_3 = 1000$, sem alteração dos demais parâmetros. Houve influência ainda maior nos intervalos próximos a ressonância e preexistentes na análise anterior. Desse modo o efeito não linear provocou um pequeno deslocamento da magnitude da função nessa região Fig. 5.8(b). Em comparação com o caso linear há um pequeno benefício podendo estender um pouco a região de atenuação. Os saltos que ocorrem principalmente no intervalo de alta frequência são ainda maiores. Novamente a função compartilha três amplitudes de deslocamento. O resultado é semelhante ao obtido com o método polinomial.

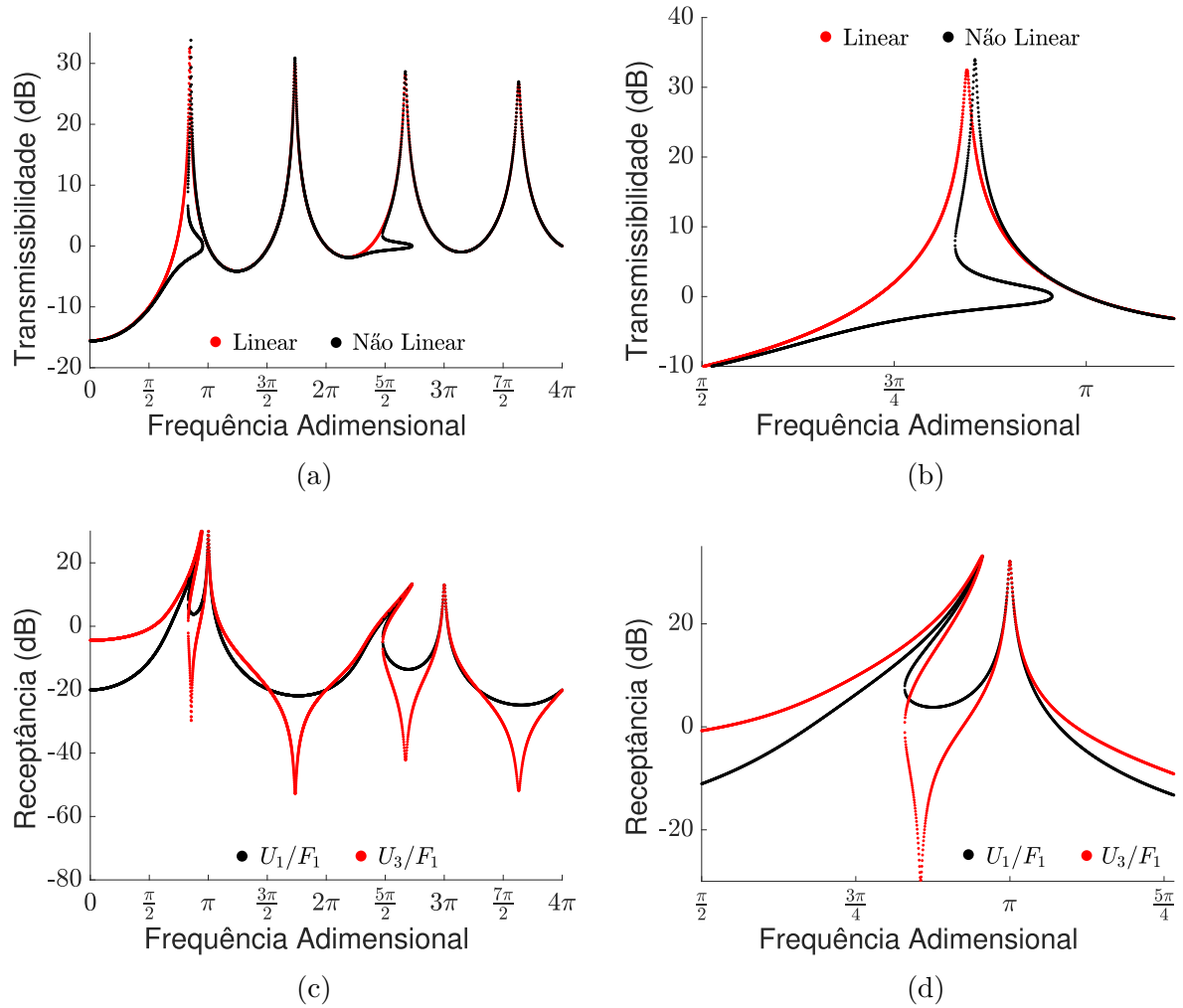


Figura 5.8: Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1000$, $\eta = 0,01$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.

Quando a célula possui um ressonador anexado o deslocamento é relativo $Z = U_2 - U_a$, sendo $Z = \text{Re}\{Z\} - i\text{Im}\{Z\}$. Para este caso $D_a = -\omega^2 m + s_1 \pm (3/4)s_3 Z^2$. A força gerada devido ao dispositivo não linear, é portanto.

$$Re\{F_{NL}\} = \frac{3}{4}s_3 \left(Re\{Z^3\} + Re\{Z\}Im\{Z\}^2 \right) \quad (5.12a)$$

$$Im\{F_{NL}\} = \frac{3}{4}s_3 \left(Im\{Z^3\} + Im\{Z\}Re\{Z\}^2 \right) \quad (5.12b)$$

As equações de deslocamento são obtidas por meio da matriz de rigidez dinâmica do sistema, semelhante ao demonstrado anteriormente. Para este caso as equações também são divididas em variáveis reais e imaginárias.

$$D_{1(r)}U_{1(r)} - D_{1(j)}U_{1(j)} + D_{2(r)}U_{2(r)} - D_{2(j)}U_{2(j)} = F_1 \quad (5.13a)$$

$$D_{1(r)}U_{1(j)} + D_{1(j)}U_{1(r)} + D_{2(r)}U_{2(j)} + D_{2(j)}U_{2(r)} = 0 \quad (5.13b)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)}U_{1(r)} - D_{2(j)}U_{1(j)} + 2D_{1(r)}U_{2(r)} - 2D_{1(j)}U_{2(j)} \\ & + D_{a(r)}U_{2(r)} - D_{a(j)}U_{2(j)} - D_{a(r)}U_{a(r)} + D_{a(j)}U_{a(j)} + D_{2(r)}U_{3(r)} \\ & - D_{2(j)}U_{3(j)} = F_{NL(r)} \end{aligned} \quad (5.13c)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)}U_{1(j)} + D_{2(j)}U_{1(r)} + 2D_{1(r)}U_{2(j)} + 2D_{1(j)}U_{2(r)} \\ & + D_{a(r)}U_{2(j)} + D_{a(j)}U_{2(r)} - D_{a(r)}U_{a(j)} - D_{a(j)}U_{a(r)} + D_{2(r)}U_{3(j)} \\ & + D_{2(j)}U_{3(r)} = F_{NL(j)} \end{aligned} \quad (5.13d)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)}U_{1(r)} - D_{2(j)}U_{1(j)} + 2D_{1(r)}U_{2(r)} - 2D_{1(j)}U_{2(j)} \\ & D_{Ma}U_{a(r)} + D_{a(r)}U_{a(r)} - D_{a(j)}U_{a(j)} \\ & - D_{a(r)}U_{2(r)} + D_{a(j)}U_{2(j)} + D_{1(r)}U_{3(r)} - D_{1(j)}U_{3(j)} \\ & = F_{NL(r)} \end{aligned} \quad (5.13e)$$

$$\begin{aligned} & D_{2(r)}U_{1(j)} + D_{2(j)}U_{1(r)} + 2D_{1(r)}U_{2(j)} + 2D_{1(j)}U_{2(r)} \\ & D_{Ma}U_{a(j)} + D_{a(r)}U_{a(j)} + D_{a(j)}U_{a(r)} \\ & - D_{a(r)}U_{2(j)} - D_{a(j)}U_{2(r)} + D_{1(r)}U_{3(j)} + D_{1(j)}U_{3(r)} \\ & = F_{NL(j)} \end{aligned} \quad (5.13f)$$

$$D_{2(r)}U_{2(r)} - D_{2(j)}U_{2(j)} + D_{1(r)}U_{3(r)} - D_{1(j)}U_{3(j)} = 0 \quad (5.13g)$$

$$D_{2(r)}U_{2(j)} + D_{2(j)}U_{2(r)} + D_{1(r)}U_{3(j)} + D_{1(j)}U_{3(r)} = 0 \quad (5.13h)$$

