

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

1210001065



Nº 20

CONTROLE AUTOMÁTICO E SISTEMAS ESTRITAMENTE
REAIS POSITIVOS UTILIZANDO ESTRUTURA VARIÁVEL
ALUNO: JOSÉ APARECIDO DE AGUIAR VIANA
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Te.1065



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

*"Controle Automático e Sistemas Estritamente Reais
Positivos Utilizando Estrutura Variável"*

José Aparecido de Aguiar Viana

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

"Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de
Ilha Solteira – FEIS/UNESP como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica"

Ilha Solteira/SP
Dezembro de 1997

NRD 84 Proc. 040/98

UNESP - "CAMPUS" DE ILHA SOLTEIRA	
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE RECEBIMENTO 08.06.98	DATA DE TOMBAMENTO 30.06.98
REGISTRO 1065	1065
DOAÇÃO R\$ 10,00 Autor	VERIFICAÇÃO V614c

3040 205

1210001065



Assinaturas

"Controle Automático e Sistemas Estritamente Reais Positivos Utilizando Estrutura Variável"

José Aparecido de Aguiar Viana

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira-UNESP,
como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia
Elétrica.

Nobuo Oki

Nobuo Oki - Coordenador

Comissão Examinadora:

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, D. Sc.

Celso Correia de Souza

Celso Correia de Souza, D. Sc.

José-Paulo Fernandes Garcia

José-Paulo Fernandes Garcia, D. Sc.

Sumário

Agradecimentos..... vi

Resumo vii

Abstract viii

Capítulo I: *Introdução*

 I.1. Visão Geral..... 01

Capítulo II: *Sistemas Reais Positivos*

 II.1. Introdução 03

 II.2. Sistemas Reais Positivos..... 03

 II.3. Condições no Domínio da Frequência para as Funções
 Estritamente Reais Positivas 08

 II.4. Conclusões 13

Capítulo III: *Estrutura Variável e Modos Deslizantes*

 III.1. Introdução..... 15

 III.2. Sistemas com Estrutura Variável e Modos Deslizantes 16



Capítulo IV: *Rastreamento Robusto com Estrutura Variável e Plantas
de Fase Não-Mínima*

IV.1. Introdução	20
IV.2. Controle do Pêndulo Invertido com Acesso a Três Variáveis de Estado.....	21
IV.2.1. Definição do Problema	23
IV.2.2. Rastreamento com EVMD	24
IV.2.3. Resultados das Simulações.....	30
IV.2.4. Conclusões.....	36
IV.3. Projeto e Implementação do Controlador com Acesso a Duas Variável de Estado	36

Capítulo V

Conclusões	47
------------------	----

Apêndice A

Modelo Matemático do Pêndulo Invertido.....	49
---	----

Apêndice B

Modelo Matemático do Pêndulo Invertido Acionado por um Motor cc.....	54
---	----

Referência Bibliográficas	56
---------------------------------	----



Aos meus pais,
Antonio e Dejanira.

Aos meus irmãos,
Neide, Maria, Manoel[†], Inês e Alexander.

Aos meus sobrinhos,
Grazielle, Vinicius, Victor, Patrícia e Fernanda.



Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus, por estar sempre presente em todos os momentos da minha vida, dando-me força e coragem para conseguir finalizar mais uma etapa de minha formação profissional.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira pela sua preciosa orientação, e por seu companheirismo amigo.

Ao Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia pela sua co-orientação muito valiosa.

Aos professores, funcionários, amigos e colegas que de uma forma ou de outra auxiliaram-me na elaboração desta dissertação.

À CAPES pelo auxílio financeiro.



Resumo

É apresentada uma configuração de controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EVMD), que permite que a posição horizontal de um pêndulo invertido rastreie com robustez um sinal de classe conhecida (no caso uma senóide com frequência conhecida), mesmo com a presença de distúrbios limitados somados ao sinal de controle e com acesso parcial às variáveis de estado do pêndulo. O método de controle proposto utiliza compensadores dinâmicos para compensar a planta de modo que o sistema completo seja Estritamente Real Positivo (ERP) quando três variáveis de estado são disponíveis; utiliza o critério de Popov quando somente duas variáveis de estado são disponíveis. Nos dois casos são utilizados resultados sobre o problema do servomecanismo para analisar o rastreamento. É importante observar que a função de transferência entre o sinal de controle e a posição horizontal do pêndulo é de fase não-mínima. Resultados experimentais são apresentados.



Abstract

A control configuration with variable structure and sliding modes, that allows the tracking, with robustness, of a known class signal (for example a sine function with known frequency) by the horizontal position of an inverted pendulum, considering a bounded disturbance in the plant input and using only a partial measurement of the plant state vector is presented. The design method uses dynamical compensators to turn the compensated plant into a strictly positive real when there are three state variables available and the Popov criterion when there are only two state variables available. And then, the results about the servo problem for the tracking analysis. It is important to note that the transfer function of the signal control and the horizontal position is a non-minimum phase system. Experimental results are presented.



Capítulo I

Introdução

I.1. VISÃO GERAL

Para elaboração de um sistema de controle o projetista dispõe de várias técnicas descritas na literatura. O enfoque deste trabalho é o de apresentar uma composição de dois conceitos conhecidos na área de controle. O primeiro trata-se da abordagem sobre sistemas Estritamente Real Positivo (ERP) e o segundo utiliza-se das características dos sistemas ERP para elaborar um sistema de controle de alto ganho, o que pode ser obtido empregando-se controladores com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EVMD).

Através da aplicação de um modelo clássico da literatura de controle: o pêndulo invertido, iniciou-se o estudo dos conceitos citados anteriormente. O tratamento das características do sistema aborda o lado determinístico, ou seja, a informação disponível ou assumida sobre as incertezas é determinística na sua natureza; por exemplo, os limites das incertezas são conhecidos.

O controle com EVMD é um controle do tipo robusto, ou seja, insensível a perturbações nos parâmetros e incertezas não modeladas da planta bem como de distúrbios atuando na planta, todos somados ao sinal de controle (chamamos de incertezas casadas).



Este trabalho é composto de cinco capítulos.

O capítulo II apresenta uma descrição dos sistemas ERP, na forma de função de transferência e suas aplicações no estudo da estabilidade de sistemas realimentados.

O capítulo III apresenta os conceitos sobre a teoria do controle com EVMD, ilustrando graficamente o seu comportamento. Este tipo de controle apresenta características interessantes como o aumento da robustez com relação às variações dos parâmetros da planta e distúrbios externos, somados ao sinal de controle, quando o sistema se encontra no modo deslizante.

O capítulo IV apresenta os resultados obtidos do estudo de sistemas ERP e EVMD. A mistura destas duas técnicas permitiu a elaboração de um controlador que permite o rastreamento de sinais de classes conhecidas considerando a existência de sinais de distúrbios somados a entrada de um pêndulo invertido. Deste estudo resultou um trabalho que foi aceito no *IX Congresso e Exposição Internacional de Energia Elétrica* realizado em Buenos Aires, Argentina no período de 23 a 27.09.96. Ele apresenta também resultados obtidos da implementação prática desta configuração. São estudadas duas situações que consideram o acesso parcial às variáveis de estado do pêndulo, que são x , θ , $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$: (i) inicialmente x , θ e $\dot{x}$ são assumidas disponíveis, o que permite o uso direto da teoria sobre os sistemas ERP no projeto do controlador; (ii) para a implementação no laboratório somente x e θ eram disponíveis e assim foi utilizado um filtro derivativo para estimar $\dot{x}$ e o critério de Popov para estabilidade absoluta foi utilizado no projeto do controlador.

O capítulo V apresenta as conclusões sobre o trabalho desenvolvido.



Capítulo II

Sistemas Reais Positivos

II.1. INTRODUÇÃO

A proposta deste capítulo é fazer uma revisão sobre sistemas reais positivos (RP) e estritamente reais positivos (ERP), apresentando os resultados disponíveis sobre os sistemas ERP, que serão utilizados nesta dissertação. São também apresentadas definições, propriedades quanto à estabilidade e condições para tornar um sistema linear invariante no tempo em ERP.

II.2. SISTEMAS REAIS POSITIVOS

Os sistemas RP, também conhecidos como passivos nasceram na teoria de circuitos elétricos e foram definidos inicialmente dentro dos SLIT, através de matrizes de transferência [1].

Definição II.1: A matriz de transferência $H(s)$, $m \times m$, é RP se:

- i. Os elementos de $H(s)$ não possuem pólos com $\text{Re}[s] > 0$,
- ii. $H^*(s) = H^T(s^*)$, e
- iii. A matrix Hermitiana $J(s) = H(s) + H^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $\text{Re}[s] > 0$.



Observação II.1: o asterisco (*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz. As matrizes de transferência ERP são um caso particular das matrizes RP e são definidas a seguir [2].

Definição II.2: A matriz $H(s)$ é ERP se $H(s-\epsilon)$ for RP para algum número real ϵ positivo.

As matrizes de transferência RP e ERP possuem duas interpretações interessantes em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos com parâmetros concentrados R , L e C (resistores, indutores e capacitores), de modo arbitrário. Então, a impedância Laplace entre os dois nós, $Z(s)$ é racional e RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência $Z(s)$ RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos R , L e C [3]. Agora, se aplicarmos uma tensão entre os dois nós mencionados anteriormente e se $Z(s)$ for RP (ERP) então a soma da energia inicial armazenada no circuito no instante inicial $t=0$ com a energia fornecida no intervalo $t \in [0, T]$, $T > 0$ deve ser maior do que a energia armazenada em $t=T$.

Historicamente [4], foi a partir do trabalho clássico de Popov sobre a estabilidade absoluta em 1961, que as funções e matrizes RP receberam maior atenção na teoria de controle. Por volta de 1962, Kalman e Yakubovich descobriram independentemente um critério algébrico para uma função ser RP, o qual foi a chave para a solução do problema de Lur'e [4]. Em 1963 Popov introduziu e em 1964 estendeu a hiperestabilidade (assintótica) de Popov, um poderoso critério de estabilidade sobre sistemas RP e ERP [5], [6] e [7].

Considere o SLIT descrito na forma de variáveis de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II.1})$$

$$y = Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{II.2})$$



sendo (A, B) completamente controlável, (A, C) completamente observável e considere que o vetor de entradas u é tal que, para todo T positivo,

$$\int_0^T u^T(t)y(t)dt \leq \delta [\|x(0)\|] \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|, \quad (\text{II.3})$$

Aqui, δ é uma constante positiva que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas é independente do tempo T e o símbolo $\| \cdot \|$ denota a norma Euclidiana, isto é, o módulo do vetor.

Definição II.3: O sistema (II.1), (II.2) é dito *hiperestável* se para qualquer $u(\cdot)$ satisfazendo (II.3), a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta) \quad (\text{II.4})$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e todo $t \geq 0$.

Definição II.4: O sistema (II.1), (II.2) é dito *assintoticamente hiperestável* se para qualquer $u(\cdot)$ limitado, satisfazendo (II.3), a desigualdade (II.4) é satisfeita e também,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Seja por definição, $H(s)$ a matriz de transferência do sistema (II.1), (II.2), isto é,

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B. \quad (\text{II.6})$$

Os dois teoremas a seguir dão as condições necessárias e suficientes para que um sistema seja hiperestável e assintoticamente hiperestável.

Teorema II.1: A condição necessária e suficiente para que o sistema (II.1), (II.2) seja hiperestável é que $H(s)$ seja RP [6], [7].

Teorema II.2: A condição necessária e suficiente para que o sistema (II.1), (II.2) seja assitoticamente hiperestável é que $H(s)$ seja ERP [6], [7].

Em 1967, Anderson generalizou os resultados de Kalman e Yakubovick para o caso multivariável, obtendo um critério algébrico para uma matriz ser RP, o qual é descrito abaixo [8].

Definição II.5: Considere o sistema (II.1), (II.2), completamente controlável e observável. Então, a matriz $H(s)$ em (II.6) é RP se existirem matrizes $P=P^T>0$ (P é definida positiva), L , M tais que

$$PA + A^T P = -L^T L \quad (II.7)$$

$$M^T L + B^T P = C \quad (II.8)$$

$$M^T M = D + D^T. \quad (II.9)$$

Na Definição II.5, Anderson utilizou um teorema de Youla [9] sobre a fatoração de matrizes de transferência, o qual é descrito a seguir.

Teorema II.3 [9]: Seja a matriz de transferência $H(s)$, $m \times m$, positiva real e suponha que $H(s) + H^T(-s)$ tem posto r quase sempre, isto é, tem posto normal r . Então, existe uma matriz $W(s)$, $r \times m$, tal que

$$Y(s) = H(s) + H^T(-s) = W^T(-s)W(s), \text{ e} \quad (II.10)$$

- i. W tem elementos analíticos em $\text{Re}[s]>0$, e em $\text{Re}[s]\geq 0$ se $H(s)$ tiver todos elementos analíticos em $\text{Re}[s]>0$;
- ii. $\text{Posto}(W)=r$ em $\text{Re}[s]>0$;
- iii. W é única, a menos de uma matriz ortogonal arbitrária multiplicada à direita.



Utilizando as Definições II.2 e II.5, pode ser obtida facilmente a definição a seguir, [2] e [7].

Definição II.6: Considere o sistema (II.1), (II.2), completamente controlável e observável. Então, a matriz $H(s)$ em (II.6) é ERP se e somente se existirem matrizes $P=P^T>0$, L , M e uma constante $\gamma>0$ tais que

$$PA + A^T P = -L^T L - \gamma P \quad (\text{II.11})$$

$$B^T P + M^T L = C \quad (\text{II.12})$$

$$M^T M = D + D^T \quad (\text{II.13})$$

As matrizes de transferência RP são definidas de forma mais explícita no domínio da frequência, como mostrado a seguir [1] e [7].

Definição II.7: A matriz de transferência do sistema (II.1), (II.2) dada em (II.6) é RP se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i. $H(s)$ possui elementos reais para s real,
- ii. Os elementos de $H(s)$ não possuem pólos em $\text{Re}[s]>0$ e os pólos no eixo imaginário são simples cujos resíduos matriciais associados são matrizes Hermitianas semi-definidas positivas.
- iii. Para qualquer valor real de w tal que nenhum elemento de $H(j\omega)$ possua um pólo para este valor, então $H(j\omega) + H^*(j\omega)$ é Hermitiana semi-definida positiva.

A definição das funções de transferência ERP no domínio da frequência tem aparecido de forma confusa na literatura. O trabalho [10] esclarece a questão.

Definição II.8: Seja n^* o grau relativo da função de transferência $h(s)=n(s)/d(s)$, isto é, $n^* = \text{grau de } d(s) - \text{grau de } n(s)$, sendo $n(s)$ e $d(s)$ polinômios. Considere que $h(s)$ não é identicamente nula para todo s . Então, $h(s)$ é ERP se

- i. $h(s)$ é analítica em $\text{Re}[s] \geq 0$,
- ii. $\text{Re}[h(j\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$ e
- iii. $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[h(j\omega)] > 0$ quando $n^* = 1$, ou
- iv. $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \text{Re}[h(j\omega)] > 0, \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{h(j\omega)}{j\omega} > 0$ quando $n^* = -1$.

Observação II.2: É conhecido que se $h(s)$ é ERP, então n^* será igual a $-1, 0$ ou 1 . Na seção seguinte será mostrado que é necessário acrescentar a condição $n^* > -2$ na Definição II.8. Nesta definição as condições (i) e (ii) são necessárias e suficientes quando $n^* = 0$.

As matrizes RP e ERP mostraram-se muito úteis no estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, na teoria de controle ótimo e em problemas de fatoração espectral, [4]. A literatura indica outros estudos sobre os sistemas RP, não mencionados nesta breve revisão. Por exemplo, em [11] são abordados os seus zeros, em [12] é relaxada em alguns casos a condição de realização mínima imposta por Anderson na Definição II.5 e finalmente em [13] é enfocada a robustez das matrizes ERP quando singularmente perturbadas. De modo análogo ao caso contínuo descrito acima, existem definições para as funções e matrizes de transferência ERP discretas [8] e [14]. Em termos de utilização no controle de sistemas com incertezas, a literatura indica uma grande quantidade de aplicações dos sistemas RP e ERP [15], [16],[17] e [18].

II.3. CONDIÇÕES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA AS FUNÇÕES ESTRITAMENTE REAIS POSITIVAS

A seguir serão apresentadas condições necessárias e suficientes, no domínio da frequência, para uma função de transferência ser ERP.



Como vimos na Definição II.2, a matriz $H(s)$ é ERP se $H(s-\epsilon)$ for RP para algum $\epsilon > 0$.

Considere a função dada,

$$h_1(s) = -\frac{s^3}{2} + \frac{1}{s+1}. \quad (\text{II.14})$$

Então, pela Definição II.8, $n^* = -3$ e as condições (i) e (ii) são satisfeitas, visto que o pólo de $h_1(s)$ é -1 e $\text{Re}[h(jw)] = 1/(w^2 + 1)$. Entretanto $h_1(s)$ não é ERP, pois para todo $\epsilon > 0$ existe $\alpha \gg \epsilon$, tal que para grandes valores de $s = \alpha$, $h(s-\epsilon) + h(s^*-\epsilon) \sim -\alpha^3$; assim, pela Definição II.1 $h(s-\epsilon)$ não é real positivo, $\forall \epsilon > 0$ e portanto $h(s)$ não é ERP.

