

UNESP
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2012

VICTOR ALVES AMORIM

INTRODUÇÃO AOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS DE T'HOOFT E
POLYAKOV

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof.º. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá
2012

Amorim, Victor Alves
A524i Introdução aos monopolos magnéticos de T'Hooft e
Polyakov / Victor Alves Amorim. – Guaratinguetá : [s.n.],
2012
52 f. : il.
Bibliografia: f. 52

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012
Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Teoria geral de partículas e campos I. Título


CDU 539.12

VICTOR ALVES AMORIM

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Unesp-Feg


Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
CMCC/UFABC

Fevereiro de 2012.

DADOS CURRICULARES

VICTOR ALVES AMORIM

NASCIMENTO 05/10/1983 – Brasília – DF

FILIAÇÃO Osmar Nascimento Amorim
Ana Maria Alves

2002 – 2006 Curso de Graduação em Física – Bacharelado
Universidade Estadual Paulista – Campus de Guaratinguetá

A meus avós, José Alves da Silva e Ana Nogueira Alves. Ele, minha figura paterna e exemplo de dedicação à família, um homem único. Ela, doce e singela, formava junto com ele um casal símbolo de união, amor e simplicidade. Quanta saudade de vocês!

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar devo agradecer a meu orientador, Prof . Dr. *Julio Marny Hoff da Silva*, sempre paciente, equilibrado, atencioso e disposto a me ajudar. Mais do que uma orientação, vivenciamos no tempo em que trabalhamos juntos um período de cumplicidade, compreensão e amizade.

À minha mãe, *Ana Maria Alves*, e a meu irmão, *Thiago Alves Amorim*, que desde sempre participaram de todas as minhas decisões profissionais. Há muito, eles sempre me ajudam a trilhar um caminho de satisfação pessoal em tudo que faço. E mais uma vez não foi diferente.

Por último, agradeço aos meus amigos, *Renato Scarpelini Fernandes dos Santos*, *Joel Lima Reis* e *Thiago Lopes Sá* que, mesmo de longe, sempre se fazem presentes com seus gestos de uma amizade que se construiu sobre dois alicerces poderosos, o respeito e o amor ao próximo.

“Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes.”

Paulo Freire

AMORIM, V. A. **Introdução aos monopolos magnéticos de t’Hooft e Polyakov.** 2012. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Resumo

No capítulo 2 faz-se uma breve revisão e uma generalização da estrutura matemática sob a qual a teoria da relatividade restrita se fundamenta. Indiscutivelmente esta representa a base de todo formalismo que é desenvolvido ao longo deste trabalho. Enquanto capítulo, este figura um papel eminentemente didático. No capítulo 3 faz-se um estudo detalhado do formalismo Lagrangiano em teoria quântica de campos, abordando tanto o campo escalar real como o campo escalar complexo. Dá-se atenção especial às transformações globais e locais que estes campos podem sofrer, dando origem a importantes resultados que são utilizados ao longo do trabalho; resultados estes provenientes, claro, dessas análises. No capítulo 4 é desenvolvido um conceito fundamental, a ideia de quebra espontânea de simetria. Trata-se do tema evidenciando as principais características de cada caso estudado, o abeliano e o não-abeliano. A partir dessa estrutura, no capítulo 5, faz-se um estudo refinado da construção de Dirac acerca da possibilidade de existência de monopolos magnéticos. Constrói-se, a partir do eletromagnetismo usual de Maxwell, a primeira ideia de monopolos magnéticos, conhecido como *Monopolo de Dirac*. Por último, no capítulo 6, desenvolve-se a abordagem de t’Hooft e Polyakov acerca da possibilidade de existência de monopolos magnéticos. Partindo de uma Lagrangiana não abeliana obtém-se a solução, estima-se a massa, e ainda se calcula a carga do monopolo.

Todos os resultados obtidos nas mais variadas seções são comentados e confrontados trazendo à tona o contexto em que as teorias estudadas têm apenas representação especulativa e ainda qual a possibilidade de se encontrar monopolos magnéticos em teorias de grande unificação.

PALAVRAS-CHAVE: monopolo magnético, quebra espontânea de simetria, unificação.

AMORIM, V. A. **Introduction to the magnetic monopoles of t´Hooft and Polyakov.** 2012. Dissertation (Master in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Abstract

At first, in the chapter 2, we present a brief review and the generalization of the mathematical structure in which the special relativity theory is based on. This chapter plays a highly didactic role. Undoubtedly, this represents the basis of of all formalism presented in this work. In chapter 3 we present the Lagrangian formalism in quantum field theory addressing the real scalar field and the complex scalar field. We pay a special attention to the global and the local transformations on the fields. In cahpter 4 a fundamental concept is developed - the spontaneous breakdown symmetry. This topic in particular is treated showing the main features of each studied case - the abelian one and the non-abelian one. Based on this structure, in the chapter 5 a refined study is done about the Dirac´s Monopole. From the usual electromagnetism theory it´s built the first idea about the magnetic monopole. In the end, in the chapter 6, the t´Hooft and Polyakov treatment to the magnetic monopole is constructed. Starting with a non-abelian lagrangian it´s obtained the solution, the mass and its charge.

All the obtained results in the more variety sections in the present text are commented bringing up the context in which the studied theories have only an speculated treatment and what is the possibility in finding magnetic monopoles in grand unification theories.

KEYWORDS: magnetic monopole, spontaneous breakdown symmetry, unification.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

1 RELATIVIDADE ESPECIAL

1.1 Operadores diferenciais	7
-----------------------------------	---

2 O CAMPO ESCALAR

2.1 O campo escalar real	10
2.2 O campo escalar complexo.....	11
2.2.1 Transformação Global	12
2.2.2 Transformação Local	15

3 QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

3.1 O caso abeliano.....	23
3.2 Simetria de Gauge	25
3.3 O caso não abeliano.....	28
3.3.1 Transformações Globais.....	29
3.3.2 Transformações Locais.....	30

4 O MONOPOLO DE DIRAC

5 MONOPOLO DE T'HOOFT E POLYAKOV

5.1 Solução	38
5.2 Massa	44
5.3 A carga do monopolo	46

6 COMENTÁRIOS FINAIS

APÊNDICE

A – Quadri vetores – Covariante e Contravariante	53
--	----

Introdução

Monopolos magnéticos são configurações estáveis (tipo partícula) que carregam cargas magnéticas. Tais configurações foram primeiramente obtidas por Dirac em 1931 [1],[2] numa tentativa de explicação da quantização da carga elétrica. O resultado obtido é taxativo: se existem monopolos magnéticos, então a carga elétrica deve ser quantizada. Um passo além no contexto de tais soluções foi apresentado independentemente por t'Hooft [3] e Polyakov em 1974 [4] , mostrando que monopolos magnéticos surgiriam de argumentos bastante gerais com respeito a teorias visando a unificação das interações fundamentais. Não é despropositado dizer que enquanto Dirac demonstrou a consistência de monopolos magnéticos com respeito à eletrodinâmica quântica, t'Hooft e Polyakov demonstraram a necessidade de monopolos em teorias de grande unificação. Tais soluções apresentam propriedades calculáveis que levam a previsões não ambíguas em uma dada teoria de grande unificação. Pode-se sistematizar a busca por tais soluções segundo a linha de raciocínio a seguir.

Todo modelo de grande unificação possui um grupo de simetria (grande) de gauge exata que mistura interações fortes e eletrofracas, mas essas simetrias se tornam espontaneamente quebradas em uma determinada escala (bastante grande) de massa, denotada aqui por M . Em tal quebra espontânea de simetria, uma condição topológica suficiente para a existência de monopolos é satisfeita: A previsão sobre a existência de monopolos não depende do mecanismo de quebra espontânea de simetria (por exemplo, não é relevante se os bósons de Goldstone associados à quebra são elementares ou compostos), tampouco depende da inclusão ou não da gravitação no esquema de unificação.

A escala de massa da quebra espontânea, M , entretanto, varia de acordo com o modelo de unificação adotado. Tal escala é importante para a caracterização do monopolo obtido pois, como não poderia deixar de ser para soluções topológicas, a massa e o raio típico da solução dependem de M . É possível estimar tais características do monopolo assumindo que nenhuma nova interação seja descoberta entre as escalas de energia da ordem de 100GeV e a escala de unificação M . É interessante notar que se uma tal hipótese estiver correta, bem como o paradigma de grande unificação, então a massa típica do monopolo seria da ordem de 10^{16}GeV , ou seja, da ordem de $10^{-8}g$, o que corresponde a massa de uma bactéria! Em se tratando de uma partícula esse valor é bastante grande, o que explica o resultado experimental negativo nos aceleradores de partículas atuais, incluindo o LHC.

Monopolos magnéticos também ganham atenção no problema de curvas de rotação de galáxias [5] e em teorias com dimensões extras [6]. Um outro trabalho relevante trata monopolos magnéticos em vários modelos e suas consequências segundo teorias de gauge não abelianas supersimétricas [7]. Observa-se, porém, que nessas teorias mais fundamentais, é previsto monopolos altamente massivos. Essa previsão justifica, portanto, a procura de monopolos em teorias usuais, mesmo tendo em vista que nessas teorias o monopolo já teria uma massa bem elevada.

O trabalho se inicia com uma análise criteriosa de tópicos relacionados à Teoria da Relatividade Restrita. Logo em seguida trata-se da formulação Lagrangiana em Teoria Quântica de Campos, dando atenção especial ao conceito de quebra espontânea de simetria. Por fim se estabelece uma relação entre as duas diferentes abordagens aqui exploradas acerca da possibilidade de existência de monopolos magnéticos: a abordagem de Dirac e a de t'Hooft e Polyakov.

É dentro desse contexto que se fundamenta e que se constrói o trabalho que aqui se apresenta.

1 Relatividade Especial

Quando se pretende estudar qualquer teoria que trate da natureza fundamental da matéria, deve-se ter em vista que esta teoria necessariamente precisa ser consistente com os princípios que estruturam a teoria da relatividade especial e a mecânica quântica. Neste contexto, cabe aqui uma breve apresentação da notação necessária para que se possa desenvolver a contento o presente trabalho.

Seja K' um referencial inercial que se move ao longo do eixo x com velocidade constante v em relação a um outro referencial inercial K . Assumindo que as origens destes referenciais coincidam no instante $t' = t = 0$, as coordenadas (x', y', z', t') e (x, y, z, t) atribuídas a um mesmo evento por observadores que permanecem fixos nos respectivos referenciais, são relacionadas através das seguintes expressões

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1}$$

e

$$t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ é chamado de fator de Lorentz e c representa a velocidade da luz no vácuo. Tais equações representam uma transformação de Lorentz e são construídas com base no postulado fundamental da constância da velocidade da luz. Vale observar que tomando o limite em que $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ (limite não relativístico), as expressões em (1) se reduzem a

$$x' = x - vt \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad \text{e} \quad t' = t.\tag{2}$$

Estas representam uma transformação de Galileu, ou seja, consistente com a mecânica newtoniana; aquela que trata dos objetos que se movem a baixas velocidades quando comparadas com a velocidade da luz no vácuo.

Em qualquer teoria física é sempre importante e conveniente encontrar grandezas que se mantenham *invariantes* sob algum tipo de operação. E nesse caso não é diferente. No espaço euclidiano, por exemplo, a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,\tag{3}$$

a qual, claramente, se mantém constante sob transformações de Galileu e sob rotações, ou seja, translações e rotações não alteram o módulo de um vetor. No entanto, no contexto da relatividade especial, generaliza-se o conceito de distância entre dois pontos do espaço, dr^2 , para o conceito de *intervalo*, ds^2 , entre dois pontos no *espaço-tempo*. Esse intervalo deve ser invariante, mas agora, sob rotações e sob transformações de Lorentz. Escrevendo as expressões dadas em (1) na forma diferencial, ou seja,

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(dx - vdt) \\dy' &= dy \\dz' &= dz \\dt' &= \gamma(dt - vdx/c^2),\end{aligned}\tag{4}$$

obtém-se que o intervalo ds^2 , definido como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\tag{5}$$

se mantém invariante, ou seja

$$ds'^2 = ds^2. \quad (6)$$

Quando se diz que o intervalo ds^2 é invariante sob transformações de Lorentz, pode-se dizer que ele é um *escalar* de Lorentz, ou um invariante de Lorentz. O intervalo invariante ds^2 poderia ter sido definido de forma diferente daquela expressa em (5). O que realmente importa nessa construção é que o sinal do componente temporal seja diferente do sinal dos componentes espaciais. Sendo assim a expressão que define o intervalo invariante em (5) será utilizada neste trabalho apenas como uma questão de conveniência. Como será discutido adiante, essa convenção de sinais está relacionada com o que será chamado de assinatura da *métrica do espaço-tempo*.

A partir dessa construção define-se então um espaço quadridimensional cujo intervalo invariante é dado pela expressão (5) e a esse espaço dá-se o nome de espaço de *Minkowski*. Dessa forma qualquer vetor no espaço de *Minkowski* possui 4 elementos - 3 coordenadas espaciais e uma coordenada temporal - ou seja, um *quadrivetor*. As componentes de um quadrivetor no espaço de *Minkowski* serão representadas segundo a seguinte notação,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y \quad \text{e} \quad x^3 = z \quad (7)$$

ou ainda,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}), \quad (8)$$

em que μ varia de 0 a 3. Um quadrivetor como x^μ , com o índice em cima, é chamado de quadrivetor *contravariante*. Essa definição se mostra importante, pois existe uma outra forma de se representar um quadrivetor, ou seja, colocando o índice μ embaixo. Nessa situação, o quadrivetor é chamado de *covariante* e é representado da seguinte maneira

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}). \quad (9)$$

As nomenclaturas covariante e contravariante possuem uma definição mais completa, mas para os propósitos deste trabalho, as representações em (8) e (9) são mais do que suficientes. (Ver apêndice A ao final do trabalho).

A pergunta que se segue agora é: como utilizar a notação de quadrivetores para reescrever as transformações de Lorentz, dadas em (1)? Pois bem, como em cada um dos sistemas, tanto em K como em K' , se tem quatro componentes que se relacionam, uma maneira de se fazer isto é utilizando uma notação matricial. Sendo assim, deve-se relacionar um vetor coluna 4 por 1, representando as coordenadas no sistema K' , com um outro vetor coluna 4 por 1 representando as mesmas coordenadas no sistema K . Esses vetores devem ser escritos respectivamente como x'^μ e x^ν . A relação entre eles deverá ser dada através de uma matriz 4 por 4.

De forma compacta, escreve-se as transformações de Lorentz, utilizando a representação de quadrivetores, da seguinte maneira

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (10)$$

em que Λ_ν^μ é uma matriz 4 por 4, conhecida como matriz de transformação de Lorentz. É importante ressaltar que de acordo com a notação de Einstein, o índice ν que aparece repetido na expressão anterior indica implicitamente um somatório, e neste caso ν vai de 0 até 3. A forma explícita da matriz de transformação de Lorentz pode ser obtida a partir da expressão (10) substituindo valores de 0 a 3 aos índices μ e ν . Fazendo essa substituição e usando a representação para x^μ dada em (8), conclui-se, comparando a expressão obtida

com as transformações de Lorentz dadas em (1), que a matriz de transformação Λ_ν^μ tem a seguinte forma

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

em que $\beta = v/c$. O mesmo se pode fazer com o intervalo invariante ds^2 . Utilizando a notação em (7), percebe-se que a expressão para o intervalo invariante dada em (5), pode ser reescrita como

$$ds^2 = dx^0 dx^0 - \{dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + dx^3 dx^3\}, \quad (12)$$

e não é difícil notar que a expressão anterior pode ser obtida de uma expressão mais singular, algo da forma $dx^\mu dx^\nu$, com a ressalva de que só se tem valores diferentes de zero quando $\mu = \nu$, e que o sinal do componente temporal deve ser diferente do sinal dos componentes espaciais. O fato do produto $dx^\mu dx^\nu$ só apresentar valores não nulos quando $\mu = \nu$ lembra os elementos da diagonal de uma matriz. Sendo assim, para se dar conta da pequena sutileza quanto ao sinal dos componentes espaciais, escreve-se ds^2 como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (13)$$

em que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

define o que se denomina *métrica no espaço-tempo* de Minkowski, também conhecido como tensor métrico. Da mesma maneira como se definiu um quadrivetor contravariante e outro covariante, quando se escreve o tensor métrico com os índices μ e ν colocados abaixo, este se apresenta na sua forma covariante. Vale observar, e isto é de grande utilidade, que de acordo com a representação matricial do tensor métrico dada em (14),

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (15)$$

ou seja, o tensor métrico é simétrico com relação a troca dos índices μ e ν . É de fundamental importância também notar que segundo a representação do tensor métrico em (14), $\det g_{\mu\nu} = -1 \neq 0$, o que implica a existência da matriz inversa. Utilizando-se da notação de Einstein, segue, da definição de matriz inversa que

$$g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

no qual

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (17)$$

representa uma delta de Kronecker. Desta representação segue diretamente que

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (18)$$

ou seja, as formas contravariante e covariante do tensor métrico também são equivalentes. Este resultado é de grande utilidade ao longo do trabalho. No entanto, vale lembrar que embora essa relação seja válida no espaço de Minkowski (em coordenadas cartesianas), esta igualdade nem sempre se mantém. A métrica carrega consigo toda informação acerca da geometria do *espaço-tempo* e dependendo do sistema de coordenadas utilizado a relação (18) se altera. Em se tratando de relatividade especial, o papel da métrica está embutido na teoria e não há necessidade nenhuma de mencioná-lo. Entretanto, quando o assunto é relatividade geral, a métrica desempenha papel fundamental e aparece explicitamente nas equações de campo de Einstein.