Para o ressonador $D_{Ma} = -m_a\omega^2$, $D_{a(r)} = s_1$ e $D_{a(j)} = \omega c$. A força F_{NL} é escrita.

$$F_{NL(r)} = \frac{3}{4}s_3 \left(Z_{2(r)}^3 + Z_{2(r)}Z_{2(j)}^2 \right) \quad (5.14a)$$

$$F_{NL(j)} = \frac{3}{4}s_3 \left(Z_{2(j)}^3 + Z_{2(j)}Z_{2(r)}^2 \right) \quad (5.14b)$$

As Fig. 5.9 a 5.11 mostram os resultados obtidos com amortecimento para o caso linear e não linear para célula com ressonador. Na Fig. 5.9(a) a transmissibilidade $|U_3/U_1|$ em dB para a célula (com amortecimento) com um ressonador não linear. A presença do ressonador gerou um *bandgap* na frequência de sintonização do dispositivo.

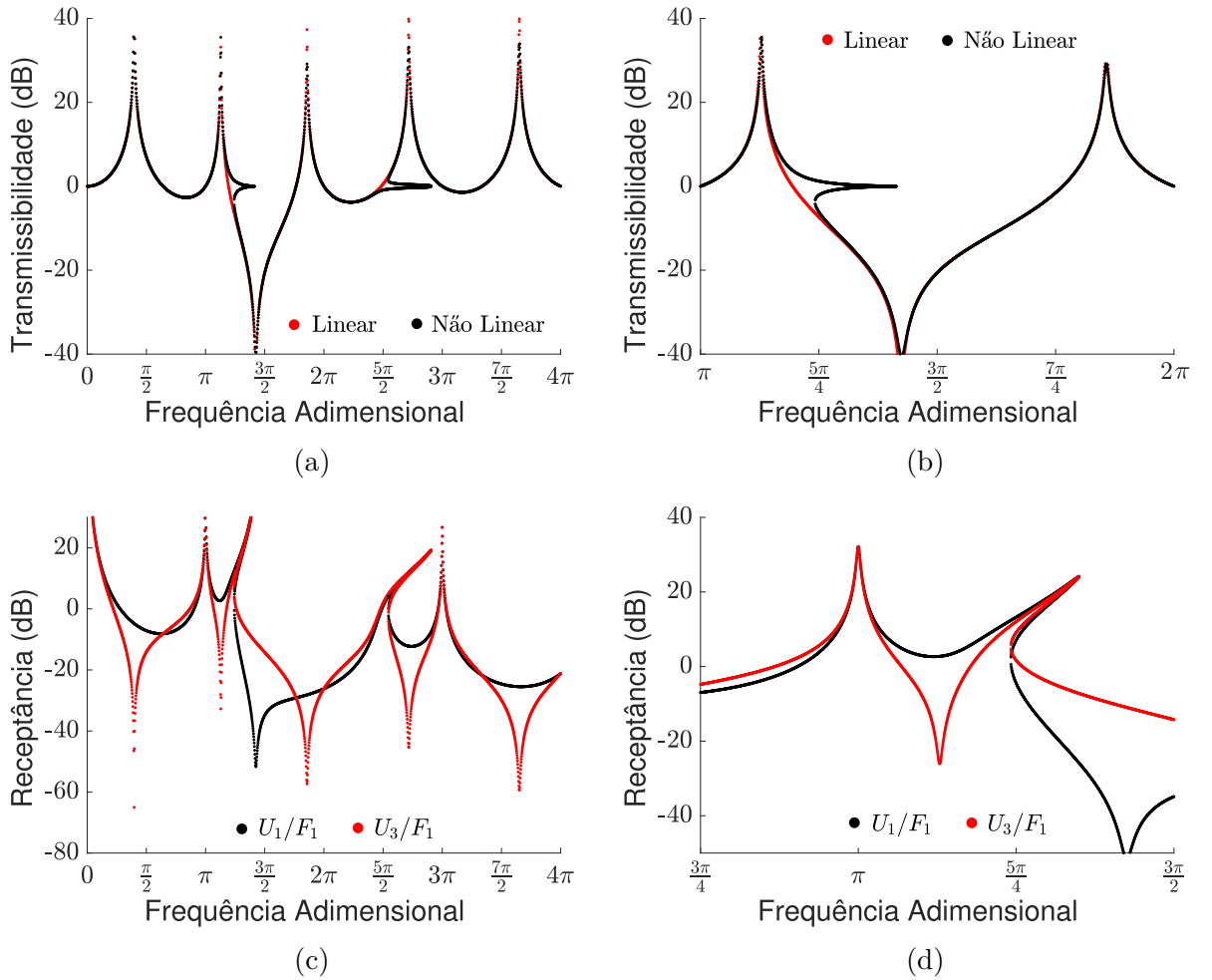


Figura 5.9: Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$, $\gamma_3 = 100$, $\eta = 0,01$ e $\beta = 0,05$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.

A rigidez não linear associada provocou alguns saltos no deslocamento próximos à ressonância, mostrado em detalhes na Fig. 5.9(b).

Na Fig. 5.10 aumentou-se a parcela de rigidez não linear em 10 vezes, $\gamma_3 = 100$ para $\gamma_3 = 1000$, sem alteração dos demais parâmetros. O efeito não linear foi ainda maior nos intervalos próximos a ressonância, contudo ainda sem benefícios para região de atenuação. Os saltos em alta frequência são ainda maiores. Nessa região a resposta começa se tornar menos previsível. Nos próximos casos foi alterada a frequência de sintonização do ressonador para verificar se há ganhos. O dispositivo foi sintonizado para atuar numa região de mais baixa frequência.