Para complementar a definição dada anteriormente, utiliza-se o teorema a seguir, obtido em [19].

Teorema II.4: Seja a função de transferência $h(s)$, não identicamente nula para todo s . Então, $h(s)$ é ERP se e somente se $h(s)$ satisfaz a definição dada e $n^* > -2$.

Neste capítulo tem-se duas abordagens sobre as funções ERP. A primeira é uma definição equivalente para as funções ERP, próprias e impróprias, a qual utiliza somente a definição dos polinômios Hurwitz e é facilmente testada através de simulações. A segunda é uma motivação decorrente da primeira, a qual aborda a estabilidade de funções ERP realimentadas.

O desenvolvimento da definição mencionada terá como base o teorema II.4 e foi apresentada em [19]. Sejam $h(s) = n(s)/d(s)$, n^* igual ao grau de $d(s)$ menos o grau de $n(s)$, e

$$n(s) = b_m(s + z_1) \dots (s + z_m) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0, \quad (\text{II.15})$$

$$d(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (\text{II.16})$$



$$p_1(s, k) = kn(s) + sd(s), \quad (II.17)$$

$$p_2(s, k) = sn(s) + kd(s), \quad (II.18)$$

sendo $b_m, \dots, b_0, a_{n-1}, \dots, a_0$ são constantes reais.

Teorema II.5 [19]: Se $h(s) = n(s)/d(s)$ não identicamente nula para todo s . Então, $h(s)$ é ERP se e somente se $p_1(s, k)$ e $p_2(s, k)$ dados em (II.17) e (II.18) forem Hurwitz para todo $k \in (0, \infty]$.

As condições do Teorema II.5 são facilmente testadas utilizando softwares de simulação digital, por exemplo: o *Matlab with Simulink*. Este teorema pode ser interpretado diretamente em termos da estabilidade do sistema $h(s)$ realimentado. Note que $p_1(s, k)$ em (II.17) é o polinômio característico do sistema da Fig. II.1 para $C(s) = k/s$ e que $p_2(s, k)$ em (II.18) é o polinômio característico do sistema da Fig. II.1 para $C(s) = s/k$, sendo que, pelo Teorema II.5, estes polinômios são Hurwitz para todo $k \in (0, \infty]$, se e somente se $h(s)$ for ERP.

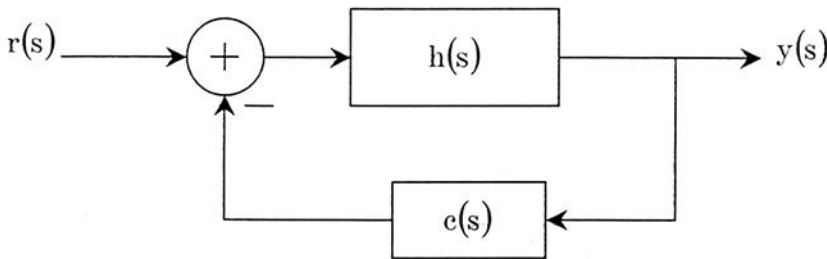


Fig.II.1: Interpretação do Teorema II.5 em termos da Estabilidade de sistemas ERP Realimentados.

O Teorema II.5 fornece um resultado sobre os sistemas com alto ganho, ou seja, os sistemas que são globalmente assintoticamente estáveis quando realimentados negativamente com um ganho tendendo a $+\infty$.

Nesta dissertação será utilizado o seguinte teorema, apresentado em [19]:



Teorema II.6 [19]: Seja $n(s)/d(s)$ a função de transferência de um SLIT controlável e observável e $n^* = \text{grau de } d(s) - \text{grau de } n(s)$. Suponha que $n^* = 0$ ou 1 e que $h(s)$ não é nula para todo s . Então, a função de transferência do sistema de malha fechada $g(s) = n(s)/(kn(s) + d(s))$ é ERP para algum $k \in \mathfrak{R}$, se e somente se $h(s)$ for um sistema com alto ganho.

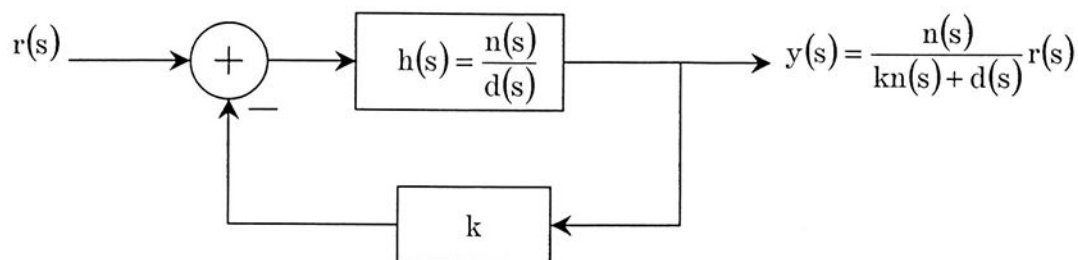


Fig. II.2: Sistema de Malha Fechada do Teorema II.6.

Observação II.3: Por definição, $h(s)$ é de *alto ganho* se o sistema da Fig. II.2 for estável para $k \rightarrow +\infty$. Considere $n(s)$ e $d(s)$ definidos em (II.15) e (II.16) respectivamente. Então, pelo método do lugar das raízes (Root Locus), concluiu-se que, para $n^* = 0$ ou 1, $n(s)$ é de alto ganho se: (i) todos os zeros de $h(s)$ tiverem parte real negativa e (ii) $b_m > 0$ em (II.15).

Para o estudo da estabilidade de sistemas com a diferença entre número de pólos e números de zeros maior ou igual a 2, os resultados disponíveis sobre os sistemas ERP não podem ser utilizados diretamente. Os resultados sobre a estabilidade absoluta podem ser empregados nesta situação. Considere o sistema realimentado da Fig. II.3.

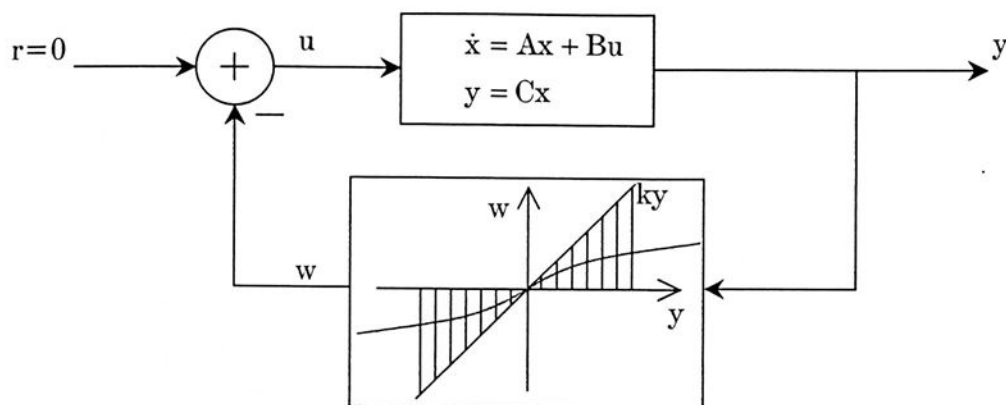


Fig. II.3: Sistema Realimentado Composto por um Sistema Linear e um Elemento Não-Linear.

Considere que um sistema representado na forma de espaço de estado, com (A, B) controlável, (C, A) observável, u e $y \in \mathbb{R}$ e seja $Y(s)/U(s) = G(s)$. Então, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Suponha que o elemento não-linear $v = \phi(y)$ satisfaz a condição de setor,

$$0 \leq y\phi(y) \leq ky^2, \quad \forall y \in [a, b]. \quad (\text{II.19})$$

Se (II.19) é válida para todo $y \in (-\infty, \infty)$, dizemos que a condição de setor é verificada globalmente; caso contrário, se $y \in [a, b]$, a e $b \in \mathbb{R}$, dizemos que ela se mantém em um domínio finito. Note que $\phi(y)$ está confinada entre as retas $w=0$ e $w=ky$, ou seja, no setor $[0, k]$.

Definição II.9: Considere o sistema da Fig. II.3. Esse sistema é *absolutamente estável* se a origem for globalmente assintoticamente estável para *qualquer* não-linearidade pertencendo ao setor $[0, k]$. Ele é *absolutamente estável com um domínio finito* se a origem é assintoticamente estável.

O teorema abaixo, conhecido como critério de Popov, apresenta uma condição suficiente para a solução deste problema. Observe que ele utiliza a definição dos sistemas estritamente reais positivos.

Teorema II.7 [20]: Considere o sistema dado na Fig. II.3, onde o sistema (A, B, C) é controlável, observável, estável e $w = \phi(y)$ satisfaz globalmente a condição de setor

descrita em (II.19). Então, este sistema é *absolutamente estável* se existe $n \geq 0$, com $-1/n$ diferente de todos autovalores de A tal que

$$z(s) = 1 + (1 + ns)kG(s) \quad (\text{II.20})$$

é ERP. Suponha que a condição de setor (II.19) seja satisfeita apenas para $y \in [a, b]$, a e $b \in \mathbb{R}$. Então a condição $z(s)$ ERP assegura que o sistema é *absolutamente estável com um domínio finito*.

Se $z(s)$ é ERP então $\text{Re}[z(j\omega)] > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$. Desta condição surge um método gráfico para verificar se $z(s)$ é estritamente real positiva: a curva $\text{Re}[G(j\omega)] \times \omega \text{Im}[G(j\omega)]$ para $\omega \in [0, \infty]$ deve estar à direita da reta que passa pelo ponto $(\omega \text{Im}G(j\omega), \text{Re}(G(j\omega))) = (0, -1/k)$ e possui inclinação $1/n$. A Figura II.4 ilustra uma situação que garante a estabilidade absoluta no setor $[0, k]$.

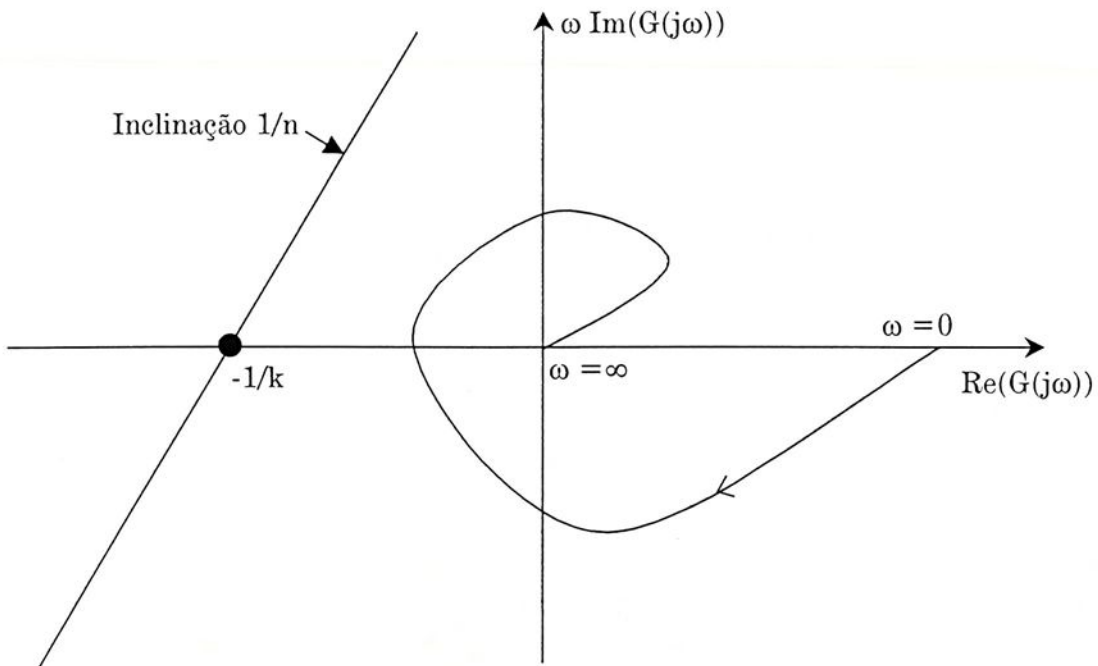


Fig. II.4: Ilustração do gráfico de Popov.

2.4. CONCLUSÕES

Os sistemas estritamente reais positivos (ERP) são importantes no controle de sistemas, devido aos significativos resultados apresentados sobre os



mesmos, por exemplo, a hiperestabilidade assintótica de Popov. Portanto, um procedimento para a análise e projeto de sistemas de controle consiste na manipulação interna ou externa do sistema com o objetivo de colocá-lo em uma forma onde apareça explicitamente um sistema ERP, de modo que os resultados sobre estabilidade dos sistemas ERP possam ser utilizados [15].



Capítulo III

Estrutura Variável e Modos Deslizantes

III.1. INTRODUÇÃO

Em sistemas não-lineares os métodos clássicos de controle ou são aplicáveis em uma pequena faixa de operação (onde apresentam-se como sistemas lineares) ou são ineficientes. Na realidade os sistemas são em sua natureza não-lineares, comportando-se de forma relativamente linear para uma faixa de observação ou operação. Muitos sistemas são de difícil modelagem. Por exemplo: o atrito em um sistema mecânico. Como, então, em princípio os sistemas reais são não-lineares, eles convenientemente devem ser aproximados por um sistema linear para que se possa fazer uma abordagem própria dos sistemas reais, não-lineares, adequadamente restringidos.

A metodologia abordada neste capítulo é o controle com estrutura variável e modos deslizantes EVMD. Esta estrutura de controle é recente (aproximadamente 30 anos) e foi desenvolvida na antiga União Soviética e introduzida na comunidade científica americana pelo pesquisador V. Utkin em 1977.



III.2. SISTEMAS DE ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES

Um sistema de controle com estrutura variável e modos deslizantes (EVMD) força as trajetórias do sistema interceptar um subespaço fechado do espaço de estado projetado. Sobre a intersecção, as trajetórias são submetidas a este subespaço fechado durante tempo subsequente através do uso de controles com chaveamentos de alta velocidade. A vantagem de tal esquema de controle é grande, pois a superfície de chaveamento pode ser selecionada de maneira que o sistema seja robusto a certas mudanças em seus parâmetros ou perturbações quando as trajetórias estão situadas ao longo do subespaço fechado. Outra vantagem é que enquanto as trajetórias permanecem ao longo da superfície de chaveamento, o sistema emula um sistema de ordem reduzida. Se as não-linearidades do sistema são limitadas e satisfazem certas condições de combinação, então o sistema pode ser forçado a se comportar como um sistema linear através do uso do controle EVMD. O algoritmo de controle é totalmente elementar. Assim a implementação de controle é possível através do uso de simples relés e comparadores. E por fim, variando a superfície de chaveamento com o tempo, o problema de rastreamento ou planejamento de trajetória pode ser tratada com sucesso.

As leis de controle com EVMD têm como filosofia inicial a atração da trajetória dos estados para a superfície onde o vetor de controle u apresenta descontinuidade. Após um certo intervalo de tempo, a trajetória do vetor de estado fica confinada nesta superfície de chaveamento; nesta situação, o sistema resultante é autônomo (não forçado) e a trajetória do vetor de estado tende (em geral assintoticamente) ao ponto de equilíbrio.

Este controle pode ser dividido em duas partes distintas:

- i) a primeira caracterizada pela atração dos estados até a *superfície de chaveamento*;



- ii) a segunda etapa é denominada *modo deslizante* (*sliding modes*), onde a trajetória do vetor de estado fica confinada até atingir o ponto de equilíbrio do sistema.

Uma das grandes vantagens deste método é a capacidade de tornar o sistema menos sensível às variações dos parâmetros da planta e distúrbios externos, quando se encontra em *modo deslizante*. Em [21] Drazenovic mostrou que, uma vez atingido o deslizamento, o sistema fica insensível a certos distúrbios e perturbações nos parâmetros da planta, convenientemente limitados e casados com o vetor controle.

Portanto para utilizar-se das características do controle com EVMD é necessário garantir certas condições:

- i) que o sistema atinja a *superfície de chaveamento* para as condições iniciais estipuladas;
- ii) que, uma vez alcançada a *superfície de chaveamento* o sistema permaneça nela até atingir o ponto de equilíbrio.

Uma característica dos sistemas com EVMD, é que em geral, a trajetória do vetor de estado na condição de deslizamento independe do vetor de controle; assim, o projeto pode ser dividido em duas partes independentes: o projeto do sinal de controle de modo que o deslizamento ocorra e a especificação da superfície de deslizamento, tendo em vista o comportamento desejado no deslizamento.