Utilizando a representação matricial da métrica, dada em (14), verifica-se que as formas contravariante e covariante de qualquer quadrivetor, representadas em (8) e (9), podem ser escritas diretamente da seguinte maneira

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad (19)$$

e, analogamente,

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu, \quad (20)$$

estabelecendo assim os princípios da álgebra necessária para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Operadores Diferenciais

Visto esta abordagem inicial algumas definições se mostram bastante relevantes no que se refere ao arcabouço matemático necessário para o desenrolar do trabalho. Sendo assim a primeira definição importante que se segue é a do operador ∂_μ , dada por

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (21)$$

ou, em termos das componentes,

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (22)$$

Fazendo uso do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, escreve-se, de forma analoga às expressões (19) e (20), que

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (23)$$

Como consequência dessas definições, surge diretamente da contração das expressões (21) e (23) um novo operador, ou seja, efetuando

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3 \quad (24)$$

obtém-se o que se conhece como operador D 'alambertiano',

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (25)$$

em que ∇^2 é o operador Laplaciano.

Dentro do contexto da relatividade especial existe uma quantidade que também se transforma seguindo a mesma forma funcional das transformações de Lorentz dadas em (1). Essa quantidade é definida como um novo quadrivetor, chamado de *quadrimento*, representado por p^μ , dado por

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (26)$$

em que E é a energia da partícula e \vec{p} o momento da mesma. Como não podia ser diferente, desta representação surge diretamente que

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right). \quad (27)$$

Na expressão (6), quando se construiu o intervalo ds^2 , constatou-se que o mesmo é um invariante de Lorentz. Isto de fato é verdade, no entanto, de maneira mais geral, pode-se afirmar que o produto interno entre qualquer quadrivetor covariante e o seu respectivo contravariante é um invariante de Lorentz, ou seja, um *escalar*. Sendo assim, utilizando as expressões (26) e (27), obtém-se outro importante invariante de Lorentz,

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p}. \quad (28)$$

Fazendo uso da expressão já conhecida da conservação de energia relativística,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^2 \quad (29)$$

e considerando um sistema de unidades em que $c = 1$, a expressão (28) se torna

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (30)$$

A fim de complementar toda estrutura apresentada até o momento, falar-se-á brevemente agora sobre a equação de onda para uma partícula sem spin, a qual, por ter apenas uma única componente, será representada aqui por Φ . O ponto de partida para isto será a expressão (30). No entanto, para se estabelecer a conexão com a teoria quântica, faz-se, de maneira usual, a correspondência das grandezas E e \vec{p} com as suas respectivas representações operatoriais, ou seja,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (31)$$

em que $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. Sendo assim, aplicando a equação (30) sobre uma função de onda Φ , tem-se

$$(p^\mu p_\mu)\Phi = m^2\Phi \quad (32)$$

que, de acordo com as expressões (21), (23) e (31) pode ser reescrita como

$$(\partial_\mu \partial^\mu)\Phi = -m^2\Phi \quad (33)$$

ou seja,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0. \quad (34)$$

Esta equação, que descreve partículas sem spin, é bastante conhecida na literatura e é denominada equação de *Klein-Gordon*.

Procedendo da mesma maneira como se faz ao estudar mecânica quântica não relativística, é importante encontrar uma expressão que represente a respectiva equação de continuidade para a equação de Klein de Gordon. Para isto, deve-se, num primeiro momento, tomar o complexo conjugado da equação (34), que neste caso nada mais é do que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi^* = 0. \quad (35)$$

Feito isso, multiplica-se a equação (34) à esquerda por Φ^* , e a equação (35), também a esquerda, por Φ . Ao efetuar a diferença entre essas duas novas expressões, utilizando a definição dada em (25), e rearranjando a equação obtida de forma conveniente, obtém-se

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \Phi^* (\vec{\nabla} \Phi) - \Phi (\vec{\nabla} \Phi^*) \right\} = 0. \quad (36)$$

Multiplicando essa expressão por $-\frac{i\hbar}{2m}$, pode-se identificá-la na forma conhecida de uma equação de continuidade, dada respectivamente por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (37)$$

em que

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right\} \quad (38)$$

e

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Phi^* (\vec{\nabla} \Phi) - \Phi (\vec{\nabla} \Phi^*) \right\}. \quad (39)$$

Diferentemente do que se observa ao se deduzir a equação de continuidade via equação de Schrödinger, o ρ na equação (38) não pode ser interpretado como densidade de probabilidade, haja visto que o mesmo pode apresentar valores negativos, ou seja, não representa um grandeza positivo definida. Já o \vec{j} , dado em (39), por não apresentar nenhum tipo de restrição, continua com a mesma interpretação, ou seja, é chamado de corrente de probabilidade.

É extremamente interessante observar que as expressões (38) e (39) nada mais são do que os componentes temporal e espacial de um novo quadrivetor, o qual é denominado *quadridensidade de corrente*, que pode ser escrito como

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \frac{i\hbar}{m} \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi, \quad (40)$$

em que

$$\Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi = \frac{1}{2} \{ \Phi^* \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi \}. \quad (41)$$

Com a representação da equação (40), a equação de continuidade dada em (37) passa a ser escrita numa forma muito mais elegante e compacta, tal como

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (42)$$

2 O Campo Escalar

2.1 Campo Escalar Real

A fim de se justificar toda discussão inicial feita na seção anterior e iniciar uma nova etapa mais direcionada acerca do tema do presente trabalho, é interessante pinçar alguns pontos que também servirão como base para a construção de todo alicerce no qual se sustenta a teoria que pressupõe a existência de monopolos magnéticos. Esse tópico é voltado principalmente para elucidar pontos fundamentais a respeito da formulação Lagrangiana em Teoria de Campos. De forma bastante breve, primeiramente, trabalha-se com um campo escalar real.

Em se tratando de mecânica clássica, um dos caminhos possíveis para se descrever o comportamento de uma partícula pontual de massa m governada por uma função horária $x(t)$ é através do princípio da mínima ação de Hamilton, a partir do qual pode-se derivar a equação de movimento da partícula. De forma análoga, pode-se considerar, ao invés de uma partícula um campo Φ que, diferentemente da partícula, não seja governado por uma função horária. Neste caso é importante mencionar apenas que o mesmo dependerá, a priori, de 4 coordenadas, ou seja, deve-se considerar $\Phi = \Phi(x^\mu)$.

Na seção anterior foi deduzido a partir de primeiros princípios a equação de Klein-Gordon, como pode ser verificado na expressão (34). Naquela ocasião Φ foi tratado como uma função de onda de uma partícula. Pode-se, no entanto, sem perda de generalidade, dizer que qualquer campo escalar obedece à equação de Klein-Gordon, e é sobre esta premissa que a presente seção se sustenta.

Assim como é possível via princípio variacional obter a equação de movimento de uma partícula pontual de massa m , regida por uma função $x(t)$, pode-se, de forma análoga, obter também a equação de Klein-Gordon via princípio variacional. A sutileza neste caso reside na forma como se deve construir a ação S . Ao invés de se escrever

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt, \quad (43)$$

na qual L representa a Lagrangiana do sistema, escreve-se

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x, \quad (44)$$

em que \mathcal{L} é chamado de *densidade de Lagrangiana* e $\partial_\mu \Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}$.

Da mesma forma como se procede em mecânica clássica, é possível, a partir do cálculo da variação da ação S , juntamente com a imposição de que esta variação (a qual costumeiramente se representa por δS , seja nula), obter as equações de *Euler-Lagrange* [8] para o campo Φ , dadas respectivamente por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] = 0. \quad (45)$$

Por questão de praticidade, daqui em diante, \mathcal{L} também será chamado apenas de Lagrangiana, e não *densidade de Lagrangiana* como dito anteriormente. Pois bem, conhecida a forma da Lagrangiana \mathcal{L} , através da expressão (45), pode-se encontrar a equação

de movimento correspondente a uma dada situação. Para isto, considere por exemplo a Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^2 \right], \quad (46)$$

em que m , à priori, não represente a massa de uma partícula, afinal está se trabalhando aqui com um campo Φ e não com uma partícula pontual. Só é possível dar uma interpretação ao parâmetro m através da quantização do campo escalar, tópico que não será abordado neste trabalho. Desta forma, no contexto atual, tratar-se-á m , por equanto, apenas como um parâmetro. Reescrevendo a e lagrangiana em (46) mais convenientemente como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{k\lambda} (\partial_k \Phi) (\partial_\lambda \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^2 \quad (47)$$

tem-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi \quad (48)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = \frac{1}{2} g^{k\lambda} \{ \delta_{k\mu} \partial_\lambda \Phi + \partial_k \Phi \delta_{\lambda\mu} \}, \quad (49)$$

em que $\delta_{k\mu}$ e $\delta_{\lambda\mu}$ são deltas de Kronecker. Então, de (49),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi. \quad (50)$$

Substituindo os resultados de (48) e (50) em (45), chega-se à

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0, \quad (51)$$

que nada mais é do que a equação de Klein-Gordon dada em (34), ou seja, a lagrangiana em (46) é aquela que fornece a equação de Klein Gordon.

2.2 Campo Escalar Complexo

Na seção passada viu-se que a lagrangiana em (46) dá origem à equação de Klein-Gordon em (51). Neste capítulo, diferentemente do campo escalar real, considerar-se-á o campo escalar complexo, cujo conjugado é denotado por Φ^* . Da mesma maneira como feito anteriormente escreve-se novamente uma expressão para Lagrangiana, mas por se tratar de uma campo escalar complexo, neste caso, a Lagrangiana será dada por

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (52)$$

com a ressalva de que os campos Φ e Φ^* nesta expressão são escritos como uma combinação linear em termos de duas componentes reais, Φ_1 e Φ_2 , tal como se vê adiante

$$\Phi = \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{\sqrt{2}} \quad (53)$$

e

$$\Phi^* = \frac{\Phi_1 - i\Phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (54)$$

Procedendo da mesma forma como na seção anterior pode-se obter as equações de movimento originárias da lagrangiana em (52). No entanto, como Φ e Φ^* são campos independentes, deve-se resolver as equações de Euler-Lagrange, dada em (45), para os dois campos separadamente. Para isto é conveniente reescrever a Lagrangiana em (52) como

$$\mathcal{L} = g^{k\lambda} (\partial_k \Phi) (\partial_\lambda \Phi^*) - m^2 \Phi^* \Phi. \quad (55)$$

Considerando primeiramente o campo Φ , a partir dessa última expressão, obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi^* \quad (56)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = g^{k\lambda} (\partial_\lambda \Phi)^* \delta_\mu^k = (\partial^\mu \Phi^*). \quad (57)$$

Substituindo esses resultados em (45), chega-se á

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi^* = 0. \quad (58)$$

De forma análoga, considerando o campo Φ^* , procedendo da mesma forma, apenas trocando Φ por Φ^* , obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = -m^2 \Phi \quad (59)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} = (\partial^\mu \Phi) \quad (60)$$

o que leva à

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi = 0. \quad (61)$$

Nota-se então que ao resolver as equações de Euler-Lagrange para o campo Φ , concluí-se que Φ^* obedece a uma equação de Klein-Gordon e, ao resolver as equações de Euler-Lagrange para o campo Φ^* , concluí-se que o campo Φ também obedece a uma equação de Klein-Gordon. Esses resultados são de grande utilidade como se verá logo adiante.

2.2.1 Transformação Global

É interessante neste momento lançar mão de algumas transformações, reescrevendo os campos Φ e Φ^* , segundo as redefinições a seguir

$$\begin{aligned} \Phi &\longmapsto \Phi' = \exp(-i\Lambda) \Phi \\ \Phi^* &\longmapsto \Phi'^* = \exp(i\Lambda) \Phi^*, \end{aligned} \quad (62)$$

em que Λ é simplesmente um parâmetro constante e real. Esse tipo de transformação é chamado *transformação global*, pois o parâmetro Λ não depende do ponto do espaço-tempo, e assim, essa transformação se aplica de forma idêntica a todos os pontos do espaço-tempo. Com esta redefinição, sendo Λ um parâmetro constante e real,

$$\Phi \Phi^* \longmapsto \Phi' \Phi'^* = \exp(-i\Lambda) \Phi \exp(i\Lambda) \Phi^* = \Phi \Phi^*, \quad (63)$$

$$\partial_\mu \Phi \longmapsto \exp(-i\Lambda) \partial_\mu \Phi \quad (64)$$

e

$$\partial_\mu \Phi^* \longmapsto \exp(i\Lambda) \partial_\mu \Phi^*. \quad (65)$$

Das expressões (64) e (65) segue que

$$(\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) \longmapsto (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*), \quad (66)$$

ou seja, de acordo com os resultados em (63) e (66) tem-se que a Lagrangiana em (52) é invariante sob transformações globais. De acordo com o *Teorema de Noether* - [8], sabe-se que esta condição deve fornecer alguma quantidade conservada. É sob esta perspectiva que se constrói a argumentação a seguir.

É instrutivo observar que segundo as transformações dadas em (62),

$$\Phi \longmapsto \Phi' = \exp(-i\Lambda) \Phi = (1 - i\Lambda + \vartheta(\Lambda^2)) \Phi \quad (67)$$

e

$$\Phi^* \longmapsto \Phi'^* = \exp(i\Lambda) \Phi^* = (1 + i\Lambda + \vartheta(\Lambda^2)) \Phi^* \quad (68)$$

o que implica, em primeira aproximação, no seguinte,

$$\delta\Phi \equiv \Phi' - \Phi = -i\Lambda\Phi \quad (69)$$

e

$$\delta\Phi^* \equiv \Phi'^* - \Phi^* = -i\Lambda\Phi^*. \quad (70)$$

A variação representada pela letra δ nas duas expressões anteriores também pode ser aplicada às expressões (64) e (65), fornecendo um importante resultado. Frisa-se, porém, que esta variação comuta com a operação ∂_μ . Assim, utilizando os resultados em (69) e (70) obtém-se as seguintes expressões

$$\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi) = \partial_\mu(-i\Lambda\Phi) = -i\Lambda\partial_\mu\Phi \quad (71)$$

e

$$\delta(\partial_\mu \Phi^*) = \partial_\mu(\delta\Phi^*) = \partial_\mu(i\Lambda\Phi^*) = i\Lambda\partial_\mu\Phi^*. \quad (72)$$

Mais uma vez, fazendo uso das consequências do *Teorema de Noether* [8], demonstra-se que a quantidade conservada aqui é uma corrente, a qual se identifica por J^μ . Neste caso a mesma apresenta duas componentes J_1^μ e J_2^μ , dadas respectivamente por

$$J_1^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \Phi \quad (73)$$

associada ao campo Φ , e

$$J_2^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} \Phi^* \quad (74)$$

associada ao campo Φ^* . No capítulo 3 é apresentado uma formulação geral desse tratamento para um caso não-abeliano.

Utilizando os resultados já obtidos anteriormente em (57), (60), (69) e (70) obtém-se, juntando as duas expressões anteriores (corrente total), o seguinte resultado

$$J^\mu = i \{ \Phi^* (\partial^\mu \Phi) - \Phi (\partial^\mu \Phi^*) \}. \quad (75)$$

A partir desta expressão é interessante perceber que

$$\partial_\mu J^\mu = i \{ (\partial_\mu \Phi^*) (\partial^\mu \Phi) - (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) + (\Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \partial^\mu \Phi^*) \}. \quad (76)$$

Como os dois primeiros termos são idênticos, segue que

$$\partial_\mu J^\mu = i \{ \Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \partial^\mu \Phi^* \}. \quad (77)$$

Com o auxílio das equações (58) e (61) mostra-se que a expressão (77) é nula. Basta multiplicar a equação (58) à esquerda por Φ , a equação (61) também à esquerda por Φ^* e subtrair uma da outra. Desta operação obtém-se que

$$\Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \partial^\mu \Phi^* = 0 \quad (78)$$

o que leva à conclusão de que a corrente J^μ de fato é conservada, ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (79)$$

De forma explícita, a equação (79) leva à

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0, \quad (80)$$

em que $i = 1, 2, 3$. Integrando a expressão anterior no volume d^3x , tem-se

$$\int_V \partial_0 J^0 d^3x = - \int_V \partial_i J^i d^3x. \quad (81)$$

Pode-se identificar o integrando do lado direito da equação anterior com o divergente generalizado de J . Assim, o teorema de Stokes também generalizado fornece

$$\int_V \partial_i J^i d^3x = \int_S J^i d\sigma_i = 0, \quad (82)$$

com $d\sigma_i$ representando um elemento de superfície generalizado e S a superfície que delimita o volume V . Este resultado procede, pois assumindo o contorno dessa superfície no infinito, toma-se $\Phi \rightarrow 0$ e $\partial_\mu \Phi \rightarrow 0$. Substituindo o resultado de (82) em (81), conclui-se que

$$\int_V \partial_0 J^0 d^3x = \frac{1}{c} \int_V \frac{\partial}{\partial t} J^0 d^3x = 0. \quad (83)$$

De acordo com o *Teorema de Euller*, em que

$$\frac{1}{c} \int_V \frac{\partial}{\partial t} J^0 d^3x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V J^0 d^3x = 0, \quad (84)$$

constata-se que

$$Q \equiv \int_V J^0 d^3x = cons. \quad (85)$$

Essa expressão revela que a quantidade Q acima é conservada. Utilizando a expressão (75), pode-se reescrever essa quantidade de forma explícita, ou seja,

$$Q = i \int \left\{ \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right\} d^3x. \quad (86)$$

Vale observar que no caso em que Φ é real, $\Phi = \Phi^*$, portanto $Q = 0$, ou seja, nesta situação não há nenhuma quantidade conservada.

Até o presente momento, toda discussão realizada foi pautada em cima da condição de que o parâmetro Λ não dependia do ponto do espaço-tempo, ou seja, este era constante e real. Desta forma a quantidade Q obtida na expressão (86) revela, segundo o *teorema de Noether*, a conservação de uma quantidade devido à invariância da Lagrangiana, dada em (52), sob a transformação indicada em (62). Como já foi dito anteriormente, o fato do parâmetro Λ ser constante e real implica necessariamente que todos os pontos do espaço-tempo sofrem, invariavelmente, a mesma transformação. Dessa forma a pergunta natural que se segue a partir dessa colocação é o que acontece se o parâmetro Λ não for constante e real? E se este for considerado como uma função do espaço-tempo? Quais são as consequências imediatas dessa suposição?