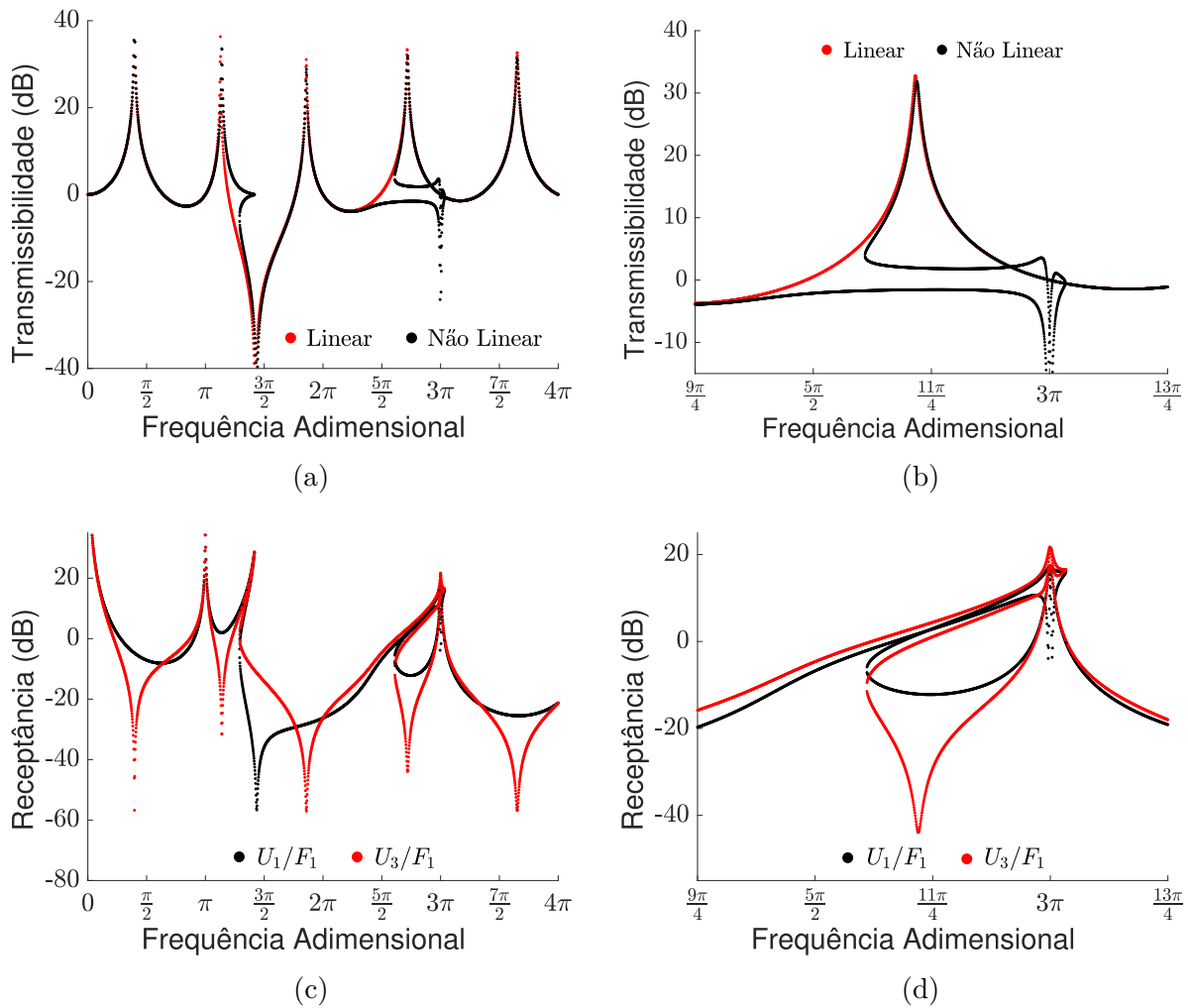


Figura 5.10: Resposta não linear, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$, $\gamma_3 = 1000$, $\eta = 0,01$ e $\beta = 0,05$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta; (b) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função transmissibilidade; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha; (d) detalhe do efeito não linear em um intervalo da função receptância.

Com o ressonador sintonizado em baixa frequência, houve um aumento na largura de *bandgap* em comparação com o caso linear, ver faixa em destaque na Fig. 5.11 (região em azul). Observe que esse efeito é interessante, pois a rigidez não linear associada ao

absorvedor pode amplificar a faixa de atenuação. Isso significa que é possível melhorar a zona de suspensão com a mesma massa utilizada no absorvedor linear. Nesse sentido, para conseguir efeito de controle semelhante para o ressonador linear seria preciso aumentar sua massa. Além disso, pode-se deslocar a faixa de atenuação conforme se aumentou a rigidez não linear. Observe que na Fig. 5.11(b) a região de atenuação gerada pelo caso não linear é bem maior quando comparado ao caso linear. Essas constatações são interessantes pois para estruturas leves muitas vezes adicionar massa não é uma opção.

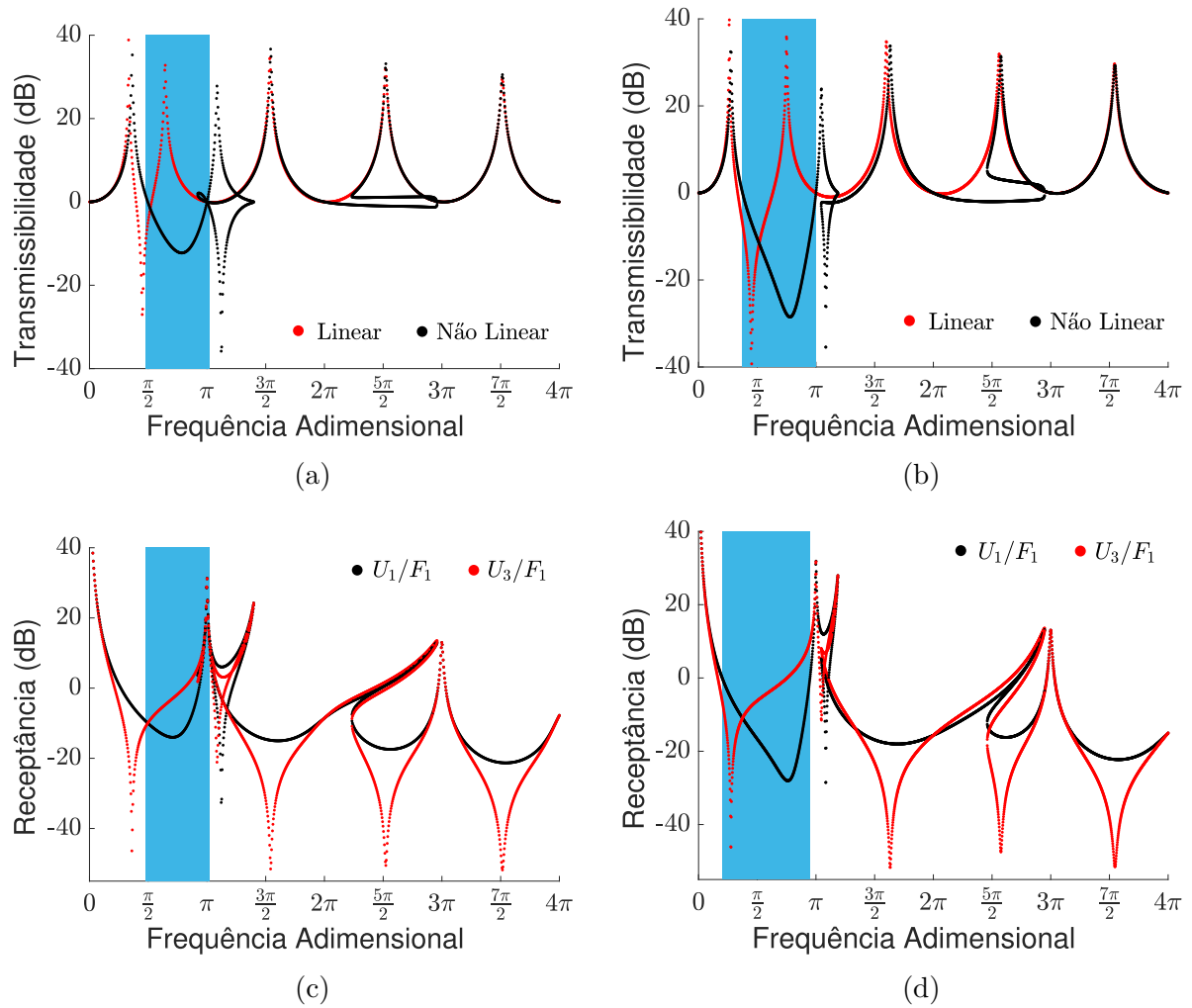


Figura 5.11: Resposta não linear quando $\gamma_3 = 1000$: (a) transmissibilidade linear - linha pontilhada vermelha e não linear linha pontilhada preta, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (b) para $\gamma_1 = 3$, $\mu = 1,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (c) receptância (U_1/F_1) - linha pontilhada preta e (U_3/F_1) linha pontilhada vermelha, para $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0,5$ e $\gamma_1 = 1000$; (d) para $\gamma_1 = 3$, $\mu = 1,5$ e $\gamma_1 = 1000$.

5.2 Implementação Método dos Elementos Finitos

Nessa seção a estrutura contínua é aproximada por um número finito de graus de liberdade (Rao, 2017). O sistema real é substituído por vários elementos considerados como membros estruturais do contínuo e esses elementos são interconectados nos nós. A ideia é que as soluções individuais possam convergir para a solução exata da estrutura total.

