
Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Dimensões fractais para certos sistemas dinâmicos discretos.

Bruno Domiciano Lopes

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São
José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Matemática, na área
de Sistemas Dinâmicos e Singularidades.

São José do Rio Preto
Fevereiro - 2012

Lopes, Bruno Domiciano.

Dimensões fractais para certos sistemas dinâmicos discretos / Bruno Domiciano Lopes. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2012.
68 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Dimensões fractais. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Bruno Domiciano Lopes

Dimensões fractais para certos sistemas dinâmicos discretos.

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos e Singularidades, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientador

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

UNESP - São José do Rio Preto

Segundo Examinador

Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan

UFU - Uberlândia

São José do Rio Preto, 29 de Fevereiro de 2012.

*Aos meus pais Luiz e Beni
dedico.*

Agradecimentos

A escolha vocacional do Ensino da Matemática, para minha formação profissional, foi uma inspiração Divina. Agradeço primeiramente à Deus por manter acesa a chama da minha caminhada estudantil, permitindo a ampliação dos meus conhecimentos nesse campo magnífico das Ciências Exatas e por colocar pessoas especializadas, incentivadoras para me impulsionar nesse resultado tão almejado.

Agradeço imensamente meus familiares; pai, mãe que proporcionaram meios sadios, seguros e econômicos de forma muito carinhosa e acolhedora para seguir meus dotes vocacionais e não vacilar em um só momento.

Agradeço: todos os professores do Ensino Fundamental e Médio pelo bom convívio e ensino que me incentivaram nesta caminhada. Todos os professores que lecionaram no curso de graduação em matemática na Unesp- SJRP pelo bom relacionamento, ética, proporcionando meios para transpor a ponte e chegar ao mestrado. Aos professores do curso de mestrado grandes incentivadores e orientadores brilhantes que proporcionaram conhecimentos importantes para meu êxito profissional.

Agradeço em especial ao professor Vanderlei Minori Horita pela valiosa orientação.

Agradeço aos amigos do curso de mestrado.

Agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro, permitindo minha dedicação integral ao estudo e pesquisas, da matemática para chegar nesta etapa tão almejada e prosseguir o aprofundamento dos meus estudos.

Todos aqueles que auxiliaram nesta brilhante jornada, sejam muitos felizes, pela valiosa realização profissional. Que Deus os proteja sempre!

Resumo

Neste trabalho estudamos os conceitos de dimensões fractais, tais como dimensão de Hausdorff, capacidade limite, princípio de distribuição de massa para conjuntos invariantes de certos sistemas dinâmicos discretos. Além disso, estudamos propriedades dinâmicas e geométricas de sistemas de funções iteradas, função tenda, família logística, função do padeiro e solenóide.

Abstract

In this work we study the concepts of the fractal dimensions, such as Hausdorff dimension, limit capacity dimension and mass distribution principle for invariant sets of certain discrete dynamical systems. Furthermore, we also study dynamical and geometric properties of iterated function systems, tent map, logistic map, bakers transformation and solenoid.

Sumário

1	Medida de Hausdorff	9
1.1	Medida de Hausdorff	9
1.2	Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$	14
1.3	Relação entre Medida de Lebesgue e Medida de Hausdorff.	15
1.4	Propriedades da Medida de Hausdorff	27
2	Dimensão de Hausdorff	29
2.1	Dimensão de Hausdorff	29
2.2	Capacidade limite	34
2.2.1	Propriedades e problemas da capacidade limite	39
2.3	Princípio de distribuição de massa	41
3	Sistemas de Funções Iteradas (IFS)	43
3.1	Sistemas de Funções Iteradas	43
3.2	Dimensões de conjuntos auto-similares	47
4	Sistemas dinâmicos	53
4.1	Função tenda	53
4.2	A família logística	55
4.3	Função do Padeiro	57
4.4	O Solenóide	59
A	Informações adicionais	64
A.1	Conjunto ternário de Cantor	64
A.2	Caos (segundo Devaney)	66
A.3	Dimensão de Hausdorff (produto cartesiano)	66

Introdução

Neste trabalho, estamos interessados no estudo de sistemas dinâmicos discretos. Um sistema dinâmico discreto é um esquema iterativo $f^k = f(f^{k-1})$ com $k \geq 1$ onde, $f : D \rightarrow D$ é contínua, podemos considerar $k \in \mathbb{Z}$ se f for inversível. Analisaremos o comportamento das seqüências formadas por iterados, ou seja, órbitas $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$, $x \in D$. Para certos pontos iniciais x pertencente ao domínio de f , $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$ pode convergir para um *ponto fixo* x_0 , isto é, um ponto do domínio de f , tal que $f(x_0) = x_0$, ou $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$ pode convergir para uma *órbita periódica* de período p , $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\}$, onde p é o menor inteiro positivo com $f^p(x_0) = \{x_0\}$.

Muitas vezes $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$, pode dar impressão que move-se de modo aleatório, mas sempre mantendo-se próximo de um determinado conjunto, que pode ser um *fractal*.

Um subconjunto $F \subset D$ é um *atrator* para f se F é um conjunto fechado, invariante por f , isto é, $f(F) = F$, tal que a distância de $f^k(x)$ a F converge para zero quando $k \rightarrow \infty$, para todo x em um conjunto aberto V contendo F . De modo análogo um conjunto fechado invariante F , a partir do qual todos os iterados dos pontos próximos (não pertencente a F) se afastam é chamado de *repulsor* de f .

Nesta dissertação veremos alguns exemplos de sistemas dinâmicos com F atratores ou repulsores em f , e calcularemos a *dimensão de Hausdorff* do conjunto F .

Este trabalho está dividido em 4 capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo definimos a medida de Hausdorff, observando a dificuldade em seu cálculo usando somente a definição. Sendo assim, definimos a medida de Lebesgue e mostramos a relação existente entre as duas medidas supracitadas, finalizando com propriedades da medida de Hausdorff.

No segundo capítulo definimos a dimensão Hausdorff usando a medida de Hausdorff do capítulo anterior. Apresentamos algumas propriedades e estimativas mais precisamente, capacidade limite (superiormente) e distribuição de massa (inferiormente).

No terceiro capítulo definimos um sistema de funções iteradas (IFS), mostrando sua propriedade principal (determina um único atrator) e métodos para encontrar ou estimar a dimensão de Hausdorff do atrator do IFS.

O quarto capítulo, consiste de exemplos de sistemas dinâmicos, mostrando que sob certas circunstâncias um repulsor F de um sistema dinâmico, coincide com atrator de um sistema de funções iteradas. Neste caso calculamos a dimensão de F .

No apêndice, construímos o conjunto ternário de Cantor, (um conjunto muito utilizado nesta

dissertação) e apresentamos algumas de suas propriedades .

Capítulo 1

Medida de Hausdorff

Neste capítulo definimos a medida de Hausdorff, observando a dificuldade em obtê-la usando somente a definição. Definimos assim a medida de Lebesgue e mostramos a relação entre medida de Hausdorff e medida de Lebesgue, finalizando com propriedades da medida de Hausdorff.

Definição 1.1 *Seja U um subconjunto não vazio do $\mathbb{R}^n$. Definimos o diâmetro de U por $|U| = \sup\{|x - y|; x, y \in U\}$ (isto é, a maior distância entre qualquer par de pontos de U).*

Definição 1.2 *Se $\{U_i\}$ é uma coleção (finita ou enumerável) de conjunto com diâmetro, no máximo δ que cobre F , então dizemos $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F .*

1.1 Medida de Hausdorff

Suponha que F é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e s é um número não negativo. Para qualquer $\delta > 0$ definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^{s*}(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : \text{onde } \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F.\right\}$$

Tomando o limite, quando $\delta \rightarrow 0$:

$$\mathcal{H}^{s*}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s*}(F)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, mas esse valor pode ser 0 ou ∞ e chamamos $\mathcal{H}^{s*}(F)$ a medida exterior s -dimensional de Hausdorff.

Mostremos agora que $\mathcal{H}^{s*}$ satisfaz :

i) $\mathcal{H}^{s*}(\emptyset) = 0$

ii) $E \subset F \implies \mathcal{H}^{s*}(E) \leq \mathcal{H}^{s*}(F)$

iii) Se $\{F_i\}$ é uma coleção enumerável de conjuntos, então

$$\mathcal{H}^{s*}(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^{s*}(F_i)$$

De fato:

i) Para todo $\epsilon > 0$ com $0 < \epsilon < \delta$ podemos cobrir o conjunto vazio com um único conjunto de diâmetro ϵ , assim $0 < \mathcal{H}_\delta^{s*}(\emptyset) < \epsilon^s$ para todo $\epsilon > 0$, logo $\mathcal{H}_\delta^{s*}(\emptyset) = 0$. Portanto,

$$\mathcal{H}^{s*}(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s*}(\emptyset) = 0.$$

ii) Note que, se $E \subset F$ então toda δ -cobertura de F também é uma δ -cobertura de E . Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F tal que $\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(F) + \delta$, como $E \subset F$ logo $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de E . Assim, tomando o ínfimo sobre todas δ -coberturas

$$\mathcal{H}_\delta^{s*}(E) \leq \sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(F) + \delta$$

como esta desigualdade vale para todo $\delta > 0$, fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos $\mathcal{H}^{s*}(E) \leq \mathcal{H}^{s*}(F)$.

iii) Considere $F_1, F_2, \dots$ subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Podemos assumir que $\sum_i \mathcal{H}_\delta^{s*}(F_i) < \infty$, pois no caso em que $\sum_i \mathcal{H}_\delta^{s*}(F_i) = \infty$ a desigualdade é trivial. Para $\epsilon > 0$ seja $\{U_i^j; j = 1, 2, 3, \dots\}$ uma δ -cobertura de F_i tal que $\sum_j |U_i^j|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Agora $\{U_i^j; j = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2, 3, \dots\}$ é uma δ -cobertura de $\bigcup_i F_i$ e

$$\mathcal{H}_\delta^{s*}(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i \sum_j |U_i^j|^s \leq \sum_i \mathcal{H}_\delta^{s*}(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \leq \epsilon + \sum_i \mathcal{H}_\delta^{s*}(F_i) \leq \epsilon + \sum_i \mathcal{H}^{s*}(F_i) \quad (1.1)$$

Como a desigualdade se mantém para todo $\epsilon > 0$, então temos:

$$\mathcal{H}^{s*}(\bigcup_i F_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s*}(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^{s*}(F_i)$$

□

Observação: A quarta desigualdade em (1.1) ocorre do fato de $\mathcal{H}_\delta^{s*}(F)$ ser decrescente em δ . Para provar esse fato, se $\delta_1 < \delta_2$, seja $\{U_i\}$ uma δ_1 -cobertura de F e $\{V_i\}$ uma δ_2 -cobertura de F considere:

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^{s*}(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{onde } \{U_i\} \text{ é uma } \delta_1\text{-cobertura de } F \right\}.$$

$$\mathcal{H}_{\delta_2}^{s*}(F) = \inf \left\{ \sum_i |V_i|^s : \text{onde } \{V_i\} \text{ é uma } \delta_2\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Note que, $\{U_i\}$ também é uma δ_2 -cobertura de F . Assim :

$$\left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{onde } \{U_i\} \text{ é uma } \delta_1\text{-cobertura de } F \right\} = A$$

$$\left\{ \sum_i |V_i|^s : \text{onde } \{V_i\} \text{ é uma } \delta_2\text{-cobertura de } F \right\} = B$$

Portanto,

$$A \subset B \implies \inf(B) \leq \inf(A), \text{ logo } \mathcal{H}_{\delta_2}^{s*}(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^{s*}(F).$$

Mostremos que, $\mathcal{H}_\delta^{s*}$ restrito a σ -álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ é uma medida. Para provar esse fato, usaremos as seguintes definições:

Definição 1.3 *Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de Carathéodory se para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ temos $\mathcal{H}^{s*}(A) = \mathcal{H}^{s*}(A \cap E) + \mathcal{H}^{s*}(A \cap E^c)$.*

$$\mathbb{H}^s = \{E \subset \mathbb{R}^n \text{ tal que, } E \text{ satisfaz a condição de Carathéodory}\}$$

Definição 1.4 *Uma célula em $\mathbb{R}$ com pontos finais a, b com $a < b$ tem uma das seguintes formas $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$.*

Células são frequentemente chamadas de intervalos, no entanto os conjuntos $(-\infty, a), (-\infty, a], (b, +\infty), (-\infty, +\infty)$ são também chamados de intervalos, mas não são células.

Uma célula em $\mathbb{R}^n$ é definida da seguinte forma $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ onde $\{I_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ são células em $\mathbb{R}$

Teorema 1.5 *$\mathbb{H}^s$ é uma σ -álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Além disso, $\mathcal{H}^{s*}: \mathbb{H}^s \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida em $\mathbb{H}^s$.*

Demonstração: Pode ser facilmente adaptado ao resultado análogo a medida de Lebesgue ver [1].

Observação: $\mathbb{H}^s$ é σ -álgebra de s-Hausdorff em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^{s*} / \mathbb{H}^s$ é a medida s-dimensional de Hausdorff em $\mathbb{R}^n$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que os elementos de uma δ -cobertura são células, pois o diâmetro dos mesmos é no máximo δ .

Teorema 1.6 *Sejam A e B subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ com*

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| \mid a \in A \text{ e } b \in B\} > 0.$$

$$\text{Então temos: } \mathcal{H}^{s*}(A \cup B) = \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$$

Demonstração: Da subaditividade de $\mathcal{H}^{s*}$ segue que $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) \leq \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$, mostraremos a desigualdade oposta.

Observe que podemos supor $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) < +\infty$ pois, se $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) = +\infty$ da subaditividade segue que $+\infty \leq \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$, ou seja, $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) = \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$.

Suponhamos então que $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) < +\infty$ e $\text{dist}(A, B) > \delta > 0$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\{U_n\}$ uma δ -cobertura (sequência de células) tal que $A \cup B \subset \bigcup_n U_n$ e $\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(A \cup B) + \epsilon$. Assim, nenhuma célula de U_n pode conter pontos de A e de B ao mesmo tempo, pois a distância entre eles é maior que δ . Logo, podemos dividir U_n em 3 classes:

- 1) As células $\{J_j\}$ que contém pontos de A .
- 2) As células $\{K_k\}$ que contém pontos de B .
- 3) As células $\{H_h\}$ que não contém pontos de A nem de B .

Como $A \subset \bigcup_j J_j$ e $B \subset \bigcup_k K_k$, pois as células da cobertura U_n cobrem $A \cup B$, segue que

$$\mathcal{H}^{s*}(A) \leq \sum_j |J_j|^s \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{s*}(B) \leq \sum_k |K_k|^s, \text{ assim temos:}$$

$$\mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B) \leq \sum_j |J_j|^s + \sum_k |K_k|^s + \sum_h |H_h|^s = \sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(A \cup B) + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Portanto,

$$\mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B) \leq \mathcal{H}^{s*}(A \cup B), \text{ ou seja } \mathcal{H}^{s*}(A \cup B) = \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$$

□

Teorema 1.7 *Se μ é uma medida exterior em X tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ sempre que A e B forem subconjuntos de X com $\text{dist}(A, B) > 0$, então todos conjuntos de Borel são μ - mensuráveis .*

Demonstração: Como os conjuntos mensuráveis formam uma σ -algebra é suficiente provar que os conjuntos fechados são μ - mensuráveis, ou seja basta mostrar que se F for fechado, então:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap F^c) + \mu(S \cap F) \tag{1.2}$$

para todo $S \subset X$ com $\mu(S) < \infty$, pois se $\mu(S) = \infty$ a desigualdade acima é trivial.

