IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.001/00

Teleparalelismo e a Descrição da Interação Gravitacional

Vanessa Carvalho de Andrade

Orientador

José Geraldo Pereira

Fevereiro de 2000

...

Mas se Deus é as flores e as árvores
E os montes e sol e o luar,
Então acredito nele,
Então acredito nele a toda hora,
E a minha vida é toda uma oração e uma missa,
E uma comunhão com os olhos e pelos ouvidos.

Mas se Deus é as árvores e as flores
E os montes e o luar e o sol,
Para que lhe chamo eu Deus?
Chamo-lhe flores e árvores e montes e sol e luar;
Porque, se ele se fez, para eu o ver,
Sol e luar e flores e árvores e montes,
Se ele me aparece como sendo árvores e montes
E luar e sol e flores,
É que ele quer que eu o conheça
Como árvores e montes e flores e luar e sol.

E por isso eu obedeço–lhe,
(Que mais sei eu de Deus que Deus de si próprio?),
Obedeço–lhe a viver, espontaneamente,
Como quem abre os olhos e vê,
E chamo–lhe luar e sol e flores e árvores e montes,
E amo–o sem pensar nele,
E penso–o vendo e ouvindo,
E ando com ele a toda a hora.

Alberto Caeiro
em *O Guardador de Rebanhos.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao grande responsável por este trabalho, Prof. José Geraldo, ao qual dedico profunda admiração. Sob sua orientação, aprendi o quanto a física pode ser simples, clara e interessante.

Ao meu pai, que me ensinou a sonhar.

À minha mãe, amiga preciosa.

Aos meus irmãos Dinho e Dani, pelas inúmeras brigas e risadas.

Aos meus sogros, avós, tios, primos, sobrinhos e cunhados, pela família alegre e presente.

À Profª Heloísa e Prof. Pepê, que me fizeram acreditar em mim.

À Madre Glória (in memorium), que me mostrou o que é bondade.

Aos meus amigos de Ubatuba.

À Érica, Cris, Ana Lúcia e Evelise, pela boa amizade.

Aos professores do IFT George Matsas, Sérgio Novaes e Ruben Aldrovandi, pelas discussões que sempre se mostraram esclarecedoras.

À FAPESP, que me deu o prazer de realizar esta tese.

Ao Fernando, meu equilíbrio.

Resumo

No contexto de uma teoria de gauge para o grupo das translações, discutimos neste trabalho o equivalente teleparalelo da Relatividade Geral. O ponto central é a introdução de uma nova prescrição de acoplamento entre campos de matéria e a torção do espaço–tempo, a qual é obtida impondo-se uma equivalência com o acoplamento minimal usual da Relatividade Geral. Usando essa nova prescrição, realizamos um estudo comparativo entre as descrições métrica e teleparalela da gravitação para *(i)* partículas sem spin, *(ii)* campo escalar, *(iii)* campo vetorial e *(iv)* campo espinorial.

Palavras Chaves: Gravitação, Teleparalelismo, Teorias de Gauge.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos e Gravitação.

Abstract

In the context of a gauge theory for the translation group, we discuss in this work the teleparallel equivalent of General Relativity. The central point is the introduction of a new coupling prescription between matter fields and the torsion of the spacetime, which is obtained from the equivalence with the usual minimal coupling prescription of General Relativity. By using this prescription, a comparative study is made between the metric and the teleparallel descriptions of gravitation for the case *(i)* of a spinless particle, *(ii)* a scalar field, *(iii)* a vector field, and *(iv)* a spinorial field.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Gravitação como uma Teoria de Gauge

A teoria de Relatividade Geral de Einstein (RG) é considerada, até os dias atuais, um dos suportes da física moderna, e sem dúvida a teoria gravitacional mais bem sucedida do ponto de vista clássico. Todas as evidências disponíveis de experimentos no mundo macroscópico atestam a validade da RG como a melhor descrição para esta interação.

Entretanto, paralelamente ao seu sucesso, a RG apresenta uma série de problemas [1]. Podemos citar a questão da definição dos sistemas de referência, que somente na década de 50 ganhou considerável atenção. O problema consiste em se criar uma formulação covariante geral, o que resulta no fato das coordenadas serem apenas quantidades auxiliares, sem significado intrínseco. Assim, vemos a extrema importância em se distinguir os conceitos de sistema de coordenadas e de sistema de referência. Mesmo Einstein, apesar de enfatizar a importância dos sistemas de referências, não criou ele mesmo uma definição formal para eles. Outros autores, posteriormente, chegaram a misturar estas definições, ignorando tal problema. A questão foi examinada a fundo na versão de tetradas da RG, onde foram definidos sistemas de referência locais, fixados em cada ponto do espaço-tempo [2, 3, 4]. Mas existe ainda uma dificuldade na essência da teoria em se criar, ao longo de um espaço-tempo curvo, uma distribuição contínua de tetradas. Além disso, o problema em se escolher um referencial de tetradas, para uma certa configuração física, está longe de ter uma solução definitiva.

Outro problema em discussão é o Princípio da Equivalência (PE). Este princípio assegura a existência de um certo sistema de referência onde todas as leis físicas adquirem a forma das leis na Relatividade Especial (RE). Isto significa que podemos considerar o desaparecimento do campo gravitacional neste dado sistema de referência, critério de transição entre a RG e a RE. Enunciando de outra forma, o PE afirma que os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis dos efeitos produzidos por um referencial acelerado. Entretanto, na teoria de Einstein, o campo gravitacional existe ou não existe, de acordo com o anulamento ou não do tensor de Riemann. Isto é uma propriedade absoluta e não está, de forma alguma, relacionada à linha de mundo do observador em questão, ou seja, não depende da escolha de um determinado referencial.

A definição de um tensor energia-momento para o campo gravitacional, por outro lado, é um dos mais antigos e controversos problemas da gravitação, e que ainda espera por uma solução definitiva. Como um legítimo campo, a gravitação deveria possuir uma densidade local de energia e momento. Entretanto, tal densidade não pode ser definida devido ao princípio da equivalência. Isto irá resultar num pseudotensor de energia-momento para o campo gravitacional, o qual depende, portanto, do sistema de coordenadas adotado para sua definição.

Podemos finalmente citar o problema da quantização. Sabemos que não há uma versão quântica satisfatória da RG, e tudo indica que a teoria de Einstein não pode realmente ser renormalizável.

Estas são algumas das dificuldades do cenário da RG que motivam sua reformulação. Surge, então, a perspectiva de se construir uma teoria de gauge para a gravitação [5]. Poderia tal formalismo solucionar alguns destes problemas? Não sabemos responder ao certo, mas os cientistas começam a vislumbrar algumas boas possibilidades neste sentido. Por exemplo, a questão do tensor energia-momento da gravitação parece encontrar uma formulação mais adequada em termos das estruturas geométricas das teorias de gauge [6]. Extrapolando previsões, poderíamos dizer que a questão da quantização do campo gravitacional poderia ser solucionada através da 'gaugificação' do campo, já que as teorias de gauge possuem uma afinidade natural com a renormalização.

A principal razão para se criar uma versão da gravitação em termos de uma teoria de gauge é ainda o sonho da unificação [7]. Atualmente, as teorias de gauge fornecem uma poderosa base teórica em física de partículas. Assim, as interações fraca e eletromagnética são unificadas com sucesso pela teoria de Weinberg-Salam, e as interações fortes são mediadas por partículas de gauge, conhecidas como glúons, no cenário da cromodinâmica. Interações com simetrias tão diferentes são interpretadas da mesma forma, através dos potenciais de gauge, principal ferramenta desses modelos. Entretanto, a gravitação é a única que permanece isolada das demais, numa teoria completamente à parte. Enquanto as demais interações são descritas com sucesso no cenário de teoria de campos quânticos relativística, onde os campos residem num espaço-tempo plano e separados do mesmo, a gravitação de Einstein relaciona as interações gravitacionais com a estrutura do espaço-tempo, interpretando o campo gravitacional como a variável dinâmica da teoria e ao mesmo tempo responsável pela geometria do espaço. Existe, portanto, uma dicotomia na física teórica da atualidade: enquanto todas as outras interações são bem descritas num espaço-tempo plano e fixo, a gravitação requer um espaço-tempo não-plano e dinâmico.

1.2 Retrospectiva

Weyl fez o primeiro esforço, em 1918, no sentido de estender a RG para descrever gravitação e eletromagnetismo dentro de um cenário geométrico unificado [8]. Sua brilhante proposta continha todos os aspectos matemáticos de uma teoria de gauge abeliana. As palavras *transformação de gauge* e *invariância de gauge* apareceram pela primeira vez com o sentido atual de *mudança de calibre.*

Ao lado da linha das teorias de gauge, que culminou na teoria de Sciama-Kibble [9, 10], existiu uma segunda linha de pesquisa liderada por E. Cartan (1923), com uma análise geométrica da RG [11]. O conceito de uma conexão linear como uma estrutura primária e independente do espaço-tempo foi generalizada em seu trabalho. Em particular, introduziu a noção da chamada *torção*, que corresponde à parte antissimétrica, e portanto tensorial, das componentes da conexão em coordenadas holônomas, e discutida por Weyl sob o ponto de vista geométrico. Além disso, Cartan deu uma interpretação geométrica belíssima para as noções de torção e curvatura. Considere um vetor em algum ponto da variedade e o desloque em torno de uma curva infinitesimal fechada, projetada no espaço tangente. Se houver torção no espaço, obteremos um *gap* entre as extremidades da curva, no espaço tangente. Em outras palavras, a torção quebra paralelogramos geodéticos infinitesimais. A curvatura, por outro lado, produz uma mudança na direção do vetor quando ele retorna ao ponto de partida. Assim, torção estaria relacionada diretamente às translações, e a curvatura às rotações na variedade.

A noção de paralelismo absoluto foi introduzida por Einstein, em 1928, na tentativa de unificar a gravitação ao eletromagnetismo, usando tetradas de 16 graus de liberdade [12]. Entretanto, seu modelo não foi bem sucedido, já que não possuia solução de Schwarzschild em suas equações de campo. Posteriormente, Møller, em 1961, reviveu suas idéias [13] e Pellegrini & Plebanski [14] encontraram uma formulação lagrangeana para o paralelismo absoluto.

No final da década de 60, independentemente, Hayashi & Nakano [15] iniciaram uma formulação da teoria de gauge para o grupo das translações, e obtiveram, em condições especiais da teoria, equações cuja parte simétrica resultavam idênticas às equações de Einstein, e cuja parte antissimétrica, na aproximação de campo fraco, descrevia a propagação de um campo cuja fonte era relacionanda ao spin intrínseco de partículas fundamentais de spin 1/2. Desde então, estas idéias têm recebido considerável atenção, principalmente dentro do contexto de teorias de gauge para os grupos de Poincaré e das translações [16-26].

O cenário das teorias teleparalelas da gravitação é o espaço-tempo de Weitzenböck [27], um espaço que apresenta torção, mas curvatura nula. A descrição teleparalela para o campo gravitacional tem se mostrado, pelo menos macroscopicamente, equivalente à descrição da Relatividade Geral, cujo cenário é o espaço-tempo de Riemann, um espaço que apresenta curvatura, porém torção nula. Sendo esta equivalência legítima, a interação gravitacional poderá ser descrita através de duas abordagens distintas mas equivalentes, uma em termos de torção e a outra em termos de curvatura.

1.3 Apresentação

Com o propósito de explorar tal equivalência entre RG e teleparalelismo, dividiremos nosso trabalho da seguinte forma. No capítulo 2 desenvolveremos a base do teleparalelismo, ou seja, construiremos uma teoria de gauge para o grupo das translações, identificando o campo gravitacional como um potencial de gauge, e veremos ser esta abordagem muito próxima à das teorias de gauge usuais, e em particular ao eletromagnetismo.

No capítulo 3 estudaremos a trajetória de partículas sem spin na presença de gravitação, considerando para tal as duas abordagens, a métrica e a teleparalela. Estudaremos, nesses contextos, as diferenças conceituais resultantes em se considerar um espaço-tempo somente com curvatura, ou somente com torção.

Os capítulos 4 e 5 serão dedicados ao estudo dos campos escalar e eletromagnético na presença do campo gravitacional, e veremos as diferentes interpretações das duas abordagens.

O capítulo 6 dedica-se a uma tentativa de unificar o tratamento dos campos fudamentais da natureza, adotando somente o ponto de vista da RG. Discutiremos como obter, a partir do quadrado da equação de Dirac, uma equação válida para qualquer campo fundamental. Veremos que, para este propósito, o conceito de razão gravito-giromagnética deve ser introduzido.

Finalmente, no último capítulo, discutiremos como seria o possível acoplamento de espinores com gravitação no contexto do teleparalelismo. Não pretendemos propor soluções definitivas para este problema tão controverso ainda nos dias de hoje, mas discutir nossas idéias e confrontá-las com idéias apresentadas em reconhecidos trabalhos de gravitação.

Capítulo 2

O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

2.1 Teoria de Gauge para o Grupo das Translações (TGT)

2.1.1 Conceitos Básicos

Consideraremos uma variedade base que representa o espaço-tempo. A cada ponto no espaço está associado um espaço tangente (fibra), dado por um espaço de Minkowski. Adotaremos o alfabeto grego (μ, ν, ρ, $\cdots = 1, 2, 3, 4$) para designar índices relacionados ao espaço-tempo, e o alfabeto latino (a, b, c, $\cdots = 1, 2, 3, 4$) para designar índices ralacionados ao espaço tangente. Como as transformações de gauge ocorrem neste espaço, estes índices corresponderão também aos índices de álgebra do modelo. A métrica do espaço interno será dada por $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Note-se que as coordenadas no espaço interno são funções dos pontos do espaço-tempo, ou seja

$$x^a = x^a(x^\mu) . \tag{2.1}$$

As derivadas holônomas nestes dois espaços são ∂_μ e ∂_a. Elas podem se relacionar graças à presença de uma tetrada trivial $\partial_\mu x^a$, e de sua inversa $\partial_a x^\mu$:

$$\partial_\mu = (\partial_\mu x^a)\, \partial_a \quad ; \quad \partial_a = (\partial_a x^\mu)\ \partial_\mu . \tag{2.2}$$

Vamos definir uma transformação de gauge para o grupo das translações por uma translação local de coordenadas da fibra,

$$x'^a = x^a + a^a(x^\mu) , \tag{2.3}$$

com $a^a(x^\mu)$ o parâmetro da transformação. Esta transformação pode ainda ser escrita como

$$x' = Ux \; , \tag{2.4}$$

com U um elemento do grupo das translações. No caso de uma transformação infinitesimal, teremos

$$U = 1 + \delta a^a P_a \; , \tag{2.5}$$

onde δa^a são os parâmetros infinitesimais, e $P_a = \partial_a$ o gerador de translações, que satisfaz

$$[P_a, P_b] = 0 \; . \tag{2.6}$$

Assim, a versão infinitesimal da transformação de coordenadas (2.3) pode ser escrita em termos dos geradores como

$$\delta x^a = \delta a^b P_b \, x^a \; . \tag{2.7}$$

Vamos introduzir um campo fonte qualquer $\Phi(x^\mu)$. Sendo a dependência do mesmo em x^μ dada através de x^a, isto é

$$\Phi(x^\mu) = \Phi(x^a(x^\mu)) \; , \tag{2.8}$$

vemos que os geradores P_a atuam no campo através de seu argumento. Portanto, essa transformação de gauge não depende do seu caráter espinorial, sendo dada por

$$\Phi'(x^\mu) = U\Phi(x^\mu) \; . \tag{2.9}$$

Assim, sob uma transformação infinitesimal de gauge, o campo $\Phi(x^\mu)$ transforma-se como

$$\delta\Phi = \delta a^a P_a \Phi \; , \tag{2.10}$$

com $\delta\Phi$ a variação funcional de Φ a ponto fixo no espaço-tempo, como ocorre nas teorias de gauge usuais.