A primeira etapa do método FEM é o pré-processamento, que consiste em subdividir o modelo nos elementos (aqui a quantidade de elementos foi encontrada empiricamente). A segunda etapa é a formulação do elemento, o desenvolvimento de equações que os descrevem, nesta dissertação foi utilizado o método Galerking. O terceiro passo é obter a matriz global a partir das matrizes dos elementos. A penúltima etapa é a resolução das equações e, por fim, a quinta etapa é o pós-processamento, para análise dos resultados. Um elemento da barra é mostrado na Fig. 5.12.

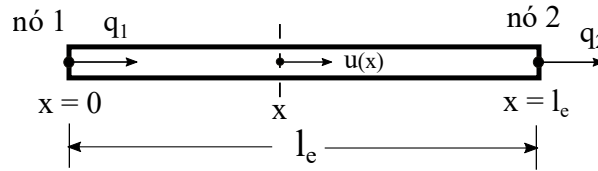


Figura 5.12: Representação de um elemento da barra e seus respectivos nós.

Sendo q_i os deslocamentos nodais e l_e o comprimento do elemento. A deformação interna no elemento será $\delta = \mathbf{N} \mathbf{q}$, onde $\mathbf{N}$ é a matriz de funções de forma do elemento e $\mathbf{q}$ o vetor de deslocamentos nodais.

Considerando a barra unidirecional com seção transversal constante, tem-se a Eq. 5.15 para a matriz de massa, construída por integração com base no comprimento do elemento ($x = 0$ a $x = l_e$):

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_{x=0}^{x=l_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{N}) \mathbf{d}x = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

sendo $\mathbf{N}^T$ a transposta da matriz funções de forma. A tensão no elemento é $\sigma = E \mathbf{B} \mathbf{q}$, onde E é o módulo de Young e $\mathbf{B}$ a matriz de deslocamento deformação. Desse modo, a rigidez do elemento de barra é apresentada na Eq. 5.16:

$$\mathbf{S}_e = EA \int_{x=0}^{x=l_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d}x = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

sendo $\mathbf{B}^T$ a transposta da matriz deslocamento deformação. As matrizes $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ são definidas para barra uniforme:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - x/l_e & x/l_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1/l_e & 1/l_e \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

um modelo de amortecimento proporcional da matriz de rigidez foi adotado $\mathbf{C}_e = \beta \cdot \mathbf{S}_e$, onde β é o fator de amortecimento da barra.

$$\mathbf{C}_e = \beta EA \int_{x=0}^{x=l_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A Eq. 5.19 geral do movimento é descrita na forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{nl} \quad (5.19)$$

sendo $\mathbf{u}$ o vetor de deslocamentos axiais, $\mathbf{M}$ a matriz de massa, $\mathbf{S}$ a matriz de rigidez e $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento geral. O vetor $\mathbf{f}$ representa as forças externas e $\mathbf{f}_{nl}$ o comportamento não linear do anexo.

As matrizes gerais são obtidas considerando o número de elementos correspondentes. Como a função é não linear as simulações acontecem no domínio do tempo, utiliza-se de métodos de integração numérica. Reescrevendo as equações de movimento da barra na forma de espaço de estados, tem-se a Eq. 5.20:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_1 \\ \dot{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{NL1} \\ \mathbf{F}_{NL2} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

sendo $\dot{\mathbf{Y}}_1$ e $\dot{\mathbf{Y}}_2$ os vetores de estado dos sistema, $\mathbf{O}$ a matriz de zeros e $\mathbf{I}$ a matriz identidade. A simulação numérica no domínio do tempo avalia a função de resposta nos máximos valores de deslocamento. Esses valores devem ser integrados para representar a resposta em frequência da estrutura. A rotina *ODE45* implementa um esquema de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's) pelo método de Runge-Kutta. Utilizou-se o *software* MATLAB.

Na Fig. 5.13 os dois métodos empregados foram capazes de descrever com precisão o deslocamento estrutural em todo o intervalo. O método FEM integra as regiões onde existe apenas uma solução. Na resposta obtida com Bertini existem regiões onde há mais de uma solução determinada. As influências não lineares na função deslocamento foram representadas em ambas as respostas.

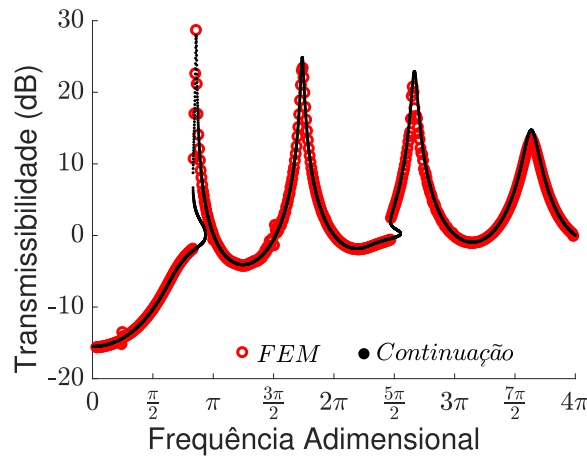


Figura 5.13: Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 1000$. Círculos vermelhos representam a resposta pelo método dos elementos finitos (FEM); as linhas pontilhadas em preto pelo método da continuação (Bertini).

Novamente, os dois métodos empregados foram capazes de descrever com precisão o deslocamento estrutural em todo o intervalo, agora para o ressonador não linear. Na resposta Bertini há regiões onde existe mais de uma solução devido a não linearidade do ressonador, ver Fig. 5.14.

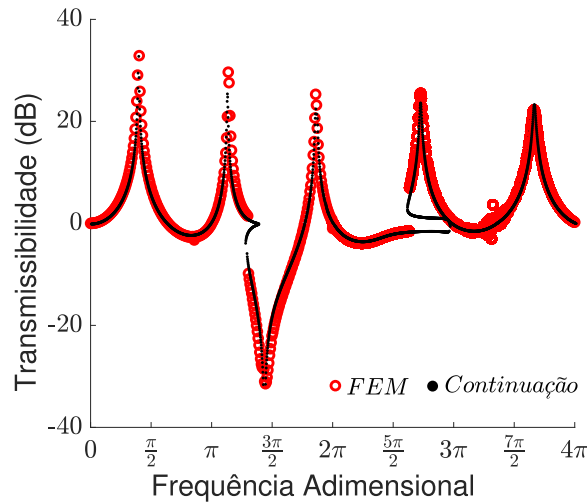


Figura 5.14: Transmissibilidade quando $\gamma_1 = 10$, $\gamma_3 = 1000$ e $\mu = 0,5$. Círculos vermelhos representam a resposta pelo método dos elementos finitos (FEM); as linhas pontilhadas em preto pelo método da continuação (Bertini).

Em suma, as repostas obtidas pelo método polinomial, continuação por homotopia e método numérico convergiram.

Capítulo 6

Considerações finais

A resposta harmônica de uma célula unitária sujeita a vibração longitudinal foi investigada. Foram empregados como forma de solução o método polinomial e o método numérico, ambos usados para prever o comportamento não linear da célula numa ampla faixa de frequência, dentro da qual várias ressonâncias puderam ser observadas. O método polinomial usa soluções de forma fechada da equação de movimento resultando em equações polinomiais escalares. O sistema possui um anexo de rigidez não linear, podendo ser uma mola pura ou um ressonador. O método se mostrou eficiente para modelar a resposta dinâmica da célula unitária, sendo possível identificar as regiões onde coexistem mais de uma solução de deslocamento. Curvas de receptância para rigidez tipo *hardening* e *softening* foram discutidas.

Simulações numéricas foram realizadas, comparando os resultados com os obtidos pelo método analítico. Para isso, utilizou-se do método de Runge-Kutta para calcular a resposta em frequência. Desse modo, pode-se validar os resultados obtidos por meio das equações polinomiais. A resposta que levou em consideração uma formulação segundo a teoria de sistemas contínuos (equações exatas de deslocamento) pode representar as infinitas ressonâncias por utilizar a solução exata da equação de onda.