Seja $\{F_j = (x \in X; \text{dist}(x, F)) < \frac{1}{j}\}$. Então, $\text{dist}(S \cap F_j^c, S \cap F) > 0$ e $(S \cap F_j^c) \cup (S \cap F) \subset S$. Logo,

$$\mu(S) \geq \mu((S \cap F_j^c) \cup (S \cap F)) = \mu(S \cap F_j^c) + \mu(S \cap F)$$

note (=) acima é válida , pois $\text{dist}(S \cap F_j^c, S \cap F) > 0$ e satisfaz as hipóteses do teorema anterior

Observe para garantir que (1.2) ocorre basta mostrar que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(S \cap F_j^c) = \mu(S \cap F^c).$$

Para verificar essa igualdade como F é fechado podemos escrever :

$$(S \cap F^c) = (S \cap F_j^c) \cup \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k \right)$$

onde

$$R_k = \{x \in S \text{ tal que } \frac{1}{k+1} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{k}\}$$

agora usando o fato de μ ser uma medida exterior, logo μ é subaditiva, então temos:

$$\mu(S \cap F_j^c) \leq \mu(S \cap F^c) \leq \mu(S \cap F_j^c) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k)$$

daí temos :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(S \cap F_j^c) = \mu(S \cap F^c) \quad \text{se} \quad \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k) < \infty$$

note que $\text{dist}(R_i, R_j) > 0$ se $j \geq i + 2$. De fato

$$R_i = \{x \in S \text{ tal que } \frac{1}{i+1} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{i}\}$$

$$R_{i+1} = \{x \in S \text{ tal que } \frac{1}{i+2} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{i+1}\}$$

$$R_{i+2} = \{x \in S \text{ tal que } \frac{1}{i+3} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{i+2}\}$$

$$R_{i+3} = \{x \in S \text{ tal que } \frac{1}{i+4} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{i+3}\}$$

logo $\text{dist}(R_i, R_{i+1}) = 0$, $\text{dist}(R_i, R_{i+2}) > 0$, $\text{dist}(R_i, R_{i+3}) > 0$, $\text{dist}(R_i, R_{i+4}) > 0$ logo, podemos dividir o conjunto formado pelos R_k em dois subconjuntos cuja a distância entre quaisquer dois elementos do subconjunto, é positiva:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k-1}$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k}\right) \leq \mu(S) < \infty$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} \mu(R_{2k-1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k-1}\right) \leq \mu(S) < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_{2k}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_{2k-1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k}\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{2k-1}\right) \leq 2\mu(S) < \infty$$

Portanto,

$$\mu(S \cap F_j^c) + \mu(S \cap F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(S \cap F_j^c) + \mu(S \cap F) \leq \mu(S)$$

□

Observação : Como $\mathcal{H}^{s*}$ é uma medida exterior e sabendo que A e B subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $\text{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| \mid a \in A \text{ e } b \in B\} > 0$ temos $\mathcal{H}^{s*}(A \cup B) = \mathcal{H}^{s*}(A) + \mathcal{H}^{s*}(B)$ aplicando o teorema anterior temos que todos conjuntos borelianos são $\mathbb{H}^s$ - mensurável.

Definição 1.8 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é a σ -álgebra de Borel onde $\mathcal{B} = \bigcap \mathcal{A}_\delta$ considerando $\mathcal{A}_\delta$ são as σ -álgebras que contém os fechados de $\mathbb{R}^n$.

$$F \subset \mathbb{R}^n \text{ fechado} \implies F \in \mathbb{H}^s \implies \mathcal{B} \subset \mathbb{H}^s$$

logo, $\mathcal{H}_\delta^{s*}$ restrito a σ -álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ é uma medida.

1.2 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.9 Um bloco retangular n -dimensional é um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ que é ou vazio ou da forma $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $a_i < b_i$ para todo i . O volume do bloco retangular acima é:

$$Vol^n(B) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$$

e $Vol^n(B) = 0$ se $B = \emptyset$.

Definição 1.10 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto arbitrário. A medida exterior de Lebesgue de A denotado por $\mathcal{L}^{n*}(A)$ é definida como sendo o ínfimo do conjunto de todas as somas da forma $\sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k)$ onde $(B_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de blocos retangulares n -dimensionais com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, isto é,

$$\mathcal{L}^{n*}(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k) \text{ tal que } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \text{ } (B_k)_{k \geq 1} \text{ blocos retangulares } n\text{-dimensionais.}$$

Note que é sempre possível cobrir um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ com uma coleção enumerável de blocos retangulares n -dimensional, pois $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]^n$.

Vamos mostrar que $\mathcal{L}^n : \mathbb{L}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ onde $\mathbb{L}^n$ é σ -álgebra do $\mathcal{L}^n$ (conjuntos que satisfazem a condição de Carathéodory), é uma medida completa.

Definição 1.11 Uma medida $\mu : \Delta \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é completa, se $A \subset X$ com $A \subset B$, $B \in \Delta$ e $\mu(B) = 0 \implies A \in \Delta$

Note que isso equivale a dizer que todos os conjuntos de medida nula são conjuntos mensuráveis.

Lema 1.12 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, então existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com $A \subset U$ e

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.$$

Demonstração: Seja $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ uma cobertura de A por blocos retangulares n -dimensional tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{\epsilon}{2}, \forall k \geq 1.$$

Seja D_k um bloco retangular que contém B_k no seu interior e tal que:

$$Vol^n(D_k) \leq Vol^n(B_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Considere $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k^\circ$ onde D_k° é o interior de D_k , temos que U é aberto e $A \subset U$. Além disso

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(U) &\leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \\ &\sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} Vol^n(B_k) + \frac{\epsilon}{2} \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \mathcal{L}^n(A) + \epsilon \end{aligned}$$

□

Lema 1.13 *Todo subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathcal{L}^n(A) = 0 \implies A$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável.*

Demonstração: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathcal{L}^n(A) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema(1.12) existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathcal{L}^n(U) \leq \epsilon$, concluimos então:

$$\mathcal{L}^n(U \cap A) + \mathcal{L}^n(U \cap A^c) = \mathcal{L}^n(U \cap A^c) \leq \mathcal{L}^n(U) \leq \epsilon$$

$\therefore A$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável.

□

Assim $\mathcal{L}^n$ é uma medida completa.

1.3 Relação entre Medida de Lebesgue e Medida de Hausdorff.

Podemos mostrar que para um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ a medida de Hausdorff n -dimensional é um múltiplo da medida n -dimensional de Lebesgue mais precisamente se F é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\mathcal{H}^n(F) = C_n^{-1} \mathcal{L}^n(F)$$

onde C_n é o volume da bola n-dimensional de diâmetro 1 de modo que:

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n (\frac{n}{2})!} \text{ se } n \text{ é par.}$$

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{(n)!} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

Observe que o volume de uma bola em $\mathbb{R}^n$ de raio r é dado por $V_n(r) = \frac{2\pi r^2}{n} \cdot V_{n-2}(r)$ e assumindo $r = \frac{1}{2}$ e usando indução podemos facilmente verificar as igualdades em C_n supracitadas e também note que sendo $V_n(1)$ o volume da bola unitária n-dimensional e vale a igualdade:

$$C_n = \frac{V_n(1)}{2^n}$$

A demonstração de $\mathcal{H}^n(F) = C_n^{-1} \mathcal{L}^n(F)$ se F é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, será feita no final desta seção. Antes precisaremos de uma série de resultados para tornar a demonstração mais dinâmica.

Definição 1.14 (*Ordenação parcial*) Uma ordenação parcial num conjunto X é uma relação binária $\prec$ em X que é reflexiva, transitiva e anti-simétrica

Reflexiva : Para todo $A \in X, A \prec A$.

Transitiva : $A \prec B$ e $B \prec C \implies A \prec C$, para todo $A, B, C \in X$.

Anti-simétrica: $A \prec B$ e $B \prec A \implies A=B$, para todo $A, B \in X$.

Definição 1.15 (*Conjunto totalmente ordenado*) Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado no qual quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a ordenação parcial dada.

Definição 1.16 (*Elemento maximal e limite superior*) Seja $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado ξ é um elemento maximal em X se para todo $\psi \in X$ com $\xi \prec \psi$ segue que $\xi = \psi$. Um elemento $\omega \in X$ é limite superior de $Y \subset X$ se $\beta \prec \omega$ para todo $\beta \in Y$.

Lema 1.17 (*Zorn*) Um conjunto não vazio parcialmente ordenado no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.

Definição 1.18 (*Cobertura fina*) Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ e Ω uma coleção qualquer de conjuntos. Uma cobertura $A \subset \bigcup_{B \in \Omega} B$ é dita cobertura fina quando $\inf\{|B|; x \in B \text{ com } B \in \Omega\} = 0$ para todo $x \in A$, em outras palavras isto é:

$$\forall x \in A \text{ e } \forall \epsilon > 0 \exists B \in \Omega \text{ tal que } x \in B \text{ e } |B| < \epsilon$$

Teorema 1.19 (coberturas de Vitali) *Seja $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas não degeneradas em $\mathbb{R}^n$ com $\sup\{|B|; B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Então existe uma subcoleção $\mathcal{G}$ enumerável em $\mathcal{F}$ disjunta tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$ onde $\hat{B}$ é a bola fechada concêntrica com B e com raio cinco vezes maior.*

Demonstração: Seja $D = \sup\{|B|; B \in \mathcal{F}\}$ e considere para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F}; \frac{D}{2^j} < |B| \leq \frac{D}{2^{j-1}}\}.$$

se $j = 1$ definimos,

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{I}; \mathcal{I} \text{ é subcoleção disjunta de } \mathcal{F}_1\}$$

Logo temos que $\mathcal{C}_1$ pode ser parcialmente ordenado pela inclusão. Além disso se $\tilde{\mathcal{C}}_1$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{C}_1$, temos que $\bigcup_{C \in \tilde{\mathcal{C}}_1} C$ é limite superior de $\tilde{\mathcal{C}}_1$. Assim pelo Lema de Zorn existe $\mathcal{G}_1$ um elemento maximal de $\mathcal{C}_1$. Fazendo processo análogo ao que fizemos para encontrar $\mathcal{G}_1$ definimos $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_{k-1}$ e a partir daí podemos encontrar $\mathcal{G}_k$ que é elemento maximal de $\mathcal{C}_k$

$$\mathcal{C}_k = \{\mathcal{I}; \mathcal{I} \text{ é subcoleção disjunta de } \mathcal{F}_k, \text{ tal que } B \in \mathcal{I} \implies B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{G}_i\}$$

Observe que, como cada $\mathcal{G}_j$ com $j \in \mathbb{N}$ é uma coleção de disjunta de bolas não degeneradas de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{G}_j$ é enumerável para todo $j \in \mathbb{N}$, de fato, como $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso em $\mathbb{R}^n$ e considere $\mathcal{G}_j = \{B_j^i\}_{i=1}^\infty$ onde B_j^i é uma bola não degenerada de $\mathbb{R}^n$, temos $B_j^i \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ para todo i , podemos escolher um x_i arbitário tal que $x_i \in B_j^i \cap \mathbb{Q}^n$ e fixando esses $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ e do fato $\{B_j^i\}_{i=1}^\infty$ ser disjunta, podemos construir uma bijeção $f : \{B_j^i\}_{i=1}^\infty \longrightarrow \{x_i\}_{i=1}^\infty$ logo a cardinalidade $\{B_j^i\}_{i=1}^\infty$ é igual a cardinalidade $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ e como $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{Q}^n$ temos $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ é enumerável, o que implica $\mathcal{G}_j = \{B_j^i\}_{i=1}^\infty$ é enumerável. Desta forma podemos tomar $\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{G}_j$ que é uma subcoleção disjunta e enumerável de $\mathcal{F}$. Temos também que se $B \in \mathcal{F}$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathcal{F}_j$ e pela maximalidade de $\mathcal{G}_j$, segue que existe $B' \in \bigcup_{i=1}^j \mathcal{G}_i$ tal que $B \cap B' \neq \emptyset$. Logo $B \in \mathcal{F}_j$

$$|B| \leq \frac{D}{2^{j-1}} \text{ e } |B'| \geq \frac{D}{2^j}$$

assim

$$2^{j-1} |B| \leq D \leq 2^j |B'| \implies |B| \leq 2 |B'| \leq 5r'$$

onde r' é o raio de B' . Portanto,

$B \subset \hat{B}'$, onde $\hat{B}'$ é a bola concêntrica a B' e com raio cinco vezes maior que o de B' . Logo,

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$$

□

Corolário 1.20 *Assuma que $\mathcal{C}$ é uma cobertura fina de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ por bolas fechadas tais que $\sup\{|B|; B \in \mathcal{C}\} < \infty$. Então existe uma família enumerável $\mathcal{G}$ de bolas disjuntas em $\mathcal{C}$ tal que para cada subconjunto finito $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subset \mathcal{C}$ temos:*

$$A - \bigcup_{K=1}^m B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}} \hat{B}$$

onde $\hat{B}$ é a bola fechada concêntrica com B e com raio cinco vezes maior.

Demonstração: Considerando $\mathcal{G}$ do teorema da cobertura de Vitali. Se $A \subset \bigcup_{K=1}^m B_k$ logo

$$A^c \supset \left\{ \bigcup_{K=1}^m B_k \right\}^c, \text{ assim}$$

$$A - \bigcup_{K=1}^m B_k = A \cap \left\{ \bigcup_{K=1}^m B_k \right\}^c \subset A \cap A^c = \emptyset \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}} \hat{B}$$

Se $x \in A - \bigcup_{K=1}^m B_k$, como $\mathcal{C}$ é cobertura fina, existe uma bola $B \in \mathcal{C}$ com $x \in B$ tal que $B \cap B_k = \emptyset \forall k = 1, 2, \dots, m$. Considerando a demonstração do teorema acima temos que existe $B_i \in \mathcal{G}$ tal que $x \in B \subset \hat{B}_i$ e da maximalidade de $\mathcal{G}$ temos $B_i \cap B \neq \emptyset$

$$A - \bigcup_{K=1}^m B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}} \hat{B}$$

□

Corolário 1.21 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\delta > 0$ qualquer. Então existe uma família de bolas fechadas $\{B_j\}_{j=1}^\infty$, disjunta duas a duas, tais que $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \subset U$ com $|B_j| < \delta$ para todo j , e:*

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{j=1}^\infty B_j) = 0.$$

Demonstração: Fixe γ tal que $1 - \frac{1}{5^n} < \gamma < 1$. Suponha inicialmente que $\mathcal{L}^n(U) < \infty$.

Afirmção: Existe uma coleção finita $\{B_i\}_{i=1}^{T_1}$ de bolas fechadas e disjuntas em U tais que $|B_i| < \delta \forall i = 1, 2, \dots, T_1$ e

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{i=1}^{T_1} B_i) \leq \gamma \mathcal{L}^n(U).$$

Prova da Afirmação : Seja $\mathcal{B}_1 = \{B; B \subset U \text{ e } |B| < \delta\}$ pelo teorema da cobertura de Vitali existe uma coleção enumerável e disjunta $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{B}_1$ tal que:

$$U \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} \hat{B}.$$

Então

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(\hat{B}) = 5^n \sum_{B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(B) = 5^n \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B\right)$$

logo

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B\right) \geq \frac{1}{5^n} \mathcal{L}^n(U)$$

Assim

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B) = \mathcal{L}^n(U \cap \left\{\bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B\right\}^c) \leq 1 - \frac{1}{5^n} \mathcal{L}^n(U)$$

como $\mathcal{G}_1$ é enumerável, existem bolas $B_1, B_2, \dots, B_{T_1}$ em $\mathcal{G}_1$ satisfazendo

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{i=1}^{T_1} B_i) \leq \gamma \mathcal{L}^n(U).$$

Agora considere

$$U_2 = U - \bigcup_{i=1}^{T_1} B_i$$

$$\mathcal{B}_2 = \{B; B \subset U_2 \text{ e } |B| < \delta\}$$

e como no processo acima acha-se uma quantidade finita de bolas disjuntas $B_{T_1+1}, B_{T_1+2}, \dots, B_{T_2}$ em $\mathcal{B}_2$ tais que:

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{i=1}^{T_2} B_i) = \mathcal{L}^n(U_2 - \bigcup_{i=T_1+1}^{T_2} B_i) \leq \gamma \mathcal{L}^n(U_2) \leq \gamma^2 \mathcal{L}^n(U)$$

podemos continuar com este processo até obter uma coleção de bolas disjuntas, tais que:

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{i=1}^{T_k} B_i) \leq \gamma^k \mathcal{L}^n(U) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

como $\gamma < 1$ temos $\gamma^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\mathcal{L}^n(U)$ é finito

$$\mathcal{L}^n(U - \bigcup_{i=1}^{T_\infty} B_i) = 0$$

Se $\mathcal{L}^n(U) = \infty$ podemos aplicar o argumento acima aos conjuntos

$$U_m = \{x \in U \text{ tais que } m < |x| < m+1 \text{ } (m = 1, 2, \dots)\}$$

e assim completando a demonstração do corolário. $\square$

Definição 1.22 (Conjunto μ -mensurável) Um subconjunto $A \subset X$ é dito μ -mensurável se, para todo $B \subset X$ tem-se $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$.

Definição 1.23 (Função mensurável) Considere μ uma medida em X seja Y um espaço topológico $f : X \longrightarrow Y$ é dita μ -mensurável quando para todo aberto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ é μ -mensurável.

Definição 1.24 (Conjunto σ -finito) Um subconjunto $A \subset X$ é dito σ -finito com respeito a medida μ definida em X quando pode-se escrever $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ onde B_k é μ -mensurável e $\mu(B_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.25 (Função σ -finita) Uma função $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ é dita σ -finita com respeito a medida μ definida em X quando f é μ -mensurável e $\{x; f(x) \neq 0\}$ é σ -finito com respeito a μ .