De forma mais direta, a partir de agora, diferentemente do que foi realizado até o momento, considerar-se-á, ao invés de uma transformação Global, aquela em que Λ é constante e real, uma transformação local, ou seja, faz-se o mesmo tratamento feito anteriormente, contudo, com o detalhe de que agora $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$.

2.2.2 Transformação Local

Como foi dito no final da seção anterior, investiga-se agora as características de um novo tipo de transformação. Toma-se o parâmetro $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$, o que implica em promover diferentes transformações em diferentes pontos do espaço-tempo. Como o procedimento a ser seguido é exatamente o mesmo que foi realizado anteriormente, dá-se maior atenção às características ainda não obtidas na seção anterior. O que se quer dizer é que os primeiros resultados obtidos anteriormente são exatamente os mesmos que se obtém aqui. Assim, a fim de evitar um tratamento redundante, parte-se desses resultados já estabelecidos. Obteve-se das transformações em (62) duas relações, dadas em (69) e (70) que ainda se mantêm nesta presente seção, ou seja, as expressões

$$\begin{aligned}\Phi &\longmapsto \Phi' = \exp(-i\Lambda)\Phi, \\ \Phi^* &\longmapsto \Phi'^* = \exp(i\Lambda)\Phi^*,\end{aligned}\tag{87}$$

forneem

$$\delta\Phi \equiv \Phi' - \Phi = -i\Lambda\Phi\tag{88}$$

e

$$\delta\Phi^* \equiv \Phi'^* - \Phi^* = i\Lambda\Phi^*.\tag{89}$$

Mas, sendo o parâmetro $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$, tem-se que, a partir das expressões em (87), em primeira aproximação,

$$\partial_\mu\Phi \longmapsto (\partial_\mu\Phi) - i\partial_\mu(\Lambda\Phi) = \partial_\mu\Phi - i\Lambda(\partial_\mu\Phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\Phi\tag{90}$$

e

$$\partial_\mu\Phi^* \longmapsto (\partial_\mu\Phi^*) - i\partial_\mu(\Lambda\Phi^*) = \partial_\mu\Phi^* - i\Lambda(\partial_\mu\Phi^*) - i(\partial_\mu\Lambda)\Phi^*.\tag{91}$$

De forma análoga à seção anterior, aplicando a operação δ nas expressões (90) e (91), e lembrando que esta comuta com a operação ∂_μ , segue que

$$\delta(\partial_\mu\Phi) \longmapsto \partial_\mu(\delta\Phi) - i\Lambda\partial_\mu(\delta\Phi) - i(\partial_\mu\Lambda)(\delta\Phi)\tag{92}$$

e

$$\delta(\partial_\mu \Phi^*) \longmapsto \partial_\mu(\delta\Phi^*) - i\Lambda\partial_\mu(\delta\Phi^*) - i(\partial_\mu\Lambda)(\delta\Phi^*). \quad (93)$$

Substituindo as expressões (88) e (89), respectivamente, nas expressões (92) e (93), obtêm-se as seguintes relações

$$\delta(\partial_\mu \Phi) \longmapsto -i(\partial_\mu\Lambda)\Phi - i\Lambda(\partial_\mu\Phi) + \vartheta(\Lambda^2) \quad (94)$$

e

$$\delta(\partial_\mu \Phi^*) \longmapsto i(\partial_\mu\Lambda)\Phi^* + i\Lambda(\partial_\mu\Phi^*) + \vartheta(\Lambda^2). \quad (95)$$

Comparando estas expressões com aquelas que foram obtidas na seção anterior, dadas respectivamente em (71) e (72), em que o parâmetro Λ era constante e real, percebe-se claramente que a condição $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$ leva ao surgimento de um termo extra em ambas expressões; isto, considerando uma aproximação de 1ª ordem em Λ . Esse termo extra traz à tona uma informação importante. Na seção anterior, tanto o campo Φ como Φ^* e suas respectivas derivadas, $\partial_\mu\Phi$ e $\partial_\mu\Phi^*$, segundo as expressões (69), (70), (71) e (72), se transformam da mesma maneira. Já na presente seção, observando as expressões (88), (89), (94) e (95) nota-se que devido aos termos extras $-i(\partial_\mu\Lambda)\Phi$ e $i(\partial_\mu\Lambda)\Phi^*$, o campo e sua respectiva derivada não se transformam da mesma forma, o que mostra que a Lagrangiana dada em (52) não se mantém invariante sob transformações locais. Esta condição diz, segundo o *teorema de Noether*, que não se pode obter nenhuma quantidade conservada, já que não existe invariância da Lagrangiana sob transformações locais. Desta forma não sobra outra alternativa a não ser obter a variação $\delta\mathcal{L}$ diretamente da Lagrangiana dada em (52) e assim procurar mecanismos que possibilitem torná-la invariante e, por conseguinte, averiguar as possibilidades de se obter alguma grandeza que se conserve ou não.

Tomando como ponto de partida a lagrangiana dada em (52) e efetuando a operação $\delta\mathcal{L}$, deve-se trabalhar a seguinte expressão

$$\delta\mathcal{L} = [\delta(\partial_\mu\Phi)]\partial^\mu\Phi^* + \partial_\mu\Phi[\delta(\partial^\mu\Phi^*)] - m^2\delta(\Phi\Phi^*). \quad (96)$$

De acordo com as transformações em (87) o produto $\Phi\Phi^* \rightarrow \Phi\Phi^*$, de forma que o último termo na expressão anterior $\delta(\Phi\Phi^*) = 0$, restando apenas os dois primeiros termos para serem trabalhados. Os resultados necessários para dar continuidade ao cálculo iniciado em (96) estão apresentados nas expressões (94) e (95). Sendo assim, considerando a contribuição de termos até primeira ordem em Λ nessas expressões, a variação na lagrangiana $\delta\mathcal{L}$ dada em (96) se torna

$$\delta\mathcal{L} = \{-i(\partial_\mu\Lambda)\Phi(\partial^\mu\Phi^*) + i(\partial_\mu\Phi)\Phi^*(\partial^\mu\Lambda)\}. \quad (97)$$

Com a ajuda do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, mostra-se que

$$(\partial_\mu\Phi)\Phi^*(\partial^\mu\Lambda) = (\partial^\mu\Phi)\Phi^*(\partial_\mu\Lambda), \quad (98)$$

o que permite reescrever (97) mais convenientemente como

$$\delta\mathcal{L} = \{-i(\partial_\mu\Lambda)\Phi(\partial^\mu\Phi^*) + i(\partial^\mu\Phi)\Phi^*(\partial_\mu\Lambda)\}, \quad (99)$$

ou seja,

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda)\{-i\Phi(\partial^\mu\Phi^*) + i(\partial^\mu\Phi)\Phi^*\}. \quad (100)$$

É interessante perceber, no entanto, que o resultado aqui obtido já foi parcialmente calculado ao se estudar as características da invariância da lagrangiana sob transformações globais. De acordo com a expressão (75), pode-se identificar o termo entre chaves como sendo a corrente conservada J^μ naquela ocasião, o que leva ao seguinte resultado

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda) J^\mu. \quad (101)$$

Como era de se esperar a lagrangiana, de fato, não é invariante sob transformações locais. Já havia sido citado anteriormente que o campo Φ e suas respectivas derivadas não se transformavam da mesma maneira e como consequência disto a invariância da lagrangiana deveria realmente deixar de existir. Confirma-se esta expectativa diretamente do resultado em (101).

A ideia agora reside em recuperar a invariância da lagrangiana, ou seja, puramente através de artifícios matemáticos procura-se a partir de então adicionar termos *ad-hoc* à lagrangiana usual e através dos respectivos cálculos das suas variações, tentar tornar essa nova lagrangiana invariante sob transformações locais. Neste contexto, num primeiro momento, introduze-se na lagrangiana o quadrivetor A_μ segundo a seguinte expressão

$$\mathcal{L}_1 = eJ^\mu A_\mu, \quad (102)$$

em que e , a priori, é outro parâmetro desconhecido que torna a expressão anterior dimensionalmente correta, ou seja, o termo eA_μ tem a mesma dimensão canônica de ∂_μ . De acordo com a expressão (102), da mesma forma como se procedeu anteriormente, segue que

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e \{(\delta J^\mu) A_\mu + J^\mu(\delta A_\mu)\}, \quad (103)$$

em que o sinal negativo nesta expressão é colocado apenas como uma questão de conveniência, visto que isto não altera a física por trás do problema. Trata-se apenas de uma variação. Assim, voltando à equação (103), tem-se agora a necessidade de se calcular δA_μ . No entanto, não se tem uma forma estabelecida para esse quadrivetor. Utilizando-se de uma transformação local do tipo

$$A_\mu \mapsto A'_\mu + \frac{1}{e}(\partial_\mu\Lambda), \quad (104)$$

da qual segue que

$$\delta A_\mu \equiv A'_\mu - A_\mu = \frac{1}{e}(\partial_\mu\Lambda), \quad (105)$$

reescreve-se a expressão (103) como

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu) A_\mu - (\partial_\mu\Lambda)J^\mu. \quad (106)$$

É interessante verificar que o segundo termo em (106) é o negativo da expressão (101), ou seja, a introdução do quadrivetor A_μ , de acordo com a transformação em (104), anula a variação da lagrangiana $\delta\mathcal{L}$ que se obteve com as transformações locais. No entanto, surge como consequência desta mesma operação um termo adicional, $-e(\delta J^\mu) A_\mu$, o qual ainda mantém a não invariância da lagrangiana sob transformações locais. Parcialmente, tem-se dos resultados em (101) e (106) que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu) A_\mu. \quad (107)$$

Retornando à expressão para J^μ dada em (75) reescreve-se (107) deixando as operações a serem feitas devidamente indicadas, como

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -ie \{(\delta\Phi^*)(\partial^\mu\Phi) + \Phi^*\delta(\partial^\mu\Phi) - (\delta\Phi)(\partial^\mu\Phi^*) - \Phi\delta(\partial^\mu\Phi^*)\} A_\mu. \quad (108)$$

Utilizando os resultados dados em (88), (89), (94) e (95), mostra-se que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e(\partial^\mu\Lambda) A_\mu(\Phi^*\Phi). \quad (109)$$

A fim de buscar a invariância desta lagrangiana, analogamente como feito acima, introduze-se um novo termo em \mathcal{L} , desta vez dado por

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi, \quad (110)$$

o que, automaticamente, leva à conclusão

$$\delta\mathcal{L}_2 = e^2 \{\delta(A_\mu A^\mu) \Phi^* \Phi\}, \quad (111)$$

haja vista que, como utilizou-se anteriormente, $\delta(\Phi\Phi^*) = 0$. Do resultado em (111), efetuando a operação $\delta(A_\mu A^\mu)$, conclui-se que

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2 (\delta A_\mu) A^\mu (\Phi^* \Phi). \quad (112)$$

Portanto, substituindo o resultado de (105) em (112), tem-se

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e(\partial_\mu\Lambda) A^\mu (\Phi^* \Phi). \quad (113)$$

Como consequência direta desse resultado, percebe-se que, juntamente com a expressão em (109), tem-se:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0, \quad (114)$$

o que resulta em uma lagrangiana total, $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, invariante sob transformações locais.

Num primeiro momento conseguiu-se, introduzindo termos adequados à lagrangiana usual do campo escalar complexo, torná-la invariante; mas ainda é preciso pinçar alguns pontos fundamentais. O quadrivetor A_μ , que foi introduzido em \mathcal{L} durante o processo de busca da sua invariância, ainda não contribui de forma direta em \mathcal{L} para a dinâmica da teoria, afinal não se tem uma expressão que represente o termo cinético associado a este campo. Por esse motivo deve-se introduzir mais um termo à lagrangiana \mathcal{L} que também seja invariante sob transformações locais. Para isso é preciso definir o quadri-rotacional do campo A_μ , dado a seguir,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (115)$$

Segue diretamente desta definição, usando a transformação indicada em (104), que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\longmapsto F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e} [\partial_\mu, \partial_\nu] \Lambda = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (116)$$

visto que o comutador $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Dessa forma, percebe-se que a quantidade em (115) é, de fato, invariante sob transformações locais. E assim, como já é bem conhecido na

literatura, o termo que se deve adicionar à lagrangiana usual do campo escalar complexo é dado pela seguinte expressão

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (117)$$

Com este último resultado, pode-se agora escrever a lagrangiana total que se mantém invariante sob transformações locais. De acordo com as expressões (52), (102), (110) e (117), não esquecendo da forma de J^μ , dada em (75), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = \\ &= (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) - m^2 \Phi^* \Phi - ie \{ \Phi^* (\partial^\mu \Phi) - \Phi (\partial^\mu \Phi^*) \} A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (118)$$

Lembrando que

$$(\partial_\mu \Phi) A^\mu = (\partial^\mu \Phi) A_\mu,$$

pode-se rearranjar a expressão (118) como dada a seguir

$$\mathcal{L}_{total} = (\partial_\mu \Phi) \{ \partial^\mu \Phi^* - ie \Phi^* A^\mu \} + ie \Phi A^\mu \{ \partial^\mu \Phi^* - ie \Phi^* A^\mu \} - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

e assim obter

$$\mathcal{L}_{total} = \{ \partial_\mu \Phi + ie \Phi A_\mu \} \{ \partial^\mu \Phi^* - ie \Phi^* A^\mu \} - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (119)$$

Esse resultado é de importância fundamental para o desenvolvimento do trabalho e cabe aqui enumerar alguns pontos sobre essa expressão. Como é bem difundido na literatura, o quadri-rotacional $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ representa o tensor do campo eletromagnético, com três componentes para o campo elétrico e três para o campo magnético. Sendo assim, é curioso observar que do fato de se requerer a invariância da lagrangiana sob transformações locais, obtém-se como consequência natural o eletromagnetismo usual. Outro ponto importante de se notar são as duas expressões entre chaves. Com exceção do último termo que, como se disse há pouco, representa um resultado natural do processo de busca da invariância de \mathcal{L} , tudo se passa como se tivesse sido feito uma redefinição na expressão da lagrangiana dada em (52). Essa redefinição dá origem a um novo conceito, chamado de derivada covariante D_μ , ou seja, comparando (52) com (119), observa-se diretamente que

$$\partial_\mu \Phi \longmapsto D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + ie A_\mu) \Phi. \quad (120)$$

Essa nova derivada D_μ , diferentemente da derivada usual ∂_μ , transforma-se da mesma maneira que o campo Φ , ou seja, de forma covariante, o que justifica o nome dado à mesma. O que se quer dizer com isto é, efetuando a operação $\delta(D_\mu \Phi)$, utilizando os resultados dados em (88), (94) e (105), conclui-se que

$$\delta(D_\mu \Phi) = -i\Lambda(D_\mu \Phi) \quad (121)$$

o que concorda com a transformação do campo em (88), dada por

$$\delta\Phi = -i\Lambda\Phi. \quad (122)$$

Assim sendo, ambos apresentam a mesma lei de transformação. Para evitar a redundância, vale apenas lembrar que essa mesma análise se aplica ao campo Φ^* . Essa redefinição que dá origem ao que se denominou derivada covariante, lembra a lei de transformação que se faz

no momento de uma partícula clássica quando se deseja estudar a interação da mesma com um campo eletromagnético, mais conhecido na literatura como acoplamento mínimo. Sem esmiuçar as características dessa transformação, pois este não é foco da presente discussão, conclui-se no contexto atual, de acordo com a redefinição em (120), que o campo Φ deve descrever o comportamento de um campo com carga e . Sendo a análise sobre o campo Φ^* análoga à feita no campo Φ , segue naturalmente que este, por sua vez, deve descrever uma partícula com carga $-e$. Lembrando que o parâmetro e , interpretado agora como carga elétrica, surgiu pela primeira vez acoplado ao quadrivetor A_μ na expressão (102), identifica-se este quadrivetor com o potencial vetor do eletromagnetismo, de forma que as equações de Maxwell não-homogêneas sejam obtidas através do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, como se verá adiante.