A definição geral de derivada covariante de gauge é

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} B^a{}_\mu \frac{\delta}{\delta a^a} \; , \tag{2.11}$$

onde introduzimos os potenciais de gauge

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \, . \tag{2.12}$$

A introdução da constante c (velocidade da luz) é devido à razões dimensionais. Assim, a derivada covariante de gauge do campo $\Phi(x^\mu)$ assume a forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + c^{-2} B^a{}_\mu \, P_a \Phi \, . \tag{2.13}$$

Como os geradores do grupo são derivadas que atuam em qualquer campo através de seu argumento, todos os campos na natureza responderão da mesma forma à essa atuação, e se acoplarão, portanto, igualmente aos potenciais de gauge. Esta é a essência do conceito de universalidade, que surge neste modelo através deste acoplamento entre os campos fonte e a gravitação, representada aqui pelos potenciais de gauge.

Usando a identidade (2.2), a derivada covariante (2.13) pode ser reescrita como

$$D_\mu \Phi = h^a{}_\mu \, \partial_a \Phi \, , \tag{2.14}$$

onde definimos o campo de tetradas

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + c^{-2} B^a{}_\mu \equiv D_\mu x^a \, . \tag{2.15}$$

É importante observar que o campo gravitacional aparece como a parte não trivial da tetrada [10]. Dentro desse contexto, vemos que a tetrada pode também ser interpretada como uma grandeza que relaciona uma base holônoma a uma base não-holônoma, pois

$$D_\mu = h^a{}_\mu \, \partial_a \, . \tag{2.16}$$

Assim, na ausência de gravitação, $h^a{}_\mu$ se torna trivial e a derivada covariante (2.14) se reduz a uma base coordenada ∂_μ.

A imposição da covariância de D_μ resulta na lei de transformação de gauge para os potenciais:

$$B'_\mu = U B_\mu U^{-1} + c^2 U \partial_\mu U^{-1} \, . \tag{2.17}$$

Infinitesimalmente,

$$B'^a{}_\mu = B^a{}_\mu - c^2 \partial_\mu \delta a^a \,. \tag{2.18}$$

Com isso, podemos verificar, usando (2.7) e (2.18), que a tetrada é invariante de gauge, isto é,

$$h'^a{}_\mu = h^a{}_\mu \,. \tag{2.19}$$

Consequentemente, sua derivada de gauge coincide com a derivada ordinária.

Finalmente, vamos definir o tensor intensidade do campo gravitacional $F^a{}_{\mu\nu}$ como a derivada covariante do potencial de gauge $B^a{}_\mu$:

$$F^a{}_{\mu\nu} = D_\mu B^a{}_\nu \,. \tag{2.20}$$

Analogamente ao caso da teoria de gauge para o grupo $U(1)$, essa expressão se reduz a

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \,, \tag{2.21}$$

já que o grupo é abeliano. Vale ressaltar que, como em qualquer teoria abeliana, $F^a{}_{\mu\nu}$ é invariante sob uma transformação de gauge. Além disso, podemos ver que

$$[D_\mu, D_\nu] = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} \, P_a \,. \tag{2.22}$$

Essa relação é muito próxima à regra de comutação das teorias de gauge usuais, onde a não-comutatividade é proporcional ao tensor intensidade do campo. Entretanto, há neste caso uma interpretação mais profunda, que relaciona as estruturas do modelo de gauge à geometria do espaço-tempo, como veremos adiante.

2.1.2 Conexões e Estruturas Geométricas

A presença das tetradas permite definir naturalmente conexões no espaço-tempo. Podemos, por exemplo, definir a conexão linear de Cartan [28]

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu \,, \tag{2.23}$$

que é uma conexão que apresenta torção, mas possui curvatura nula. Assim, a torção do espaço-tempo, identificada à torção desta conexão, é dada por

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \,. \tag{2.24}$$

É fácil ver, portanto, que o tensor intensidade $F^a{}_{\mu\nu}$ se relaciona com a torção $T^\rho{}_{\mu\nu}$ através de

$$F^a{}_{\mu\nu} = c^2 h^a{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu} \ . \tag{2.25}$$

Assim, as relações de comutação (2.22) podem ser reescritas como

$$[D_\mu, D_\nu] = T^\rho{}_{\mu\nu} D_\rho \tag{2.26}$$

o que mostra que a torção desempenha também o papel da não holonomia da derivada covariante de gauge.

A presença da conexão de Cartan resulta na introdução de uma derivada covariante espaço-temporal, que atua, por exemplo, num vetor covariante como

$$\nabla_\nu \, V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\theta{}_{\mu\nu} \, V_\theta \ . \tag{2.27}$$

Quando atuamos a derivada covariante de Cartan na tetrada, obtemos que

$$\nabla_\nu \, h^a{}_\mu = \partial_\nu h^a{}_\mu - h^a{}_\rho \, \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \equiv 0 \ . \tag{2.28}$$

Ou seja, ela se anula identicamente, o que é uma consequência direta da definição (2.23). O fato da derivada de Cartan transportar paralelamente a tetrada é denominada de condição de paralelismo absoluto e a teoria resultante é conhecida como teleparalelismo [16]. Portanto, quando introduzimos uma teoria de gauge para o grupo das translações num determinado espaço, estamos atribuindo também ao espaço uma estrutura teleparalela, ou seja, uma variedade 4-dimensional de Weitzenböck está sempre presente quando é considerada uma teoria de gauge deste tipo.

Calculando explicitamente a curvatura da conexão de Cartan, vemos que ela é identicamente nula:

$$R^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\theta{}_{\rho\nu} + \Gamma^\theta{}_{\sigma\mu} \, \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0 \ . \tag{2.29}$$

Assim, a conexão de Cartan atribui ao espaço de Weitzenböck uma torção diferente de zero e uma curvatura nula, o que corresponde a dizer que a única grandeza responsável pela existência de campo gravitacional no espaço é a torção.

Entretanto, distintamente da interpretação corrente da RG, devemos separar a noção de espaço e conexão, já que do ponto de vista formal, curvatura e torção são propriedades de uma dada conexão e muitas conexões podem ser definidas num mesmo espaço [29]. Estritamente falando, não existe o conceito de torção e curvatura de um espaço, mas somente torção e curvatura de conexões. Isso se torna evidente quando observamos que diferentes partículas sentem diferentes conexões e possuem, portanto, diferentes trajetórias no espaço-tempo. No contexto da RG, porém, o conceito de universalidade permite interpretar a curvatura da conexão de Levi-Civita como sendo a curvatura do espaço-tempo, fazendo com que todas as partículas sintam seus efeitos da mesma forma. Em outras palavras, no cenário da RG é possível interpretar a conexão de Levi-Civita e sua curvatura como propriedades intrínsecas do espaço.

De fato, ao lado dessa estrutura teleparalela que acabamos de definir, existirá também uma estrutura riemanniana, induzida pela presença da tetrada não trivial. Da propriedade de ortogonalidade das tetradas

$$h^a{}_\mu \, h_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \quad \text{e} \quad h^a{}_\mu \, h_b{}^\mu = \delta^a{}_b \,, \tag{2.30}$$

observamos que enquanto os índices de álgebra são levantados e abaixados por uma métrica plana η_{ab}, os índices tensoriais devem ser obrigatoriamente levantados e abaixados por uma métrica riemanniana, dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, h^a{}_\mu \, h^b{}_\nu \,. \tag{2.31}$$

Esta métrica possibilita a introdução de uma outra conexão métrica, dada por:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho} \left[\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right] \,. \tag{2.32}$$

Esta é a conexão de Levi-Civita. Ela apresenta curvatura diferente de zero, e torção nula, já que é simétrica nos dois últimos índices. Podemos identificar sua curvatura

$$\overset{\circ}{R}{}^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\rho\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\sigma\mu} \, \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \tag{2.33}$$

como a curvatura induzida no espaço-tempo pela presença do campo gravitacional. A conexão de Levi-Civita irá definir uma outra derivada covariante no espaço-tempo, a qual atuando num vetor covariante V_μ, é

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} V_\theta \,. \tag{2.34}$$

Podemos facilmente verificar que ambas as conexões $\Gamma^\theta{}_{\mu\nu}$ and $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}$ preservam a métrica, ou seja

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu g_{\rho\mu} = \nabla_\nu g_{\rho\mu} = 0 \,. \tag{2.35}$$

A relação entre as duas conexões pode ser obtida substituindo a métrica $g_{\mu\nu}$ na expressão da conexão de Levi-Civita (2.32). O resultado é

$$\Gamma^\theta{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} + K^\theta{}_{\mu\nu} \,. \tag{2.36}$$

Substituindo $\Gamma^\theta{}_{\mu\nu}$ dado pela expressão (2.36), na expressão (2.29) para a curvatura da conexão de Cartan , obtemos a relação entre as curvaturas das conexões $\Gamma^\theta{}_{\mu\nu}$ e $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}$:

$$R^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \overset{\circ}{R}{}^\theta{}_{\rho\mu\nu} + Q^\theta{}_{\rho\mu\nu} \equiv 0 \,. \tag{2.37}$$

Nessa expressão,

$$Q^\theta{}_{\rho\mu\nu} = D_\mu K^\theta{}_{\rho\nu} - D_\nu K^\theta{}_{\rho\mu} + K^\sigma{}_{\rho\nu} K^\theta{}_{\sigma\mu} - K^\sigma{}_{\rho\mu} K^\theta{}_{\sigma\nu} \tag{2.38}$$

com

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu - K_\mu \tag{2.39}$$

a derivada teleparalela, atuando nos três índices de $K^\sigma{}_{\rho\mu}$. A equação (2.37) possui uma interessante interpretação: a contribuição riemanniana $\overset{\circ}{R}{}^\theta{}_{\rho\mu\nu}$, vinda da conexão de Levi-Civita, é tal que compensa exatamente a contribuição $Q^\theta{}_{\rho\mu\nu}$, vinda da conexão de Cartan, resultando num tensor de curvatura *total* $R^\theta{}_{\rho\mu\nu}$, identicamente nulo. Entre todas as possíveis conexões que podem ser definidas no espaço-tempo, a conexão de Cartan é a única que satisfaz este vínculo, que é de vital importância para a equivalência entre as descrições teleparalela e riemanniana da gravitação.

2.1.3 Dinâmica e Equações de Campo

Obtemos a dinâmica dos campos de gauge da forma usual, definindo uma lagrangeana quadrática no tensor intensidade de campo

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\,F^a{}_{\mu\nu}\,F^b{}_{\theta\rho}\,g^{\mu\theta}N_{ab}{}^{\nu\rho}\right] , \tag{2.40}$$

onde $h = \det(h^a{}_\nu)$, e G é a constante gravitacional. A princípio, deveríamos ter

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}\, g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab}\, h_c{}^\nu\, h^{c\rho} . \tag{2.41}$$

Entretanto, devido à presença da tetrada, índices de álgebra e índices do espaço-tempo podem ser convertidos uns nos outros. Consequentemente, devemos incluir todas as permutações cíclicas de a, b e c. Isso significa que, na verdade,

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}\, h_c{}^\nu\, h^{c\rho} + 2\, h_a{}^\rho\, h_b{}^\nu - 4\, h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho . \tag{2.42}$$

Substituindo (2.42) em (2.40) obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}F^a{}_{\mu\nu}\,F^b{}_{\theta\rho}\,g^{\mu\theta}\left[\frac{1}{4}\,h_d{}^\nu\, h^{d\rho}\,\eta_{ab} + \frac{1}{2}\,h_a{}^\rho\, h_b{}^\nu - h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho\right] \tag{2.43}$$

que resulta na lagrangeana quadrática na torção

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\,T^\rho{}_{\mu\nu}\,T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,T^\rho{}_{\mu\nu}\,T^{\nu\mu}{}_\rho - T_{\rho\mu}{}^\rho\,T^{\nu\mu}{}_\nu\right] \tag{2.44}$$

quando consideramos a relação (2.25). A lagrangeana pode ser ainda escrita na forma compacta [25]

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\,S^{\rho\mu\nu}\,T_{\rho\mu\nu} , \tag{2.45}$$

onde

$$S^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\,T_\theta{}^{\mu\theta} + g^{\rho\mu}\,T_\theta{}^{\nu\theta}\right) \tag{2.46}$$

e

$$K^\theta{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[T_\mu{}^\theta{}_\nu + T_\nu{}^\theta{}_\mu - T^\theta{}_{\mu\nu}\right] \tag{2.47}$$

é o tensor de contorção.

Para deduzir as equações de campo teleparalelas, devemos realizar, em princípio, a variação funcional da lagrangeana com respeito ao potencial de gauge $B^a{}_\mu$. Entretanto, considerando as igualdades

$$\frac{\partial}{\partial B^a{}_\mu} = c^{-2}\frac{\partial}{\partial h^a{}_\mu} \tag{2.48}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma B^a{}_\mu)} = c^{-2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\mu)} \tag{2.49}$$

podemos realizar a variação funcional de $\mathcal{L}$ em (2.43) com respeito a $h^a{}_\mu$. Consideremos, então, as expressões

$$\frac{\partial h_j{}^\mu}{\partial h^i{}_\rho} = -h_j{}^\rho\, h_i{}^\mu\ , \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\theta}}{\partial h^i{}_\rho} = -h_j{}^\rho\, h_i{}^\mu\, h^{j\theta} - h_j{}^\mu\, h^{j\rho} h_i{}^\theta \tag{2.51}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{ab}{}^{\nu\lambda}}{\partial h^i{}_\rho} &= -\eta_{ab}\, g^{\rho\lambda} h_i{}^\nu - \eta_{ab}\, g^{\rho\nu}\, h_i{}^\lambda - 2h_a{}^\rho\, h_i{}^\lambda\, h_b{}^\nu\ - 2h_a{}^\lambda\, h_b{}^\rho\, h_i{}^\nu \\ &+4h_a{}^\rho\, h_i{}^\nu\, h_b{}^\lambda + 4h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho\, h_i{}^\lambda\ .\end{aligned}$$

Obtemos assim

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\rho}) - \frac{4\pi G}{c^4}\ (ht_a{}^\rho) = 0\ , \tag{2.52}$$

com

$$t_a{}^\rho\ = -\frac{1}{h}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{c^4}{4\pi G}\, h_a{}^\sigma\ S^{\mu\nu\rho}T_{\mu\nu\sigma} - h_a{}^\rho L \tag{2.53}$$

o tensor energia-momento do campo gravitacional e

$$L = h^{-1}\mathcal{L}\quad ;\quad S_a{}^{\sigma\rho} = h_{a\theta}S^{\theta\sigma\rho}\ . \tag{2.54}$$

A equação (2.52) é do tipo de Yang-Mills, com $t_a{}^\rho$ desempenhando o papel de uma corrente do campo de gauge [30]. Observemos que escrito desta forma, ou seja, com um índice espaço-temporal e um índice de Lorentz, o tensor $t_a{}^\rho$ é verdadeiro, já que é formado por grandezas que se transformam como tensores verdadeiros. Veremos em seguida que esta propriedade será perdida quando $t_a{}^\rho$ for escrito em termos de índices do espaço-tempo somente.

A lei de conservação de $t_a{}^\rho$ pode ser obtida diretamente de (2.52). Tomando a derivada ordinária de toda a expressão e considerando a antissimetria de $S_a{}^{\sigma\rho}$ nos dois últimos índices, chegamos em

$$\partial_\rho(ht_a{}^\rho) = 0\ , \tag{2.55}$$

ou alternativamente

$$D_\rho t_a{}^\rho = 0 \tag{2.56}$$

com

$$D_\rho = \partial_\rho + \Gamma_\rho - K_\rho \tag{2.57}$$

atuando apenas no índice espaço-temporal. Vemos claramente que esta lei é covariante como um todo já que a derivada o é, e o tensor $t_a{}^\rho$ é verdadeiro.