Teorema 1.26 (Fubini) Seja μ uma medida definida em X e ν uma medida definida em Y
i) Se $S \subset X \times Y$ é σ -finito com respeito a $\mu \times \nu$, então

$$S_y = \{x; (x, y) \in S\} \text{ é } \mu\text{-mensurável para } y \text{ } \nu - q.t.p.$$

$$S_x = \{y; (x, y) \in S\} \text{ é } \nu\text{-mensurável para } x \text{ } \mu - q.t.p.$$

$\mu(S_y)$ é ν -integrável e $\nu(S_x)$ é μ -integrável. Além disso

$$\mu \times \nu(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_X \nu(S_x) d\mu(x) .$$

ii) Se S é $\mu \times \nu$ -integrável e f é σ -finita com respeito a $\mu \times \nu$ então a aplicação

$$y \longrightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ é } \nu\text{-integrável}$$

$$x \longrightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ é } \mu\text{-integrável}$$

$$\int_{Y \times X} f(x, y) d(\nu \times \mu) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

Lema 1.27 Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ uma função $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então a região

$$A = \{(x, y); x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

é $\mathcal{L}^{n+1}$ -mensurável.

Agora definimos a simetrização de Steiner e algumas propriedades que ela possui que será fundamental na prova da desigualdade isodiamétrica.

Definição 1.28 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ e H um hiperplano em $\mathbb{R}^n$. Para cada reta L ortogonal a H e tal que $C \cap L \neq \emptyset$, desloca o segmento de reta $C \cap L$ ao longo de L até seu ponto médio em H . A união de todos esses segmentos de reta deslocados obtemos a simetrização Steiner $st_H(C)$.*



Figura 1.1: A simetrização de Steiner

Para melhor visualização:

Considere $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $|a| = 1$ considere

$$L_b^a = \{b + ta ; t \in \mathbb{R}\}$$

$$P_a = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = 0\}$$

$$S_a(A) = \bigcup_{b \in P_a; A \cap L_b^a \neq \emptyset} \{b + at; |t| \leq \frac{1}{2} \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)\}$$

Note que L_b^a é uma reta que passa pelo ponto b e é paralela ao vetor $\vec{a}$ e P_a é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ perpendicular ao vetor $\vec{a}$ que passa pela origem, e $S_a(A)$ é a simetrização de Steiner de A com respeito ao hiperplano P_a (ver figura (1.2)).

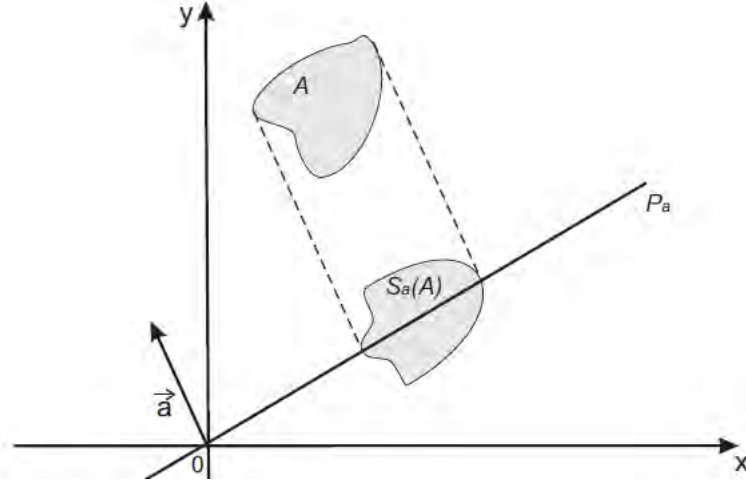


Figura 1.2: A simetrização de Steiner em $\mathbb{R}^2$

Lema 1.29 (*Propriedades da Simetrização de Steiner*)

i) $|S_a(A)| \leq |A|$

ii) Se A é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, então $S_a(A)$ também é e $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$, ou seja, a simetrização de Steiner preserva a medida $\mathcal{L}^n$.

Demonstração:

i) Se $|A| = \infty$ a desigualdade é trivial, suponha $|A| < \infty$, considerando $\bar{A}$ o fecho de A e sabendo que $|\bar{A}| = |A|$, podemos supor A fechado. Seja $\epsilon > 0$ e $x, y \in S_a(A)$ tal que $|S_a(A)| \leq |x - y| + \epsilon$, e considere b, c da seguinte forma

$$b = x - \langle x, a \rangle a \quad \text{e} \quad c = y - \langle y, a \rangle a$$

Afirmção: $b, c \in P_a$.

$$\langle b, a \rangle = \langle x - \langle x, a \rangle a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \langle x, a \rangle \langle a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \langle x, a \rangle |a|^2 = \langle x, a \rangle - \langle x, a \rangle = 0$$

$$\langle c, a \rangle = \langle y - \langle y, a \rangle a, a \rangle = \langle y, a \rangle - \langle y, a \rangle \langle a, a \rangle = \langle y, a \rangle - \langle y, a \rangle |a|^2 = \langle y, a \rangle - \langle y, a \rangle = 0$$

logo $b, c \in P_a$.

Defina: $B = \{t; b + ta \in A\}$ e $C = \{t; c + ta \in A\}$

$$r = \inf\{t; b + ta \in A\}, \quad s = \sup\{t; b + ta \in A\}$$

e

$$u = \inf\{t; c + ta \in A\}, \quad v = \sup\{t; c + ta \in A\}$$

sem perda de generalidade, considere $v - r \geq s - u$. Assim

$$v - r = \frac{v-r}{2} + \frac{v-r}{2} \geq \frac{v-r}{2} + \frac{s-u}{2} = \frac{v-u+s-r}{2} = \frac{v-u}{2} + \frac{s-r}{2}$$

denote

$$w_b = \sup\{t; b + ta \in A\} - \inf\{t; b + ta \in A\} = s - r$$

$$w_c = \sup\{t; c + ta \in A\} - \inf\{t; c + ta \in A\} = v - u$$

e observe que para todo $t_1, t_2 \in B$

$$w_b = s - r \geq |t_1 - t_2| = |t_1 - t_2| \cdot |a| = |b + at_1 - (b + at_2)|$$

logo $w_b = s - r \geq \sup_{t_1, t_2 \in B} |b + at_1 - (b + at_2)| = |A \cap L_b^a| = \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ de modo análogo temos $w_c = s - r \geq \mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)$. Assim

$$v - r = \frac{w_b}{2} + \frac{w_c}{2} \geq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)}{2} + \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)}{2} \quad (1.3)$$

Como $x = (b + \langle x, a \rangle a)$ e $y = (b + \langle y, a \rangle a)$ pertencem a $S_a(A)$, pela definição de $S_a(A)$ temos:

$$|\langle x, a \rangle| \leq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)}{2} \quad e \quad |\langle y, a \rangle| \leq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)}{2} \quad (1.4)$$

logo de (1.3) e (1.4) temos $v - r \geq |\langle x, a \rangle| + |\langle y, a \rangle| \geq |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle|$.

Note como A é fechado temos $b + ra \in A$ e $c + va \in A$, pois tome $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência em B tal que $t_k \rightarrow r$, então $\{b + at_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência e $b + at_k \rightarrow b + ra$.

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|x - y|)^2$$

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|b - c| + |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle| \cdot |a|)^2$$

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|b - c| + |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle|)^2$$

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|b - c| + (v - r))^2$$

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|b - c| + (v - r) \cdot |a|)^2$$

$$(|S_a(A)| - \epsilon)^2 \leq (|(b + ra) - (c + va)|)^2 \leq |A|^2$$

. Portanto, $|S_a(A)| - \epsilon \leq |A|$ considerando ϵ pequeno, $|S_a(A)| \leq |A|$.

ii) Como $\mathcal{L}^n$ é invariante por rotação podemos assumir $a = e_n = (0, 0, \dots, 1)$ e temos $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. Como A é $\mathcal{L}^n$ -mensurável e $\mathcal{L}^n(L_b^a) = 0$, logo como $\mathcal{L}^n$ é uma medida completa, L_b^a é $\mathcal{L}^n$ -mensurável e por propriedade de σ -álgebra temos, $A \cap L_b^a$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Além disso como L_b^a é σ -finito com respeito a medida $\mathcal{L}^n$, $A \cap L_b^a$ é σ -finito, então $\{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} \neq 0\}$ é σ -finito onde $\mathcal{X}_{A \cap L_b^a}$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, ou seja, $\mathcal{X}_{A \cap L_b^a}$ é uma função σ -finita com respeito a $\mathcal{L}^n$. Assim pelo teorema de Fubini, temos:

$$b \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{L}^1 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{H}^1 \text{ é } \mathcal{L}^{n-1}\text{-mensurável}$$

ou seja a aplicação $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ é $\mathcal{L}^{n-1}$ -mensurável. Assim:

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{L}^1 d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1}$$

.

Logo do Lema (1.27), segue que:

$$S_a(A) = \{(b, y); |y| < \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)}{2} = \frac{f(b)}{2}\} - \{(b, 0); L_b^a = \emptyset\}$$

é $\mathcal{L}^n$ -mensurável

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(S_a(A)) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{S_a(A) \cap L_b^a} d\mathcal{L}^1 d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{S_a(A) \cap L_b^a} d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A \cap L_b^a} d\mathcal{L}^1 d\mathcal{L}^{n-1} = \mathcal{L}^n(A) \end{aligned}$$

. Portanto,

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(S_a(A))$$

□

Uma consequência da simetrização de Steiner.

Teorema 1.30 (Desigualdade Isodiamétrica) Para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\mathcal{L}^n(A) \leq V_n(1) \frac{|A|^n}{2^n}$$

onde $V_n(1)$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Se $|A| = \infty$ a desigualdade é trivial, suponha $|A| < \infty$, considere $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, definimos

$$A_1 = S_{e_1}(A), A_2 = S_{e_2}(A_1), A_3 = S_{e_3}(A_2), \dots, A_n = S_{e_n}(A_{n-1})$$

Afirmção: A_n é simétrico em relação a origem.

De fato, note que pela definição de simetrização de Steiner, temos a simetria $A_1 = S_{e_1}(A)$ com respeito à P_{e_1} . Suponha por indução que $A_k = S_{e_k}(A_{k-1})$ é simétrico com relação $P_{e_1}, P_{e_2}, \dots, P_{e_k}$ e tome w fixo tal que $1 \leq w \leq k$, sabendo que $S_w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a reflexão com relação a P_{e_w} . Note que se $b \in P_{e_{k+1}}$ temos que $S_w(b) \in P_{e_{k+1}}$. Além disso por hipótese de indução $S_w(A_k) = A_k$, A_k é simétrico com relação a P_{e_w} . Logo $\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_w(b)}^{e_{k+1}})$. Assim $\{t; b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t; S_w(b) + te_{k+1} \in A_{k+1}\}$, isto implica $S_w(A_{k+1}) = A_{k+1}$, ou seja, A_{k+1} é simétrico com relação a P_{e_w} . Logo A_{k+1} é simétrico em relação a $P_{e_1}, P_{e_2}, \dots, P_{e_k}$ e a $P_{e_{k+1}}$ por definição. Portanto,

A_n é simétrico com relação $P_{e_1}, P_{e_2}, \dots, P_{e_n}$ e consequentemente é simétrico em relação a origem.

Seja $x \in A_n$, como A_n é simétrico em relação a origem, temos $-x \in A_n$. Logo

$$|A_n| \geq 2x \implies |x| \leq \frac{|A_n|}{2} \implies A_n \subset B(0, \frac{|A_n|}{2})$$

$$\implies \mathcal{L}^n(A_n) \leq \mathcal{L}^n(B(0, \frac{|A_n|}{2})) = V_n(1) \frac{|A_n|^n}{2^n}$$

Como $\bar{A}$ é $\mathcal{L}^n$ - mensurável e do Lema (Propriedades da Simetrização de Steiner)

$$\mathcal{L}^n(\bar{A}_n) = \mathcal{L}^n(S_{e_n}(\bar{A}_{n-1})) = \mathcal{L}^n(\bar{A}_{n-1}) = \mathcal{L}^n(S_{e_{n-1}}(\bar{A}_{n-2})) = \dots = \mathcal{L}^n(\bar{A})$$

$$|\bar{A}_n| = |S_{e_n}(\bar{A}_{n-1})| \leq |\bar{A}_{n-1}| = |S_{e_{n-1}}(\bar{A}_{n-2})| \leq \dots = |\bar{A}|$$

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(\bar{A}) = \mathcal{L}^n(\bar{A}_n) \leq V_n(1) \frac{|\bar{A}_n|^n}{2^n} \leq V_n(1) \frac{|\bar{A}|^n}{2^n} = V_n(1) \frac{|A|^n}{2^n}$$

□

Finalmente, vamos mostrar o teorema principal da seção.

Teorema 1.31 *Seja F um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, então:*

$$\mathcal{H}^n(F) = C_n^{-1} \mathcal{L}^n(F) = \frac{2^n}{V_n(1)} \mathcal{L}^n(F)$$

onde C_n é o volume n -dimensional da bola de diâmetro 1 e $V_n(1)$ é o volume n -dimensional da bola unitária.

Demonstração: Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ um Lebesgue mensurável e $\delta > 0$, seja $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ uma δ -cobertura de A . Logo da desigualdade isodiamétrica, temos:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(C_i) \leq \sum_{i=1}^\infty V_n(1) \frac{|C_i|^n}{2^n}$$

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \frac{V_n(1)}{2^n} \left\{ \inf \sum_i |C_i|^s : \text{onde } \{C_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } A \right\}$$

. tomando $\delta \longrightarrow 0$ temos:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \frac{V_n(1)}{2^n} \mathcal{H}^n(A)$$

Por outro lado

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \sum_i \mathcal{L}^n(C_i) : \text{onde } \{C_i\} \text{ é uma coleção de cubos } |C_i| < \delta \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i$$

Note que para todo cubo $K \subset \mathbb{R}^n$ temos $|K| = n^{\frac{n}{2}} \mathcal{L}^n(K)$

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq \inf \left\{ \sum_i |C_i|^s : \text{onde } \{C_i\} \text{ é uma coleção de cubos } |C_i| < \delta \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i \right\}$$

$$= \inf \left\{ \sum_i n^{\frac{n}{2}} \mathcal{L}^n(C_i) : \text{onde } \{C_i\} \text{ é uma coleção de cubos } |C_i| < \delta \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{\frac{n}{2}} \inf \left\{ \sum_i^{\infty} \mathcal{L}^n(C_i) : \text{onde } \{C_i\} \text{ é uma coleção de cubos } |C_i| < \delta \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\} \\
&= n^{\frac{n}{2}} \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$ e se $\mathcal{L}^n(A) = 0$, temos $\mathcal{H}^n(A) = 0$, logo $\mathcal{H}^n \ll \mathcal{L}^n$.

Dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$. Seja $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de A tal que, C_i é um cubo n -dimensional $\forall i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon$$

Usando o Corolário(1.21) considere C_i° o interior de C_i e note que $\mathcal{L}^n(C_i) = \mathcal{L}^n(C_i^{\circ})$, como C_i° é aberto. Então existe uma família de bolas fechadas $\{B_j^i\}_{j=1}^{\infty}$, disjunta duas a duas tais que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i \subset C_i^{\circ}$ com $|B_j^i| < \delta$ para todo j , e

$$\mathcal{L}^n(C_i^{\circ} - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i) = 0.$$

$$\mathcal{L}^n(C_i - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i) = \mathcal{L}^n(C_i^{\circ} - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i) = 0.$$

Como $\mathcal{H}^n \ll \mathcal{L}^n$

$$\mathcal{H}^n(C_i - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{V_n(1)}{2^n} \mathcal{H}_{\delta}^n(A) &\leq \frac{V_n(1)}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^n(C_i) = \frac{V_n(1)}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i\right) \leq \frac{V_n(1)}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^n(B_j^i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V_n(1)}{2^n} \mathcal{H}_{\delta}^n(B_j^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V_n(1)}{2^n} |B_j^i|^n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon
\end{aligned}$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, e ϵ pequeno, temos:

$$\frac{V_n(1)}{2^n} \mathcal{H}_{\delta}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$$

Portanto,

$$\frac{V_n(1)}{2^n} \mathcal{H}_{\delta}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$$

□

1.4 Propriedades da Medida de Hausdorff

Consideremos, agora, algumas propriedades importantes da medida de Hausdorff s -dimensional.