Para finalizar este breve estudo acerca das características das transformações locais, obtém-se as equações de Euler-Lagrange a partir da Lagrangiana (119) variando o campo A_μ . Lembrando que as equações de Euler estão representadas na equação (45), com a ressalva de que as derivadas devem ser tomadas com relação ao campo A_μ , resolve-se a seguinte equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0. \quad (123)$$

Sendo assim, num primeiro momento, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = ie\Phi \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} (D^\alpha \Phi^*) - ie\Phi^* (D_\alpha \Phi) \frac{\partial A^\alpha}{\partial A_\mu}. \quad (124)$$

Usando o fato de que no primeiro termo,

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} = \delta_\mu^\alpha, \quad (125)$$

em que δ_μ^α representa uma delta de Kronecker e no segundo termo, reescrevendo $A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$, encontra-se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie \{ \Phi^* (D^\mu \Phi) - \Phi (D^\mu \Phi^*) \}. \quad (126)$$

Para o segundo termo tem-se que calcular a seguinte expressão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right\}. \quad (127)$$

Usando a forma explícita do tensor $F_{\mu\nu}$, expresso em (115), obtém-se que

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha, \quad (128)$$

e

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}. \quad (129)$$

Substituindo estes resultados em (127), fica-se com

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4} \{ (g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}) F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} (\delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha) \} \quad (130)$$

e assim, usando o fato que o tensor $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico, ou seja,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (131)$$

conclui-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = F^{\mu\nu}. \quad (132)$$

Desta maneira, os resultados obtidos em (126) e (132) fornecem, quando substituídos em (123), a seguinte expressão

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -e\zeta^\mu, \quad (133)$$

em que ζ^μ , definido como

$$\zeta^\mu = ie \{ \Phi^* (D^\mu \Phi) - \Phi (D^\mu \Phi^*) \},$$

nada mais é do que a versão covariante da corrente conservada J^μ expressa em (75) quando se trabalhou as transformações globais na lagrangiana. A única diferença entre essas duas correntes é o fato de que em ζ^μ , ao invés da derivada usual $\partial_\mu \Phi$, surge em seu lugar a derivada covariante $D_\mu \Phi$, da mesma forma como ocorreu a modificação na lagrangiana. O processo mais uma vez se repete. Nota-se que, na presença do campo eletromagnético, a nova corrente ζ^μ é conservada, e não a corrente usual J^μ , ou seja, efetuando

$$\partial_\mu (\partial_\nu F^{\mu\nu}) = -e\partial_\mu \zeta^\mu = 0, \quad (134)$$

o que fornece

$$\partial_\mu \zeta^\mu = 0. \quad (135)$$

3 Quebra Espontânea de Simetria

Esse capítulo, indiscutivelmente, pode ser encarado como a espinha dorsal do trabalho. Nele, falar-se-á sobre o conceito mais fundamental por trás da possibilidade da existência de monopolos magnéticos, a ideia de quebra espontânea de simetria. No entanto, seria pouco intuitivo discorrer sobre o assunto sem ao menos tentar ilustrar este princípio com analogias que permitam uma maior proximidade com o fenômeno a ser explorado. É sempre difícil pensar em situações clássicas que possibilitem uma aproximação razoável com um dado fenômeno quando o mesmo é estudado em teoria quântica de campos. Mesmo que aparentemente desconexo do contexto atual do trabalho, cabe aqui observar a seguinte situação - um jogo de roleta num cassino. Por incrível que pareça, esse exemplo ajuda a elucidar a noção de quebra espontânea de simetria.

Como é bem conhecido, o jogo, dentre outras particularidades que não são relevantes para os propósitos que aqui serão discutidos, consiste basicamente em colocar a roleta em rotação e deixar com que uma pequena bolinha solta sobre a mesma "*escolha*" uma das possíveis canaletas dentre as várias divisões que a roleta apresenta. Note que num primeiro momento, devido a simetria da roleta, ou seja, pelo fato das canaletas serem igualmente divididas, todas apresentam a mesma probabilidade de serem ocupadas pela bolinha quando a mesma "*decidir*" parar. Devido aos sucessivos choques da bolinha com as partes da roleta, perde-se energia ininterruptamente, até que em um dado momento ela passa a ocupar uma única divisão da roleta e o jogo tem um vencedor. A pergunta natural é: Qual a ligação desse exemplo com a ideia de quebra espontânea de simetria? Pois bem, para se ter a maior fidelidade possível com o conceito exato de quebra espontânea de simetria, toma-se dois momentos distintos do jogo. O primeiro: a roleta girando sem a bolinha. E o segundo: A roleta girando com a bolinha já em uma das canaletas. No primeiro momento pode-se dizer, sem perda de generalidade que, a priori, se tem uma configuração simétrica. Alguém, olhando para a roleta sob diversos ângulos diferentes visualiza sempre a mesma cena. No segundo momento, pensando no exato instante em que a bolinha ocupou uma das canaletas, a simetria inicial se quebra, visto que a cena visualizada agora pelo mesmo observador anterior se tornou diferente. Como se não bastasse, a cena é diferente para qualquer ângulo em que se faça a observação. Diz-se a esse respeito que essa nova configuração ilustra a quebra espontânea da simetria e gera-se aí o que se chama de um novo estado fundamental, uma nova cena. Estado esse não-simétrico, porém degenerado! Não-simétrico pois se a cena for pensada como uma fotografia, a cada ângulo de observação tem-se uma cena diferente. Degenerado, pois é possível obter uma infinidade de possibilidades desse novo estado fundamental através de uma rotação da "nova roleta". Vale observar que toda essa situação se constrói quando a energia da bolinha assume um certo valor que não permite a mesma ficar trocando de canaletas, ou seja, para um valor crítico da energia E_c da bolinha, quebra-se espontaneamente a simetria do problema. Essa quebra é dita espontânea haja visto que a bolinha pode, invariavelmente, "*escolher*" qualquer canaleta da roleta dependendo do valor de sua energia. Outro fato importante reside em mencionar que ao se obter tal valor de energia, chamado anteriormente de E_c , a configuração inicial, dita simétrica, torna-se instável, já que a partir desse momento gerar-se-á um novo estado.

Visto esse exemplo, cabe aqui enumerar os seus pontos fundamentais. São eles: A simetria em um dado problema é quebrada espontaneamente ao se variar o valor de um dado parâmetro, que no caso anterior foi a energia; A configuração simétrica se torna instável e o novo estado fundamental obtido é degenerado!

Esse exemplo serve para tornar a compreensão do conceito de quebra espontânea de simetria mais fácil. No entanto, por se tratar de uma analogia, obviamente ele não traz toda a informação relevante de que se necessita no contexto da proposta do trabalho. Embora seja de bastante utilidade, ainda existem pontos fundamentais a serem tratados aqui, e é sob este aspecto que se volta a atenção a partir de agora.

Em se tratando de teoria quântica de campos a quebra espontânea de simetria é um conceito extremamente útil, e o exemplo dado acima servirá como elemento fundamental para esclarecer e refinar a concepção e o entendimento sobre a ideia do que é o vácuo e como ele está relacionado com a discussão que aqui se faz.

3.1 O Caso Abelian

Dando continuidade à discussão anterior, volta-se a atenção para a teoria quântica de campos. O que comumente em mecânica quântica é definido como estado fundamental, aqui é chamado de vácuo. Por esse motivo findou-se a abordagem anterior trazendo à tona esse conceito. Pode-se dizer então que se busca a partir de agora uma teoria em que o conceito de vácuo ganha uma nova conotação. Desta forma, neste primeiro momento explora-se, por questão de praticidade, uma situação na qual se trata a lagrangiana do campo escalar. Ressalta-se, porém, em concordância com o que foi visto até o momento, que a simetria na lagrangiana não será partilhada pela solução do estado fundamental, seguindo assim a mesma ideia do jogo de roleta no cassino. Parte-se, portanto da expressão para a lagrangiana do campo escalar complexo, escrita ligeiramente diferente de quando é citada pela primeira vez em (52), ou seja, toma-se

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2, \quad (136)$$

em que o termo adicional $\lambda (\Phi^* \Phi)^2$ representa um termo de auto-interação do campo Φ , sendo λ , a priori, um parâmetro constante. A forma funcional deste termo se justifica por se requerer que a lagrangiana seja simétrica. Como já foi mencionado ao longo do trabalho, o primeiro termo em (136) carrega a dinâmica da teoria de forma que o restante é identificado como um termo de potencial, representado a seguir como $V(\Phi, \Phi^*)$. Logo, tem-se que

$$V(\Phi, \Phi^*) = m^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2. \quad (137)$$

Tendo em vista toda discussão inicial é necessário obter o estado fundamental da teoria. De maneira usual, este é obtido a partir da minimização do potencial, ou seja, fazendo-se

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0, \quad (138)$$

tem-se que

$$|\Phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda}. \quad (139)$$

Vale observar que esta condição somente é válida no caso em que $m^2 < 0$; se não for assim a solução obtida é a trivial, ou seja, $\Phi = \Phi^* = 0$, a qual claramente não fornece nada de novo. É bastante conveniente definir

$$|\Phi|^2 = a^2, \quad (140)$$

o que fornece imediatamente

$$|\Phi| = a. \quad (141)$$

Essa última expressão define o chamado valor esperado do vácuo de forma que o potencial dado em (137) apresenta seu valor mínimo ao longo de um "círculo" de raio a , um máximo local em $\Phi = 0$, e uma infinidade de vácuos degenerados, todos relacionados uns com os outros através de uma rotação. O ponto crucial dessa abordagem reside em perceber que os campos físicos são obtidos através de excitações sobre o vácuo, ou seja, sobre os estados que estão ao longo do círculo, e não fazendo perturbações em $\Phi = 0$. Devido a geometria envolvida na situação apresentada é bastante útil e conveniente a utilização de coordenadas polares. Nessa representação, claramente, os campos físicos devem ser associados a uma coordenada angular θ e outra radial ρ . Como os vácuos degenerados estão todos ao longo do círculo de raio a , as excitações sobre o vácuo certamente não provocam alteração na coordenada angular, somente na coordenada radial. Esta argumentação permite, usando coordenadas polares, escrever o campo Φ da seguinte maneira

$$\Phi(x) = \left[\rho'(x) + a \right] \exp[i\theta(x)], \quad (142)$$

em que $\rho'(x)$ representa uma excitação no estado de vácuo a e $\theta(x)$ o campo físico associado a coordenada angular.

A partir de toda construção que se seguiu até o momento é natural se questionar sobre as consequências físicas dessa abordagem. Para isto deve-se, de acordo com a construção da expressão (142), reescrever a lagrangiana dada em (136) em termos dos novos campos ρ' e θ . Para o termo de potencial dado em (137), fazendo uso da expressão (142), tem-se num primeiro momento que

$$V(\Phi, \Phi^*) = m^2 \rho'^2 + 2m^2 a \rho' + m^2 a^2 + \lambda \left[\rho'^4 + 4a \rho'^3 + 6\rho'^2 a^2 + 4a^3 \rho' + a^4 \right]. \quad (143)$$

Usando a condição (139) juntamente com a definição (140), a expressão anterior pode ser mais convenientemente reescrita como

$$V(\Phi, \Phi^*) = \lambda \rho'^4 + 4\lambda a \rho'^3 + 4\lambda a^2 \rho'^2 - \lambda a^4. \quad (144)$$

Voltando a atenção para o termo cinético, ou seja, o termo $(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi^*)$, com a definição em (142), este passa a ser escrito como

$$(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi^*) = \left(\partial_\mu \rho' \right) \left(\partial^\mu \rho' \right) + \left[\rho' + a \right]^2 (\partial^\mu \theta)(\partial_\mu \theta). \quad (145)$$

Vale observar que só é possível obter esta expressão utilizando-se mais uma vez do fato de que $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$. Juntando as expressões (144) e (145) a lagrangiana, em termos dos campos ρ' e θ finalmente se apresenta como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\partial_\mu \rho' \right) \left(\partial^\mu \rho' \right) + \left[\rho' + a \right]^2 (\partial^\mu \theta)(\partial_\mu \theta) - \\ & - \left[\lambda \rho'^4 + 4\lambda a \rho'^3 + 4\lambda a^2 \rho'^2 - \lambda a^4 \right]. \end{aligned} \quad (146)$$

Pois bem, embora não se tenha dissertado sobre algumas peculiaridades por trás do formalismo lagrangiano, é bem difundido na literatura [8] que ao se escrever uma determinada lagrangiana, se esta apresentar termos quadráticos nos campos após a quebra espontânea de simetria, significa que estes representam campos massivos, cujos coeficientes são os pólos do propagador. Sendo assim, da expressão em (146) pode-se obter algumas conclusões bastante interessantes. Tem-se nesta expressão um termo proporcional a ρ'^2 , que deve então representar um campo massivo, e assim sua massa $m_{\rho'}^2$ é

$$m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2. \quad (147)$$

Porém, não se tem um termo proporcional a θ^2 . Isto significa que a quebra espontânea de simetria tornou dois campos inicialmente massivos em um campo massivo e outro sem massa. Este resultado pode ser interpretado de acordo com as características do exemplo discutido. Como os vácuos degenerados obtidos anteriormente estão todos ao longo de um círculo de raio a , pode-se dizer que não se gasta energia para deslocamentos ao longo deste caminho, afinal se está no mesmo estado! Em contrapartida, deslocamentos ao longo da direção radial requerem gasto de energia, afinal, nesta situação, invariavelmente, se passaria para estados mais energéticos, sendo necessário vencer a força restauradora do potencial para isto.

Nesse contexto é importante mencionar também que pode-se associar uma partícula a esses campos, de modo que surge uma nova concepção acerca do problema discutido, ou seja, diz-se que a quebra espontânea de simetria implica a existência de uma partícula sem massa, mais conhecida como bóson de Goldstone. Este resultado, que trata na verdade de um fenômeno geral, é um exemplo do Teorema de Goldstone [8].

3.2 Simetria de Gauge

Na seção anterior explorou-se as características, ou melhor, as consequências físicas por trás de todo o contexto no qual se insere a quebra espontânea de simetria quando se considera a lagrangiana do campo escalar sem levar em conta a interação com o campo eletromagnético. O tratamento que se faz adiante é exatamente o mesmo que se fez anteriormente, com a ressalva de que a lagrangiana em questão agora será aquela dada pela expressão (119). No entanto, assim como se fez na seção anterior, esta nova lagrangiana é reescrita ligeiramente diferente de como se apresenta em (119), ou seja, nela também é adicionado um termo que representa a auto interação dos campos escalares. É bom frisar que a adição desse termo possibilita que o potencial admita quebra espontânea de simetria, e não só isso, a minimização do potencial fornece um valor não trivial. O procedimento, embora análogo, é apresentado aqui em coordenadas cartesianas e não em coordenadas polares, o que traz uma nova visão acerca da quebra espontânea de simetria, porém com interpretações consistentes com o tratamento anterior. Com base nestas informações, a lagrangiana em questão então é dada pela seguinte expressão

$$\mathcal{L}_{total} = (D_\mu \Phi) (D^\mu \Phi^*) - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (148)$$

em que o termo $\lambda (\Phi^* \Phi)^2$, como no caso anterior, representa a auto-interação dos campos, com $D_\mu \Phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \Phi$ e $D^\mu \Phi^* = (\partial^\mu - ieA^\mu) \Phi^*$. Vale observar que o potencial associado a esta lagrangiana é idêntico ao expresso em (137), o que leva a conclusão

simples e direta de que as expressões (139), (140) e (141) continuam válidas no presente tratamento. Diferentemente do procedimento anterior, ao invés de se utilizar a expressão (142) para representar os campos e as excitações sobre o vácuo, escreve-se, em coordenadas cartesianas, os campos segundo as expressões (53) e (54), com o detalhe de que agora é necessário adicionar o valor esperado do vácuo a esta expressão, ou seja, toma-se

$$\Phi(x) = a + \frac{\Phi_1(x) \pm i \Phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (149)$$

É necessário agora reescrever a lagrangiana em (148) em função do valor esperado do vácuo a e das componentes do campo Φ , Φ_1 e Φ_2 , respectivamente. Por questão de praticidade é conveniente trabalhar cada um dos termos em (148) separadamente. Sendo assim, os resultados a seguir são obtidos de forma imediata, ou seja, utilizando a expressão (149) e escrevendo os termos de maneira adequada encontra-se

$$m^2 \Phi^* \Phi = m^2 \left\{ a^2 + \sqrt{2} a \Phi_1 + \frac{1}{2} \{ \Phi_1^2 + \Phi_2^2 \} \right\} \quad (150)$$

e

$$\lambda (\Phi^* \Phi)^2 = \lambda \left\{ a^4 + 2\sqrt{2} a^3 \Phi_1 + a^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + \sqrt{2} a \Phi_1 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + 2a^2 \Phi_1^2 + \frac{1}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \right\}. \quad (151)$$

Como o tensor do campo eletromagnético não depende do campo Φ , mesmo diante da redefinição dos campos dada em (149), esse não sofre nenhuma alteração, o que faz com que a atenção seja voltada apenas para reescrever o termo associado à derivada covariante $(D_\mu \Phi) (D^\mu \Phi^*)$. Escrevendo essa expressão de forma explícita tem-se que

$$(D_\mu \Phi) (D^\mu \Phi^*) = (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) - ie A^\mu \Phi^* (\partial_\mu \Phi) + ie A_\mu \Phi (\partial^\mu \Phi^*) + e^2 (A_\mu \Phi) (A^\mu \Phi^*), \quad (152)$$

restando apenas substituir a expressão (149) em cada termo e assim finalmente construir a lagrangiana desejada. Embora o que se faça aqui seja apenas um tratamento algébrico, julga-se importante apresentar os resultados a seguir. Sendo assim, com o auxílio da expressão (149) obtém-se

$$(\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_2)^2, \quad (153)$$

e

$$e^2 (A_\mu \Phi) (A^\mu \Phi^*) = e^2 a^2 (A_\mu A^\mu) + \sqrt{2} a (A_\mu A^\mu) \Phi_1 + \frac{1}{2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) (A_\mu A^\mu). \quad (154)$$

Ao se reescrever os outros dois termos os resultados são bastante parecidos, haja visto a similaridade das expressões. Vale observar que a única diferença entre elas é a troca de Φ por Φ^* . Com a substituição da expressão (149), chega-se à

$$-ie A^\mu \Phi^* (\partial_\mu \Phi) + ie A_\mu \Phi (\partial^\mu \Phi^*) = \sqrt{2} e a A^\mu \partial_\mu \Phi_2 + \frac{e}{2} A_\mu (\Phi_1 \partial^\mu \Phi_2 - \Phi_2 \partial^\mu \Phi_1). \quad (155)$$

Agora, com os resultados de (150), (151), (153), (154) e (155), lembrando ainda que o tensor do campo eletromagnético não teve sua forma alterada, pode-se reescrever a lagrangiana inicialmente apresentada em (148). No entanto, apresenta-se o resultado unicamente com os termos relevantes para os propósitos do trabalho. O que se quer dizer é que

de acordo com a seção anterior viu-se que termos quadráticos na lagrangiana representam campos massivos e assim os termos que são de ordem superior não são relevantes neste tratamento para a discussão que aqui se pretende estabelecer. Desta forma, a lagrangiana assume a seguinte configuração

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^2a^2(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_2)^2 - 2\lambda a^2\Phi_1^2 + \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\Phi_2 \quad (156)$$

+ termos de ordem superior.