Podemos colocar a equação de campo (2.52) numa nova forma, escrita agora somente em termos de índices do espaço-tempo. Multiplicando (2.52) por $h_\nu{}^a$ chegamos em

$$\partial_\sigma(hS_\nu{}^{\sigma\rho}) - \frac{4\pi G}{c^4}\, T_\nu{}^\rho = 0 \tag{2.58}$$

com

$$T_\nu{}^\rho = \frac{hc^4}{4\pi G}\left[S_\lambda{}^{\sigma\rho}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \frac{4\pi G}{c^4}\delta_\nu{}^\rho L\right] \tag{2.59}$$

o (pseudo) tensor energia–momento do campo gravitacional. Vemos que, neste caso, $T_\nu{}^\rho$ é de fato um pseudo-tensor, já que é função explícita da conexão de Cartan. Além disso, podemos verificar que $T_\nu{}^\rho$ coincide exatamente com o (pseudo) tensor energia-momento canônico do campo gravitacional. A lei de conservação (2.56) assume agora a forma

$$\partial_\rho\, T_\nu{}^\rho = 0\ . \tag{2.60}$$

O fato do tensor não ser verdadeiro, e sim um pseudo-tensor, e a derivada ser ordinária se compensam de forma a manter a lei covariante.

2.2 Equivalência entre TGT e RG

No cenário da RG, a dinâmica do campo gravitacional é descrita através do princípio variacional aplicado à lagrangeana de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\,\overset{\circ}{R} \tag{2.61}$$

onde $\overset{\circ}{R} = g^{\mu\nu}\overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ é a curvatura escalar da conexão de Levi-Civita, e $g = \det(g_{\mu\nu})$. Esta lagrangeana, que em princípio depende somente da conexão de Levi-Civita, pode ser escrita numa forma alternativa, dependendo somente da conexão de Cartan. Assim, substituindo a curvatura escalar pelo seu análogo teleparalelo, ou seja, calculando a curvatura escalar a partir da expressão (2.37), podemos ver que, a menos de divergências, obtemos exatamente a expressão (2.44)

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\, T^{\rho}{}_{\mu\nu}\, T_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, T^{\rho}{}_{\mu\nu}\, T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T_{\rho\mu}{}^{\rho}\, T^{\nu\mu}{}_{\nu}\right], \tag{2.62}$$

ou seja, a lagrangeana de Einstein-Hilbert resulta na lagrangeana da teoria de gauge para o grupo das translações, a qual é quadrática na torção.

É importante ressaltar que a lagrangeana (2.44) foi obtida sem a imposição de invariância local de Lorentz. Tal condição, utilizada por alguns autores na dedução de tal lagrangeana [31], suscitaram algumas críticas, que evidentemente não se aplicam neste contexto.

A equivalência entre a lagrangeana (2.44) da teoria de gauge para o grupo das translações e a lagrangeana (2.61) da RG é um forte indício de que as equações de campo das duas teorias também sejam equivalentes. De fato, após um cálculo extremamente longo, obtém-se que a equação de campo teleparalela (2.58), com seus índices todos espaço-temporais, é totalmente análoga à equação de campo da RG

$$\frac{h}{2}\left(\overset{\circ}{R}_{\rho\theta} - \frac{1}{2}\, g_{\rho\theta}\, \overset{\circ}{R}\right) = 0\,. \tag{2.63}$$

Devemos enfatizar que as equaçõs de campo (2.58) são simétricas em seus dois índices livres, apesar de tal simetria não ser explícita, condição necessária para sua equivalência com as equações de Einstein, que são evidentemente simétricas.

Podemos finalmente dizer que a presença de uma tetrada não trivial, resultante de uma teoria de gauge para o grupo das translações, induz uma estrutura teleparalela e uma estrutura riemanniana no espaço-tempo, que juntas caracterizam completamente a geometria deste espaço. Na ausência de gravitação, a tetrada se torna trivial, a métrica induzida $g_{\mu\nu}$ se torna a métrica de Minkowski e tanto a curvatura $\overset{\circ}{R}{}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu}$ como a torção $T^{\theta}{}_{\mu\nu}$ se anulam identicamente. Isso significa que não é possível escolher uma torção nula sem considerar uma curvatura nula simultaneamente, já que essas grandezas correspondem a diferentes manifestações de um mesmo campo gravitacional.

Devemos, entretanto, reafirmar que a curvatura e a torção, as quais nos referimos, são propriedades geométricas de diferentes conexões. Não existe uma teoria equivalente à RG que considere uma conexão que apresente simultaneamente curvatura e torção. As teorias que consideram conexões deste tipo, conhecidas como teorias de Riemann-Cartan, diferem crucialmente da teoria teleparalela, já que suas previsões fogem ao escopo da RG. Podemos concluir, então, que a RG não assume torção nula. Na realidade, esta torção está presente no espaço-tempo mas a RG simplesmente não a utiliza em sua descrição da gravitação.

A equivalência entre a dinâmica do campo gravitacional descrito pela RG e o teleparalelismo, nos leva a crer que existe realmente uma descrição alternativa para a gravitação, que considera somente o conceito de torção do espaço. E neste sentido, a conexão de Cartan pode ser considerada um tipo de conexão dual à conexão de Levi-Civita, e a equivalência entre a RG e o teleparalelismo corresponde a um tipo de simetria dual apresentada pela gravitação.

Entretanto, como vemos, a descrição da interação gravitacional requer apenas uma das duas estruturas, podendo ser descrita alternativamente pela geometria riemanniana ou pela geometria teleparalela.

Capítulo 3

Partículas Sem Spin na Presença de um Campo Gravitacional

3.1 Força de Lorentz Gravitacional

Dentro do contexto da TGT, apresentado no Capítulo 2, vamos considerar o movimento de uma partícula de massa m na presença de um campo gravitacional. À semelhança do que ocorre com o eletromagnetismo [32], a interação gravitacional será descrita pela inclusão, na ação livre, do termo de acoplamento

$$-c^{-2} \int_a^b B_a{}^\mu \, p_\mu \, dx^a \, , \tag{3.1}$$

o qual é integrado ao longo da imagem no espaço tangente da linha de mundo da partícula. Esse termo foi construído em analogia à interação eletromagnética, já que considera o produto do potencial de gauge $B_a{}^\mu$ pela carga de Noether relativa às translações, isto é, às transformações de gauge [33, 34]. Em outras palavras, p_μ é o 4-momento da partícula

$$p_\mu = m \, c \, u_\mu \, , \tag{3.2}$$

onde u_μ é sua 4-velocidade no espaço-tempo, definida por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \, , \tag{3.3}$$

com

$$ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu)^{1/2} \tag{3.4}$$

o intervalo invariante no espaço-tempo.

A ação total será, portanto,

$$S = \int_a^b \left[-m\, c - \frac{m}{c}\, B_a{}^\mu\, u_\mu\, u^a \right] d\sigma\ , \tag{3.5}$$

onde

$$d\sigma = (\eta_{ab} dx^a\, dx^b)^{1/2} \tag{3.6}$$

é o intervalo invariante no espaço tangente, e

$$u^a = \frac{dx^a}{d\sigma} = \frac{Dx^a}{ds} \tag{3.7}$$

é a 4-velocidade no espaço tangente, que se relaciona à 4-velocidade no espaço-tempo através de

$$u^\nu = h_a{}^\nu u^a\ . \tag{3.8}$$

Vale ainda lembrar que a derivada Dx^a que aparece em (3.7) é a própria derivada de gauge, isto é,

$$Dx^a = h^a{}_\mu dx^\mu\ . \tag{3.9}$$

Além disso, é importante mencionar que estamos assumindo a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional, como estabelecido pelo princípio da equivalência fraco [35, 36].

Observe que estamos considerando a projeção da trajetória da partícula no espaço tangente, que é um espaço de Minkowski. Esta escolha foi tomada para que se mantivesse a analogia com o eletromagnetismo, que considera o movimento das partículas no espaço plano. No caso gravitacional, o espaço tangente é o único espaço plano em questão, e a partir dele deve ser construída tal ação.

Calculando a variação funcional da ação (3.5), obtemos a seguinte equação de movimento

$$h^a{}_\mu\, \frac{du_a}{ds} = c^{-2}\, F^a{}_{\mu\nu}\, u_a\, u^\nu\ , \tag{3.10}$$

que é uma equação de força análoga à força de Lorentz do eletromagnetismo. Ela fornece a trajetória de uma partícula na presença do campo gravitacional, representado pelo potencial $B^a{}_\mu$. Podemos observar que, ao contrário do eletromagnetismo, onde a razão e/m aparece como coeficiente do tensor intensidade do campo, no caso da gravitação, a massa desaparece completamente da equação de movimento. Isso ocorre devido à equivalência entre a massa gravitacional e a massa inercial assumida previamente, e é reflexo da universalidade da interação gravitacional.

3.2 Equação da Geodésica Versus Equação de Força

Consideremos novamente a equação da força de Lorentz gravitacional:

$$h^a{}_\mu \, \frac{du_a}{ds} = c^{-2} \, F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \, . \tag{3.11}$$

Nosso próximo passo será estudar as possíveis interpretações que esta equação pode assumir, dependendo do contexto a ser considerado. Podemos escrevê-la em termos das magnitudes do espaço-tempo de Weitzenböck ou do espaço-tempo de Riemann, o que resultará respectivamente nas descrições teleparalela e métrica do movimento de uma partícula escalar na presença de gravitação.

3.2.1 Torção: Equação de Força

Consideremos primeiramente o contexto do teleparalelismo. Podemos transformar os índices de álgebra de (3.11) em índices espaço-temporais de forma a obter uma equação escrita somente em termos da conexão de Cartan. Assim, tomando (2.25) e (3.8), obtemos

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu = T_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu \, . \tag{3.12}$$

O lado esquerdo desta equação corresponde à derivada covariante de Cartan de u_ν ao longo da linha de mundo da partícula. Portanto, a torção no lado direito desempenha o papel de uma força externa, o que nos faz concluir que partículas sem spin não seguem geodésicas no espaço de Weitzenböck. A equação (3.12) pode ser reescrita na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\nu\mu}\, u^\theta\, u^\nu = 0 \,. \tag{3.13}$$

Porém, como $\Gamma_{\theta\nu\mu}$ não é simétrica nos dois últimos índices, seu lado esquerdo não é a expressão da derivada covariante, não sendo, portanto, a equação de uma geodésica. Podemos dizer que a equação que descreve o movimento de partículas sem spin no contexto do teleparalelismo é uma equação de força. De acordo com esta abordagem, portanto, o único efeito do campo gravitacional é induzir a presença de torção no espaço-tempo e esta torção determina a trajetória da partícula, atuando como uma força externa.

3.2.2 Curvatura: Equação da Geodésica

Nosso objetivo agora é obter a equação (3.11) escrita em termos das grandezas da RG, mais precisamente, em termos da conexão de Levi-Civita somente. Para isso, transformaremos os índices locais de Lorentz em índices espaço-temporais. Obtemos, como anteriormente ,

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu}\, u^\theta\, u^\nu = T_{\theta\mu\nu}\, u^\theta\, u^\nu \,. \tag{3.14}$$

Considerando a simetria de $u^\theta\ u^\nu$ sob a troca $(\theta \leftrightarrow \nu)$, podemos reescrever (3.14) na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu}\, u^\theta\, u^\nu = K_{\mu\theta\nu}\, u^\theta\, u^\nu \,. \tag{3.15}$$

Considerando então a antissimetria de $K_{\mu\theta\nu}$ nos dois primeiros índices, e utilizando a expressão (2.36) para expressar $\Gamma_{\mu\theta\nu} - K_{\mu\theta\nu}$, chegamos em

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\mu\nu}\, u^\theta\, u^\nu = 0 \,. \tag{3.16}$$

Esta é exatamente a equação da geodésica da RG, que representa o movimento de partículas sem spin como geodésicas no espaço-tempo riemanniano. Assim, o único efeito da presença do campo gravitacional é induzir uma curvatura no espaço-tempo, que determina univocamente a trajetória de uma partícula sem spin no mesmo, através da equação da geodésica.

3.3 O Princípio da Equivalência

Vamos discutir aqui como se manifesta o princípio de equivalência nos dois contextos estudados. Consideremos primeiramente a equação da trajetória de uma partícula sem spin no espaço de Weitzenböck:

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\nu\mu}\, u^\theta\, u^\nu = 0\,. \tag{3.17}$$

Num sistema de coordenadas localmente inercial, a derivada do tensor métrico se anula, e com isso pode-se verificar facilmente que a conexão de Cartan $\Gamma_{\theta\nu\mu}$ torna-se antissimétrica nos dois primeiros índices. Assim, nesse sistema de coordenadas, devido à simetria de $u^\theta\, u^\nu$ na troca $(\theta \leftrightarrow \nu)$, vemos que o segundo termo do lado esquerdo de (3.17) se anula e a mesma se torna uma equação de movimento de uma partícula livre. Esta é a versão teleparalela do princípio de equivalência (forte).

Por outro lado, consideremos a equação da geodésica da RG:

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\mu\nu}\, u^\theta\, u^\nu = 0\,. \tag{3.18}$$

Num sistema localmente inercial, a primeira derivada do tensor métrico se anula e com isso a conexão de Levi-Civita também será nula. Portanto, a equação (3.18) torna-se também a equação de movimento de uma partícula livre. Esta é a versão usual para o princípio de equivalência (forte) da RG [36].

3.4 Considerações Finais

A consistência das duas descrições é verificada calculando-se, por exemplo, o limite de campo gravitacional fraco. De fato, podemos facilmente verificar que ambas as equações (3.12) e (3.17) para velocidades suficientemente pequenas resultam no limite newtoniano [36]

$$\phi = -\frac{GM}{r}\,, \tag{3.19}$$

com ϕ o potencial gravitacional de Newton.

Outro fato interessante a ressaltar é que a ação (3.5) foi construída seguindo-se os mesmos passos do caso eletromagnético, ou seja, introduzindo-se um termo de acoplamento na ação da partícula livre. Notemos agora o seguinte: levando-se em conta o vínculo

$$h_a{}^\mu \, u^a \, u_\mu = 1 \; , \tag{3.20}$$

a ação (3.5) pode ser reescrita na forma

$$S = - \int_a^b \left[m \, c \, h_a{}^\mu \, u^a \, u_\mu + \frac{m}{c} \, B_a{}^\mu \, u_\mu \, u^a \right] d\sigma \; . \tag{3.21}$$

Substituindo-se

$$h_a{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} - c^{-2} B_a{}^\mu \; , \tag{3.22}$$

e fazendo uso da relação

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} \, u^a \, u_\mu \; , \tag{3.23}$$

obtemos

$$S = - \int_a^b \left(m \, c \, \frac{ds}{d\sigma} \right) d\sigma \; , \tag{3.24}$$

ou seja,

$$S = - \int_a^b m \, c \, ds \; . \tag{3.25}$$

Esta é a ação usual de uma partícula de massa m na presença de uma campo gravitacional. Sua variação funcional resulta diretamente tanto na equação da geodésica (3.16) da RG, como na equação de força (3.12) do teleparalelismo. Entretanto, apesar das ações (3.5) e (3.25) corresponderem às mesmas trajetórias físicas, suas interpretações resultam ser completamente diferentes. Enquanto (3.5) descreve a interação gravitacional de forma análoga à interação eletromagnética, com o campo gravitacional representado pelos potenciais de gauge $B^a{}_\mu$, a ação (3.25) considera o espaço-tempo induzido pela presença de tetradas, com a métrica representando o campo gravitacional, de acordo com a descrição dada pela RG.