A seguir será ilustrado um exemplo de controle para um sistema de segunda ordem, linear e invariante no tempo,

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x = u, \quad (\text{III.1})$$

sendo a_1 e a_2 constantes, e a lei de controle

$$u = -[k_1|x| + k_2|\dot{x}|]\text{sgn}(s) \quad (\text{III.2})$$



$$\sigma = cx + \dot{x}, \quad c > 0, \quad (III.3)$$

sendo k_1 , k_2 e c constantes, $\text{sgn}(s)=1$ se $s > 0$ e $\text{sgn}(s)=-1$, se $s < 0$. Então, se $k_1 > |a_1|$ e $k_2 > |c - a_2|$, tem-se que

$$\sigma \dot{\sigma} < 0, \text{ para } \sigma \neq 0. \quad (III.4)$$

Então $\sigma(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Da equação III.3, como $c > 0$, o sistema tende assintoticamente à origem $(\dot{x}, x) = (0, 0)$, durante o deslizamento ($\sigma = 0$). Na referência [22] foi feito um estudo matemático rigoroso desta classe de sistemas com descontinuidade.

Esta lei de controle foi simulada, considerando $a_1 = a_2 = c = 1$ e $k_1 = k_2 = 2$, que satisfazem as desigualdades acima. A Figura III.1 ilustra o plano de fase obtido realizando-se esta simulação.

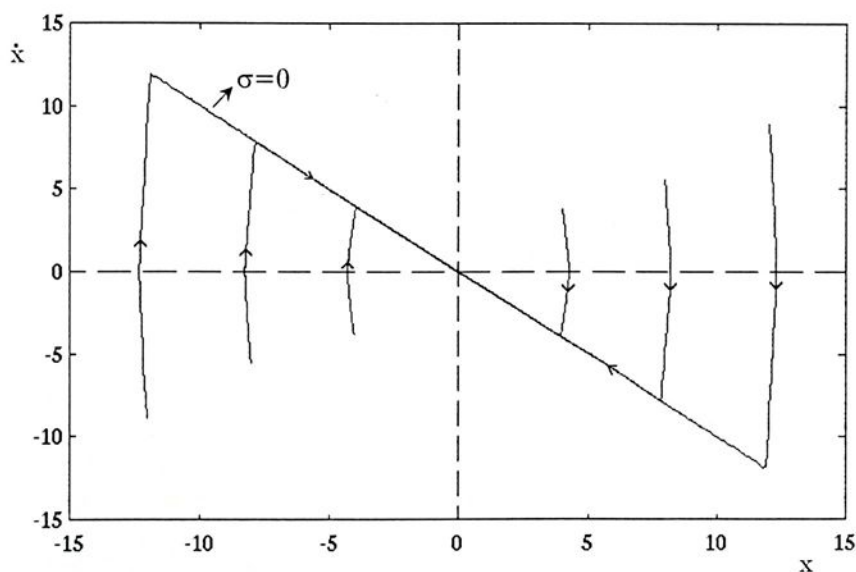


Fig. III.1: Plano de fase do sistema EVMD, com várias condições iniciais.

A análise do comportamento da Figura III.1 demonstra que na vizinhança da reta de comutação $\sigma = 0$, as trajetórias nas regiões $\sigma > 0$ e $\sigma < 0$ têm sentidos opostos, o que leva ao aparecimento de um modo deslizante ao longo desta linha.

Quando atinge-se a condição de $\sigma = 0$, esta se mantém, tendendo assintoticamente à origem.

Na prática, os sistemas com EVMD podem apresentar oscilações de alta frequência durante o *modo deslizante* e no ponto de equilíbrio, as quais podem ser indesejáveis em certas aplicações onde podem causar por exemplo fadiga mecânica. Utilizando-se uma aproximação contínua da lei originalmente descontínua pode-se contornar esta dificuldade, mas por outro lado ela faz com que o sistema não tenda ao ponto de equilíbrio no regime, acarretando um erro de regime. Mesmo assim o sistema fica confinado numa região próxima deste ponto, sendo que quanto maior for o ganho da lei de controle menor será o tamanho desta região.

O projeto de sistemas com estrutura variável pode também ser feito utilizando-se as propriedades sobre a estabilidade dos sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP) realimentados. Este assunto será abordado com detalhes no próximo capítulo.



Capítulo IV

Rastreamento Robusto com Estrutura Variável e Plantas de Fase Não Mínima

IV.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma configuração de controle com estrutura variável e modos deslizantes (EVMD), que permite que a posição horizontal x de um pêndulo invertido rastreie com robustez um sinal de classe conhecida (no caso uma senóide com frequência conhecida), mesmo com a presença de distúrbios limitados somados ao sinal de controle u e com acesso parcial às variáveis de estado do pêndulo invertido. O método de controle utiliza compensadores dinâmicos para compensar a planta de modo que o sistema completo seja Estritamente Real Positivo (ERP) [23]-[29] e resultados sobre o problema do servomecanismo para analisar o rastreamento. É importante observar que a função de transferência $X(s)/U(s)$ é de fase não mínima.



IV.2. CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO COM ACESSO A TRÊS VARIÁVEIS DE ESTADO

Os sistemas ERP tem uma grande importância no controle de sistemas com incertezas [15], [30] devido aos importantes resultados disponíveis sobre a estabilidade destes sistemas, por exemplo, a hiperestabilidade assintótica de Popov [15]. Desta forma, um procedimento para análise e projeto de sistemas de controle, consiste na manipulação do sistema com o objetivo de colocá-lo em uma forma onde apareça explicitamente um sistema ERP, de modo, que os resultados sobre a estabilidade dos sistemas ERP possam ser utilizados [15], [30].

Este trabalho apresenta uma configuração para o controle de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) multivariáveis, com incertezas, utilizando apenas as saídas da planta e a teoria dos sistemas ERP. Em [15] este tipo de problema foi aplicado no controle adaptativo, em [31] na estabilização de sistemas com incertezas, em [30] no controle com EVMD com um observador e em [23], [24], [25] e [26] no controle com EVMD sem observadores.

O método de projeto inicialmente utiliza uma estrutura de compensação linear e invariante no tempo para tornar o sistema compensado ERP e então, uma lei de controle conveniente é projetada, utilizando os resultados sobre a estabilidade dos sistemas ERP.

Considere o SLIT nominal $\{A, B, C\}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e posto $[CB]=m \leq p$; em [23] e [24] são apresentadas condições necessárias e suficientes para tornar o sistema compensado $\{A + BKC, B, FC\}$ ERP, onde $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ são matrizes constantes de compensação.

Em [23] são apresentadas também condições necessárias e suficientes para a utilização do observador - controlador de Walcott e Zak [30]. Em [25] foram obtidos resultados similares aos obtidos em [23], agora para plantas $m \times p$ com



$m > p$. Os resultados dos trabalhos [23]-[26], [30] foram aplicados diretamente no controle com EVMD.

Em [33] são apresentados condições necessárias e suficientes para tornar ERP um SLIT, com $p \geq m$ ou $p \leq m$, utilizando apenas as saídas da planta e *compensadores dinâmicos*: o SLIT nominal deve ser de fase mínima.

Este resultado generaliza os apresentados em [27] e [28], que consideraram apenas o caso $p \geq m$, o que torna de ampla aplicação em controle, podendo ser utilizado diretamente no controle com EVMD, utilizando-se apenas as saídas da planta e permitindo a especificação da resposta transitória antes e no deslizamento.

Neste capítulo é apresentada uma aplicação dos resultados obtidos em [28] e [29] no controle com EVMD de um pêndulo invertido, com distúrbio limitado somado à entrada, e com acesso parcial às variáveis de estado do mesmo. O problema de controle é o rastreamento robusto de um sinal de classe conhecida, isto é, são conhecidos os zeros do denominador da transformada de Laplace do sinal da posição horizontal do pêndulo invertido e logicamente a estabilização do sistema completo.

Em [32] é apresentada uma configuração que permite o rastreamento de sinais de classes conhecidas considerando a planta não-linear e de fase não mínima, mas o rastreamento não é robusto. Na configuração proposta a função de transferência entre o sinal de controle e a saída que desejamos rastrear é de fase não-mínima, linear e o rastreamento é robusto.

O critério de Popov é utilizado na análise do sistema de controle, quando são disponíveis apenas duas variáveis de estado da planta. Neste caso os trabalhos citados anteriormente não solucionam o problema, pois o grau relativo (número de pólos menos o números de zeros) é dois.



São descritos os resultados experimentais do controle do pêndulo com apenas duas variáveis de estado disponíveis.

IV.2.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere um SLIT, controlável e observável, tal como o pêndulo invertido [33]. A Figura IV.1 ilustra o exemplo citado, sendo a matriz de transferência do sistema expressa por:

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ X(s) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cs^2 \\ d(b^2-s^2) \\ ds(b^2-s^2) \end{bmatrix} \frac{1}{s^2(a^2-s^2)} U(s), \quad (\text{IV.1})$$

sendo a , b , c e d constantes reais, e que $c > 0$.

Observe que a função de transferência entre a saída $X(s)$ e a entrada $U(s)$ é de fase não-mínima e que este sistema possui quatro variáveis de estado: θ , $\dot{\theta}$, x e $w = \dot{x}$.

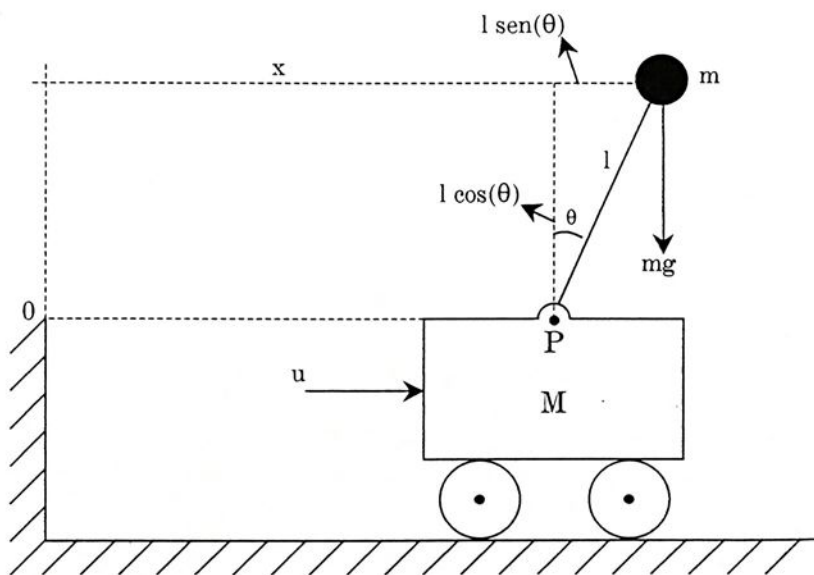


Fig. IV.1: Pêndulo Invertido.

Então, considerando apenas θ , x e $w = \dot{x}$ disponíveis, deseja-se determinar uma lei de controle u , tal que a posição horizontal (estado x) do sistema descrito em

(IV.1), rastreie com robustez um sinal de classe conhecida. Este sistema deverá ser estável e ter erro de regime nulo quando $t \rightarrow \infty$, mesmo com a presença de um ruído limitado na entrada. Na seção seguinte é descrito o projeto para o sistema acima.

IV.2.2. RASTREAMENTO COM EVMD

A Figura IV.2 ilustra o sistema de controle utilizado. O objetivo do sistema de controle é fazer com que $x(t) - r(t) = 0$ quando $t \rightarrow \infty$, mesmo na presença de distúrbios $d(t)$, $|d(t)| < \varepsilon$, sendo ε conhecido. Neste exemplo, $r(t)$ é uma senóide de frequência $\omega = 2\pi f = 1$ rad/s. Observe na Figura IV.2 a presença do modelo interno $Y_2(s)/[X(s) - R(s)]$, com pólos em $\pm j$, para garantir um rastreamento robusto a pequenas perturbações nos parâmetros do pêndulo. A idéia deste sistema de controle é tornar, na Figura IV.2, $Y(s)/U(s)$ de fase mínima de modo que tenhamos $y(t) = 0$ para $t \geq t_0 < \infty$; então, analisar se $x(t) = r(t)$, $t \rightarrow \infty$.

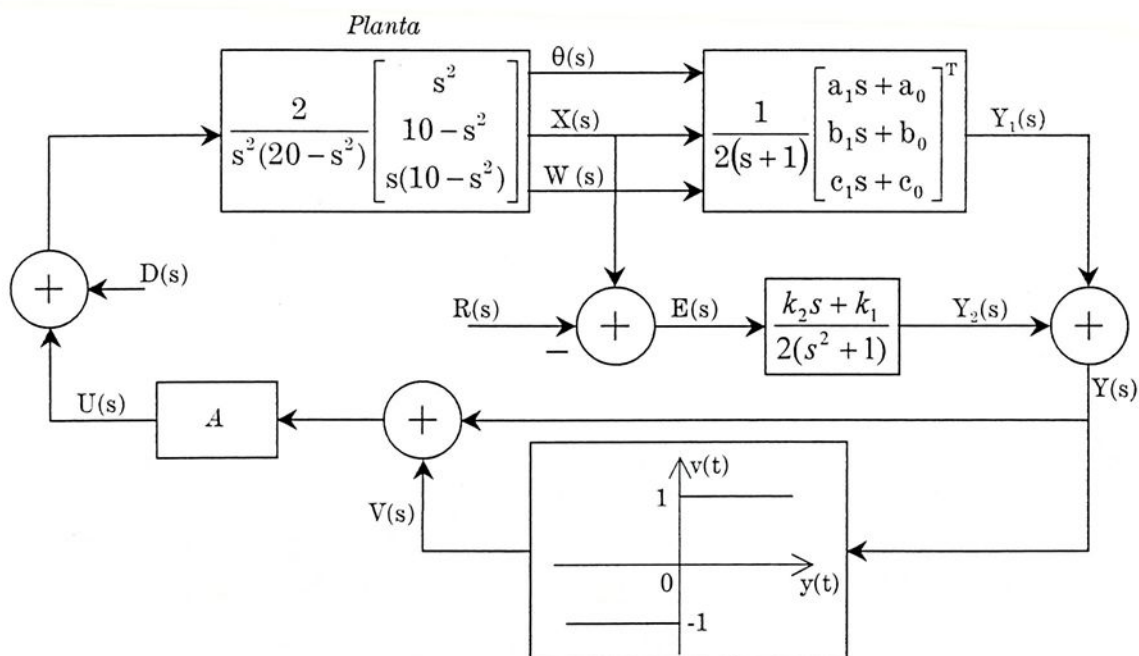


Fig. IV.2: Diagrama de blocos do sistema, com a estrutura de controle proposta.

Como visto em [27], se definirmos $\bar{Y}(s) = r_1\theta(s) + r_2X(s) + r_3W(s)$, então considerando (IV.1), $\bar{Y}(s)/U(s)$ sempre será de fase não-mínima, $\forall r_1, r_2, \text{ e } r_3 \in \mathcal{R}$.

Desta forma, para a obtenção de $Y_1(s)$ na Figura IV.2, foi especificado um compensador dinâmico.

Considere o pêndulo invertido com as seguintes características: $\bar{M}=0,5\text{kg}$, $m=0,5\text{kg}$, $l=1\text{m}$ e $g=10\text{m/s}^2$. As constantes utilizadas são: $a=\sqrt{20}$, $b=\sqrt{10}$, $c=2$ e $d=2$. Desta forma, reescrevendo (IV.1) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ X(s) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 \\ (10-s^2) \\ s(10-s^2) \end{bmatrix} \frac{2}{s^2(20-s^2)} U(s). \quad (\text{IV.2})$$

No Apêndice A encontra-se uma descrição completa do modelo matemático do pêndulo invertido.

Definido o modelo da planta, determina-se agora a estrutura do compensador a ser utilizado para atingir os objetivos propostos na Seção IV.2.1. Na Figura IV.2 ilustra-se o esquema do compensador proposto, sendo que:

$$u(t) = A[\text{sgn}[y(t)] + y(t)], \quad (\text{IV.3})$$

sendo $A>0$ e será especificada no decorrer desta seção. As variáveis a_0 , b_0 , c_0 , a_1 , b_1 , c_1 , k_1 , e k_2 são desconhecidas e serão determinadas a seguir.

A função de transferência entre $Y_1(s)$ e $U(s)$ é dada por:

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{-c_1 s^4 + (a_1 - b_1 - c_0)s^3 + (a_0 - b_0 + 10c_1)s^2 + (10b_1 + 10c_0)s + 10b_0}{s^2(20 - s^2)(s + 1)}, \quad (\text{IV.4})$$

ou ainda, impondo que o numerador de $Y_1(s)/U(s)$ tenha um zero em $s=-1$ para cancelar o pólo -1 , obtém-se:

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)}{s^2(20 - s^2)(s + 1)}. \quad (\text{IV.5})$$

No caso de $Y_2(s)$, a sua função de transferência em relação a $U(s)$ é expressa por:

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{-k_2 s^3 - k_1 s^2 + 10k_2 s + 10k_1}{s^2(20 - s^2)(s^2 + 1)}. \quad (\text{IV.6})$$

Somando-se as equações (IV.5) e (IV.6) tem-se a saída $Y(s)$ expressa por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha_3 s^5 + \alpha_2 s^4 + (\alpha_1 + \alpha_3 - k_2)s^3 + (\alpha_0 + \alpha_2 - k_1)s^2 + (\alpha_1 + 10k_2)s + \alpha_0 + 10k_1}{s^2(20 - s^2)(s^2 + 1)}. \quad (\text{IV.7})$$

A idéia agora é tornar todas as raízes do numerador de $Y(s)/U(s)$ com parte real menor que 0. Como será descrito nesta seção, esta idéia viabilizará a aplicação do Teorema II.6 e assim o uso dos resultados sobre a estabilidade dos sistemas estritamente reais positivos.