Nota-se que tanto o campo Φ_1 assim como o campo Φ_2 apresentam termos quadráticos em (156). Isto aparentemente leva à conclusão de que ambos os campos se tornaram massivos. No entanto, o campo Φ_2 também se apresenta acoplado ao campo A_μ como se pode observar no último termo de (156). Uma mudança de variáveis permite uma interpretação mais clara acerca do resultado até então obtido em (156). Essa expressão pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 - 2\lambda a^2\Phi_1^2 + e^2a^2\left\{A_\mu + \frac{\partial_\mu\Phi_2}{\sqrt{2}ea}\right\}^2, \quad (157)$$

o que leva à conclusão de que o campo Φ_2 se torna obsoleto ao se redefinir o campo A_μ através da seguinte translação,

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{\partial_\mu\Phi_2}{\sqrt{2}ea}.$$

Diz-se isso pois, dentro desse contexto, a lagrangiana em (156) se torna

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^2a^2(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 - 2\lambda a^2\Phi_1^2 + \quad (158)$$

+termos de ordem superior,

e o campo Φ_2 não mais aparece na lagrangiana .

Tem-se nesta última expressão ambos os campos, A_μ e Φ_1 , na forma quadrática, e nenhum termo acoplado que possa mascarar as características físicas por trás deles. Desta forma, como já se viu anteriormente, tanto o campo Φ_1 como A_μ indicam que se está diante de dois campos com massa. No primeiro caso estudado, aquele em que se utilizou a lagrangiana dada em (136), o campo Φ_1 se tornou massivo após a quebra espontânea de simetria e campo Φ_2 se apresentou sem massa (bóson de Goldstone). No contexto atual, trabalhou-se a expressão (158) de modo que o campo Φ_2 não aparecesse na lagrangiana em nenhuma forma, o que permite dizer que após a quebra espontânea de simetria o campo "desapareceu". Nessa situação, devido a forma quadrática do campo A_μ , o fóton mais uma vez se tornou massivo. Este fenômeno é conhecido na literatura como fenômeno de Higgs. Diferentemente do caso anterior, a quebra espontânea de simetria produz agora um fóton massivo e o desaparecimento de um campo ao invés de um campo massivo e outro em massa. Vale observar, no entanto, que os graus de liberdade associados aos campos, antes e depois da quebra se conservam. Antes da quebra tem-se dois campos escalares massivos, Φ_1 e Φ_2 , cada um contendo apenas 1 grau de liberdade associado a eles, e um fóton sem massa, contendo 2 graus de liberdade, totalizando, portanto, antes da quebra, 4 graus de liberdade. Após a quebra, entretanto, tem-se um campo escalar massivo, Φ_1 , com 1 grau de liberdade, e um fóton massivo, contendo 3 graus de liberdade, totalizando, portanto, os mesmos 4 graus de liberdade que se tinha antes da quebra.

3.3 O Caso não Abelian

Nesta seção explora-se uma lagrangiana considerando graus de liberdade alheios ao espaço-tempo, ou seja, faz-se um tratamento ligeiramente diferente do caso anterior, em que não se considera apenas uma componente para o campo escalar Φ . Nesta situação diz-se que os campos apresentam graus de liberdade internos, os quais são representados por um conjunto de campos, ou seja, $\Phi = \{\Phi_i\}$, em que o índice $i = 1, 2, 3, \dots, N$ representa tais graus de liberdade. A quantidade de campos presentes neste conjunto, ou seja, N , é exatamente o número de graus de liberdade internos do sistema como um todo. Vale lembrar que não existe distinção física ao se colocar índices internos (*índices latinos*) acima ou abaixo das grandezas aqui mencionadas.

Esse tratamento toma como ponto de partida uma lagrangiana que é o foco principal deste trabalho e é a partir dela que se consegue estimar, num primeiro momento, a massa de um monopolo magnético. Mas antes é importante mencionar que o campo Φ precisa necessariamente pertencer a alguma representação do grupo de gauge em questão, e desta forma essa observação leva à ideia de que os elementos do grupo, em analogia com os casos já estudados anteriormente, devem ser representados por uma transformação parecida como (87), ou seja, faz-se

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = U_{ij}\Phi_j(x), \quad (159)$$

em que cada elemento do grupo U apresenta-se de uma maneira bem característica. Toma-se

$$U(\alpha) = \exp[\alpha^a T_a], \quad (160)$$

em que α^a representa o conjunto dos parâmetros do grupo; $a = 1, 2, 3, \dots, d$ diz respeito à dimensão d do grupo, ou seja, o número de geradores do mesmo, e cada T_a indica a matriz correspondente ao gerador das transformações a que pertence o campo. De acordo com a estrutura sob a qual se constrói a ideia dos grupos de Lie, sabe-se que os geradores do grupo, para qualquer representação, satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c, \quad (161)$$

no qual f_{ab}^c nada mais são do que as constantes de estrutura da álgebra. De (160) segue que

$$\delta U_{ij} = [\exp(\delta\alpha_a T^a)]_{ij}, \quad (162)$$

o que permite escrever em primeira aproximação e em termos de componentes

$$\Phi'_i(x) - \Phi_i(x) \equiv \bar{\delta}\Phi_i(x) = (\delta\alpha_a T^a)_{ij} \Phi_j, \quad (163)$$

ou, matricialmente

$$\bar{\delta}\Phi(x) = (\delta\alpha_a T^a) \Phi. \quad (164)$$

A partir destas expressões pode-se fazer os mesmos tratamentos já realizados neste trabalho, ou seja, estudar transformações globais (aquelas em que os parâmetros do grupo α_a são considerados constantes) e transformações locais, em que os mesmos são tratados como função do ponto do espaço-tempo, ou seja, quando $\alpha_a = \alpha_a(x)$. Faz-se a seguir um breve tratamento de ambas situações.

3.3.1 Transformações Globais

Como foi dito ao final da seção anterior procura-se agora dar ênfase à análise do caso em que os parâmetros do grupo α_a são contantes. Sendo a lagrangiana em questão dependente única e exclusivamente dos campos e de suas derivadas, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i)$, a sua variação $\delta\mathcal{L}$ pode ser escrita como

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} \frac{\delta\bar{\Phi}_i}{\delta\alpha_a} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \frac{\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_i)}{\partial\alpha_a}. \quad (165)$$

Como α_a são constantes, a operação ∂_μ comuta com a operação $\bar{\delta}$, o que permite escrever a partir de (163),

$$\partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_i) = \partial_\mu \left\{ (\delta\alpha_a T^a)_{ij} \Phi_j \right\} \quad (166)$$

ou seja,

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_i) = (\delta\alpha^c T_c)_{ij} \partial_\mu\Phi_j. \quad (167)$$

Utilizando os resultados dados em (163) e em (167), a variação da lagrangiana dada em (165) pode ser reescrita como

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} (T_c)_{ij} \Phi_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} (T_c)_{ij} \partial_\mu\Phi_j, \quad (168)$$

da qual nota-se claramente que, da condição de se tomar

$$\partial\mathcal{L} = 0, \quad (169)$$

segue naturalmente que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} (T_c)_{ij} \Phi_j = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} (T_c)_{ij} \partial_\mu\Phi_j. \quad (170)$$

Este resultado será de bastante utilidade mais a frente e por isso se justifica a expressão (170). Outro resultado importante é oriundo da equação (168). Com o auxílio das equações de Euler Lagrange, dadas respectivamente por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}, \quad (171)$$

multiplicando essa equação por $(T_c)_{ij} \Phi_j$ e substituindo a condição (170) nesta nova expressão, rearranjando os termos de maneira conveniente, chega-se à

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} (T_c)_{ij} \Phi_j + \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} (T_c)_{ij} \Phi_j \right\} = 0, \quad (172)$$

o que significa que a condição (169) implica a conservação da quantidade

$$J_c^\mu \equiv - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} T_c \Phi, \quad (173)$$

interpretada como uma corrente.

3.3.2 Transformações Locais

Se ao invés dos parâmetros α_a serem constantes eles dependerem da posição do espaço tempo espera-se, como já se estudou anteriormente, que a invariância da Lagrangiana seja quebrada e, por conseguinte, entre outras possibilidades, surja uma nova concepção de derivada covariante. Sendo assim, se $\alpha_a = \alpha_a(x)$, tem-se que a expressão (163) continua válida, ou seja

$$\bar{\delta}\Phi_i(x) = (\delta\alpha_a T^a)_{ij} \Phi_j, \quad (174)$$

porém, a expressão (167) ganha um novo termo, ficando assim expressa

$$\partial_\mu (\bar{\delta}\Phi_i) = \partial_\mu (\delta\alpha^c) (T_c)_{ij} \Phi_j + \delta\alpha^c (T_c)_{ij} (\partial_\mu \Phi_j). \quad (175)$$

Escrevendo a variação da lagrangiana

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha_a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} \bar{\delta}\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_i) \quad (176)$$

e substituindo os resultados dados em (174) e (175), mostra-se que

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} T_c \Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} T_c (\partial_\mu\Phi) \right] \delta\alpha^c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} T_c \Phi \partial_\mu (\delta\alpha^c). \quad (177)$$

No entanto, segundo a expressão (170) o termo entre colchetes é nulo, e como era de se esperar a variação da lagrangiana sob transformações locais é novamente quebrada, ou seja

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} T_c \Phi \partial_\mu (\delta\alpha^c). \quad (178)$$

Assim, fazendo uso do resultado em (173), concluí-se que sob transformações locais a invariância da lagrangiana é dada pela seguinte expressão

$$\delta\mathcal{L} = -J_c^\mu \partial_\mu (\delta\alpha^c). \quad (179)$$

O tratamento que se seguiu nesta última seção, evidentemente, é um caso geral de toda discussão que se construiu ao longo do trabalho até este momento, e por isso engloba os resultados obtidos previamente quando se estudou o campo escalar complexo. Por questão de praticidade e por querer dar ênfase às características dos casos estudados anteriormente preferiu-se introduzir o assunto através dos casos particulares estudados. Sendo assim o que se pretende a partir de agora é reobter a invariância da Lagrangiana, haja vista que foi desta mesma maneira que se deu o aparecimento daquilo que se definiu como derivada covariante, assim como o surgimento do eletromagnetismo dentro da teoria.

A fim de se redefinir uma nova derivada covariante, procede-se, em analogia com o que se fez ao estudar o campo escalar complexo, introduzindo-se um novo potencial vetor na teoria, no entanto, segundo a seguinte expressão,

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad (180)$$

lembrando que T_a são as matrizes que representam os geradores da álgebra e os A_μ^a , os coeficientes da expansão.

Daqui em diante neste capítulo considera-se que a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ e a constante de acoplamento e na expressão (120) foram absorvidas dentro do potencial vetor A_μ , de forma que se reescreve a derivada covariante em (120) da seguinte maneira

$$(D_\mu \Phi)_i = (\partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi)_i. \quad (181)$$

Com a redefinição de A_μ em (180) tem-se

$$D_\mu \Phi_i = \partial_\mu \Phi_i + A_\mu^a (T_a)_{ij} \Phi_j. \quad (182)$$

Da mesma forma como já se fez diversas vezes ao longo do trabalho, faz-se

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = \bar{\delta} (\partial_\mu \Phi_i) + (\bar{\delta} A_\mu^a) (T_a)_{ij} \Phi_j + A_\mu^a (T_a)_{ij} \bar{\delta} \Phi_j. \quad (183)$$

Usando os resultados obtidos em (163) e (167), a expressão (183) se torna

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = \bar{\delta} \alpha^c (T_c)_{ij} (\partial_\mu \Phi_j) + A_\mu^a (T_a T_c)_{ik} \delta \alpha^c \Phi_k \quad (184)$$

$$+ (T_c)_{ik} \Phi_k [(\partial_\mu \delta \alpha^c) + (\bar{\delta} A_\mu^c)]. \quad (185)$$

Com o auxílio da relação (161), obtém-se que

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = \{(\partial_\mu \delta \alpha^c) + (\bar{\delta} A_\mu^c)\} (T_c)_{ik} \Phi_k + \delta \alpha^c (T_c)_{ij} \partial_\mu \Phi_j + \quad (186)$$

$$+ A_\mu^a f_{ac}^b (T_b)_{ik} (\delta \alpha^c) \Phi_k + A_\mu^a (T_c T_a)_{ik} (\delta \alpha^c) \Phi_k.$$

Rearranjando esta expressão de maneira adequada, segue

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = \partial_\mu \delta \alpha^c (T_c)_{ij} \left\{ \partial_\mu \Phi_j + A_\mu^a (T_a)_{jk} \Phi_k \right\} + \quad (187)$$

$$(T_c)_{ik} \Phi_k \left\{ (\partial_\mu \delta \alpha^c) + \bar{\delta} A_\mu^c + \delta \alpha^d f_{ed}^c A_\mu^e \right\}.$$

Usando a definição de derivada covariante dada em (182), a expressão anterior se torna

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = \delta \alpha^c (T_c)_{ij} D_\mu \Phi_j + (T_c)_{ik} \Phi_k \left\{ (\partial_\mu \delta \alpha^c) + \bar{\delta} A_\mu^c + \delta \alpha^d f_{ed}^c A_\mu^e \right\}. \quad (188)$$

Vale observar que esta expressão, a menos do segundo termo, apresenta a mesma forma funcional da expressão (167), obtida quando se trabalhou a lagrangiana sob transformações globais. A ressalva, porém, está no fato de neste caso a derivada em questão ser a derivada covariante $D_\mu \Phi_i$ e não a derivada usual $\partial_\mu \Phi_i$. A fim de que sob transformações locais a nova derivada já seja covariante, ou seja, se transforme da mesma maneira que o campo Φ_i , de acordo com (174), impõe-se a condição de que o segundo termo em (188) seja nulo, o que fornece

$$\bar{\delta} A_\mu^c = - \left\{ (\partial_\mu \delta \alpha^c) + f_{ed}^c A_\mu^e \delta \alpha^d \right\}, \quad (189)$$

resultando em

$$\bar{\delta} (D_\mu \Phi_i) = -D_\mu (\delta \alpha^c), \quad (190)$$

atendendo a condição desejada.

Para finalizar esse tratamento sobre o caso não abeliano cabe aqui uma última análise que dá origem a um resultado altamente importante para o desenrolar da teoria de monopolos magnéticos sob a perspectiva de *t'Hooft e Polyakov*. Diante do quadro estudado até o momento, com a definição dada em (181), segue que

$$[D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]. \quad (191)$$

Substituindo (180) nesta expressão e rearranjando os termos de forma conveniente, chega-se à

$$[D_\mu, D_\nu] \Phi = (\partial_\mu A_\nu^a) T_a \Phi - (\partial_\nu A_\mu^a) T_a \Phi + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c T_a \Phi, \quad (192)$$

o que permite escrever

$$[D_\mu, D_\nu] \Phi \equiv F_{\mu\nu}^a T_a \Phi, \quad (193)$$

com

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

Desse resultado, nota-se que o caso abeliano é reobtido quando $[A_\mu, A_\nu] = 0$.

4 O monopolo de Dirac

Dentro da perspectiva de se criar todo alicerce necessário no qual se estrutura a solução de *t'Hooft e Polyakov* é que se fundamentou o capítulo anterior. Portanto, o caminho natural a ser seguido seria dar continuidade ao trabalho, explorando detalhadamente a possibilidade de existência de monopolos magnéticos segundo essa teoria. Como se verá mais adiante, a ideia de t'Hooft e Polyakov pode ser fundamentada, ou melhor, justificada, a partir de uma generalização não abeliana da identidade de Bianchi para teorias abelianas. Portanto, da mesma maneira como já se procedeu ao longo do trabalho, toma-se como ponto de partida uma lagrangiana, só que neste caso para uma teoria não abeliana, e buscam-se soluções das equações de campo seguindo condições bem definidas. Essa discussão é realizada mais a frente no capítulo seguinte de forma bastante detalhada.

Num primeiro momento, por julgar conveniente e por se mostrar bastante instrutivo, se constrói a ideia de monopolos magnéticos a partir de uma generalização das equações de Maxwell, mais precisamente, da generalização da equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (194)$$

Essa ideia é o ponto central do que se conhece na literatura como *O monopolo de Dirac* [8]. Após esse tratamento, o trabalho estará completamente voltado à discussão de monopolos magnéticos segundo o modelo de t'Hooft e Polyakov.