Capítulo 4

Campo Escalar e Gravitação

Pretendemos, neste capítulo, explorar como se dá a interação entre o campo escalar e a gravitação, fazendo um estudo comparativo entre as descrições métrica e teleparalela da gravitação. Assim, estudaremos o acoplamento entre a curvatura e a torção com o campo escalar no contexto de uma teoria clássica de campos [37].

4.1 Campo Escalar no Contexto da Relatividade Geral

4.1.1 O Acoplamento Minimal

Revisemos, inicialmente, a descrição da interação gravitacional com o campo escalar no contexto da RG. Ela se baseia fundamentalmente na aplicação de um acoplamento minimal à dinâmica do campo escalar livre, ou seja, do campo escalar na ausência de gravitação.

Consideremos a lagrangeana de um campo escalar no espaço de Minkowski [38]

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\left[\eta^{ab}\,\partial_a\phi\,\partial_b\phi - m^2\phi^2\right] . \tag{4.1}$$

A estrutura riemanniana do espaço-tempo será considerada na dinâmica do campo escalar através da prescrição do acoplamento minimal usualmente adotado:

$$\eta^{ab} \quad\longrightarrow\quad g^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

$$\partial_a \quad\longrightarrow\quad \overset{\circ}{\nabla}_\mu \; , \tag{4.3}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica riemanniana e $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante de Levi-Civita, definida em (2.34), que no caso do campo escalar se reduz à derivada ordinária. Tal regra nos permite encontrar, a partir da lagrangeana livre do campo escalar, sua lagrangeana na presença do campo gravitacional. Após esta substituição, obtemos

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - m^2\phi^2\right] . \tag{4.4}$$

Obervemos que o fator $\sqrt{-g}$ foi introduzido em (4.4), já que na lagrangeana livre (4.1) existe implícito o fator $\sqrt{-\eta} = 1$, com $\eta = \det(\eta_{ab})$.

As equações de campo podem ser obtidas através das equações de Euler-Lagrange aplicadas à lagrangeana (4.4). Com ajuda das relações

$$\partial_\mu\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\,g^{\rho\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda} \equiv \sqrt{-g}\,\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\rho} , \tag{4.5}$$

chegamos em

$$\overset{\circ}{\Box}\phi + m^2\phi = 0 , \tag{4.6}$$

onde

$$\overset{\circ}{\Box}\phi = \overset{\circ}{\nabla}_\mu\,\partial^\mu\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\rho\mu}\,\partial_\rho\phi\right) \tag{4.7}$$

é o operador de Laplace-Beltrami de ϕ. É importante salientar que a equação de campo (4.6) pode também ser obtida aplicando a prescrição do acoplamento minimal diretamente às equações do campo escalar no espaço de Minkowski.

Consideremos agora um sistema de coordenadas localmente inercial. Neste sistema, a conexão de Levi-Civita se anula e o operador de Laplace-Beltrami torna-se o d'Alambertiano livre. Essa é a versão usual do princípio de equivalência forte [36].

4.1.2 Campo Escalar como Fonte de Curvatura

Nosso próximo passo será estudar o campo escalar como fonte de gravitação. Tomemos, então, a lagrangeana total do sistema

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi , \tag{4.8}$$

Vemos que, novamente neste caso, o fator $\eta = \det(\eta_{ab}) = 1$, presente na lagrangeana (4.1), deve ser substituído por $h = \det(h^a{}_\mu)$. Observemos ainda que, no caso específico do campo escalar,

$$D_a\phi = h_a{}^\mu \, \partial_\mu \phi \, . \tag{4.15}$$

As equações de campo podem ser obtidas substituindo-se (4.14) na equação de Euler-Lagrange. Usando-se as identidades

$$\partial_\mu h = h h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\rho \equiv h \Gamma^\rho{}_{\rho\mu} \, , \tag{4.16}$$

obtemos

$$\Box\phi + m^2\phi = 0 \, , \tag{4.17}$$

com

$$\Box\phi = (\partial_\mu + \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}) \, \partial^\mu\phi \equiv h^{-1} \, \partial_\rho \, (h \, \partial^\rho\phi) \tag{4.18}$$

a versão teleparalela do operador de Laplace-Beltrami. Na expressão deste operador, $(\partial_\mu + \Gamma^\rho{}_{\rho\mu})$ não representa a expressão da derivada covariante de Cartan de $\partial^\mu\phi$, pois $\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}$ não é simétrica nos dois últimos índices. Entretanto, se quisermos forçar o aparecimento da derivada covariante de Cartan no operador de Laplace-Beltrami, podemos usar a expressão

$$\Gamma^\rho{}_{\rho\mu} = T^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \, ,$$

e dessa forma obter

$$\Box\phi = (\nabla_\mu + T^\rho{}_{\mu\rho}) \, \partial^\mu\phi \, . \tag{4.19}$$

com

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \tag{4.20}$$

a derivada covariante de Cartan. Considerando ainda a identidade

$$T^\rho{}_{\mu\rho} = -K^\rho{}_{\mu\rho} \, , \tag{4.21}$$

a versão teleparalela para a equação de campo escalar pode ser finalmente dada por

$$D_\mu \partial^\mu\phi + m^2\phi = 0 \, , \tag{4.22}$$

com a derivada covariante (4.12) aplicada agora ao campo vetorial $\partial^\mu \phi$. Vemos também que, analogamente ao caso riemanniano, a equação de campo pode ser obtida diretamente através da aplicação da prescrição do acoplamento (4.12) à equação de campo livre.

Podemos reescrever (4.22) de uma nova forma

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = -T^\rho{}_{\mu\rho} \partial^\mu \phi \equiv K^\rho{}_{\mu\rho} \partial^\mu \phi \, . \qquad (4.23)$$

A expressão (4.23) enfatiza o papel de força desempenhado pela torção na equação de campo, analogamente ao que ocorre na força gravitacional de Lorentz, deduzida no capítulo anterior. Finalmente, observamos que o campo escalar, através de sua derivada, se acopla e portanto sente a torção do espaço.

Consideremos agora as expressões da métrica (2.31) e da conexão de Cartan (2.23). Podemos obter a partir delas a relação

$$\Gamma_{\rho\lambda\mu} = -\Gamma_{\lambda\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} \, . \qquad (4.24)$$

Assim, num sistema de coordenadas localmente inercial, onde $\partial_\mu g_{\rho\lambda} = 0$, temos que a conexão de Cartan se torna antissimétrica nos dois primeiros índices. Consequentemente, $\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}$ se anula, e o operador de Laplace-Beltrami, em sua versão teleparalela, resulta no d'Alambertiano livre. Esta é a versão teleparalela do princípio de equivalência forte. É importante observar que, apesar de $\Gamma^\rho{}_{\rho\mu} = 0$, a torção não se anula pois

$$T^\rho{}_{\rho\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \, .$$

Finalmente, devemos justificar a escolha do acoplamento teleparalelo entre o campo escalar e a gravitação. Somente este acoplamento permite a equivalência total entre a descrição riemanniana e a descrição teleparalela desta interação. De fato, consideremos a lagrangeana teleparalela (4.14). Substituindo a expressão da derivada covariante (4.15) e tomando a definição da métrica (2.31), vemos que esta se reduz à própria lagrangeana da RG. Da mesma forma, se tomarmos as equações de campo teleparalelas e considerarmos a relação (2.36) entre as conexões, vemos que o operador de Laplace-Beltrami teleparalelo se reduz ao operador de Laplace-Beltrami riemanniano, e assim obtemos as mesmas equações de campo da RG. Portanto, adotar a prescrição teleparalela de acoplamento (4.12), é totalmente equivalente a adotar a prescrição riemanniana (4.3).

4.2.2 Campo Escalar como Fonte de Torção

Consideremos agora o campo escalar como fonte de gravitação. A lagrangeana total do sistema constituído pelo campo escalar na presença do campo gravitacional é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi \,, \tag{4.25}$$

onde agora $\mathcal{L}_G$ é dada por (2.44), e $\mathcal{L}_\phi$ por (4.14). Através do princípio variacional aplicado à lagrangeana (4.25), obtemos a versão teleparalela das equações de campo gravitacional

$$\partial_\rho \, S_\mu{}^{\nu\rho} - \frac{4\pi G}{c^4} \, t_\mu{}^\nu = \frac{4\pi G}{c^4} \, \mathcal{T}_\mu{}^\nu \,, \tag{4.26}$$

onde $S_\mu{}^{\nu\rho}$ é dado em (2.46), $t_\mu{}^\nu$ é o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional dado em (2.59), e

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = h^a{}_\mu \left(-\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta h^a{}_\nu} \right) \tag{4.27}$$

é o tensor energia-momento do campo escalar. Assim, na versão teleparalela da gravitação, o campo escalar, através de seu tensor energia-momento, pode ser fonte de torção. Este resultado está em desacordo com a crença usual de que apenas distribuições de spin podem produzir torção no espaço-tempo [39, 40]. Entretanto, outros autores já concluíram que matéria escalar é de fato uma possível fonte de torção [41]. Assim, vemos que este é ainda uma problema controverso e em aberto.

4.3 Considerações Finais

Ao contrário da visão corrente de que apenas partículas com spin podem sentir a geometria teleparalela, sendo a matéria escalar apta a somente detectar a geometria métrica, chegamos aqui a um novo resultado: matéria escalar sente realmente a geometria teleparalela, se acoplando e agindo como fonte de torção. Isto é uma consequência direta da equivalência entre a descrição métrica e teleparalela da gravitação, e portanto, matéria escalar pode sentir alternativamente qualquer uma destas geometrias. Mostramos explicitamente que o campo escalar se acopla, através de sua derivada ordinária $\partial^\mu \phi$, à torção, e que através do seu tensor energia-momento, pode ser fonte de torção. Além disso, vimos que no cenário teleparalelo, a descrição da interação gravitacional não é geometrizada no sentido da RG, mas possui características das teorias de gauge [23], com a torção desempenhando o papel de força.

Como observação final, devemos dizer que o acoplamento teleparalelo aqui adotado, apesar de não ser minimal no sentido usual, é o acoplamento mais apropriado, pois mantém a total equivalência entre as duas descrições da interação gravitacional.

Capítulo 5

Campo Eletromagnético e Gravitação

A questão da interação do campo eletromagnético com a gravitação, quando o espaço-tempo é provido de torção, pode ser considerada ainda um problema em aberto. Acredita-se que no cenário das teorias de Riemann-Cartan, onde torção e curvatura coexistem, o eletromagnetismo não pode se acoplar à torção para que a invariância de gauge seja preservada. Isto porque, na presença de torção, a imposição da invariância de gauge impede a existência de uma prescrição de acoplamento minimal do eletromagnetismo com a gravitação. Assim, propõe-se que, neste contexto, o campo eletromagnético não produz nem sente torção, ou seja, a torção é considerada irrelevante para as equações de Maxwell [40].

Entretanto, se tal afirmação pode ser válida em nível macroscópico, quanticamente devemos esperar que haja uma interação entre fótons e torção. De fato, sob o ponto de vista perturbativo, um fóton pode virtualmente se desintegrar num par elétron-pósitron e como tais partículas são férmions massivos que se acoplam com a torção, o fóton sente, mesmo que de forma indireta, sua presença. Tal resultado nos leva a uma contradição. Se considerarmos que fenômenos macroscópicos podem ter uma interpretação baseada em médias do mesmo fenômeno sob o ponto de vista microscópico, então estas contribuições, vindas das interações entre o pósitron e o elétron com a gravitação, deveriam de alguma forma se cancelar e assim manter nula a interação entre o fóton e a gravitação. Mas isto não ocorre devido ao caráter puramente atrativo do campo gravitacional, que elimina a possibilidade do anulamento desta média. Assim, a hipótese de que fótons não se acoplam à torção deve ser reexaminada.

O objetivo deste capítulo é discutir o eletromagnetismo na presença de gravitação. Primeiramente, vamos contextualizar a interação eletromagnética na descrição riemanniana da gravitação e em seguida consideraremos tal descrição no cenário teleparalelo [42].

Consideremos primeiramente o campo eletromagnético livre, ou seja, na ausência de gravitação. Sua lagrangeana no espaço de Minkowski é dada por

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \,, \tag{5.1}$$

com F_{ab} o tensor intensidade do campo eletromagnético

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \tag{5.2}$$

e A_b os potenciais de gauge, que representam o campo eletromagnético. Realizando a variação funcional da ação correspondente com respeito à A_b, chegamos em

$$\partial_a F^{ab} = 0 \,. \tag{5.3}$$

Esta equação, junto à identidade de Bianchi

$$\partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0 \tag{5.4}$$

representam as equações de Maxwell no espaço plano. Considerando ainda o gauge de Lorentz,

$$\partial_a A^a = 0 \tag{5.5}$$

podemos reescrever a equação (5.3) como

$$\partial_c \partial^c A^a = 0 \,. \tag{5.6}$$

Temos aqui, portanto, os conceitos básicos do eletromagnetismo clássico, que tomaremos como ponto de partida para o estudo da interação entre o eletromagnetismo e a gravitação.

5.1 Campo Eletromagnético no Contexto da Relatividade Geral

5.1.1 O Acoplamento Minimal

A dinâmica do campo eletromagnético no cenário da RG é bem conhecida. Podemos obtê-la através da aplicação da prescrição do acoplamento minimal, que consiste em fazer as substituições

$$\eta^{ab} \rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{ab} h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} \tag{5.7}$$

$$\partial_a \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu} J_{ab} \, , \tag{5.8}$$

onde introduzimos o operador derivativo de Fock-Ivanenko $\mathcal{D}_\mu$ [43]. A conexão de spin $\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu}$ que aparece na definição (5.8) corresponde à própria conexão de Levi-Civita escrita na base das tetradas. Podemos facilmente ver que ela pode ser escrita como

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu} = h^a{}_\rho \overset{\circ}{\nabla}_\mu h^{b\rho} \, . \tag{5.9}$$

O operador J_{ab} corresponde ao gerador do grupo de Lorentz, que quando aplicado a campos de spin 1 assume a representação

$$(J_{ab})^c{}_d = i \left(\delta_a{}^c \eta_{bd} - \delta_b{}^c \eta_{ad} \right) \, . \tag{5.10}$$

É importante ressaltar que este operador atua apenas em índices locais de Lorentz, não 'enxergando' índices do espaço-tempo [44]. Assim, quando aplicado ao campo eletromagnético, o operador de Fock-Ivanenko assume a forma

$$\mathcal{D}_\mu A^a = \partial_\mu A^a + \overset{\circ}{\omega}{}^a{}_{b\mu} A^b \, . \tag{5.11}$$

Consideremos agora o operador de Fock-Ivanenko atuando na tetrada. Como esta grandeza corresponde a um vetor em relação ao índice de álgebra, devemos considerar a representação J_{ab} dada por (5.10). Assim,

$$\mathcal{D}_\mu h^a{}_\nu = \partial_\mu h^a{}_\nu + \overset{\circ}{\omega}{}^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu \, . \tag{5.12}$$

Substituindo a relação (5.9) em (5.12), obtemos

$$\mathcal{D}_\mu h^a{}_\nu = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho \, . \tag{5.13}$$

Este resultado nos leva a concluir que a derivada covariante total da tetrada, ou seja, a derivada que leva em conta tanto índices locais de Lorentz como índices tensoriais do espaço-tempo, se anula identicamente, isto é

$$\partial_\mu h^a{}_\nu + \overset{\circ}{\omega}{}^a{}_{b\mu}\, h^b{}_\nu - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu}\, h^a{}_\rho = 0 \,. \tag{5.14}$$