Igualando-se o numerador desta função de transferência com um polinômio de quinto grau, por exemplo $(s+2)^5$, tem-se:

$$(s+2)^5 = s^5 + 10s^4 + 40s^3 + 80s^2 + 80s + 32, \quad (\text{IV.8})$$

obtendo-se o sistema descrito a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 40 \\ 80 \\ 80 \\ 32 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.9})$$

O conjunto solução do sistema descrito acima é dado por: $\alpha_0=66.5455$, $\alpha_1=42.7273$, $\alpha_2=10$, $\alpha_3=1$, $k_1=-3.4546$, $k_2=3.7273$.

Fazendo-se a igualdade entre as equações (IV.4) e (IV.5) é possível determinar as variáveis a_0 , b_0 , c_0 , a_1 , b_1 , c_1 , obtendo o sistema descrito a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.10})$$

Este sistema possui número de incógnitas maior do que o número de equações. Isto possibilita uma flexibilidade no projeto do compensador, pois pode-se fixar o valor de uma incógnita e a seguir determinar as outras variáveis. No caso fez-se $c_0=0$, resultando nos seguintes valores: $a_0=69,3816$, $b_0=6,6546$, $a_1=21,9273$, $b_1=10,9273$ e $c_1=-1$. Com estes valores, tem-se $Y(s)/U(s)=(s+2)^5/[s^2(20-s^2)(s^2+1)]$ na Figura IV.2.

Para demonstrar que $y(t)=0$ para $t \geq t_0 < \infty$, inicialmente vamos manipular o sinal $R(s)$. Pela Figura IV.2, note que a referência $R(s) = B/(s^2+1)$ ou $r(t)=B \sin(t)$, suposta neste estudo senoidal e com $\omega=2\pi f=1$, pode ser deslocada para a entrada da planta, somando-se em um sinal $R_e(s)$ ao distúrbio $D(s)$, como mostrado na Figura IV.3. Pela Figura IV.2, $X(s)/U(s)=2(10-s^2)/(s^2(20-s^2))=G_{XU}(s)$ e $G_{XU}(j)=-22/21$. Assim, $R_e(s)=(21/22) B \sin(t)$ ou $r_e(t)=(21/22) \sin(t)$. Assumindo-se condições iniciais convenientes na planta, pode-se obter $\tilde{\theta}(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{W}(s)$ na iguais a $\theta(s)$, $X(s)$ e $W(s)$ na Figura IV.2, respectivamente, a menos das componentes senoidais produzidas por $R_e(s)$. Esta manipulação faz com que apareça em $\tilde{Y}_1(s)$, na Figura IV.3, um sinal senoidal que não existia antes em $Y_1(s)$. Entretanto, este sinal pode ser cancelado considerando-se condições iniciais convenientes do modelo interno $\tilde{Y}_2(s)/E(s)$, que possui pólos em $\pm j$. Aparecerão também em $\tilde{Y}_1(s)$, devido esta manipulação, termos com denominador igual a $(s+1)$, os quais podem ser eliminados considerando-se condições iniciais convenientes no compensador dinâmico com pólo -1 e saída $\tilde{Y}_1(s)$. No final desta manipulação tem-se que $Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)$ definido na Figura IV.2

é igual a $Y(s) = \tilde{Y}_1(s) + \tilde{Y}_2(s)$, apresentado na Figura IV.3, como mostra a figura a seguir:

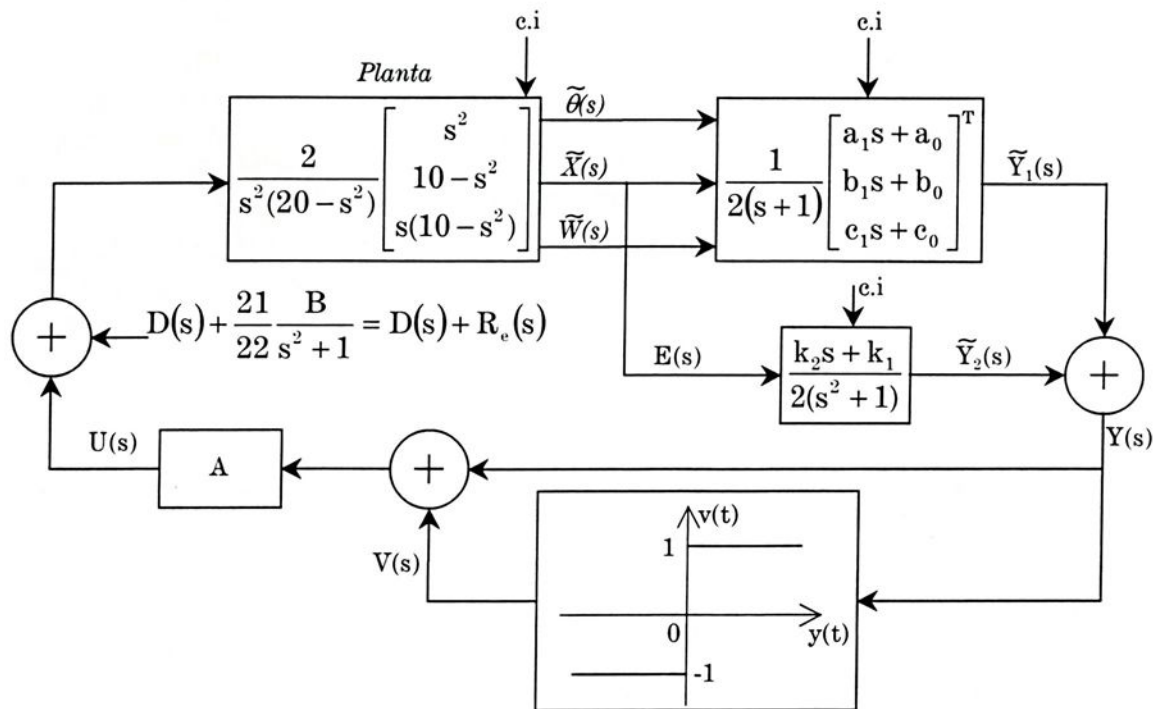


Fig. IV.3: Configuração equivalente a da Figura IV.2.

Finalmente, este sistema pode ser colocado na forma da Figura IV.3, sendo:

$$G_e(s) = \frac{(s+2)^5}{s^2(20-s^2)(s^2+1)}. \quad (\text{IV.11})$$

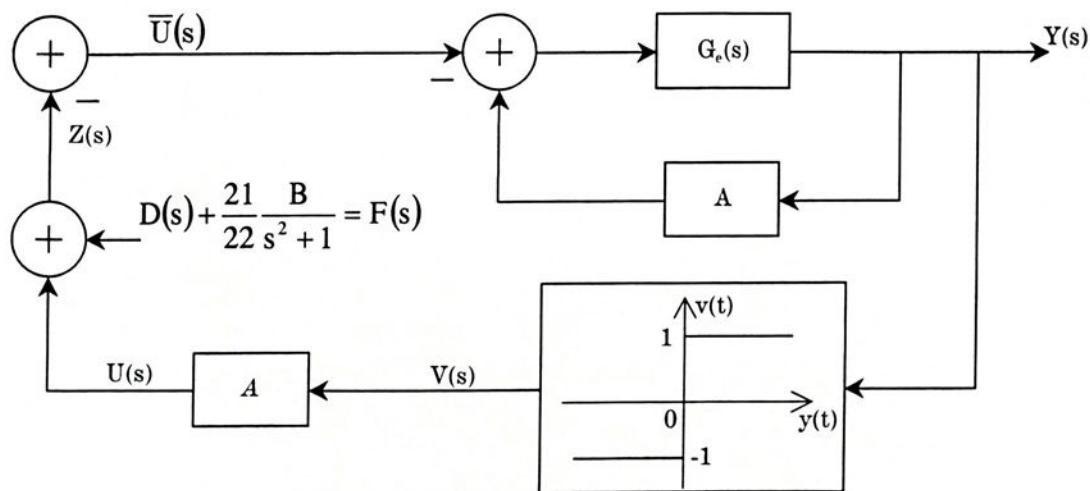


Fig. IV.4: Configuração equivalente a da Figura IV.3.

Agora, com $A=20$ tem-se na Figura IV.4

$$G_t(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^5 + 10s^4 + 40s^3 + 80s^2 + 80s + 32}{s^6 + 20s^5 + 181s^4 + 800s^3 + 1580s^2 + 1600s + 640}. \quad (\text{IV.12})$$

Note que $G_t(s)$ é ERP pela Definição II.8, pois:

- i. possui todos pólos com parte real negativa (a maior parte real dos seus pólos é -0.91);
- ii. $R_e(G_t(j\omega)) > 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty)$, verificado pelo gráfico de Nyquist com o software *Matlab with Simulink*, e finalmente;
- iii. como $n^* = 1$, verificamos que $\lim_{w^2 \rightarrow \infty} w^2 \operatorname{Re}[G_t(jw)] = 10 > 0$.

Seja $f(t)$ a função inversa de Laplace de $F(s)$ e supondo $B=0,1$, $|d(t)| \leq 1$, tem-se da Figura IV.3 que

$$|f(t)| \leq 1 + \frac{22}{21}. \quad (\text{IV.13})$$

Logo, como $A=20$,

$$z(t).y(t) = (20\operatorname{sgn}(y(t)) + f(t)).y(t) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (\text{IV.14})$$

Desta forma, pela Hiperestabilidade Assintótica de Popov (HAP) (Teorema II.2) o sistema da Figura IV.4 é globalmente assintoticamente estável e assim, $y(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Pode-se demonstrar que $y(t)=0$ para $t \geq t_0 < \infty$, devido ao controle com relé, que é um tipo de controle com estrutura variável.

Na Figura IV.2, definindo-se:



$$\begin{aligned} Y_2(s) &= G_1(s)[-R(s) + X(s)] \quad \text{sendo : } G_1(s) = \frac{k_2 s + k_1}{2(s^2 + 1)} \\ Y_1(s) &= G_2(s)U(s), \quad \text{sendo : } G_2(s) = \frac{(s^2 + 10)^2}{(s^2 + 10)^2} \\ X(s) &= G_3(s)U(s), \quad \text{sendo : } G_3(s) = \frac{2(10 - s^2)}{s^2(20 - s^2)} \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

então,

$$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{G_2(s)}{G_3(s)}. \quad (\text{IV.16})$$

No deslizamento, quando a saída $Y(s)=0$, o sistema pode ser expresso por: $Y_1(s) + Y_2(s) = 0$. Sabendo-se que $E(s) = X(s) - R(s)$, através de (IV.15) e (IV.16) obtemos a seguinte função de transferência entre $E(s)$ e $R(s)$:

$$E(s) = -\frac{G_2(s)}{G_2(s) + G_1(s)G_3(s)}R(s). \quad (\text{IV.17})$$

Analisando (IV.17), note que os pólos de $E(s)/R(s)$ são -2, -2, -2, -2, -2, e que esta função de transferência possui zeros em $\pm j$. Assim, como $R(s) = (f_0 + f_1 s)/(s^2 + 1)$, conclui-se que $e(t) = 0$, $t \rightarrow \infty$ e a demonstração do rastreamento está concluída. Como $G_1(s)$ é construída artificialmente, o rastreamento é robusto com respeito a pequenas variações nos parâmetros do pêndulo.

IV.2.3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

A seguir são apresentados os resultados obtidos nas simulações da Figura IV.2 realizadas sob as seguintes condições:

- i. características físicas iguais à descrita na seção anterior;
- ii. distúrbio $d(t)$ igual a um sinal pseudo-aleatório de amplitude unitária;
- iii. método de integração de Runge-Kutta de 5ª ordem;



iv. passo de integração de 10^{-4} s;

v. as condições iniciais do sistema: $\theta(0) = 0,1$ rad; $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s;
 $x(0) = 0$ m e $\dot{x}(0) = 0$ m/s.

Utilizamos inicialmente um modelo ideal para o relé e posteriormente uma aproximação deste componente (IV.3). A Figura IV.5 mostra o comportamento das variáveis de estado x e θ . Um fato interessante a ser observado é que estas duas variáveis de estado possuem sentidos de movimento opostos, esta idéia serve como um teste prático rápido para analisar o comportamento do sistema implementado.

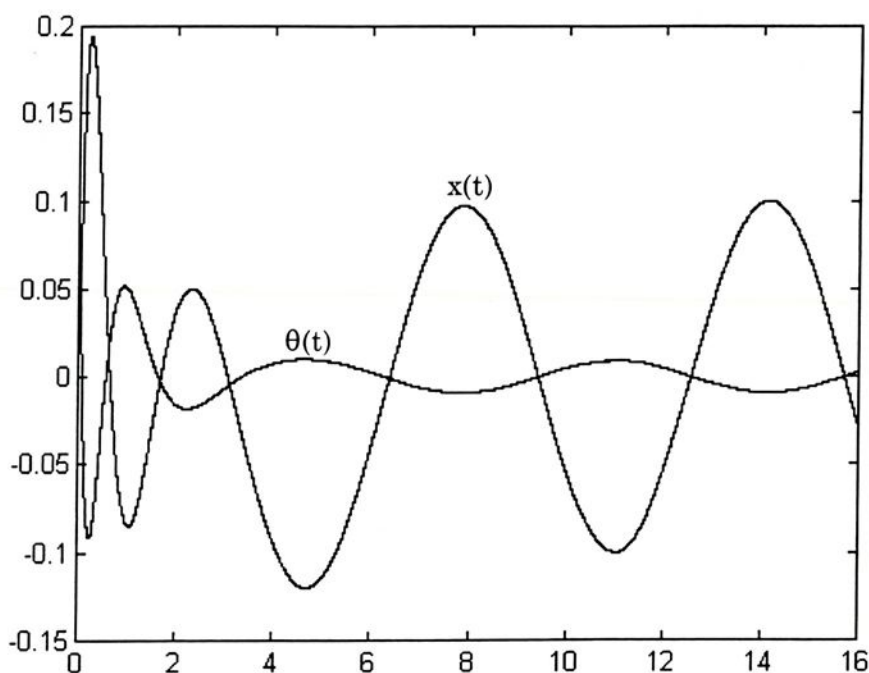


Fig. IV.5: Evolução das variáveis de estado $x(t)$ e $\theta(t)$
do pêndulo invertido.

A Figura IV.6 ilustra a lei de controle utilizando um relé ideal, esta figura mostra o caráter típico do processo de chaveamento de alta frequência deste componente do sistema.

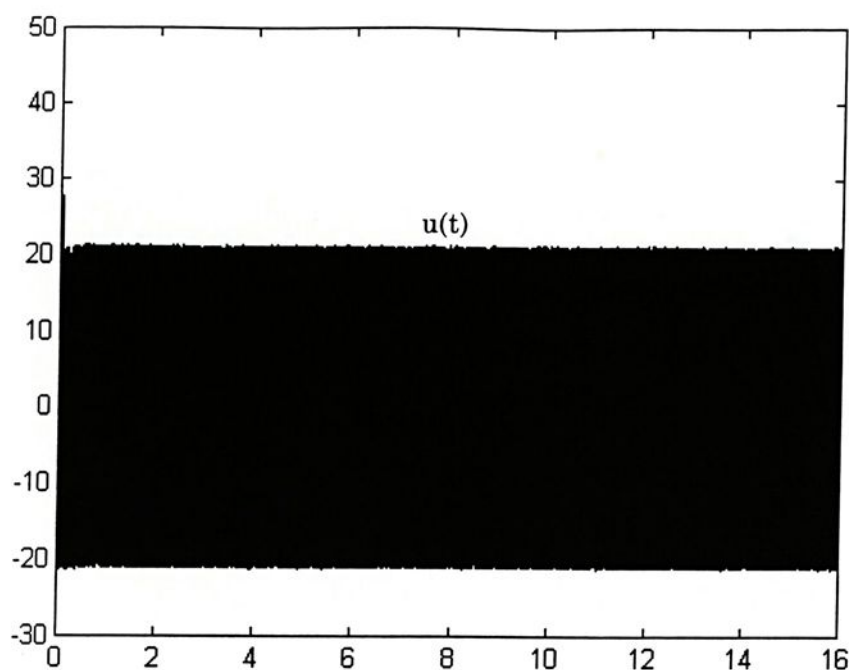


Fig. IV.6: Evolução da lei de controle $u(t)$, utilizando relé ideal.