Com o emprego da rigidez não linear as frequências de ressonância do sistema puderam ser transladadas para intervalos de frequências mais altas. Desse modo, podem ser criados intervalos de controle em baixa frequência onde os níveis de vibração se mantêm atenuados comparado ao caso linear. Tal fato pode ser melhor avaliado nas funções de transmissão da célula, com aumento da largura de *bandgap*.

Na sequência apresentou-se um estudo sobre os efeitos da rigidez não linear em estruturas periódicas com base no conceito de transmissibilidade de uma única célula da estrutura finita. Ambas as configurações de arranjo (mola pura e ressonador) foram estudadas comparando os resultados com o caso linear. O conceito de transmissibilidade está diretamente relacionado ao diagrama de dispersão de uma estrutura infinita. Nessa etapa, efeitos de amortecimento estavam presentes e foi empregado o algoritmo de continuação para um sistema de polinômios algébricos não lineares utilizando o software

Bertini.

Para a mola não linear, o deslocamento das ressonâncias resultou em um pequeno ganho em algumas regiões da função transmissibilidade. Contudo, algumas adversidades aparecem na resposta de frequência, onde saltos podem ocorrer.

Para a estrutura com um ressonador anexado foi possível gerar um vale no intervalo de sintonização do dispositivo, atenuando as oscilações nessa faixa de frequência.

Quando o absorvedor foi sintonizado numa frequência mais baixa observou-se um aumento na região de *bandgap*. Esse efeito foi amplificado pela não linearidade associada ao dispositivo provocando expansão na faixa de atenuação, quando comparado com o caso linear. Os resultados obtidos são interessantes para a área de pesquisa de metaestruturas principalmente pelo controle em baixa frequência, faixa usual para engenharia.

Por fim, também foi implementado o método de elementos finitos não linear. Com base nas comparações, notou-se que ambas abordagens analítica e numérica se mostraram muito precisas principalmente próximo as ressonâncias. No caso dos elementos finitos, conforme se aumenta o número de elementos a análise torna-se mais precisa, contudo aumenta-se o tempo computacional. A implementação do método de elementos finitos pode abrir a possibilidade de se avaliar estruturas periódicas mais complexas, aumentando-se o número de não linearidades locais, nos trabalhos futuros. A abordagem analítica permitiu compreender de forma mais rápida a resposta de geometrias mais simples em relação a análise numérica. Assim, o método analítico proporciona informações físicas (análise paramétrica) que o método numérico não proporciona de forma rápida. Portanto, esta investigação contribuiu para a compreensão do que pode ser feito para melhorar o controle de vibração em uma estrutura periódica analisando elementos de células simples. Métodos variados foram empregados nas análises e validados para investigação de parâmetros não lineares.

6.1 Trabalhos futuros

Como propostas futuras para o seguimento da pesquisa referente a ressonadores não lineares, podemos citar:

1. Estudo de estruturas com maior número de ressonadores não lineares anexados (aumento do número de células).
2. Avaliação da resposta obtidas por cada método com esse aumento das não linearidades.
3. Estudo de pontos ótimos de sintonização do ressonador visando aumento do intervalo de *bandgap*.

6.2 Contribuições

Dois eventos acadêmicos durante o desenvolvimento da pesquisa:

FELIPE, A. A.; GONCALVES, P. J. P. Estudo da influência de rigidez não linear em estruturas periódicas. In: COBEM, 2023, Florianópolis, SC. 28th International Congress of Mechanical Engineering, 2023.

FELIPE, F. A.; GONCALVES, P. J. P. Estudo da influência de rigidez não linear em estruturas periódicas. In: Seminário de pós-graduação em engenharia mecânica, 2022, Bauru, São Paulo.

Referências Bibliográficas

- Aguilar, M., Gitler, S., and Prieto, C. (2002). *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Springer Science & Business Media.
- Bates, D. J., Sommese, A. J., Hauenstein, J. D., and Wampler, C. W. (2013). *Numerically solving polynomial systems with Bertini*. SIAM.
- Brennan, M., Kovacic, I., Carrella, A., and Waters, T. (2008). On the jump-up and jump-down frequencies of the duffing oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5):1250–1261.
- Carrella, A., Brennan, M., and Waters, T. (2007). Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *Journal of sound and vibration*, 301(3-5):678–689.
- Carrella, A. and Ewins, D. (2011). Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3):1011–1027.
- Casalotti, A., El-Borgi, S., and Lacarbonara, W. (2018). Casalotti, arnaldo and el-borgi, sami and lacarbonara, walter. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 98:32–42.
- Chen, J.-S., Sharma, B., and Sun, C. (2011). Dynamic behaviour of sandwich structure containing spring-mass resonators. *Composite Structures*, 93:2120–2125.
- Ding, C.-L. and Zhao, X.-P. (2011). Multi-band and broadband acoustic metamaterial with resonant structures. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(21):215–402.
- do Valle, K. N. F. et al. (2012). Métodos numéricos de euler e runge-kutta.
- Edalath, S., Kukreti, A. R., and Cohen, K. (2013). Enhancement of a tuned mass damper for building structures using fuzzy logic. *Journal of Vibration and Control*, 19(12):1763–1772.

- Enikov, E. T., Kedar, S. S., and Lazarov, K. V. (2005). Analytical model for analysis and design of v-shaped thermal microactuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 14(4):788–798.
- Fang, X., Chuang, K.-C., Jin, X., and Huang, Z. (2018). Band-gap properties of elastic metamaterials with inerter-based dynamic vibration absorbers. *Journal of Applied Mechanics*, 85(7):2120–2125.
- Gao, F., Wu, Z., Li, F., and Zhang, C. (2019). Numerical and experimental analysis of the vibration and band-gap properties of elastic beams with periodically variable cross sections. *Waves in Random and Complex Media*, 29(2):299–316.
- Gilat, A. and Subramaniam, V. (2009). *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. Bookman Editora.
- Gonçalves, P., Brennan, M., and Cleante, V. (2021). Predicting the stop-band behaviour of finite mono-coupled periodic structures from the transmissibility of a single element. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 154:107–512.
- Hobeck, J. D. and Inman, D. J. (2015). Magnetoelastic metastructures for passive broadband vibration suppression. In *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2015*, volume 9431, page 943119. International Society for Optics and Photonics.
- Hobeck, J. D., Laurant, C., and Inman, D. J. (2015). 3d printing of metastructures for passive broadband vibration suppression. In *20th International Conference on Composite Materials, Denmark, Copenhagen*, pages 19–24.
- Holmes, C e Holmes, P. (1981). Second order averaging and bifurcations to subharmonics in duffing’s equation. *Journal of Sound and Vibration*, 78(2):161–174.
- Hou, Z. and Assouar, B. M. (2008). Modeling of lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method. *Physics Letters A*, (12):2091–2097.
- Hu, S.-t. (1959). *Homotopy theory*. Academic press.
- Huang, H., Sun, C., and Huang, G. (2009). On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 47(4):610–617.
- Huang, H.-H., Lin, C.-K., and Tan, K.-T. (2016). Attenuation of transverse waves by using a metamaterial beam with lateral local resonators. *Smart Materials and Structures*, 25(8):085027.