Como sabemos, índices tensoriais e locais de Lorentz são relacionados através da tetrada por

$$A^\mu = h_a{}^\mu\, A^a \tag{5.15}$$

onde introduzimos o campo A^μ, que se transforma agora como um vetor sob transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo. Assim, substituindo a relação (5.15) em (5.11), e considerando ainda a expressão (5.12), obtemos

$$\mathcal{D}_\mu A^a = h^a{}_\rho\, \overset{\circ}{\nabla}_\mu A^\rho \,. \tag{5.16}$$

Observemos, portanto, que a derivada covariante de Fock-Ivanenko aplicada a um vetor de Lorentz A^b é diretamente relacionada à derivada covariante de Levi-Civita do mesmo vetor, escrito agora com índices espaço-temporais, ou seja, A^μ. Em outras palavras, a derivada de Fock-Ivanenko possui uma versão espaço-temporal na RG, quando aplicada a campos de spin 1. Como veremos no próximo capítulo, o mesmo não ocorre quando este operador é aplicado a um campo de spin 1/2, pois não existem espinores com índices de espaço-tempo. O resultado (5.16) possibilita dizer que a prescrição de acoplamento minimal (5.8) é totalmente análoga à prescrição usual da RG,

$$\partial_a \to \overset{\circ}{\nabla}_\mu \equiv \partial_\mu + \overset{\circ}{\Gamma}_\mu \,. \tag{5.17}$$

Aplicando a prescrição no tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$, vemos que no espaço riemanniano ele se torna

$$F_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\nabla}_\mu A_\nu - \overset{\circ}{\nabla}_\nu A_\mu \,. \tag{5.18}$$

Devido à simetria da conexão de Levi-Civita nos dois últimos índices, os termos envolvendo conexões são cancelados e o tensor assume a mesma forma que no espaço plano, ou seja

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \, . \tag{5.19}$$

Assim, a lagrangeana do campo eletromagnético no espaço riemanniano resulta em

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \, . \tag{5.20}$$

As equações de campo obtidas da lagrangeana (5.20) são as conhecidas equações de Maxwell riemannianas

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} = 0 \, . \tag{5.21}$$

Considerando o gauge de Lorentz no espaço curvo

$$\overset{\circ}{\nabla}{}^\mu A_\mu = 0 \, , \tag{5.22}$$

a expressão (5.21) se reduz a

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}{}^\mu A_\nu - \overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\nu A_\mu = 0 \, . \tag{5.23}$$

Escritas nessa forma, as equações de Maxwell enfatizam o acoplamento entre o tensor de Ricci e o campo eletromagnético. Podemos ver ainda que as identidades de Bianchi no espaço riemanniano mantém sua forma original (5.4) do espaço plano, ou seja,

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \, . \tag{5.24}$$

5.1.2 Campo Eletromagnético como Fonte de Curvatura

Consideremos agora um sistema constituído de campos eletromagnético e gravitacional, representado pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{em} \, , \tag{5.25}$$

com $\mathcal{L}_g$ dado por (2.61) e $\mathcal{L}_{em}$ dado por (5.20). As equações de campo correspondentes são as equações de Einstein

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, \overset{\circ}{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\, \mathcal{T}_{\mu\nu} \, , \tag{5.26}$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento do campo eletromagnético, dado por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4}\left[F_{\mu}{}^{\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right] . \tag{5.27}$$

Verificamos, assim, que o campo eletromagnético, através do seu tensor energia-momento atua como fonte de curvatura do espaço-tempo.

5.2 Campo Eletromagnético no Contexto do Teleparalelismo

5.2.1 Versão Teleparalela do Acoplamento Minimal

Nosso próximo passo será formular uma descrição para a teoria de Maxwell na presença de gravitação, só que agora em termos da estrutura teleparalela do espaço-tempo. Consideremos primeiramente a equivalência entre algumas grandezas geométricas dos dois formalismos. A condição de paralelismo absoluto (2.28), junto à relação (2.36) entre as conexões, permite-nos obter a relação

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}h^{b\rho} = -K^{\rho\nu}{}_{\mu}h^{b}{}_{\nu} . \tag{5.28}$$

Assim, a conexão de spin (5.9) pode ser reescrita em termos de grandezas do espaço de Weitzenböck:

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu} = -h^{a}{}_{\rho}K^{\rho\nu}{}_{\mu}h^{b}{}_{\nu} . \tag{5.29}$$

Observemos que esta equação pode ser obtida diretamente de (2.36) quando transformamos os índices do espaço-tempo em índices de álgebra. Devemos, entretanto, lembrar que as conexões não se transformam covariantemente sob uma transformação de base. Tomando a conexão de Levi-Civita, por exemplo, a correta transformação a ser considerada é

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} = h^{a}{}_{\rho}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\lambda\mu}h_{b}{}^{\lambda} + h^{a}{}_{\rho}\partial_{\mu}h_{b}{}^{\rho} . \tag{5.30}$$

Da mesma forma, a transformação da conexão de Cartan, denotada por $\omega^{a}{}_{b\mu}$, assume a forma

$$\omega^{a}{}_{b\mu} = h^{a}{}_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}h_{b}{}^{\lambda} + h^{a}{}_{\rho}\partial_{\mu}h_{b}{}^{\rho} \equiv 0 . \tag{5.31}$$

Vemos assim que a conexão de Cartan escrita com índices de álgebra se anula identicamente devido à condição de paralelismo absoluto (2.28). Consequentemente, a relação

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu} = \omega^{a}{}_{b\mu} - h^{a}{}_{\rho} K^{\rho\nu}{}_{\mu} h^{b}{}_{\nu} \tag{5.32}$$

se reduz a (5.29). Outrossim, a curiosa equivalência entre uma conexão e um tensor em (5.29) é explicada pelo fato de que há, na realidade, uma conexão nula implícita no lado direito desta relação.

A prescrição de acoplamento entre os campos eletromagnético e a gravitacional, em sua versão teleparalela, será dada, portanto, por

$$\eta^{ab} \;\rightarrow\; g^{\mu\nu} = \eta^{ab} h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} \,, \tag{5.33}$$

$$\partial_a \;\rightarrow\; \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{2}\, h^{a}{}_{\rho} K^{\rho\nu}{}_{\mu} h^{b}{}_{\nu}\, J_{ab} \,, \tag{5.34}$$

onde agora $\mathcal{D}_{\mu}$ corresponde à versão teleparalela do operador de Fock-Ivanenko. Quando aplicado ao campo vetorial A^c, ele assume a forma

$$\mathcal{D}_{\mu} A^{c} = \partial_{\mu} A^{c} - h^{c}{}_{\rho} K^{\rho}{}_{\nu\mu}\, h_d{}^{\nu}\, A^{d} \,, \tag{5.35}$$

onde adotamos, analogamente ao caso riemanniano, J_{ab} dado por (5.10). A expressão (5.35) representa a versão teleparalela da derivada de Fock-Ivanenko atuando no campo vetorial A^c. Podemos obter ainda a correspondente derivada covariante atuando agora no campo vetorial com índices espaço-temporais, ou seja, em A^{μ}. Para isso, vamos substituir a relação $A^{\mu} = h_a{}^{\mu} A^{a}$ no lado direito de (5.35), o que resulta em

$$\mathcal{D}_{\mu} A^{c} = h^{c}{}_{\rho} \left[\partial_{\mu} A^{\rho} - K^{\rho}{}_{\nu\mu}\, A^{\nu}\right] + A^{\lambda} \partial_{\mu} h^{c}{}_{\lambda} \,. \tag{5.36}$$

substituindo

$$\partial_{\mu} h^{c}{}_{\lambda} = h^{c}{}_{\rho} \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} \,, \tag{5.37}$$

expressão obtida a partir da definição da conexão de Cartan (2.23), obtemos finalmente para (5.36)

$$\mathcal{D}_{\mu} A^{c} = h^{c}{}_{\rho} D_{\mu} A^{\rho} \,, \tag{5.38}$$

com $D_{\mu} A^{\rho}$ a versão teleparalela da derivada covariante, dada por

$$D_{\mu} A^{\rho} = \nabla_{\mu} A^{\rho} - K^{\rho}{}_{\nu\mu}\, A^{\nu} \,, \tag{5.39}$$

e

$$\nabla_\mu A^\rho = \partial_\mu A^\rho + \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} A^\nu \tag{5.40}$$

a derivada de Cartan. Concluímos assim que o acoplamento definido em (5.34) é análogo ao acoplamento

$$\partial_a \to D_\mu \equiv \partial_\mu + \Gamma_\mu - K_\mu \ . \tag{5.41}$$

A lagrangeana do campo eletromagnético no espaço de Weitzenböck é obtida utilizando a prescrição (5.41) na lagrangeana livre (5.1), que resulta em

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{h}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ . \tag{5.42}$$

Em princípio, considerando (5.41), o tensor intensidade do campo é dado por

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \ . \tag{5.43}$$

Entretanto, usando a forma explícita de D_μ e considerando as simetrias do tensor de contorção, verificamos facilmente que $F_{\mu\nu}$ assume a mesma forma do espaço-plano, ou seja

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ , \tag{5.44}$$

e assim sua invariância sob transformações de gauge é mantida. Preservar esta propriedade nos parece ser fundamental em qualquer modelo que trate o eletromagnetismo na presença de campo gravitacional, de modo a assegurar sua consistência.

As equações de campo teleparalelas podem ser obtidas através da variação funcional da ação correspondente com relação ao campo A^μ. Obtemos, assim, o primeiro par das equações de Maxwell

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{5.45}$$

Analogamente ao caso riemanniano, podemos definir um gauge de Lorentz teleparalelo,

$$D_\mu A^\mu = 0 \ . \tag{5.46}$$

Considerando ainda as regras de comutação

$$[D_\mu, D_\nu] A^\mu = -Q_{\mu\nu} A^\mu \ , \tag{5.47}$$

com

$$Q_{\mu\nu} = Q^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \; , \tag{5.48}$$

e $Q^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$ dado em (2.38), obtemos o primeiro par das equações de Maxwell teleparalelas para o potencial de gauge:

$$D_{\mu} D^{\mu} A_{\nu} + Q^{\mu}{}_{\nu} A_{\mu} = 0 \; . \tag{5.49}$$

Quando consideramos as identidades de Bianchi no contexto do teleparalelismo, vemos que aplicando a prescrição de acoplamento (5.34), elas mantém sua forma original do espaço plano, que corresponde a

$$\partial_{\mu} F_{\nu\sigma} + \partial_{\sigma} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} = 0 \; . \tag{5.50}$$

Verificamos assim que, no contexto do teleparalelismo, o acoplamento entre a torção e o campo eletromagnético surge de forma natural nas equações de campo. Este acoplamento está implícito no acoplamento entre o potencial de gauge A_{μ} e o tensor $Q_{\mu\nu}$, o qual depende apenas da torção. Além disso, ele não viola a invariância de gauge U(1) da teoria de Maxwell. Este resultado, obtido de forma simples, possui sérias implicações conceituais. A visão corrente da grande maioria dos trabalhos que consideram espaços com torção, utilizam uma prescrição de acoplamento que resulta na quebra da invariância de gauge. Assim, optam por considerar a ausência do acoplamento entre o campo eletromagnético e a torção. Vemos aqui que tal acoplamento é consequência direta da equivalência entre a TGT e a RG. Em outras palavras, da mesma forma que a RG prevê acoplamentos entre campos eletromagnéticos com curvatura, o teleparalelismo prevê o acoplamento desses campos com torção.

Finalmente, verificamos através da relação (2.36), que a versão teleparalela das equações de Maxwell, é totalmente equivalente às equações de Maxwell na RG, já que corresponde a escrever estas equações não mais em termos da conexão de Levi-Civita, e sim em termos da conexão de Cartan. Tal equivalência só é possível quando consideramos o acoplamento (5.34). Qualquer outro possível acoplamento não irá resultar numa teoria equivalente à RG e levará fatalmente à quebra da invariância de gauge.

5.2.2 Campo Eletromagnético como Fonte de Torção

Seja o sistema formado por campos eletromagnético e gravitacional, cuja lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{em} \ , \tag{5.51}$$

com $\mathcal{L}_g$ dada em (2.44) e $\mathcal{L}_{em}$ dada em (5.42). A variação da ação correspondente com relação ao campo $B^a{}_\mu$ resulta na versão teleparalela das equações de Einstein

$$\partial_\rho \, S_\mu{}^{\nu\rho} - \frac{4\pi G}{c^4} \, t_\mu{}^\nu = \frac{4\pi G}{c^4} \, \mathcal{T}_\mu{}^\nu \ , \tag{5.52}$$

onde $S_\mu{}^{\nu\rho} = -S_\mu{}^{\rho\nu}$ é dado por (2.46), $t_\mu{}^\nu$ é o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional, dado por (2.59) e

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = h^a{}_\mu \left(-\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_{em}}{\delta h^a{}_\nu} \right) \tag{5.53}$$

é o tensor energia-momento do campo eletromagnético.

Concluímos, portanto, que além de se acoplar à torção, o campo eletromagnético pode realmente produzir torção, através de seu tensor energia-momento, contradizendo a crença geral de que apenas distribuições de spin geram torção no espaço-tempo.

5.2.3 Considerações Finais

Nossas conclusões sobre a possibilidade do campo eletromagnético atuar como fonte de torção dinâmica, e de se acoplar naturalmente com a mesma nas equações de campo, não violando para isso a invariância local de gauge, estão em contradição com a afirmação usual de que o eletromagnetismo não pode se acoplar à torção de forma a preservar essa invariância.

Devemos ressaltar que o ponto crucial de nossa abordagem é a introdução da prescrição do acoplamento minimal teleparalelo (5.34), responsável pelas conclusões discutidas acima. Este acoplamento corresponde a uma consequência natural da equivalência entre a TGT e a RG, e acreditamos descrever corretamente a interação entre os campos de Maxwell e a torção. O mesmo não é *minimal* no sentido usual, já que este termo é usualmente reservado para designar acoplamentos do tipo

$$\partial_a \to \nabla_\mu \equiv \partial_\mu - \Gamma_\mu \, . \tag{5.54}$$

Por outro lado, é exatamente o acoplamento que se mostra análogo ao adotado na descrição riemanniana, e que resulta na total equivalência entre as duas versões das equações de Maxwell, a riemanniana e a teleparalela.

Capítulo 6

Razão Gravito-Giromagnética dos Campos Fundamentais na RG

O objetivo deste capítulo será explorar como os spins dos campos fundamentais da natureza interagem com a gravitação, no contexto da RG. Até o presente momento este assunto não é totalmente compreendido, e aspectos tais como o valor da razão giromagnética gravitacional, que denotaremos por κ_S, merecem ainda atenção [45, 46, 47, 48]. Estudaremos aqui o acoplamento dos campos fundamentais com a curvatura do espaço-tempo, numa abordagem de teoria de campos semi-clássica, descrevendo a RG através do formalismo das tetradas. A razão básica para tal escolha, como veremos a seguir, é que somente este formalismo consegue descrever o acoplamento da gravitação com campos de spin inteiros e semi-inteiros [28], em oposição ao formalismo métrico usual, que só permite a descrição de campos com spin inteiro [49, 50].