Do eletromagnetismo usual, sabe-se que a entidade magnética fundamental é um dipolo e não um monopolo. Essa assertiva, como bem se sabe, estabelece-se segundo a expressão (194). Portanto, de acordo com essa lei seria absurdo considerar um campo magnético produzido por uma "carga" magnética, haja visto que a mesma nunca fora observada experimentalmente. O que se apresenta a seguir é uma extrapolação desse conceito, considerando a existência de uma carga magnética g colocada na origem de um sistema de coordenadas, produzindo um campo magnético radial, da mesma maneira como uma carga elétrica pontual produz um campo elétrico radial. Esse tratamento, a priori especulativo, trará a tona condições de quantização da carga elétrica que, por incrível que pareça, também surgirá dentro da teoria de t'Hooft e Polyakov. De acordo com o que foi dito até o momento é natural, portanto, considerar que o campo magnético produzido por uma carga magnética g na origem de um sistema de coordenadas tenha a seguinte forma

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (195)$$

o que leva à conclusão direta que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\delta^3(\vec{r}), \quad (196)$$

em que

$$\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \infty, & \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (197)$$

Como é de praxe, a partir do campo magnético gerado por qualquer configuração magnética, é interessante se obter o fluxo do campo magnético produzido. Nessa situação, devido a simetria esférica, o fluxo é obtido de forma bastante direta, ou seja,

$$\phi = \oint_S (\vec{B} \cdot \hat{n}) dS = 4\pi r^2 B, \quad (198)$$

em que r representa o raio da superfície esférica que envolve a carga g . Com o auxílio da equação (195), o fluxo ϕ pode ser reescrito como

$$\phi = 4\pi g. \quad (199)$$

Assumindo que um elétron sofra a ação do campo magnético produzido por esse monopolo, é possível escrever a função de onda que descreve seu comportamento usando a prescrição do acoplamento mínimo. Na ausência do campo magnético o elétron estaria livre e a função de onda associada a ele seria

$$\Psi = |\psi| \exp(i\alpha), \quad (200)$$

em que α , também chamado de fase, é dado por

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et), \quad (201)$$

de modo que

$$\Psi = |\psi| \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right\},$$

com $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, sendo $h = 6,62 \cdot 10^{-34} Js$ a constante de Planck, \vec{r} o vetor posição do elétron, \vec{p} o seu momento e E a sua energia. Ao considerar o campo magnético produzido pelo monopolo, segundo a prescrição do acoplamento mínimo, basta fazer

$$\vec{p} \mapsto \vec{p} - \left(\frac{e}{c}\right) \vec{A}, \quad (202)$$

na qual \vec{A} representa o potencial vetor associado ao campo \vec{B} . Com essa redefinição a função de onda do elétron na presença do campo magnético fica redefinida da seguinte forma

$$\Psi \mapsto \Psi' = \Psi \exp \left\{ \frac{-ie}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{r} \right\}. \quad (203)$$

Nessa situação tudo se passa como se a fase α definida em (201), segundo a transformação (202), sofresse a seguinte translação

$$\alpha \mapsto \alpha' = \alpha - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{r}. \quad (204)$$

Esse resultado permite que se obtenha a variação total na fase α - usando coordenadas esféricas - quando o elétron descrever um caminho fechado a um raio r fixo, θ fixo e ϕ variando de 0 a 2π . De (204),

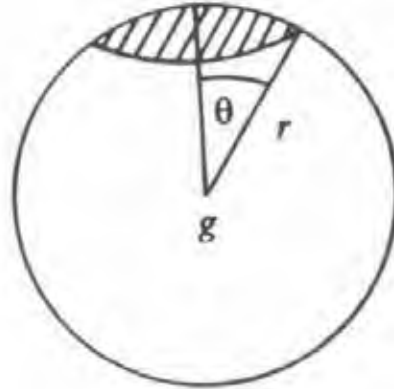
$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{\hbar c} \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar c} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (205)$$

o que implica em

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c} \text{fluxo através do contorno.} \quad (206)$$

Esse resultado expressa o ponto mais crítico da ideia de monopolos magnéticos segundo a concepção de Dirac. Isso porque o fluxo através da superfície delimitada pelo contorno

C que envolve o monopolo não é constante para todo θ , o que leva a uma singularidade no fluxo como se vê adiante. Faz-se essa análise tendo a figura a seguir como referência.



O monopolo e o fluxo do campo

Não é difícil perceber que a medida em que $\theta \rightarrow 0$, delimita-se uma calota na superfície da "esfera" cada vez menor, convergindo a um único ponto, fornecendo, portanto

$$\phi(r, 0) = 0. \quad (207)$$

Em contrapartida, quando $\theta \rightarrow \pi$, o contorno pode delimitar duas "regiões" distintas, ou seja, ao mesmo tempo que pode-se pensar no contorno delimitando toda superfície da esfera, pode-se pensar que o mesmo converge novamente a um ponto. E isso leva a duas situações diferentes, uma em que o fluxo total é máximo e outra em que ele é mínimo, ou seja

$$\phi(r, \pi) = 4\pi g \quad (208)$$

e também

$$\phi(r, \pi) = 0. \quad (209)$$

Esses resultados levam claramente à interpretação de que o fluxo $\phi(r, \pi)$ é inconsistente em $\theta = \pi$.

Vale observar, no entanto, que a expressão (206) se origina a partir do potencial vetor \vec{A} . Isso conduz a interpretação de que, para se ter um fluxo singular em $\theta = \pi$, o potencial vetor já deve trazer intrinsecamente essa singularidade. É interessante notar que qualquer que seja o raio da esfera, a singularidade sempre estará presente no mesmo ponto, ou seja $\theta = \pi$. Isso permite extrapolar a ideia de singularidade em um único ponto. O que se quer dizer é que se for considerado várias esferas concêntricas, todas com a singularidade em $\theta = \pi$, o que se obtém essencialmente é uma *corda singular*. Portanto, nessa situação, tudo se passa como se todo o eixo z negativo fosse singular.

Pode-se encontrar uma condição de quantização para a carga elétrica impondo que sua função de onda seja unívoca, ou seja, bem definida. Para isto, basta impor que a variação $\Delta\alpha$ dada em (206) obedeça a

$$\Delta\alpha = 2\pi n, \quad \text{com } n \text{ inteiro.} \quad (210)$$

Usando as expressões (199), (206) e (210), conclui-se que a imposição de se querer uma função de onda bem comportada para o elétron em qualquer ponto do espaço, as cargas, elétrica e magnética, se relacionam através de uma condição de quantização, ou seja,

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c. \quad (211)$$

Esse resultado é conhecido na literatura como condição de quantização de Dirac.

Essa seria uma possível explicação para que a carga elétrica seja quantizada. No entanto, vale lembrar que este resultado foi obtido a partir de uma imposição, sem justificativas físicas acerca da equação (194). Poderia se dizer, no entanto, que se existirem monopólos magnéticos a carga elétrica deveria ser quantizada e o presente tratamento se sustentaria. Entretanto, o fato das cargas elétricas serem quantizadas não implica necessariamente que existam monopólos magnéticos. A justificativa poderia ser advinda de outro tipo de fenômeno. Para efeitos de comparação futura, num sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$, a relação (211) se torna

$$eg = \frac{1}{2}n. \quad (212)$$

À essa altura, dentro do contexto em que se desenrolam as características de quantização da carga elétrica segundo a abordagem de Dirac, volta-se a atenção essencialmente para a singularidade intrínseca que o potencial vetor deve carregar consigo. É bastante elucidativo pensar na questão da singularidade do potencial vetor imaginando as possíveis projeções dos pontos da superfície de uma esfera sobre um plano horizontal na qual ela repousa. Com exceção do *polo norte*, qualquer ponto da superfície desse esfera, através de uma reta tangente à mesma no ponto considerado, pode ser projetado no plano. Esse exemplo ilustra de forma bastante intuitiva que nesta situação, como o polo não pode ser projetado, o mesmo deve ser visto como um ponto singular. Vale observar, no entanto, que se for traçado um plano tangente no *polo norte* e se buscar as projeções dos demais pontos sobre esse plano, o *polo sul*, é que se tornaria o ponto singular - não projetado. Essa analogia direciona à interpretação de que a singularidade do potencial vetor, dependendo do sistema de referência, localiza-se em um dos polos.

Pode-se pensar, portanto, que é possível se obter duas regiões bem comportadas (excluindo um dos polos) escrevendo-se dois potenciais regulares, um para cada região, através de diferentes contornos sobre a esfera. De acordo com o exemplo dado acima, usando coordenadas esféricas, os pontos singulares seriam $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Mas, mais importante do que entender a localização dos pontos singulares, é lembrar que estes campos A devem, obviamente, fornecer os mesmos campos \vec{E} e \vec{B} . Sendo assim, só se é possível satisfazer essa condição se estes campos estiverem relacionados através de uma transformação de gauge.

A equação (196) mostra claramente que o potencial vetor A_μ é singular, haja vista que se não o fosse, indubitavelmente, ter-se-ia como relação fundamental a equação (194). Falou-se anteriormente em trabalhar com duas regiões distintas; uma que excluísse o polo sul - designada por região A , e outra que excluísse o polo norte - região B . Os potenciais vetores associados a essas duas regiões (em coordenadas esféricas) que, claramente devem apresentar trechos em que se sobrepõe e que são bem comportados em suas respectivas regiões, podem ser escritos como

$$A_r^a = 0; \quad A_\theta^a = 0 \quad \text{e} \quad A_\phi^a = \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \quad \text{para a região A,} \quad (213)$$

e

$$A_r^b = 0; \quad A_\theta^b = 0 \quad \text{e} \quad A_\phi^b = -\frac{g(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \quad \text{para a região B.} \quad (214)$$

Dessas expressões segue diretamente que

$$A_\phi^b = A_\phi^a - \frac{2g}{r \sin \theta}, \quad (215)$$

ou seja, embora se utilize diferentes potenciais para cobrir as duas regiões da esfera, ambos se relacionam através da expressão anterior, que pode ser escrita como uma transformação de gauge, ou seja, definindo

$$S = \exp(2ige\phi), \quad (216)$$

constata-se que

$$-\frac{i}{e}S\nabla_\phi S^{-1} = -\frac{2g}{r \sin \theta}, \quad (217)$$

de modo que a relação (215) se torna

$$A_\phi^b = A_\phi^a - \frac{i}{e}S\nabla_\phi S^{-1}. \quad (218)$$

Essa forma funcional representa uma transformação de gauge do grupo $U(1)$, corroborando a assertiva feita anteriormente.

5 Monopolo de t'Hooft e Polyakov

5.1 Solução

A partir desse momento concentra-se a discussão que aqui se faz no cerne do trabalho, ou seja, *monopolos magnéticos* segundo a abordagem de t'Hooft e Polyakov. Tendo como alicerce toda estrutura desenvolvida até os capítulos anteriores, este, em particular, pode ser redigido de forma um pouco mais direta, no entanto, não menos cuidadosa do que os outros. Procura-se apresentá-lo nesses moldes a fim de que se evite um tratamento redundante com aquilo que já fora discutido e apresentado em alguma seção ou capítulo passado. Como não podia ser diferente, haja visto a similaridade dos procedimentos que aqui se adotará, toda análise dessa teoria também tem como ponto de partida uma lagrangiana particular, um pouco mais geral do que aquelas que foram estudadas até então, no entanto com uma forma funcional já utilizada aqui. Cabe, porém, antes de se dar início à discussão e apresentar as características da solução de t'Hooft e Polyakov, discorrer um pouco sobre a motivação de se "procurar" monopolos magnéticos e estimar sua massa e carga segundo uma teoria não abeliana.

Quando no capítulo passado se apresentou o *monopolo de Dirac* iniciou-se a discussão comentando brevemente que a solução de t'Hooft e Polyakov tinha como fundamentação uma generalização da identidade de Bianchi. O que se quer dizer é que, tendo em vista as equações de Maxwell, não haveria qualquer razão para despendar tempo à procura de uma partícula que, por construção, não existiria. Isso, no entanto, em uma teoria abeliana; aquela na qual a identidade de Bianchi se escreve

$$\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} = 0. \quad (219)$$

Essa expressão exprime como consequência imediata que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (220)$$

de forma que a construção da teoria de Dirac acerca dos monopolos magnéticos se mostra, de fato, mais como um tratamento especulativo do que realístico. Isso porque, por construção, a equação (220) se sustenta invariavelmente. Nesse contexto, toda tentativa de se procurar monopolos não deveria passar, num primeiro momento, única e simplesmente, de especulação.

O que é interessante mencionar é que ao se permitir uma generalização da identidade de Bianchi (em teorias não abelianas), trocando as derivadas usuais na equação (219) por derivadas covariantes, ou seja, fazendo

$$D_\mu F_{\alpha\beta}^a + D_\alpha F_{\beta\mu}^a + D_\beta F_{\mu\alpha}^a = 0, \quad (221)$$

em que a representa um índice inerente ao espaço interno do campo, é possível que

$$\partial_\mu F_{\alpha\beta}^a + \partial_\alpha F_{\beta\mu}^a + \partial_\beta F_{\mu\alpha}^a \neq 0, \quad (222)$$

o que poderia levar à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0, \quad (223)$$

justificando, por conseguinte, a procura por monopolos nessa nova teoria.

Como já foi externado em seções anteriores, uma teoria abeliana difere de uma teoria não abeliana, entre outras particularidades, pelo fato de que os geradores da álgebra por trás daquela teoria não comutam entre si. Pode-se falar também que são associados aos campos físicos graus de liberdade internos, diferentemente de uma teoria abeliana, em que os campos não são indiciados, não apresentando, portanto, estrutura interna. Sendo assim, seguindo passos muito parecidos com aqueles já executados ao longo do trabalho, inicia-se a discussão tomando como ponto de partida a seguinte lagrangiana [9]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i) (D^\mu \phi^i) - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \lambda (\phi_i \phi_i)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}, \quad (224)$$

em que

$$D_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i + e \varepsilon_{ijk} A_\mu^j \phi_k, \quad (225)$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + e \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (226)$$

e

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}. \quad (227)$$

Vale observar que as grandezas que aparecem na expressão (224) são as mesmas que aparecem na equação (148), com a ressalva de que associou-se graus de liberdade internos aos campos. Uma observação importante reside em ressaltar que o parâmetro e que aparece nas expressões (225) e (226), neste momento, ainda não apresenta interpretação física. Identificando em (224) o termo de potencial

$$V = \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i + \lambda (\phi_i \phi_i)^2, \quad (228)$$

obtém-se, minimizando-o, e considerando $m^2 < 0$,

$$|\phi_i|^2 = \frac{-m^2}{4\lambda} \equiv F^2, \quad (229)$$

correspondendo ao valor esperado do vácuo. Ao se perceber a forma funcional desta última expressão, mais adiante, procurar-se-á soluções para as equações de campo que, além de serem independentes do tempo, sejam esfericamente simétricas. Porém, antes disso, assume-se uma direção para o valor esperado do vácuo de acordo com toda a discussão que já se fez ao longo do trabalho, e assim quebra-se espontaneamente a simetria do problema, criando toda a base para o desenvolvimento da seção. Sendo o eixo z a direção escolhida para o vácuo, pode-se dizer que os campos físicos associados a esta condição devem ser dados, respectivamente, por

$$\phi_1, \quad \phi_2 \quad \text{e} \quad \phi_3 = \chi + F, \quad (230)$$

em que χ representa as excitações sobre o estado de vácuo F . Quebrada a simetria do problema, procura-se agora obter o espectro perturbativo da teoria, ou seja, procurar o conteúdo de partículas associado a teoria a partir de excitações sobre o estado de vácuo. Mas para isso, como se fez em casos anteriores, deve-se reescrever a lagrangiana em (224) considerando apenas termos quadráticos nos campos. Utilizando as expressões (225), (226), (229) e (230) demonstra-se que, termo a termo, tem-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i) (D^\mu \phi^i) &= \frac{1}{2} \{(\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + (\partial_\mu \chi)^2\} + eF - \\ &- \{(\partial_\mu \phi_1) A_2^\mu - (\partial_\mu \phi_2) A_1^\mu\} + \frac{e^2 F^2}{2} \left\{ (A_\mu^2)^2 + (A_\mu^1)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (231)$$

$$-\frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i = 2\lambda F^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2), \quad (232)$$

$$-\lambda (\phi_i \phi_i)^2 = -\lambda (2F^2 \phi_1^2 + 2F^2 \phi_2^2 + 4F^2 \chi^2 + 2F^2 \chi^2) \quad (233)$$

e

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} = -\frac{1}{4} \{ \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i \}^2. \quad (234)$$

Juntando essas 4 últimas expressões obtém-se a seguinte lagrangiana (*de termos quadráticos somente!*)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \{(\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + (\partial_\mu \chi)^2\} + eF \{(\partial_\mu \phi_1) A_2^\mu - (\partial_\mu \phi_2) A_1^\mu\} \\ &+ \frac{e^2 F^2}{2} \left\{ (A_\mu^2)^2 + (A_\mu^1)^2 \right\} - 4\lambda a^2 \chi^2 - \frac{1}{4} \{ \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i \}^2. \end{aligned} \quad (235)$$

Como a quebra espontânea de simetria do grupo de gauge associado ao presente tratamento se refere a quebra de $SO(3) \rightarrow U(1)$, é esperado que apenas dois campos, após a quebra, adquiram massa. E é exatamente isso que se constata na expressão (235). Nota-se, dessa expressão, que as duas componentes do campo \mathbf{A} , A_μ^2 e A_μ^1 , após a quebra espontânea de simetria, de fato, adquirem massa, dadas pela mesma expressão,

$$m_{\text{campo } A} = \frac{\sqrt{2}}{2} eF \quad (236)$$

e a terceira componente do campo escalar ϕ também adquire massa, ou seja,

$$m_{\text{campo } \phi} = 2F\sqrt{\lambda}. \quad (237)$$

Estes resultados mostram mais uma vez, como já se demonstrou ao longo do trabalho, a aquisição de massa por parte dos campos após a simetria do problema ser quebrada espontaneamente escolhendo-se uma direção particular para o vácuo.

Vale ressaltar, no entanto, que a busca pelo espectro perturbativo da teoria exclui essencialmente termos de ordem superior nos campos. Nesse contexto, os termos de ordem mais alta não tinham nenhuma representação e por isso foram desconsiderados.