As propriedades de escala (ampliações, reduções) de comprimento, área e volume, são bem conhecidas, uma ampliação do comprimento de uma curva por um fator λ , a área de um plano é multiplicado por λ^2 e o volume de um objeto 3-dimensional é multiplicado por um fator λ^3 . Nesta situação a medida s -dimensional de Hausdorff, virá multiplicada por um fator λ^s .

Proposição 1.32 *Seja S uma transformação de fator escala $\lambda > 0$, se $F \subset \mathbb{R}^n$, então:*

$$\mathcal{H}^{s*}(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^{s*}(F).$$

Demonstração : Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F tal que $\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(F) + \delta$, logo $\{S(U_i)\}$ é uma $\lambda\delta$ -cobertura de $S(F)$, assim $\sum_i |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s$ e temos:

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^{s*}(S(F)) \leq \sum_i |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s \leq \lambda^s (\mathcal{H}_\delta^{s*}(F) + \delta)$$

tomando $\delta \rightarrow 0$ temos:

$$\mathcal{H}^{s*}(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^{s*}(F).$$

De modo análogo seja $S^{-1} : S(F) \rightarrow F$ Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de $S(F)$ tal que $\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^{s*}(S(F)) + \delta$, logo $\{S^{-1}(U_i)\}$ é uma $\frac{1}{\lambda}\delta$ -cobertura de F , assim:

$$\sum_i |S^{-1}(U_i)|^s = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s \sum_i |U_i|^s$$

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{\lambda}\delta}^{s*}(S^{-1}(S(F))) \leq \sum_i |S^{-1}(U_i)|^s = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s \sum_i |U_i|^s \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s (\mathcal{H}_\delta^{s*}(S(F)) + \delta)$$

tomando $\delta \rightarrow 0$ temos $\mathcal{H}^{s*}(F) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s \mathcal{H}^{s*}(S(F))$ como $\lambda > 0$, $\lambda^s \mathcal{H}^{s*}(F) \leq \mathcal{H}^{s*}(S(F))$. Portanto,

$$\mathcal{H}^{s*}(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^{s*}(F).$$

□

Proposição 1.33 *Considere $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \text{ com } x, y \in F$$

para constante $C > 0$ e $\alpha > 0$. Então para todo s :

$$\mathcal{H}_{\frac{s}{\alpha}}^{s*}(f(F)) \leq C_{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^{s*}(F).$$

Demonstração: Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então como:

$$|f(F \cap U_i)| \leq C |F \cap U_i|^\alpha \leq C |U_i|^\alpha$$

temos $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ϵ -cobertura de $f(F)$ onde $\epsilon = C\delta^\alpha$. Assim:

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$$

logo:

$$\mathcal{H}_\epsilon^{\frac{s}{\alpha}*}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^{s*}(F).$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto,

$$\mathcal{H}_\alpha^{s*}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^{s*}(F).$$

□

A condição, $|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$ é conhecida como condição de Hölder de expoente α , uma condição que implica que f é contínua. Quando ($\alpha = 1$), isto é,

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y| \text{ com } x, y \in F$$

f é chamada função Lipschitziana e:

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq C^s \mathcal{H}^s(F). \quad (1.5)$$

Note que (1.5) vale para qualquer função com derivada limitada, tal função é necessariamente Lipschitziana, consequência do teorema do valor médio. Se f é uma isometria :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

então, $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$. Assim a medida de Hausdorff é invariante por translação, isto é, $\mathcal{H}^s(F + z) = \mathcal{H}^s(F)$ onde $(F + z) = \{x + z, \text{ tal que } x \in F\}$.

Capítulo 2

Dimensão de Hausdorff

Neste capítulo definimos a dimensão de Hausdorff, um conceito muito útil para se medir e comparar conjuntos. Apresentamos suas propriedades e métodos para se obter uma estimativa superior (capacidade limite) e inferior (distribuição de massa) e também apresentamos alguns exemplos que ilustram os métodos supracitados.

2.1 Dimensão de Hausdorff

Lembremos que a medida de Hausdorff é:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{onde } \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Note que se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F temos:

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s;$$

assim, tomando o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, fazendo $\delta \rightarrow 0$ e se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, então

$$\mathcal{H}^t(F) = 0, \text{ se } t > s.$$

Agora se $t < s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F temos:

$$\sum_i |U_i|^s = \sum_i |U_i|^{s-t} |U_i|^t \leq \delta^{s-t} \sum_i |U_i|^t;$$

tomando o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(F)$, fazendo $\delta \rightarrow 0$ e se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, então:

$$\infty = \frac{\mathcal{H}^s(F)}{\delta^{s-t}} \leq \mathcal{H}^t(F)$$

$$\therefore \mathcal{H}^t(F) = \infty, \text{ se } t < s.$$

Assim o gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ por s existe um valor crítico de s em que $\mathcal{H}^s(F)$ (salta) de ∞ para 0, este valor é chamado de dimensão de Hausdorff de F e denotamos por $\dim_H F$ e está definido para qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$.

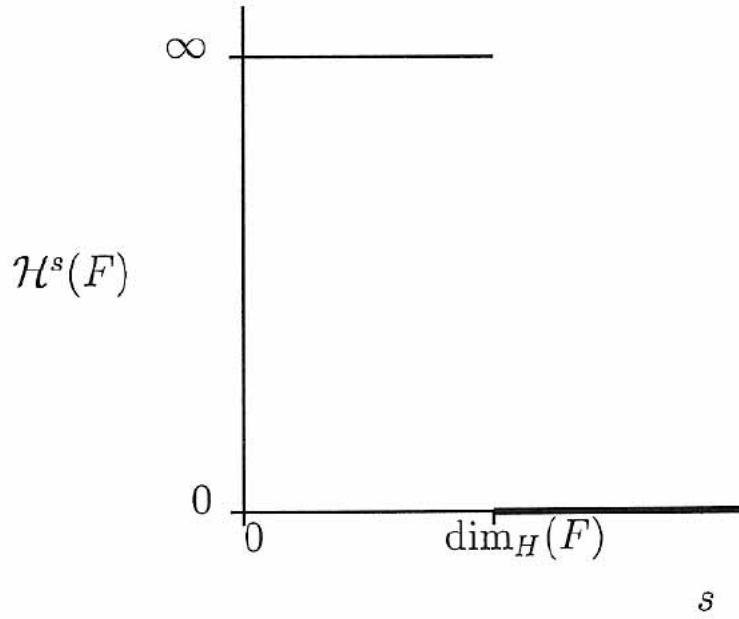


Figura 2.1: Gráfico : $\mathcal{H}^s(F) \times s$

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Se $s = \dim_H F$, então $\mathcal{H}^s(F)$ pode ser zero ou infinito ou $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Definição 2.1 *Um conjunto de Borel que satisfaz $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ é chamado de s -conjunto.*

Agora mostraremos que dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 2.2 (Monotonicidade) *Se $E \subset F$, então $\dim_H E \leq \dim_H F$*

Demonstração: Usando propriedade de medida temos $E \subset F \implies \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F) \forall s$, assim para todo $s > \dim_H F$, $\mathcal{H}^s(F) = 0 \implies \mathcal{H}^s(E) = 0$. Note que:

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

e observe que:

$$\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\} \subset \{s \geq 0; \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

tomando o ínfimo, temos:

$$\inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(E) = 0\} \leq \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

Portanto,

$$\dim_H E \leq \dim_H F$$

□

Propriedade 2.3 (Estabilidade enumerável) Se $F_1, F_2, \dots$ é uma sequência enumerável de conjuntos , então:

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H F_i$$

Demonstração: Como, $F_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ para todo j , usando a monotonicidade temos:

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j, \forall j = 1, 2, 3, \dots \implies \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H F_i.$$

Por outro lado, se $s > \dim_H F_j$ para todo j , então $\mathcal{H}^s(F_j) = 0$, assim $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \leq \dim_H F_j, \forall j = 1, 2, 3, \dots \implies \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \leq \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H F_i.$$

Portanto,

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H F_i$$

□

Propriedade 2.4 (Conjuntos enumeráveis) Se F é enumerável então $\dim_H F = 0$.

Demonstração: Seja $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ onde F_i é formado por um único ponto de F , logo $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ e $\dim_H F_i = 0$, assim por Estabilidade enumerável. Portanto,

$$\dim_H F = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0.$$

□

Propriedade 2.5 (Conjuntos abertos) Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_H F = n$.

Demonstração: Seja B uma bola n -dimensional não degenerada :

$$\mathcal{L}^n(B) < \infty \implies 0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$$

então $\dim_H B = n$. Agora considere $F \subset \mathbb{R}^n$ aberto, logo existe B uma bola tal que $B \subset F$ e por monotonicidade temos:

$$n = \dim_H B \leq \dim_H F.$$

Por outro lado, como F é aberto existe uma cobertura enumerável de bolas, isto é, $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, logo

$$n = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H B_i = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \geq \dim_H F$$

Portanto,

$$\dim_H F = n.$$

□

Proposição 2.6 *Considere $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \text{ com } x, y \in F$$

para constante $C > 0$ e $\alpha > 0$. Então $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$.

Demonstração: Se $s > \dim_H F$, implica que $\mathcal{H}^s(F) = 0$, então pela Proposição(1.33) temos:

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0.$$

Assim $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(F) = 0$, logo $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$ para todo $s > \dim_H F$. Portanto,

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F.$$

□

Proposição 2.7 *a) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação Lipschitziana, então:*

$$\dim_H f(F) \leq \dim_H F$$

b) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação bi-Lipschitziana, isto é,

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y|$$

onde $0 \leq c_1 \leq c_2 < \infty$, então $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

A demonstração é imediata, usando a proposição 2.6.

Proposição 2.8 *O conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim_H < 1$ é totalmente desconexo .*

Demonstração: Considere x, y pontos distintos de F . Defina a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ dada por:

$$f(z) = |z - x|$$

Note que f é Lipschitziana:

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$$

pela proposição(2.7) temos : $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Assim $f(F)$ é um conjunto com $\mathcal{H}^1(f(F)) = 0$ ou comprimento zero, logo tem complementar denso, escolhendo r que não pertence $f(F)$ e $0 < r < f(y)$, temos:

$$F = \{z \in F \mid |z - x| < r\} \cup \{z \in F \mid |z - x| > r\}.$$

Assim F é formado por dois conjuntos abertos e disjuntos com x em um conjunto e y no outro de modo x, y estão em diferentes componentes conexas de F . $\square$

Exemplo 2.9 : Seja F o conjunto de Cantor. Então $\dim_H F = s = \frac{\log 2}{\log 3}$ e $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.



Figura 2.2: Conjunto de Cantor

Cálculo Heurístico. O conjunto de Cantor divide-se em uma parte esquerda $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ e uma parte direita $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Temos $F = F_L \cup F_R$ é uma união disjunta. Logo, para qualquer s :

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Supondo que no valor crítico $s = \dim_H F$ temos $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. Dividindo por $\mathcal{H}^s(F)$, obtemos $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$ ou $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Cálculo Rigoroso. Chamamos os intervalos de comprimento 3^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) que formam o conjunto E_k na construção de F de intervalos básicos. Seja $\{U_i\}$ a cobertura de F formada

pelos 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} . Logo, $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$, se $s = \log 2 / \log 3$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Para mostrar que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$, mostraremos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

para qualquer cobertura $\{U_i\}$ de F . Podemos supor que os $\{U_i\}$ são intervalos para depois expandir eles ligeiramente e usar a compacidade de F para verificar a desigualdade acima quando $\{U_i\}$ é uma coleção finita de subintervalos fechados de $[0, 1]$. Para cada U_i , seja k o inteiro tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Logo, U_i pode interceptar no máximo um intervalo básico de E_k pois a separação desses intervalos básicos é pelo menos 3^{-k} . Se $j \geq k$ então, por construção, U_i intercepta no máximo $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalos básicos de E_j , pela desigualdade acima. Se escolhemos j suficientemente grande de modo que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$, para todo U_i , então, como os $\{U_i\}$ interceptam todos os 2^j intervalos básicos de comprimento 3^{-j} , contando intervalos, temos $2^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^s |U_i|^s$, e portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$.

2.2 Capacidade limite

Seja F um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ e seja $N_\delta(F)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ , que podem cobrir F . Definimos as capacidade limite inferior e superior de F respectivamente por :

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Se esses limites são iguais, chamamos o valor comum de capacidade limite de F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Definições equivalentes de Capacidade Limite:

A capacidade limite inferior e superior de um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ estão dadas por

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e a capacidade limite de F está dada por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(se o limite existir), onde $N_\delta(F)$ está definido por um dos seguintes casos:

- a) O menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F ;
- b) O menor número de cubos de lado δ que cobrem F ;
- c) O menor número de cubos δ -malha que interceptam F ;
- d) O menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobrem F ;
- e) O maior número de bolas disjuntas de raio δ com centro em F .

A figura (2.3) ilustra as diferentes definições para capacidade limite.

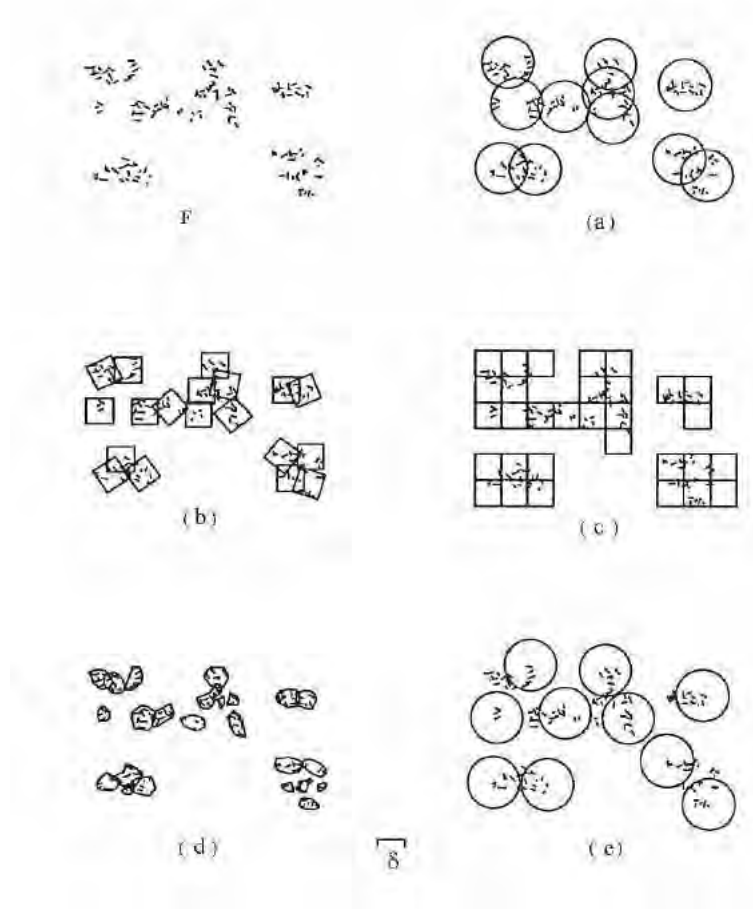


Figura 2.3: Definições equivalente a capacidade limite

Demonstração: Vamos demonstrar a equivalência com $N_\delta(F)$ dado por (c), considere $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $-\log \delta$ é estritamente positivo, para evitar problemas com $\log 0$ e $\log \infty$ consideramos a capacidade limite somente para conjuntos limitados e não-vazio. Considere uma δ -malha de cubos em $\mathbb{R}^n$, isto é:

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

onde $m_1, m_2, \dots, m_n$ são inteiros.

Seja $\hat{N}_\delta(F)$ o número de cubos da δ -malha que intercepta F , a coleção formada por $\hat{N}_\delta(F)$ cubos é uma cobertura de F , formada por conjuntos de diâmetro $\delta\sqrt{n}$, assim:

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq \hat{N}_\delta(F)$$

se $\delta\sqrt{n} < 1$. Então:

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} = \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}$$

assim tomando $\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Por outro lado, qualquer conjunto com diâmetro no máximo δ está contido em 3^n cubos da δ -malha (escolhendo um cubo que contém algum ponto do conjunto juntamente com seus cubos vizinhos) assim,

$$\hat{N}_\delta(F) \leq 3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F)$$

$$\frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log 3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} = \frac{\log 3^n}{-\log \delta\sqrt{n}} + \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}}$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\delta\sqrt{n} \rightarrow 0$. Logo:

$$\underline{\dim}_B F \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F \geq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Portanto,

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \hat{N}_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

As equivalências destas diferentes formas da definição da capacidade limite, decorre da comparação entre os valores de $N_\delta(F)$ em cada caso, omitiremos as outras demonstrações. $\square$

Essas definições equivalentes da capacidade limite pode ser muito útil, pois dependendo do conjunto podemos escolher qual definição usaremos para facilitar nossos cálculos.