6.1 Campos de Spin Arbitrário e Gravitação

Como vimos no último capítulo, a interação entre os campos vetorial com gravitação pode ser obtida através da prescrição de acoplamento minimal geral, que transforma todas as derivadas ordinárias em operadores derivativos de Fock-Ivanenko [43],

$$\partial_c \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_\mu \, J_{ab} \, , \tag{6.1}$$

com [51]

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} = h^{a}{}_{\rho}\,\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\,h_{b}{}^{\rho} \equiv h^{a}{}_{\rho}\left(\partial_{\mu}h_{b}{}^{\rho} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu}h_{b}{}^{\nu}\right) \tag{6.2}$$

a conexão de spin, e J_{ab} os geradores do grupo de Lorentz escritos na representação adequada para cada campo em questão. Assim, a forma explícita do operador derivativo de Fock-Ivanenko depende do caráter espinorial do campo, como definido pelas transformações de Lorentz no espaço tangente, e não do caráter tensorial do espaço-tempo.

Apesar da conexão de spin $\overset{\circ}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}$ ser uma 1-forma assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz, a introdução da derivada de Fock-Ivanenko não requer que a teoria seja invariante local de Lorentz. Em outras palavras, a dinâmica da teoria é independente de qualquer teoria de gauge para o grupo de Lorentz, mesmo porque a conexão em questão não é arbitrária, como exigiria tal teoria, mas completamente determinada pelo campo de tetradas, como vemos em (6.2), (2.32) e (2.31).

Esta prescrição de acoplamento minimal não foi adotada explicitamente no capítulo 4, referente ao estudo do campo escalar. Optamos, naquele caso, por seguir a prescrição equivalente adotada em [37]. Da mesma forma que o termo da conexão na derivada covariante (4.3) se anula quando a mesma atua num escalar do espaço-tempo, o termo da conexão na derivada de Fock-Ivanenko (6.1) também se anula quando a representação escalar do grupo de Lorentz é usada.

Podemos dizer que nos dois casos estudados (spin 0 e 1), a prescrição (6.1) é equivalente à prescrição usual da RG, ou seja, todas as derivadas ordinárias podem ser substituídas por derivadas covariantes aplicadas a escalares ou vetores do espaço-tempo, o que corresponde a adotar a prescrição

$$\partial_{c} \rightarrow \overset{\circ}{\nabla}_{\mu} = \partial_{\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu}\ , \tag{6.3}$$

com $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu}$ a conexão de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$.

Na realidade, as prescrições (6.1) e (6.3) são equivalentes quando aplicadas a quaisquer objetos tensoriais (spin inteiro). De fato, índices tensoriais são levados do espaço-tempo ao espaço tangente, e vice-versa, através de simples contrações com a tetrada e, portanto, qualquer campo tensorial que se transforme de acordo com a representação de spin inteiro do grupo de Lorentz, corresponde a um tensor do espaço-tempo dado por

$$A^{\rho\ldots\sigma} = h_a{}^{\rho} \ldots h_b{}^{\sigma} \, A^{a\ldots b} \, . \tag{6.4}$$

Ou seja, corresponde a um campo que se transforma como um tensor sob transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo. Assim, tomando a representação apropriada para J_{ab} na derivada de Fock-Ivanenko aplicada a um campo de spin inteiro $A^{a\ldots b}$, verificamos facilmente que ela se reduz a uma derivada covariante de Levi-Civita do correspondente tensor, agora com índices do espaço-tempo, $A^{\rho\ldots\sigma}$:

$$\mathcal{D}_\mu A^{a\ldots b} = h^a{}_\rho \ldots h^b{}_\sigma \, \overset{\circ}{\nabla}_\mu A^{\rho\ldots\sigma} \, . \tag{6.5}$$

Portanto, para estes campo, a prescrição (6.1) pode ser substituída por

$$\partial_c A^{a\ldots b} \to \overset{\circ}{\nabla}_\mu A^{\rho\ldots\sigma} \, , \tag{6.6}$$

que é a prescrição usualmente encontrada na literatura [38].

Por outro lado, campos de spin semi-inteiros comportam-se de modo completamente diferente. Não existe uma representação espinorial para o grupo das transformações gerais de coordenadas da RG, e sob tais tranformações, espinores sempre se comportam como escalares [44]. Consequentemente, não existe uma derivada covariante de Levi-Civita de um campo espinorial. Assim, podemos considerar somente a prescrição de acoplamento minimal (6.1), a qual leva em conta apenas o caráter espinorial definido no espaço tangente. Isto implica que qualquer teoria que descreve a interação entre espinores e gravitação deve obrigatoriamente conter simultaneamente os dois tipos de índices, e exigir a presença explícita do campo de tetradas para conectar esses índices. Esta é a razão pela qual dizemos que a descrição de campos espinoriais interagindo com gravitação necessita do formalismo das tetradas. Um fato curioso a se notar é que a mesma coisa pode ser dita das matrizes γ de Dirac, cujo quadrado (simetrizado), analogamente às tetradas, resulta no tensor métrico.

6.2 Momento Gravitomagnético de Campos com Spin 1/2

Em estrita analogia ao eletromagnetismo, vamos desenvolver aqui a versão gravitacional para as respectivas grandezas eletromagnéticas de partículas com spin semi-inteiro: momento magnético orbital e intrínseco, e razão giromagnética.

Consideremos, assim, o momento magnético $\boldsymbol{m}_L$ de uma distribuição de corrente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho_e \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, definido usualmente por

$$\boldsymbol{m}_L = \frac{1}{2c} \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\, d^3r \,, \tag{6.7}$$

com ρ_e a densidade de carga e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ a velocidade da partícula. Integrando a expressão (6.7) para o caso de uma órbita circular, obtemos

$$\frac{m_L}{L} = \frac{e}{2mc} \equiv \frac{g_L\, m_B}{\hbar} \,, \tag{6.8}$$

onde introduzimos o momento angular orbital L do elétron, a razão giromagnética orbital $g_L = 1$, e o magneton de Bohr $m_B = e\hbar/2mc$, que é a unidade usual do momento magnético.

Da mesma forma, podemos definir o momento gravitomagnético $\boldsymbol{\mu}_L$ de uma 'corrente de massa' $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = \rho_m \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ através de

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{1}{2c} \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})\, d^3r \,, \tag{6.9}$$

com ρ_m a densidade de massa. Considerando novamente um elétron em órbita circular, obtemos través da integração,

$$\frac{\mu_L}{L} = \frac{1}{2c} \equiv \frac{\kappa_L\, \mu_B}{\hbar} \,, \tag{6.10}$$

com $\kappa_L = 1$ a razão gravito-giromagnética orbital e $\mu_B = \hbar/2c$ o análogo gravitacional do magneton de Bohr, unidade na qual o momento gravitomagnético é medido.

Observemos que μ_B pode ser obtido de m_B trocando-se a *carga elétrica e* pela *carga gravitacional m*. Assim, tanto o momento gravitomagnético como o análogo gravitacional do magneton de Bohr não apresentarão dependência na massa m, o que nos parece coerente com o fato desta interação ser universal. Um fenômeno semelhante ocorre quando construímos a força de Lorentz gravitacional, onde obtivemos um resultado também independente da massa.

O momento angular intrínseco ou spin $S = \hbar\sigma/2$ do elétron resulta, da mesma forma que (6.8), no momento magnético intríseco m_S, dado por

$$m_S = \frac{g_S\, m_B}{\hbar} S\,, \tag{6.11}$$

sendo g_S a razão giromagnética de spin. E, por analogia, podemos dizer que o momento angular intrínseco do elétron resulta no momento gravito-magnético na forma

$$\mu_S = \frac{\kappa_S\, \mu_B}{\hbar} S\,, \tag{6.12}$$

onde κ_S é a razão gravito-giromagnética de spin.

6.2.1 O Conceito de Razão Gravito-Giromagnética

Alguns trabalhos que tratam de gravitomagnetismo têm considerado a razão gravito-giromagnética como sendo a relação obtida da interação entre certas componentes do campo gravitacional fraco, conhecidas usualmente como campo gravitomagnético, as quais são proporcionais à conexão de Levi-Civita, com o spin da partícula em questão [45, 52]. Trataremos aqui de um outro conceito para esta grandeza, bem mais próximo do conceito eletromagnético de razão giromagnética, adotado, por exemplo, em [53].

O potencial eletromagnetico A_μ é uma conexão definida no fibrado de gauge. A curvatura desta conexão corresponde ao tensor intensidade de campo, $F_{\mu\nu}$, que pode ser decomposto, por sua vez, numa parte estritamente elétrica, e numa parte estritamente magnética. O valor da razão giromagnética do elétron é então obtido da interação entre o momento magnético intrínseco do elétron com este campo magnético. Podemos analogamente definir o valor da razão gravito-giromagnética através da interação entre o momento gravitomagnético do elétron (6.12) e as componentes gravitomagnéticas do tensor de Riemann, que corresponde ao tensor intensidade de campo da gravitação, dado pela curvatura da conexão relevante da RG, ou seja, da conexão de Levi-Civita.

Nos trabalhos referentes à primeira abordagem, foi obtida a razão gravito-giromagnética igual a 1. O objetivo da próxima seção será discutir os valores para a razão gravito-giromagnética dentro do nosso contexto, sempre em analogia ao eletromagnetismo. Assim, da mesma forma como é possível obter a razão giromagnética $g_S = 2$ através das equações de Dirac com interação eletromagnética, pretendemos obter a razão gravito-giromagnética κ_S considerando também as equações de Dirac, mas neste caso, com interação gravitacional.

6.3 O Quadrado da Equação de Dirac

Podemos obter g_S através do limite não relativístico da equação de Dirac, o que resulta na equação de Pauli, ou calculando o quadrado da equação de Dirac [54]. Para calcular κ_S seguiremos a segunda estratégia. Assim, consideremos a lagrangeana para o espinor de Dirac no espaço riemanniano

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \overline{\psi}\mathcal{D}_\mu \gamma^\mu \psi\right) - m\overline{\psi}\psi\right] , \tag{6.13}$$

com $\gamma^\mu = h_a{}^\mu \gamma^a$ a matriz de Dirac espaço-temporal, que satisfaz

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} , \tag{6.14}$$

e $\mathcal{D}_\mu$ a derivada covariante de Fock-Ivanenko atuando num espinor, ou seja, que adota para o gerador J_{ab} a representação

$$J_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{2} = \frac{i}{4}\left[\gamma_a, \gamma_b\right] . \tag{6.15}$$

A equação de Dirac pode ser obtida a partir da lagrangeana (6.13), e resulta em

$$i\hbar\, \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc\psi = 0 . \tag{6.16}$$

Estudemos agora sua forma quadrática

$$(i\hbar\, \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - mc)\,(i\hbar\, \gamma^\nu \mathcal{D}_\nu + mc)\,\Psi = 0 . \tag{6.17}$$

Considerando a identidade

$$\mathcal{D}_\mu \gamma^\lambda = -\stackrel{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\mu}\gamma^\rho , \tag{6.18}$$

bem como a relação de comutação

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -\frac{i}{2}\stackrel{\circ}{R}_{ab\mu\nu}\frac{\sigma_{ab}}{2} , \tag{6.19}$$

com $\overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu}$ a curvatura da conexão de spin, obtemos

$$\left[- g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{D}_\nu + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu} \frac{\sigma^{ab}}{2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \psi = 0 \,, \tag{6.20}$$

onde

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu = \mathcal{D}_\mu - \overset{\circ}{\Gamma}_\mu \,, \tag{6.21}$$

é a derivada de Fock-Ivanenko que inclui uma conexão de Levi-Civita para levar em conta o índice espaço-temporal da primeira derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$. A matriz $\sigma^{\mu\nu}$ corresponde à representação de spin 1/2 do grupo de Lorentz, escrita com índices de espaço-tempo, ou seja

$$\sigma^{\mu\nu} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu \sigma^{ab} \,. \tag{6.22}$$

Para introduzir as componentes gravitomagnéticas do tensor de Riemann, utilizando o procedimento análogo ao do eletromagnetismo [54], vamos considerar as identidades $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\sigma^{0k} \equiv i\alpha^k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \;;\; \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} , \tag{6.23}$$

onde σ^k denota as matrizes de spin de Pauli. Assim, as componentes gravitomagnéticas do tensor de Riemann serão definidas por [55]

$$B_i = \frac{i}{2}\, \epsilon_{ijk}\, \overset{\circ}{R}_{jk0l}\, \alpha^l \,. \tag{6.24}$$

Com estas definições, podemos retomar a equação (6.20) e reescrever seu termo de curvatura. Verifica-se facilmente que ele é decomposto em vários termos, e dentre eles há uma parte estritamente magnética dada por

$$\frac{1}{8}\, \sigma^{\mu\nu}\, \overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu}\, \sigma^{ab} = I_2 \otimes \boldsymbol{\mu}_S \cdot \boldsymbol{B} + \cdots \,, \tag{6.25}$$

com I_2 uma matriz unitária 2×2 e $\boldsymbol{\mu}_S$ o momento gravitomagnético intrínseco, definido a partir de (6.25) como

$$\boldsymbol{\mu}_S = \frac{2}{\hbar} \boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{\sigma} \,, \tag{6.26}$$

com $\sigma = -4i(\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ o momento gravitomagnético adimensional do elétron. Podemos também escrever o momento gravitomagnético em unidades de magneton gravitacional de Bohr, ou seja

$$\mu_S = \frac{2\,\mu_B}{\hbar}\, S\,. \tag{6.27}$$

Se compararmos este resultado com (6.12), veremos que a forma quadrática da equação de Dirac no espaço riemanniano resulta no valor $\kappa_S = 2$ para a razão gravito-giromagnética. Podemos ainda explicitar a constante κ_S, e reescrever (6.20) na forma

$$\left[-\, g^{\mu\nu}\, \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{D}_\nu + \frac{\kappa_S}{4}\,\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\,\overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu}\,\frac{\sigma^{ab}}{2} - M^2\right]\psi = 0\,, \tag{6.28}$$

com $M = mc/\hbar$.

Vale comentar que o fato de termos obtido $\kappa_S = 2$, o que corresponde ao mesmo valor de g_S do eletromagnetismo, não é uma simples coincidência, sendo decorrente da prescrição de acoplamento minimal adotada nos dois casos, o que nos leva a crer que tal grandeza não depende do tipo de interação em consideração.

6.4 Equação Geral para os Campos Fundamentais

Como é bem conhecido, o quadrado da equação de Dirac resulta na equação de Klein-Gordon, responsável pela dinâmica do campo escalar [56]. Devemos ressaltar, entretanto, que tal afirmação só é válida para campos definidos no espaço de Minkowski. Além disso, ela considera a hipótese, não muito óbvia, de que todas as representações espinoriais do grupo de Lorentz, contidas na equação de Dirac, devem ser substituídas por representações escalares, e somente assim a igualdade será válida. Porém, no espaço plano, esta hipótese está escondida pelo fato de que as representações não aparecem explicitamente em nenhuma das duas equações, sendo então ignorada.

Por outro lado, quando consideramos o espaço-tempo curvo, a situação é completamente diferente. O operador de Fock-Ivanenko, que substitui as derivadas ordinárias do espaço plano, contém o gerador do grupo de Lorentz explicitamente e o mesmo irá aparecer na forma quadrática da equação de Dirac, tanto no termo cinético como no termo de curvatura, como pode ser visto em (6.28). Assim, para obter um resultado no espaço riemanniano semelhante ao resultado em Minkowski, e que recupere este último no limite de curvatura nula, vamos considerar a generalização da equação (6.28), tomando representações arbitrárias do grupo de Lorentz J^{ab} e $J^{\mu\nu}$, deixando livre o parâmetro κ_S e aplicando o operador num campo genérico Ψ. Obtemos a equação geral de segunda ordem

$$\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{D}_\nu + \kappa_S \frac{\hbar^2}{4} J^{\mu\nu} \overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu} J^{ab} - m^2c^2\right]\Psi = 0\,. \tag{6.29}$$

Nosso próximo passo será considerar esta equação para os campos fundamentais de spins mais baixos e então extrapolar algumas conclusões.