O que se quer agora, com o espectro perturbativo em mãos, é procurar uma solução clássica das equações de campo. Há pouco foi dito que tendo em vista a simetria do problema, é conveniente procurar soluções que sejam independentes do tempo e esféricamente simétricas. No entanto, atender a essas condições da forma mais eficiente possível requer o uso de algumas transformações. Por esse motivo, a partir de agora redefine-se os campos \mathbf{A} e ϕ através das seguintes expressões

$$\phi_a(x, t) = \phi_a = r_a Q(r) \quad (238)$$

e

$$A_\mu^a(x, t) = A_\mu^a = \varepsilon_{\mu ab} r_b W(r), \quad (239)$$

em que $r_a = (x, y, z)$ e $r_a^2 = r^2$. Mas antes de se ater a essas condições, é interessante reescrever a lagrangiana dada em (224) explicitamente em função dos campos de acordo com as equações (225) e (226). Num primeiro momento tem-se (haja visto que $\mu = 0$ - solução independente do tempo)

$$D_i \phi_a = \partial_i (r_a Q) + e \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ibl} r_l r_c W Q \quad (240)$$

ou melhor, usando o fato de que

$$\varepsilon_{abc} \varepsilon^{ibl} = \delta_i^a \delta_l^c - \delta_l^a \delta_i^c, \quad (241)$$

chega-se à

$$D_i \phi^a = Q \delta_a^i + r_a (\partial_i Q) + e \delta_i^a r^2 W Q - e r_a r_i W Q, \quad (242)$$

em que δ_i^a representa uma delta de kronecker. Procedendo da mesma forma com a expressão em (226), fazendo uso da definição (239), conclui-se que

$$F_{ij}^a = 2 \varepsilon_{ija} W + \varepsilon_{jak} r_k (\partial_i W) - \varepsilon_{iam} r_m (\partial_j W) + e \varepsilon_{ijn} r_a r_n W^2. \quad (243)$$

A partir dessas expressões, (242) e (243), obtém-se as contrações $(D_i \phi^a) (D^i \phi_a)$ e $(F_{ij}^a) (F^{aij})$. Sendo assim, conclui-se que

$$\begin{aligned} (D_i \phi^a) (D^i \phi_a) &= 3Q^2 + 2r_i Q (\partial_i Q) + 4e r^2 W Q^2 + r^2 (\partial_i Q) (\partial^i Q) + \\ &+ 2e^2 r^4 W^2 Q^2. \end{aligned} \quad (244)$$

Usando novamente a condição em (241) chega-se também a

$$(F_{ij}^a) (F^{aij}) = 24W^2 + 16W r_i (\partial^i W) + 8e W^3 r^2 + 2e^2 r^4 W^4 + 4r^2 (\partial^i W) (\partial_i W). \quad (245)$$

Estes resultados fornecem, portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \{ 24W^2 + 16W r_i (\partial^i W) + 8e W^3 r^2 + 2e^2 r^4 W^4 + 4r^2 (\partial^i W) (\partial_i W) \} - \\ &-\frac{1}{2} \{ 3Q^2 + 2r_i Q (\partial_i Q) + 4e r^2 W Q^2 + r^2 (\partial_i Q) (\partial^i Q) + 2e^2 r^4 W^2 Q^2 \} - \\ &-\frac{1}{2} \mu^2 r^2 Q^2 - \frac{1}{8} \lambda (r^4 Q^4) - \frac{1}{8} \lambda F^4. \end{aligned} \quad (246)$$

É fundamental pontuar que o último termo (constante) não advém do processo natural de resolução do problema. Este é inserido na lagrangiana dada em (246) de maneira *ad-hoc*. Mais adiante, ao se estimar a massa do monopolo magnético, justifica-se esta inserção. Neste momento volta-se a atenção para a solução das equações de campo.

No capítulo 2, por um abuso de linguagem a densidade de Lagrangiana, representada por \mathcal{L} , passou a ser chamada apenas de Lagrangiana. Vale lembrar que, de fato, a Lagrangiana L do problema em questão deve ser calculada a partir da seguinte expressão

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (247)$$

Sendo assim, a partir de (246), tem-se

$$\begin{aligned}
L = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left\{ -r^2 \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 - 4rW \frac{dW}{dr} - 6W^2 - 2er^2W^3 - \frac{1}{2}e^2r^4W^4 + \right. \\
\left. - \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{dQ}{dr} \right)^2 - rQ \frac{dQ}{dr} - \frac{3}{2}Q^2 - 2er^2WQ^2 - e^2r^4W^2Q^2 + \right. \\
\left. + \frac{1}{4}\lambda F^2 r^2 Q^2 - \frac{1}{8}\lambda r^4 Q^4 - \frac{1}{8}\lambda F^4 \right\}. \quad (248)
\end{aligned}$$

Com a Lagrangiana em mãos, resta agora resolver as equações de Euler-Lagrange do problema. Sendo assim, da expressão (45), tem-se a necessidade de se resolver

$$\partial_r \left\{ \frac{\partial L}{\partial (\partial_r W)} \right\} - \frac{\partial L}{\partial W} = 0. \quad (249)$$

De acordo com esta expressão obtém-se, a partir de (248),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \left\{ 2r^4 \frac{dW}{dr} + 4r^3 W \right\} = r^2 \left\{ 4r \frac{dW}{dr} + 12W + 6er^2 W^2 + 2e^2 r^4 W^3 + 2er^2 Q^2 \right. \\
\left. + 2e^2 r^4 W Q^2 \right\}. \quad (250)
\end{aligned}$$

Tendo em vista a forma bastante complicada da equação (250), se torna inviável procurar uma solução exata e fechada para este problema. O que se pode fazer, e é exatamente o procedimento que aqui se adota, é procurar soluções assintóticas que estejam de acordo com as condições de contorno do problema. Portanto, a fim de que no infinito, ou seja, fora do monopolo magnético, se recupere o valor de vácuo da teoria, deve-se impor, para $r \rightarrow \infty$, que

$$Q(r) \rightarrow \frac{F}{r} \quad (251)$$

e

$$W(r) \rightarrow ar^{-n}, \quad (252)$$

em que a e n são, à princípio, constantes a serem determinadas de modo a corroborar a condição (251). Utilizando as formas assintóticas acima na expressão (250) conclui-se, portanto, que

$$\begin{aligned}
ar^{2-n} (4 - 2n) (3 - n) = -4anr^{2-n} + 12ar^{2-n} + 6ea^2r^{4-2n} + 2e^2a^3r^{6-3n} + \\
+ 2eF^2r^2 + 2e^2aF^2r^{4-n}. \quad (253)
\end{aligned}$$

Verifica-se que a solução desta equação é dada respectivamente por

$$n = 2 \quad (254)$$

e

$$a = -\frac{1}{e}. \quad (255)$$

Estes resultados dão forma para as soluções dos campos ϕ_a e A_μ^a , dados nas expressões (238) e (239). Dos resultados obtidos em (254) e (255) e segundo as formas assintóticas

dadas em (251) e (252) tem-se para $r \rightarrow \infty$, de acordo com as expressões (238) e (239), que

$$W_\mu^a \mapsto -\varepsilon_{\mu ab} \frac{r_b}{er^2} \quad (256)$$

e

$$Q_a \mapsto F \frac{r_a}{r}. \quad (257)$$

Seguramente, estes resultados ilustram um dos pontos mais importantes da análise que aqui se constrói. É a partir deles que a concepção de *monopolos magnéticos* se alicerça. Como se vê logo adiante, é possível reconstruir uma nova forma para o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ de maneira a se identificar um campo produzido por uma carga magnética, ou seja, um monopolo magnético. Dentro dessa concepção, antes de se fazer qualquer conjectura acerca dessa nova reconstrução de $F_{\mu\nu}$, é bastante importante verificar como os comportamentos assintóticos dados em (256) e (257) influenciam em algumas estruturas já estabelecidas pela própria teoria. Sendo assim, a pergunta a que se quer responder é: como ficam redefinidas as estruturas dadas pelas expressões (225) e (226) quando levadas em conta as condições (256) e (257)? Pois bem, lembrando que deve-se desconsiderar $\mu = 0$ (solução independente do tempo) e fazendo uso da expressão (241), tem-se que

$$D_i \phi_a = \partial_i \phi_a + e \varepsilon_{abc} A_i^b \phi_c,$$

se torna

$$D_i \phi_a = \frac{F}{r} \delta_a^i - F \frac{r_i r_a}{r^3} - \frac{F}{r} \delta_a^i + F \frac{r_i r_a}{r^3} = 0. \quad (258)$$

De forma análoga, tem-se que

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + e \varepsilon_{abc} A_i^b A_j^c, \quad (259)$$

com

$$\partial_i A_j^a = \frac{1}{e} \left\{ \frac{\varepsilon_{iaj}}{r^2} + \frac{2}{r^4} \varepsilon_{jal} r_i r_l \right\}, \quad (260)$$

$$\partial_j A_i^a = \frac{1}{e} \left\{ -\frac{\varepsilon_{iaj}}{r^2} + \frac{2}{r^4} \varepsilon_{iak} r_j r_k \right\}, \quad (261)$$

e

$$e \varepsilon_{abc} A_i^b A_j^c = -\frac{1}{er^4} \varepsilon_{jin} r_a r_n. \quad (262)$$

As últimas expressões obtidas, ou seja, as expressões de (258) a (262), como foi dito anteriormente, permitem uma nova construção para o tensor do campo eletromagnético. Essa definição, aparentemente nada trivial, consegue recuperar o caráter abeliano da teoria em estudo e com isso fazer inferências acerca das características do eletromagnetismo usual.

A proposta para o tensor $F_{\mu\nu}$ se faz através da seguinte expressão

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \phi_a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e\phi^3} \varepsilon_{abc} \phi_a (D_\mu \phi_b) (D_\nu \phi_c). \quad (263)$$

Este *ansatz* permite reescrever o tensor $F_{\mu\nu}$ de forma bastante simples, haja vista os resultados dados nas expressões de (258) a (262). Essa última relação, dada em (263), é amplamente justificável! É invariante de gauge e após a quebra espontânea de simetria recupera o $F_{\mu\nu}$ usual. Como se não bastasse, essa nova definição traz à tona a informação de que o parâmetro e , até então sem interpretação, representa a carga elétrica, pois como

se afirmou há pouco, a expressão anterior retoma o eletromagnetismo usual. Apenas com o auxílio da expressão (258) tem-se que

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \phi_a F_{\mu\nu}^a. \quad (264)$$

Sendo assim, de acordo com as demais expressões, não esquecendo da forma de ϕ_a dada em (238), constata-se que

$$F_{ij} = -\frac{1}{er^3} \varepsilon_{ija} r_a. \quad (265)$$

Do eletromagnetismo de Maxwell, como bem se sabe,

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k, \quad (266)$$

o que leva à conclusão de que a configuração em estudo produz um campo magnético da forma

$$B_k = \frac{r_k}{er^3}, \quad (267)$$

o que corresponde ao campo magnético produzido por uma carga pontual. Nota-se que, por construção, $F_{0i} = 0$, isto é, a configuração não carrega carga elétrica. E claramente, o fluxo produzido por essa configuração seria

$$\text{Fluxo} = \frac{4\pi}{e}, \quad (268)$$

e a condição que se estabelece, comparando as expressões (199) e (268), se torna

$$eg = 1. \quad (269)$$

que é compatível com a relação (212) quando $n = 2$.

É claro que diante de um resultado como esse, a pergunta natural que se segue é: Porque a condição obtida em (269) só é válida para $n = 2$? Afinal, segundo o tratamento desenvolvido na abordagem de Dirac, não houve nenhuma restrição quanto ao número inteiro n . Este surgiu naturalmente do processo desenvolvido. Mais adiante, de acordo com os cálculos da massa e da carga do monopolo, usando de argumentos de topologia, justificar-se-á a compatibilidade dessas expressões.

5.2 Massa

A solução anterior traz à tona um resultado bastante curioso, ou seja, seguindo uma abordagem não abeliana, conseguiu-se vislumbrar a possibilidade de existência de um monopolo magnético. E não somente isso! Especula-se a possibilidade de existência da partícula, estima-se como a carga magnética estaria associada à carga elétrica e uma possível relação de quantização entre as duas grandezas também é apresentada.

Nessa seção em particular extrapola-se a abordagem fazendo menção à massa que essa partícula tem. Vale observar, no entanto, que a solução que se conseguiu anteriormente se fez para um caso estacionário, ou seja, era uma solução independente do tempo. Sendo assim, obter uma expressão para a massa da partícula se torna um trabalho meramente algébrico. Isso porque num sistema estacionário não se tem cinética e a massa pode ser

obtida via lagrangiana. Basta lembrar que, sendo T a energia cinética do sistema e V o potencial associado, num sistema estacionário,

$$L = T - V = -V \quad (270)$$

e a energia fica

$$E = T + V = V. \quad (271)$$

Assim,

$$E = -L. \quad (272)$$

Dessa forma, num sistema de unidades em que $c = 1$, a massa do monopolo seria dada por

$$m = -L, \quad (273)$$

com L dado por (248). A fim de escrever essa expressão de uma maneira que fique claro que a mesma representa a massa da partícula, é lançado mão de quatro transformações que incutem parâmetros adimensionais na expressão da massa. São elas

$$w = \frac{W}{eF^2}; \quad q = \frac{Q}{eF^2}; \quad x = eFr \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\lambda}{e^2}. \quad (274)$$

Na expressão (248) aparecem termos de derivada, $\frac{dW}{dr}$ e $\frac{dQ}{dr}$. Utilizando os parâmetros definidos em (274) deve-se reescrever essas derivadas. Conclui-se, portanto, que

$$\frac{dW}{dr} = e^2 F^3 \frac{dw}{dx} \quad (275)$$

e

$$\frac{dQ}{dr} = e^2 F^3 \frac{dq}{dx}. \quad (276)$$

Estes resultados permitem escrever a massa do monopolo em termos de uma integral adimensional, dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} M_{\text{monopolo}} \sim \frac{4\pi}{e^2} Fe \int_0^\infty x^2 \left\{ x^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 4wx \left(\frac{dw}{dx} \right) + 6F^2 w^2 + \right. \\ \left. + 2x^2 w^3 + \frac{1}{2} x^4 w^4 + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + xq \left(\frac{dq}{dx} \right) + \frac{3q^2}{2} + 2x^2 wq^2 + w^2 x^4 q^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \beta x^2 q^2 + \frac{1}{8} \beta x^4 q^4 + \frac{1}{8} \beta \right\} dx. \quad (277) \end{aligned}$$

O mais importante desse resultado reside no fato dessa integral ser adimensional e o seu resultado variar muito pouco quando se varia o parâmetro β [10] dado em (274). Isso permite escrever a massa do monopolo da seguinte forma

$$M_{\text{monopolo}} \sim \frac{4\pi}{e^2} M_w C(\beta), \quad (278)$$

em que $M_w \sim eF$ é a massa do bóson vetorial e $C(\beta)$ é o resultado da integral. Para grandes variações do parâmetro β vale citar que $C(\beta)$ mantém o valor aproximadamente constante em torno de 1,1 a 1,4. Em [10] mostra-se que a adição do termo constante à lagrangiana $(\beta/8)$ torna a integral convergente, possibilitando sua resolução numérica via funções tentativas.

5.3 A carga do monopolo

Esta seção encerra o trabalho. Tendo em vista que se procurou, através do formalismo que aqui se desenvolveu, entender as principais características e fazer conjecturas sobre a possibilidade de existência de monopolos magnéticos, busca-se agora, num último momento, fazer outro cálculo que rotula a solução. Volta-se a atenção para a carga que o monopolo magnético carrega consigo. Para fazer inferências sobre a carga utilizar-se-á alguns resultados já obtidos na seção anterior. Porém, algumas conjecturas são incutidas apenas nesta seção mesmo. Para dar início ao tratamento defini-se uma corrente, K^μ , que não representa uma corrente de Noether como já se utilizou no início do trabalho. Essa corrente é definida a partir da seguinte expressão [11]

$$K^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (279)$$

em que $F_{\rho\sigma}$ é dado em (263). Como o tensor de Levi-Civita é antisimétrico pela troca de 2 índices quaisquer, de imediato segue que

$$\partial_\mu K^\mu = 0. \quad (280)$$

Antes, porém, de usar esse argumento, atenta-se à estrutura exposta em (279). Com auxílio da expressão (263), e definindo $\widehat{\phi}^a = \frac{\phi^a}{\phi}$; $\widehat{\phi}^b = \frac{\phi^b}{\phi}$ e $\widehat{\phi}^c = \frac{\phi^c}{\phi}$, tem-se que

$$K^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left\{ \widehat{\phi}^a F_{\rho\sigma}^a - \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \widehat{\phi}^a \left(D_\rho \widehat{\phi}^b \right) \left(D_\sigma \widehat{\phi}^c \right) \right\}. \quad (281)$$

Para trabalhar esta expressão faz-se necessário nesta etapa definir,

$$A_\sigma = \widehat{\phi}^a A_\sigma^a \quad (282)$$

Dessa definição, segue imediatamente que

$$\widehat{\phi}^a (\partial_\rho A_\sigma^a) = \partial_\rho A_\sigma - \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^a \right) A_\sigma^a \quad (283)$$

e

$$\widehat{\phi}^a (\partial_\sigma A_\rho^a) = \partial_\sigma A_\rho - \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^a \right) A_\rho^a. \quad (284)$$

Novamente, após a quebra espontânea de simetria, tem-se o campo abeliano usual. Essas expressões servem para reescrever de forma mais conveniente possível a expressão para K^μ dada em (281). O primeiro termo, em particular, fica melhor expresso como

$$\widehat{\phi}^a F_{\rho\sigma}^a = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho - \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^a \right) A_\sigma^a - \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^a \right) A_\rho^a + e \varepsilon_{abc} \widehat{\phi}^a A_\rho^b A_\sigma^c. \quad (285)$$

O segundo termo a ser trabalhado na expressão (281) é o termo de derivada covariante. Tendo em vista que

$$D_\rho \widehat{\phi}^b = \partial_\rho \widehat{\phi}^b + e \varepsilon^{bij} A_\rho^i \widehat{\phi}^j \quad (286)$$

e

$$D_\sigma \widehat{\phi}^b = \partial_\sigma \widehat{\phi}^b + e \varepsilon^{crs} A_\sigma^r \widehat{\phi}^s, \quad (287)$$

os cálculos a serem realizados são bastante longos, pois é necessário fazer a contração $(D_\rho \widehat{\phi}^b)(D_\sigma \widehat{\phi}^c)$. Claramente esta contração, em termos de (286) e (287), é dada por

$$(D_\rho \widehat{\phi}^b)(D_\sigma \widehat{\phi}^c) = (\partial_\rho \widehat{\phi}^b)(\partial_\sigma \widehat{\phi}^c) + e\varepsilon^{bij} A_\rho^i \widehat{\phi}^j (\partial_\sigma \widehat{\phi}^c) + e\varepsilon^{crs} A_\sigma^r \widehat{\phi}^s (\partial_\rho \widehat{\phi}^b) + \\ + e^2 \varepsilon^{bij} A_\rho^i \widehat{\phi}^j \varepsilon^{crs} A_\sigma^r \widehat{\phi}^s. \quad (288)$$

Utilizando-se mais uma vez da expressão (241), é possível reorganizar todos esses termos numa forma mais compacta e juntá-los com a expressão (285). O resultado dessa combinação está expresso logo abaixo

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho - \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^a \right) A_\sigma^a + \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^a \right) A_\rho^a + e\varepsilon_{abc} \widehat{\phi}^a A_\rho^b A_\sigma^c + \\ - \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \widehat{\phi}^a \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^c \right) + \widehat{\phi}^i A_\rho^i \widehat{\phi}^j \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^j \right) - \widehat{\phi}^j A_\rho^j \widehat{\phi}^i \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^i \right) - \widehat{\phi}^a A_\sigma^a \widehat{\phi}^b \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) + \\ + \widehat{\phi}^a A_\sigma^b \widehat{\phi}^a \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) + e\varepsilon^{jrs} \widehat{\phi}^i \widehat{\phi}^j A_\rho^i A_\sigma^r \widehat{\phi}^s - e\varepsilon^{irs} A_\rho^i A_\sigma^r \widehat{\phi}^s. \quad (289)$$

Finalmente, reescrevendo essa expressão, chega-se à

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho - \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \widehat{\phi}^a \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^c \right). \quad (290)$$

Com isso, a expressão para K^μ dada em (279) ou, equivalentemente em (281), se torna

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial_\nu \left\{ \widehat{\phi}^a \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^c \right) \right\}. \quad (291)$$

Esta expressão, como se verá mais adiante, elucida as propriedades da carga que o monopolo carrega consigo.