Na definição de Capacidade Limite, podemos considerar o limite quando $\delta \rightarrow 0$ usando alguma sequência decrescente δ_k tal que, $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para alguma constante $0 < c < 1$; em particular para $\delta_k = c^k$.

De fato: se $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$, então:

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

e portanto

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

A desigualdade oposta é imediata. O caso do limite inferior trabalha-se da mesma forma.

Existe ainda uma outra definição equivalente para capacidade limite, apresentada de uma forma diferente, lembre-se que uma δ -vizinhança F_δ de um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é :

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta \text{ para algum } y \in F\}.$$

Consideremos a taxa na qual o volume n-dimensional de F_δ diminui com $\delta \rightarrow 0$ em $\mathbb{R}^3$, se F é um único ponto então F_δ é uma bola, com $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$, se F é um segmento de comprimento l então $\text{vol}(F_\delta) \sim \pi l\delta^2$ e F for um conjunto plano de área a , então $\text{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$.

Proposição 2.10 : *Seja F um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

onde F_δ é uma δ -vizinhança de F .

Demonstração: Se F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ bolas de raio δ , então F_δ pode ser coberto por bolas concêntricas de raio 2δ . Logo:

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F)c_n(2\delta)^n$$

onde c_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Tomando logaritmos,

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

e temos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F.$$

Assim,

$$\underline{\dim}_B F \geq n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

Obtemos uma desigualdade semelhante ao tomarmos limite superior,

$$\overline{\dim}_B F \geq n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

Por outro lado, se existirem $N_\delta(F)$ bolas disjuntas de raio δ com centro em F , então

$$N_\delta(F) c_n (2\delta)^n \leq \text{vol}^n(F_\delta).$$

Tomando logaritmos temos as desigualdades opostas:

$$\underline{\dim}_B F \leq n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}.$$

$$\overline{\dim}_B F \leq n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

□

Para compreender a relação entre a capacidade limite e dimensão de Hausdorff, note, se F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro δ , então:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Se $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, então $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ para δ suficientemente pequeno.

Assim, $s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / -\log \delta$ e portanto

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Para todo $F \subset \mathbb{R}^n$ não obtemos a igualdade, existe uma infinidade de exemplos que essa desigualdade é estrita.

Portanto, a capacidade limite é uma estimativa superior para a dimensão de Hausdorff.

Exemplo 2.11 *Seja F o conjunto ternário de Cantor. Então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$.*

Seja a cobertura dada por os 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} . Logo, $N_\delta(F) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$. Tomando logaritmos e limite,

$$\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento δ tal que $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ intercepta no máximo um dos intervalos básicos de comprimento 3^{-k} usados na construção de F . Como existem 2^k desses intervalos, então precisamos de pelo menos 2^k intervalos de comprimento δ para cobrir F . Logo $N_\delta(F) \geq 2^k$ e portanto, $\underline{\dim}_B F \geq \log 2 / \log 3$.

Assim, para o conjunto ternário de Cantor, $\dim_H F = \dim_B F$.

2.2.1 Propriedades e problemas da capacidade limite

As seguintes propriedades da capacidade limite, são semelhantes as propriedades da dimensão de Hausdorff, e pode ser verificadas da mesma maneira.

- i) $\overline{\dim}_B$ e $\underline{\dim}_B$ são monótonas.
- ii) $\overline{\dim}_B$ é finitamente estável, i.e., $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$, mas a identidade correspondente $\underline{\dim}_B$ não é verdade.
- iii) $\underline{\dim}_B$ e $\overline{\dim}_B$ são bi-Lipschitz invariantes. Suponha que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ e que F poder ser coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro no máximo δ . Então as $N_\delta(F)$ imagens desses conjuntos por f formam uma cobertura de $f(F)$ por conjuntos de diâmetro no máximo $c\delta$. Assim, $\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F$. Similarmente a capacidade limite comporta-se exatamente como a dimensão de Hausdorff sob transformação bi-Lipschitz e Holder.

Como a capacidade limite é determinada por coberturas de conjuntos de tamanhos iguais, esta pode ser mais fácil de calcular do que a dimensão de Hausdorff, mas temos algumas desvantagens.

Proposição 2.12 : *Seja $\overline{F}$ o fecho de F (isto é, o menor subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$, contendo F .) . Então:*

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

e

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F$$

Demonstração: Seja $B_1, \dots, B_k$ uma coleção finita de bolas fechadas de raio δ . Se o conjunto fechado $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ contém F , então contém também $\overline{F}$. Logo o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F cobrem também o conjunto $\overline{F}$. Portanto, o resultado segue. $\square$

Uma consequência imediata dessa proposição é a seguinte: Se F for um subconjunto denso de uma região aberta de $\mathbb{R}^n$, então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$. Se F for, por exemplo, o conjunto

(enumerável) dos números racionais entre 0 e 1, então $\overline{F}$ é o intervalo $[0, 1]$. Logo $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$. Assim, os conjuntos enumeráveis podem ter capacidade limite diferente de zero. Além disso, a capacidade limite de cada número racional, considerado como conjunto unitário, é zero, mas a união enumerável desses conjuntos unitários tem dimensão 1. Em consequência, não é verdade que:

$$\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_B F_i.$$

Exemplo 2.13 $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ é um conjunto compacto, com $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Se $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e considere k é o inteiro satisfazendo:

$$1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$$

se $|U| < \delta$, então U pode cobrir, no máximo, um dos pontos $\{1, \frac{1}{2}, \dots, 1/k\}$, pois:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)k} > \delta$$

Assim, precisamos de pelo menos k conjuntos de diâmetro δ para cobrir F . Logo:

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$.

Por outro lado, se $\frac{1}{2} > \delta > 0$, tomamos k tal que $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$. Então $k+1$ intervalos de comprimento δ cobrem $[0, 1/k]$, deixando $k-1$ pontos de F , os quais podem ser cobertos por outros $k-1$ intervalos de comprimento δ . Assim,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}$$

e temos:

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}.$$

Este exemplo, mostra a desigualdade estrita entre dimensão de Hausdorff e a capacidade limite, pois dimensão de Hausdorff é igual a zero (conjunto enumerável).

Proposição 2.14 Suponha F pode ser coberto por n_k conjuntos de diâmetro no máximo δ_k , com $\delta_k \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$. Então:

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

Além disso, se $n_k \delta_k^s$ é limitado quando $k \rightarrow \infty$, então $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Se $\delta_k \rightarrow 0$, mas $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para algum $0 < c < 1$, então:

$$\overline{\dim}_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Demonstração: Como $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F$ a outra desigualdade já foi provado, se $n_k \delta_k^s$ é limitado, então $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F) < n_k \delta_k^s$. Assim quando $k \rightarrow \infty$ implica $\delta_k \rightarrow 0$. Portanto $\mathcal{H}^s(F)$ é finito. $\square$

2.3 Princípio de distribuição de massa

No cálculo da dimensão de Hausdorff, podemos obter limites superiores avaliando as somas da forma $\sum |U_i|^s$ para alguma cobertura $\{U_i\}$ de F , enquanto para obter limites inferiores temos que mostrar $\sum |U_i|^s$ é maior que alguma constante positiva para toda δ -cobertura de F . Esse candidato a limite inferior é difícil de ser calculado, uma maneira de contornar essa dificuldade é concentrar em uma distribuição de massa μ em F , e comparar a massa $\mu(U)$, coberta por U , com $|U|^s$, para todo U (lembre-se que uma distribuição de massa é uma medida, com suporte contido em F , tal que $0 < \mu(F) < \infty$).

Proposição 2.15 *Considere μ uma distribuição de massa em F e suponha que para algum s existem números $c > 0$ e $\epsilon > 0$, tal que:*

$$\mu(U) \leq c |U|^s$$

para todo conjunto com $|U| \leq \epsilon$, então: $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ e

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demonstração: Considere $\{U_i\}$ é uma ϵ -cobertura qualquer de F , então:

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

tomando o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$, como $\mu(F) > 0$. Portanto,

$$\dim_H F \geq s.$$

□

Um exemplo aplicando o princípio de distribuição de massa, considere F o conjunto ternário de Cantor, uma distribuição de massa natural em F , seja E_k usado na construção de F formado por 2^k intervalos de tamanho 3^{-k} , cada um desses intervalos recebe massa 2^{-k} . Seja U um conjunto com $|U| < 1$ e seja k um número inteiro tal que:

$$3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$$

Então U intercepta no máximo um intervalo de E_k , assim:

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = \left(3^{\frac{\log 2}{\log 3}}\right)^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}}.$$

Portanto, $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(F) \geq 3^{-\frac{\log 2}{\log 3}} = \frac{1}{2}$, pelo princípio de distribuição de massa temos:

$$\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

Exemplo 2.16 Considere $F_1 = F \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ o produto cartesiano do conjunto ternário de Cantor F e o intervalo unitário, então definimos $s = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$, temos:

$$\dim_B F_1 = \dim_H F_1 = s$$

com $0 < \mathcal{H}^s(F_1) < \infty$.

Considere E_k uma cobertura de F com 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} , seja c um elemento dessa cobertura, logo podemos cobrir $c \times [0, 1]$ por 3^k quadrados de lado 3^{-k} (diâmetro $3^{-k}\sqrt{2}$). Logo F_1 pode ser coberto por $2^k 3^k$ quadrados de lado 3^{-k} , assim:

$$\mathcal{H}_{3^{-k}\sqrt{2}}^s(F_1) \leq 2^k 3^k (3^{-k}\sqrt{2})^s = 2^{\frac{s}{2}}$$

Portanto,

$$\dim_H F_1 \leq \underline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_1 \leq s.$$

Por outro lado, definimos uma distribuição de massa em F_1 , da mesma forma que foi definido para F , onde $c \times [0, 1]$ tem massa 2^{-k} espalhado uniformemente, se U é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados com altura $\lambda \leq 1$, então $\mu(U) = \lambda 2^{-k}$. Todo conjunto U está contido em um quadrado de lado $|U|$ com lados paralelos aos eixos coordenados, se $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^k$, então U intercepta no máximo um intervalo do nível k de F_1 , assim:

$$\mu(U) \leq |U| 2^k \leq |U| 3^{-k \frac{\log 2}{\log 3}} \leq |U| (3 |U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 3^{\frac{\log 2}{\log 3}} |U|^s = 2 |U|^s$$

Pelo princípio de distribuição de massa; $\mathcal{H}^s(F_1) \geq \frac{1}{2}$. Portanto,

$$s \leq \dim_H F_1 \leq \underline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_1.$$

Capítulo 3

Sistemas de Funções Iteradas (IFS)

Neste capítulo definimos sistemas de funções iteradas (IFS), observamos que o sistema determina um único atrator e apresentamos métodos para encontrar ou estimar a dimensão de Hausdorff do atrator do IFS.

3.1 Sistemas de Funções Iteradas

Seja D um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma aplicação $S : D \rightarrow D$ é uma contração em D se existe um número $c, 0 < c < 1$, tal que $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ para todo $x, y \in D$. Se $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ dizemos que S é uma contração de similaridade (S transforma conjunto em conjunto geometricamente semelhante).

Uma família finita de contrações $S_1, S_2, \dots, S_m$ com $m \geq 2$ é chamada de sistema de funções iteradas (IFS) e chamamos um subconjunto $F \subset D$ compacto não vazio de atrator (conjunto invariante) para o IFS se:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

A propriedade fundamental de um sistema de funções iteradas é que determina um único atrator.

Exemplo 3.1 *Seja F o conjunto de Cantor. Sejam $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:*

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x; S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

.

Note que $S_1(F)$ é metade de F do lado esquerdo, $S_2(F)$ é metade de F do lado direito. Então $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. Assim, F é invariante pelas aplicações S_1 e S_2 as quais representam a base de auto-similaridades do conjunto de Cantor.

Vamos provar que um IFS tem um único atrator (compacto não-vazio), isso significa que o conjunto de Cantor (ternário) é o único atrator das contrações $\{S_1, S_2\}$ dado acima.

Para isso definimos uma métrica d . Vamos denotar $\mathfrak{S}$ a classe de todos os subconjuntos compactos não vazios de D . Lembre-se que a δ -vizinhança de um conjunto A , é o conjunto de pontos dentro da distância δ de A .

$\mathfrak{S}$ é um espaço métrico, onde d define a distância de dois conjuntos A, B , sendo o menor δ tal que δ -vizinhança A contém B e δ -vizinhança B contém A .

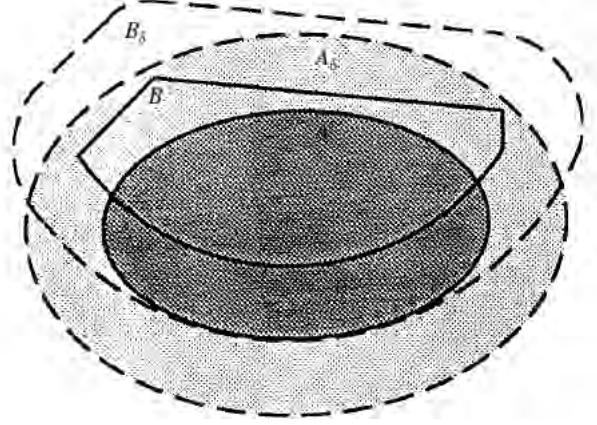


Figura 3.1: métrica de Hausdorff

A métrica d é conhecida como métrica de Hausdorff em $\mathfrak{S}$. Em particular se $d(A, B)$ é pequeno, então A e B estão próximos em relação a conjunto.

Teorema 3.2 *Considere o sistema de funções iteradas dada pelas contrações $S_1, \dots, S_m$ em $D \subset \mathbb{R}^n$ tais que:*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

$c_i < 1$ para cada i . Então existe um único conjunto compacto não vazio F invariante pelas transformações S_i , i.é.

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Além disso, se definimos uma transformação S na classe $\mathfrak{S}$ de conjuntos compactos não vazios por

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

para $E \in \mathfrak{S}$ e escrevemos S^k para o k -ésimo iterado de S , isto é, $S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para $k \geq 1$, então

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

para qualquer conjunto $E \in \mathfrak{S}$ tal que $S_i(E) \subset E$ para todo i .

Demonstração: Note que os conjuntos de $\mathfrak{S}$ são transformados por S em outros conjuntos de $\mathfrak{S}$, se A e $B \in \mathfrak{S}$ então:

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)).$$

Usando a definição de métrica d , note que a δ -vizinhança $(S_i(A))_\delta$ contém $S_i(B)$ para todo i , então $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$ contém $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$, e $(S_i(B))_\delta$ contém $S_i(A)$ para todo i , então $(\bigcup_{i=1}^m S_i(B))_\delta$ contém $\bigcup_{i=1}^m S_i(A)$. Assim:

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B) \quad (3.1)$$

Pode ser mostrado que d é uma métrica completa sobre $\mathfrak{S}$ (toda sequência de Cauchy de conjuntos de $\mathfrak{S}$ converge para um conjunto em $\mathfrak{S}$).

Como $0 < (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) < 1$, (3.1) afirma que S é uma contração em um espaço métrico completo $(\mathfrak{S}, d)$. Pelo teorema de contração de Banach ([3]), S tem um único ponto fixo, isto é, existe um único conjunto $F \in \mathfrak{S}$, tal que $S(F) = F$, logo:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Além disso $S^k(E) \rightarrow F$ quando $k \rightarrow \infty$. Em particular se $S_i(E) \subset E$ para todo i , então $S(E) \subset E$, de modo que $S^k(E)$ é uma sequência decrescente de conjuntos compacto não vazio contendo F , assim:

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

□

Existem dois problemas principais que surgem em conexão com sistema de funções iteradas. O primeiro é tentar representar um determinado conjunto como sendo o atrator de algum IFS, e o segundo é decodificar o IFS exibindo seu atrator.

Em geral, pode não ser possível encontrar um IFS com atrator um conjunto dado, mas podemos encontrar um IFS possuindo atrator que é uma aproximação desse conjunto.

Neste trabalho estamos interessados em decodificar o IFS e exibir seu atrator.

A transformação S introduzida no Teorema 3.2 é a chave para encontrar o atrator de um IFS, mais precisamente:

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

De fato: A sequência de iterados $S^k(E)$ converge para o atrator F para qualquer conjunto inicial $E \in \mathfrak{S}$ no sentido $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$, isso ocorre, pois:

$$d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$$

de modo que:

$$d(S^k(E), F) \leq c^k d(E, F)$$

onde $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i$. Assim o $S^k(E)$ fornece cada vez mais boas aproximações para F .