6.4.1 O Campo Escalar

Ao aplicar o operador de (6.29) no campo escalar ϕ, devemos adotar representação $J^{ab} = J^{\mu\nu} = 0$ e consequentemente o operador de Fock-Ivanenko torna-se uma derivada ordinária. Assim, a equação (6.29) se reduz à equação de Klein-Gordon no espaço riemanniano

$$g^{\mu\nu}\overset{\circ}{\nabla}_\mu \partial_\nu\phi + M^2\phi = 0\,, \tag{6.30}$$

com $M = mc/\hbar$. Devemos notar que a "raiz quadrada" da equação (6.30) não resulta mais na equação de Dirac (6.16) porque as informações relacionadas ao acoplamento do campo espinorial com a gravitação são perdidas quando a condição $J^{ab} = 0$ é imposta. Assim, a afirmação usual de que a equação de Dirac corresponde à "raiz quadrada" da equação de Klein-Gordon não é mais válida na presença de gravitação.

6.4.2 O Campo de Spin 1/2

Quando atuamos (6.29) num campo espinorial ψ devemos adotar a representação de spin-1/2 do grupo de Lorentz para $J^{\mu\nu}$ e J^{ab}, que corresponde a

$$J_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{2} = \frac{i}{4}\left[\gamma_a, \gamma_b\right]\,. \tag{6.31}$$

Considerando para a razão gravito-giromagnética o valor $\kappa_S = 2$, e usando a identidade deduzida para os campos espinoriais

$$\frac{1}{8}\sigma^{\mu\nu}\overset{\circ}{R}_{ab\mu\nu}\sigma^{ab} = I_4\frac{\overset{\circ}{R}}{4}\,, \tag{6.32}$$

com I_4 a matriz espinorial unidade 4×4, e $\overset{\circ}{R} = g^{\mu\nu} \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ a curvatura escalar, obtemos

$$-g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi + \frac{1}{4} \overset{\circ}{R} \psi - M^2 \psi = 0 \,. \tag{6.33}$$

Esta é a equação de segunda ordem satisfeita por um espinor de Dirac, escrita de forma simplificada [57]. Observemos que o aparente acoplamento entre o escalar de curvatura do espaço-tempo e o espinor de Dirac corresponde, na realidade, ao acoplamento entre o spin do elétron com a curvatura, o que é evidenciado pela igualdade (6.32).

6.4.3 O Campo Vetorial

Consideremos agora o campo vetorial A^e, suposto satisfazer a condição subsidiária

$$\mathcal{D}_\mu A^e = 0 \,. \tag{6.34}$$

Quando aplicamos o operador em (6.29) a este campo, devemos substituir $J^{\mu\nu}$ e J^{ab} pela representação de spin-1 do grupo de Lorentz, ou seja,

$$\left(J^{ab}\right)^c{}_d \equiv \left(S^{ab}\right)^c{}_d = i\left(\delta^a{}_d \eta^{bc} - \delta^b{}_d \eta^{ac}\right) \,. \tag{6.35}$$

Neste caso, a equação se torna

$$\left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}{}^\mu - m^2\right) A_\nu - \kappa_S \overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\nu A_\mu = 0 \,. \tag{6.36}$$

Comparando (6.36) com a conhecida equação de Proca no espaço riemanniano, vemos que elas coincidem quando assumimos o valor da razão gravito-giromagnética para o campo vetorial $\kappa_S = 1$. Além disso, podemos ver facilmente que a condição (6.34) se torna o gauge usual

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu A^\mu = 0 \,. \tag{6.37}$$

Para obter a equação de Dirac (6.16) a partir de (6.36), devemos extrair "raiz quadrada" de (6.36) adotando, entretanto, o valor $\kappa_S = 2$ para a razão gravito-giromagnética, que é o valor correspondente a partículas de spin 1/2. Observemos ainda que, exatamente como no caso do acoplamento entre a curvatura escalar e o espinor de Dirac, neste caso, o acoplamento entre o tensor de Ricci e o campo vetorial corresponde, na realidade, ao acoplamento entre o spin do vetor e a curvatura do espaço-tempo, o que é melhor enfatizado em (6.29).

6.4.4 O Campo de Spin 3/2

Vamos considerar campos ψ^a de spin-3/2, que satisfazem a equação de Rarita-Schwinger [58]

$$(\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu + m)\,\psi^a = 0\,, \tag{6.38}$$

e

$$\gamma_a\,\psi^a = 0\,. \tag{6.39}$$

Devemos, neste caso, adotar a representação vetor-espinorial na derivada de Fock-Ivanenko, que corresponde a

$$J^{ab} = \frac{\sigma^{ab}}{2} + S^{ab}\,, \tag{6.40}$$

onde S^{ab} é a representação de spin-1 dada em (6.35). O vínculo

$$h_a{}^\mu\, \mathcal{D}_\mu \psi^a \equiv \mathring{\mathcal{D}}_\mu \psi^\mu = 0\,, \tag{6.41}$$

deve ser ainda considerado em (6.38). Ele corresponde a um tipo de gauge de Lorentz generalizado. Observemos ainda que a representação (6.40) possui dois termos totalmente diferentes. O primeiro termo corresponde à uma matriz espinorial, que atua no índice espinorial de ψ^a. O segundo termo é uma matriz definida no espaço-tempo e atua apenas no índice vetorial de ψ^a. Devemos notar, entretanto, que o campo de Rarita-Schwinger é um espinor de terceira ordem completamente simétrico, e por esta razão sua parte vetorial não pode se acoplar ao tensor de Ricci como um vetor verdadeiro. Em outras palavras, ele não pode ter suas partes vetorial e espinorial consideradas separadamente, como parece indicar a representação (6.40). Ou seja, ele não 'enxerga' a curvatura separadamente como um vetor e como um espinor. Ao contrário, ele se comporta como um espinor de terceira ordem, descrito pela equação geral (6.38).

Como ψ^a satisfaz a equação de Dirac de primeira ordem, devemos adotar a representação de spin-1/2 para $J^{\mu\nu}$, ou seja, devemos tomar $J^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$. Além disso, como agora o tensor de Riemann é obtido da relação de comutação (6.19) com a derivada de Fock-Ivanenko escrita na representação vetor-espinorial (6.40), devemos adotar esta representação para J_{ab}. A equação resultante é

$$-\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \overset{\circ}{\mathcal{D}}^\mu \psi_\lambda + \kappa_s \left[\frac{1}{8} \overset{\circ}{R} \psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma^\rho \gamma^\sigma \overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\lambda\nu} \psi^\nu\right] - M^2 \psi_\lambda = 0 \, . \tag{6.42}$$

Comparando (6.42) com o quadrado da equação de Rarita-Schwinger

$$-\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \overset{\circ}{\mathcal{D}}^\mu \psi_\lambda + \frac{1}{4} \overset{\circ}{R} \psi_\lambda - \frac{1}{2} \gamma^\rho \gamma^\sigma \overset{\circ}{R}_{\rho\sigma\lambda\nu} \psi^\nu - M^2 \psi_\lambda = 0 \, , \tag{6.43}$$

concluímos que a razão gravito-giromagnética apropriada é $\kappa_S = 2$.

6.4.5 O Campo de Spin 2

Analisemos a equação (6.29) aplicada a campos tensoriais não massivos de spin-2 A_{cd}, com a simetria

$$A_{cd} = A_{dc} \, . \tag{6.44}$$

Neste caso, a representação apropriada do grupo de Lorentz assume a forma

$$\left(J^{ab} A\right)_{cd} = -i \left(\delta^b{}_c \, A^a{}_d - \delta^a{}_c \, A^b{}_d + \delta^b{}_d \, A^a{}_c - \delta^a{}_d \, A^b{}_c\right) \, . \tag{6.45}$$

Considerando ambos J^{ab} e $J^{\mu\nu}$ assumindo esta representação em (6.29), obtemos

$$-\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}^\mu A_{\rho\lambda} + \kappa_s [R_{\mu\rho} \, A^\mu{}_\lambda + R_{\mu\lambda} \, A^\mu{}_\rho - R_{\mu\rho\lambda\nu} \, A^{\mu\nu}] = 0 \, . \tag{6.46}$$

Se tomarmos $\kappa_s = 1$ em (6.46), vemos que a mesma coincide com as equações de Einstein para pequenas perturbações da métrica

$$g_{\rho\lambda} \to g_{\rho\lambda} + A_{\rho\lambda} \, , \tag{6.47}$$

onde assuminos que

$$| \, A_{\rho\lambda} \, | \ll 1 \, , \tag{6.48}$$

como também o gauge harmônico

$$\overset{\circ}{\nabla}{}^\rho \left(A_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} \, g_{\rho\lambda} A^\mu{}_\mu\right) = 0 \, . \tag{6.49}$$

Podemos finalmente sintetizar a seguinte prescrição adotada para definir as correspondentes representações de cada campo, em função do seu spin: para o caso de campos tensor-espinoriais (espinor de Dirac, Rarita-Schwinger, etc), ou seja, que satisfazem uma equação do tipo de Dirac — isto é, de primeira ordem — devemos obrigatoriamente substituir $J^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$ em (6.29), como pode ser visto através do quadrado da correspondente equação de primeira ordem. Além disso, como a derivada de Fock-Ivanenko deve ser sempre escrita na representação tensor-espinorial do grupo de Lorentz adequada (6.40), J^{ab} deve ser também substituído pela representação tensor-espinorial do grupo de Lorentz. Por outro lado, para campos tensoriais (spins inteiros), ou seja, para campos que não satisfazem a equação de Dirac, ambos J^{ab} e $J^{\mu\nu}$ devem ser substituídos pela representação apropriada do grupo de Lorentz. Quando aplicamos esta regra geral em (6.29), obtemos corretamente as equações de segunda ordem satisfeitas por quaisquer campos fundamentais da natureza.

6.5 Considerações Finais

Como vimos, a equação (6.29) pode ser considerada a equação fundamental de segunda ordem para os campos básicos da natureza, desde que seja considerado o valor correto para a razão gravito-giromagnética κ_S em cada caso. Para os campos tensoriais, o valor de κ_S pode ser obtido através da comparação da equação (6.29) com a correspondente equação de segunda ordem. Para campos de spin semi-inteiros, por outro lado, o valor de κ_S é determinado pela comparação de (6.29) com a forma quadrática da correspondente equação de primeira ordem. Neste contexto, obtivemos as razões gravito-giromagnéticas $\kappa_S = 2$ para campos de spins semi-inteiros (spin 1/2 e 3/2) e obtivemos $\kappa_S = 1$ para campos de spins inteiros (spin 1 e 2).

Além disso, concluímos que não é possível obter a equação de Dirac a partir da "raiz quadrada" da equação de Klein-Gordon, já que alguma informação essencial sobre o acoplamento do spin com a gravitação é perdida quando o valor nulo de J^{ab} é imposto. Entretanto, podemos obter a equação de Dirac como a raiz quadrada das demais equações que descrevem os outros campos, desde que consideremos a razão gravito-giromagnética de forma apropriada. Para exemplificar, consideremos a raiz quadrada do operador de Proca no espaço riemanniano. Ele só corresponderá ao operador que aparece na equação de Dirac, se tomarmos $\kappa_S = 2$, que corresponde ao valor correto para este campo.

Um laplaciano geral de segunda ordem, válido para quaisquer campos, já foi proposto na literatura [57]. Entretanto, ele possui uma forma diferente para campos de spins inteiros e semi-inteiros. Encontramos aqui, ao contrário, uma forma sintética de Laplaciano, válida para ambos os grupos de spins, e que unifica, de certa forma, o tratamento destes campos.

Capítulo 7

Espinores e o Operador de Fock-Ivanenko

Nos últimos capítulos, vimos que a interação de campos tensoriais com a gravitação é plenamente descrita pela da RG (ou alternativamente pelo teleparalelismo), com os campos definidos como tensores no espaço-tempo, e com a interação descrita através da conexão de Levi-Civita (ou alternativamente através da conexão de Cartan). Entretanto, vimos que podemos iniciar nosso estudo considerando o operador de Fock-Ivanenko atuando nos respectivos tensores de Lorentz, sendo que para tensores no espaço-tempo tal descrição recai na descrição usual da RG. Para campos espinoriais, porém, constatamos que o mesmo não ocorre, e assim devemos manter a descrição em termos de geradores escritos no espaço tangente. Isso implica necessariamente na presença de um campo de tetradas. O objetivo deste capítulo será discutir a escolha do operador de Fock-Ivanenko, tanto na descrição riemanniana como na teleparalela, para acoplar os campos fundamentais à gravitação.

7.1 O Campo de Dirac na RG

Para obter a equação de onda do elétron no espaço-tempo riemanniano, Dirac [51] utilizou a derivada de Fock-Ivanenko para generalizar o conceito de derivada covariante na RG. Assim, ele logrou definir uma derivada covariante que pode ser aplicada tanto para campos tensoriais, que neste caso coincide com a derivada covariante usual da RG, como também para campos espinoriais, para os quais a formulação usual da RG não dispunha de uma derivada covariante para realizar o acoplamento minimal. Partindo-se da lagrangeana de Dirac no espaço de Minkowski ($\hbar = c = 1$)

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi - \partial_a\bar{\psi}\gamma^a\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\,, \tag{7.1}$$

e fazendo-se as substituições

$$\eta_{ab} \rightarrow g_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

e

$$\partial_a \rightarrow h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu = h_a{}^\mu\left(\partial_\mu + \Omega_\mu\right)\,, \tag{7.3}$$

obtém-se a lagrangeana válida no espaço de Riemann:

$$\mathcal{L}_\psi = \sqrt{-g}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^a h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - h_a{}^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}\gamma^a\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\right]. \tag{7.4}$$

A equação de onda correspondente é

$$\left[i\gamma^a h_a{}^\rho\left(\partial_\rho + \Omega_\rho\right) - m\right]\psi = 0\,. \tag{7.5}$$

Esta equação é evidentemente invariante sob transformações gerais de coordenadas, graças à sua forma completamente tensorial. Pode–se verificar também que ela se mantém invariante sob rotações arbitrárias do campo de tetradas. Dirac, portanto, concluiu ser esta equação fisicamente aceitável.

Sua forma definitiva foi determinada através da imposição da lei de conservação da corrente. Primeiramente, verificou-se que a grandeza $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ não é afetada por uma rotação das tetradas. Concluiu-se assim que tal grandeza é realmente um vetor com relação àquele sistema de coordenadas, e pode portanto ser considerada (a menos de um fator numérico) o vetor corrente. Finalmente, Dirac concluiu que a lei de conservação

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu\left[\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right] = 0 \tag{7.6}$$

só é satisfeita se

$$\Omega_\mu = \frac{i}{2}\,\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_\mu\,J_{ab}\,, \tag{7.7}$$

onde $\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_\mu$ é a conexão de spin, e J_{ab} a representação de spin 1/2 do grupo de Lorentz, dada por

$$J_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]\,.$$

O operador em (7.3), com Ω_μ dado em (7.7), é o conhecido operador de Fock-Ivanenko no espaço riemanniano.

7.2 O Campo de Dirac no Teleparalelismo

Como mostramos anteriormente,

$$\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_{\mu} = \omega^{ab}{}_{\mu} - K^{ab}{}_{\mu} \,, \tag{7.8}$$

com

$$K^{ab}{}_{\mu} = h^{a}{}_{\lambda}\, h^{b}{}_{\rho}\, K^{\lambda\rho}{}_{\mu} \,. \tag{7.9}$$

Assim, considerando que a conexão de spin de Cartan $\omega^{ab}{}_{\mu}$ é nula, chegamos à versão teleparalela do operador de Fock-Ivanenko:

$$\partial_{\mu} \to \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{2} K^{\rho\nu}{}_{\mu}\, h^{a}{}_{\rho}\, h^{b}{}_{\nu}\, J_{ab} \,. \tag{7.10}$$

Podemos facilmente verificar que este é o único formato para o operador de Fock-Ivanenko em termos das grandezas do teleparalelismo, compatível com a conservação de corrente

$$D_{\mu}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right] = 0 \tag{7.11}$$

com $D_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu} - K_{\mu}$ a versão teleparalela da derivada covariante.