Da expressão (280), como já se fez ao longo do trabalho - mais precisamente no capítulo 2 - pode-se, utilizando a generalização do teorema do divergente, associar a essa corrente uma grandeza que se conserva. Afinal, se

$$\partial_\mu K^\mu = 0$$

então

$$M \equiv \int K^0 d^3x$$

se conserva, ou seja,

$$\frac{dM}{dt} \equiv \int_v \partial_i K^i d^3x = \int_s K^i d\sigma_i = 0. \quad (292)$$

Dessa construção segue, segundo a expressão geral para K^μ , que

$$K^0 = -\frac{1}{8\pi e} \varepsilon^{0\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \left\{ \left(\partial_\nu \widehat{\phi}^a \right) \left(\partial_\rho \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_\sigma \widehat{\phi}^c \right) \right\}, \quad (293)$$

e assim

$$M = -\frac{1}{8\pi e} \int_V \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \partial_i \left\{ \widehat{\phi}^a \left(\partial_j \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_k \widehat{\phi}^c \right) \right\} d^3x. \quad (294)$$

Usando novamente o teorema do divergente generalizado, chega-se à

$$M = -\frac{1}{8\pi e} \int_{Sup} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \left\{ \widehat{\phi}^a \left(\partial_j \widehat{\phi}^b \right) \left(\partial_k \widehat{\phi}^c \right) \right\} (dS^2)_i \quad (295)$$

no qual $(dS^2)_i$ representa um elemento de superfície no espaço interno [12].

A fim de compreender como o mapeamento que aqui se estabeleceu enriquece a análise da carga do monopolo, reconstrói-se o elemento de superfície, dS^2_i , introduzindo dois parâmetros, α_1 e α_2 , representando os ângulos polar e azimutal. A ideia, num primeiro momento, é apenas redefinir o elemento de superfície. Para isto parte-se da seguinte expressão

$$dS^2_i = \frac{1}{2} d\alpha^2 \varepsilon_{imn} \varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha_p} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha_q}, \quad (296)$$

com $p, q = 1, 2$.

Esta relação, aparentemente complexa, nada mais é do que uma generalização do Jacobiano de uma transformação de coordenadas. Julga-se bem adequado justificar esta expressão antes de se dar prosseguimento ao trabalho. Para isto, toma-se um caso bastante simples, a transformação de coordenadas cartesianas (x, y) para polar (r, θ) .

Como bem se sabe o Jacobiano dessa transformação é dado por

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}. \quad (297)$$

Não é difícil perceber, no entanto, que uma primeira generalização dessa transformação pode ser elaborada pensando numa transformação geral da forma $\{x^i\} \rightarrow \{\alpha^i\}$. De coordenadas cartesianas para polares tem-se, por exemplo, $x^i = (x, y)$ e $\alpha^i = (r, \theta)$, com $i = 1, 2$. Da expressão (297), nessa nova representação, pode-se escrever que

$$J = \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^2} \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1}, \quad (298)$$

a qual por sua vez pode ser reescrita como

$$J = \frac{1}{2} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha_p} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha_q}, \quad (299)$$

com $(m, n) = (1, 2)$, assim como $(p, q) = (1, 2)$. Isto porque, por construção, os elementos dessa expressão que são diferentes de zero são aqueles em que $m \neq n$ e $p \neq q$, o que justifica o fator $\frac{1}{2}$ em (299). Dessa forma, a expressão (296) se refere ao caso geral de transformação de coordenadas em 3 dimensões.

Sendo assim, nesse novo sistema de coordenadas, voltando à discussão inicial, tem-se que

$$\partial_i \phi^a = \frac{\partial \phi^a}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x^i}. \quad (300)$$

De acordo com as expressões (296) e (300), a expressão para M dada em (295) se torna

$$M = -\frac{1}{8\pi e} \int d\alpha^2 \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha_p} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha_q} \widehat{\phi}^a \frac{\partial \widehat{\phi}^b}{\partial \alpha_r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial x^j} \frac{\partial \widehat{\phi}^c}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x^k} \right\}. \quad (301)$$

Essa expressão pode ser reescrita de modo a fornecer um resultado extremamente conveniente, no entanto deve-se reformular como se dá cada contração acima. Sendo assim,

vale a pena elucidar cautelosamente cada uma dessas contrações. Portanto, é conveniente usar

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{imn} = \{\delta_m^j\delta_n^k - \delta_m^k\delta_n^j\}, \quad (302)$$

em seguida, agrupar

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{imn}\frac{\partial\alpha_r}{\partial x^j}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x^k} = \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_m}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x_n} - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x_m}. \quad (303)$$

Usando este último resultado, tem-se que

$$\left\{\frac{\partial\alpha_r}{\partial x_m}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x_n} - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial x_m}\right\}\frac{\partial x^m}{\partial\alpha_p}\frac{\partial x^n}{\partial\alpha_q} = \delta_p^r\delta_q^s - \delta_q^r\delta_p^s. \quad (304)$$

Assim,

$$\{\delta_p^r\delta_q^s - \delta_q^r\delta_p^s\}\frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_r}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_s} = \frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_q} - \frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_p}. \quad (305)$$

Fazendo finalmente a contração dessa expressão com ε_{pq} , tem-se

$$\varepsilon_{pq}\left\{\frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_q} - \frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_p}\right\} = 2\varepsilon_{pq}\frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_q}. \quad (306)$$

Desse modo, a quantidade M conservada, quando escrita em termos das novas variáveis, se torna

$$M = -\frac{1}{8\pi e}\int_{\text{Sup}}d\alpha^2\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pq}\widehat{\phi}^a\frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_q}. \quad (307)$$

Certamente, o mais significativo dessa construção está na semelhança da forma funcional do elemento de superfície no espaço coordenado definido em (296) com a expressão

$$\frac{1}{2}d\alpha^2\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pq}\frac{\partial\widehat{\phi}^b}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\widehat{\phi}^c}{\partial\alpha_q}, \quad (308)$$

que é facilmente identificada em (307). Nota-se que essa última expressão representa, assim como em (296), um elemento de superfície. Entretanto, não no espaço coordenado usual e sim no espaço interno. Por isso é conveniente, por questões de praticidade, definir (308) como $d^2S_a^{(int)}$, de modo que a expressão (307) possa ser reescrita como

$$M = -\frac{1}{4\pi e}\int d^2S_a^{(int)}\widehat{\phi}^a = -\frac{1}{4\pi e}\int d^2S^{(int)} = \frac{l}{e}, \quad (309)$$

em que $\widehat{\phi}^a$ representa um isovetor e l inteiro, fornecendo uma relação de quantização para a carga do monopolo [13]. Interpreta-se, portanto, que M fornece o número de vezes que a esfera interna é coberta conforme o espaço coordenado é varrido. A carga M é obtida então através do teorema de Kronecker. Em particular, pode-se mostrar que esse mapeamento da esfera no espaço coordenado na esfera no isoespaço não é necessariamente um a um, mas é sempre um número inteiro [17]. Isso promove a discretização da carga associada ao fluxo magnético em termos da carga elétrica.

6 Comentários finais

É bastante razoável que monopolos magnéticos não tenham sido encontrados pelos aceleradores de partículas atuais, nem mesmo pelo LHC (Large Hadron Collider). Se essas partículas de fato existirem, as mesmas só podem ser encontradas em uma escala de energia absurdamente alta, algo da ordem de 10^{16}Gev , valor esse ainda inimaginável de ser obtido nos aceleradores. Antes, porém, de se desenhar o quadro acerca das interações fundamentais e ilustrar o contexto em que monopolos magnéticos, de fato, podem existir em teorias de grande unificação, cabe aqui uma breve releitura acerca do trabalho desenvolvido, buscando através da mesma dar um fechamento ao trabalho e assim expor a discussão atual sobre a possibilidade de existência de monopolos magnéticos.

Ao se apresentar o formalismo Lagrangiano no capítulo 2 constatou-se que ao ser submetida a transformações locais, a lagrangiana em questão não mais se mantinha invariante como acontecia diante transformações globais. Isso permitiu, na busca por uma lagrangiana invariante, a construção, através da inserção do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e, claro, do campo A_μ , uma lagrangiana invariante. Foi durante essa etapa também que se construiu o conceito de derivada covariante, fundamental para o desenrolar do trabalho.

Explorando a ideia de quebra espontânea de simetria, foi possível compreender que todo campo físico tratado nos problemas estudados são obtidos a partir de excitações sobre o estado de vácuo que, como pôde-se observar, em nenhuma situação se encontrava em $\phi = 0$, trazendo à tona a ideia de que o vácuo era um estado degenerado. Dois casos de interesse foram tratados, o Teorema de Goldstone, em que a quebra espontânea de simetria global produz o aparecimento de uma partícula sem massa, e o fenômeno de Higgs, no qual a quebra espontânea de simetria produz um fóton massivo e o desaparecimento de um campo.

Mais adiante se deu ênfase a construção de Dirac sobre monopolos magnéticos. Conseguiu-se, a partir da construção aqui apresentada, uma relação de quantização para a carga elétrica em função da possível carga do monopolo. O ponto crucial desse tratamento é que esse resultado é obtido através de uma perspectiva abeliana da teoria tratada. Diz-se isso, pois como bem se viu ao longo do texto, esse resultado é recuperado via abordagem de uma teoria não-abeliana, através do procedimento de t'Hooft e Polyakov. Deve-se ressaltar, entretanto, que a quebra de $S(3) \rightarrow U(1)$ é que permite que se recupere o caráter abeliano da teoria.

t' Hooft e Polyakov, como se disse anteriormente, segundo a perspectiva de uma teoria não-abeliana (tendo como ponto de partida uma lagrangiana com graus de liberdade associado aos campos), recuperam, através de um *ansatz*, o caráter abeliano da teoria, conseguindo também (assim como Dirac) estabelecer uma relação de quantização entre a carga do elétron e a possível carga magnética do monopolo. O resultado obtido é o mesmo quando se faz $n = 2$ na expressão obtida por Dirac, equação (212). Consegue-se ainda uma expressão em função de uma integral adimensional para a massa do monopolo.

Dando desfecho ao trabalho constrói-se uma expressão para a carga do mesmo. Vale lembrar que este último tratamento se faz sobre uma análise, no mínimo, curiosa. Consegue-se mapear uma esfera no espaço interno dos campos em uma outra esfera, só que no espaço das coordenadas, mostrando através das expressões obtidas que, por possuírem a mesma forma funcional, exaltam uma característica altamente significativa no contexto do trabalho. Conclui-se que a carga do monopolo deve ser um número inteiro, e não só isso, deve ser igual a 2 vezes a carga de Dirac, justificando, portanto, o fator 2 obtido na solução

via Dirac. É importante notar que $n = 2$ provém, de acordo com a seção 5.3, da natureza topológica do mapeamento que, por sua vez, depende do grupo de gauge espontaneamente quebrado.

O grupo de simetria que abrange as interações forte e eletrofraca é espontaneamente quebrado quando se considera uma escala de energia alta, e as propriedades de uma partícula (monopolo), tal como a sua massa, são determinadas exatamente pelo valor de tal escala. O monopolo magnético, em sua essência, pode ser pensado como um defeito topológico no campo escalar que atua como um parâmetro de ordem para a quebra espontânea de simetria em teorias de grande unificação. Embora se consiga estimar a massa e a carga do monopolo magnético segundo a construção de t'Hooft e Polyakov, é importante frisar que esse tratamento deve ser encarado apenas como um *toy-model* (modelo de brinquedo). Isso porque esse modelo não pode, dentro do contexto atual, ser encarado como um modelo real em teorias de grande unificação.

Em meados dos anos 70 duas teorias recebiam grande atenção quanto a possibilidade de serem vistas como teorias de grande unificação, uma alicerçada no grupo não abeliano $SO(3)$ (tipicamente o modelo que foi tratado) [14] e outra baseado no que hoje é chamado de setor eletrofraco - $SU(2) \otimes U(1)$ [15]. Por conta de experimentos relacionados à existência daquilo que se denomina correntes neutras foi forçado abandonar o grupo $SO(3)$ como candidato ao modelo de grande unificação.

Em topologia, se um grupo G é quebrado por um subgrupo H , é possível calcular os grupos de homotopia associados a essa quebra. Neste contexto, o que de fato importa para a discussão acerca de monopolos magnéticos está no cálculo do segundo grupo de homotopia de G/H , o que geralmente se representa por $\pi_2 \left(\frac{G}{H} \right)$.

No caso apresentado neste trabalho $\pi_2 \left(\frac{G}{H} \right) = \pi_2 \left(\frac{SO(3)}{U(1)} \right) \neq 0$ e monopolos magnéticos são, de fato, esperados. Entretanto, para o modelo eletrofraco em voga $SU(2) \otimes U(1) \rightarrow U_{em}(1)$ pode-se mostrar que $\pi_2 \left(\frac{SU(2) \otimes U(1)}{U_{em}(1)} \right) = 0$, inviabilizando a existência de monopolos magnéticos.

A busca por tais soluções encontra respaldo, portanto, em energias mais altas, isto é, quando da quebra de um grupo de gauge χ para $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, tal que $\pi_2 \left(\frac{\chi}{SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)} \right) \neq 0$. É essa escala de quebra que é tomada para as estimativas da massa provável do monopolo.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A 133**, 60 (1931).
- [2] P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **74**, 817 (1948).
- [3] G. t'Hooft, Nuc. Phys. **B 79**, 276 (1974).
- [4] A. M. Polyakov, JETP Lett., **20**, 194 (1974).
- [5] T. H. Lee and B. J. Lee, Phys. Rev. **D69**, 127502 (2004).
- [6] R. Mann and C. Stelea, Nuclear Phys. **B729**, 95 (2005).
- [7] F. A. Bais, *To be or not to be? Magnetic monopoles in non abelian gauge theories in fifty years of Yang-Mills theory*, **271** (2004).
- [8] L. H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge Univ. Press, 1996).
- [9] J. Preskill, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **34**, 461 (1984); F. A. Bais, arXiv:hep-th/0407197 (2004).
- [10] T. W. Kirkman and C. K. Zachos, Phys. Rev. **D24**, 999 (1981).
- [11] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland Publishing Company, 1982).
- [12] R. Aldrovandi and J. G Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific Publishing, 1995); M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, (institute of Physics Publishing, 2003).
- [13] M. Monastyrsky, *Topology of Gauge Fields and Condensed Matter* (New York and London Mir Publishers, 1993).
- [14] M. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **28**, 1794 (1972).
- [15] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [16] T. W. B. Kibble, Phys. Rep. **67**, 183 (1980); J. Arafune, P. G. O. Freund, and C. J. Goebel, J. Math. Phys. **16**, 433 (1975).
- [17] C.B. Allendoerfer, Am. J. Math. **62**, 243 (1940).

Apêndice - A

Quadrivetores - Covariante e Contravariante

A notação usual utilizada para diferenciar quadrivetores covariantes e contravariantes é através de índices colocados respectivamente, ora acima, ora abaixo da letra que representa tal quadrivetor. No entanto, como se disse, isto é apenas uma representação. Essa convenção, na verdade, é originária de uma definição mais delicada, como se descreve a seguir.

A transformação das coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) em (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) num sistema curvilíneo arbitrário (em 4 dimensões) pode ser escrito através de uma expressão como

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad (310)$$

com $i = 0, 1, 2, 3$, em que f^i representam funções que relacionam ambas coordenadas. Sendo assim, todo conjunto de 4 quantidades que se transforma como uma diferencial, ou seja, algo da forma

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \quad (311)$$

é chamado de quadrivetor *contravariante*. Dessa forma, para um quadrivetor arbitrário $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, pode-se escrever que

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (312)$$

Diferentemente, uma entidade que se transforme segundo as derivadas de um escalar é chamado de quadrivetor *covariante*, ou seja, sendo ϕ um escalar, todo conjunto que se transformar segundo a expressão abaixo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \quad (313)$$

é um quadrivetor covariante. Da expressão anterior, conveciona-se escrever

$$A_i \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad (314)$$

com o índice colocado embaixo. As consequências dessas definições são exaustivamente tratadas ao longo deste trabalho.