Para cada k ,

$$S^k(E) = \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{I_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))))$$

onde a união é sobre o conjunto I_k de todas as k -seqüências $(i_1, \dots, i_k)$ tal que $1 \leq i_j \leq m$. Se $S_i(E) \subset E$ para cada i e x é um ponto de F , segue que existe uma seqüência (não necessariamente única) $(i_1, i_2, \dots)$ tal que $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ para todo k . Esta seqüência fornece uma codificação natural para x , com:

$$x = x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$$

Assim,

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}.$$

Esta expressão para $x_{i_1, i_2, \dots}$ é independente de E , se $S_i(E)$ está contido em E para todo i .

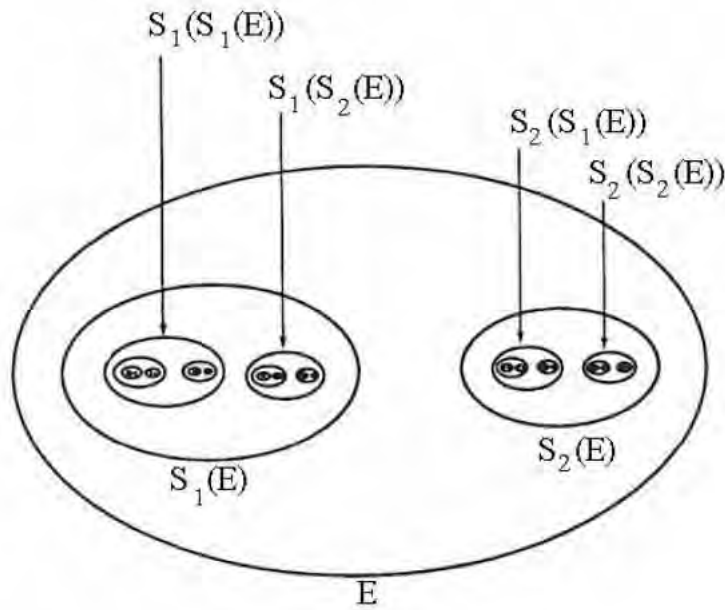


Figura 3.2:

Note que a união $\bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ onde a união é sobre o conjunto I_k de todas as k -seqüências $(i_1, \dots, i_k)$ tal que $1 \leq i_j \leq 2$ na figura 3.2 é disjunta, então F será totalmente desconexo, se $S_i(E) \cap S_j(E) = \emptyset$. Considere $x_{i_1, i_2, \dots} \neq x_{i'_1, i'_2, \dots}$, podemos encontrar k tal que

$i_1, i_2, \dots, i_k \neq i'_1, i'_2, \dots, i'_k$, como o conjuntos fechados $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ e $S_{i'_1} \circ \dots \circ S_{i'_k}(F)$ são disjuntos, os dois pontos iniciais estão em diferentes componentes conexas.

Isso pode ser ilustrado por:

Sejam $S_1(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ e F o conjunto de Cantor. Se $E = [0, 1]$ então $S^k(E) = E_k$, o conjunto dos 2^k intervalos básicos de comprimento 3^{-k} obtidos na k -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor. Além disso, $x_{i_1, i_2, \dots}$ é um ponto do conjunto de Cantor, então sua representação na base 3 é dada por, $0.a_1a_2\dots$, onde $a_k = 0$ se $i_k = 1$ e $a_k = 2$ se $i_k = 2$.

3.2 Dimensões de conjuntos auto-similares

Uma das vantagens de usar funções iteradas é que a dimensão do atrator é relativamente mais fácil de calcular em termos das contrações definidas. Nesta seção discutimos o caso no qual $S_1, \dots, S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são similaridades, isto é,

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

onde $0 < c_i < 1$ (c_i é chamado de razão de S_i). Assim cada S_i transforma subconjunto do $\mathbb{R}^n$ em um subconjunto geometricamente similar. O atrator da coleção de similaridade é chamado de auto-similar. Vamos mostrar, sob certas condições, que um conjunto auto-similar F tem dimensão Hausdorff e capacidade limite iguais ao valor de s satisfazendo:

$$\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$$

e além disso, F tem $\mathcal{H}^s$ -medida positiva e finita.

Se $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ com esta união disjunta, temos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F)$$

usando o fato de S_i ser similaridade para todo i , e a propriedade (escala) da medida de Hausdorff. Assim $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, logo $s = \dim_H F$, onde s satisfaz:

$$\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$$

Para o argumento acima seja válido, temos que garantir que o IFS satisfaz a seguinte definição.

Definição 3.3 Dizemos que as similaridades $S_i, i = 1, \dots, m$ satisfazem a condição do conjunto aberto se existe um conjunto aberto limitado não vazio V tal que:

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

e a união é disjunta, isto é, $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$.

Para mostrar quando as similaridades $S_i, i = 1 \dots m$ satisfazem a condição do conjunto aberto a dimensão de Hausdorff do atrator é dado por, $\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$, precisaremos do seguinte resultado geométrico.

Lema 3.4 *Considere $\{V_i\}$ uma coleção de subconjuntos abertos disjuntos do $\mathbb{R}^n$ tal que cada V_i contém uma bola de raio $a_1 r$ e está contido em uma bola de raio $a_2 r$. Então qualquer bola B de raio r intercepta no máximo $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ dos fechos $\bar{V}_i$.*

Demonstração: Se $\bar{V}_i$ intercepta B , então $\bar{V}_i$ está contido na bola concêntrica com B de raio $(1 + 2a_2)r$. Suponha que q destes conjuntos $\bar{V}_i$ interceptam B , então, somando os volumes das correspondentes bolas interiores de raio $a_1 r$, segue que $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$, Portanto,

$$q \leq (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$$

.

□

Teorema 3.5 *Suponha que a condição do conjunto aberto seja válido para as similaridades $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ com razões $c_i (1 \leq i \leq m)$. Se F é um atrator do IFS $(S_1 \dots S_m)$ satisfazendo:*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

então $\dim_H F = \dim_B F = s$, onde s está dado por:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Além disso, para esse valor de s , $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Demonstração : Considere s tal que $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$. Seja I_k o conjunto das k -seqüências $(i_1, \dots, i_k)$ tal que $1 \leq i_j \leq m$. Para qualquer conjunto A e $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$, escrevemos $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. Segue, usando repetidamente a definição de F , que:

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Como a aplicação $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ é uma similaridade com razão de proporção $c_{i_1} \dots c_{i_k}$, então:

$$\sum_{I_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{I_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \dots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s$$

pela definição de s . Para qualquer $\delta > 0$, podemos escolher k tal que $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, logo $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ e portanto $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

Seja I o conjunto de todas as seqüências infinitas $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ e seja $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ o ‘cilindro’ consistindo de seqüências em I com termos iniciais $(i_1, \dots, i_k)$.

Vamos colocar uma distribuição de massa μ em I tal que $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$. Como $(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$, i.é. $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$, segue que μ é uma distribuição de massa em subconjuntos de I tal que $\mu(I) = 1$. Podemos transferir μ a uma distribuição de massa $\tilde{\mu}$ em F numa forma natural definindo $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ para subconjuntos A de F . Verifica-se facilmente que $\tilde{\mu}(F) = 1$.

$\tilde{\mu}$ satisfaz o princípio de distribuição de massa, isto é, existe $q > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\tilde{\mu}(U) \leq q|U|^s$ para todo conjunto U tal que $|U| \leq \delta$. De fato: Seja V o conjunto aberto da condição do conjunto aberto. Como $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$, a sequência decrescente de iterados $S^k(\bar{V})$ converge para F , pois $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. Em particular $\bar{V} \supset F$ e $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$ para cada sequência infinita $(i_1, \dots, i_k)$. Seja B uma bola arbitrária de raio $r < 1$. Estimamos $\tilde{\mu}(B)$ considerando os conjuntos $V_{i_1, \dots, i_k}$ com diâmetros comparáveis com o de B e com fechos que interceptam $F \cap B$.

Reduzimos cada sequência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ logo após o primeiro termo i_k para o qual

$$\left(\min_i c_i\right) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r \quad (3.2)$$

e seja Q o conjunto finito de todas as seqüências (finitas) obtidas desta maneira. Então, para cada seqüência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exatamente um valor de k tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Como $V_1, \dots, V_m$ são disjuntos, então também o são $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$ para cada $(i_1, \dots, i_k)$. Usando isto em forma encaixada, segue que a coleção de conjuntos abertos $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ é disjunta. Similarmente $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$.

Podemos escolher a_1 e a_2 de modo que V contém uma bola de raio a_1 e está contido em uma bola de raio a_2 . Então para $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ o conjunto $V_{i_1, \dots, i_k}$ contém uma bola de raio $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_1$ e portanto contém uma bola de raio $(\min_i c_i) a_1 r$, e está contido numa bola de raio $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2$ e logo está contido em uma bola de raio $a_2 r$. Denotemos Q_1 as seqüências $(i_1, \dots, i_k)$ em Q tal que B intercepta $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Pelo lema(3.4) existem no máximo $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ seqüências em Q_1 . Então:

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\}$$

pois, se $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$, então existe um inteiro k tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$. Assim:

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q.$$

Como qualquer conjunto U está contido numa bola de raio $|U|$, temos que $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$, logo, se $\{U_i\}$ é uma cobertura de F , então $0 < \tilde{\mu}(F) \leq \tilde{\mu}(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(U_i) \leq q \sum_i |U_i|^s$, logo $\mathcal{H}^s(F) \geq \tilde{\mu}(F) q^{-1} = q^{-1}$ e $\dim_H F = s$.

Se Q é um conjunto arbitrário de seqüências finitas tal que para cada $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exatamente um inteiro k e $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, temos, por indução da definição de s ,

que $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})^s = 1$. Assim, se escolhemos Q como em (3.2), Q contém no máximo $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ seqüências. Para cada seqüência $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ temos $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r |\overline{V}|$, logo podemos cobrir F com $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ conjuntos de diâmetro $r |\overline{V}|$ para cada $r < 1$. Segue da definição equivalente da capacidade limite que $\overline{\dim}_B F \leq s$, note:

$$s = \dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq s$$

$$\therefore \dim_H(F) = \dim_B(F) = s.$$

□

Podemos adaptar o teorema anterior, para estimar a dimensão do conjunto invariante (atrator) F de uma coleção de contrações que não são similaridades.

Proposição 3.6 : *Sejam $S_1, \dots, S_m$ contrações em um subconjunto fechado D de $\mathbb{R}^n$ tal que:*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

com $c_i < 1$ para cada i . Então $\dim_H F \leq s$ e $\overline{\dim}_B F \leq s$, onde:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Demonstração: É análoga a do teorema(3.5), notando que temos a desigualdade :

$$|A_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \dots c_{i_k} |A|$$

para todo conjunto A .

□

Proposição 3.7 : *Sejam $S_1, \dots, S_m$ contrações em um conjunto fechado D de $\mathbb{R}^n$ tal que:*

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D)$$

e $0 < b_i < 1$ para cada i . Suponha que F é invariante pelas S_i ,

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

com a união disjunta. Então $\dim_H F \geq s$, onde:

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1.$$

Demonstração: Seja $d > 0$ a menor distância entre qualquer par dos conjuntos compactos disjuntos $S_1(F), \dots, S_m(F)$, isto é,

$$d = \min_{i \neq j} \inf \{|x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}.$$

Considere $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ e defina μ por $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s$. Como

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \dots b_{i_k} b_i)^s = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right)$$

segue que μ é uma distribuição de massa em F , tal que $\mu(F) = 1$.

Se $x \in F$, então existe uma única sequência infinita $i_1, i_2, \dots$ tal que $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$ para todo k . Para $0 < r < d$ seja k o menor inteiro tal que:

$$b_{i_1} \dots b_{i_k} d \leq r \leq b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d.$$

Se $i'_1, \dots, i'_k$ é distinto de $i_1, \dots, i_k$, os conjuntos $F_{i_1, \dots, i_k}$ e $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ são disjuntos e separados por uma distância de pelo menos $b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d > r$, pois se j é o menor inteiro tal que $i_j \neq i'_j$ então $F_{i_j, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$ e $F_{i'_j, \dots, i'_k} \subset F_{i'_j}$ estão separados por d , logo $F_{i_1, \dots, i_k}$ e $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ estão separados por pelos menos $b_{i_1} \dots b_{i_{j-1}} d$. Segue que $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$, logo

$$\mu(F \cap B(x, r)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Se U intercepta F , então $U \subset B(x, r)$ para algum $x \in F$ com $r = |U|$. Assim, $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$, logo pelo princípio de distribuição de Massa, $\mathcal{H}^s(F) > 0$ e $\dim_H F \geq s$. $\square$

Exemplo 3.8 (O Conjunto de Cantor não linear) *Sejam $D = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})]$ e $S_1, S_2 : D \rightarrow D$ dadas por $S_1(x) = 1 + 1/x$, $S_2(x) = 2 + 1/x$. Então:*

$$0.44 < \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F < 0.66$$

onde F é o atrator de $\{S_1, S_2\}$.

Note que $S_1(D) = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), \sqrt{3}]$ e $S_2(D) = [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}), 1 + \sqrt{3}]$ logo, podemos usar as proposições (3.6) e (3.7) para estimar $\dim_H(F)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \neq y \in D$, então $(S_i(x) - S_i(y))/(x - y) = S'_i(z_i)$ para algum $z_i \in D, i = 1, 2$. Assim, para $i = 1, 2$.

$$\inf_{x \in D} |S'_i(x)| \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{x \in D} |S'_i(x)|.$$

Como $S'_1(x) = S'_2(x) = -1/x^2$, temos:

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^{-2} \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x - y|} \leq \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\right)^{-2} = 2(2 - \sqrt{3})$$

para $i = 1, 2$. Usando as proposições (3.6) e (3.7), obtemos um limite inferior e superior para a dimensão, que são dadas pelas soluções:

$$s = \log 2 / (\log 2(2 - \sqrt{3})) = 0.34$$

e

$$s = \log 2 / (\log \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})) = 1.11$$

respectivamente.

Para um subconjunto da reta, o limite superior maior do que 1 não é de muito interesse. Uma maneira de obter uma melhor estimativa é a seguinte: F também é um conjunto invariante pelas quatro aplicações em $[0, 1]$

$$S_i \circ S_j = i + \frac{1}{(j + \frac{1}{x})} = i + \frac{x}{(jx + 1)} \quad (i, j = 1, 2).$$

Calculando as derivadas e usando o teorema do valor médio como antes, obtemos:

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx + 1)^{-2}$$

logo:

$$(j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq (\frac{1}{2}j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y|.$$

Como anteriormente os limites superior e inferior para as dimensões estão dados pelas soluções de $2(2 + \sqrt{3})^{-2s} + 2(3 + 2\sqrt{3})^{-2s} = 1$ e $2(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}))^{-2s} + 2(2 + \sqrt{3})^{-2s} = 1$, e obtemos $0.44 < \dim_H F < 0.66$.

Capítulo 4

Sistemas dinâmicos

Este capítulo é formado por exemplos de sistemas dinâmicos. Exibimos o conjunto invariante (atrator ou repulsor) de cada exemplo e calculamos ou estimamos a dimensão de Hausdorff dos mesmos e comentamos a natureza caótica de f no conjunto invariante.

Note que, sob certa circunstância um repulsor em um sistema dinâmico coincide com o atrator de um sistema de funções iteradas.

4.1 Função tenda

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$$

tal função é chamada de função tenda, devido ao seu gráfico.