Temos, então, a versão teleparalela da lagrangeana de um campo de Dirac na presença de gravitação

$$\mathcal{L}_{D} = h\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{a}\mathcal{D}_{a}\psi - \mathcal{D}_{a}\bar{\psi}\gamma^{a}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\right] \,, \tag{7.12}$$

com

$$\mathcal{D}_{a} = h_{a}{}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} \,. \tag{7.13}$$

As equações de campo podem ser obtidas através das equações de Euler-Lagrange, e fazendo uso das relações

$$\mathcal{D}_{\rho}\gamma^{\rho} = \gamma^{\nu}K^{\rho}{}_{\nu\rho} - \gamma^{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\rho} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\rho}\left(h\gamma^{\rho}\right) = 0 \,. \tag{7.14}$$

O resultado é

$$i\gamma^{a}h_{a}{}^{\rho}\mathcal{D}_{\rho}\psi - m\psi = 0 \,. \tag{7.15}$$

A prescrição de acoplamento entre o campo espinorial e o campo gravitacional no espaço de Weitzenböck, adotada aqui, mantém sua consistência com nosso estudo anterior dos demais campos fundamentais. Por exemplo, se calcularmos o quadrado do operador em (7.15) e extrapolarmos a equação para representações gerais do grupo de Lorentz, como fizemos no caso riemanniano, chegaremos na expressão

$$\left[-\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\rho\,\mathcal{D}^\rho-\frac{\kappa_S}{4}\,J^{\rho\lambda}\,h_\mu{}^a\,h_\nu{}^b\,V^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda}J_{ab}-m^2\right]\Psi=0\,, \tag{7.16}$$

com

$$V^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda}=\partial_\rho K^{\mu\nu}{}_\lambda-K^\mu{}_{\sigma\rho}K^{\sigma\nu}{}_\lambda-\Gamma^{\sigma\nu}_{\ \ \rho}K^\mu{}_{\sigma\lambda}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}K^{\sigma\nu}{}_\lambda-(\rho\leftrightarrow\lambda)\,. \tag{7.17}$$

Esta é a equação para os campos fundamentais no teleparalelismo, e que resulta, desde que tomados os valores apropriados para a razão gravito–giromagnética (mesmos valores riemannianos), nas equações teleparalelas para os campos de spin 0, 1/2, 1, 3/2 e 2. Nossa intenção inicial era verificar um possível acoplamento entre a torção do espaço–tempo e o spin do campo. Entretanto, tal acoplamento não é direto e o que se acopla, na realidade, é a grandeza vetorial $V^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda}$, constituída de termos proporcionais à torção.

Um outro exemplo de que nosso acoplamento é adequado e compatível com a abordagem riemanniana é a definição do tensor de spin. Vamos introduzir aqui sua definição usual e propor nossa versão teleparalela para sua expressão. Na próxima seção discutiremos qual seria seu formato, de acordo com a outra prescrição de acoplamento adotada no teleparalelismo. Na RG, sabemos que o tensor de spin é dado por

$$S_{cd}{}^\rho\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial\overset{\circ}{\omega}{}^{cd}{}_\rho}\,. \tag{7.18}$$

Usando a identidade (7.8), obtemos a versão teleparalela para o tensor de spin

$$S_{cd}{}^\rho\equiv\frac{1}{h}\frac{\partial\mathcal{L}_\psi}{\partial K^{cd}{}_\rho}\,. \tag{7.19}$$

7.3 Comentários Finais Sobre o Acoplamento Minimal no Teleparalelismo

Alguns autores consideram a prescrição de acoplamento minimal com a conexão de Cartan para descrever o acoplamento de campos de matéria com gravitação [16].

Em outras palavras, a seguinte prescrição é utilizada:

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}^*_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_\mu J_{ab} \,. \tag{7.20}$$

Entretanto, como já vimos, a conexão de spin de Cartan $\omega^{ab}{}_\mu$ é identicamente nula, o que reduz a derivada covariante $\mathcal{D}^*_\mu$ a uma derivada ordinária:

$$\mathcal{D}^*_\mu = \partial_\mu \,. \tag{7.21}$$

Como resultado, irá existir uma diferença entre as descrições riemanniana e teleparalela da interação entre campos de matéria com gravitação [16]. Por exemplo, considerando a prescrição (7.20), obtemos a lagrangeana de Dirac

$$\mathcal{L}_D = h\left\{\frac{i}{2}h_k{}^\mu\left[\bar{\psi}\gamma^k\mathcal{D}^*_\mu\psi - \left(\mathcal{D}^*_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^k\psi\right] - m\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{7.22}$$

Se não tomarmos como nula desde o início a conexão de spin $\omega^{ab}{}_\mu$, e considerarmos a identidade (7.8), podemos escrever tal lagrangeana em termos das grandezas da RG. Obtém-se que

$$\mathcal{L}_D = h\left\{\frac{i}{2}h_k{}^\mu\left[\bar{\psi}\gamma^k\mathcal{D}_\mu\psi - \left(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^k\psi\right] - \frac{3}{4}a_k\bar{\psi}\gamma^5\gamma^k\psi - m\bar{\psi}\psi\right\} \,. \tag{7.23}$$

com

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}\,\overset{\circ}{\omega}{}^{ab}{}_\mu\, J_{ab} \tag{7.24}$$

a derivada de Fock–Ivanenko riemanniana. Esta lagrangeana corresponde à lagrangeana da RG adicionada de um termo proporcional ao acoplamento entre a parte axial da torção e o campo de Dirac

$$a^\mu = h_k{}^\mu a^k = \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} \,. \tag{7.25}$$

Para recuperar a equivalência entre as duas lagrangeanas é preciso impor a condição de que a parte axial da torção se anule, hipótese bastante restritiva em sistemas reais com gravitação.

Retomemos a discussão sobre o tensor de spin. Podemos observar que a definição do tensor de spin, dado pela derivada da lagrangeana de Dirac com relação à conexão de spin de Cartan

$$S_{cd}{}^{\rho} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \omega^{cd}{}_{\rho}} , \tag{7.26}$$

que é a expressão coerente com a prescrição de acoplamento (7.20), apresenta problemas de inconsistência, já que $\omega^{cd}{}_{\rho} = 0$. Sendo assim, concluímos ser mais apropriada para descrever o tensor de spin de campos fonte a definição teleparalela (7.19).

Finalmente, é importante observar que a prescrição teleparalela

$$\begin{gathered} \delta_a^{\mu} \equiv \partial_{\mu} x^a \to h_a{}^{\mu} \\ \partial_{\mu} \to \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{2} K^{ab}{}_{\mu} J_{ab} \end{gathered} \tag{7.27}$$

corresponde à versão algébrica, isto é, com os geradores de Lorentz escritos no espaço tangente (fibra), da derivada covariante teleparalela

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu} - K_{\mu}$$

a qual é válida para tensores no espaço-tempo. O grande mérito desta prescrição é que ela preserva a equivalência entre as descrições riemanniana e teleparalela da interação entre campos de matéria com gravitação, sendo coerente, portanto, com o que ocorre com as versões riemanniana e teleparalela da lagrangeana para o campo gravitacional.

Capítulo 8

Conclusões

Muitas teorias da atualidade consideram, além da curvatura, a presença de torção no espaço-tempo, seguindo a linha das teorias de Riemann-Cartan. Essas teorias prevêem resultados que estão além daqueles previstos pela RG, fugindo portanto de suas previsões observacionais. Nesse contexto, é importante mencionar que, até o presente momento, não existe nenhuma evidência experimental da necessidade de se introduzir torção, além de curvatura, para se descrever qualquer fenômeno conhecido.

Neste trabalho, discutimos uma teoria de gauge para a gravitação que resulta ser totalmente equivalente à RG, e que por isso é conhecida com o nome de *Equivalente Teleparalelo da RG*. Neste sentido, ela dá conta de todos os resultados observacionais conhecidos e, além disso, possui a vantagem adicional de ser uma teoria de gauge, estando alguns passos à frente em direção a uma possível unificação.

Um ponto interessante a se ressaltar é a diferente concepção de trajetória dada nas duas descrições. Enquanto a RG geometriza o espaço-tempo, atribuindo o campo à própria curvatura, o que resulta nas equações das geodésicas para partículas sem spin, o teleparalelismo atribui o campo à torção, a qual atua como uma força sobre as partículas, resultando assim, não numa geodésica, mas numa equação de força análoga à força de Lorentz do eletromagnetismo.

Outro resultado importante e curioso é o fato de que, no nosso formalismo, tanto campos escalares como campos vetoriais, sentem e produzem torção no espaço-tempo. Os trabalhos iniciados na década de 40, e até hoje desenvolvidos [18, 59], relacionam as distribuições de spin como as únicas fontes de torção. Da mesma forma como energia e momento atuam como fonte de curvatura na RG, no equivalente teleparalelo da RG essas mesmas grandezas atuam como fonte de torção.

Na tentativa de compreender melhor a questão dos campos fundamentais e gravitação, utilizamos a descrição da RG para obter uma equação que, num certo sentido, serve como base para descrever os diversos campos da natureza. Vimos que tal descrição unificada só é possível desde que levemos em conta a chamada razão gravito-giromagnética, a qual assume o valor 2 para campos com spin semi-inteiro, e o valor 1 para campos com spin inteiro. Existe, porém, uma questão delicada sobre a escolha das representações do grupo de Lorentz, que ainda deve ser melhor compreendida.

Finalmente, devemos acrescentar que o ponto principal do trabalho é a escolha de uma prescrição diferente para o acoplamento de qualquer campo com a gravitação, que não é minimal no sentido usual, mas que preserva a equivalência com o acoplamento minimal da RG. Tal prescrição não viola, por exemplo, a invariância de gauge do eletromagnetismo, e possibilita o acoplamento do campo eletromagnético com a torção do espaço-tempo. Esta prescrição foi também aplicada ao campo espinorial, resultando ser a única escolha coerente com a RG.

Referências

[1] Ver, por exemplo, D. Ivanenko and G. Sardanashvily, Phys. Rep. **94**, 1 (1983).

[2] C. Møller, *The Theory of Relativity* (Claredon Press, Oxford, 1972).

[3] V. Rodichev, *Gravitation Theory in Orthonormal Quaternaries* (Nauka, Moskow, 1974), em russo.

[4] J. Isenberg and J. Nester, in *General Relativity and Gravitation*, ed. by A. Held (Plenum Press, New York and London, 1980).

[5] Ver, por exemplo, F. Gronwald and F. Hehl, *14th Course of the School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity*, Erice, Italy (1995).

[6] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Gravitational Energy-Momentum in Teleparallel Gravity* (submetido para publicação).

[7] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Teleparallel Equivalent of Kaluza-Klein*, gr-qc/9909004, aceito para publicação pela Phys. Rev. D.

[8] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften Berlin, 465 (1918).

[9] D. W. Sciama, in *Recent Developments in General Relativity* (Pergamon Press and PWN, Warsaw, 1962).

[10] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[11] E. Cartan, *Sur une generalisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, C. R. Acad. Sci. **174**, 593 (1922); *Sur les variétés à*

connexion affine et la théorie de la relativitée généralisée I e II, Ann. Ec. Norm. Sup. **40**, 325; **41**, 1; **42**, 17.

[12] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 217 (1928); 224 (1928); 2 (1929); 156 (1929); 18 (1930); 401 (1930); 110 (1930).

[13] C. Møller, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr, **1**, no. 10 (1961).

[14] C. Pellegrini and J. Plebanski, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. **2**, no. 2 (1962).

[15] K. Hayashi and T. Nakano, Prog. Theor. Phys. **38**, 491 (1967).

[16] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979).

[17] F. W. Hehl, in *Cosmology and Gravitation*, ed. by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980).

[18] F. W. Hehl, P. von der Heyde and G. D. Kerlick, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[19] W. Kopczyński, J. Phys. A **15**, 493 (1982).

[20] R. de Azeredo Campos and C. G. Oliveira, Nuovo Cimento B **74**, 83 (1983).

[21] F. Müller-Hoissen and J. Nitsch, Gen. Rel. Grav. **17**, 747 (1985).

[22] E. W. Mielke, Ann. Phys. (NY) **219**, 78 (1992).

[23] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[24] R. S. Tung and J. M. Nester, Phys. Rev. D **60**, 21501 (1999).

[25] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **35**, 335 (1994); J. Math. Phys. **37**, 6302 (1996); Gen. Rel. Grav. **31**, 173 (1999).

[26] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**, 4689 (1998).

[27] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (Noordhoff, Gronningen, 1923).

[28] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[29] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Intersciense, New York, 1963).

[30] P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer* (Benjamin/Cummings, Reading, 1981).

[31] Y. M. Cho, Phys. Rev. D **14**, 2521 (1976).

[32] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford, 1971).

[33] S. K. Wong, Nuov. Cim. **65**, 689 (1970).

[34] W. Drechsler, Phys. Lett. B **90**, 258 (1980).

[35] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).

[36] Ver, por exemplo, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[37] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Gen. Rel. Grav. **30**, 263 (1998).

[38] N. D. Birrel, and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spacetime* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).

[39] R. T. Hammond, Gen. Rel. Grav. **28**, 749 (1996).

[40] V. de Sabbata and C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation* (World Scientific, Singapore, 1994).

[41] A. Saa, Gen. Rel. Grav. **29**, 205 (1997).

[42] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Int. J. Mod. Physics D **8**, 141 (1999).

[43] V. A. Fock, Z. Phys. **57**, 261 (1929).

[44] M. J. G. Veltman, *Quantum Theory of Gravitation*, in *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975, ed. by R. Balian and J . Zinn-Justin (North–Holland, Amsterdam, 1976).

[45] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press, Princeton, 1995).

[46] K. Yee and M. Bander, Phys. Rev. D **48**, 2797 (1993).

[47] F. W. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in *Geometry and Theoretical Physics*, ed. by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin, 1992).

[48] I. B. Khriplovich, Sov. Phys. JETP **69**, 217 (1989).

[49] R. Aldrovandi, V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. A (2000), em impressão.

[50] R. Aldrovandi, V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Gravitational Gyromagnetic Ratios for Fields of Spin 3/2 and 2*, Proceedings of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics (París, France), ed. by T. Montmerle (Elsevier, Amsterdam, 1999)

[51] P. A. M. Dirac, in *Planck Festscrift*, ed. W. Frank (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958).

[52] C. G. Oliveira and J. Tiomno, Nuovo Cimento **24**, 672 (1962).

[53] F. W. Hehl, A. Macias, E. W. Mielke and Yu. N. Obukhov, in: *On Einstein's Path*, Festschrift for E. Schucking in the occasion of his 70^{th} birthday, ed. by A. Harvey (Springer, Berlin, 1998).

[54] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw Hill, New York, 1980).

[55] Ver ref. [45], pag.354.

[56] Ver, por exemplo, N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Quantum Fields* (The Benjamin/Cummings Publishing, Reading, 1983).

[57] Ver, por exemplo, S. M. Christensen and M. J. Duff, Nucl. Phys. B **154**, 301 (1979).

[58] Ver, por exemplo, D. Lurie, *Particles and Fields* (Interscience Publishers, New York, 1968).

[59] A. Papapetrou, Proc. R. Soc. (London) A **209**, 248 (1951).