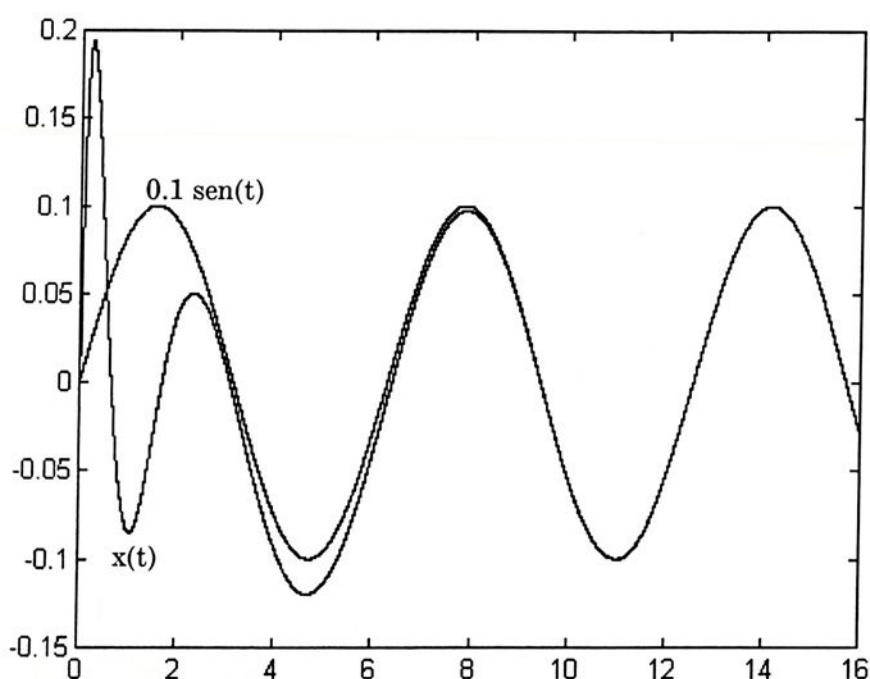


Fig. IV.7: Evolução da variável de estado $x(t)$ e do sinal rastreado: $0.1 \sin(t)$.

Uma forma de observarmos o comportamento do sistema é analisarmos o comportamento do estado x com o sinal de referência adotado no projeto, a Figura IV.7 mostra este aspecto. Já na Figura IV.8 é feito um gráfico que mostra o comportamento do sinal de erro do sistema de rastreamento.

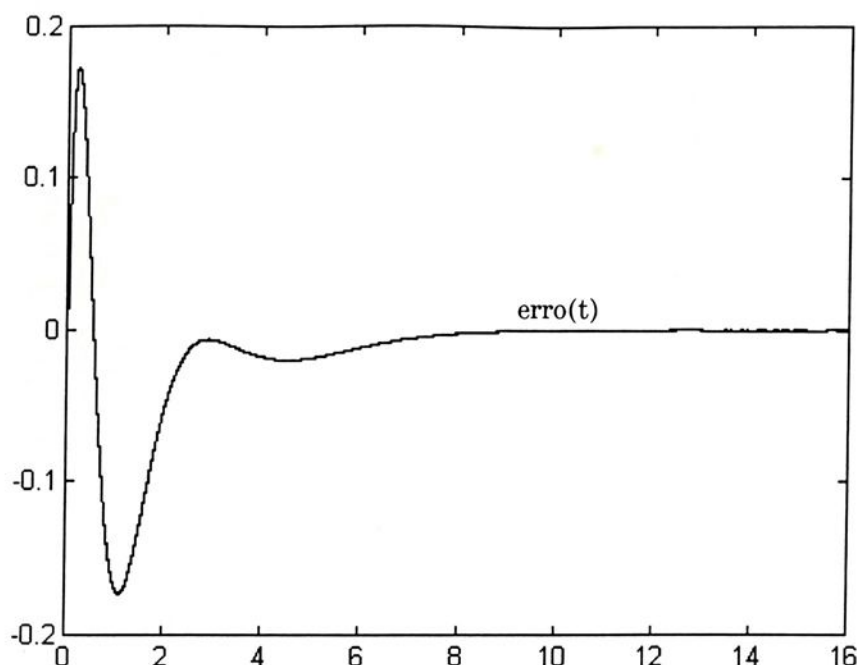


Fig. IV.8: Evolução do sinal de erro entre $x(t)$ e a senóide rastreada.

Na segunda etapa destas simulações utilizou-se de uma lei de controle com EVMD mais suave, ou seja, implementou-se uma aproximação do componente relé (IV.18), que está descrita da seguinte forma:

$$u(t) = 20y(t) \left(1 + \frac{1}{|y(t)| + 10^{-2}} \right). \quad (\text{IV.18})$$

Podemos observar, pela Figura IV.9, que o sistema se manteve de forma muito bem comportada. A evolução dos estados x e θ tiveram comportamento bem próximo do obtido na primeira fase de simulação, Figura IV.5.

Na Figura IV.9 está mostrado a evolução dos estados x e θ , quando utilizado uma lei de controle com EVMD mais suave, ou seja, aproximação de um relé.

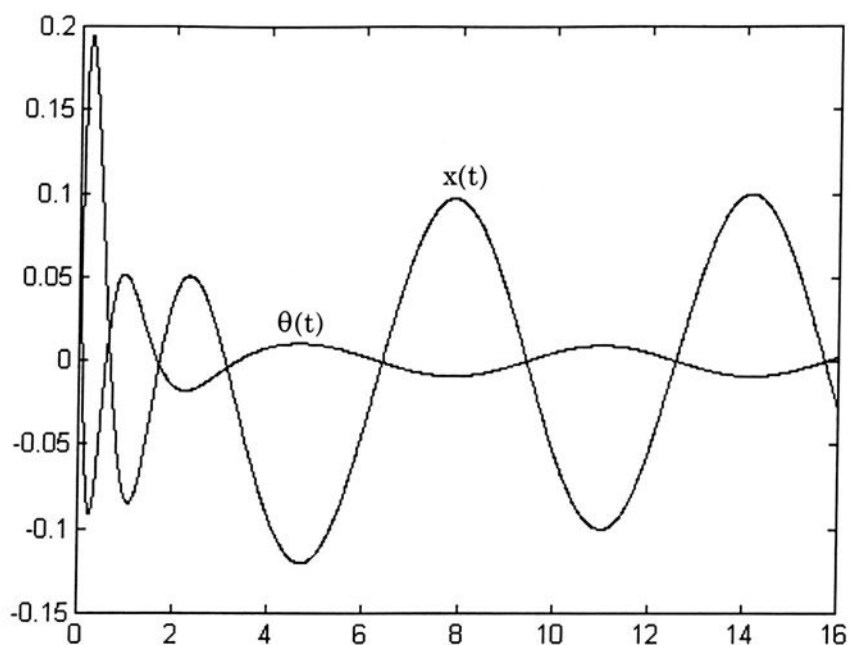


Fig. IV.9: Evolução dos estados $x(t)$ e $\theta(t)$ do pêndulo invertido.

Temos no gráfico da Figura IV.10 o gráfico da lei controle u , utilizando a segunda aproximação.

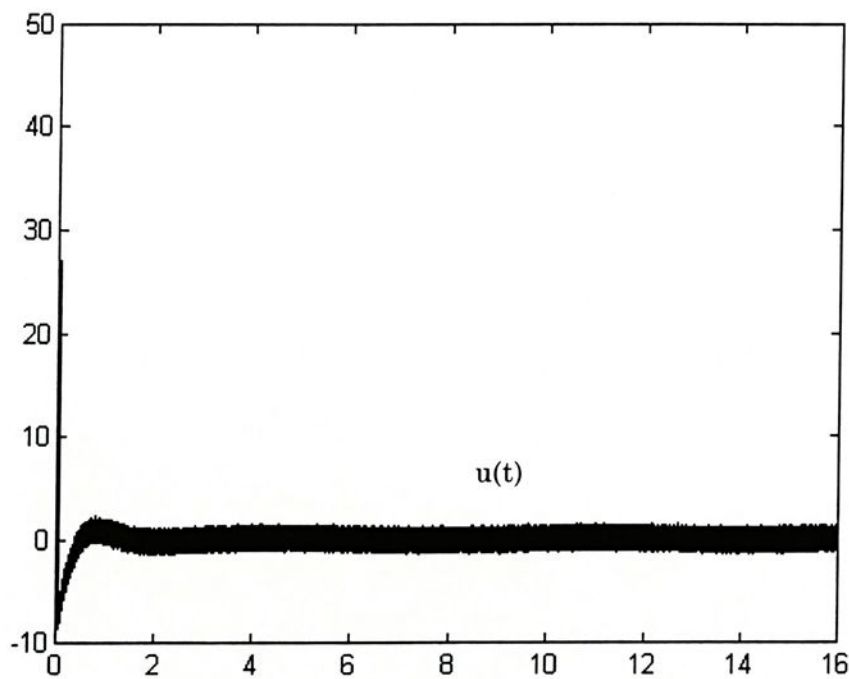


Fig. IV.10: Evolução da lei de controle ($u(t)$) mais suave.

Verificamos através da Figura IV.11 o comportamento da variável de estado x em relação ao mesmo sinal de referência.

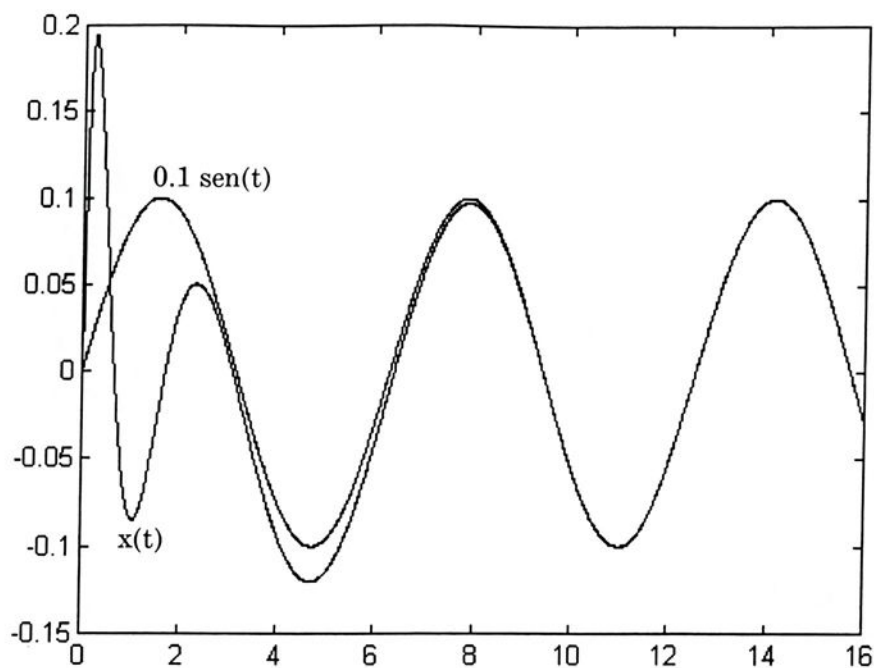


Fig. IV.11: Evolução do estado $x(t)$ e do sinal rastreado: $0.1 \sin(t)$.

Na Figura IV.12 observamos a evolução do sinal de erro no decorrer do tempo.

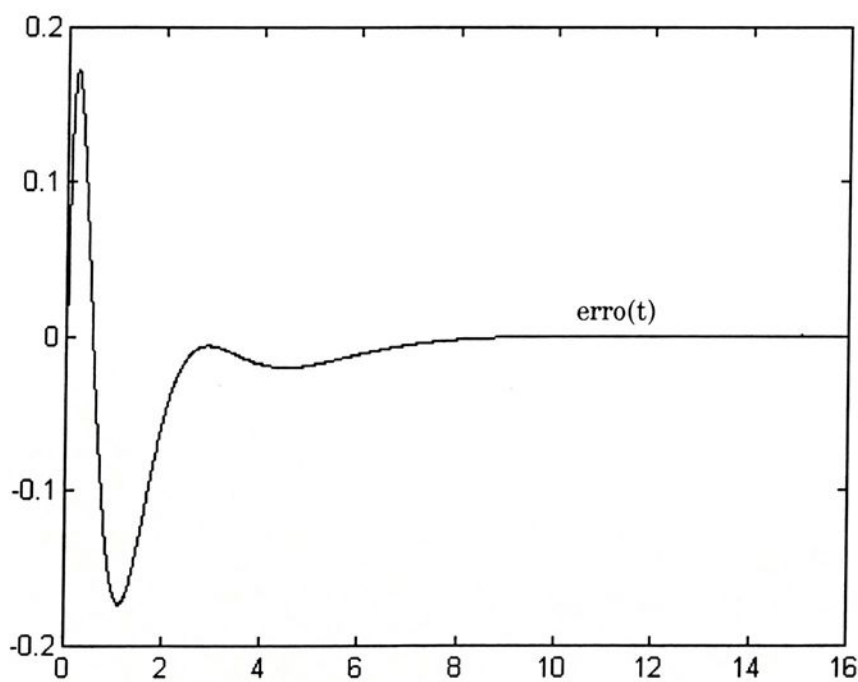


Fig. IV.12: Evolução do sinal de erro entre $x(t)$ e a senoide rastreada.

É conveniente mencionar que o transitório do rastreamento pode ser especificado através da escolha de A na equação IV.3 para determinar t_0 tal que

$y(t)=0, t \geq t_0$ (deslizamento) e do numerador de $Y(s)/U(s)$ na equação IV.7, no exemplo igual a $(s+2)^5$, pois este numerador define os pólos do erro de rastreamento $E(s)=X(s)-R(s)$ em (13) no deslizamento ($y(t)=0$).

IV.2.4. CONCLUSÕES

A Seção IV.2 apresenta uma configuração de controle com EVMD que permite que a posição horizontal de um pêndulo invertido (x), rastreie um sinal de classe conhecida (no caso uma senóide). É considerado um acesso parcial às variáveis de estado da planta e que um distúrbio limitado é somado à entrada de controle (u). Um fato importante é que $X(s)/U(s)$ é de fase não mínima e que o rastreamento obtido é robusto com respeito a pequenas perturbações nos parâmetros da planta. Em [32] é apresentada uma configuração para plantas não-lineares, que permite o rastreamento, mas sem robustez. Pelo levantamento bibliográfico efetuado, os resultados apresentados aqui são novos.

IV.3. PROJETO E SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR COM ACESSO A DUAS VARIÁVEIS DE ESTADO

Nesta seção apresentaremos o projeto, simulação e implementação do sistema de controle analógico do pêndulo invertido da *Quanser Consulting Inc.* (*Empresa Canadense*), disponível no nosso laboratório, baseando-se nos resultados obtidos nesta dissertação, descritos na Seção IV.2.

O pêndulo utilizado possui os seguintes parâmetros: $M_c=0,455\text{kg}$, $M_p=0,21\text{kg}$, $L_p=0,61/2\text{m}$ e adotando-se $g=9,8\text{m/s}^2$, tem-se o seguinte modelo matemático linearizado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -M_p g / M_c & 0 & 0 \\ 0 & (M_p + M_c) g / M_c L_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_c \\ -1/M_c L_p \end{bmatrix} F. \quad (\text{IV.19})$$



sendo F a força externa aplicada no carro (ver Figura IV.1). O Apêndice A descreve o equacionamento completo do pêndulo invertido.

No laboratório a força F é suprida por um motor de corrente contínua. O Apêndice B descreve o modelo matemático deste motor, bem como a do sistema completo composto pelo pêndulo e pelo motor.

O motor possui os seguintes parâmetros: $K_m=7,67 \cdot 10^{-3} \text{Nm/A}$, $K_g=3,7$, $R_m=2,6 \, \Omega$ e o raio da engrenagem $r=6,35 \cdot 10^{-3} \text{m}$. Com estas informações, tem-se o seguinte modelo matemático para o pêndulo com motor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4,5231 & -16,8835 & 0 \\ 0 & 46,9609 & 55,3557 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,7778 \\ -12,3862 \end{bmatrix} V, \quad (\text{IV.20})$$

sendo V a tensão elétrica aplicada no motor, em volts. O módulo disponível no laboratório possui sensores que medem somente as variáveis de estado x e θ . Então a variável de estado $\dot{x}$ não é disponível. Assim, não é possível utilizar diretamente os resultados descritos na Seção IV.2 deste capítulo, que assumiam o acesso à $\dot{x}$. O fabricante do módulo sugere o uso de um filtro derivativo para a estimação de $\dot{x}$ a partir do sinal x , da forma mostrada abaixo:

$$G_f(s) = \frac{X_{pe}(s)}{X(s)} = \frac{s}{\tau s + 1}, \quad \tau > 0, \quad x_{pe}(t) \approx \dot{x}. \quad (\text{IV.21})$$

Note que para baixas frequências $G_f(s) \approx s$, isto é, o filtro comporta-se como um diferenciador.

Com o objetivo de aproveitar o estudo feito em IV.2, surge a seguinte idéia de projeto:

- i. projete o sistema de controle utilizando o método proposto na Seção IV.2, que supõe $\dot{x}$ disponível;

- ii. na implementação, substitua $\dot{x}$ pelo seu valor estimado $\hat{x}_{pe}(t)$, obtido com o filtro descrito na equação IV.21;
- iii. estude a estabilidade do sistema projetado, considerando o filtro e simule digitalmente;
- iv. implemente no laboratório a lei de controle projetada e registre os resultados obtidos.