- Hussein, M. I., Leamy, M. J., and Ruzzene, M. (2014). Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4).
- Kargarnovin, M., Younesian, D., Thompson, D., and Jones, C. (2005). Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads. *Computers & Structures*, 83(23-24):1865–1877.
- Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J.-C., and Vakakis, A. F. (2009). Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194.
- Kevorkian, J. and Cole, J. D. (2013). *Perturbation methods in applied mathematics*, volume 34. Springer Science & Business Media.
- Khajehtourian, R. and Hussein, M. I. (2014). Dispersion characteristics of a nonlinear elastic metamaterial. *Aip Advances*, 4(12):124–308.
- Kovacic, I. and Brennan, M. J. (2011). *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons.
- Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., and Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical review letters*, 71(13):2022.
- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C. T., and Sheng, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *science*, 289(5485):1734–1736.
- Mead, D. (1975). Wave propagation and natural modes in periodic systems: Ii. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1):19–39.
- Mickens, R. (2001). Mathematical and numerical study of the duffing-harmonic oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 244(3):563–567.
- Milton, G. W. and Willis, J. R. (2007). On modifications of newtons second law and linear continuum elastodynamics. In *Proceedings of the royal society of london A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 463, pages 855–880. The Royal Society.
- Nayfeh, A. H. and Mook, D. T. (2008). *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons.
- Nirenberg, L. (1983). Variational and topological methods in nonlinear problems. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 39, pages 89–124.

- Pai, P. F. (2010). Metamaterial-based broadband elastic wave absorber. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 21(5):517–528.
- Pai, P. F., Peng, H., and Jiang, S. (2014). Acoustic metamaterial beams based on multi-frequency vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79(5):195–205.
- Rana, R. and Soong, T. (1998). Parametric study and simplified design of tuned mass dampers. *Engineering structures*, 20(3):193–204.
- Rao, S. S. (2017). *The finite element method in engineering*. Butterworth-heinemann.
- Reichl, Katherine K e Inman, D. J. (2017). Lumped mass model of a 1d metastructure for vibration suppression with no additional mass. *Journal of Sound and Vibration*, 403:75–89.
- Rubin, S. (1967). Mechanical immittance-and transmission-matrix concepts. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 41(5):1171–1179.
- Santo, D., Balthazar, J., Tusset, A., Piccirilo, V., Brasil, R., and Silveira, M. (2018). On nonlinear horizontal dynamics and vibrations control for high-speed elevators. *Journal of Vibration and Control*, 24(5):825–838.
- Santo, D. R., Mencik, J.-M., and Gonçalves, P. (2020). On the multi-mode behavior of vibrating rods attached to nonlinear springs. *Nonlinear Dynamics*.
- Tatzko, S. and Jahn, M. (2019). On the use of complex numbers in equations of nonlinear structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 126:626–635.
- Vick, J. W. (2012). *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, volume 145. Springer Science & Business Media.
- Wang, G., Wen, J., and Wen, X. (2005). Quasi-one-dimensional phononic crystals studied using the improved lumped-mass method: Application to locally resonant beams with flexural wave band gap. *Physical Review B*, 73(10):104–302.
- Wang, P., Krasavin, A. V., Liu, L., Jiang, Y., Li, Z., Guo, X., Tong, L., and Zayats, A. V. (2022). Molecular plasmonics with metamaterials. *Chemical Reviews*, (19):15031–15081, Volume = 122, Publisher = ACS Publications.
- Wang, T., Sheng, M.-P., and Qin, Q.-H. (2016a). Multi-flexural band gaps in an euler-bernoulli beam with lateral local resonators. *Physics Letters A*, 380(4):525–529.
- Wang, Y.-Z., Li, F.-M., and Wang, Y.-S. (2016b). Influences of active control on elastic wave propagation in a weakly nonlinear phononic crystal with a monoatomic lattice chain. *International Journal of Mechanical Sciences*, 106:357–362.

- Wen, J., Wang, G., Yu, D., Zhao, H., Liu, Y., and Wen, X. (2008). Study on the vibration band gap and vibration attenuation property of phononic crystals. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 51(1):85–99.
- Wen, S., Xiong, Y., Hao, S., Li, F., and Zhang, C. (2020). Enhanced band-gap properties of an acoustic metamaterial beam with periodically variable cross-sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, 166:105–229.
- Worden, K. and Tomlinson, G. (2019). *Nonlinearity in structural dynamics: detection, identification and modelling*. CRC Press.
- Xiao, Y., Wen, J., and Wen, X. (2012). Longitudinal wave band gaps in metamaterial-based elastic rods containing multi-degree-of-freedom resonators. *New Journal of Physics*, 14(3):033–042.
- Xu, Y., Zhou, X., Wang, W., Wang, L., Peng, F., and Li, B. (2016). On natural frequencies of non-uniform beams modulated by finite periodic cells. *Physics Letters A*, 380(40):3278–3283.
- Yu, D., Liu, Y., Wang, G., Cai, L., and Qiu, J. (2006). Low frequency torsional vibration gaps in the shaft with locally resonant structures. *Physics Letters A*, 348:410–415.
- Zhou, J., Wang, K., Xu, D., and Ouyang, H. (2017). Multi-low-frequency flexural wave attenuation in euler–bernoulli beams using local resonators containing negative-stiffness mechanisms. *Physics Letters A*, 381(37):3141–3148.
- Zhu, R., Liu, X., Hu, G., Sun, C., and Huang, G. (2014). A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 403:2759–2773.

Apêndice A

Apêndice

Nesse capítulo algumas partes dos programas utilizados para obtenção das respostas são apresentadas.

A.1 Método polinomial Matlab

As principais funções em Matlab para construção da resposta com utilização do método polinomial são exemplificadas nessa seção. O polinômio é gerado e a função *roots* responsável pela extração de suas raízes.

```
% This program will be used for an analytical evaluation of  
the response of the bar attached to a nonlinear absorber.  
% The algebraic manipulation of the dynamic stiffness matrix  
of the system results in a polynomial whose roots can be  
extracted and the response functions  
  
% Bar parameters  
E = 1;           % Young's modulus  
A = 1;           % Cross-sectional area  
l = 1;           % Bar length  
rho = 1;         % Density  
volbar = A*l;    % Volume  
  
% Absorber parameters  
ma = 0.1*rho*volbar; % Absorber mass  
s1 = 1;          % Linear stiffness portion  
s3 = 0.001;      % Nonlinear stiffness portion  
F = 1*E*A/l;     % External Force
```

```

% Frequency Range
omega = 0.01*pi:0.002*pi:4*pi;

for ii=1:length(omega)

    w = omega(ii);          % frequency
    k = w*sqrt(E/rho);      % wavenumber
    kii(ii) = k;

    % Dynamic stiffness elements
    D1=E*A*k*cot(k*l);
    D2=-E*A*k/sin(k*l);

    % Polynomial obtained with the dynamic stiffness matrix
    % of the system.
    % The equations are written in the Mathematical Modeling
    % section of the report
    poly = [(3*D2^2*s3)/(2*D1*ma*w^2)-(3*D1*s3)/(2*ma*w^2)+(3*s3
        )/4
        0
        (2*D2^2*s1)/(D1*ma*w^2)-(2*D1*s1)/(ma*w^2)+s1-(2*D2
            ^2)/D1+2*D1
            (D2*F)/D1];

    % Roots command, in the polynomial obtained in relation
    % to the relative shift z
    z = roots(poly);

    % Equations described in the Mathematical Modeling
    % section
    u3 = -(D2.*u2)./D1;
end

```

A.1.1 Exemplos de respostas obtidas pelo método polinomial Matlab

Com a utilização do método polinomial em Matlab foi possível gerar as funções de resposta em frequência para estrutura anexada a uma mola Fig. A.1 e um ressonador Fig. A.2 não linear. A Fig. A.1(a) representa o deslocamento da posição U_3 para o caso

hardening e a Fig. A.1(b) para o caso *softening*.