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ -3x + 3, & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos definir o sistema de funções iteradas $S_1, S_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dado pelas contrações : $S_1 = \frac{1}{3}x$ e $S_2 = 1 - \frac{1}{3}x$, temos:

$$f(S_1) = f(S_2) = x$$

para todo $0 \leq x \leq 1$. Assim S_1 e S_2 são dois ramos da f^{-1} , pelo teorema 3.2 existe um único atrator compacto não vazio $F \subset [0, 1]$, tal que:

$$F = S_1(F) \cup S_2(F) \tag{4.1}$$

onde $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k([0, 1])$ e $S(E) = S_1(E) \cup S_2(E)$. Note que F é o conjunto ternário de Cantor. De fato:

$$S([0, 1]) = S_1([0, 1]) \cup S_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

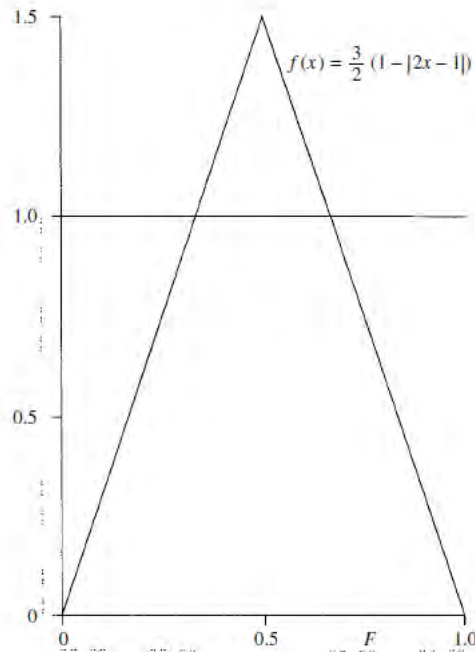


Figura 4.1: Gráfico da função tenda

$$S^2([0, 1] = S(S([0, 1])) = S_1(S([0, 1]) \cup S_2(S([0, 1]) =$$

$$= S_1(S_1([0, 1]) \cup S_2([0, 1])) \cup S_2(S_1([0, 1]) \cup S_2([0, 1])) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Continuando este processo temos F é o conjunto ternário de Cantor com dimensão de Hausdorff $\frac{\log 2}{\log 3}$, e note que F é invariante em f , temos em (4.1):

$$F = S_1(F) \cup S_2(F) \implies f(F) = f(S_1(F) \cup S_2(F)) = F$$

F é um repulsor em f : De fato: se $x < 0$ então $f(x) = 3x$, assim $f^k(x) = 3^k x \rightarrow -\infty$ com $k \rightarrow \infty$, se $x > 1$, $f(x) = -3x + 3 < 0$ e temos, $f^k(x) \rightarrow -\infty$ pelo caso anterior. Se $x \in [0, 1] \cap F^c$, então para algum k temos, $x \notin S^k([0, 1]) = \bigcup \{S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}([0, 1]), i_j = 1, 2\}$. Assim $f^k(x)$ não pertence ao intervalo $[0, 1]$, logo $f^k(x) \rightarrow -\infty$ com $k \rightarrow \infty$. Portanto, para todo ponto fora de F os iterados vão para $-\infty$, assim F é um repulsor em f .

Seguindo a notação definida no capítulo anterior, para todo ponto de F .

$$x_{i_1 i_2 \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}([0, 1])$$

$i_j = \{1, 2\}$, temos:

$$|x_{i_1 i_2 \dots} - x_{i'_1 i'_2 \dots}| \leq 3^{-k} \text{ se } i_1 = i'_1 \dots i_k = i'_k$$

e como,

$$x_{i_1 i_2 \dots} = S_{i_1}(x_{i_2 i_3 \dots}) \implies f(x_{i_1 i_2 \dots}) = x_{i_2 i_3 \dots}$$

Suponha que $(i_1 i_2 i_3 \dots)$ uma sequência infinita com termos $\{1, 2\}$ aparecendo em blocos consecutivos:

$$(1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, \dots).$$

Seja $x_{i_1' i_2' \dots} \in F$ e para todo inteiro q podemos encontrar k , tal que:

$$|x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots} - x_{i_1' i_2' \dots}| \leq 3^{-q}$$

logo o iterado $f^k(x_{i_1 i_2 \dots}) = x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots}$ fica arbitrariamente próximo a cada ponto de F , assim f tem órbita densa em F . Similarmente:

$$|x_{i_1 i_2 \dots} - x_{i_1 \dots i_k i_1 \dots}| \leq 3^{-k}$$

logo os pontos periódicos são densos em F .

A iterada tem grande sensibilidade as condições iniciais, pois:

$$|x_{i_1 i_2 \dots i_k, 1, \dots} - x_{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k, 2, \dots}| \leq 3^{-k}$$

mas,

$$f^k(x_{i_1 i_2 \dots i_k, 1, \dots}) \in [0, \frac{1}{3}]$$

$$f^k(x_{i_1 i_2 \dots i_k, 2, \dots}) \in [\frac{2}{3}, 1]$$

Assim, concluímos que F é um repulsor caótico para f .

Esse estudo de f nos pontos de F que são representados por sequências $(i_1 i_2 \dots)$ é conhecido como dinâmica simbólica.

Observação: Se $S_1, \dots, S_m$ é um conjunto de contrações no domínio D com F atrator, tal que $S_1(F), \dots, S_m(F)$ são disjuntos, então F é um repulsor para toda função f tal que $f(x) = S_i^{-1}(x)$.

4.2 A família logística

Considere o modelo logístico $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

onde λ é uma constante positiva.

Para $\lambda > 2 + \sqrt{5} = 4.236$, obtemos uma versão não linear da função tenda repulsor. Considere as raízes de $f_\lambda(x) = 1$ sendo:

$$a = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$$

e

$$1 - a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$$

Note que nos intervalos $[0, a]$ e $[1 - a, 1]$ em $[0, 1]$ a função f_λ é bijetora, assim podemos definir sua inversa $S_1 : [0, 1] \rightarrow [0, a]$ e $S_2 : [0, 1] \rightarrow [1 - a, 1]$ dado por:

$$S_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda}} \text{ e } S_2(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda}}$$

Assim $f_\lambda(S_1(x)) = f_\lambda(S_2(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, e para $i = 1, 2$ temos:

$$|S'_i(x)| = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Afirmção: $|S'_i(x)|$ é crescente.

De fato:

$$|S'_i(x)| = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{4\lambda}{\lambda - 4x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Considere, $x, y \in [0, 1]$ tal que $x < y$ e $\lambda > 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow 4x < 4y \Rightarrow -4x > -4y \Rightarrow \lambda - 4x > \lambda - 4y \Rightarrow \frac{1}{\lambda - 4x} < \frac{1}{\lambda - 4y} \\ &\Rightarrow \frac{4\lambda}{\lambda - 4x} < \frac{4\lambda}{\lambda - 4y} \Rightarrow \left(\frac{4\lambda}{\lambda - 4x} \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{4\lambda}{\lambda - 4y} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{4\lambda}{\lambda - 4x} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{4\lambda}{\lambda - 4y} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Portanto, para todo $x, y \in [0, 1]$ tal que $x < y$ implica $|S'_i(x)| < |S'_i(y)|$.

Assim,

$$\frac{1}{\lambda} \leq |S'_i(x)| \leq \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} = (\lambda^2 - 4\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Pelo teorema do valor médio temos:

$$\frac{1}{\lambda} |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq (\lambda^2 - 4\lambda)^{-\frac{1}{2}} |x - y| \quad (4.2)$$

para $0 \leq x, y \leq 1$. Assim se $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ as funções S_1 e S_2 são contrações em $[0, 1]$, logo pelo teorema 3.2 o sistema de funções iteradas $\{S_1, S_2\}$ tem um único atrator F (não vazio compacto), tal que $F \subset [0, 1]$ e:

$$F = S_1(F) \cup S_2(F)$$

Portanto, $f_\lambda(F) = F$ e da mesma forma que a função tenda, F é um repulsor de f_λ e f_λ é caótica em F .

Para estimar a dimensão de Hausdorff de F , vamos proceder como no exemplo(3.8) e usando as proposições 3.6, 3.7, segue-se de (4.2)

$$\frac{\log 2}{\log \lambda} \leq \dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \frac{\log 2}{\log \lambda (1 - \frac{4}{\lambda})^{\frac{1}{2}}}$$

Portanto, para λ grande a dimensão de Haudorff F está próximo de $\frac{\log 2}{\log \lambda}$.

4.3 Função do Padeiro

Um dos mais simples sistemas dinâmicos com um atrator fractal, é a função do padeiro, assim chamado pois assemelha-se ao processo de esticar e dobrar um pedaço de massa repetidamente .

Seja $E = [0, 1] \times [0, 1]$ sendo o quadrado unitário para λ fixo, com $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Definimos a função do padeiro $f : E \longrightarrow E$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \lambda y + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Esta função pode ser representada como o alongamento de E em um retângulo $2 \times \lambda$, cortando ao meio esse retângulo, obtemos dois retângulo $1 \times \lambda$, colocando um em cima do outro com uma distância de $\frac{1}{2} - \lambda$.

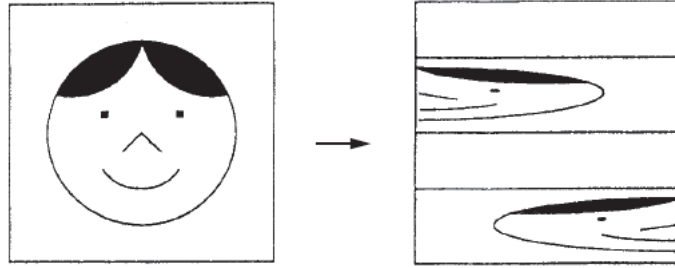


Figura 4.2: Função do Padeiro

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \lambda y + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f^2(x, y) = \begin{cases} (4x, \lambda^2 y) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ (4x - 1, \lambda^2 y + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ (4x - 2, \lambda^2 y + \frac{1}{2}\lambda) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ (4x - 3, \lambda^2 y + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

Suponha que seja verdade para k:

$$f^k(x, y) = \begin{cases} (2^k x, \lambda^k y) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^k} \\ (2^k x - 1, \lambda^k y + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2^k} < x \leq \frac{2}{2^k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2^k x - (2^k - 4), \lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-2} \dots + \frac{1}{2} \lambda) & \text{se } \frac{2^{k-4}}{2^k} < x \leq \frac{2^{k-3}}{2^k} \\ (2^k x - (2^k - 3), \lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-2} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{2^{k-3}}{2^k} < x \leq \frac{2^{k-2}}{2^k} \\ (2^k x - (2^k - 2), \lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda) & \text{se } \frac{2^{k-2}}{2^k} < x \leq \frac{2^{k-1}}{2^k} \\ (2^k x - (2^k - 1), \lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{2^{k-1}}{2^k} < x \leq 1 \end{cases}$$

Mostraremos por indução que $f^k(x, y)$ é válido para todo k. Note que na primeira sentença de $f^k(x, y)$.

$$f(2^k x, \lambda^k y) = \begin{cases} (2(2^k x), \lambda(\lambda^k y)) & \text{se } 0 \leq 2^k x \leq \frac{1}{2} \\ (2(2^k x) - 1, \lambda(\lambda^k y) + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} < 2^k x \leq 1 \end{cases}$$

Assim para toda sentenças de $f^k(x, y)$, temos :

$$f(f^k(x, y)) = \begin{cases} (2(2^k x), \lambda(\lambda^k y)) & \text{se } 0 \leq 2^k x \leq \frac{1}{2} \\ (2(2^k x) - 1, \lambda(\lambda^k y) + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} < 2^k x \leq 1 \\ (2(2^k x - 1), \lambda(\lambda^k y + \frac{1}{2})) & \text{se } 0 < 2^k x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ (2(2^k x - 1) - 1, \lambda(\lambda^k y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} < 2^k x - 1 \leq 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2(2^k x - (2^k - 1)), \lambda(\lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2})) & \text{se } \frac{2^k}{2^{k+1}} < x \leq \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \\ (2(2^k x - (2^k - 1)) - 1, \lambda(\lambda^k y + \frac{1}{2} \lambda^{k-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} < x \leq 1 \end{cases}$$

Logo $f^{k+1}(x, y)$ é dado pela seguinte forma:

$$f^{k+1}(x, y) = \begin{cases} (2^{k+1} x, \lambda^{k+1} y) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ (2^{k+1} x - 1, \lambda^{k+1} y + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2^{k+1}} < x \leq \frac{2}{2^{k+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2^{k+1} x - (2^{k+1} - 4), \lambda^{k+1} y + \frac{1}{2} \lambda^{(k+1)-2} \dots + \frac{1}{2} \lambda) & \text{se } \frac{2^{(k+1)-4}}{2^{k+1}} < x \leq \frac{2^{(k+1)-3}}{2^{k+1}} \\ (2^{k+1} x - (2^{k+1} - 3), \lambda^{k+1} y + \frac{1}{2} \lambda^{(k+1)-2} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{2^{(k+1)-3}}{2^{k+1}} < x \leq \frac{2^{(k+1)-2}}{2^{k+1}} \\ (2^{k+1} x - (2^{k+1} - 2), \lambda^{k+1} y + \frac{1}{2} \lambda^{(k+1)-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda) & \text{se } \frac{2^{(k+1)-2}}{2^{k+1}} < x \leq \frac{2^{(k+1)-1}}{2^{k+1}} \\ (2^{k+1} x - (2^{k+1} - 1), \lambda^{k+1} y + \frac{1}{2} \lambda^{(k+1)-1} \dots + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2}) & \text{se } \frac{2^{(k+1)-1}}{2^{k+1}} < x \leq 1 \end{cases}$$

completando a prova por indução de $f^k(x, y)$.

Se $E_k = f^k(E)$, logo E_k é uma sequência decrescente de conjuntos, onde E_k é formado por 2^k faixas horizontais de altura λ^k separados por uma lacuna de pelo menos $(\frac{1}{2} - \lambda)\lambda^{k-1}$.

Como $f(E_k) = E_{k+1}$, o conjunto limitado compacto $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, satisfaz $f(F) = F$. Se $(x, y) \in E$ então $f^k(x, y) \in E_k$, assim $f^k(x, y)$ fica dentro de uma distância λ^k de F , logo todos os pontos de E são atraídos para F por iterações de f^k quando k tende ao infinito.

Se o ponto inicial (x, y) tem representação na base 2, $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$ com $x \neq \frac{1}{2}, 1$ então, podemos facilmente observar que:

$$f^k(x, y) = (0.a_{k+1}a_{k+2}a_{k+3} \dots, y_k)$$

onde y_k é um ponto em E_k , como E_k é formado por 2^k faixas horizontais, se enumerarmos essas faixas de modo adequado, podemos descobrir em qual das 2^k faixas de E_k y_k pertence, a partir da sequência $a_k a_{k-1} \dots a_1$.

Assim ao escolher um x com expansão na base 2 contendo todas as sequências finitas, podemos encontrar $f^k(x, y)$ que é denso em F , como visto na função tenda podemos mostrar que f é sensível as condições iniciais e os pontos periódicos são densos em F . Portanto F é um atrator caótico em f .

Podemos notar, F é o produto cartesiano $[0, 1] \times F_1$ onde F_1 é um conjunto de Cantor que é atrator do IFS formado por $S_1 = \lambda x$, $S_2 = \lambda x + \frac{1}{2}$, pelo teorema(3.2)

$$\dim_H F_1 = \dim_B F_1 = \frac{\log 2}{-\log \lambda}$$

Assim

$$\dim_H F = 1 + \frac{\log 2}{-\log \lambda}$$

utilizando o Corolário A.1.

4.4 O Solenóide

Nosso próximo exemplo é uma transformação em uma região 3-dimensional, o sólido toro. Se um disco unitário B é rotacionado 360° graus sobre um eixo L em um plano, que não intercepta B , este sólido D é chamado toro.

O toro D pode ser representado pelo produto cartesiano de um círculo C de raio $r > 1$ (obtido da rotação do centro de B em torno de L) e B , onde B é um disco unitário. Logo temos uma parametrização conveniente de D dada por:

$$\{(\phi, w) \in C \times B : 0 \leq \phi < 2\pi, |w| \leq 1\}$$

onde o ângulo ϕ determina um ponto em C , w é a posição do vetor relativo ao centro de B (ver fig:4.3).

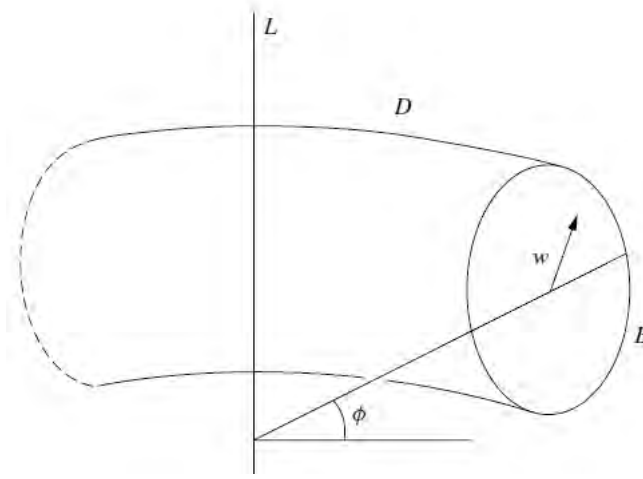


Figura 4.3: Parametrização do toro .

Fixe $0 < a < \frac{1}{4}$ e defina $f : D \rightarrow D$ por:

$$f(\phi, w) = \left(2\phi(\text{mod } 2\pi), aw + \frac{1}{2}\hat{\phi} \right)$$

onde $\hat{\phi}$ é o vetor unitário em B com ângulo ϕ

Considere, P_ϕ semi-plano limitado por L que intercepta C em ϕ , observe que:

$$f(\phi, w) = \left(2\phi(\text{mod } 2\pi), aw + \frac{1}{2}\hat{\phi} \right)$$

Seja $\phi \in [0, 2\pi)$ temos $f(D) \cap P_\phi$ é formado por dois discos de raio a .

De fato: Seja $\phi_1 = \frac{\phi}{2}$ e $\phi_2 = \frac{\phi}{2} + \pi$

$$f(\phi_1, w) = (2\phi_1(\text{mod } 2\pi), aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_1) = (\phi, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_1)$$

$$f(\phi_2, w) = (2\phi_2(\text{mod } 2\pi), aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_2) = (\phi, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_2)$$

observe que $f(\phi_1, w)$ e $f(\phi_2, w)$ pertencem a $f(D) \cap P_\phi$, pois a primeira coordenada é ϕ , como $0 < a < \frac{1}{4}$, a segunda coordenada é uma contração do disco B , seguida de uma translação, os centros dos novos discos formados estão diametralmente opostos em relação ao centro de B com distância $\frac{1}{2}$ do centro de B .

Observe agora o que ocorre para $f^2(D) \cap P_\phi$,

Seja $\phi_1^* = \frac{\phi}{4}$, $\phi_2^* = \frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $\phi_3^* = \frac{\phi}{4} + \pi$, $\phi_4^* = \frac{\phi}{4} + \frac{3\pi}{2}$

$$f^2(\phi_1^*, w) = f(f(\phi_1^*, w)) = f(\phi_1, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_1^*) = (\phi, a^2w + \frac{1}{2}a\hat{\phi}_1^* + \frac{1}{2}\hat{\phi}_1)$$

$$f^2(\phi_2^*, w) = f(f(\phi_2^*, w)) = f(\phi_2, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_2^*) = (\phi, a^2w + \frac{1}{2}a\hat{\phi}_2^* + \frac{1}{2}\hat{\phi}_2)$$

$$f^2(\phi_3^*, w) = f(f(\phi_3^*, w)) = f(\phi_1, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_3^*) = (\phi, a^2w + \frac{1}{2}a\hat{\phi}_3^* + \frac{1}{2}\hat{\phi}_1)$$

$$f^2(\phi_4^*, w) = f(f(\phi_4^*, w)) = f(\phi_2, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi}_4^*) = (\phi, a^2w + \frac{1}{2}a\hat{\phi}_4^* + \frac{1}{2}\hat{\phi}_2)$$

Assim, $f^2(\phi_1^*, w)$, $f^2(\phi_2^*, w)$, $f^2(\phi_3^*, w)$, $f^2(\phi_4^*, w) \in f^2(D) \cap P_\phi$, como $f^2(\phi_i^*, w)$ com $i = 1, 2, 3, 4$ é uma contração de B com fator de contração a^2 seguido de duas translações, logo $f^2(\phi_i^*, w)$ é formado por 4 discos disjuntos de raio a^2 . Podemos mostrar por indução que $f^n(D) \cap P_\phi$ é formado por 2^n discos disjuntos de raio a^n .

Logo a função f em D é um tubo sólido de raio a dando duas volta em D , assim $f^2(D)$ é um tubo sólido de raio a^2 dando duas voltas em $f(D)$, logo da quatro voltas em D . $f^n(D)$ é um tubo sólido de raio a^n dando 2^n voltas em D .

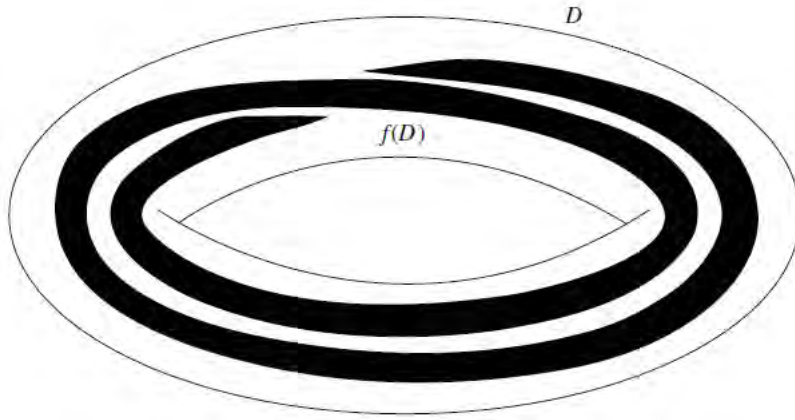


Figura 4.4: O toro D e a imagem $f(D)$.

A intersecção $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(D)$, é invariante em f e atrai todos os pontos de D . De fato, considere um ponto $(\alpha, x) \in D$, logo $f^k(\alpha, x) \in f^k(D)$, logo $f^k(\alpha, x)$ está a pelo menos uma distância de a^k de F , como $a < \frac{1}{4}$ fazendo $k \rightarrow \infty$, temos que todos os pontos de D são atraídos para F por $f^k, k = 1, 2, \dots$

Observação :O conjunto $F \cap P_\phi$, considerando P_ϕ definido anteriormente, é um conjunto de Cantor (ver figura (4.5)). O conjunto F é chamado solenóide.

Podemos encontrar a dimensão de Hausdorff de F . Note $f^k(C) = f^k(\phi, 0)$ com $\phi \in [0, 2\pi]$ é uma curva suave fechada que dá 2^k voltas em D , com comprimento total de $2^k c$ onde c é independente de k , isto pode ser provado, observando (quando $w = 0$), $f(\phi, 0)$ intercepta dois pontos distintos de $D \cap P_\phi$ para todo $\phi \in [0, 2\pi]$, $f^2(\phi, 0)$ intercepta quatro pontos distintos de $D \cap P_\phi$ para todo $\phi \in [0, 2\pi]$, $f^k(\phi, 0)$ intercepta 2^k pontos distintos de $D \cap P_\phi$ para todo $\phi \in [0, 2\pi]$.

O conjunto $f^k(D)$ é a dilatação da curva $f^k(C)$ em um tubo de raio a^k , assim podemos encontrar uma cobertura de $f^k(D)$ por bolas abertas de raio $2a^k$ espaçadas por um intervalo a^k

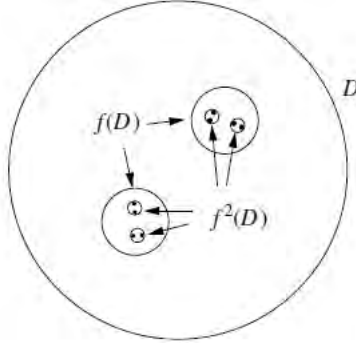


Figura 4.5: O conjunto de Cantor $F \cap P_\phi$.

em $f^k(C)$. Assim $2^k ca^{-k}$ bolas de raio $2a^k$ cobre $f^k(D)$, aplicando a Proposição 2.14, temos:

$$\begin{aligned} \dim_H F &\leq \overline{\dim}_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k ca^{-k}}{-\log 4a^k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k ca^{-k}}{-\log 4a^k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 4a^k} + \frac{\log c}{-\log 4a^k} + \frac{\log a^{-k}}{-\log 4a^k} = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 4a^k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log c}{-\log 4a^k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log a^{-k}}{-\log 4a^k} &= 1 + \frac{\log 2}{-\log a} \\ \therefore \dim_H F &\leq \dim_B F \leq 1 + \frac{\log 2}{-\log a} \end{aligned}$$

Para obter uma estimativa inferior, para a dimensão de Hausdorff de F , considere as seções (conjunto de Cantor ver fig(4.5)) $F \cap P_\phi$ para todo $\phi \in [0, 2\pi)$, seja $B_\phi = D \cap P_\phi$, como visto anteriormente, $f(D) \cap P_\phi$ é formado por dois discos (B_ϕ^1, B_ϕ^1) de raio a situados diametralmente opostos ao centro de B_ϕ com distância $\frac{1}{2}$, cada um desses discos B_ϕ^1 contém dois discos de $f^2(D) \cap P_\phi$ (B_ϕ^2, B_ϕ^2) com raio a^2 situados diametralmente opostos ao centro de B_ϕ^1 com distância $\frac{1}{2}a$, assim $f^k(D) \cap P_\phi$ é formado por 2^k discos de raio a^k disjuntos. Podemos colocar uma distribuição de massa μ em $F \cap P_\phi$, de modo que cada um dos 2^k discos de $f^k(D) \cap P_\phi$ recebe uma massa de 2^{-k} . Considere $U \subset P_\phi$ que satisfaz:

$$a^k(1 - 2a) \leq |U| \leq a^{k-1}(1 - 2a)$$

para algum inteiro k positivo, então U intercepta no máximo um disco de $f^k(D) \cap P_\phi$. Assim,

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = a^{k(\frac{\log 2}{-\log a})} \leq C_1 |U|^{\frac{\log 2}{-\log a}}$$

onde C_1 é independente de $|U|$, assim pelo princípio de distribuição de massa, proposição(2.15), temos:

$$\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{-\log a}}(F \cap P_\phi) \geq C_1^{-1}.$$

Logo $\frac{\log 2}{-\log a} \leq \dim_H F \cap P_\phi$, como F é formado pelo produto cartesiano de C e $F \cap P_\phi$, temos:

$$\dim_H F \geq 1 + \frac{\log 2}{-\log a}$$

$$\therefore \dim_H F = \dim_B F = 1 + \frac{\log 2}{-\log a}$$

Observação: se $\frac{\phi}{2\pi} = 0, a_1, a_2, a_3 \dots$ com representação na base 2, segue que:

$$f^k(\phi, w) = (\phi_k, v_k)$$

onde $\frac{\phi_k}{2\pi} = 0, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3} \dots$. Note que nesse exemplo, quando utilizamos números com representações na base 2, podemos prever o que ocorre em f^k , a partir das sequências com representações na base 2 dos pontos iniciais, assim do mesmo modo que nos exemplos anteriores f é caótica em F .

Apêndice A

Informações adicionais

A.1 Conjunto ternário de Cantor

Vejamos um exemplo clássico de um conjunto fractal, com dimensão de Hausdorff $\frac{\log(2)}{\log(3)}$, chamado conjunto ternário de Cantor.

Inicie com o intervalo $[0, 1]$ e retire seu terço médio aberto: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Restam dois intervalos dos quais você retira novamente o terço médio aberto de cada um deles. Sucessivamente. O conjunto que resta F é chamado conjunto ternário de Cantor.

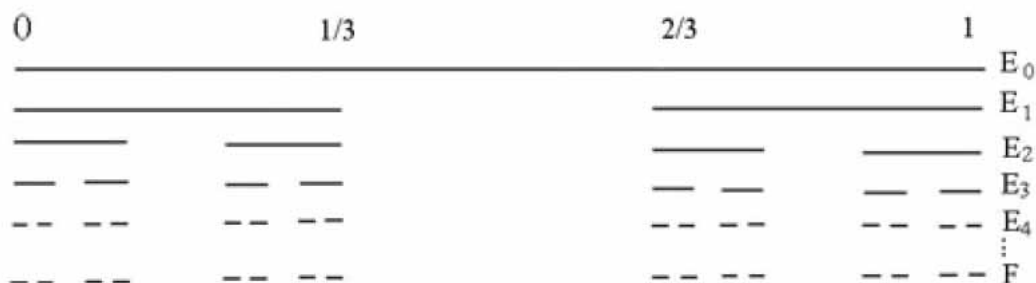


Figura A.1: Conjunto de Cantor.

Podemos provar, ele não é enumerável porque existe uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$. Basta observar que, pela própria construção, os pontos de F só tem dígitos 0 ou 2 na expansão de base 3. Os pontos de $[0, 1]$ só tem dígitos 0 e 1 na base 2. Definimos, então, uma função de F em $[0, 1]$ usando a base 3 e a base 2 simplesmente transformando os dígitos 0 e 2 em dígitos 0 e 1, respectivamente.

Os pontos do conjunto ternário de Cantor tem uma caracterização em termos de sua representação na base 3. Seja $x \in [0, 1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$

onde cada um dos dígitos a_i é igual 0,1 ou 2 tal que:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

Note que na primeira iteração o intervalo se divide em dois intervalos que chamaremos de E_1^1 e E_1^2 e os números pertencentes a E_1^1 na expansão de base 3 sempre começa por 0,0.... e de E_1^2 por 0,2... na segunda iteração temos quatro intervalos, $E_2^1, E_2^2, E_2^3, E_2^4$ na expansão na base 3 E_2^1 seus elementos tem o começo 0,00..., E_2^2 seus elementos tem o começo 0,02..., E_2^3 seus elementos tem o começo 0,20... e E_2^4 seus elementos tem o começo 0,22... , assim sucessivamente nas próximas iterações.

F é compacto, de fato, considere $E_k = E_k^1 \cup E_k^2 \cup \dots \cup E_k^{2^k}$, $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, com E_k é fechado (união enumerável de fechados) temos F é fechado e $F \subset [0, 1]$, logo é limitado, portanto F é compacto.

Medida de Lebesgue de F é nula, ou seja, $\mathcal{L}^1(F) = 0$, observe que $\mathcal{L}^1(F^c) = 1$, pois:

$$\mathcal{L}^1(F^c) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 4\frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3}(1 + 2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3^2} + \dots) = \frac{1}{3}(\frac{1}{1}) = 1$$

como $F \subset [0, 1]$, e F e F^c são disjuntos, temos $\mathcal{L}^1(F) = 0$.

F é um conjunto perfeito, isto é, se é fechado e cada um dos seus pontos é um ponto de acumulação de F .

De fato: como F é compacto e portanto é fechado. Provemos que cada um de seus pontos é um ponto de acumulação.

Seja $p \in F$, considere C uma componente de E_k que contém p , então $C \cap E_{k+1}$ é composto por dois intervalos, de modo que a intersecção entre cada etapa do conjunto de Cantor é diferente do vazio, seja a_j um dos pontos finais do intervalo de $C \cap E_{k+1}$ que não contém p , então $a_j \neq p$, $|p - a_j| < \frac{1}{3^k}$, e $a_j \in F$ para todo j inteiro positivo, pois a_j são extremos de um intervalo E_k^i

Assim existe uma sequência de pontos de F distintos de p convergindo para p , logo F é perfeito.

F é totalmente desconexo, isto é, os únicos subconjuntos conexos são formados por um único ponto.

De fato : suponha que exista $]a, b[\subset F$ com $0 < a < b < 1$, logo existe k tal que $\frac{1}{3^k} < b - a$, como $F \subset E_k$ onde E_k é formado por 2^k conjuntos disjuntos de comprimento $\frac{1}{3^k}$

$$E_k = E_k^1 \cup E_k^2 \cup \dots \cup E_k^{2^k}$$

portanto, $]a, b[\not\subset E_k$. Absurdo, logo não existe intervalo $]a, b[$ em F

Definição A.1 Um conjunto E é chamado conjunto de Cantor, se as seguintes propriedades são válidas:

i) E é compacto.

- ii) E tem interior vazio (não contém intervalos).
- iii) E não tem pontos isolados (todos seus pontos são pontos de acumulação)
- iv) E é não- enumerável.

A.2 Caos (segundo Devaney)

Definição A.2 $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$. Dizemos que f é caótica se ocorrem as seguintes propriedades:

- i) Pontos periódicos são densos em $[\alpha, \beta]$.
- ii) f é transitiva , isto é, dado $I, J \subset [\alpha, \beta]$ existe $x_0 \in I$ e existe $n > 0$ tal que, $f^n(x_0) \in J$.
- iii) f tem sensibilidade as condições iniciais, isto é:

Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x_0 \in [\alpha, \beta]$ e para todo $U \subset [\alpha, \beta]$ aberto com $x_0 \in U$, existe $y_0 \in U$, existe $n > 0$ tal que :

$$| f^n(x_0) - f^n(y_0) | > \epsilon$$

Observação A.3 f é transitiva $\Leftrightarrow$ existe órbita densa em f .

A.3 Dimensão de Hausdorff (produto cartesiano)

Nesta dissertação usaremos alguns resultados, onde omitiremos a sua demonstração devido fugir do contexto do trabalho .

Teorema A.4 Se $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos de Borel, então:

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H E + \dim_H F.$$

Teorema A.5 Para quaisquer conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^m$

$$\dim_H(E \times F) \leq \dim_H E + \overline{\dim}_B F.$$

Corolário A.6 Se $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$, então:

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F.$$

As demonstrações dos resultados acima pode ser encontrado em [5].

Referências Bibliográficas

- [1] Bartle R. G., *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley Sons, New York,(1995).
- [2] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [3] Doreing C.I. e Lopes A.O.,*Equações diferenciais ordinárias* , coleção matemática universitária IMPA, Rio de Janeiro ,(2005)
- [4] Evans, L.C.; Gariepy, R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions* , CRC PRESS,(1992).
- [5] Falconer, K., R., *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, 2nd. WILEY, (2005).
- [6] Lima, E. L., *Analise Real*, 10nd. ed. Rio de Janeiro, IMPA. (2008).

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 30/03/2012

Bruno D Lopes
Assinatura