Seguindo este roteiro, projetamos o controlador descrito na Seção IV.2, considerando agora a planta composta pelo pêndulo invertido e motor, dada na equação IV.20. O projeto foi feito seguindo-se os passos estabelecidos na Seção IV.2 e considerando-se x , $\dot{x}$ e θ disponíveis e impondo-se que o numerador de $Y(s)/U(s)$ seja $(s+2)^6$.

O controlador obtido possui os seguintes parâmetros: $k_2 = -0,643084$, $k_1 = 0,291585$, $a_1 = -1,23005$, $a_0 = -0.81877$, $b_1 = -1,34359$, $b_0 = -7,80115$, $c_1 = 0,26469$, $c_0 = 0$.

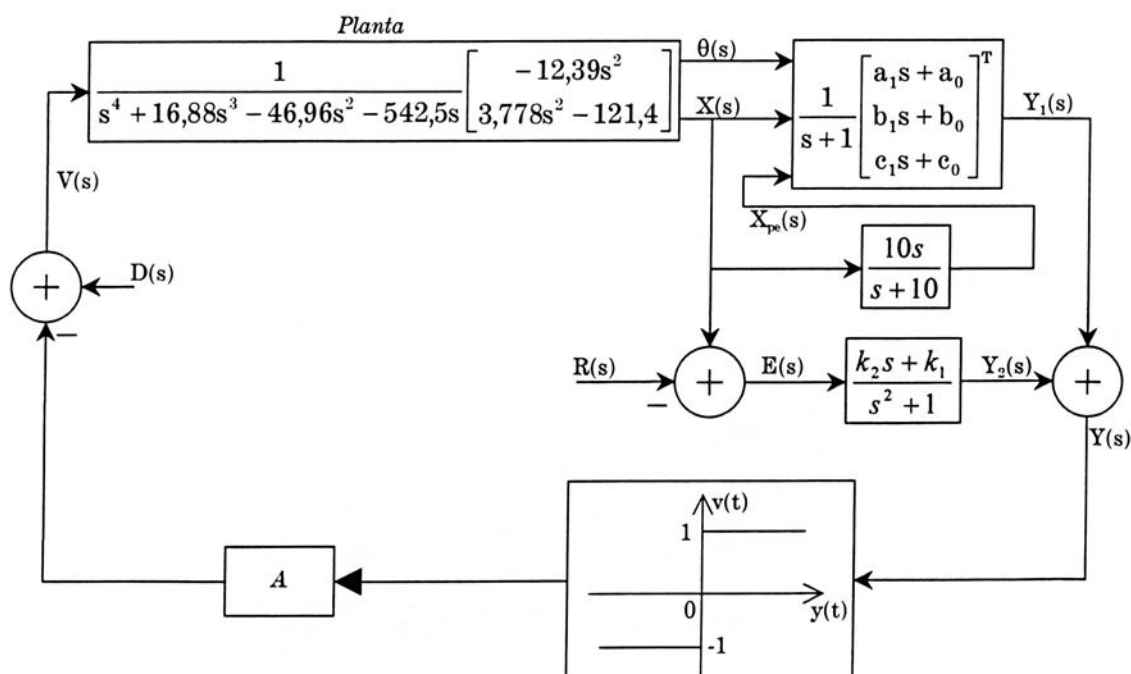


Fig. IV.13: Configuração utilizada na implementação do sistema de controle.

A Figura IV.13 ilustra a configuração completa do sistema de controle.

Utilizando o mesmo tipo de manipulação dos diagramas de blocos feita na Figura IV.3 e

$$R(s) = \frac{0,1}{s^2 + 1}, \quad (IV.22)$$

pode-se colocar o sistema da Figura IV.13 na forma da Figura IV.14.

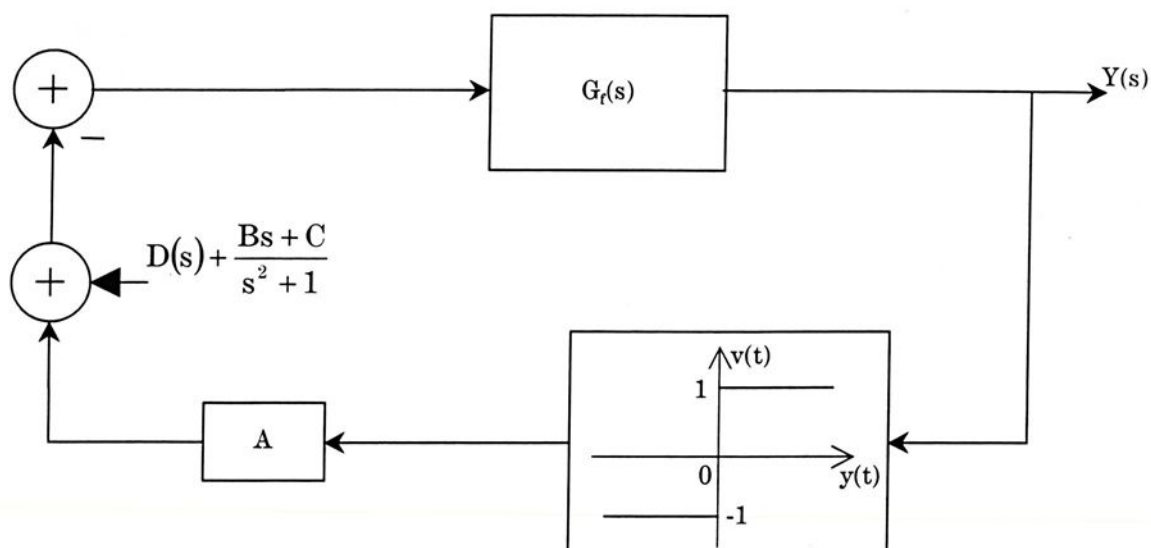


Fig. IV.14: Configuração equivalente a da Figura IV.13.

Onde

$$G_f(s) = \frac{21,9999s^6 + 211,13s^5 + 760s^4 + 1872,13s^3 + 2592s^2 + 1984s + 640}{s^8 + 27,88s^7 + 149,72s^6 - 862,38s^5 - 6288,38s^4 - 6315,26s^3 - 6437,1s^2 - 5425s} \quad (IV.23)$$

Note que $G_f(s)$ possui oito (8) pólos e seis (6) zeros o que impossibilita o uso da teoria sobre os sistemas ERP, diretamente. Mas podemos usar o critério de Popov. Para a aplicação do critério de Popov, descrito no Teorema II.7 e no final do Capítulo II. Inicialmente observamos a equivalência entre a Figura IV.14 e a descrita abaixo:

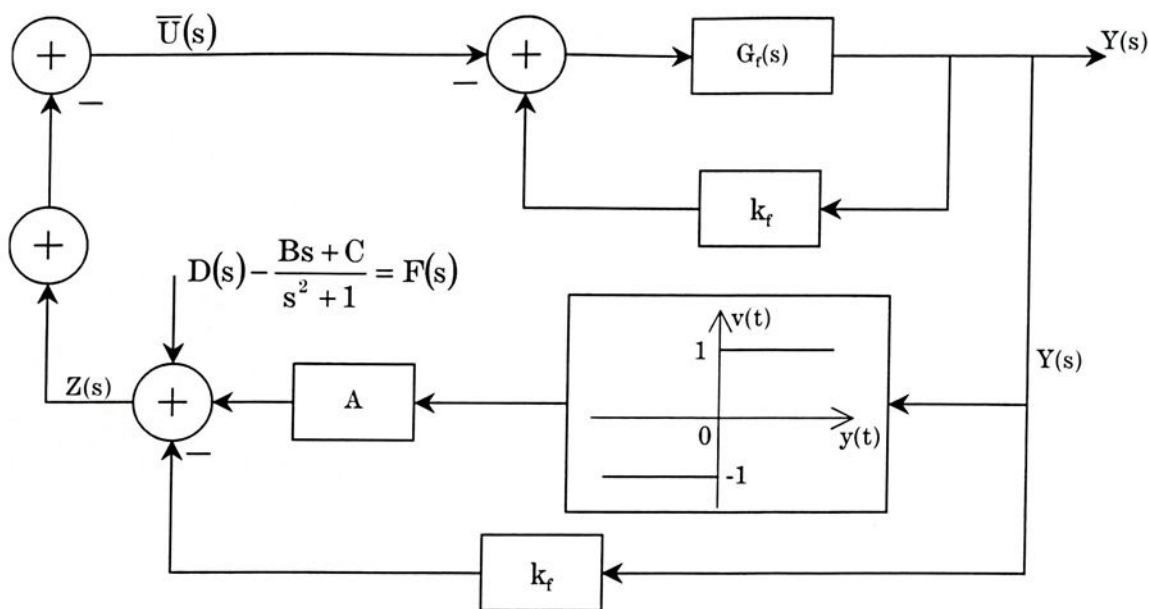
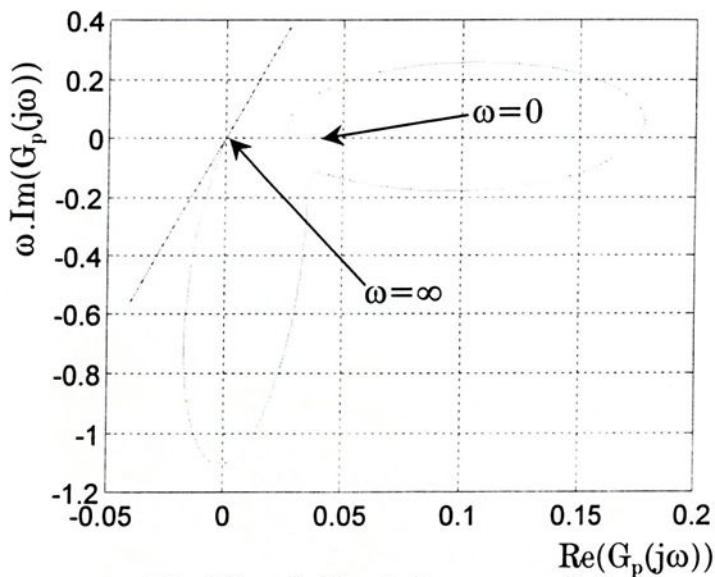


Fig. IV.15: Configuração equivalente a da Figura IV.14.

Para $k_f=30$, verificamos que a função de transferência

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{\bar{U}(s)} = \frac{G_r(s)}{1 + k_f G_r(s)} \quad (\text{IV.24})$$

possui todos pólos com parte real negativa e o gráfico de Popov dada abaixo:


 Fig. IV.16: Gráfico de Popov para $G_p(s)$.

Note que podemos traçar uma reta com inclinação $\frac{1}{\eta} > 0$ passando pela origem, de modo que a curva $\omega \text{Im}[G_p(j\omega)] \times \text{Re}[G_p(j\omega)]$, excluindo-se a origem, fique a direita desta reta.

Assim, pelo Teorema II.7 temos que $Y(s)/\bar{U}(s)$ é absolutamente estável para $\bar{u} = -\varphi(y)$ e $\varphi(y)$ pertencente ao setor $[0, k] = [0, \infty]$.

Agora vamos estudar a relação entre y e z no sistema da Figura IV.15 e verificar as condições para que $z = \varphi(y)$ pertença ao setor $[0, \infty]$. Considerando-se $A=10$, $k_f=30$, $|f(t)| < 2$, tem-se da Figura IV.15 que

$$\begin{aligned} y.z &= y(f + A \text{sgn}(y) - k_f y) \\ &\geq y(-2 \text{sgn}(y) + 10 \text{sgn}(y) - 30y) \\ &= y(8 \text{sgn}(y) - 30y). \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Então podemos traçar a relação entre y e z , no pior caso, isto é, quando $y.z$ é mínimo:

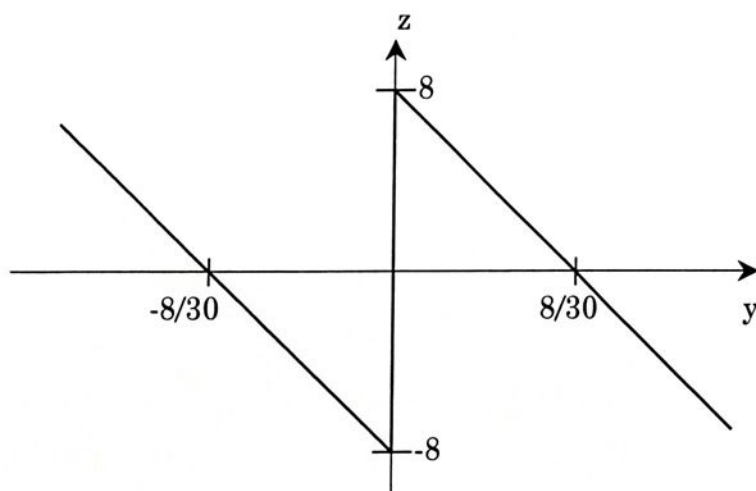


Fig. IV.17: Relação entre z e y quando $y.z$ é mínimo.

Note que para $|y| < \frac{8}{30}$, $z = \varphi(y)$ pertence ao setor $[0, k] = [0, \infty]$. Assim, pelo Teorema II.7 temos que o sistema da Figura IV.15 é absolutamente estável com um domínio finito $y \in [-\frac{8}{30}, \frac{8}{30}]$. Esse resultado garante o equilíbrio do pêndulo para condições iniciais suficientemente pequena.

As Figuras IV.18, IV.19, IV.20, IV.21 e IV.22 apresentam os resultados obtidos pela simulação digital da lei de controle proposta.

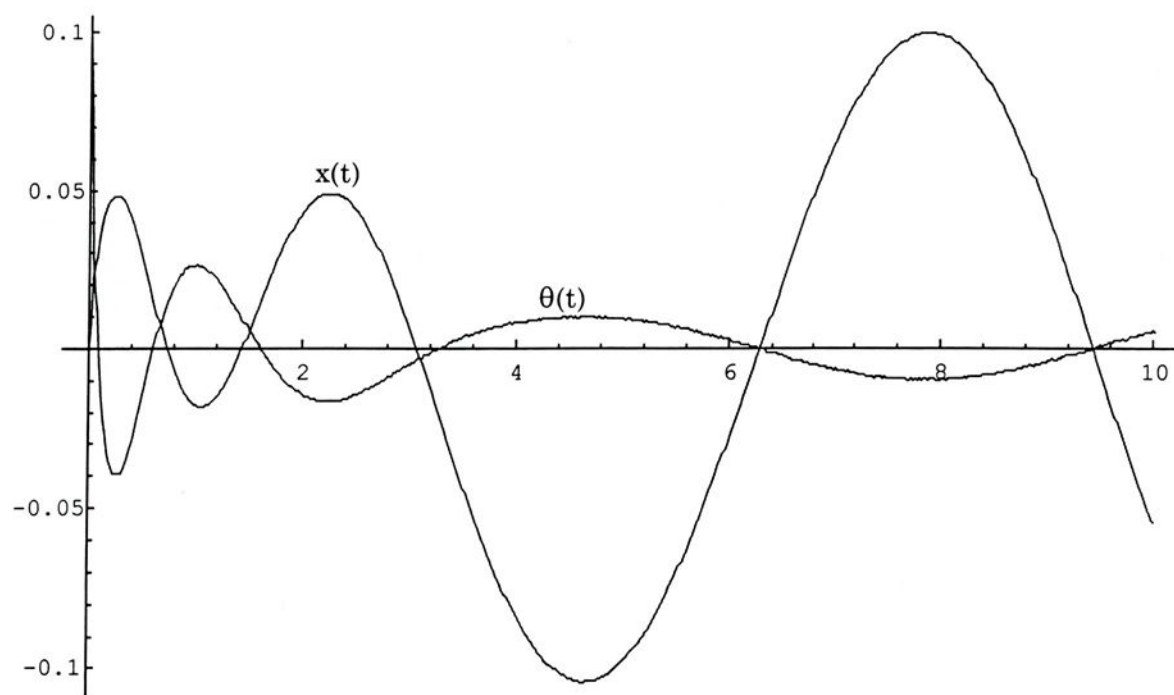


Fig. IV.18: Comportamento simulado das variáveis de estado x e θ .