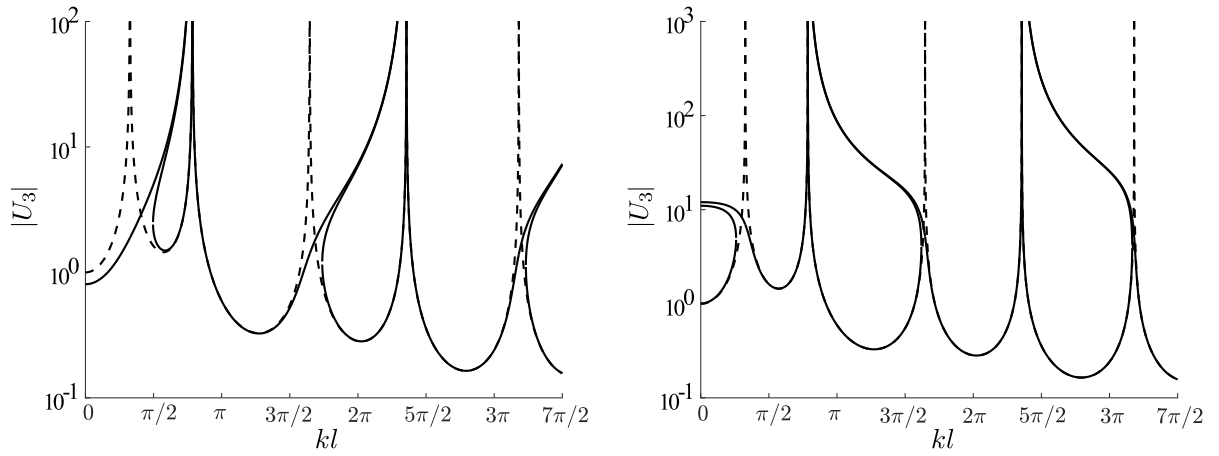


Figura A.1: Resposta linear (linha tracejada) e não linear (linha contínua) pelo método polinomial, célula com uma mola anexada: (a) caso *hardening*; (b) caso *softening*.

Na Fig. A.2(a) a célula está anexada a um ressonador não linear e representa o deslocamento da posição U_3 . A Fig. A.2(b) mostra a função transmissibilidade. Ambas as figuras são para o caso *hardening*.

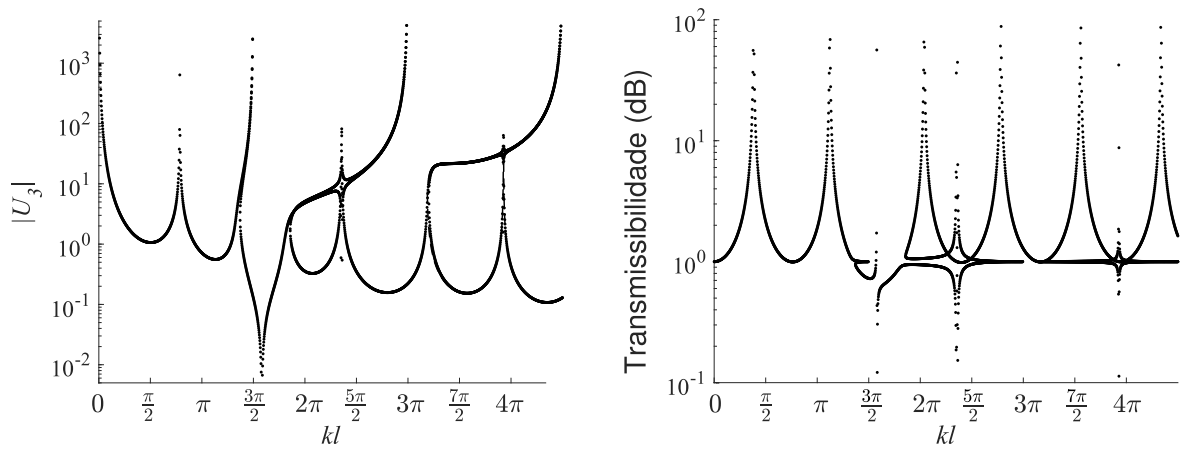


Figura A.2: Resposta linear (linha tracejada) e não linear (linha contínua) pelo método polinomial, célula com ressonador anexado: (a) receptância; (b) transmissibilidade.

A.2 Desenvolvimento pacote Bertini no Matlab

As principais funções em Matlab para construção da resposta com utilização de continuação por homotopia são exemplificadas nessa seção. Foi utilizado o software Bertini para aproximação das funções.

```
%% frequency range in rad/s
ws = linspace(1e-1,4*pi,1e2); % frequency range (rad/s)

%% matrix coefficients definition
k = ws(ii)*sqrt(rho/E);
kii(ii) = k;

D1 = E*A*k*cot(k*l);
D2 = -E*A*k/sin(k*l);
D1r = real(D1);
D1i = imag(D1);
D2r = real(D2);
D2i = imag(D2);

w = ws(ii);
DL1r = s1;
DL1i = w*c1;
DM1r = -m1*w^2;
DM1i = 0;

%% nonlinear force parts (r = real / i = imaginary)
FNLAr = (3/4)*s3*((U2r-UAr)*(U2r-UAr)*(U2r-UAr)+(U2r-UAr
)*(U2i-UAi)*(U2i-UAi));
FNLAi = (3/4)*s3*((U2i-UAi)*(U2i-UAi)*(U2i-UAi)+(U2i-UAi
)*(U2r-UAr)*(U2r-UAr));

%% equations (from wXmaxima)
EQ1r = D2r*U2r-D2i*U2i+D1r*U1r-D1i*U1i-F1;
EQ1i = D2i*U2r+D2r*U2i+D1i*U1r+D1r*U1i;

EQ2r = -DL1r*UAr+DL1i*UAi+D2r*U3r-D2i*U3i+DL1r*U2r+2*D1r
*U2r-DL1i*U2i-2*D1i*U2i+D2r*U1r-D2i*U1i+FNLAr;
EQ2i = -DL1i*UAr-DL1r*UAi+D2i*U3r+D2r*U3i+DL1i*U2r+2*D1i
*U2r+DL1r*U2i+2*D1r*U2i+D2i*U1r+D2r*U1i+FNLAi;
```

```

EQ3r = DM1r*UAr+DL1r*UAr-DM1i*UAI-DL1i*UAI+D1r*U3r-D1i*
      U3i-DL1r*U2r+D2r*U2r+DL1i*U2i-D2i*U2i-FNLAr;
EQ3i = DM1i*UAr+DL1i*UAr+DM1r*UAI+DL1r*UAI+D1i*U3r+D1r*
      U3i-DL1i*U2r+D2i*U2r-DL1r*U2i+D2r*U2i-FNLAi;

EQ4r = D1r*U3r-D1i*U3i+D2r*U2r-D2i*U2i;
EQ4i = D1i*U3r+D1r*U3i+D2i*U2r+D2r*U2i;

%% bertini solution
poly_system =
BertiniLab('variable_group',[U1r;U1i;U2r;U2i;UAr;UAI;U3r
;U3i], ...
'function_def',[EQ1r; EQ1i; EQ2r; EQ2i; EQ3r; EQ3i; EQ4r
; EQ4i]);

poly_system = poly_system.solve;
end

```

A.3 Desenvolvimento método FEM no Matlab

As principais funções em Matlab para construção da resposta com utilização do método numérico são exemplificadas. O método de Runge-Kutta de quarta ordem foi empregado.

```
%Bar attached to a non-linear absorber
%Non-linear Finite Element Method (numerical integration).

%      1          2          3      ...      n-1          n
%      +-----+-----+-----+-----+-----+
%      |          |          |      ...      |          |
%      +-----+-----+-----+-----+-----+
%      ELEM1      ELEM2      ...      ELEMN

%-----
ne = 40;          % numbers of elements
Le = L/ne;        % length of each element

% Absorber parameters
s1 = 1;          % linear portion of attachment stiffness
ma = 0.1;        % absorber mass

Ke = E*A/Le * [1 -1;-1 1]; % Stiffness matrix K
Me = rho*A*Le/6 * [2 1;1 2]; % Mass matrix M

%Integration of the number of structural elements
for e = 1:ne
    KGb(e:e+1,e:e+1) = KGb(e:e+1,e:e+1) + Ke;
    MGb(e:e+1,e:e+1) = MGb(e:e+1,e:e+1) + Me;
end

% mass, stiffness and damping matrix
KG = KGb+KA;      % Stiffness matrix
MG = MGb+MA;      % Mass matrix
CG = beta*KG;     % Damping matrix

[Phi,lam] = eig(KG,MG)
wn = diag(sqrt(lam)) % natural frequency
```

```

F = zeros(ne+1,1);           % force matrix
F(1) = 1;                    % external force

u0 = zeros(2*(ne+2),1); % displacement matrix

%-----
t = linspace(0,1000,1000);    % oscillation time
ws = linspace(1e-3,7,200);    % oscillation frequency

for ii =1:length(ws);
    w = ws(ii);

    E = E0*(1+j*w*eta);       % Damped modulus
    k = w*sqrt(rho/E);         % wavenumber

    % Dynamic Stiffness Elements
    D1 = E*A*k*cot(k*l);
    D2 = -E*A*k/sin(k*l);

    % Dynamic Stiffness Element Absorber
    Da = -w^2*ma*s1/(s1-w^2*ma);

    % Dynamic Stiffness Matrix
    DD = [D1 D2 0;
           D2 2*D1+Da D2;
           0 D2 D1];

    % Displacement Matrix (linear case)
    UU = inv(DD)*[1;0;0];
    U3(ii) = UU(3);           %Displacement position U3

    % ODE45 function (non-linear case)
    [t,y] = ode45(@(t,u0) bar_abs(t,u0,w,param,beta,MG,KG,CG
        ,F,ne),t,u0);
    des = y(floor(end*.9):end,ne+1);
    Umax3(ii) = max(des-mean(des)); % maximum
        displacements
end

```


A.3.1 Cálculo dos deslocamentos para o método FEM

```

%System state function
%function for dynamic calculation of displacements.
function u = bar_abs(t,u0,w,param,beta,MG,KG,CG,F,ne)

y = zeros(2*(ne+2),1); % state vector
F = zeros(ne+2,1);      % vector of external forces

I = eye(ne+2);          % Identity Matrix
O = zeros(ne+2);        % Matrix of Zeros

%-----
% State Matrices
AM = [O, I; -inv(MG)*(KG), -inv(MG)*CG];
B = [O; inv(MG)];

%-----
% Non-linear force matrix.
Fn1 = zeros((ne+2),1);

% Non-linear portion related to the spring restoring force
Fn1((ne/2)+1) = -s3*(u0((ne/2)+1)-u0(ne+2))^3; %non-linear
Fn1((ne+2)) = s3*(u0((ne/2)+1)-u0(ne+2))^3; %reaction

% Displacement (Integrated with the ODE45 routine)
u = AM*u0+B*F+B*Fn1; % Equation of states
end

```

A.3.2 Exemplos de respostas obtidas pelo método FEM no Matlab

Com a utilização do método numérico em Matlab foi possível gerar as funções de resposta em frequência para estrutura anexada a uma mola Fig. A.3 e a um ressonador não linear Fig. A.4 e A.5.

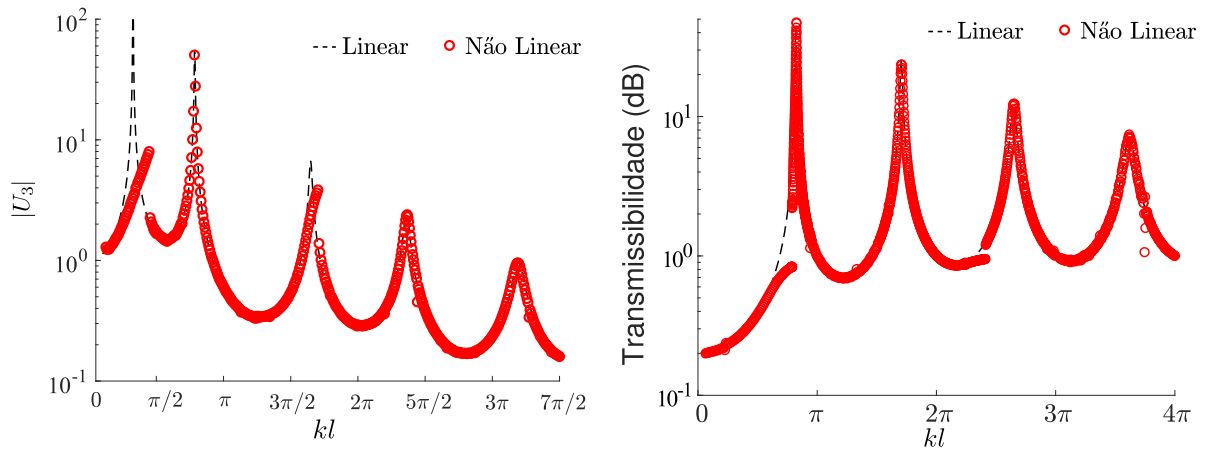


Figura A.3: Resposta linear e não linear pelo método FEM célula com uma mola anexada (*hardening*): (a) receptância; (b) transmissibilidade.

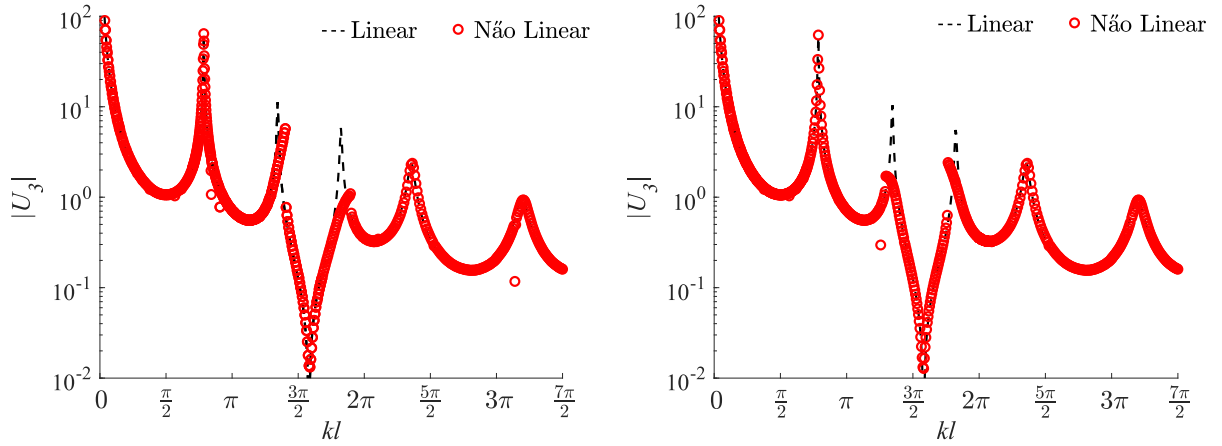


Figura A.4: Resposta linear e não linear pelo método FEM célula com um ressonador anexado: (a) caso *hardening*; (b) caso *softening*.

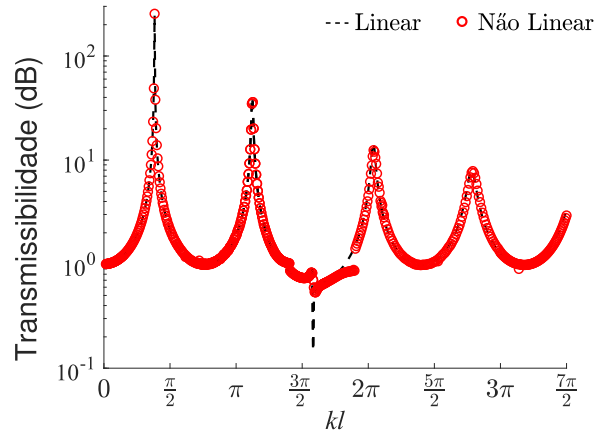


Figura A.5: Transmissibilidade linear e não linear pelo método FEM célula com um ressonador anexado.