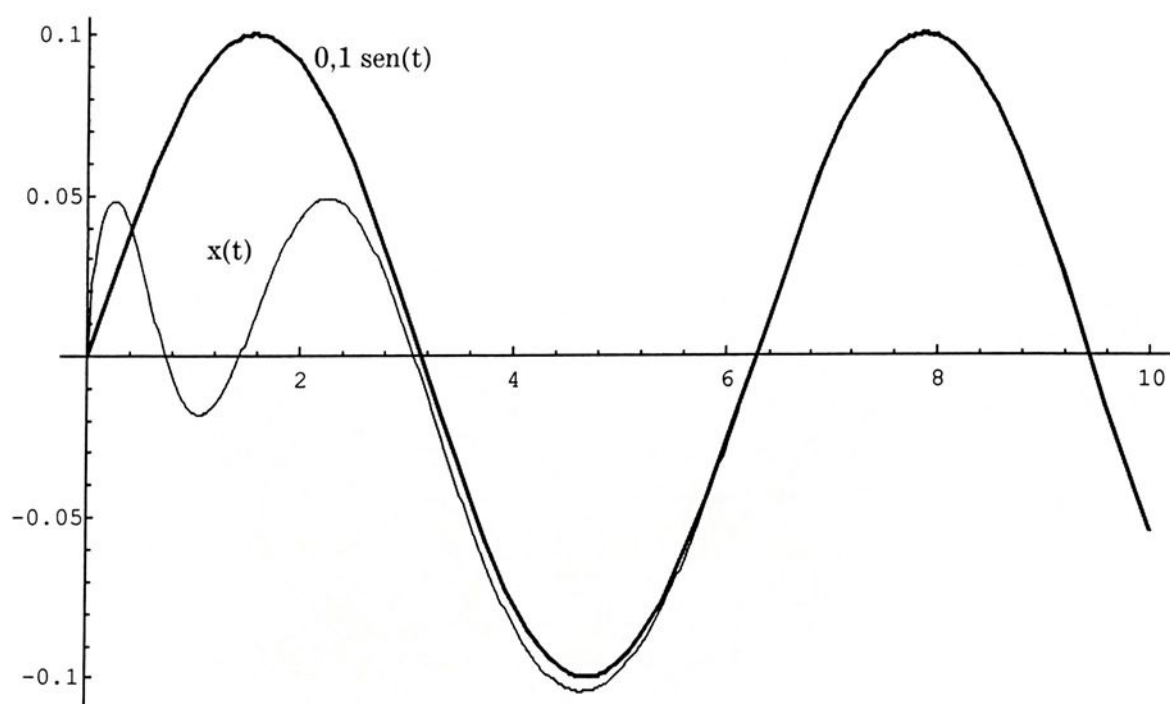


Fig. IV.19: Comportamento simulado do rastreamento da variável de estado x .

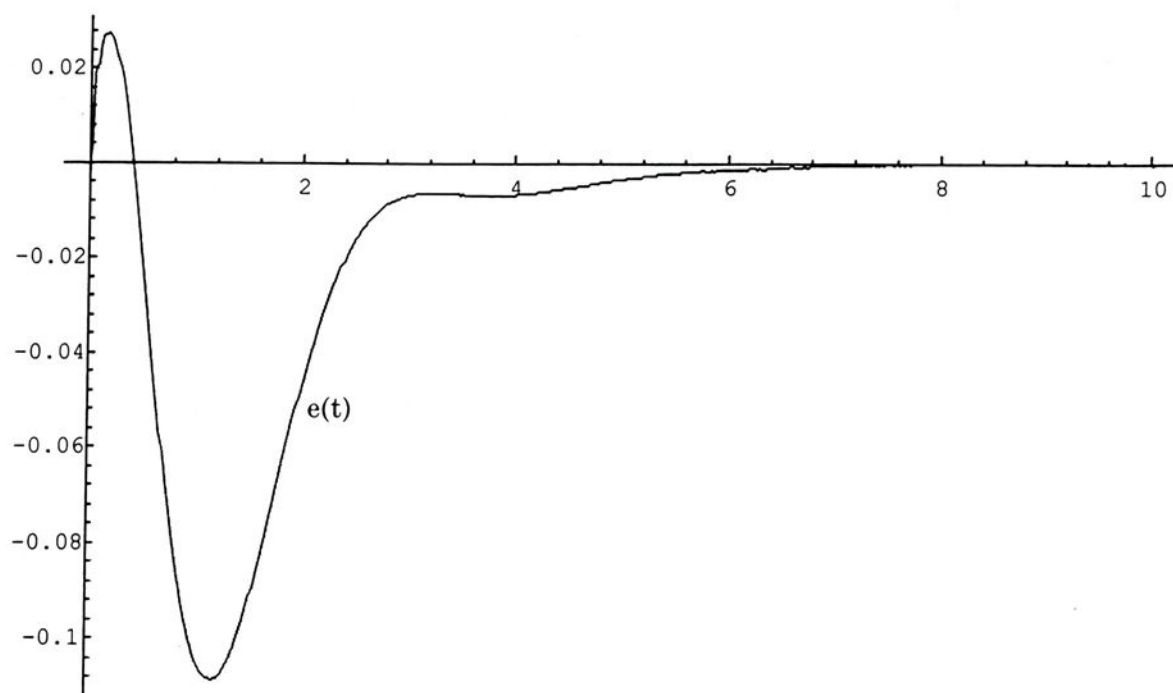


Fig. IV.20: Comportamento simulado do erro de rastreamento $e=x-r$.

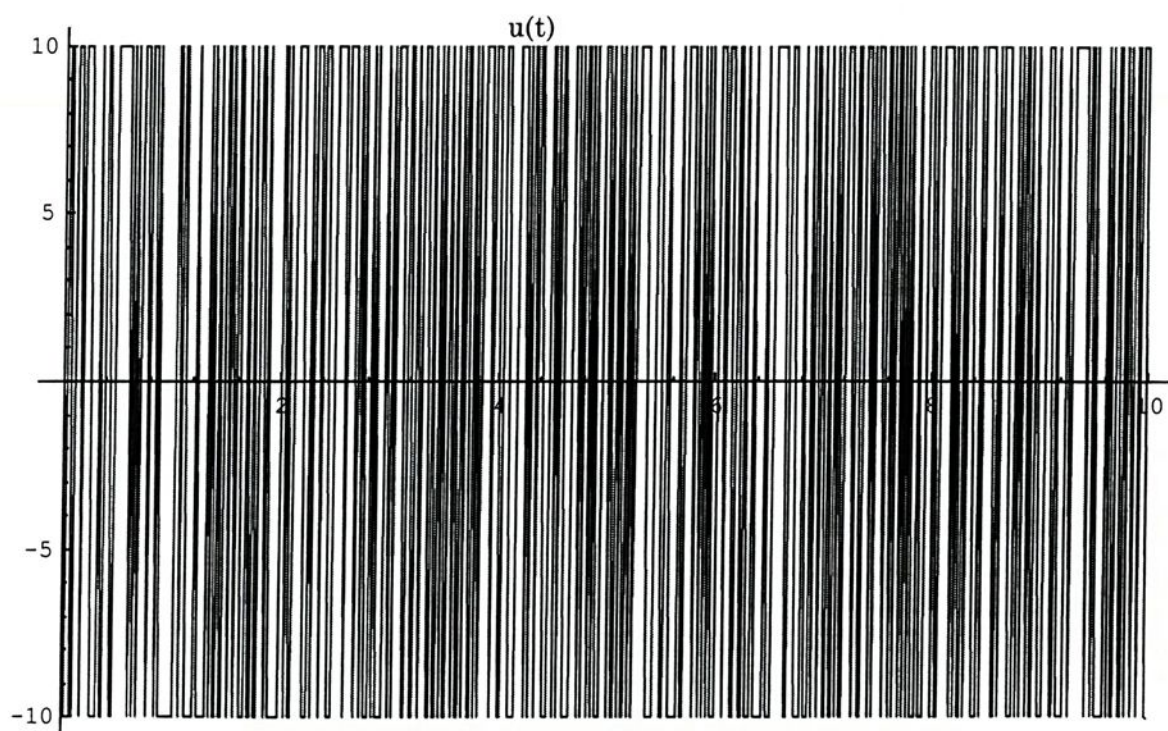


Fig. IV.21: Comportamento simulado da lei de controle u .

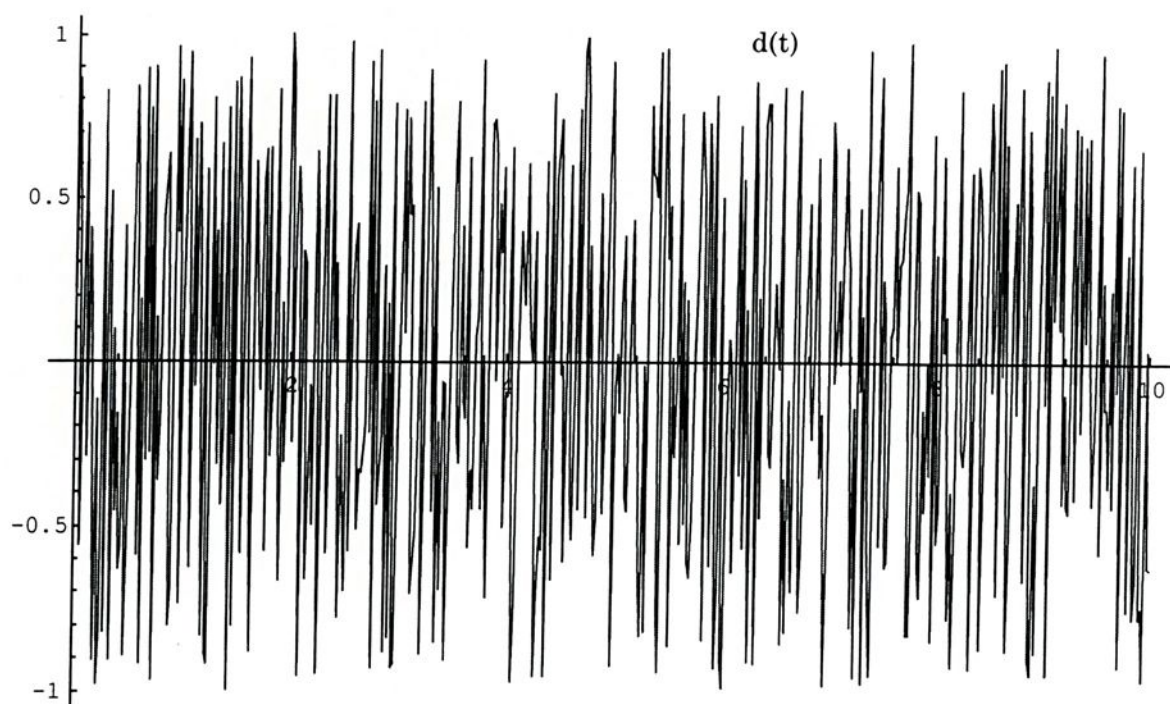


Fig. IV.22: Comportamento simulado do distúrbio d .

Esta lei de controle foi implementada no laboratório utilizando-se um computador analógico da *DEGEM*, para controle do módulo de um pêndulo invertido. Os resultados obtidos demonstram a validade da lei de controle proposta. Entretanto, observamos que o sistema apresenta comportamento ruidoso, o qual atribuímos à implementação do controlador com o computador analógico e utilizando-se fiação complexa. Este comportamento faz com que ele saia da região de estabilidade após um certo tempo operando de forma prevista.

IV.3.1. IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR COM DUAS VARIÁVEIS DE ESTADO

A lei de controle descrita na Seção IV.3 foi implementada no laboratório utilizando-se um computador analógico da *DEGEM*, para controle do módulo de um pêndulo invertido. Os resultados obtidos demonstram a validade da lei de controle proposta. Entretanto, observamos que o sistema apresenta comportamento ruidoso, o qual atribuímos à implementação do controlador com o computador analógico e utilizando-se fiação complexa. Este comportamento faz com que ele saia da região de estabilidade após um certo tempo operando de forma prevista.

O gráfico da Figura IV.23 ilustra o comportamento da variável de estado x , o qual apresenta um comportamento adequado quanto a sua amplitude, mas o sistema mostra um comportamento oscilatório, o que sugere a presença de ruídos. É importante salientar que no laboratório o sinal de referência adotado foi nulo.

Na Figura IV.24 é ilustrado o comportamento da variável de estado θ . Sendo que na Figura IV.25 é ilustrado o comportamento do sinal y o qual foi monitorado para comprovar o confinamento deste sinal dentro dos limites do projeto.

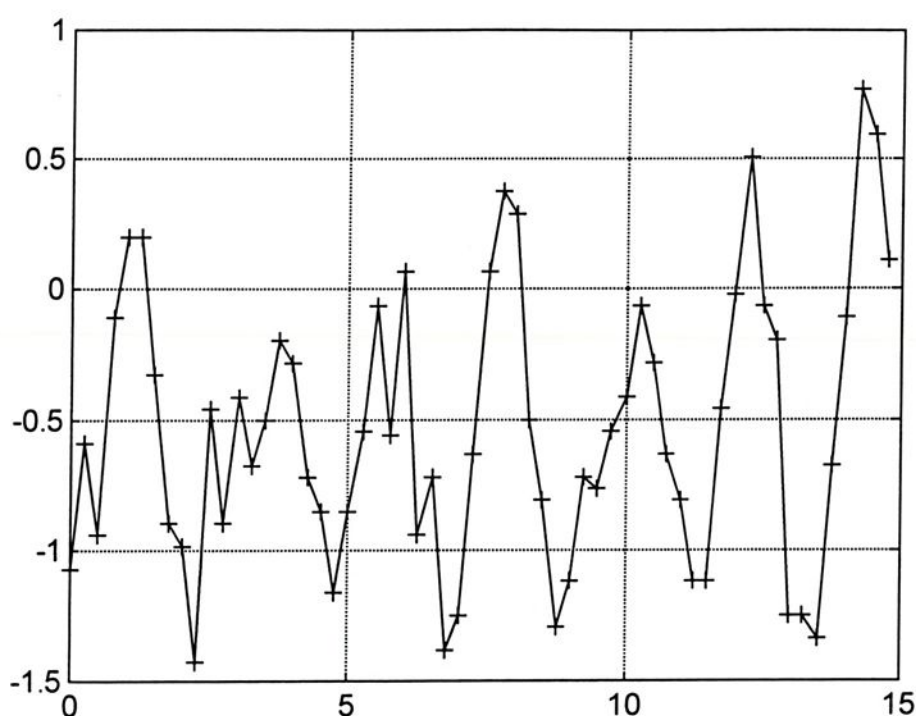


Fig. IV.23: Comportamento experimental da variável de estado $t(s) \times x(cm)$.

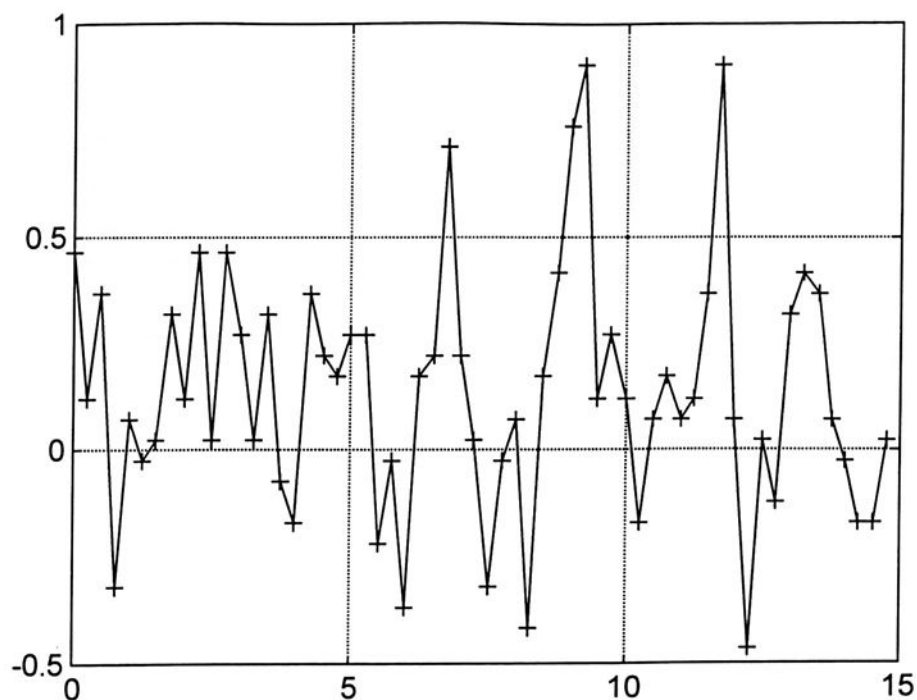


Fig. IV.24: Comportamento experimental da variável de estado $t(s) \times \theta(\text{rad})$.

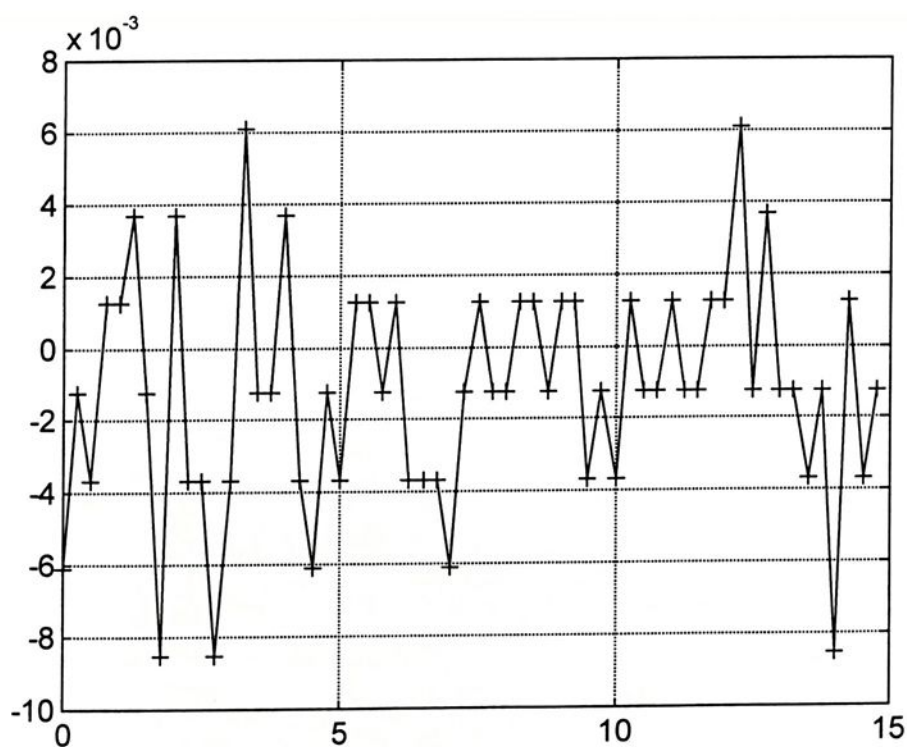


Fig. IV.25: Comportamento experimental do sinal $t(s) \times y(V)$.

Capítulo V

Conclusões

Este trabalho mostra como a teoria sobre a estabilidade dos sistemas ERP pode ser empregada no projeto de um sistema de controle com EVMD que permite que a posição horizontal de um pêndulo invertido (x), rastreie um sinal de classe conhecida (no caso uma senóide). São estudadas duas situações que consideram o acesso parcial às variáveis de estado do pêndulo, que são x , θ , $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$: (i) inicialmente x , θ e $\dot{x}$ são assumidas disponíveis, o sistema linear equivalente possui grau relativo (número de pólos menos o número de zeros) igual a um, o que permite o uso direto da teoria sobre os sistemas ERP no projeto do controlador; (ii) para a implementação no laboratório somente x e θ eram disponíveis, o sistema linear equivalente possui grau relativo igual a dois, impossibilitando o emprego direto da teoria sobre a estabilidade de sistemas ERP realimentados. Para contornar estes problemas foi utilizado um filtro derivativo para estimar $\dot{x}$ e o critério de Popov para estabilidade absoluta para projetar o controlador.

Ambas as abordagens foram simuladas, sendo que a segunda foi implementada no laboratório. Os resultados desta implementação conduziram a uma validação do enfoque teórico proposto.

É considerado que um distúrbio limitado é somado à entrada de controle (u). Um fato importante é que $X(s)/U(s)$ é de fase não-mínima e que o



rastreamento obtido é robusto com respeito a pequenas perturbações nos parâmetros da planta.

Em [32] é apresentada uma configuração, para plantas não-lineares, que permite o rastreamento, mas sem robustez. Pelo levantamento bibliográfico efetuado, os resultados apresentados aqui são novos.

Para futuras pesquisas neste assunto, propomos: (i) a realização de um algoritmo que estabeleça processos metódicos para o projeto de controladores do tipo descrito; (ii) generalização dos resultados para sistemas multivariáveis (com várias entradas e/ou saídas); (iii) generalização dos resultados para sistemas não-lineares, por exemplo, modelados utilizando modelos fuzzy de Takagi-Sugeno-Kang e (iv) estudo teórico e implementação no laboratório de configurações com estrutura variável mais elaboradas, como a proposta por L. Hsu, A. D. Araújo e R. R. Costa em [34].



Apêndice A

Modelo Matemático do Pêndulo Invertido

Para verificação da teoria utilizou-se o pêndulo invertido, citado na literatura. Ele é mantido sobre um carro móvel, como ilustra a Figura A.1, onde a haste pode girar livremente em torno de P. Ele pode representar, por exemplo, lançamento de foguetes, considerando como objetivo principal manter a haste na posição vertical.

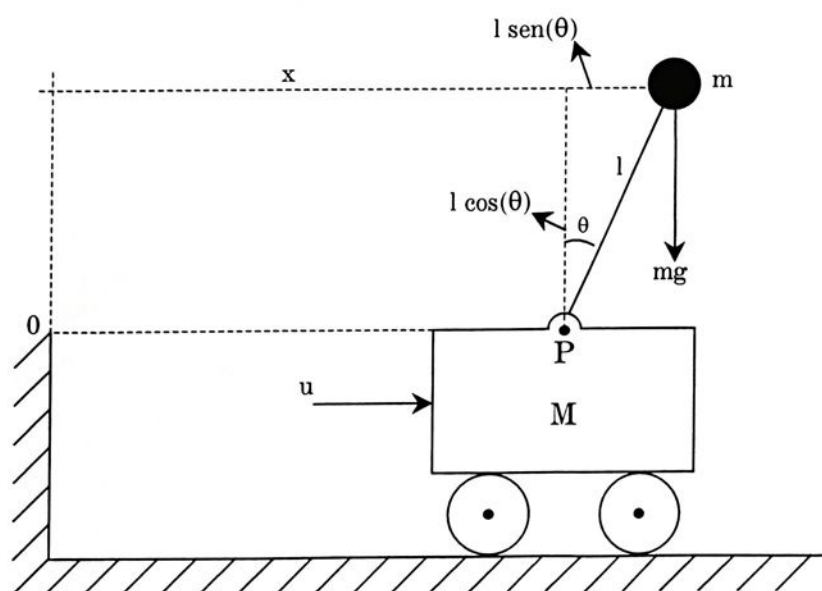


Fig. A.1: Pêndulo Invertido.

Aplicando-se a segunda lei de Newton para translação obtêm-se:

$$F = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad (\text{A.1})$$

onde

• F = u = somatória das forças atuante no sistema na direção x ;

• M = massa do carro;

• m = massa da bola fixada na extremidade da haste;

• x_1 = deslocamento do corpo de massa M ;

• x_2 = deslocamento do corpo de massa m .

Assim, o sistema pode ser descrito como,

$$u = M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 x_m}{dt^2} \quad (\text{A.2})$$

sendo que,

$$x_m = x + \ell \cdot \text{sen}(\theta). \quad (\text{A.3})$$

Reescrevendo a equação A.2, tem-se:

$$u = M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 (x + \ell \cdot \text{sen}(\theta))}{dt^2}. \quad (\text{A.4})$$

Desenvolvendo-se a equação A.4 e utilizando-se de uma anotação mais simplificada para as derivadas temporais obtêm-se a expressão a seguir,

$$u = (M + m) \cdot \ddot{x} - m \cdot \ell \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \text{sen}(\theta) + m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta). \quad (\text{A.5})$$

Isolando-se a variável $\ddot{x}$ da equação anterior, obtêm-se:



$$\ddot{x} = \frac{u - m \cdot \ell \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) + m \cdot \ell \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta)}{M + m}. \quad (\text{A.6})$$

Como o sistema sofre também um processo de rotação, é necessário escrever uma segunda equação que descreva este movimento. Para isto utilizou-se a segunda lei de Newton para movimentos rotacionais, onde,

$$\sum_{\text{Momentos na direção } \theta} = I \ddot{\theta}, \quad (\text{A.7})$$

onde:

- I = Momento de Inércia do corpo de massa m ;
- $\ddot{\theta}$ = aceleração angular do corpo de massa m .

ou seja,

$$m \cdot \ell \cdot \cos(\theta) \frac{d^2 x_m}{dt^2} - m \cdot \ell \cdot \sin(\theta) \frac{d^2 y_m}{dt^2} - m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (\text{A.8})$$

sendo que,

$$y_m = \ell \cdot \cos(\theta). \quad (\text{A.9})$$

Substituindo as equações A.3 e A.9 na equação A.8, obtêm-se a expressão a seguir,

$$m \cdot \ell \cdot \cos(\theta) \frac{d^2 (x + \ell \cdot \sin(\theta))}{dt^2} - m \cdot \ell \cdot \sin(\theta) \frac{d^2 (\ell \cdot \cos(\theta))}{dt^2} - m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin(\theta) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Desenvolvendo-se algebricamente a expressão da equação A.10, de forma a isolar $\ddot{\theta}$, obtêm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{g \cdot \sin(\theta) - \ddot{x} \cdot \cos(\theta)}{\ell}. \quad (\text{A.11})$$

Das equações (A.6) e (A.11) percebe-se uma dependência do termo da derivada de segunda ordem de x . Isto impossibilita o processo de simulação pois necessita-se do valor da derivada de segunda ordem de x para obtenção da derivada de segunda ordem de θ . Por causa disto, foi necessário reestruturar estas equações de forma a obter um resultado satisfatório.

Da equação A.11 pode-se isolar a variável $\ddot{x}$, de modo que,

$$\ddot{x} = \frac{u - m.g.\sin(\theta).\cos(\theta) + m.\ell.\dot{\theta}^2.\sin(\theta)}{M + m.\sin^2(\theta)}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo-se a equação A.12 na equação A.6 consegue-se uma nova expressão para derivada de segunda ordem de θ , como descrito na equação a seguir,

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m).g.\sin(\theta) - u.\cos(\theta) - m.\ell.\dot{\theta}^2.\sin(\theta).\cos(\theta)}{(M + m.\sin^2(\theta)).\ell}. \quad (\text{A.13})$$

Pode-se desta forma utilizar as equações A.12 e A.13 como sendo as expressões que descrevem de forma genérica o sistema.

Utilizando-se das equações genéricas que descrevem o sistema utilizou-se o processo de linearização no ponto de equilíbrio $\theta = \dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$, o qual é descrito pelas duas equações abaixo,

$$\ddot{x} = \frac{u - m.g.\theta}{M}, \quad (\text{A.14})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m).g.\theta - u}{M.\ell}. \quad (\text{A.15})$$

As equações (A.14) e (A.15) podem ser representadas pelas seguintes equações, na forma de variáveis de estado, conforme indicado a seguir,



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{M\ell} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (\text{A.16})$$

Apêndice B

Modelo Matemático do Pêndulo Invertido Acionado por Motor cc

A equação de um motor cc é dada pela expressão,

$$V = I_m R_m + K_m K_g \omega_l = I_m R_m + K_m K_g \frac{\dot{x}}{r}, \quad (\text{B.1})$$

onde ω_l é a velocidade angular do motor (após a engrenagem), $\dot{x}$ é a velocidade linear do carro, r é o raio da engrenagem de saída que movimenta o carro e I_m é a corrente na armadura do motor.

Da equação acima tem-se:

$$I_m = \frac{V}{R_m} - K_m K_g \frac{\dot{x}}{r R_m}. \quad (\text{B.2})$$

O torque gerado na saída do motor é:

$$T = K_m K_g I_m, \quad (\text{B.3})$$

o que resulta na força aplicada no carro dada por:



$$F = \frac{T}{r} = \frac{K_m K_g I_m}{r} = \frac{K_m K_g}{R \cdot r} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{R \cdot r^2} \dot{x} \quad (B.4)$$

Substituindo-se a equação B.4 na equação A.16, tem-se o modelo completo do pêndulo invertido acionado por um motor cc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4,5231 & -16,8835 & 0 \\ 0 & 46,9609 & 55,3557 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,7778 \\ -12,3862 \end{bmatrix} V. \quad (B.5)$$



Referências Bibliográficas

- [1] Newcomb, R. W. (1966), *"Frequency Domain Criteria for Absolute Stability"*, New York: Academic Press.
- [2] Narenda, K. S. e Taylor, J. H. (1973), *"Um Servomecanismo Adaptativo"*, Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, Março 1982.
- [3] Taylor, J. H. (1974), *"Strictly Positive-Real Functions and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich (LKY) lema,"* IEEE Trans. Circuits and Syst., Março, pp. 310-311.
- [4] Hitz, L. e Anderson, B. D. O. (1969), *"Discrete Positive-Real Functions and Their Application to System Stability"*, Proc. IEE, vol. 116, nº 1, pp. 153-155.
- [5] Popov, V. M. (1963), *"The Solution of a New Stability Problem for Controlled Systems"*, Automat. Remote Control, vol. 24, pp. 1-23.
- [6] Popov, V. M. (1964), *"Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions"*, Rev. Romanian Sci. Tech-Electrotech. And Engrg., vol. 9, nº 4, pp. 629-690.
- [7] Anderson, B. D. O. (1968), *"A Simplified Viewpoint of Hyperstability"*, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-13, June, pp. 292-294.
- [8] Anderson, B. D. O. (1967), *"A System Theory Criterion for Positive Real Matrices"*, J. Siam Control, 5, nº 2, pp. 171-182.



- [9] Youla, D. C. (1961), "*On the Factorization of Rational Matrices*", IRE Trans. Information Theory, IT-7, pp. 172-182
- [10] Ioannou, P. e G. Tao (1987), "*Frequency Domain Conditions for Strictly Positive Real Functions*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, nº, pp. 53-54.
- [11] Shaked, V. (1977), "*The Zero Properties of Linear Passive Systems*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 973-974.
- [12] Hattori, A. e Kobayashi, K. (1980), "*The Matrix Forms of Yakubovich-Kalman-Lefschetz Theorems Derived from the Popov Theory of Positive Systems*", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, nº1, pp. 102-104.
- [13] Hamada, K. e Suzuki, M. (1987), "*Singular Perturbations of Strictly Positive Realness*", Systems & Cont. Letters, 9, pp. 257-261.
- [14] Fernandez, B., e Ortega, R. (1987), "*On Positive-Real Discrete-Time Transfer Functions*", Proc. Of IEEE, vol. 75, nº 3, pp. 428-430.
- [15] Landau, I. (1979), "*Adaptive Control – The Model Reference Approach*", New York: Dekker.
- [16] Balestrino, A.; De Maria, G. e Zinober, S. I. (1984), "*Nonlinear Adaptive Model-Following Control*", Automatica, vol. 20, nº 5, pp. 559-568.
- [17] Åström, K. J. (1983), "*Theory And Applications of Adaptive Control-A Survey*", Automática, vol. 19, nº 5, pp. 471-486.
- [18] Åström, K. J. (1987), "*Adaptive Feedback Control*", Proc. Of IEEE, vol. 75, nº 5, pp. 185-217.
- [19] Teixeira, M. C. M. (1989), "*Sistemas Reais Positivos e Aplicações ao Controle com Incertezas*", Tese de Doutorado, PUC/RJ, Maio 1989.

- [20] Kalil, H. K. (1996), *Nonlinear Systems*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, U.S.A.
- [21] Drazenovic, B. (1969), "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems", *Automática*, vol. 5, pp. 287-295.
- [22] Fillipov, A. F. (1964), "Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side", *Ann. Math. Soc. Transl.*, vol. 42, pp. 199-232.
- [23] Teixeira, M. C. M. (1990), "Control of Uncertain Dynamical Systems Using Stricly Positive Real Systems", *Lecture Notes in Control and Information Science*, 144, Springer Verlag, Berlin, pp. 900-911.
- [24] Teixeira, M. C. M. (1990), "Condições para Tornar um Sistema Estritamente Real Positivo e Aplicação no Controle com EVMD Utilizando as Saídas da Planta", 8ª CBA, Belém – PA, vol. 1:291-296.
- [25] Teixeira, M. C. M. (1990), "Output Variable Structure Control Using Strictly Positive Real Systems", *IEEE Workshop on Intelligent Motion*, Istambul – Turkey, vol. 2:709-711.
- [26] Teixeira, M. C. M. & Oliveira, R. A. F. (1991), "Direct Variable Structure With Uncertainties in The Input Matrix", *IFAC Symposium on Design Metrhod for Control Systems*, Zurich-Switzerland, vol. 2:480:485 (preprints).
- [27] Teixeira, M. C. M. (1992), "Sistemas ERP e Compensadores Dinâmicos: Estudo e Controle com Estrutura Variável", 9ª CBA, Vitória – ES, vol. 2: 657-662.
- [28] Teixeira, M. C. M. (1993), "Output Control With Dynamical Compensators and Strictly Positive Real Systems", *International Journal of Control*, vol. 57, nº5: 1101-1105.



- [29] Teixeira, M. C. M. (1994), *"Controle com Estrutura Variável Utilizando Compensadores Dinâmicos e Sistemas ERP"*, 10º CBA, Rio de Janeiro – RJ, vol. 1: 418-422.
- [30] Walcott, B & Zak, S. H. (1988), *"Combined Observer-Controller Synthesis for Uncertain Dynamical Systems With Applications"*, IEEE Trans. S. Man and Cyb., vol. 18, nº1: 88-164.
- [31] Steinberg, A. & Corless, M. (1985), *"Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems"*, IEEE Trans. on Aut. Cont., vol.-AC-30, nº10: 1025-1027.
- [32] Gopalswamy, S. & Hedrick, J. K. (1993), *"Tracking Nonlinear Non-Minimum Phase System Using Sliding Control"*, Int. J. Contr., vol. 57, nº5: 1141-1158.
- [33] Ogata, K. (1993), *"Engenharia de Controle Moderno"*, Ed. Prentice Hall do Brasil Ltda, 2ª edição, Rio de Janeiro – RJ.
- [34] Hsu, L. & Araújo, A. D. & Costa, R. R. (1994), *"Analysis and Design of I/O Based Variable Structure Adaptive Control"*, IEEE Transactions on Automatic Control.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP