
Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Equações diferenciais implícitas com descontinuidades

Bruno Domiciano Lopes

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São José do Rio Preto

Março - 2016

BRUNO DOMICIANO LOPES

Equações diferenciais implícitas com descontinuidades

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de Geometria e Topologia junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Professor Livre-Docente

UNESP - São José do Rio Preto/SP

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto/SP

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado

Professor Titular

Universidade Federal de Goiás - Goiânia/GO

Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

Professor Doutor

IMECC/Unicamp - Campinas/SP

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Professor Doutor

UNESP - Ilha Solteira/SP

São José do Rio Preto, 18 de março de 2016

Lopes, Bruno Domiciano.

Equações diferenciais implícitas com descontinuidades / Bruno Domiciano Lopes. -- São José do Rio Preto, 2016
165 f. : il.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Método da média (Equações diferenciais) 4. Geometria. 5. Topologia. 6. Ciclo limite.
I. Silva, Paulo Ricardo da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por esta oportunidade e por me guiar nessa jornada.

Agradeço ao meu orientador Prof Dr Paulo Ricardo da Silva pelos ensinamentos, paciência e atenção dedicada para a realização deste trabalho.

Agradeço ao Prof Dr Jaume Llibre pela orientação durante meu estágio na UAB em Barcelona.

Agradeço ao Prof Dr Marco Antonio Teixeira pela orientação durante meu estágio na UNICAMP em Campinas.

Agradeço aos meus pais Luiz e Beni, irmãos Thiago e Nathalia que sempre deram apoio aos meus estudos.

Agradeço a minha namorada Daniela pelo amor, carinho e paciência nesse período.

Agradeço a todos meus amigos que de alguma forma contribuíram neste trabalho, em especial ao Jaime, Clayton, Douglas, Iris, Jackson, Rubens, Rodrigo.

Agradeço aos Professores do Departamento de Matemática do IBILCE /UNESP.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Luiz e Beni
dedico.

Resumo

Nesta tese trabalhamos com sistemas dinâmicos não-suaves expressos por equações diferenciais implícitas descontínuas de primeira ordem da forma

$$\dot{x} = 1, \quad (\dot{y})^2 = \begin{cases} g_1(x, y) & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0, \\ g_2(x, y) & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

onde $g_1, g_2, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. O principal interesse é estudar a dinâmica deslizante de tais sistemas em torno de algumas singularidades típicas. A novidade da nossa abordagem é que alguns problemas de perturbação singular da forma

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad (\varepsilon \dot{y})^2 = g(x, y, \varepsilon)$$

surtem quando aplicamos a regularização Sotomayor–Teixeira com $(x, y) \in U$, $\varepsilon \geq 0$, e f, g são suaves em todas as variáveis.

Para os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos em $\mathbb{R}^2$ que possuem centros, estudamos o número máximo de ciclos limites que podem bifurcar de algumas famílias de sistemas diferenciais planares polinomiais de grau 3, com integrais primeiras racionais de grau 2, quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas polinomiais diferenciais cúbicos. Obtemos um polinômio explícito cuja as raízes simples reais positivas fornecem os ciclos limites que bifurcam a partir das órbitas periódicas de qualquer sistemas diferenciais polinomiais homogêneos–ponderados que tem um centro com (*grau–ponderado*, (*expoente–ponderado*)) $(3, (1, 1))$, $(2, (1, 2))$ e $(3, (1, 3))$ quando é perturbado dentro de todas as classes de sistemas diferenciais polinomiais de grau n , 3 e 5 respectivamente.

Palavras–chave: Ciclos Limites. Campo de Vetores Planares. Centros

Isócronos. Método do “averaging”.

Abstract

In this thesis we deal with non-smooth dynamical systems expressed by piecewise first order implicit differential equations of the form

$$\dot{x} = 1, \quad (\dot{y})^2 = \begin{cases} g_1(x, y) & \text{if } \varphi(x, y) \geq 0, \\ g_2(x, y) & \text{if } \varphi(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

where $g_1, g_2, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ are smooth functions and $U \subseteq \mathbb{R}^2$ is an open set. The main concern is to study sliding modes of such systems around some typical singularities. The novelty of our approach is that some singular perturbation problems of the form

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad (\varepsilon \dot{y})^2 = g(x, y, \varepsilon)$$

arise when the Sotomayor–Teixeira regularization is applied with $(x, y) \in U$, $\varepsilon \geq 0$, and f, g smooth in all variables.

For the cubic polynomial differential systems in $\mathbb{R}^2$ with centers we study the maximum number of limit cycles that bifurcate from some families of planar polynomial differential systems of degree 3 with rational first integrals of degree 2 when they are perturbed inside the classes of all cubic polynomial differential systems. We obtain an explicit polynomial whose simple positive real roots provide the limit cycles which bifurcate from the periodic orbits of any weight–homogeneous polynomial differential systems having centers with $(\text{weight-degree}, (\text{weight-exponent}))$ $(3, (1, 1))$, $(2, (1, 2))$ e $(3, (1, 3))$ when it is perturbed inside the class of all polynomial differential systems of degree n , 3 and 5 respectively

Keywords: Limit cycles. Planar Vector Fields. Isochronous Centers. Averaging Method.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares sobre equações diferenciais implícitas	18
1.1 Equações diferenciais implícitas	18
1.2 Equações diferenciais ordinárias implícitas com grau 2	21
1.3 Campos vetoriais descontínuos	23
2 Sistemas diferenciais implícitos com descontinuidades	25
2.1 Sistemas diferenciais implícitos com descontinuidades e o conjunto Ω . . .	25
2.2 Principais resultados	27
2.3 Demonstrações dos principais resultados	30
2.4 Sistemas diferenciais implícitos descontínuos e perturbação singular	37
3 Método de “averaging”	40
3.1 Método de “averaging” de primeira ordem	40
3.2 Método de “averaging” de k-ésima ordem	42
3.3 Método de “averaging” com $F_0 \neq 0$	45
3.4 Resultados utilizados nas provas dos Teoremas	46
4 Ciclos limite para uma classe de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos contínuos e descontínuos	49
4.1 Introdução e enunciados dos principais resultados	49
4.2 Prova do Teorema 13	51
4.3 Prova do Teorema 14	57

5 Ciclos limite de sistemas polinomiais diferenciais cúbicos com integrais primeiras racionais de grau 2	68
5.1 Introdução e enunciados dos principais resultados	68
5.2 Prova do Teorema 15	73
5.2.1 Prova para a Classe P_1	73
5.2.2 Prova para a Classe P_4	79
5.2.3 Prova para a Classe P_6	81
5.3 Prova do Teorema 16	85
5.4 Comentários sobre as classes P_3 e P_5	91
5.5 Prova do Teorema 17	93
5.5.1 Prova para a classe P_3	93
5.5.2 Prova para a classe P_5 com $d = 0$	95
5.6 Exemplo com 3 ciclos para a classe P_5	98
6 Ciclos limites que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais homogêneos cúbicos	102
6.1 Introdução e enunciados dos principais resultados	102
6.2 Prova do Teorema 18	104
6.2.1 Exemplo	108
7 Ciclos limite que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais Homogêneos-Ponderados de grau-ponderado 2	110
7.1 Introdução e enunciados dos principais resultados	110
7.2 Prova da afirmação (a) do Teorema 19	112
7.3 Prova da afirmação (b) do Teorema 19	117
8 Ciclos limite que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais Homogêneos-Ponderados de grau-ponderado 3	120
8.1 Introdução e enunciados dos principais resultados	120
8.2 Prova do Teorema 20	123
8.3 Prova do Teorema 21	127

8.4 Exemplos	132
Perspectivas Futuras	136
Considerações Finais	138
A Fórmulas das funções y_6 e y_7	139
B Algoritmo no Mathematica	141
Referências	159

Introdução

Nos últimos anos detectamos um aumento considerável dos números de pesquisas relacionadas a sistemas dinâmicos não suaves.

Isto deve-se ao fato que diversos problemas oriundos da física e da teoria do controle, entre outros, encontram em tais sistemas seu modelo ideal.

Nesta tese, duas ferramentas são desenvolvidas para o estudo de tais sistemas:

(a) **Sistemas diferenciais não suaves definidos implicitamente.**

No artigo [50] foram desenvolvidas ferramentas de uso geral para o estudo da geometria qualitativa de sistemas não-suaves. A lista de ferramentas teórica que podemos empregar é longa: teoria de singularidades, processo de regularização, o método de blowing-up e perturbação singular. No Capítulo 2 trabalhamos com sistemas dinâmicos não-suaves expressos por equações diferenciais implícitas de primeira ordem descontínua.

Considere F uma aplicação C^2 definida em torno $q_0 = (x_0, y_0, \dot{y}_0) \in \mathbb{R}^3$. Sabemos que uma equação dada implicitamente

$$F(x, y, \dot{y}) = 0,$$

pode ser resolvida como $\dot{y} = f(x, y)$ provando que $D_{\dot{y}}F(q_0) \neq 0$. No Capítulo 2 investigamos soluções das equações sem essa condição. Mais precisamente, consideramos equações que satisfaçam $D_{\dot{y}}F(q_0) = 0$ mas assumimos que $D_{\dot{y}\dot{y}}F(q_0) \neq 0$. Neste sentido em coordenadas locais podemos considerar

$$F(x, y, \dot{y}) = (\dot{y})^2 - g(x, y).$$

Muitos autores têm contribuído para o estudo de equações implícitas de primeira ordem e problemas relacionados, por exemplo, [4, 7, 17, 18]. Também nos referimos [61] como uma leitura inspiradora sobre o assunto.

Considere equações implícitas descontínuas tendo a seguinte forma

$$(\dot{y})^2 = \begin{cases} g_1(x, y) & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0, \\ g_2(x, y) & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, e $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto (veja Figuras 1 e 2). Não são conhecidos estudos sobre este tipo de equação, até o momento.

Agora apresentaremos um exemplo ilustrativo.

Exemplo 1. Suponha que uma partícula de massa $m = 1$ está em movimento numa linha, sob a ação de um potencial u e uma força de atrito que é proporcional a velocidade com fator de proporcionalidade $k \geq 0$. Pela segunda lei de Newton a equação do movimento é

$$\ddot{x} = -\dot{u}(x) - k(x)\dot{x}; \quad (2)$$

onde x é a posição, $\dot{x}$ é a velocidade e $\ddot{x}$ é a aceleração da partícula. Como de costume, tomamos $\dot{x} = y$ e $\ddot{x} = \dot{y}$ temos o sistema planar

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \ddot{x} = -\dot{u}(x) - k(x)y \quad (3)$$

Se $k = 0$ o sistema é conservativo, e a energia total

$$E = \frac{y^2}{2} + u(x)$$

é uma integral primeira. Isso significa que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de E .

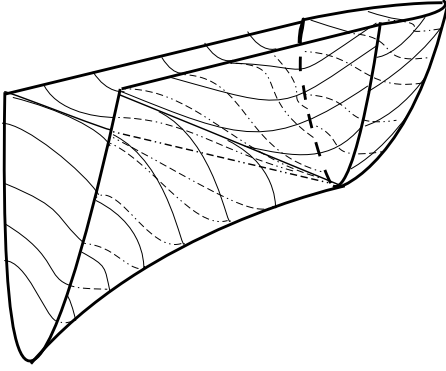


Figura 1: Curvas integrais definidas na superfície definida por (1).

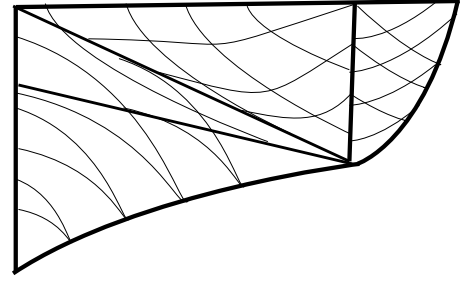


Figura 2: Projeções das curvas integrais no plano (x, y) .

Para $k > 0$ as trajetórias no plano x, E coincidem com a família de curvas integrais de uma equação diferencial implícita. De fato, derivando a energia total temos

$$\dot{E} = -2k(x)(E - u(x)).$$

Como $y^2 = 2(E - u(x))$, $\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 = \frac{\dot{E}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{E}^2}{y^2}$, as trajetórias no plano x, E satisfazem

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 = 2k(x)^2(E - u(x)) = g(x, E).$$

A equação implícita descontínua é obtida considerando o exemplo inicial dessa seção, mas com descontinuidade na força de atrito. Mais precisamente, a partir de um ponto x_σ a força de atrito tem outro fator $k_1 > 0$, com $k_1 \neq k$. Assim, a nossa equação torna-se

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 = \begin{cases} 2k(x)^2(E - u(x)) & x < x_\sigma \\ 2k_1(x)^2(E - u(x)) & x > x_\sigma \end{cases}.$$

□

Se assumirmos que a variável x representa o tempo, então a equação (1) corresponde ao sistema

$$\dot{x} = 1, \quad (\dot{y})^2 = g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y), & \varphi(x, y) \geq 0 \\ g_2(x, y), & \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Nosso interesse principal é exibir as condições para a existência de movimento de deslize sobre a curva de descontinuidade $\varphi(x, y) = 0$.

A seguir discutimos brevemente os principais resultados que provamos no Capítulo 2. Os enunciados precisos dos teoremas são apresentados nas Seções 2.2 e 2.4.

Considere um sistema como (4) com curva de descontinuidade dada por $\Sigma = \{\varphi(x, y) = 0\}$. A curva Σ divide o domínio U em duas sub-regiões $\Sigma_+ = \{\varphi(x, y) > 0\}$ e $\Sigma_- = \{\varphi(x, y) < 0\}$. Para cada sistema associamos quatro possíveis pares de campos vetoriais selecionados a partir de $\frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{g_i} \frac{\partial}{\partial y}, i = 1, 2$, nas regiões Σ_+ e Σ_- .

- (A) Se $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ (resp. $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$) fizemos uma classificação completa dos pontos de Σ como costura, deslize ou escape para cada escolha possível de campos vetoriais. Veja Teorema 1 (resp. Teorema 2).
- (B) Classificamos os pontos da região Σ quando os campos de vetores em ambos os lados de Σ são os genéricos apresentados na Tabela 1.1, Seção 1.2. Veja Teoremas 3 e 4 .
- (C) Uma expressão explícita para o sistema deslizante que ocorre na região Σ é dada para o caso $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$. Veja Teorema 5
- (D) Sob certas condições sobre a função de transição, a regularização dos sistemas diferenciais implícitos descontínuos fornece uma perturbação singular implícita. Em geral, esta transição pode ser feita explicitamente. Veja Teorema 6.

Organizamos a primeira parte da tese da seguinte forma. Nas seções 1.1,1.2 introduzimos noções básicas de equações diferenciais implícitas. Para obter mais detalhes veja [4, 7, 18]. Nas seções 1.3,2.1 apresentamos campos vetoriais descontínuos e o processo de regularização seguindo as referências [10, 19, 50, 53, 60]. Nas seções 2.2 e 2.3 apresentamos e provamos nossos resultados, classificando as regiões de descontinuidades de DIDS (sistema diferencial implícito descontínuo) e na seção 2.4 regularizamos sistemas diferenciais implícitos descontínuos.

(b) **Método do “averaging” para determinar ciclos limites de sistemas suaves e não suaves.**

Um dos principais problemas na teoria qualitativa de sistemas diferenciais planares é determinar seus ciclos limite. Uma maneira clássica de produzir ciclos limites é perturbando um sistema que tem um centro. Assim os ciclos limites que bifurcam do sistema perturbado a partir de alguma órbita periódica de um anel periódico de um centro de um sistema não perturbado, veja por exemplo Pontrjagin [57], e a segunda parte do livro [15] e as centenas de referências nele citadas.

O estudo do número de ciclos limite de um sistema diferencial polinomial é principalmente motivado pelo 16º problema de Hilbert, que junto com a conjectura de Riemann são dois problemas da lista famosa dos 23 problemas de Hilbert que ainda permanecem abertos. Veja [31] e [59] para mais detalhes.

Essencialmente, existem quatro métodos para determinar o número de ciclos limite que bifurcam das órbitas periódicas de um centro, veja [26, 37, 65, 66]. O primeiro método é baseado na aplicação de Poincaré, veja por exemplo [6, 14]. O segundo método usa as integrais de Poincaré-Pontrjagin-Melnikov (veja por exemplo [29, 28, 30]) ou as integrais Abelianas.

Esses dois métodos são equivalentes no plano, veja a Seção 6 do Capítulo 4 de [27] e a Seção 5 do Capítulo 6 de [3]. O terceiro método é baseado no fator integrante inverso, veja a Seção 6 de [23] ou [24, 25, 63]. O último método é baseado na teoria do “averaging”, veja por exemplo [9, 58, 62]. De [9] é fácil checar que no plano o método do “averaging” de primeira ordem é equivalente ao método das integrais Abelianas. Além disso, os dois primeiros métodos sempre dão informações sobre o número de órbitas periódicas do sistema não perturbado que tornam ciclos limite após a perturbação. Os últimos dois métodos também podem dar a forma do ciclo limite bifurcado até a ordem do parâmetro de perturbação, veja [24, 25, 38]. Organizamos a segunda parte da tese da seguinte forma. Nas seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 introduzimos noções básicas do método do “averaging” e os resultados que utilizaremos nas provas dos teoremas.

- No Capítulo 4 estudamos o número máximo de ciclos limite que bifurcam a partir das soluções periódicas de um família de centros polinomiais cúbicos isócronos, veja [13]

$$\dot{x} = y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2), \quad \dot{y} = x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta < 0,$$

quando é perturbado dentro das classes de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos contínuos e descontínuos. Obtemos que o número máximo de ciclos limite que podem ser obtido pelo método de “averaging” de primeira ordem é 3 para o sistema perturbado contínuo (veja Teorema 13) e para o sistema perturbado descontínuo pode aparecer pelo menos 12 ciclos limites (veja Teorema 14).

- No Capítulo 5 o principal resultado é o estudo do número máximo de ciclos limites que bifurcam a partir do anel periódico de um centro cúbico que tem uma integral primeira racional de grau 2 quando é perturbado dentro das classes de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos usando a teoria do “averaging” (veja os Teoremas 15, 16 e 17) .
- Considere o sistema diferencial polinomial dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{5}$$

onde P e Q são polinômios com coeficientes reais, o *grau* do sistema é o máximo dos graus dos polinômios P e Q .

O sistema (5) é chamado de *homogêneo-ponderado* se existe $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$ e $d \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$ temos

$$P(\lambda^{s_1}x, \lambda^{s_2}y) = \lambda^{s_1-1+d}P(x, y), \quad Q(\lambda^{s_1}x, \lambda^{s_2}y) = \lambda^{s_2-1+d}Q(x, y).$$

O vetor (s_1, s_2) é chamado de *expoente-ponderado* do sistema (5) e d é chamado *grau-ponderado* com respeito ao expoente-ponderado (s_1, s_2) .

Nossos principais resultados nos Capítulos 6, 7, 8 são *mostrar um polinômio explícito cujos os zeros simples reais positivos fornecem exatamente o número*

de ciclos limites que bifurcam na perturbação de primeira ordem, a partir das órbitas periódicas de qualquer centro de um sistema diferencial polinomial homogêneo-ponderado (5). Mais precisamente, no Capítulo 6 o sistema trabalhado tem grau-ponderado 3 e expoente-ponderado (1, 1), (veja o Teorema 18), no Capítulo 7 o sistema tem grau-ponderado 2 e expoente-ponderado (1, 2), (veja o Teorema 19) e no Capítulo 8 o sistema tem grau-ponderado 3 e expoente-ponderado (1, 3), (ver os Teoremas 20 e 21).

Finalmente descrevemos as perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares sobre equações diferenciais implícitas

Este capítulo é dedicado a introduzir definições, resultados e técnicas que serão utilizadas no decorrer do Capítulo 2. Em geral, não apresentaremos demonstrações e, em alguns casos, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

1.1 Equações diferenciais implícitas

Uma equação diferencial implícita é obtida da seguinte maneira. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função C^r com $r \geq 1$. Assumimos que 0 é um valor regular de F . Assim o conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por

$$M = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, p) = 0\} \quad (1.1)$$

é uma variedade C^r . Além disso, a variável p é a derivada $p = \frac{dy}{dx}$.

Nosso interesse é quando a derivada $F_p(q) = 0$ em algum $q \in M$. De fato, para $F_p(q) \neq 0$, pelo teorema da função implícita, existem $f(x, y)$ e uma vizinhança aberta V tal que para qualquer $(x, y, p) \in V$ temos

$$F(x, y, p) = 0 \iff p = f(x, y).$$

Considere um campo de direções na superfície M definido da seguinte maneira. Em um ponto $q_0 = (x_0, y_0, p_0) \in M$, considere o plano

$$CP_{q_0} = \{\theta = (x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : dy = p_0 dx\}.$$

Mais precisamente, $\theta \in CP_{q_0}$ tal que a projeção sobre o plano (x, y) forma um ângulo com o eixo x cuja tangente é igual p_0 . O plano CP_{q_0} é chamado de *plano de contato*. Assuma que CP_{q_0} intercepta o plano tangente $T_{q_0}M$ em uma reta. Além disso considere $CP_q \cap T_q M$ é uma reta para todo q próximo q_0 . Assim temos um campo de direções em M na vizinhança de q_0 .

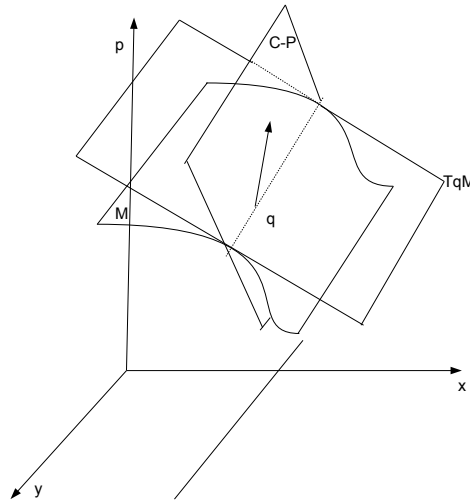


Figura 1.1: Campos de direções em $q \in M$.

As *curvas integrais* de $F(x, y, p) = 0$ são as curvas integrais desse campo de direções. Para resolver essa equação é necessário encontrar essas curvas.

Um campo de direção como descrito acima pode ser obtido tomando o campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.2)$$

A direção do eixo p no espaço $\mathbb{R}^3$ é chamado *direção vertical* e a projeção

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, p) = (x, y) \quad (1.3)$$

é chamada de projeção vertical.

Um ponto $q \in M$ é dito *regular* se ele não é ponto crítico de π . Em outras palavras, um ponto de M é regular se o plano tangente no ponto não é vertical. Os outros pontos da superfície M são dito *singulares* (os pontos tal que $F(q) = F_p(q) = 0$). O conjunto de pontos singulares é chamado *criminante* $\mathcal{C}$ de M e a sua imagem via a aplicação π é chamada *discriminante* $\mathcal{D}$. Note que se $q \in \mathcal{C}$ então $F(q) = F_p(q) = 0$. Se $F_{pp}(q) \neq 0$ então q é um ponto de *dobra* de F , e se $F_{pp}(q) = 0$ e $F_{ppp}(q) \neq 0$ q é um ponto de *cúspide* de F .

Exemplo 3. Considere a equação diferencial $p^2 = x$. Neste caso, a superfície M é um cilindro parabólico (veja (1.1)). A curva discriminante é o eixo y . Para encontrar as curvas integrais, escrevemos as condições de dx , dy e dp no ponto (x, y, p) da superfície M :

$$\begin{cases} p^2 &= x, & \text{a condição de pertencer a } M \\ 2pdp &= dx, & \text{a condição de pertencer ao tangente de } M \\ dy &= pdx, & \text{a condição de pertencer ao plano de contato} \end{cases}$$

Consequentemente, em coordenadas (p, y) , as curvas integrais são determinadas a partir da equação $dy = 2p^2 dp$.

Assim, as curvas integrais em M são dadas pelas relações $y + C = \frac{2}{3}p^3$, $x = p^2$ (ver Figura 1.2). As suas projeções no plano (x, y) são parábolas semicúbicas (veja a Figura 1.3).

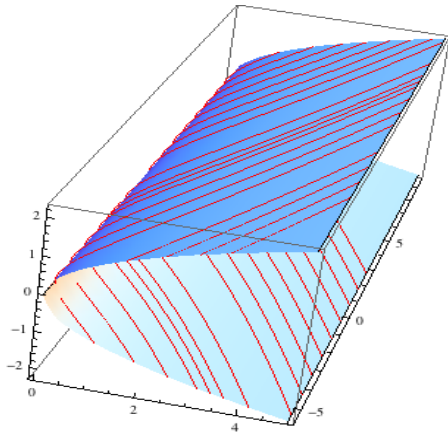


Figura 1.2: Curvas integrais em M .

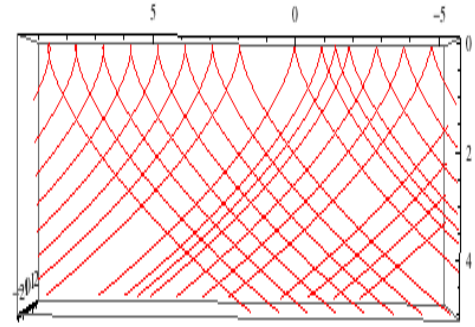


Figura 1.3: Projeções das curvas integrais no plano (x, y) .

1.2 Equações diferenciais ordinárias implícitas com grau 2

Agora vamos considerar equações do tipo

$$F(x, y, p) = p^2 - g(x, y) = 0 \quad (1.4)$$

onde $g(x, y)$ é uma função real C^1 satisfazendo $g(0, 0) = 0$. Como $F_{pp}(q) = 2$ todo $q \in \mathcal{C}$ é um ponto de *dobra* de F . Se $q \in \mathcal{C}$ então

$$\xi(q) = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p} = -F_x \frac{\partial}{\partial p}.$$

Podemos classificar os pontos $q \in \mathcal{C} \subset M$ da seguinte forma:

- (a) q é um ponto de *dobra regular* se $F_x(q) \neq 0$;
- (b) q é um ponto de *dobra singular* se $F_x(q) = 0$.

Como $\xi(q) = -F_x \frac{\partial}{\partial p}$ em $\mathcal{C}$ todas dobras singulares em $\mathcal{C}$, são pontos singulares de ξ . Dizemos que q é um ponto de *dobra sela* (resp. ponto de *dobra nó*, *dobra foco*) se q é uma singularidade sela (resp. singularidades nó, foco) de $\Pi \circ \xi$ onde $\Pi(x, y, p) = (x, p)$. É fácil ver que se $q \in \mathcal{C}$ com $F_y(q) \neq 0$ então:

- $F_{xx}(q) > 0 \Rightarrow q$ é uma dobra sela;
- $F_{xx}(q) < 0$ e $F_{xx}(q) > -\frac{1}{8}(F_y(q))^2 \Rightarrow q$ é uma dobra nó ;
- $F_{xx}(q) < 0$ e $F_{xx}(q) < -\frac{1}{8}(F_y(q))^2 \Rightarrow q$ é uma dobra foco.

Dizemos que $q \in \mathcal{C}$ é uma dobra Clairaut se $F_y(q) \neq 0$ e $F_{xx}(q) = 0$.

Se um ponto de dobra singular $q \in \mathcal{C}$ satisfaz $F_y(q) = 0$ são casos mais degenerados. Em [18] os autores apresentam a lista completa de singularidades genéricas de sistemas de primeira ordem implícitos sob uma equivalência orbital suave no plano. Ver Tabela 1.1. Dois germes de superfícies do sistema são chamados de *orbitalmente equivalentes* se existe um germe de difeomorfismo que leva qualquer curva de fase de um sistema para uma curva de fase do outro sistema.

Folded regular point (FR)	Folded saddle (FS)
$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = x \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = y - kx^2 \end{cases}, k < 0$
Folded node(FN)	Folded focus (FF)
$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = y - kx^2 \end{cases}, 0 < k < 1/16$	$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = y - kx^2 \end{cases}, k > 1/16$
Whitney umbrella point (FW)	Clairaut fold (FC)
$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = x(x - y)^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1 \\ \dot{y}^2 = y \end{cases}$
Clairaut Whitney umbrella (CW)	
$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y}^2 = x^2 y \end{cases}$	

Tabela 1.1: Singularidades genéricas de sistemas diferenciais implícitos de primeira ordem.

1.3 Campos vetoriais descontínuos

Considere um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função C^∞ tendo $0 \in \mathbb{R}$ um valor regular para qualquer $q \in \Sigma = \varphi^{-1}(0)$. Denotamos Λ o conjunto de campos de vetores $X = (X_1, X_2)$ tal que

$$X(q) = \begin{cases} X_1(q), & \text{se } q \in \Sigma^+ = \{\varphi(q) \geq 0\} \\ X_2(q), & \text{se } q \in \Sigma^- = \{\varphi(q) \leq 0\} \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $X_1, X_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ são campos de vetores suaves definidos em U . A topologia que consideramos em Λ é a topologia produto usual. Para mais detalhes ver [10, 19, 51].

Dizemos que $q \in \Sigma$ é *regular* se X_1 e X_2 atravessam Σ , caso contrário, q é dito *singular*. Seguindo a terminologia estabelecida em [22], os pontos regulares em Σ são classificados como:

- região de deslize (ambos apontam para Σ):

$$\Sigma_{sl} = \{X_1\varphi < 0, X_2\varphi > 0\};$$

- região de escape (ambos deixam Σ):

$$\Sigma_{es} = \{X_1\varphi > 0, X_2\varphi < 0\};$$

- região de costura (um aponta para Σ e outro sai de Σ):

$$\Sigma_{sw} = \{(X_1\varphi)(X_2\varphi) > 0\}.$$

Tomando $\Sigma_s = \Sigma_{sl} \cup \Sigma_{es}$ sendo o fluxo deslizando, segue bem definido um campo de vetor suave X_s chamado campo de vetor deslizando. Definimos $X_s(p)$ sendo o vetor tangente a Σ e contido no cone gerado por X_1 e X_2 .

Dizemos que um ponto $q \in \Sigma$ é *ponto de dobra* de $X \in \Lambda$ se $X\varphi = 0$ e $X^2\varphi \neq 0$. Dizemos que $q \in \Sigma$ é um *ponto singular* de X se q é um ponto de dobra de X_1 ou

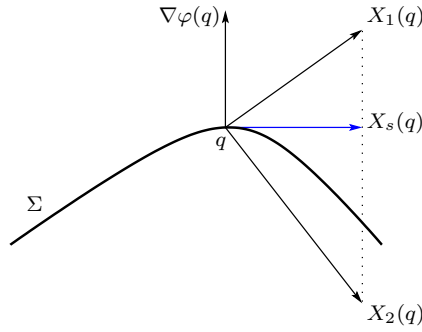


Figura 1.4: Campo de vetores deslizante.

q é um ponto de dobra de X_2 ou $(X_1\varphi)(X_2\varphi) < 0$ e $\det[X_1, X_2] = 0$.

Uma ferramenta importante para o estudo de sistemas dinâmicos não-suaves é o processo de regularização. Uma função $C^\infty, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função transição* se $\psi(t) = -1$ para $t \leq -1$, $\psi(t) = 1$ para $t \geq 1$ e $\psi(t)' > 0$ se $t \in (-1, 1)$. A ψ -regularização de $X = (X_1, X_2) \in \Lambda$, é uma família a um parâmetro $\hat{X}_\varepsilon$ dado por

$$X_\varepsilon = \left(\frac{1}{2} + \frac{\psi_\varepsilon(\varphi)}{2} \right) X_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\psi_\varepsilon(\varphi)}{2} \right) X_2 \quad (1.6)$$

com $\psi_\varepsilon(t) = \psi(\frac{t}{\varepsilon})$, para $\varepsilon > 0$. Note que X_ε é igual a X_1 em todos os pontos de Σ^+ cuja distância de Σ é maior do que ε e X_ε é igual a X_2 em todos os pontos de Σ^- cuja distância de Σ é maior do que ε . Para mais detalhes ver [50, 53, 60]. Uma descrição de alguns aspectos qualitativos e geométricos da teoria de sistemas dinâmicos não-suaves em torno de singularidades típicas pode ser encontrada em [52].

Capítulo 2

Sistemas diferenciais implícitos com descontinuidades

2.1 Sistemas diferenciais implícitos com descontinuidades e o conjunto Ω

Seja $V \in \mathbb{R}^2$ uma vizinhança aberta de $(0, 0)$. Considere $g_i, i = 1, 2$, sendo funções reais de classe C^1 em V com $g_i(0, 0) = 0$ e os sistemas diferenciais implícitos:

$$S_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - g_i(x, y)) = (0, 0), \quad i = 1, 2;$$

com (x, y) pertencente a $U_i \subseteq V$ dado por $U_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_i(x, y) > 0\}$.

Considere M_1 e M_2 as superfícies definidas por $(\dot{y})^2 - g_1(x, y) = 0$, $(\dot{y})^2 - g_2(x, y) = 0$ respectivamente no espaço $(x, y, \dot{y})$. Seja $T = M_1 \cap M_2$ e $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Se $T \neq \emptyset$ denotamos $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ o sistema definido por

$$\begin{cases} S_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) = g_1(x, y) - g_2(x, y) \geq 0 \\ S_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) = g_1(x, y) - g_2(x, y) \leq 0 \end{cases}. \quad (2.1)$$

Note que S_1 e S_2 define quatro campos de vetores descontínuos $(V_{1\alpha}, V_{2\beta}) \in \Lambda, \alpha, \beta =$

$\{+, -\}$ dados por

$$V_{i,+}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{g_i(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (x, y) \in U_i,$$

e

$$V_{i,-}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{g_i(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (x, y) \in U_i.$$

Exemplo Considere as equações diferenciais implícitas

$$S_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x) = (0, 0)$$

com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a desigualdade $x \geq 0$; e

$$S_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - y) = (0, 0)$$

com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a desigualdade $y \geq 0$.

Agora tomando o sistema descontínuo

$$S(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} S_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \{0, 0\}, & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0 \\ S_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \{0, 0\}, & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x - y$ e $\Sigma = \varphi^{-1}(0)$ (veja Figura 2.1).

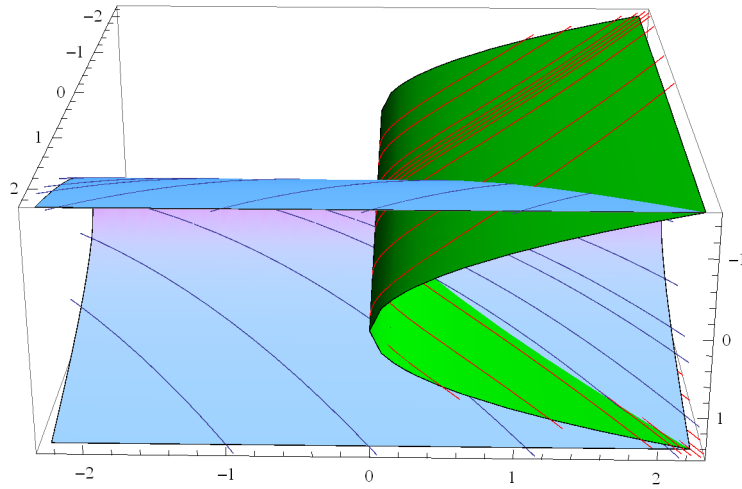


Figura 2.1: As superfícies definidas por $(\dot{y})^2 - x = 0$ e $(\dot{y})^2 - y = 0$.

Uma vez que um sistema diferencial implícito descontínuo (DIDS) define quatro campos de vetores não-suaves (descontínuo) temos que $q \in \Sigma$ pode ser um ponto de costura para uma escolha α, β e um ponto de deslize para outra. Encontramos as regiões de deslize e de costura em Σ avaliando o sinal da derivada de Lie:

$$[V_{i,+} \cdot \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sqrt{g_i} \quad \text{e} \quad [V_{i,-} \cdot \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sqrt{g_i}.$$

2.2 Principais resultados

Nesta seção, apresentaremos os nossos principais resultados. Considerando como anteriormente $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ um par como (2.1).

Teorema 1. *Se $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ satisfaz que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0$, para qualquer $(x, y) \in U$, então os pontos regulares em Σ são classificados como mostra a Tabela (2.1).*

Λ	Σ_{sw}	$\Sigma_{sl} \cup \Sigma_{cs}$
(V_{1+}, V_{2+})	Σ	$\emptyset$
(V_{1+}, V_{2-})	$\emptyset$	Σ
(V_{1-}, V_{2+})	$\emptyset$	Σ
(V_{1-}, V_{2-})	Σ	$\emptyset$

Tabela 2.1: Regiões de costura, deslize e escape para $(S_1, S_2) \in \Omega$ com $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0$.

Se $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ com $S_1 \neq S_2$ e $S_1, S_2 \in \{FF, FN, FS, FC\}$, (veja aTabela 1.1) então (S_1, S_2) satisfaz a hipótese do Teorema 1.

Teorema 2. *Se $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ satisfaz que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0$, para qualquer $(x, y) \in U$, então $\Sigma = \Sigma_{sw}$ para todo $(V_{1i}, V_{2j}) \in \Lambda$ com $i, j \in \{+, -\}$.*

O próximo teorema analisa pares de sistemas implícitos FR, FS, FN e FF da Tabela (2.1). Denotamos $M_i = \{p^2 - g_i(x, y) = 0\}$, $i = 1, 2$ e $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção $\pi(x, y, p) = (x, y)$.

Teorema 3. Considere $(S_1, S_2) = (FR, t) \in \Omega$, onde $t \in I = \{FS, FN, FF\}$. Assumindo $\Sigma = \pi(M_1 \cap M_2)$ temos $\Sigma = \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 \cup \bar{\Sigma}_3$ para $k < \frac{1}{8}$ onde

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, x + kx^2) : x < \frac{1 - \sqrt{1 - 8k - 4k}}{8k^2}\}; \\ \Sigma_2 &= \{(x, x + kx^2) : \frac{1 - \sqrt{1 - 8k - 4k}}{8k^2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 - 8k - 4k}}{8k^2}\}; \\ \Sigma_3 &= \{(x, x + kx^2) : x > \frac{1 + \sqrt{1 - 8k - 4k}}{8k^2}\}.\end{aligned}$$

Além disso, os pontos regulares em Σ para os casos $t = FS, FN, FF$ são classificados como mostra as Tabelas 2.2, 2.3 e 2.4 respectivamente.

Teorema 3 é provado na seção 2.3.

Λ	Σ_{sw}	Σ_{sl}	Σ_{es}
(V_{1+}, V_{2+})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$
(V_{1+}, V_{2-})	$\Sigma_1 \cup \Sigma_3$	Σ_2	$\emptyset$
(V_{1-}, V_{2+})	$\Sigma_1 \cup \Sigma_3$	$\emptyset$	Σ_2
(V_{1-}, V_{2-})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabela 2.2: Regiões de costura, deslize e escape para o sistema (FR, FS) .

Λ	Σ_{sw}	Σ_{sl}	Σ_{es}
(V_{1+}, V_{2+})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$
(V_{1+}, V_{2-})	Σ_1	$\Sigma_2 \cup \bar{\Sigma}_3$	$\emptyset$
(V_{1-}, V_{2+})	Σ_1	$\emptyset$	$\Sigma_2 \cup \bar{\Sigma}_3$
(V_{1-}, V_{2-})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabela 2.3: Regiões de costura, deslize e escape para o sistema (FR, FN) .

Teorema 4. Considere $(S_1, S_2) = (FR, t) \in \Omega$ e denote $h_{FC}(x) = x$ e $h_{CW}(x) = 1/x$. Se $\Sigma = \pi(M_1 \cap M_2)$ então $\Sigma = \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2$ com

(a)

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, h_t(x)) \in \Sigma : x < 1\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x, h_t(x)) \in \Sigma : x > 1\},\end{aligned}$$

para os casos $t \in I = \{FC, CW\}$ e

Λ	k	Σ_{sw}	Σ_{sl}	Σ_{es}
(V_{1+}, V_{2+})	$\frac{1}{16} < k < \frac{1}{8}$	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$
(V_{1+}, V_{2-})		Σ_1	$\Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$	$\emptyset$
(V_{1-}, V_{2+})		Σ_1	$\emptyset$	$\Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$
(V_{1-}, V_{2-})		Σ	$\emptyset$	$\emptyset$
$(V_{1i}, V_{2j}), i, j \in \{+, -\}$	$k > \frac{1}{8}$	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabela 2.4: Regiões de costura, deslize e escape para o sistema (FR, FF) .

(b)

$$\Sigma_1 = \{(x, x+1) \in \Sigma : x < 1\} \cup \{(x, x-1) \in \Sigma : x < 1\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, x+1) \in \Sigma : x > 1\} \cup \{(x, x-1) \in \Sigma : x > 1\},$$

para o caso $t = FW$. Além disso, os pontos regulares em Σ para os casos $t = FC, FW, CW$ são classificados como mostra a Tabela (2.5).

Teorema (4) é provado na seção (2.3).

Λ	Σ_{sw}	Σ_{sl}	Σ_{es}
(V_{1+}, V_{2+})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$
(V_{1+}, V_{2-})	Σ_1	Σ_2	$\emptyset$
(V_{1-}, V_{2+})	Σ_1	$\emptyset$	Σ_2
(V_{1-}, V_{2-})	Σ	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabela 2.5: Regiões de costura, deslize e escape para os sistemas (FR, t) , onde $t \in I = \{FC, FW, CW\}$.

Proposição 1. Considere $t \in \{A, B\}$ onde $A = (S_1, S_2)$, $B = (S_2, S_1) \in \Omega$ e Σ_{sl}^t , Σ_{es}^t e Σ_{sw}^t regiões de deslize, escape e costura para o sistema t . Então $\Sigma_{sl}^A = \Sigma_{es}^B$, $\Sigma_{es}^A = \Sigma_{sl}^B$ e $\Sigma_{sw}^A = \Sigma_{sw}^B$ para todos campos de vetores $(V_{1i}, V_{2j}) \in \Lambda$ com $i, j \in \{+, -\}$.

Teorema 5. Considere $S = (S_1, S_2) \in \Omega$. Se $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \neq 0$, para qualquer $(x, y) \in \Sigma_s = \Sigma_{sl} \cup \Sigma_{es}$ então o campo de vetores deslizante é dado da seguinte forma

$$(V_{1+}, V_{2-})_s = (V_{1-}, V_{2+})_s = \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)} \right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

2.3 Demonstrações dos principais resultados

Prova do Teorema 1. Considere o sistema descontínuo $(S_1, S_2) \in \Omega$, se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0$. O sinal da derivada de Lie determina as regiões em Σ . Como temos $[V_{\ell,+} \cdot \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sqrt{g_\ell}$ e $[V_{\ell,-} \cdot \varphi] = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \sqrt{g_\ell}$. Se $(i, j) = (+, +)$ or $(i, j) = (-, -)$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$ e assim concluímos que $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$. Por outro lado, se $(i, j) = (+, -)$ or $(i, j) = (-, +)$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$ e assim $\Sigma_{sw} = \emptyset, \Sigma_{sl} \cup \Sigma_{es} = \Sigma$. ■

Exemplo 5. $S = (S_1, S_2) \in \Omega$ com $g_1(x, y) = x$ e $g_2(x, y) = -x + 3$ satisfaz a hipótese do Teorema 2.

Prova do Teorema 3. Considere o sistema descontínuo $S = (S_1, S_2)$:

$$S = \begin{cases} (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0 \\ (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - y + kx^2) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x - y + kx^2$. A curva de descontinuidade é dada por $\Sigma = \varphi^{-1}(0) \cap U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = x + kx^2\}$. Como antes, temos quatro campos vetoriais determinados pelas equações diferenciais implícitas:

$$\begin{aligned} V_{1+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{1-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{y - kx^2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{y - kx^2} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

O sinal da derivada de Lie $V_i \cdot \varphi$, com $i \in \{1, 2\}$ e $(x, y) \in \Sigma$ determina as regiões em Σ . Note que se $(x, y) \in \Sigma$ então $(x, y) = (x, x + kx^2)$. Assim temos $(V_{1,+} \cdot \varphi) = 2kx + 1 - \sqrt{x}$, $(V_{1,-} \cdot \varphi) = 2kx + 1 + \sqrt{x}$, $(V_{2,+} \cdot \varphi) = 2kx + 1 - \sqrt{x}$ e $(V_{2,-} \cdot \varphi) = 2kx + 1 + \sqrt{x}$. Note se $k < 0$ temos

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1 \cup \Sigma_3, \Sigma_{sl} = \Sigma_2$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1 \cup \Sigma_3, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \Sigma_2$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Portanto, concluímos a prova da Tabela 2.2. Ver Figura 2.2.

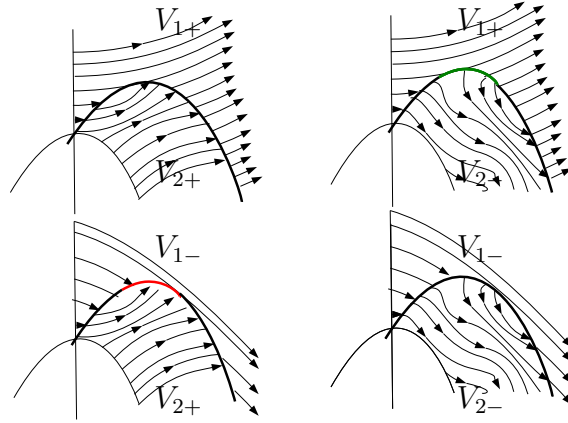


Figura 2.2: $V_{1,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}$ e $V_{2,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{y - kx^2} \frac{\partial}{\partial y}$, com $k < 0$.

Agora se $0 < k < \frac{1}{8}$ temos

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] <$

0 e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

(c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \Sigma_2 \cup \overline{\Sigma_3}$.

(d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Portanto, concluímos a prova da Tabela 2.3 e Tabela 2.4 até a quarta linha .

Se $k > \frac{1}{8}$ temos se $i, j \in \{+, -\}$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$. Assim concluímos a prova da Tabela 2.4. ■

Prova do Teorema 4. Considere o sistema descontínuo (FR, t) . Se $t = FC$ temos

$$(S_1, S_2) = \begin{cases} (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0 \\ (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - y) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x - y$. A curva de descontinuidade é dada por $\Sigma = \varphi^{-1}(0) \cap U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = x\}$. Como antes, temos quatro campos vetoriais determinados pelas equações diferenciais implícitas:

$$\begin{aligned} V_{1+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{1-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{y} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

O sinal da derivada de Lie $V_i \cdot \varphi$, com $i \in \{1, 2\}$ e $(x, y) \in \Sigma$ determina as regiões em Σ . Note que se $(x, h_t(x)) \in \Sigma$ então $(x, h_t(x)) = (x, x)$. Assim temos $(V_{1,+}) \cdot \varphi = (V_{2,+}) \cdot \varphi = 1 - \sqrt{x}$ e $(V_{1,-}) \cdot \varphi = (V_{2,-}) \cdot \varphi = 1 + \sqrt{x}$.

(a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \Sigma_2$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \Sigma_2$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Assim, concluímos a prova da Tabela 2.5 para o caso $t = FC$.

Se $t = CW$, considere o sistema descontínuo $S = (S_1, S_2)$:

$$S = \begin{cases} (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0 \\ (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - yx^2) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x - yx^2$. A curva de descontinuidade é dada por $\Sigma = \varphi^{-1}(0) \cap U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 1/x\}$. Como antes, temos quatro campos vetoriais determinados pelas equações diferenciais implícitas:

$$\begin{aligned} V_{1+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{1-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{yx^2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{yx^2} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

O sinal da derivada de Lie $V_i \cdot \varphi$, com $i \in \{1, 2\}$ e $(x, y) \in \Sigma$ determina as regiões em Σ . Note que se $(x, h_t(x)) \in \Sigma$ então $(x, h_t(x)) = (x, \frac{1}{x})$. Assim temos $(V_{1,+}) \cdot \varphi = (V_{2,+}) \cdot \varphi = -x^{5/2} - 1$ e $(V_{1,-}) \cdot \varphi = (V_{2,-}) \cdot \varphi = x^{5/2} - 1$.

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \Sigma_2$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

- (c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \Sigma_2$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Portanto, concluímos a prova da Tabela 2.5 para o caso $t = CW$.

Se $t = FW$, considere o sistema descontínuo $S = (S_1, S_2)$:

$$S = \begin{cases} (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \geq 0 \\ (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - x(x - y)^2) = (0, 0), & \text{se } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x - x(x - y)^2$. A curva de descontinuidade é dada por $\Sigma = \varphi^{-1}(0) \cap U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = x + 1, y = x - 1\}$. Como antes, temos quatro campos vetoriais determinados pelas equações diferenciais implícitas:

$$\begin{aligned} V_{1+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{1-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2+}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{x(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_{2-}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x(x - y)^2} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

O sinal da derivada de Lie $V_i \cdot \varphi$, com $i \in \{1, 2\}$ e $(x, y) \in \Sigma$ determina as regiões em $\Sigma = \overline{r_1} \cup \overline{r_2} \cup \overline{r_3} \cup \overline{r_4}$. onde $r_1 = \{(x, x + 1) \in \Sigma : x < 1\}$, $r_2 = \{(x, x + 1) \in \Sigma : x > 1\}$, $r_3 = \{(x, x - 1) \in \Sigma : x < 1\}$ e $r_4 = \{(x, x - 1) \in \Sigma : x > 1\}$. Note que se $(x, y) \in r_1 \cup r_2$ então $(x, y) = (x, x + 1)$. Assim temos $(V_{1,+}) \cdot \varphi = (V_{2,+}) \cdot \varphi = -2x(\sqrt{x} - 1)$ e $(V_{1,-}) \cdot \varphi = (V_{2,-}) \cdot \varphi = 2(x^{3/2} + x)$.

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_1 \cup r_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_1 \cup r_2, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in r_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_1, \Sigma_{sl} = r_2$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

- (c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in r_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_1, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = r_2$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_1 \cup r_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_1 \cup r_2, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Analogamente, se $(x, y) \in r_3 \cup r_4$ então $(x, y) = (x, x - 1)$. Assim temos $(V_{1,+}) \cdot \varphi = (V_{2,+}) \cdot \varphi = 2x(\sqrt{x} - 1)$ e $(V_{1,-}) \cdot \varphi = (V_{2,-}) \cdot \varphi = -2(x^{3/2} + x)$.

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_3 \cup r_4$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_3 \cup r_4, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_3$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in r_4$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_3, \Sigma_{sl} = r_4$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (c) se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_3$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in r_4$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_3, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = r_4$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in r_3 \cup r_4$. Portanto $\Sigma_{sw} = r_3 \cup r_4, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Denotando $\Sigma_1 = r_1 \cup r_3, \Sigma_2 = r_2 \cup r_4$ e $\Sigma = \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2$ concluimos o seguinte

- (a) Se $i = +, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (b) Se $i = +, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \Sigma_2$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.
- (c) Se $i = -, j = +$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_1$ e $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ e $[V_{2,j} \cdot \varphi] < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_2$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma_1, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \Sigma_2$.
- (d) Se $i = -, j = -$ então $[V_{1,i} \cdot \varphi][V_{2,j} \cdot \varphi] > 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma_{sw} = \Sigma, \Sigma_{sl} = \emptyset$ e $\Sigma_{es} = \emptyset$.

Assim, concluimos a prova da Tabela 2.5 para o caso $t = FW$. ■

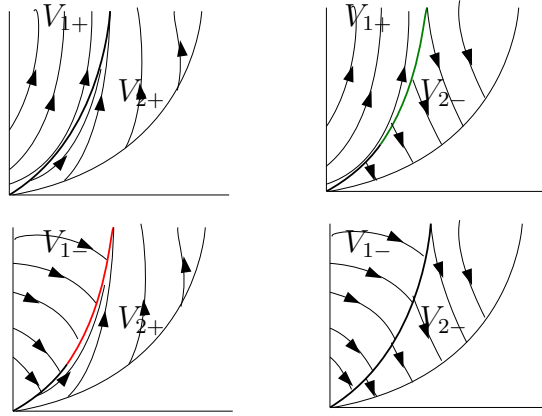


Figura 2.3: $V_{1,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}$ e $V_{2,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{y - kx^2} \frac{\partial}{\partial y}$, com $0 < k < 1/8$.

Prova do Teorema 5. Considere (S_1, S_2) um sistema descontínuo com $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \neq 0$, para qualquer $(x, y) \in \Sigma_s = \Sigma_{sl} \cup \Sigma_{es}$. Considere os vetores no cone gerado por $V_{1,i}$ e $V_{2,j}$ com $i \neq j$, $i, j \in \{+, -\}$ definido da seguinte forma:

$$(1, i\sqrt{g_1} + \lambda(j\sqrt{g_2} - i\sqrt{g_1})). \quad (2.2)$$

Se

$$\langle (1, i\sqrt{g_1} + \lambda(j\sqrt{g_2} - i\sqrt{g_1})), (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \rangle = 0$$

então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\sqrt{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda(j\sqrt{g_2} - i\sqrt{g_1}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

e assim

$$\lambda = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\sqrt{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{(j\sqrt{g_2} - i\sqrt{g_1}) \frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Substituindo em (2.2), temos o campo de vetor deslizante

$$(V_{1+}, V_{2-})_s = (V_{1-}, V_{2+})_s = (1, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y))$$

■

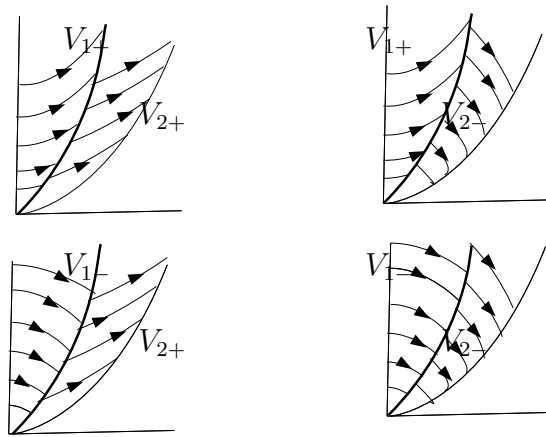


Figura 2.4: $V_{1,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial y}$ e $V_{2,\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{y - kx^2} \frac{\partial}{\partial y}$, com $k \geq 1/8$.

2.4 Sistemas diferenciais implícitos descontínuos e perturbação singular

Nesta seção, vamos regularizar sistemas diferenciais implícitos com descontinuidades e vamos obter um problema de perturbação singular implícito (para uma introdução teoria geral da perturbação singular nossa referência será [21]).

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e $\varepsilon \geq 0$. Um *problema de perturbação singular implícito* em U (problema-ISP) é um sistema diferencial que pode ser escrito como

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad (\varepsilon \dot{y})^2 = h(x, y, \varepsilon), \quad (2.3)$$

ou de modo equivalente, após o tempo redimensionado $\tau = t/\varepsilon$

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \quad \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 = h(x, y, \varepsilon) \quad (2.4)$$

com $(x, y) \in U$ e f, h suaves em todas as variáveis.

Note que duas escalas de tempo diferentes podem ser descritas: a escala de tempo lenta t e a escala de tempo rápida $\tau = t/\varepsilon$. Sistemas (2.3), (2.4) são chamados sis-

temas *lento e rápido*, respectivamente. Tomando $\varepsilon = 0$ em (2.3) e em (2.4) obtemos dois sistemas com dinâmica essencialmente diferentes: O *problema reduzido*

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \quad 0 = h(x, y, 0) \quad (2.5)$$

e o *problema rápido*

$$\frac{dx}{d\tau} = 0, \quad \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = h(x, y, 0). \quad (2.6)$$

Considere $\mathcal{V} = \{(x, y) : h(x, y, 0) = 0\}$. Chamamos de $\mathcal{V}$ a *variedade lenta* do problema de perturbação singular implícito. Observe que (2.5) define um sistema dinâmico em $\mathcal{V}$. Por outro lado, $\mathcal{V}$ uma variedade de pontos singulares para (2.6). Combinando os resultados sobre a dinâmica desses dois problemas, com $\varepsilon = 0$, obtém-se informações sobre a dinâmica de (2.3) para valores pequenos de ε .

Agora introduzimos uma ferramenta no estudo dos sistemas diferenciais implícitos não-suaves. Essencialmente adaptamos o processo de regularização de campos vetoriais não-suaves, introduzidas por Sotomayor e Teixeira, para o nosso caso. Como antes, uma função C^∞ , $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de transição* se $\psi(t) = -1$ para $t \leq -1$, $\psi(t) = 1$ para $t \geq 1$ e $\psi'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$. A ψ -regularização de $F = (S_1, S_2) \in \Omega$, $U \subset \mathbb{R}^m$, onde

$$S_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - g_i(x, y)) = (0, 0), \quad i = 1, 2;$$

é uma família a um parâmetro $S_\varepsilon \in C^n$ dado por

$$S_\varepsilon(q, \dot{q}) = \left(\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - \left(\frac{g_1 + g_2}{2} + \psi_\varepsilon(\varphi(q)) \frac{g_1 - g_2}{2} \right) \right) \quad (2.7)$$

com $\psi_\varepsilon(t) = \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, para $\varepsilon > 0$.

O próximo teorema diz que a regularização dos sistemas diferenciais implícitos descontínuos fornece um ISP. Em geral, esta transição pode ser feita de forma explícita.

Teorema 6. *Considere $S = (S_1, S_2) \in \Omega$, S_ε sua ψ -regularização e $q \in \Sigma$. Suponha que ψ é um polinômio de grau $2l$ em um pequeno intervalo $0 \in I \subset (-1, 1)$. Então as trajetórias S_ε em $U_\varepsilon = \{q \in U; \varphi(q)/\varepsilon \in I\}$ são soluções de um problema ISP.*

Prova. Seja $S \in \Omega$ com $S_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} - 1, \dot{y}^2 - g_i(x, y)) = (0, 0)$, $i = 1, 2$. Suponha que $a_1 t + \dots + a_{2\ell} t^{2\ell}$ é a expressão do polinômio ψ em $I \subset \mathbb{R}$ com $0 \in I$. As trajetórias de S_ϵ em U_ϵ são soluções do sistema diferencial implícito

$$\dot{x} = 1; \quad \dot{y}^2 = \left(\frac{g_1 + g_2}{2} + \psi_\epsilon(\varphi) \frac{g_1 - g_2}{2} \right).$$

Redimensionando o tempo $\tau = t/\epsilon^\ell$ temos

$$x' = \epsilon^\ell; \\ (y')^2 = \epsilon^{2\ell} \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) + \epsilon^{2\ell} \left(\frac{a_1 \varphi}{\epsilon} + \dots + \frac{a_{2\ell} \varphi^{2\ell}}{\epsilon^{2\ell}} \right) \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right).$$

Observação Para cada superfície $p^2 = g_i(x, y)$, $i = 1, 2$ definimos o campo de vetores ξ_i , de acordo com (1.2). Além disso, para a superfície $p^2 - \left(\frac{g_1 + g_2}{2} + \psi_\epsilon(\varphi(q)) \frac{g_1 - g_2}{2} \right) = 0$ também podemos considerar o campo vetorial ξ_ϵ . É fácil ver que

$$\Pi^{-1} R(\Pi(\xi_1), \Pi(\xi_2)) = \xi_\epsilon$$

onde $\Pi(x, y, p) = (x, p)$, e $R(X)$ é sua ψ -regularização de $X = (X_1, X_2) \in \Lambda$ definido em (1.6).

Capítulo 3

Método de “averaging”

Este capítulo é dedicado a introduzir definições, resultados e técnicas que serão utilizadas no decorrer do Capítulos 4, 5, 6, 7 e 8. Em geral, não apresentaremos demonstrações e, em alguns casos, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

3.1 Método de “averaging” de primeira ordem

Nesta seção mostramos alguns resultados conhecidos que precisamos para provar nossos resultados para a classe dada no Capítulo 4. O seguinte teorema fornece soluções periódicas de um sistema diferencial contínuo. Veja [62] para uma demonstração.

Considere o sistema diferencial

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

com $x \in D$, onde D é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. Além disso, assumimos que $F(t, x)$ é T -periódica em t . Separadamente, considere em D a equação diferencial “média”

$$\dot{y} = \varepsilon f(y), \quad y(0) = x_0, \quad (3.2)$$

onde

$$f(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Teorema 7. *Considere os dois problemas de valor inicial (3.1) e (3.2). Suponha que:*

- (i) *F , seu Jacobiano $\partial F/\partial x$, seu Hessiano $\partial^2 F/\partial x^2$ estão definidos, são contínuos e limitados por uma constante independente de ε em $[0, \infty) \times D$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*
- (ii) *F é T -periódica em t (T independente de ε).*
- (iii) *$y(t)$ pertence a D no intervalo de tempo $[0, 1/\varepsilon]$.*

Então, as seguintes sentenças valem.

- (a) *Para $t \in [0, 1/\varepsilon]$ temos que $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
- (b) *Se p é um ponto de equilíbrio da função “averaging” (3.2) e*

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{y=p} \neq 0,$$

então existe uma solução T -periódica $x(t, \varepsilon)$ da equação (3.1) tal que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (c) *A estabilidade ou instabilidade da solução periódica $x(t, \varepsilon)$ é dada pela estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio p do sistema (3.2). De fato, o ponto de equilíbrio p tem o comportamento dado pela aplicação de Poincaré associada a solução periódica $x(t, \varepsilon)$.*

O seguinte teorema é uma versão descontínua do teorema anterior que fornece soluções periódicas de um sistema diferencial descontínuo periódico. Veja [46] para uma prova.

Teorema 8. *Considere o seguinte sistema diferencial descontínuo*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x), \\ R(t, x, \varepsilon) &= R_1(t, x, \varepsilon) + \text{sign}(h(t, x))R_2(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

onde $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R_1, R_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, T -periódicas na variável t e D é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Suponhamos também que h é uma função C^1 tendo 0 como um valor regular. Denote por $\mathcal{M} = h^{-1}(0)$, por $\Sigma = \{0\} \times D \not\subseteq \mathcal{M}$, por $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \mathcal{M} \neq \emptyset$ e seus elementos por $z \equiv (0, z) \notin \mathcal{M}$.

Defina a função “averaging” $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$f(x) = \int_0^T F(t, x) dt.$$

Assuma as três seguintes condições.

- (i) F_1, F_2, R_1, R_2 e h são localmente L -Lipschitz com respeito a x .
- (ii) Para $a \in \Sigma_0$ com $f(a) = 0$ existe uma vizinhança V de a tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f, V, a) \neq 0$, (i.é. o grau de Brouwer de f em a é diferente de zero).
- (iii) Se $(\partial h / \partial t)(t, z) \not\equiv 0$, então para todo $(t_0, z_0) \in \mathcal{M}$ temos $(\partial h / \partial t)(t_0, z_0) \neq 0$. Se $(\partial h / \partial t)(t_0, z_0) \equiv 0$, então $(\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2)(t_0, z_0) > 0$, para todo $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \mathcal{M}$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $x(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (3.3) tal que $x(t, \varepsilon) \rightarrow a$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Se a função f do Teorema 8 é de classe C^1 , então é suficiente checar que o Jacobiano de f avaliado em a é diferente de zero para mostrar que $d_B(f, V, a) \neq 0$. Para mais detalhes, veja o Teorema 1.1.2 de [56].

3.2 Método de “averaging” de k-ésima ordem

O teorema a seguir é uma versão da teoria do “averaging” para ordem arbitrária que fornece soluções periódicas de um sistema diferencial periódico contínuo. Ver [47] para uma prova.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (3.4)$$

onde $F_i : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $i = 1, 2, \dots, k$ e $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas e T -periódica na variável t , com D sendo um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

Agora introduzimos algumas notações. Seja L um inteiro positivo, seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $t \in \mathbb{R}$ e $y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}) \in \mathbb{R}^n$ para $j = 1, \dots, L$. Dado $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função suficientemente suave, para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$ denote por $\partial^L F(t, x)$ uma aplicação simétrica L -multilinear que aplicado a um “produto” de L vetores de $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\bigodot_{j=1}^L y_j \in \mathbb{R}^{nL}$. A aplicação L -multilinear é definida por

$$\partial^L F(t, x) \bigodot_{j=1}^L y_j = \sum_{i_1, \dots, i_L=1}^n \frac{\partial^L F(t, x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_L}} y_{1i_1}, \dots, y_{Li_L}.$$

Agora definimos a *Função Averaged* $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de ordem i como

$$f_i(z) = \frac{y_i(T, z)}{i!}, \quad (3.5)$$

onde $y_i : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ são dados por

$$\begin{aligned} y_i(t, z) &= i! \int_0^t (F_i(s, \varphi(s, z)) \\ &\quad + \sum_{l=1}^i \sum_{S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2! b_2 \dots b_l! l! b_l} \partial^L F_{i-l}(s, \varphi(s, z)) \bigodot_{j=1}^l y_j(s, z)^{b_j}) ds. \end{aligned}$$

e S_l é o conjunto de todas l -uplas de inteiros não negativos $(b_1, b_2, \dots, b_l)$ satisfazendo $b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l = l$ e $L = b_1 + b_2 + \dots + b_l$. Para facilitar nosso trabalho apresentamos explicitamente as funções y_i , para $i = 1, \dots, 5$. Assim temos

$$\begin{aligned} y_1(t, z) &= \int_0^t F_1(s, z) ds, \\ y_2(t, z) &= \int_0^t \left(2F_2(s, z) + 2 \frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z) y_1(s, z) \right) ds, \\ y_3(t, z) &= \int_0^t \left(6F_3(s, z) + 6 \frac{\partial F_2}{\partial x}(s, z) y_1(t, z) \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z) y_1(s, z)^2 + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z) y_2(s, z) \right) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_4(t, z) &= \int_0^t \left(24F_4(s, z) + 24\frac{\partial F_3}{\partial x}(s, z)y_1(s, z) \right. \\
&\quad + 12\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z)^2 + 12\frac{\partial F_2}{\partial x}(s, z)y_2(s, z) \\
&\quad + 12\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_2(s, z) \\
&\quad \left. + 4\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^3 + 4\frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z)y_3(s, z) \right) ds, \\
y_5(t, z) &= \int_0^t \left(120F_5(s, z) + 120\frac{\partial F_4}{\partial x}(s, z)y_1(s, z) + 60\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z)^2 \right. \\
&\quad + 60\frac{\partial F_3}{\partial x}(s, z)y_2(s, z) + 60\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_2(s, z) \\
&\quad + 20\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^3 + 20\frac{\partial F_2}{\partial x}(s, z)y_3(s, z) \\
&\quad + 20\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_3(s, z) \\
&\quad + 15\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z)^2 + 30\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_2(s, z) \\
&\quad \left. + 5\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^4 + 5\frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z)y_4(s, z) \right) ds,
\end{aligned}$$

No Apêndice A apresentamos explicitamente as expressões de y_6 e y_7 que utilizamos para encontrar 3 ciclos limites para a classe P_5 no Capítulo 5.

Teorema 9. *Considere o problema de valor inicial (3.4) e a função averaged (3.5), e assumindo as seguintes condições.*

- (i) *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $F_i(t, \cdot) \in \mathcal{C}^{k-i}$, para $i = 1, 2, \dots, k$; $\partial^{k-i}F_i$ é localmente Lipschitz na segunda variável para $i = 1, 2, \dots, k$; e R é contínua e localmente Lipschitz na segunda variável.*
- (ii) *Assuma que $f_i = 0$ para $i = 1, \dots, r-1$ e $f_r \neq 0$ com $r \in \{1, 2, \dots, k\}$. Além disso, suponha que para algum $a \in D$ com $f_r(a) = 0$, existe uma vizinhança $V \subset D$ de a tal que $f_r(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f_r(z), V, a) \neq 0$.*

Então para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $x(\cdot, \varepsilon)$ da equação (3.4) tal que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ com $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.3 Método de “averaging” com $F_0 \neq 0$

Considere um sistema na forma

$$\dot{x} = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon), \quad (3.6)$$

onde $\varepsilon \neq 0$ é suficientemente pequeno e as funções $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções $\mathcal{C}^2$, T -periódica na primeira variável e Ω é um subconjunto aberto $\mathbb{R}^n$. Assumimos que o sistema não perturbado

$$\dot{x} = F_0(t, x) \quad (3.7)$$

tem uma subvariedade de soluções periódicas de dimensão n .

Considere $x(t, z, \varepsilon)$ a solução do sistema (3.7) tal que $x(0, z, \varepsilon) = z$. A linearização do sistema não perturbado ao longo de uma solução periódica $x(t, z, 0)$ é dada por

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z, 0))y. \quad (3.8)$$

Na sequência denotamos por $M_z(t)$ a matriz fundamental do sistema linearizado (3.8) tal que $M_z(0)$ é a identidade.

Supomos que existe um conjunto aberto V com $\text{Cl}(V) \subset \Omega$ tal que para cada $z \in \text{Cl}(V)$, $x(t, z, 0)$ é T -periódica, onde $x(t, z, 0)$ denota a solução do sistema não perturbado (3.7). Denotamos $\text{Cl}(V)$ fecho de V , temos que o conjunto $\text{Cl}(V)$ é *isócrono* para o sistema (3.7), i.e., ele é formado por apenas órbitas periódicas com período T .

O próximo resultado é o teorema “averaging” para estudar as bifurcações de soluções T -periódicas do sistema (3.6) a partir das soluções periódicas $x(t, z, 0)$ contidas $\text{Cl}(V)$ do sistema (3.7) quando $|\varepsilon| > 0$ é suficientemente pequeno. Veja a demonstração no artigo [8]. Para mais detalhes em teoria “averaging” ver [9] e o livro [58].

Teorema 10 (Perturbações de um conjunto isócrono). *Assumimos que existe um conjunto aberto e limitado V com $\text{Cl}(V) \subset \Omega$ tal que para cada $z \in \text{Cl}(V)$, a solução*

$\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ é T -periódica. Considere a função $\mathcal{F} : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T M_z^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) dt. \quad (3.9)$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras.

- (i) Se existe $\mathbf{a} \in V$ com $\mathcal{F}(\mathbf{a}) = 0$ e $\det((\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{z})(\mathbf{a})) \neq 0$ então existe uma solução T -periódica $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ do sistema (3.6) tal que $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) O tipo da estabilidade da solução periódica $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ é dado pelo autovetor da matriz Jacobiana $((\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{z})(\mathbf{a}))$.

3.4 Resultados utilizados nas provas dos Teoremas

Considere um sistema planar

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (3.10)$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Suponha que o sistema (3.10) tem uma família contínua de órbitas periódicas

$$\{\Gamma_h\} \subset \{(x, y) : H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}$$

onde H é uma integral primeira de (3.10). Considere as seguintes perturbações do sistema (3.10)

$$\dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y), \quad (3.11)$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

O próximo teorema (veja o Teorema 5.2 de [9] para uma prova) fornece uma ferramenta para transformar o sistema perturbado (3.11) na forma padrão da teoria do “averaging” dada no Teorema 7.

Teorema 11. *Considere o sistema (3.10) e sua integral primeira H . Assuma que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) pertencente as órbitas periódicas $\{\Gamma_h\}$. Seja $\rho : (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que*

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (3.12)$$

para todo $R \in (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})$ e todo $\varphi \in [0, 2\pi)$. Então a equação diferencial que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia $R = \sqrt{h}$ e o ângulo φ para o sistema (3.11) é

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.13)$$

onde $\mu = \mu(x, y)$ é o fator integrante do sistema (3.10), correspondente a integral primeira H , $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Lembramos que μ é o fator integrante correspondente a integral primeira H do sistema (3.10) se

$$\mu P = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mu Q = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Seja I um intervalo da reta e sejam $f_0, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Dizemos que $f_0, \dots, f_n$ são funções *linearmente independentes* se, e somente se,

$$\forall s \in I, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

O próximo resultado é bem conhecido e pode ser encontrado na Proposição 1 de [48].

Proposição 2. *Se $f_0, \dots, f_n$ são linearmente independentes, então existem $s_1, s_2, \dots, s_n \in I$ e $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tal que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ temos*

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(s_j) = 0.$$

As funções $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ definidas em I formam um *sistema de Chebyshev Estendido* ou um sistema-ET em I se, e somente se, qualquer combinação linear não trivial dessas funções tem no máximo n zeros contando suas multiplicidades e este número

é alcançado. Dizemos que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ é um *sistema de Chebyshev Estendido Completo* ou um sistema-ECT em I se, e somente se, para qualquer $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ forma um sistema-ET. Para provar que $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ é um sistema-ECT em I é necessário e suficiente provar que $W(f_0, \dots, f_k)(s) \neq 0$ em I , para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Denotamos $W(f_0, \dots, f_k)(s)$ o Wronskiano das funções $(f_0, \dots, f_k)$ com respeito a s . Lembramos que a definição de Wronskiano é

$$W(f_0, \dots, f_k)(s) = \begin{vmatrix} f_0(s) & f_1(s) & \cdots & f_k(s) \\ f'_0(s) & f'_1(s) & \cdots & f'_k(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k)}(s) & f_1^{(k)}(s) & \cdots & f_k^{(k)}(s) \end{vmatrix}.$$

Para mais detalhes sobre sistemas-ECT, veja [32].

O próximo resultado é o Teorema generalizado de Descartes sobre o números de zeros de um polinômio real. Ver [5] para uma prova.

Teorema 12. *Considere o polinômio real $p(x) = a_{i_1}x^{i_1} + a_{i_2}x^{i_2} + \dots + a_{i_r}x^{i_r}$ com $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ e $a_{i_j} \neq 0$ constantes reais para $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Quando $a_{i_j}a_{i_{j+1}} < 0$, dizemos que a_{i_j} e $a_{i_{j+1}}$ tem uma variação de sinal. Se o número de variações de sinais é m , então $p(x)$ tem no máximo m raízes reais positivas. Além disso, sempre é possível escolher coeficientes de $p(x)$ de tal forma que $p(x)$ tenha exatamente $r - 1$ raízes reais positivas.*

Capítulo 4

Ciclos limite para uma classe de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos contínuos e descontínuos

4.1 Introdução e enunciados dos principais resultados

Nesse capítulo, estudamos uma classe de sistemas diferenciais polinomiais de grau 3 em $\mathbb{R}^2$, que possui um centro isócrono. Em [12] os autores estudaram algumas classes de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos e isócronos. Em particular eles obtiveram a família

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) = P(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 = Q(x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta < 0$. Essa família tem uma integral primeira racional de grau 2, veja o sistema (iv) do Teorema 7 em [12], veja também [44, 45]. Uma questão aberta é: *O que acontece com as órbitas periódicas do sistema não perturbado (4.1) quando ele é perturbado dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais contínuos e descontínuos cúbicos?* Mais precisamente, considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_1(x, y),\end{aligned}\tag{4.2}$$

e o sistema descontínuo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} X_1(x, y) & \text{se } y > 0, \\ X_2(x, y) & \text{se } y < 0, \end{cases}\tag{4.3}$$

onde

$$\begin{aligned}X_1(x, y) &= \begin{pmatrix} y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_1(x, y) \\ x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_1(x, y) \end{pmatrix}, \\ X_2(x, y) &= \begin{pmatrix} y(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2) + \varepsilon p_2(x, y) \\ x + \alpha(y^2 - x^2) + 2\beta xy^2 + \varepsilon q_2(x, y) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}p_1(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ q_1(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3, \\ p_2(x, y) &= c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2 + c_6x^3 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_9y^3, \\ q_2(x, y) &= d_1x + d_2y + d_3x^2 + d_4xy + d_5y^2 + d_6x^3 + d_7x^2y + d_8xy^2 + d_9y^3.\end{aligned}$$

Neste capítulo estudaremos o número máximo de ciclos limite dos sistemas (4.2) e (4.3) que pode ser obtido usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.

Agora apresentaremos nossos principais resultados deste capítulo.

Teorema 13. *Para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o número de ciclos limite do sistema (4.2), bifurcando das soluções periódicas do centro isócrono (4.1), é no máximo 3, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, e esse número é realizado.*

O Teorema 13 está provado na Seção 4.2.

Teorema 14. *Para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o número máximo de ciclos limite do sistema (4.3), bifurcando das soluções periódicas do centro isócrono (4.1), é pelo menos 12, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.*

O Teorema 14 está provado na Seção 4.3.

No Capítulo 3 apresentamos os resultados básicos que precisamos para provar os Teoremas 13 e 14.

4.2 Prova do Teorema 13

Note que o fator integrante

$$\mu(x, y) = -\frac{2}{(-1 + 2\alpha x + 2\beta x^2)^2}$$

e a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 - 2x(\alpha + \beta x)}$$

do sistema (4.1) satisfazem $\mu P = -H_y$ e $\mu Q = H_x$. Assim, μ é o fator integrante correspondente a integral primeira H . A função $\rho : (0, \sqrt{-1/(2\beta)}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\rho(R, \varphi) = \frac{R \left(\sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} - \alpha R \cos \varphi \right)}{2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1}$$

satisfaz a hipótese (3.12) do Teorema 11 (p. 28). Veremos depois que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ nos pontos das órbitas periódicas. Assim, o sistema (3.13) do Teorema 11 para nosso sistema (4.2), torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{B(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.4)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 \cos^2 \varphi + (a_2 + b_1) \sin \varphi \cos \varphi + b_2 \sin^2 \varphi, \\
A_2 &= \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((a_3 - 3\alpha a_1) \cos^3 \varphi + (-3\alpha a_2 + a_4 \right. \\
&\quad \left. - 4\alpha b_1 + b_3) \sin \varphi \cos^2 \varphi + (a_5 + \alpha(a_1 - 4b_2) + b_4) \sin^2 \varphi \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + (\alpha a_2 + b_5) \sin^3 \varphi \right), \\
A_3 &= (5a_1\alpha^2 - 4a_3\alpha + a_6 + 10a_1\beta) \cos^4 \varphi + ((5a_2 + 8b_1)\alpha^2 - (4a_4 \\
&\quad + 5b_3) \alpha + a_7 + 10a_2\beta + 8\beta b_1 + b_6) \sin \varphi \cos^3 \varphi + ((8b_2 - 3a_1)\alpha^2 \\
&\quad + (a_3 - 4a_5 - 5b_4)\alpha + a_8 + 2a_1\beta + 8\beta b_2 + b_7) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
&\quad + (-3a_2\alpha^2 + (a_4 - 5b_5)\alpha + a_9 + 2a_2\beta + b_8) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\
&\quad + (\alpha a_5 + b_9) \sin^4 \varphi, \\
A_4 &= \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_1\alpha^3 + 8a_3\alpha^2 - 5a_6\alpha - 24a_1\beta\alpha \right. \\
&\quad \left. + 8a_3\beta) \cos^5 \varphi - (4(a_2 + 2b_1)\alpha^3 - 4(2a_4 + 3b_3)\alpha^2 + (5a_7 + 6(4a_2\beta \right. \\
&\quad \left. + 4b_1\beta + b_6)) \alpha - 2\beta(4a_4 + 3b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_1 - 2b_2)\alpha^3 \right. \\
&\quad \left. - 4(a_3 - 2a_5 - 3b_4)\alpha^2 + (a_6 - 5a_8 - 6(4\beta b_2 + b_7))\alpha + 2\beta(a_3 + 4a_5 \right. \\
&\quad \left. + 3b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4a_2\alpha^3 - 4(a_4 - 3b_5)\alpha^2 + (a_7 - 5a_9 \right. \\
&\quad \left. + 6b_8) \alpha + 2\beta(a_4 + 3b_5)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (-4a_5\alpha^2 + (a_8 - 6b_9)\alpha \right. \\
&\quad \left. + 2a_5\beta) \sin^4 \varphi \cos \varphi + \alpha a_9 \sin^5 \varphi \right), \\
A_5 &= (4a_1\alpha^4 - 12a_3\alpha^3 + 13a_6\alpha^2 + 40a_1\beta\alpha^2 - 32a_3\beta\alpha + 40a_1\beta^2 \\
&\quad + 8a_6\beta) \cos^6 \varphi + (4a_2\alpha^4 + 8b_1\alpha^4 - 12a_4\alpha^3 - 20b_3\alpha^3 + 13a_7\alpha^2 \\
&\quad + 40a_2\beta\alpha^2 + 48\beta b_1\alpha^2 + 18b_6\alpha^2 - 32a_4\beta\alpha - 30\beta b_3\alpha + 40a_2\beta^2 \\
&\quad + 8a_7\beta + 24\beta^2 b_1 + 6\beta b_6) \sin \varphi \cos^5 \varphi + (-4a_1\alpha^4 + 8b_2\alpha^4 + 8a_3\alpha^3 \\
&\quad + 12a_5\alpha^3 - 20b_4\alpha^3 - 5a_6\alpha^2 + 13a_8\alpha^2 - 8a_1\beta\alpha^2 + 48\beta b_2\alpha^2 \\
&\quad + 18b_7\alpha^2 - 2a_3\beta\alpha - 32a_5\beta\alpha - 30\beta b_4\alpha + 16a_1\beta^2 + 2a_6\beta + 8a_8\beta \\
&\quad + 24\beta^2 b_2 + 6\beta b_7) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (-4a_2\alpha^4 + 8a_4\alpha^3 - 20b_5\alpha^3 \\
&\quad - 5a_7\alpha^2 + 13a_9\alpha^2 - 8a_2\beta\alpha^2 + 18b_8\alpha^2 - 2a_4\beta\alpha - 30\beta b_5\alpha + 16a_2\beta^2 \\
&\quad + 2a_7\beta + 8a_9\beta + 6\beta b_8) \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + (8a_5\alpha^3 - 5a_8\alpha^2 + 18b_9\alpha^2 \\
&\quad - 2a_5\beta\alpha + 2a_8\beta + 6\beta b_9) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - a_9 (5\alpha^2 - 2\beta) \sin^5 \varphi \cos \varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & 2 \cos^2 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((4a_3\alpha^4 - 2(5a_6 + 6a_1\beta)\alpha^3 \right. \\
& + 24a_3\beta\alpha^2 - 3\beta(5a_6 + 12a_1\beta)\alpha + 12a_3\beta^2) \cos^5 \varphi + (4(a_4 \\
& + 2b_3)\alpha^4 - 2(5a_7 + 6a_2\beta + 8\beta b_1 + 8b_6)\alpha^3 + 24\beta(a_4 + b_3)\alpha^2 \\
& - 3\beta(5a_7 + 4(3a_2\beta + 2b_1\beta + b_6))\alpha + 6\beta^2(2a_4 + b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi \\
& - (4(a_3 - a_5 - 2b_4)\alpha^4 - 2(3a_6 - 5a_8 + 2a_1\beta - 8\beta b_2 - 8b_7)\alpha^3 \\
& - 24\beta(a_5 + b_4)\alpha^2 + 3\beta(a_6 + 5a_8 + 4a_1\beta + 8\beta b_2 + 4b_7)\alpha - 6\beta^2(a_3 \\
& + 2a_5 + b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi - (4(a_4 - 2b_5)\alpha^4 - 2(3a_7 - 5a_9 + 2a_2\beta \\
& - 8b_8)\alpha^3 - 24\beta b_5\alpha^2 + 3\beta(a_7 + 5a_9 + 4a_2\beta + 4b_8)\alpha \\
& - 6\beta^2(a_4 + b_5) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi - (4a_5\alpha^4 + (16b_9 - 6a_8)\alpha^3 + 3\beta(a_8 \\
& + 4b_9) \alpha - 6a_5\beta^2) \sin^4 \varphi \cos \varphi + 3 \alpha a_9 (2\alpha^2 - \beta) \sin^5 \varphi) , \\
A_7 = & 2 \cos^3 \varphi \left((-4a_3\alpha^5 + 2(7a_6 + 6a_1\beta)\alpha^4 - 36a_3\beta\alpha^3 + 3\beta (13a_6 \right. \\
& + 20a_1\beta) \alpha^2 - 48a_3\beta^2\alpha + 4\beta^2(3a_6 + 10a_1\beta)) \cos^5 \varphi - (4(a_4 \\
& + 2b_3)\alpha^5 - 2(7a_7 + 6a_2\beta + 8\beta b_1 + 12b_6)\alpha^4 + 4\beta(9a_4 + 10b_3)\alpha^3 \\
& - 3\beta(13a_7 + 4(5a_2\beta + 4b_1\beta + 3b_6))\alpha^2 + 6\beta^2(8a_4 + 5b_3)\alpha - 2\beta^2(6a_7 \\
& + 20a_2\beta + 8\beta b_1 + 3b_6)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_3 - a_5 - 2b_4)\alpha^5 - 2 (5a_6 \\
& - 7a_8 + 2a_1\beta - 8\beta b_2 - 12b_7)\alpha^4 + 4\beta(a_3 - 9a_5 - 10b_4)\alpha^3 + 3\beta(a_6 \\
& + 13a_8 + 4a_1\beta + 16\beta b_2 + 12b_7)\alpha^2 - 6\beta^2(3a_3 + 8a_5 + 5b_4)\alpha \\
& + 2\beta^2(3a_6 + 6a_8 + 12a_1\beta + 8\beta b_2 + 3b_7)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4(a_4 \\
& - 2b_5)\alpha^5 - 2(5a_7 - 7a_9 + 2a_2\beta - 12b_8)\alpha^4 + 4\beta(a_4 - 10b_5)\alpha^3 \\
& + 3\beta(a_7 + 13a_9 + 4a_2\beta + 12b_8)\alpha^2 - 6\beta^2(3a_4 + 5b_5)\alpha + 6\beta^2(a_7 \\
& + 2a_9 + 4a_2\beta + b_8)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (4a_5\alpha^5 + (24b_9 - 10a_8)\alpha^4 \\
& + 4a_5\beta\alpha^3 + 3\beta(a_8 + 12b_9)\alpha^2 - 18a_5\beta^2\alpha + 6\beta^2(a_8 \\
& + b_9)) \sin^4 \varphi \cos \varphi - a_9 (10\alpha^4 - 3 \beta\alpha^2 - 6\beta^2) \sin^5 \varphi) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 = & 4 \cos^4 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_6\alpha^5 + 8a_3\beta\alpha^4 - 4\beta (5a_6 \right. \\
& + 3a_1\beta) \alpha^3 + 24a_3\beta^2\alpha^2 - 3\beta^2(5a_6 + 8a_1\beta)\alpha + 8a_3\beta^3) \cos^5 \varphi \\
& - (4(a_7 + 2b_6)\alpha^5 - 8\beta(a_4 + b_3)\alpha^4 + 4\beta(5a_7 + 3a_2\beta + 2\beta b_1 \\
& + 4b_6)\alpha^3 - 12\beta^2(2a_4 + b_3)\alpha^2 + \beta^2(15a_7 + 24a_2\beta + 8\beta b_1 + 6b_6)\alpha \\
& - 2\beta^3(4a_4 + b_3)) \sin \varphi \cos^4 \varphi + (4(a_6 - a_8 - 2b_7)\alpha^5 + 8\beta(a_5 \\
& + b_4)\alpha^4 - 4\beta(a_6 + 5a_8 + a_1\beta + 2\beta b_2 + 4b_7)\alpha^3 + 12\beta^2(a_3 + 2a_5 \\
& + b_4)\alpha^2 - \beta^2(9a_6 + 15a_8 + 16a_1\beta + 8\beta b_2 + 6b_7)\alpha + 2\beta^3(3a_3 \\
& + 4a_5 + b_4)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi + (4(a_7 - a_9 - 2b_8)\alpha^5 + 8\beta b_5\alpha^4 \\
& - 4\beta(a_7 + 5a_9 + a_2\beta + 4b_8)\alpha^3 + 12\beta^2(a_4 + b_5)\alpha^2 - \beta^2(9a_7 \\
& + 15a_9 + 16a_2\beta + 6b_8)\alpha + 2\beta^3(3a_4 + b_5)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + (4(a_8 \\
& - 2b_9)\alpha^5 - 4\beta(a_8 + 4b_9)\alpha^3 + 12a_5\beta^2\alpha^2 - 3\beta^2(3a_8 + 2b_9)\alpha \\
& + 6a_5\beta^3) \sin^4 \varphi \cos \varphi + \alpha a_9 (4\alpha^4 - 4\beta\alpha^2 - 9\beta^2) \sin^5 \varphi), \\
A_9 = & 4 \cos^5 \varphi \left((4a_6\alpha^6 - 8a_3\beta\alpha^5 + 4\beta(7a_6 + 3a_1\beta)\alpha^4 - 36a_3\beta^2\alpha^3 \right. \\
& + \beta^2(39a_6 + 40a_1\beta)\alpha^2 - 32a_3\beta^3\alpha + 4\beta^3(2a_6 + 5a_1\beta)) \cos^5 \varphi \\
& + (4(a_7 + 2b_6)\alpha^6 - 8\beta(a_4 + b_3)\alpha^5 + 4\beta(7a_7 + 3a_2\beta + 2\beta b_1 \\
& + 6b_6)\alpha^4 - 4\beta^2(9a_4 + 5b_3)\alpha^3 + \beta^2(39a_7 + 40a_2\beta + 16\beta b_1 + 18b_6)\alpha^2 \\
& - 2\beta^3(16a_4 + 5b_3) \alpha + 2\beta^3(4a_7 + 10a_2\beta + 2\beta b_1 + b_6)) \sin \varphi \cos^4 \varphi \\
& - (4(a_6 - a_8 - 2b_7)\alpha^6 + 8\beta(a_5 + b_4)\alpha^5 - 4\beta(a_6 + 7a_8 + a_1\beta + 2\beta b_2 \\
& + 6b_7)\alpha^4 + 4\beta^2(4a_3 + 9a_5 + 5b_4)\alpha^3 - \beta^2(21a_6 + 39a_8 + 24a_1\beta \\
& + 16\beta b_2 + 18b_7)\alpha^2 + 2\beta^3(11a_3 + 16a_5 + 5b_4)\alpha - 2\beta^3(3a_6 + 4a_8 \\
& + 8a_1\beta + 2\beta b_2 + b_7)) \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi - (4(a_7 - a_9 - 2b_8)\alpha^6 + 8\beta b_5\alpha^5 \\
& - 4\beta(a_7 + 7a_9 + a_2\beta + 6b_8)\alpha^4 + 4\beta^2(4a_4 + 5b_5)\alpha^3 - 3\beta^2(7a_7 + 13a_9 \\
& + 8a_2\beta + 6b_8)\alpha^2 + 2\beta^3(11a_4 + 5b_5)\alpha - 2\beta^3(3a_7 + 4a_9 + 8a_2\beta \\
& + b_8)) \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi - (4(a_8 - 2b_9)\alpha^6 - 4\beta(a_8 + 6b_9)\alpha^4 + 16a_5\beta^2\alpha^3 \\
& - 3\beta^2(7a_8 + 6b_9)\alpha^2 + 22a_5\beta^3\alpha - 2\beta^3(3a_8 + b_9)) \sin^4 \varphi \cos \varphi \\
& \left. - a_9 (4\alpha^6 - 4\beta\alpha^4 - 21\beta^2\alpha^2 - 6\beta^3) \sin^5 \varphi \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{10} &= 8\beta \cos^6 \varphi \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \left((-4a_6\alpha^5 + 4a_3\beta\alpha^4 - 2\beta(5a_6 + 6a_1\beta)\alpha^3 + 8a_3\beta^2\alpha^2 - \beta^2(5a_6 + 6a_1\beta)\alpha + 2a_3\beta^3) \cos^3 \varphi - (4a_7\alpha^5 - 4a_4\beta\alpha^4 + 2\beta(5a_7 + 2a_2\beta)\alpha^3 - 8a_4\beta^2\alpha^2 + \beta^2(5a_7 + 6a_2\beta)\alpha - 2a_4\beta^3) \sin \varphi \cos^2 \varphi - (4a_8\alpha^5 - 4a_5\beta\alpha^4 + 10a_8\beta\alpha^3 - 8a_5\beta^2\alpha^2 + 5a_8\beta^2\alpha - 2a_5\beta^3) \sin^2 \varphi \cos \varphi - \alpha a_9 (4\alpha^4 + 10\beta\alpha^2 + 5\beta^2) \sin^3 \varphi \right), \\
A_{11} &= 8\beta (\alpha^2 + 2\beta) \cos^7 \varphi \left((4a_6\alpha^4 - 4a_3\beta\alpha^3 + 2\beta(3a_6 + 2a_1\beta)\alpha^2 - 4a_3\beta^2\alpha + \beta^2(a_6 + 2a_1\beta)) \cos^3 \varphi + (4a_7\alpha^4 - 4a_4\beta\alpha^3 + 2\beta(3a_7 + 2a_2\beta)\alpha^2 - 4a_4\beta^2\alpha + \beta^2(a_7 + 2a_2\beta)) \sin \varphi \cos^2 \varphi + (4a_8\alpha^4 - 4a_5\beta\alpha^3 + 6a_8\beta\alpha^2 - 4a_5\beta^2\alpha + a_8\beta^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi + a_9 (4\alpha^4 + 6\beta\alpha^2 + \beta^2) \sin^3 \varphi \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (-2\beta R^2 \cos^2 \varphi - 1) (2(\alpha^2 + \beta) R^2 \cos^2 \varphi - 2\alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1)^2 ((\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi - \alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1).
\end{aligned}$$

Para provar que B não se anula temos que mostrar que as equações

$$\begin{aligned}
2(\alpha^2 + \beta) R^2 \cos^2 \varphi &= 2\alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1, \\
(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi &= \alpha R \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta) R^2 \cos^2 \varphi + 1} \cos \varphi + 1,
\end{aligned}$$

não tem soluções no intervalo $(0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. De fato, elevamos ao quadrado ambos os lados das duas equações anteriores, obtemos respectivamente:

$$(2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1)^2 = 0, \quad (2\beta R^2 \cos^2 \varphi + 1) (R^2 (\alpha^2 + 2\beta) \cos^2 \varphi + 1) = 0.$$

Desde que $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$ as duas equações anteriores não tem soluções. Assim, $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ nos pontos das órbitas periódicas do centro (4.1).

Agora, calculamos a função “averaging” $f : (0, \sqrt{-1/2\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(R) = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{B(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i d\varphi.$$

Calculando a integral anterior, obtemos que $f(R) = N(R)/D(R)$, onde

$$\begin{aligned} N(R) &= \beta(a_6 + 3a_8 + 2a_1\beta + 2\beta b_2 + b_7 - 3b_9)g_0 - 2\beta^2(2a_1\alpha^2 + a_3\alpha \\ &\quad + a_5\alpha + a_6 + a_8 + 2a_1\beta)g_1 + 2\beta(a_8 + b_9)g_2 + (a_6 - a_8 - b_7 \\ &\quad + b_9)g_3, \\ D(R) &= 4\beta^2 R, \quad g_0 = R^2, \quad g_1 = R^4, \quad g_2 = R^2 \sqrt{1 + 2\beta R^2}, \\ g_3 &= 1 - \sqrt{1 + 2\beta R^2}. \end{aligned}$$

Os cálculos anteriores foram verificados com o auxílio do software *Mathematica*. Os zeros da função f correspondem aos zeros da função N . Para encontrar o número máximo de zeros de f , basta provar que (g_0, g_1, g_2, g_3) é um sistema-ECT, ou seja, $W(g_0, \dots, g_k)(R) \neq 0$, para $0 \leq k \leq 3$, onde $W(g_0, \dots, g_k)(R)$ denota os Wronskianos das funções $(g_0, \dots, g_k)$. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} W(g_0)(R) &= R^2, \quad W(g_0, g_1) = 2R^5, \quad W(g_0, g_1, g_2)(R) = -\frac{8R^9\beta^2}{(1 + 2\beta R^2)^{3/2}}, \\ W(g_0, \dots, g_3)(R) &= \frac{-192\beta^2 R^6}{(1 + 2\beta R^2)^{7/2}} \left[\sqrt{1 + 2\beta R^2} R^4 \beta^2 + 4\sqrt{1 + 2\beta R^2} \beta R^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{1 + 2\beta R^2} - 4R^4 \beta^2 - 6\beta R^2 - 2 \right]. \end{aligned}$$

Desde que $\beta < 0$ e $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$, os três primeiros Wronskianos não se anulam. Agora, obter os zeros de $W(g_0, \dots, g_3)(R)$ é equivalente a resolver a seguinte equação:

$$\sqrt{1 + 2\beta R^2} R^4 \beta^2 + 4\sqrt{1 + 2\beta R^2} \beta R^2 + 2\sqrt{1 + 2\beta R^2} = 4R^4 \beta^2 + 6\beta R^2 + 2.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação anterior e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$(1 + 2\beta R^2)R^8\beta^4 = 0,$$

que é impossível porque $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. Assim, o Wronskiano $W(g_0, \dots, g_3)(R)$ não se anula em $(0, \sqrt{-1/(2\beta)})$. Portanto, uma vez que (g_0, g_1, g_2, g_3) é um sistema-ECT, f tem no máximo 3 zeros e eles são alcançados.

O sistema (4.4) é analítico e satisfaz as hipóteses do Teorema 7. Portanto, os zeros de f correspondem a órbitas periódicas do sistema perturbado (4.2) e o Teorema 13 está provado.

4.3 Prova do Teorema 14

As funções H , μ e ρ são as mesmas dadas na prova do Teorema 13. Denote $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$, $c = (c_1, \dots, c_9)$, $d = (d_1, \dots, d_9)$, $j_1 = (a, b, \alpha, \beta)$ e $j_2 = (c, d, \alpha, \beta)$. Nós transformamos o sistema (4.3) no sistema

$$\frac{dR}{d\varphi} = \begin{cases} \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_1 - Pq_1)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{se } y > 0, \\ \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_2 - Pq_2)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Como feito na prova do Teorema 13, temos que $R(Qx - Py) \neq 0$. Devemos estudar os zeros da função “averaging”

$f : (0, \sqrt{-1/(2\beta)}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(R) = \int_0^\pi \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_1 - Pq_1)}{2R(Qx - Py)} d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp_2 - Pq_2)}{2R(Qx - Py)} d\varphi.$$

Calculando essas integrais, obtemos

$$f(R) = \sum_{i=0}^{21} f_i B_i,$$

onde

$$f_0 = \frac{1}{R} \left(\sqrt{1 + 2\beta R^2} - 1 \right), \quad f_1 = R\sqrt{1 + 2\beta R^2}, \quad f_2 = R, \quad f_3 = R^3,$$

$$f_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{1 + 2\beta R^2} R^{2i-8}, & \text{para } i = 4, \dots, 8, \\ \frac{1}{2R}(1 + 2\beta R^2) \log \left(\frac{aR + \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{aR - \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right)^2, & \text{para } i = 9, \\ \frac{1}{2} R^{2i-19} (1 + 2\beta R^2) \log \left(\frac{aR + \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}}{aR - \sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right)^2, & \\ \text{para } i = 10, \dots, 13, \\ \frac{1}{R} \sinh^{-1} \left(R\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \right), & \text{para } i = 14, \\ R \sinh^{-1} \left(R\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \right), & \text{para } i = 15, \\ \frac{1}{R} \tanh^{-1} \left(\frac{aR}{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right), & \text{para } i = 16, \\ R^{2i-33} \tanh^{-1} \left(\frac{aR}{\sqrt{1 + (\alpha^2 + 2\beta)R^2}} \right), & \text{para } i = 17, \dots, 21 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0(-P_0(j_1) + P_0(j_2)), & B_1 &= C_1(P_1(j_1) - P_1(j_2)), \\ B_2 &= C_2(-P_2(j_1) - P_2(j_2)), & B_3 &= C_3(-P_3(j_1) - P_3(j_2)), \\ B_4 &= C_4(P_4(j_1) - P_4(j_2)), & B_5 &= C_5(-P_5(j_1) + P_5(j_2)), \\ B_6 &= C_6(-P_6(j_1) + P_6(j_2)), & B_7 &= C_7(P_7(j_1) - P_7(j_2)), \\ B_8 &= C_8(-P_8(j_1) + P_8(j_2)), & B_9 &= C_9(P_9(j_1) - P_9(j_2)), \\ B_{10} &= C_{10}(-P_{10}(j_1) + P_{10}(j_2)), & B_{11} &= C_{11}(P_{11}(j_1) - P_{11}(j_2)), \\ B_{12} &= C_{12}(-P_{12}(j_1) + P_{12}(j_2)), & B_{13} &= C_{13}(P_{13}(j_1) - P_{13}(j_2)), \\ B_{14} &= C_{14}(-P_{14}(j_1) + P_{14}(j_2)), & B_{15} &= C_{15}(-P_{15}(j_1) + P_{15}(j_2)), \\ B_{16} &= C_{16}(-P_{16}(j_1) + P_{16}(j_2)), & B_{17} &= C_{17}(P_{17}(j_1) - P_{17}(j_2)), \\ B_{18} &= C_{18}(P_{18}(j_1) - P_{18}(j_2)), & B_{19} &= C_{19}(-P_{19}(j_1) + P_{19}(j_2)), \\ B_{20} &= C_{20}(P_{20}(j_1) - P_{20}(j_2)), & B_{21} &= C_{21}(-P_{21}(j_1) + P_{21}(j_2)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\pi}{4\beta^2}, & C_1 &= \frac{\pi}{2\beta}, & C_2 &= \frac{\pi}{4\beta}, \\
C_3 &= \frac{\pi}{2}, & C_4 &= \frac{1}{2\alpha^5\beta(\alpha^2+2\beta)}, & C_5 &= \frac{1}{\alpha^5(\alpha^2+2\beta)}, \\
C_6 &= \frac{2}{\alpha^5}, & C_7 &= \frac{8(\beta-1)\beta}{\alpha^5}, & C_8 &= 2C_7(\alpha^2+2\beta), \\
C_{9,10} &= \frac{1}{4\alpha^8\beta^6}, & C_{11} &= \frac{\alpha^2+2\beta}{2\alpha^8\beta^5}, & C_{12} &= \frac{4(\alpha^2+2\beta)^2}{\alpha^8}, \\
C_{13,21} &= \frac{1}{\alpha^8}, & C_{14} &= \frac{1}{2\beta^2(\alpha^2+2\beta)^{3/2}}, & C_{15} &= \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2+2\beta}}, \\
C_{16,17} &= \frac{1}{2\alpha^8\beta^6}, & C_{18} &= \frac{1}{\alpha^8\beta^5}, & C_{19} &= \frac{2}{\alpha^8\beta^4}, \\
C_{20} &= \frac{16\beta(\alpha^2+2\beta)}{\alpha^8},
\end{aligned}$$

$$P_0 = c_6 - c_8 - d_7 + d_9,$$

$$P_1 = c_8 - d_9,$$

$$P_2 = 2\beta c_1 + 2\beta d_2 - c_6 + 3c_8 + d_7 - 3d_9,$$

$$P_3 = 2\alpha^2 c_1 + \alpha c_3 + \alpha c_5 + 2\beta c_1 + c_6 + c_8,$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= -2\alpha^6\beta c_2 - 2\alpha^6\beta d_1 + \alpha^6 c_7 - \alpha^6 c_9 + \alpha^6 d_6 - \alpha^6 d_8 - 2\alpha^5\beta c_4 \\
&\quad - 2\alpha^5\beta d_3 + 2\alpha^5\beta d_5 - 32\alpha^4\beta^2 c_2 - 32\alpha^4\beta^2 d_1 + 32\alpha^4\beta c_2 + 32\alpha^4\beta d_1 \\
&\quad + 20\alpha^3\beta^2 c_4 + 20\alpha^3\beta^2 d_3 - 20\alpha^3\beta^2 d_5 - 20\alpha^3\beta c_4 - 20\alpha^3\beta d_3 \\
&\quad + 20\alpha^3\beta d_5 - 96\alpha^2\beta^3 c_2 - 96\alpha^2\beta^3 d_1 + 96\alpha^2\beta^2 c_2 - 4\alpha^2\beta^2 c_7 \\
&\quad + 4\alpha^2\beta^2 c_9 + 96\alpha^2\beta^2 d_1 - 4\alpha^2\beta^2 d_6 + 4\alpha^2\beta^2 d_8 + 4\alpha^2\beta c_7 - 4\alpha^2\beta c_9 \\
&\quad + 4\alpha^2\beta d_6 - 4\alpha^2\beta d_8 + 40\alpha\beta^3 c_4 + 40\alpha\beta^3 d_3 - 40\alpha\beta^3 d_5 - 40\alpha\beta^2 c_4 \\
&\quad - 40\alpha\beta^2 d_3 + 40\alpha\beta^2 d_5 - 64\beta^4 c_2 - 64\beta^4 d_1 + 64\beta^3 c_2 - 8\beta^3 c_7 \\
&\quad + 8\beta^3 c_9 + 64\beta^3 d_1 - 8\beta^3 d_6 + 8\beta^3 d_8 + 8\beta^2 c_7 - 8\beta^2 c_9 + 8\beta^2 d_6 \\
&\quad - 8\beta^2 d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5 = & 2\alpha^8 c_2 + \alpha^7 c_4 + 14\alpha^6 \beta c_2 + 18\alpha^6 \beta d_1 - 8\alpha^6 c_2 - \alpha^6 c_7 + \alpha^6 c_9 \\
& -16\alpha^6 d_1 - \alpha^6 d_6 + \alpha^6 d_8 - 20\alpha^5 \beta c_4 - 38\alpha^5 \beta d_3 - 2\alpha^5 \beta d_5 + 24\alpha^5 c_4 \\
& +40\alpha^5 d_3 + 96\alpha^4 \beta^2 c_2 + 128\alpha^4 \beta^2 d_1 - 96\alpha^4 \beta c_2 + 26\alpha^4 \beta c_7 \\
& +10\alpha^4 \beta c_9 - 128\alpha^4 \beta d_1 + 36\alpha^4 \beta d_6 - 26\alpha^4 c_7 - 10\alpha^4 c_9 - 36\alpha^4 d_6 \\
& -112\alpha^3 \beta^2 c_4 - 140\alpha^3 \beta^2 d_3 + 112\alpha^3 \beta c_4 + 140\alpha^3 \beta d_3 + 240\alpha^2 \beta^3 c_2 \\
& +240\alpha^2 \beta^3 d_1 - 240\alpha^2 \beta^2 c_2 + 68\alpha^2 \beta^2 c_7 + 16\alpha^2 \beta^2 c_9 - 240\alpha^2 \beta^2 d_1 \\
& +84\alpha^2 \beta^2 d_6 - 68\alpha^2 \beta c_7 - 16\alpha^2 \beta c_9 - 84\alpha^2 \beta d_6 - 128\alpha \beta^3 c_4 \\
& -120\alpha \beta^3 d_3 + 128\alpha \beta^2 c_4 + 120\alpha \beta^2 d_3 + 160\beta^4 c_2 + 96\beta^4 d_1 \\
& -160\beta^3 c_2 + 32\beta^3 c_7 - 8\beta^3 c_9 - 96\beta^3 d_1 + 24\beta^3 d_6 - 32\beta^2 c_7 + 8\beta^2 c_9 \\
& -24\beta^2 d_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_6 = & 2\alpha^6 \beta c_2 - 7\alpha^5 \beta c_4 - 16\alpha^5 \beta d_3 + 8\alpha^5 c_4 + 16\alpha^5 d_3 + 24\alpha^4 \beta^2 c_2 \\
& +32\alpha^4 \beta^2 d_1 - 24\alpha^4 \beta c_2 + 28\alpha^4 \beta c_7 - 32\alpha^4 \beta d_1 + 48\alpha^4 \beta d_6 - 28\alpha^4 c_7 \\
& -48\alpha^4 d_6 - 72\alpha^3 \beta^2 c_4 - 80\alpha^3 \beta^2 d_3 + 72\alpha^3 \beta c_4 + 80\alpha^3 \beta d_3 \\
& +120\alpha^2 \beta^3 c_2 + 96\alpha^2 \beta^3 d_1 - 120\alpha^2 \beta^2 c_2 + 78\alpha^2 \beta^2 c_7 - 96\alpha^2 \beta^2 d_1 \\
& +72\alpha^2 \beta^2 d_6 - 78\alpha^2 \beta c_7 - 72\alpha^2 \beta d_6 - 96\alpha \beta^3 c_4 - 60\alpha \beta^3 d_3 \\
& +96\alpha \beta^2 c_4 + 60\alpha \beta^2 d_3 + 80\beta^4 c_2 + 32\beta^4 d_1 - 80\beta^3 c_2 + 24\beta^3 c_7 \\
& -32\beta^3 d_1 + 12\beta^3 d_6 - 24\beta^2 c_7 - 12\beta^2 d_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7 = & 4\alpha^6 c_7 - 8\alpha^6 c_9 - 8\alpha^6 d_8 + 8\alpha^5 \beta d_5 - 4\alpha^4 \beta^2 c_2 - 4\alpha^4 \beta c_7 - 24\alpha^4 \beta c_9 \\
& -24\alpha^4 \beta d_8 + 16\alpha^3 \beta^2 c_4 + 20\alpha^3 \beta^2 d_5 - 24\alpha^2 \beta^3 c_2 - 21\alpha^2 \beta^2 c_7 \\
& -18\alpha^2 \beta^2 c_9 - 18\alpha^2 \beta^2 d_8 + 22\alpha \beta^3 c_4 + 10\alpha \beta^3 d_5 - 16\beta^4 c_2 - 6\beta^3 c_7 \\
& -2\beta^3 c_9 - 2\beta^3 d_8,
\end{aligned}$$

$$P_8 = 32(\beta - 1)\beta c_9 (\alpha^2 + 2\beta) (4\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta + \beta^2),$$

$$\begin{aligned}
P_9 = & -16\alpha^{17}c_4 - 16\alpha^{17}d_3 + 16\alpha^{17}d_5 + 32\alpha^{16}\beta c_2 + 32\alpha^{16}\beta d_1 + 48\alpha^{16}c_7 \\
& -48\alpha^{16}c_9 + 48\alpha^{16}d_6 - 48\alpha^{16}d_8 - 120\alpha^{15}\beta c_4 - 120\alpha^{15}\beta d_3 \\
& +120\alpha^{15}\beta d_5 + 176\alpha^{14}\beta^2 c_2 + 176\alpha^{14}\beta^2 d_1 + 192\alpha^{14}\beta c_7 - 192\alpha^{14}\beta c_9 \\
& +192\alpha^{14}\beta d_6 - 192\alpha^{14}\beta d_8 - 280\alpha^{13}\beta^2 c_4 - 280\alpha^{13}\beta^2 d_3 \\
& +280\alpha^{13}\beta^2 d_5 + 312\alpha^{12}\beta^3 c_2 + 312\alpha^{12}\beta^3 d_1 + 252\alpha^{12}\beta^2 c_7 \\
& -252\alpha^{12}\beta^2 c_9 + 252\alpha^{12}\beta^2 d_6 - 252\alpha^{12}\beta^2 d_8 - 250\alpha^{11}\beta^3 c_4 \\
& -250\alpha^{11}\beta^3 d_3 + 250\alpha^{11}\beta^3 d_5 + 200\alpha^{10}\beta^4 c_2 + 200\alpha^{10}\beta^4 d_1 \\
& +120\alpha^{10}\beta^3 c_7 - 120\alpha^{10}\beta^3 c_9 + 120\alpha^{10}\beta^3 d_6 - 120\alpha^{10}\beta^3 d_8 \\
& -75\alpha^9\beta^4 c_4 - 75\alpha^9\beta^4 d_3 + 75\alpha^9\beta^4 d_5 + 40\alpha^8\beta^5 c_2 + 40\alpha^8\beta^5 d_1 \\
& +15\alpha^8\beta^4 c_7 - 15\alpha^8\beta^4 c_9 + 15\alpha^8\beta^4 d_6 - 15\alpha^8\beta^4 d_8 + 16\alpha^6\beta^6 c_2 \\
& +16\alpha^6\beta^6 d_1 - 8\alpha^5\beta^6 c_4 - 8\alpha^5\beta^6 d_3 + 8\alpha^5\beta^6 d_5 + 64\alpha^4\beta^7 c_2 \\
& +64\alpha^4\beta^7 d_1 - 60\alpha^4\beta^6 c_7 + 60\alpha^4\beta^6 c_9 - 60\alpha^4\beta^6 d_6 + 60\alpha^4\beta^6 d_8 \\
& +20\alpha^3\beta^7 c_4 + 20\alpha^3\beta^7 d_3 - 20\alpha^3\beta^7 d_5 + 48\alpha^2\beta^8 c_2 + 48\alpha^2\beta^8 d_1 \\
& -60\alpha^2\beta^7 c_7 + 60\alpha^2\beta^7 c_9 - 60\alpha^2\beta^7 d_6 + 60\alpha^2\beta^7 d_8 + 32\beta^9 c_2 + 32\beta^9 d_1, \\
P_{10} = & 16\alpha^{18}c_7 - 48\alpha^{18}c_9 - 32\alpha^{18}d_8 + 32\alpha^{17}\beta d_5 - 16\alpha^{16}\beta^2 c_2 + 24\alpha^{16}\beta c_7 \\
& -200\alpha^{16}\beta c_9 - 176\alpha^{16}\beta d_8 + 64\alpha^{15}\beta^2 c_4 + 160\alpha^{15}\beta^2 d_5 - 136\alpha^{14}\beta^3 c_2 \\
& -104\alpha^{14}\beta^2 c_7 - 248\alpha^{14}\beta^2 c_9 - 352\alpha^{14}\beta^2 d_8 + 248\alpha^{13}\beta^3 c_4 \\
& +280\alpha^{13}\beta^3 d_5 - 324\alpha^{12}\beta^4 c_2 - 254\alpha^{12}\beta^3 c_7 - 54\alpha^{12}\beta^3 c_9 \\
& -308\alpha^{12}\beta^3 d_8 + 300\alpha^{11}\beta^4 c_4 + 200\alpha^{11}\beta^4 d_5 - 280\alpha^{10}\beta^5 c_2 \\
& -165\alpha^{10}\beta^4 c_7 + 55\alpha^{10}\beta^4 c_9 - 110\alpha^{10}\beta^4 d_8 + 110\alpha^9\beta^5 c_4 + 50\alpha^9\beta^5 d_5 \\
& -112\alpha^8\beta^6 c_2 - 32\alpha^8\beta^6 d_1 - 30\alpha^8\beta^5 c_7 + 20\alpha^8\beta^5 c_9 - 10\alpha^8\beta^5 d_8 \\
& +32\alpha^7\beta^6 c_4 + 48\alpha^7\beta^6 d_3 - 16\alpha^7\beta^6 d_5 - 240\alpha^6\beta^7 c_2 - 256\alpha^6\beta^7 d_1 \\
& +32\alpha^6\beta^6 c_7 - 64\alpha^6\beta^6 c_9 + 24\alpha^6\beta^6 d_6 - 56\alpha^6\beta^6 d_8 + 168\alpha^5\beta^7 c_4 \\
& +216\alpha^5\beta^7 d_3 - 56\alpha^5\beta^7 d_5 - 656\alpha^4\beta^8 c_2 - 672\alpha^4\beta^8 d_1 + 124\alpha^4\beta^7 c_7 \\
& -268\alpha^4\beta^7 c_9 + 24\alpha^4\beta^7 d_6 - 168\alpha^4\beta^7 d_8 + 272\alpha^3\beta^8 c_4 + 360\alpha^3\beta^8 d_3 \\
& -80\alpha^3\beta^8 d_5 - 704\alpha^2\beta^9 c_2 - 704\alpha^2\beta^9 d_1 + 48\alpha^2\beta^8 c_7 - 216\alpha^2\beta^8 c_9 \\
& -72\alpha^2\beta^8 d_6 - 96\alpha^2\beta^8 d_8 + 208\alpha\beta^9 c_4 + 240\alpha\beta^9 d_3 - 80\alpha\beta^9 d_5 \\
& -320\beta^{10} c_2 - 256\beta^{10} d_1 - 48\beta^9 c_7 + 16\beta^9 c_9 - 48\beta^9 d_6 + 16\beta^9 d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 16\alpha^{16}c_9 + 64\alpha^{14}\beta c_9 + 84\alpha^{12}\beta^2c_9 + 40\alpha^{10}\beta^3c_9 + 5\alpha^8\beta^4c_9 \\
&\quad -16\alpha^7\beta^5c_4 - 32\alpha^7\beta^5d_3 + 48\alpha^6\beta^6c_2 + 64\alpha^6\beta^6d_1 + 72\alpha^6\beta^5c_7 \\
&\quad -24\alpha^6\beta^5c_9 + 96\alpha^6\beta^5d_6 - 32\alpha^6\beta^5d_8 - 176\alpha^5\beta^6c_4 - 224\alpha^5\beta^6d_3 \\
&\quad +32\alpha^5\beta^6d_5 + 320\alpha^4\beta^7c_2 + 320\alpha^4\beta^7d_1 + 252\alpha^4\beta^6c_7 - 28\alpha^4\beta^6c_9 \\
&\quad +336\alpha^4\beta^6d_6 - 96\alpha^4\beta^6d_8 - 416\alpha^3\beta^7c_4 - 440\alpha^3\beta^7d_3 + 80\alpha^3\beta^7d_5 \\
&\quad +544\alpha^2\beta^8c_2 + 448\alpha^2\beta^8d_1 + 276\alpha^2\beta^7c_7 + 312\alpha^2\beta^7d_6 - 72\alpha^2\beta^7d_8 \\
&\quad -296\alpha\beta^8c_4 - 240\alpha\beta^8d_3 + 40\alpha\beta^8d_5 + 256\beta^9c_2 + 128\beta^9d_1 \\
&\quad +72\beta^8c_7 - 16\beta^8c_9 + 48\beta^8d_6 - 8\beta^8d_8, \\
P_{12} &= 4\alpha^6c_7 - 8\alpha^6c_9 - 8\alpha^6d_8 + 8\alpha^5\beta d_5 - 4\alpha^4\beta^2c_2 - 4\alpha^4\beta c_7 - 20\alpha^4\beta c_9 \\
&\quad -24\alpha^4\beta d_8 + 16\alpha^3\beta^2c_4 + 20\alpha^3\beta^2d_5 - 24\alpha^2\beta^3c_2 - 21\alpha^2\beta^2c_7 \\
&\quad -12\alpha^2\beta^2c_9 - 18\alpha^2\beta^2d_8 + 22\alpha\beta^3c_4 + 10\alpha\beta^3d_5 - 16\beta^4c_2 - 6\beta^3c_7 \\
&\quad -\beta^3c_9 - 2\beta^3d_8, \\
P_{13} &= 8\beta c_9 (\alpha^2 + 2\beta)^3 (4\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2), \\
P_{14} &= \alpha^3c_7 - \alpha^3c_9 + \alpha^3d_6 - \alpha^3d_8 - 2\alpha\beta^2c_2 - 2\alpha\beta^2d_1 + 3\alpha\beta c_7 - 3\alpha\beta c_9 \\
&\quad +3\alpha\beta d_6 - 3\alpha\beta d_8 - 2\beta^2c_4 - 2\beta^2d_3 + 2\beta^2d_5, \\
P_{15} &= \alpha c_7 - 2\alpha c_9 - \alpha d_8 - \beta c_4 + 2\beta d_5, \\
P_{16} &= -16\alpha^{17}c_4 - 16\alpha^{17}d_3 + 16\alpha^{17}d_5 + 32\alpha^{16}\beta c_2 + 32\alpha^{16}\beta d_1 + 48\alpha^{16}c_7 \\
&\quad -48\alpha^{16}c_9 + 48\alpha^{16}d_6 - 48\alpha^{16}d_8 - 120\alpha^{15}\beta c_4 - 120\alpha^{15}\beta d_3 \\
&\quad +120\alpha^{15}\beta d_5 + 176\alpha^{14}\beta^2c_2 + 176\alpha^{14}\beta^2d_1 + 192\alpha^{14}\beta c_7 - 192\alpha^{14}\beta c_9 \\
&\quad +192\alpha^{14}\beta d_6 - 192\alpha^{14}\beta d_8 - 280\alpha^{13}\beta^2c_4 - 280\alpha^{13}\beta^2d_3 + 280\alpha^{13}\beta^2d_5 \\
&\quad +312\alpha^{12}\beta^3c_2 + 312\alpha^{12}\beta^3d_1 + 252\alpha^{12}\beta^2c_7 - 252\alpha^{12}\beta^2c_9 \\
&\quad +252\alpha^{12}\beta^2d_6 - 252\alpha^{12}\beta^2d_8 - 250\alpha^{11}\beta^3c_4 - 250\alpha^{11}\beta^3d_3 \\
&\quad +250\alpha^{11}\beta^3d_5 + 200\alpha^{10}\beta^4c_2 + 200\alpha^{10}\beta^4d_1 + 120\alpha^{10}\beta^3c_7 \\
&\quad -120\alpha^{10}\beta^3c_9 + 120\alpha^{10}\beta^3d_6 - 120\alpha^{10}\beta^3d_8 - 75\alpha^9\beta^4c_4 - 75\alpha^9\beta^4d_3 \\
&\quad +75\alpha^9\beta^4d_5 + 40\alpha^8\beta^5c_2 + 40\alpha^8\beta^5d_1 + 14\alpha^8\beta^4c_7 - 14\alpha^8\beta^4c_9 \\
&\quad +14\alpha^8\beta^4d_6 - 14\alpha^8\beta^4d_8 + 16\alpha^6\beta^6c_2 + 16\alpha^6\beta^6d_1 - 8\alpha^5\beta^6c_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8\alpha^5\beta^6d_3 + 8\alpha^5\beta^6d_5 + 96\alpha^4\beta^7c_2 + 96\alpha^4\beta^7d_1 - 32\alpha^4\beta^6c_2 \\
& -60\alpha^4\beta^6c_7 + 60\alpha^4\beta^6c_9 - 32\alpha^4\beta^6d_1 - 60\alpha^4\beta^6d_6 + 60\alpha^4\beta^6d_8 \\
& + 20\alpha^3\beta^6c_4 + 20\alpha^3\beta^6d_3 - 20\alpha^3\beta^6d_5 + 80\alpha^2\beta^8c_2 + 80\alpha^2\beta^8d_1 \\
& - 32\alpha^2\beta^7c_2 - 56\alpha^2\beta^7c_7 + 56\alpha^2\beta^7c_9 - 32\alpha^2\beta^7d_1 - 56\alpha^2\beta^7d_6 \\
& + 56\alpha^2\beta^7d_8 - 4\alpha^2\beta^6c_7 + 4\alpha^2\beta^6c_9 - 4\alpha^2\beta^6d_6 + 4\alpha^2\beta^6d_8 + 32\beta^9c_2 \\
& + 32\beta^9d_1, \\
P_{17} = & 16c_7\alpha^{18} - 48c_9\alpha^{18} - 32d_8\alpha^{18} + 32\beta c_4\alpha^{17} + 32\beta d_3\alpha^{17} - 80\beta^2c_2\alpha^{16} \\
& - 72\beta c_7\alpha^{16} - 104\beta c_9\alpha^{16} - 64\beta^2d_1\alpha^{16} - 96\beta d_6\alpha^{16} - 80\beta d_8\alpha^{16} \\
& + 304\beta^2c_4\alpha^{15} + 240\beta^2d_3\alpha^{15} - 80\beta^2d_5\alpha^{15} - 488\beta^3c_2\alpha^{14} \\
& - 488\beta^2c_7\alpha^{14} + 136\beta^2c_9\alpha^{14} - 352\beta^3d_1\alpha^{14} - 384\beta^2d_6\alpha^{14} \\
& + 32\beta^2d_8\alpha^{14} + 808\beta^3c_4\alpha^{13} + 560\beta^3d_3\alpha^{13} - 280\beta^3d_5\alpha^{13} \\
& - 948\beta^4c_2\alpha^{12} - 758\beta^3c_7\alpha^{12} + 450\beta^3c_9\alpha^{12} - 624\beta^4d_1\alpha^{12} \\
& - 504\beta^3d_6\alpha^{12} + 196\beta^3d_8\alpha^{12} + 800\beta^4c_4\alpha^{11} + 500\beta^4d_3\alpha^{11} \\
& - 300\beta^4d_5\alpha^{11} - 680\beta^5c_2\alpha^{10} - 405\beta^4c_7\alpha^{10} + 295\beta^4c_9\alpha^{10} \\
& - 400\beta^5d_1\alpha^{10} - 240\beta^4d_6\alpha^{10} + 130\beta^4d_8\alpha^{10} + 260\beta^5c_4\alpha^9 \\
& + 150\beta^5d_3\alpha^9 - 100\beta^5d_5\alpha^9 - 192\beta^6c_2\alpha^8 - 58\beta^5c_7\alpha^8 + 46\beta^5c_9\alpha^8 \\
& - 112\beta^6d_1\alpha^8 - 30\beta^5d_6\alpha^8 + 18\beta^5d_8\alpha^8 + 32\beta^6c_4\alpha^7 + 48\beta^6d_3\alpha^7 \\
& - 16\beta^6d_5\alpha^7 - 288\beta^7c_2\alpha^6 + 16\beta^6c_2\alpha^6 + 32\beta^6c_7\alpha^6 - 64\beta^6c_9\alpha^6 \\
& - 320\beta^7d_1\alpha^6 + 32\beta^6d_1\alpha^6 + 24\beta^6d_6\alpha^6 - 56\beta^6d_8\alpha^6 + 232\beta^7c_4\alpha^5 \\
& - 48\beta^6c_4\alpha^5 + 312\beta^7d_3\alpha^5 - 80\beta^6d_3\alpha^5 - 72\beta^7d_5\alpha^5 - 944\beta^8c_2\alpha^4 \\
& + 160\beta^7c_2\alpha^4 + 192\beta^7c_7\alpha^4 + 52\beta^6c_7\alpha^4 - 408\beta^7c_9\alpha^4 + 20\beta^6c_9\alpha^4 \\
& - 992\beta^8d_1\alpha^4 + 192\beta^7d_1\alpha^4 + 72\beta^7d_6\alpha^4 + 72\beta^6d_6\alpha^4 - 288\beta^7d_8\alpha^4 \\
& + 360\beta^8c_4\alpha^3 - 128\beta^7c_4\alpha^3 + 440\beta^8d_3\alpha^3 - 120\beta^7d_3\alpha^3 - 40\beta^8d_5\alpha^3 \\
& - 960\beta^9c_2\alpha^2 + 160\beta^8c_2\alpha^2 + 136\beta^8c_7\alpha^2 + 32\beta^7c_7\alpha^2 - 328\beta^8c_9\alpha^2 \\
& - 8\beta^7c_9\alpha^2 - 896\beta^9d_1\alpha^2 + 96\beta^8d_1\alpha^2 + 24\beta^8d_6\alpha^2 + 24\beta^7d_6\alpha^2 \\
& - 216\beta^8d_8\alpha^2 + 208\beta^9c_4\alpha + 240\beta^9d_3\alpha - 80\beta^9d_5\alpha - 384\beta^{10}c_2 \\
& - 48\beta^9c_7 + 16\beta^9c_9 - 320\beta^{10}d_1 - 48\beta^9d_6 + 16\beta^9d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{18} = & 16\alpha^{18}c_7 - 64\alpha^{18}c_9 - 32\alpha^{18}d_8 + 32\alpha^{17}\beta d_5 - 16\alpha^{16}\beta^2c_2 + 24\alpha^{16}\beta c_7 \\
& - 296\alpha^{16}\beta c_9 - 176\alpha^{16}\beta d_8 + 64\alpha^{15}\beta^2c_4 + 160\alpha^{15}\beta^2d_5 - 136\alpha^{14}\beta^3c_2 \\
& - 104\alpha^{14}\beta^2c_7 - 460\alpha^{14}\beta^2c_9 - 352\alpha^{14}\beta^2d_8 + 248\alpha^{13}\beta^3c_4 \\
& + 280\alpha^{13}\beta^3d_5 - 324\alpha^{12}\beta^4c_2 - 254\alpha^{12}\beta^3c_7 - 262\alpha^{12}\beta^3c_9 \\
& - 308\alpha^{12}\beta^3d_8 + 300\alpha^{11}\beta^4c_4 + 200\alpha^{11}\beta^4d_5 - 280\alpha^{10}\beta^5c_2 \\
& - 165\alpha^{10}\beta^4c_7 - 30\alpha^{10}\beta^4c_9 - 110\alpha^{10}\beta^4d_8 + 126\alpha^9\beta^5c_4 + 32\alpha^9\beta^5d_3 \\
& + 50\alpha^9\beta^5d_5 - 160\alpha^8\beta^6c_2 - 96\alpha^8\beta^6d_1 - 102\alpha^8\beta^5c_7 + 32\alpha^8\beta^5c_9 \\
& - 96\alpha^8\beta^5d_6 + 22\alpha^8\beta^5d_8 + 256\alpha^7\beta^6c_4 + 368\alpha^7\beta^6d_3 - 48\alpha^7\beta^6d_5 \\
& - 16\alpha^7\beta^5c_4 - 32\alpha^7\beta^5d_3 - 704\alpha^6\beta^7c_2 - 768\alpha^6\beta^7d_1 + 48\alpha^6\beta^6c_2 \\
& - 420\alpha^6\beta^6c_7 + 12\alpha^6\beta^6c_9 + 64\alpha^6\beta^6d_1 - 600\alpha^6\beta^6d_6 + 104\alpha^6\beta^6d_8 \\
& + 56\alpha^6\beta^5c_7 + 96\alpha^6\beta^5d_6 + 1080\alpha^5\beta^7c_4 + 1264\alpha^5\beta^7d_3 - 200\alpha^5\beta^7d_5 \\
& - 144\alpha^5\beta^6c_4 - 160\alpha^5\beta^6d_3 - 2080\alpha^4\beta^8c_2 - 1952\alpha^4\beta^8d_1 \\
& + 240\alpha^4\beta^7c_2 - 812\alpha^4\beta^7c_7 - 212\alpha^4\beta^7c_9 + 192\alpha^4\beta^7d_1 - 1104\alpha^4\beta^7d_6 \\
& + 96\alpha^4\beta^7d_8 + 156\alpha^4\beta^6c_7 + 144\alpha^4\beta^6d_6 + 1592\alpha^3\beta^8c_4 + 1600\alpha^3\beta^8d_3 \\
& - 280\alpha^3\beta^8d_5 - 192\alpha^3\beta^7c_4 - 120\alpha^3\beta^7d_3 - 2208\alpha^2\beta^9c_2 \\
& - 1792\alpha^2\beta^9d_1 + 160\alpha^2\beta^8c_2 - 624\alpha^2\beta^8c_7 - 200\alpha^2\beta^8c_9 + 64\alpha^2\beta^8d_1 \\
& - 768\alpha^2\beta^8d_6 + 56\alpha^2\beta^8d_8 + 48\alpha^2\beta^7c_7 + 24\alpha^2\beta^7d_6 + 800\alpha\beta^9c_4 \\
& + 720\alpha\beta^9d_3 - 160\alpha\beta^9d_5 - 832\beta^{10}c_2 - 512\beta^{10}d_1 - 192\beta^9c_7 + 48\beta^9c_9 \\
& - 144\beta^9d_6 + 32\beta^9d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{19} = & 16\alpha^{18}c_9 + 96\alpha^{16}\beta c_9 + 212\alpha^{14}\beta^2c_9 + 208\alpha^{12}\beta^3c_9 - 16\alpha^{10}\beta^4c_7 \\
& + 117\alpha^{10}\beta^4c_9 + 32\alpha^{10}\beta^4d_8 - 16\alpha^9\beta^5c_4 - 32\alpha^9\beta^5d_3 - 32\alpha^9\beta^5d_5 \\
& + 64\alpha^8\beta^6c_2 + 64\alpha^8\beta^6d_1 + 8\alpha^8\beta^5c_7 + 226\alpha^8\beta^5c_9 + 96\alpha^8\beta^5d_6 \\
& + 224\alpha^8\beta^5d_8 + 16\alpha^8\beta^4c_7 - 32\alpha^8\beta^4c_9 - 32\alpha^8\beta^4d_8 - 272\alpha^7\beta^6c_4 \\
& - 288\alpha^7\beta^6d_3 - 208\alpha^7\beta^6d_5 + 32\alpha^7\beta^5d_5 + 592\alpha^6\beta^7c_2 + 448\alpha^6\beta^7d_1 \\
& - 16\alpha^6\beta^6c_2 + 496\alpha^6\beta^6c_7 + 516\alpha^6\beta^6c_9 + 528\alpha^6\beta^6d_6 + 520\alpha^6\beta^6d_8 \\
& - 16\alpha^6\beta^5c_7 - 96\alpha^6\beta^5c_9 - 96\alpha^6\beta^5d_8 - 1176\alpha^5\beta^7c_4 - 888\alpha^5\beta^7d_3 \\
& - 424\alpha^5\beta^7d_5 + 64\alpha^5\beta^6c_4 + 80\alpha^5\beta^6d_5 + 1792\alpha^4\beta^8c_2 + 1088\alpha^4\beta^8d_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -96\alpha^4\beta^7c_2 + 1288\alpha^4\beta^7c_7 + 532\alpha^4\beta^7c_9 + 984\alpha^4\beta^7d_6 + 488\alpha^4\beta^7d_8 \\
& -84\alpha^4\beta^6c_7 - 72\alpha^4\beta^6c_9 - 72\alpha^4\beta^6d_8 - 1824\alpha^3\beta^8c_4 - 1120\alpha^3\beta^8d_3 \\
& -320\alpha^3\beta^8d_5 + 88\alpha^3\beta^7c_4 + 40\alpha^3\beta^7d_5 + 2048\alpha^2\beta^9c_2 + 1024\alpha^2\beta^9d_1 \\
& -64\alpha^2\beta^8c_2 + 1080\alpha^2\beta^8c_7 + 200\alpha^2\beta^8c_9 + 672\alpha^2\beta^8d_6 + 176\alpha^2\beta^8d_8 \\
& -24\alpha^2\beta^7c_7 - 8\alpha^2\beta^7c_9 - 8\alpha^2\beta^7d_8 - 944\alpha\beta^9c_4 - 480\alpha\beta^9d_3 \\
& -80\alpha\beta^9d_5 + 768\beta^{10}c_2 + 256\beta^{10}d_1 + 240\beta^9c_7 - 16\beta^9c_9 + 96\beta^9d_6 \\
& +16\beta^9d_8, \\
P_{20} = & 4\alpha^8c_7 - 12\alpha^8c_9 - 8\alpha^8d_8 + 8\alpha^7\beta d_5 - 4\alpha^6\beta^2c_2 + 4\alpha^6\beta c_7 - 62\alpha^6\beta c_9 \\
& -40\alpha^6\beta d_8 + 4\alpha^6c_9 + 16\alpha^5\beta^2c_4 + 36\alpha^5\beta^2d_5 - 32\alpha^4\beta^3c_2 - 29\alpha^4\beta^2c_7 \\
& -99\alpha^4\beta^2c_9 - 66\alpha^4\beta^2d_8 + 6\alpha^4\beta c_9 + 54\alpha^3\beta^3c_4 + 50\alpha^3\beta^3d_5 \\
& -64\alpha^2\beta^4c_2 - 48\alpha^2\beta^3c_7 - 54\alpha^2\beta^3c_9 - 38\alpha^2\beta^3d_8 + \alpha^2\beta^2c_9 \\
& +44\alpha\beta^4c_4 + 20\alpha\beta^4d_5 - 32\beta^5c_2 - 12\beta^4c_7 - 6\beta^4c_9 - 4\beta^4d_8, \\
P_{21} = & 32\beta^2c_9 (\alpha^2 + 2\beta)^3 (4\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2).
\end{aligned}$$

Afirmamos que pelo menos 15 das funções $f_0, \dots, f_{21}$ são linearmente independentes. Na verdade, expandimos essas funções até a ordem 21, na variável R , em torno de $R = 0$, e obtemos que o posto da matriz dos coeficientes de $1, R, \dots, R^{21}$ das funções $f_0, \dots, f_{21}$ é 15. Assim, a afirmação está provada.

Os coeficientes

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{\pi}{4\beta^2} ((a_6 - a_8 - b_7 + b_9) + (c_6 - c_8 - d_7 + d_9)), \\
B_1 &= \frac{\pi}{2\beta} ((a_8 - b_9) - (c_8 - d_9)), \\
B_2 &= -\frac{\pi}{4\beta} ((2\beta a_1 + 2\beta b_2 - a_6 + 3a_8 + b_7 - 3b_9) + (2\beta c_1 + 2\beta d_2 - c_6 \\
& \quad + 3c_8 + d_7 - 3d_9)), \\
B_3 &= -\frac{\pi}{2} ((2\alpha^2 a_1 + \alpha a_3 + \alpha a_5 + 2\beta a_1 + a_6 + a_8) + (2\alpha^2 c_1 + \alpha c_3 + \alpha c_5 \\
& \quad + 2\beta c_1 + c_6 + c_8)),
\end{aligned}$$

são mutualmente linearmente independentes e são linearmente independentes com os demais coeficientes, porque em B_0 aparece o parâmetro b_7 que não aparece nos

coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, em B_1 aparece o parâmetro a_8 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, em B_2 aparece o parâmetro a_1 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$, e em B_3 aparece o parâmetro a_5 que não aparece nos coeficientes B_j para $j = 4, \dots, 21$. Reescrevemos os coeficientes $B_4, \dots, B_{21}$ na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} B_4 \\ \vdots \\ B_{21} \end{pmatrix} = Mv,$$

onde $v = (a_2, a_4, a_7, a_9, b_1, b_3, b_5, b_6, b_9, c_2, c_4, c_7, c_9, d_1, d_3, d_5, d_6, d_9)$ e M é uma matriz 18×18 . Devido ao tamanho da matriz M , não a explicitaremos aqui. Os cálculos foram feitos com o manipulador algébrico *Mathematica*. O posto de M é 9. Assim, existem $4 + 9 = 13$ coeficientes independentes. Portanto, podemos escrever

$$f(R) = \sum_{i=0}^{21} f_i B_i = \sum_{j=0}^{12} \tilde{f}_j \tilde{B}_j. \quad (4.6)$$

Agora vamos checar as hipóteses do Teorema 8. Note que $h(x, y) = y$, $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, e o sistema (4.5) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\frac{dR}{d\varphi} = Z(\varphi, R) = \varepsilon F(\varphi, R) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

onde

$$\begin{aligned} F(\varphi, R) &= F_1(\varphi, R) + \text{sign}(h(\varphi, R))F_2(\varphi, R), \\ F_1(\varphi, R) &= \frac{\mu(x^2 + y^2)((Qp_1 - Pq_1) + (Qp_2 - Pq_2))}{4R(Qx - Py)}, \\ F_2(\varphi, R) &= \frac{\mu(x^2 + y^2)((Qp_1 - Pq_1) - (Qp_2 - Pq_2))}{4R(Qx - Py)}, \end{aligned}$$

com $x = \rho(\varphi, R) \cos \varphi$ e $y = \rho(\varphi, R) \sin \varphi$. As hipóteses (i), (ii) e (iii) do Teorema 8 são satisfeitas. De fato, a hipótese (i) é satisfeita porque f é analítica em $R \in (0, \sqrt{-1/(2\beta)})$.

Observamos que um zero simples de uma função de uma variável sempre tem o grau de Brouwer diferente de zero, para mais detalhes, veja [54]. Assim, por (ii) somente precisamos olhar para os zeros simples da função f dada em (4.6).

A função $h(\varphi, R) = \rho(\varphi, R) \sin \varphi$ é igual a zero se, e somente se, $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Além disso, podemos checar que $(dh/d\varphi)(0, R) = 0$ se, e somente se,

$$\frac{(2\beta R^2 + 1)(a^2 R^2 + 2bR^2 + 1)}{\sqrt{R^2(\alpha^2 + 2\beta) + 1}} + \alpha R(-2\beta R^2 - 1) = 0.$$

Novamente, elevando ao quadrado ambos os lados da equação obtida passando o segundo membro da igualdade anterior para o lado direito, obtemos após algumas simplificações que $(2\beta R^2 + 1)^3 = 0$, e como antes isso não é possível. De um modo similar pode ser provado que $(dh/d\varphi)(\pi, R) \neq 0$. Assim, a hipótese (iii) é satisfeita.

Desde que as hipóteses do Teorema 8 são satisfeitas, os zeros simples da função (4.6) fornecem soluções 2π -periódicas do sistema (4.5). Finalmente, pela Proposição 2 segue que a função f dada por (4.6) pode ter pelo menos 12 zeros simples. Assim, o Teorema 14 está provado.

Capítulo 5

Ciclos limite de sistemas polinomiais diferenciais cúbicos com integrais primeiras racionais de grau 2

5.1 Introdução e enunciados dos principais resultados

Nesse capítulo, estudamos algumas famílias de sistemas polinomiais de grau 3, com integrais primeiras racionais de grau 2. A classificação de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos tendo um centro na origem e uma integral primeira racional de grau 2 pode ser encontrada em [45]. Agora, resumimos essa classificação em seis famílias de sistemas diferenciais polinomiais cúbicos que denotamos por P_k , para $k = 1, 2, \dots, 6$.

A classe P_1 é representada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(\alpha^2 + \beta + 2\alpha x + x^2), \\ \dot{y} &= -2((\alpha^2 + \beta)x + \alpha x^2 - \alpha y^2 - xy^2),\end{aligned}$$

com $\beta < 0$ e $\alpha^2 + \beta \neq 0$.

A classe P_2 é obtida transladando o outro centro de P_1 para a origem. Ela é descrita pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\alpha^{-2}y(\beta^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2(\beta + x^2)), \\ \dot{y} &= -2(\alpha^2x - \alpha x^2 - \alpha^{-2}\beta y^2 + x(\beta + y^2)).\end{aligned}$$

A classe P_3 é dada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + \alpha^2 + 2x + x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(-1 - \alpha^2 - 2y + x^2 - y^2),\end{aligned}$$

com $\alpha \neq 0$.

A classe P_4 é representada pelo sistema

$$\dot{x} = y(x^2 + \alpha), \quad \dot{y} = x(y^2 + \beta),$$

com $\alpha\beta < 0$.

A classe P_5 é fornecida pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta^2 + d^2 + 2(\beta + \gamma d)x + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(-\beta^2 - d^2 - 2dy + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2),\end{aligned}$$

com $d = 0$ ou $d = 1$. Se $d = 0$ então $\beta\gamma \neq 0$ e se $d = 1$ então $\beta(\beta\gamma - 1) \neq 0$.

Finalmente, a classe P_6 é obtida tomando $\beta = 0$ em P_1 . Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(x + \alpha)^2, \\ \dot{y} &= -2(x + \alpha)(\alpha x - y^2),\end{aligned}$$

com $\alpha \neq 0$.

Em [36] os autores estudaram os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos tendo uma integral primeira racional de grau 2, cujos retratos de fase correspondem aos

retratos de fase P_1 , P_3 e P_4 da Figura 5.1. Esses sistemas foram denotados em [36] por (B), (A) e (C), respectivamente. Eles também provaram que todos os centros desses sistemas são reversíveis e isócronos, veja [33, p. 314]. Seu principal resultado fornece cotas superiores $\mathcal{M}$ para o número máximo de ciclos limite dos sistemas P_1 , P_3 e P_4 quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau 3, usando integrais Abelianas, veja a coluna “cota superior” na Tabela 5.1. Aqui, estudamos o número máximo de ciclos limite $\mathcal{N}$ que bifurcam das órbitas periódicas dos centros P_1 , P_2 , P_4 e P_6 , quando eles são perturbados dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau 3, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, e o número máximo de ciclos limite *infinitesimal* $\mathcal{I}$ dos centros P_3 e P_5 usando a teoria do “averaging” de quinta ordem.

Uma questão natural é: *Quantas soluções periódicas persistem como ciclos limite, quando perturbamos os sistemas (P_1) – (P_6) dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos?*

Mais especificamente, considere os seguintes sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(\alpha^2 + \beta + 2\alpha x + x^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2((\alpha^2 + \beta)x + \alpha x^2 - \alpha y^2 - xy^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\alpha^{-2}y(\beta^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2(\beta + x^2)) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2(\alpha^2 x - \alpha x^2 - \alpha^{-2}\beta y^2 + x(\beta + y^2)) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x((1 + \alpha^2) + 2x + x^2 - y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= y(-(1 + \alpha^2) - 2y + x^2 - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\dot{x} = y(x^2 + \alpha) + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = x(y^2 + \beta) + \varepsilon q(x, y),\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta^2 + d^2 + 2(\beta + \gamma d)x + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= y(-\beta^2 - d^2 - 2dy + (\gamma^2 + 1)x^2 - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(x + \alpha)^2 + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= -2(x + \alpha)(\alpha x - y^2) + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{5.6}$$

onde

$$\begin{aligned}p(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ q(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3,\end{aligned}$$

Obviamente, os parâmetros dos sistemas não perturbados (5.1)-(5.6) devem satisfazer as condições dos sistemas $P_1 - P_6$.

Calculamos o número $\mathcal{N}$ para as classes P_1 , P_2 , P_4 e P_6 (ver Tabela 5.1). Na Seção 5.4, explicamos porque não podemos calcular o número $\mathcal{N}$ para as classes P_3 e P_5 . Na Seção 5.5 calculamos o número máximo de ciclos limites *infinitesimal* $\mathcal{I}$, para as classes P_3 e P_5 , quando perturbamos as classes dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais cúbicos até quinta ordem usando a teoria do “averaging” de quinta ordem. Na Seção 5.6 apresentamos um exemplo de uma subfamília da classe P_5 que tem no máximo 3 ciclos limites usando a teoria do “averaging” de sétima ordem. No Apêndice apresentamos duas expressões explícita usadas para encontrar 3 ciclos limites para a classe P_5 .

No que se segue apresentamos nossos principais resultados desse capítulo.

Teorema 15. *Quando perturbamos os sistemas P_1 , P_4 e P_6 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau três, o número máximo de ciclos limite que bifurcam, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, é $\mathcal{N} = 3$ e esse número é alcançado.*

Teorema 15 está provado na Seção 5.2.

Teorema 16. *Quando perturbamos o sistema P_2 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau três, o número máximo de ciclos limite que bifurcam, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem, é $\mathcal{N} = 3$, quando $\alpha^2 + \beta \notin (-1, 0) \cup (0, 1)$, e esse número é alcançado.*

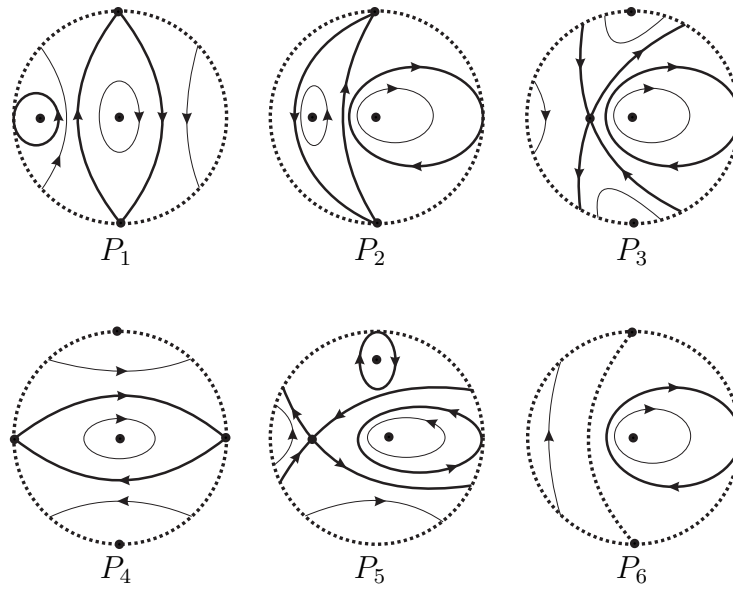


Figura 5.1: Retrato de fase no disco de Poincaré de campos vetoriais polinomiais cúbicos com centro na origem e com integral primeira racional de grau 2.

Teorema 16 está provado na Seção 5.3.

Teorema 17. *Quando perturbamos os sistemas P_3 and P_5 dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau três, o número máximo de ciclos limite infinitesimal que bifurcam usando a teoria do “averaging” de quinta ordem é 2, e esse número é alcançado.*

Teorema 17 está provado na Seção 5.5.

As provas dos Teoremas 15, 16 e 17 foram obtidas com a ajuda dos manipuladores algébricos Mathematica e Maple.

No Capítulo 3 apresentamos os resultados básicos que precisamos para provar nossos teoremas.

Retrato de fase	$\mathcal{M}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{I}$
P_1	4	3	—
P_2	4	3 se $ \alpha^2 + \beta \geq 1$	—
P_3	5	?	2
P_4	4	3	—
P_5	—	?	2
P_6	—	3	—

Tabela 5.1: A segunda coluna representa as cotas superiores $\mathcal{M}$ fornecidas em [36], e a terceira coluna representa o número máximo $\mathcal{N}$ de ciclos limites que bifurcam das órbitas periódicas dos sistemas P_k , quando são perturbados dentro da classe de todos sistemas diferenciais polinomiais cúbicos, usando a teoria do “averaging” de primeira ordem. A quarta coluna representa o número máximo $\mathcal{I}$ de ciclos limite infinitesimal bifurcando da origem dos sistemas P_k usando a teoria do “averaging” de quinta ordem .

5.2 Prova do Teorema 15

5.2.1 Prova para a Classe P_1

Temos que

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(\alpha^2 + 2\alpha x + \beta + x^2)^2},$$

é o fator integrante associado a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(\alpha + x)^2 + \beta}$$

do sistema P_1 , porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$, obtemos a função positiva $\rho : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$\rho = -\frac{R \left(\sqrt{4(\alpha^2 + \beta) - 2\beta R^2(2\cos^2 \theta - 1) - 2\beta R^2 + 2\alpha R \cos \theta} \right)}{R^2(2\cos^2 \theta - 1) + R^2 - 2}.$$

Após fazer a mudança de variável descrita no Teorema 11, o sistema (5.1) torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{A_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_1(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.7)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned}
A_1 &= -a_1 (\alpha^2 + \beta)^2 \cos^2 \theta - (\alpha^2 + \beta)^2 (a_2 + b_1) \sin \theta \cos \theta \\
&\quad - b_2 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^2 \theta, \\
A_2 &= \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} \left((-\alpha^2 - \beta) \cos^3 \theta (\alpha^2 a_3 + 3\alpha a_1 + a_3 \beta) \right. \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos \theta (\alpha^2 a_5 + \alpha^2 b_4 - \alpha a_1 + 4\alpha b_2 + a_5 \beta + \beta b_4) \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_4 + \alpha^2 b_3 + 3\alpha a_2 + 4\alpha b_1 + a_4 \beta + \beta b_3) \\
&\quad \left. - (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta (\alpha^2 b_5 - \alpha a_2 + \beta b_5) \right), \\
A_3 &= -(\alpha^2 + \beta)^2 \sin^4 \theta (\alpha^2 b_9 - \alpha a_5 + \beta b_9) - (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\alpha^4 a_8 \\
&\quad + \alpha^4 b_7 - \alpha^3 a_3 + 4\alpha^3 a_5 + 5\alpha^3 b_4 - 4\alpha^2 a_1 + 2\alpha^2 a_8 \beta + 2\alpha^2 \beta b_7 \\
&\quad + 4\alpha^2 b_2 - \alpha a_3 \beta + 4\alpha a_5 \beta + 5\alpha \beta b_4 - a_1 \beta + a_8 \beta^2 + \beta^2 b_7 - 4\beta b_2) \\
&\quad + (-\alpha^2 - \beta) \cos^4 \theta (\alpha^4 a_6 + 4\alpha^3 a_3 + 2\alpha^2 a_6 \beta + 4\alpha a_3 \beta - 5a_1 \beta \\
&\quad + a_6 \beta^2) - (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^3 \theta (\alpha^4 a_7 + \alpha^4 b_6 + 4\alpha^3 a_4 + 5\alpha^3 b_3 \\
&\quad + 2\alpha^2 a_7 \beta + 2\alpha^2 \beta b_6 + 4\alpha^2 b_1 + 4\alpha a_4 \beta + 5\alpha \beta b_3 - 5a_2 \beta + a_7 \beta^2 \\
&\quad + \beta^2 b_6 - 4\beta b_1) - (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta \cos \theta (\alpha^4 a_9 + \alpha^4 b_8 - \alpha^3 a_4 + 5\alpha^3 b_5 \\
&\quad - 4\alpha^2 a_2 + 2\alpha^2 a_9 \beta + 2\alpha^2 \beta b_8 - \alpha a_4 \beta + 5\alpha \beta b_5 - a_2 \beta + a_9 \beta^2 + \beta^2 b_8), \\
A_4 &= \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} \left(\alpha a_9 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^5 \theta + (\alpha^2 \right. \\
&\quad + \beta) \sin^4 \theta \cos \theta (\alpha^3 a_8 - 6\alpha^3 b_9 + 5\alpha^2 a_5 + \alpha a_8 \beta - 6\alpha \beta b_9 + a_5 \beta) \\
&\quad + \cos^5 \theta (-5\alpha^5 a_6 - 4\alpha^4 a_3 + 8\alpha^3 a_1 - 10\alpha^3 a_6 \beta + 12\alpha a_1 \beta - 5\alpha a_6 \beta^2 \\
&\quad + 4a_3 \beta^2) + \sin^2 \theta \cos^3 \theta (\alpha^5 a_6 - 5\alpha^5 a_8 - 6\alpha^5 b_7 + 5\alpha^4 a_3 - 4\alpha^4 a_5 \\
&\quad - 9\alpha^4 b_4 + 4\alpha^3 a_1 + 2\alpha^3 a_6 \beta - 10\alpha^3 a_8 \beta - 12\alpha^3 \beta b_7 + 4\alpha^3 b_2 \\
&\quad + 6\alpha^2 a_3 \beta - 6\alpha^2 \beta b_4 + \alpha a_6 \beta^2 - 5\alpha a_8 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_7 + 12\alpha \beta b_2 + a_3 \beta^2 \\
&\quad + 4a_5 \beta^2 + 3\beta^2 b_4) + \sin^3 \theta \cos^2 \theta (\alpha^5 a_7 - 5\alpha^5 a_9 - 6\alpha^5 b_8 + 5\alpha^4 a_4 \\
&\quad - 9\alpha^4 b_5 + 4\alpha^3 a_2 + 2\alpha^3 a_7 \beta - 10\alpha^3 a_9 \beta - 12\alpha^3 \beta b_8 + 6\alpha^2 a_4 \beta \\
&\quad - 6\alpha^2 \beta b_5 + \alpha a_7 \beta^2 - 5\alpha a_9 \beta^2 - 6\alpha \beta^2 b_8 + a_4 \beta^2 + 3\beta^2 b_5) \\
&\quad + \sin \theta \cos^4 \theta (-5\alpha^5 a_7 - 6\alpha^5 b_6 - 4\alpha^4 a_4 - 9\alpha^4 b_3 + 8\alpha^3 a_2 \\
&\quad - 10\alpha^3 a_7 \beta - 12\alpha^3 \beta b_6 + 4\alpha^3 b_1 - 6\alpha^2 \beta b_3 + 12\alpha a_2 \beta - 5\alpha a_7 \beta^2 \\
&\quad \left. - 6\alpha \beta^2 b_6 + 12\alpha \beta b_1 + 4a_4 \beta^2 + 3\beta^2 b_3) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & a_9 (\alpha^2 + \beta)^2 (6\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos \theta + (\alpha^2 + \beta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta (6\alpha^4 a_8 \\
& - 15\alpha^4 b_9 + 9\alpha^3 a_5 + 7\alpha^2 a_8 \beta - 12\alpha^2 \beta b_9 + \alpha a_5 \beta + a_8 \beta^2 + 3\beta^2 b_9) \\
& + \sin^2 \theta \cos^4 \theta (6\alpha^6 a_6 - 9\alpha^6 a_8 - 15\alpha^6 b_7 + 9\alpha^5 a_3 + 4\alpha^5 a_5 - 5\alpha^5 b_4 \\
& - 4\alpha^4 a_1 + 13\alpha^4 a_6 \beta - 14\alpha^4 a_8 \beta - 27\alpha^4 \beta b_7 + 10\alpha^4 b_2 + 10\alpha^3 a_3 \beta \\
& + 20\alpha^3 a_5 \beta + 10\alpha^3 \beta b_4 - 12\alpha^2 a_1 \beta + 8\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha^2 a_8 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_7 \\
& + 12\alpha^2 \beta b_2 + \alpha a_3 \beta^2 + 16\alpha a_5 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_4 - 4a_1 \beta^2 + a_6 \beta^3 + 4a_8 \beta^3 \\
& + 3\beta^3 b_7 - 6\beta^2 b_2) + \cos^6 \theta (-9\alpha^6 a_6 + 4\alpha^5 a_3 + 6\alpha^4 a_1 - 14\alpha^4 a_6 \beta \\
& + 20\alpha^3 a_3 \beta - \alpha^2 a_6 \beta^2 + 16\alpha a_3 \beta^2 - 10a_1 \beta^2 + 4a_6 \beta^3) \\
& + \sin^3 \theta \cos^3 \theta (6\alpha^6 a_7 - 9\alpha^6 a_9 - 15\alpha^6 b_8 + 9\alpha^5 a_4 - 5\alpha^5 b_5 - 4\alpha^4 a_2 \\
& + 13\alpha^4 a_7 \beta - 14\alpha^4 a_9 \beta - 27\alpha^4 \beta b_8 + 10\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_5 - 12\alpha^2 a_2 \beta \\
& + 8\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_8 + \alpha a_4 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_5 - 4a_2 \beta^2 + a_7 \beta^3 \\
& + 4a_9 \beta^3 + 3\beta^3 b_8) + \sin \theta \cos^5 \theta (-9\alpha^6 a_7 - 15\alpha^6 b_6 + 4\alpha^5 a_4 - 5\alpha^5 b_3 \\
& + 6\alpha^4 a_2 - 14\alpha^4 a_7 \beta - 27\alpha^4 \beta b_6 + 10\alpha^4 b_1 + 20\alpha^3 a_4 \beta + 10\alpha^3 \beta b_3 \\
& - \alpha^2 a_7 \beta^2 - 9\alpha^2 \beta^2 b_6 + 12\alpha^2 \beta b_1 + 16\alpha a_4 \beta^2 + 15\alpha \beta^2 b_3 - 10a_2 \beta^2 \\
& + 4a_7 \beta^3 + 3\beta^3 b_6 - 6\beta^2 b_1), \\
A_6 = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta} (3\alpha a_9 (\alpha^2 + \beta) (5\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos^2 \theta \\
& + \sin^2 \theta \cos^5 \theta (15\alpha^5 a_6 - 5\alpha^5 a_8 - 20\alpha^5 b_7 + 5\alpha^4 a_3 + 10\alpha^4 a_5 \\
& + 5\alpha^4 b_4 - 10\alpha^3 a_1 + 18\alpha^3 a_6 \beta + 10\alpha^3 a_8 \beta - 8\alpha^3 \beta b_7 + 4\alpha^3 b_2 \\
& - 6\alpha^2 a_3 \beta + 12\alpha^2 a_5 \beta + 18\alpha^2 \beta b_4 - 6\alpha a_1 \beta + 3\alpha a_6 \beta^2 + 15\alpha a_8 \beta^2 \\
& + 12\alpha \beta^2 b_7 - 12\alpha \beta b_2 - 3a_3 \beta^2 - 6a_5 \beta^2 - 3\beta^2 b_4) + \cos^7 \theta (-5\alpha^5 a_6 \\
& + 10\alpha^4 a_3 - 6\alpha^3 a_1 + 10\alpha^3 a_6 \beta + 12\alpha^2 a_3 \beta - 18\alpha a_1 \beta + 15\alpha a_6 \beta^2 \\
& - 6a_3 \beta^2) + \sin^3 \theta \cos^4 \theta (15\alpha^5 a_7 - 5\alpha^5 a_9 - 20\alpha^5 b_8 + 5\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_5 \\
& - 10\alpha^3 a_2 + 18\alpha^3 a_7 \beta + 10\alpha^3 a_9 \beta - 8\alpha^3 \beta b_8 - 6\alpha^2 a_4 \beta + 18\alpha^2 \beta b_5 \\
& - 6\alpha a_2 \beta + 3\alpha a_7 \beta^2 + 15\alpha a_9 \beta^2 + 12\alpha \beta^2 b_8 - 3a_4 \beta^2 - 3\beta^2 b_5) \\
& + \sin \theta \cos^6 \theta (-5\alpha^5 a_7 - 20\alpha^5 b_6 + 10\alpha^4 a_4 + 5\alpha^4 b_3 - 6\alpha^3 a_2 \\
& + 10\alpha^3 a_7 \beta - 8\alpha^3 \beta b_6 + 4\alpha^3 b_1 + 12\alpha^2 a_4 \beta + 18\alpha^2 \beta b_3 - 18\alpha a_2 \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +15\alpha a_7\beta^2 + 12\alpha\beta^2b_6 - 12\alpha\beta b_1 - 6a_4\beta^2 - 3\beta^2b_3) \\
& + \sin^4\theta \cos^3\theta (15\alpha^5a_8 - 20\alpha^5b_9 + 5\alpha^4a_5 + 18\alpha^3a_8\beta - 8\alpha^3\beta b_9 \\
& - 6\alpha^2a_5\beta + 3\alpha a_8\beta^2 + 12\alpha\beta^2b_9 - 3a_5\beta^2)), \\
A_7 = & a_9(\alpha^2 + \beta)(20\alpha^4 - 3\alpha^2\beta - 3\beta^2)\sin^5\theta \cos^3\theta + \sin^2\theta \cos^6\theta (20\alpha^6a_6 \\
& + 5\alpha^6a_8 - 15\alpha^6b_7 - 5\alpha^5a_3 + 4\alpha^5a_5 + 9\alpha^5b_4 - 4\alpha^4a_1 + 17\alpha^4a_6\beta \\
& + 32\alpha^4a_8\beta + 15\alpha^4\beta b_7 - 4\alpha^4b_2 - 22\alpha^3a_3\beta - 12\alpha^3a_5\beta + 10\alpha^3\beta b_4 \\
& + 6\alpha^2a_1\beta - 6\alpha^2a_6\beta^2 + 21\alpha^2a_8\beta^2 + 27\alpha^2\beta^2b_7 - 16\alpha^2\beta b_2 - 9\alpha a_3\beta^2 \\
& - 24\alpha a_5\beta^2 - 15\alpha\beta^2b_4 + 6a_1\beta^2 - 3a_6\beta^3 - 6a_8\beta^3 - 3\beta^3b_7 + 4\beta^2b_2) \\
& + \cos^8\theta (5\alpha^6a_6 + 4\alpha^5a_3 - 8\alpha^4a_1 + 32\alpha^4a_6\beta - 12\alpha^3a_3\beta - 10\alpha^2a_1\beta \\
& + 21\alpha^2a_6\beta^2 - 24\alpha a_3\beta^2 + 10a_1\beta^2 - 6a_6\beta^3) + \sin^3\theta \cos^5\theta (20\alpha^6a_7 \\
& + 5\alpha^6a_9 - 15\alpha^6b_8 - 5\alpha^5a_4 + 9\alpha^5b_5 - 4\alpha^4a_2 + 17\alpha^4a_7\beta + 32\alpha^4a_9\beta \\
& + 15\alpha^4\beta b_8 - 22\alpha^3a_4\beta + 10\alpha^3\beta b_5 + 6\alpha^2a_2\beta - 6\alpha^2a_7\beta^2 + 21\alpha^2a_9\beta^2 \\
& + 27\alpha^2\beta^2b_8 - 9\alpha a_4\beta^2 - 15\alpha\beta^2b_5 + 6a_2\beta^2 - 3a_7\beta^3 - 6a_9\beta^3 - 3\beta^3b_8) \\
& + \sin\theta \cos^7\theta (5\alpha^6a_7 - 15\alpha^6b_6 + 4\alpha^5a_4 + 9\alpha^5b_3 - 8\alpha^4a_2 + 32\alpha^4a_7\beta \\
& + 15\alpha^4\beta b_6 - 4\alpha^4b_1 - 12\alpha^3a_4\beta + 10\alpha^3\beta b_3 - 10\alpha^2a_2\beta + 21\alpha^2a_7\beta^2 \\
& + 27\alpha^2\beta^2b_6 - 16\alpha^2\beta b_1 - 24\alpha a_4\beta^2 - 15\alpha\beta^2b_3 + 10a_2\beta^2 - 6a_7\beta^3 \\
& - 3\beta^3b_6 + 4\beta^2b_1) + \sin^4\theta \cos^4\theta (20\alpha^6a_8 - 15\alpha^6b_9 - 5\alpha^5a_5 \\
& + 17\alpha^4a_8\beta + 15\alpha^4\beta b_9 - 22\alpha^3a_5\beta - 6\alpha^2a_8\beta^2 + 27\alpha^2\beta^2b_9 - 9\alpha a_5\beta^2 \\
& - 3a_8\beta^3 - 3\beta^3b_9), \\
A_8 = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2\theta + \beta} (\alpha a_9 (15\alpha^4 - 10\alpha^2\beta - 9\beta^2) \sin^5\theta \cos^4\theta \\
& + \sin^2\theta \cos^7\theta (15\alpha^5a_6 + 9\alpha^5a_8 - 6\alpha^5b_7 - 9\alpha^4a_3 - 4\alpha^4a_5 + 5\alpha^4b_4 \\
& + 4\alpha^3a_1 - 10\alpha^3a_6\beta + 10\alpha^3a_8\beta + 20\alpha^3\beta b_7 - 4\alpha^3b_2 - 6\alpha^2a_3\beta \\
& - 16\alpha^2a_5\beta - 10\alpha^2\beta b_4 + 8\alpha a_1\beta - 9\alpha a_6\beta^2 - 15\alpha a_8\beta^2 - 6\alpha\beta^2b_7 \\
& + 4\alpha\beta b_2 + 3a_3\beta^2 + 4a_5\beta^2 + \beta^2b_4) + \cos^9\theta (9\alpha^5a_6 - 4\alpha^4a_3 \\
& + 10\alpha^3a_6\beta - 16\alpha^2a_3\beta + 12\alpha a_1\beta - 15\alpha a_6\beta^2 + 4a_3\beta^2) \\
& + \sin^3\theta \cos^6\theta (15\alpha^5a_7 + 9\alpha^5a_9 - 6\alpha^5b_8 - 9\alpha^4a_4 + 5\alpha^4b_5 + 4\alpha^3a_2 \\
& - 10\alpha^3a_7\beta + 10\alpha^3a_9\beta + 20\alpha^3\beta b_8 - 6\alpha^2a_4\beta - 10\alpha^2\beta b_5 + 8\alpha a_2\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -9\alpha a_7\beta^2 - 15\alpha a_9\beta^2 - 6\alpha\beta^2b_8 + 3a_4\beta^2 + \beta^2b_5) \\
& + \sin\theta\cos^8\theta(9\alpha^5a_7 - 6\alpha^5b_6 - 4\alpha^4a_4 + 5\alpha^4b_3 + 10\alpha^3a_7\beta \\
& + 20\alpha^3\beta b_6 - 4\alpha^3b_1 - 16\alpha^2a_4\beta - 10\alpha^2\beta b_3 + 12\alpha a_2\beta - 15\alpha a_7\beta^2 \\
& - 6\alpha\beta^2b_6 + 4\alpha\beta b_1 + 4a_4\beta^2 + \beta^2b_3) + \sin^4\theta\cos^5\theta(15\alpha^5a_8 \\
& - 6\alpha^5b_9 - 9\alpha^4a_5 - 10\alpha^3a_8\beta + 20\alpha^3\beta b_9 - 6\alpha^2a_5\beta - 9\alpha a_8\beta^2 \\
& - 6\alpha\beta^2b_9 + 3a_5\beta^2)) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_9 = & a_9(6\alpha^6 - 25\alpha^4\beta - 12\alpha^2\beta^2 + 3\beta^3)\sin^5\theta\cos^5\theta + \sin^2\theta\cos^8\theta(6\alpha^6a_6 \\
& + 5\alpha^6a_8 - \alpha^6b_7 - 5\alpha^5a_3 - 4\alpha^5a_5 + \alpha^5b_4 + 4\alpha^4a_1 - 25\alpha^4a_6\beta \\
& - 10\alpha^4a_8\beta + 15\alpha^4\beta b_7 - \alpha^4b_2 + 6\alpha^3a_3\beta - 4\alpha^3a_5\beta - 10\alpha^3\beta b_4 \\
& + 4\alpha^2a_1\beta - 12\alpha^2a_6\beta^2 - 27\alpha^2a_8\beta^2 - 15\alpha^2\beta^2b_7 + 6\alpha^2\beta b_2 + 11\alpha a_3\beta^2 \\
& + 16\alpha a_5\beta^2 + 5\alpha\beta^2b_4 - 4a_1\beta^2 + 3a_6\beta^3 + 4a_8\beta^3 + \beta^3b_7 - \beta^2b_2) \\
& + \cos^{10}\theta(5\alpha^6a_6 - 4\alpha^5a_3 + 3\alpha^4a_1 - 10\alpha^4a_6\beta - 4\alpha^3a_3\beta + 10\alpha^2a_1\beta \\
& - 27\alpha^2a_6\beta^2 + 16\alpha a_3\beta^2 - 5a_1\beta^2 + 4a_6\beta^3) + \sin^3\theta\cos^7\theta(6\alpha^6a_7 \\
& + 5\alpha^6a_9 - \alpha^6b_8 - 5\alpha^5a_4 + \alpha^5b_5 + 4\alpha^4a_2 - 25\alpha^4a_7\beta - 10\alpha^4a_9\beta \\
& + 15\alpha^4\beta b_8 + 6\alpha^3a_4\beta - 10\alpha^3\beta b_5 + 4\alpha^2a_2\beta - 12\alpha^2a_7\beta^2 - 27\alpha^2a_9\beta^2 \\
& - 15\alpha^2\beta^2b_8 + 11\alpha a_4\beta^2 + 5\alpha\beta^2b_5 - 4a_2\beta^2 + 3a_7\beta^3 + 4a_9\beta^3 + \beta^3b_8) \\
& + \sin\theta\cos^9\theta(5\alpha^6a_7 - \alpha^6b_6 - 4\alpha^5a_4 + \alpha^5b_3 + 3\alpha^4a_2 - 10\alpha^4a_7\beta \\
& + 15\alpha^4\beta b_6 - \alpha^4b_1 - 4\alpha^3a_4\beta - 10\alpha^3\beta b_3 + 10\alpha^2a_2\beta - 27\alpha^2a_7\beta^2 \\
& - 15\alpha^2\beta^2b_6 + 6\alpha^2\beta b_1 + 16\alpha a_4\beta^2 + 5\alpha\beta^2b_3 - 5a_2\beta^2 + 4a_7\beta^3 + \beta^3b_6 \\
& - \beta^2b_1) + \sin^4\theta\cos^6\theta(6\alpha^6a_8 - \alpha^6b_9 - 5\alpha^5a_5 - 25\alpha^4a_8\beta + 15\alpha^4\beta b_9 \\
& + 6\alpha^3a_5\beta - 12\alpha^2a_8\beta^2 - 15\alpha^2\beta^2b_9 + 11\alpha a_5\beta^2 + 3a_8\beta^3 + \beta^3b_9) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{10} = & \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2\theta} + \beta(\alpha a_9(\alpha^4 - 10\alpha^2\beta + 5\beta^2)\sin^5\theta\cos^6\theta \\
& + \sin^2\theta\cos^9\theta(\alpha^5a_6 + \alpha^5a_8 - \alpha^4a_3 - \alpha^4a_5 + \alpha^3a_1 - 10\alpha^3a_6\beta \\
& - 10\alpha^3a_8\beta + 6\alpha^2a_3\beta + 6\alpha^2a_5\beta - 3\alpha a_1\beta + 5\alpha a_6\beta^2 + 5\alpha a_8\beta^2 - a_3\beta^2 \\
& - a_5\beta^2) + \cos^{11}\theta(\alpha^5a_6 - \alpha^4a_3 + \alpha^3a_1 - 10\alpha^3a_6\beta + 6\alpha^2a_3\beta \\
& - 3\alpha a_1\beta + 5\alpha a_6\beta^2 - a_3\beta^2) + \sin^3\theta\cos^8\theta(\alpha^5a_7 + \alpha^5a_9 - \alpha^4a_4 \\
& + \alpha^3a_2 - 10\alpha^3a_7\beta - 10\alpha^3a_9\beta + 6\alpha^2a_4\beta - 3\alpha a_2\beta + 5\alpha a_7\beta^2 + 5\alpha a_9\beta^2 \\
& - a_4\beta^2) + \sin\theta\cos^{10}\theta(\alpha^5a_7 - \alpha^4a_4 + \alpha^3a_2 - 10\alpha^3a_7\beta + 6\alpha^2a_4\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3\alpha a_2\beta + 5\alpha a_7\beta^2 - a_4\beta^2) + \sin^4 \theta \cos^7 \theta (\alpha^5 a_8 - \alpha^4 a_5 - 10\alpha^3 a_8\beta \\
& + 6\alpha^2 a_5\beta + 5\alpha a_8\beta^2 - a_5\beta^2)), \\
A_{11} = & -a_9\beta (5\alpha^4 - 10\alpha^2\beta + \beta^2) \sin^5 \theta \cos^7 \theta - \beta \sin^2 \theta \cos^{10} \theta (5\alpha^4 a_6 \\
& + 5\alpha^4 a_8 - 4\alpha^3 a_3 - 4\alpha^3 a_5 + 3\alpha^2 a_1 - 10\alpha^2 a_6\beta - 10\alpha^2 a_8\beta + 4\alpha a_3\beta \\
& + 4\alpha a_5\beta - a_1\beta + a_6\beta^2 + a_8\beta^2) - \beta \cos^{12} \theta (5\alpha^4 a_6 - 4\alpha^3 a_3 + 3\alpha^2 a_1 \\
& - 10\alpha^2 a_6\beta + 4\alpha a_3\beta - a_1\beta + a_6\beta^2) - \beta \sin^3 \theta \cos^9 \theta (5\alpha^4 a_7 + 5\alpha^4 a_9 \\
& - 4\alpha^3 a_4 + 3\alpha^2 a_2 - 10\alpha^2 a_7\beta - 10\alpha^2 a_9\beta + 4\alpha a_4\beta - a_2\beta + a_7\beta^2 \\
& + a_9\beta^2) - \beta \sin \theta \cos^{11} \theta (5\alpha^4 a_7 - 4\alpha^3 a_4 + 3\alpha^2 a_2 - 10\alpha^2 a_7\beta + 4\alpha a_4\beta \\
& - a_2\beta + a_7\beta^2) - \beta \sin^4 \theta \cos^8 \theta (5\alpha^4 a_8 - 4\alpha^3 a_5 - 10\alpha^2 a_8\beta + 4\alpha a_5\beta \\
& + a_8\beta^2) \\
Q_1 = & 2(R \cos \theta - 1)(R \cos \theta + 1) \left(\alpha R \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta} + \beta + \alpha^2 \right. \\
& \left. - \beta R^2 \cos^2 \theta + \beta \right) \left(2\alpha R \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - \beta R^2 \cos^2 \theta} + R^2 (\alpha^2 \right. \\
& \left. - \beta) \cos^2 \theta + \alpha^2 + \beta \right)^2.
\end{aligned}$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (5.7), obtemos a função “averaging” $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
f(R) = & f_0 \left[\frac{(\alpha^2 a_6 - 3\alpha^2 a_8 - \alpha^2 b_7 + 3\alpha^2 b_9 + a_1 + a_6\beta - 3a_8\beta}{4(\alpha^2 + \beta)} \right. \\
& \left. + \frac{-\beta b_7 + 3\beta b_9 + b_2}{4(\alpha^2 + \beta)} \right] + f_1 \left[\frac{(\alpha^4 a_6 + \alpha^4 a_8 - \alpha^3 a_3 - \alpha^3 a_5 + \alpha^2 a_1}{4(\alpha^2 + \beta)^2} \right. \\
& \left. + \frac{2\alpha^2 a_6\beta + 2\alpha^2 a_8\beta - \alpha a_3\beta - \alpha a_5\beta - a_1\beta + a_6\beta^2 + a_8\beta^2}{4(\alpha^2 + \beta)^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} f_2 (a_8 - b_9) + f_3 (a_6 - a_8 - b_7 + b_9),
\end{aligned}$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{1 - R^2} \quad \text{e} \quad f_3 = \sqrt{1 - R^2}/R.$$

Temos que estudar o número de zeros simples da função “averaging” f . Para isso, devemos calcular os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ e provar que eles

não se anulam para $R \in (0, 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} W(f_0) &= R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = -\frac{2R^6}{(1 - R^2)^{3/2}}, \\ W(f_0, \dots, f_3) &= -\frac{12R^2 (R^4 + 4(\sqrt{1 - R^2} - 2)R^2 - 8\sqrt{1 - R^2} + 8)}{(R^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Obviamente os três primeiros Wronskianos não se anulam. O Wronskiano $W(f_0, \dots, f_3)$ é igual a zero se, e somente se,

$$R^4 - 8R^2 + 4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2) + 8 = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2)$ para o lado direito da igualdade anterior e elevando ao quadrado em ambos os lados, obtemos $R^8 = 0$, que é impossível porque $R \in (0, 1)$. Assim os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k) \neq 0$, para $k = 0, \dots, 3$. Portanto, desde que $(f_0, \dots, f_3)$ é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 7, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (5.1).

5.2.2 Prova para a Classe P_4

Suponha que $\alpha < 0$ and $\beta > 0$. A função positiva ρ que satisfaz $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$ é $\rho : (0, \sqrt{-\alpha/\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho = \frac{\beta R}{\sqrt{\beta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta (\alpha + \beta R^2)}}.$$

O fator integrante

$$\mu(x, y) = -\frac{2}{(\beta + y^2)^2}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = -\frac{\alpha y^2 - \beta x^2}{\beta (\beta + y^2)}$$

porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Transformamos o sistema (5.4) usando o Teorema 11, na seguinte forma padrão do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^7 \frac{B_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_2(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.8)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned}
B_1 &= \alpha^3 b_2 \sin^6 \theta - \alpha^2 \beta (a_1 + 2b_2) \sin^4 \theta \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^5 \theta \cos \theta (\alpha b_1 - a_2 \beta) \\
&\quad + \alpha \beta^2 (2a_1 + b_2) \sin^2 \theta \cos^4 \theta - \beta^2 \sin \theta \cos^5 \theta (a_2 \beta - \alpha b_1), \\
&\quad - 2\alpha \beta \sin^3 \theta \cos^3 \theta (\alpha b_1 - a_2 \beta) - a_1 \beta^3 \cos^6 \theta \\
B_2 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(-\alpha^2 \beta b_5 \sin^5 \theta \right. \\
&\quad - \beta^2 \sin^2 \theta \cos^3 \theta (-\alpha a_3 - \alpha b_4 + a_5 \beta) - \beta^2 \sin \theta \cos^4 \theta (a_4 \beta - \alpha b_3) \\
&\quad + \alpha \beta \sin^3 \theta \cos^2 \theta (-\alpha b_3 + a_4 \beta + \beta b_5) + \alpha \beta \sin^4 \theta \cos \theta (a_5 \beta - \alpha b_4) \\
&\quad \left. - a_3 \beta^3 \cos^5 \theta \right), \\
B_3 &= \beta^2 \sin^3 \theta \cos^3 \theta \left(-\alpha^2 b_6 + \alpha a_7 \beta + \alpha \beta b_8 - 4\alpha b_1 + 2a_2 \beta - a_9 \beta^2 \right) \\
&\quad - \alpha^2 \beta \sin^6 \theta (\beta b_9 - 3b_2) + \beta^3 \sin^2 \theta \cos^4 \theta (\alpha a_6 + \alpha b_7 + 2a_1 - a_8 \beta \\
&\quad + b_2) - \alpha \beta^2 \sin^4 \theta \cos^2 \theta (\alpha b_7 + 2a_1 - a_8 \beta - \beta b_9 + 4b_2) \\
&\quad - \alpha \beta \sin^5 \theta \cos \theta (\alpha \beta b_8 - 3\alpha b_1 + 2a_2 \beta - a_9 \beta^2) - \beta^3 \sin \theta \cos^5 \theta (-\alpha b_6 \\
&\quad + a_7 \beta - b_1) - a_6 \beta^4 \cos^6 \theta, \\
B_4 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(\beta^2 \sin^3 \theta \cos^2 \theta (-2\alpha b_3 + a_4 \beta \right. \\
&\quad + \beta b_5) + \beta^2 \sin^4 \theta \cos \theta (a_5 \beta - 2\alpha b_4) - 2\alpha \beta^2 b_5 \sin^5 \theta + \beta^3 (a_3 \\
&\quad + b_4) \sin^2 \theta \cos^3 \theta + \beta^3 b_3 \sin \theta \cos^4 \theta \left. \right), \\
B_5 &= -\beta^3 \sin^4 \theta \cos^2 \theta (2\alpha b_7 + a_1 - a_8 \beta - \beta b_9 + 2b_2) \\
&\quad - \beta^2 \sin^5 \theta \cos \theta (2\alpha \beta b_8 - 3\alpha b_1 + a_2 \beta - a_9 \beta^2) \\
&\quad + \beta^3 \sin^3 \theta \cos^3 \theta (-2\alpha b_6 + a_7 \beta + \beta b_8 - 2b_1) - \alpha \beta^2 \sin^6 \theta (2\beta b_9 - 3b_2) \\
&\quad + \beta^4 (a_6 + b_7) \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \beta^4 b_6 \sin \theta \cos^5 \theta, \\
B_6 &= \sqrt{-\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta - \beta R^2 \sin^2 \theta} \left(-\beta^3 b_3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - \beta^3 b_4 \sin^4 \theta \cos \theta - \beta^3 b_5 \sin^5 \theta \right), \\
B_7 &= -\beta^4 b_6 \sin^3 \theta \cos^3 \theta - \beta^4 b_7 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - \beta^3 \sin^5 \theta \cos \theta (\beta b_8 - b_1) \\
&\quad - \beta^3 \sin^6 \theta (\beta b_9 - b_2), \\
Q_2 &= \left(\beta \cos^2 \theta - \alpha \sin^2 \theta \right)^2 \left(\beta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta (\alpha + \beta R^2) \right)^2.
\end{aligned}$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (5.8) obtemos a função $f : (0, \sqrt{-\alpha/\beta})$

dada por

$$f = \alpha f_0 \frac{(3\alpha a_6 - 3\alpha b_7 - a_1 + a_8\beta - \beta b_9 - b_2)}{2(-\alpha)^{3/2}\sqrt{\beta}} + f_1 \frac{\sqrt{\beta}(-\alpha b_7 + \beta b_9 - b_2)}{2(-\alpha)^{3/2}} - f_2 \frac{(a_6 - b_7)}{\sqrt{\beta}} + f_3 \frac{(\alpha a_6 - \alpha b_7 + a_8\beta - \beta b_9)}{\beta^{3/2}},$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = -R\sqrt{-\alpha - \beta R^2} \quad \text{e} \quad f_3 = \frac{\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\alpha - \beta R^2}}{R}.$$

Temos,

$$W(f_0) = R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = \frac{2\beta^2 R^6}{(-\alpha - \beta R^2)^{3/2}},$$

$$W(f_0, \dots, f_3) = -\frac{12\beta^2 R^2(8\alpha^2 + 8\alpha\beta R^2 + 4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2) + \beta^2 R^4)}{(\alpha + \beta R^2)^3}$$

Claramente os três primeiros Wronskianos não se anulam. O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$8\alpha^2 + 8\alpha\beta R^2 + \beta^2 R^4 + 4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2) = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha - \beta R^2}(2\alpha + \beta R^2)$ para o lado direito da igualdade anterior e elevando ambos lados ao quadrado, obtemos $\beta^4 R^8 = 0$. Isso é impossível porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha/\beta})$. Assim, os Wronkianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ não se anulam para $R \in (0, \sqrt{-\alpha/\beta})$. Portanto, desde que $(f_0, \dots, f_3)$ é um sistema-ECT, a “função averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 7, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (5.4). Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, então tomamos $\bar{\rho} = -\rho$ e o resultado obtido é análogo.

5.2.3 Prova para a Classe P_6

Novamente o fator integrante

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(\alpha + x)^4}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(\alpha + x)^2}$$

porque $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \cos \theta) = R^2$ obtemos a função positiva $\rho : (0, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho = -\frac{2R \left(\sqrt{\alpha^2} + \alpha R \cos \theta \right)}{R^2 (2 \cos^2 \theta - 1) + R^2 - 2}.$$

Transformamos o sistema (5.6) usando o Teorema 11, na seguinte forma padrão do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{N(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_3(R, \varphi, \alpha, \beta)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.9)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} N = & R \left(\alpha R \cos \theta + \sqrt{\alpha^2} \right)^2 \left(\alpha a_1 R^6 \cos^8 \theta - \alpha^2 a_3 R^6 \cos^8 \theta + \alpha^3 a_6 R^6 \cos^8 \theta \right. \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^5 \cos^7 \theta + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^5 \cos^7 \theta + \alpha a_2 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta \\ & - \alpha^2 a_4 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta + \alpha^3 a_7 R^6 \sin \theta \cos^7 \theta - 3 \alpha a_1 R^4 \cos^6 \theta \\ & + 2 \alpha^2 a_3 R^4 \cos^6 \theta + \alpha a_1 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta - \alpha^2 a_3 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta \\ & - \alpha^2 a_5 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^3 a_6 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^3 a_8 R^6 \sin^2 \theta \cos^6 \theta \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_7 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta \\ & - \sqrt{\alpha^2} b_1 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + \alpha \sqrt{\alpha^2} b_3 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta \\ & - \left(\alpha^2 \right)^{3/2} b_6 R^5 \sin \theta \cos^6 \theta + 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^3 \cos^5 \theta - 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^3 \cos^5 \theta \\ & + \alpha a_2 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta - \alpha^2 a_4 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta + \alpha^3 a_7 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta \\ & + \alpha^3 a_9 R^6 \sin^3 \theta \cos^5 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_1 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_3 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta + 3 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_6 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & + 2 \left(\alpha^2 \right)^{3/2} a_8 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - \sqrt{\alpha^2} b_2 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & + \alpha \sqrt{\alpha^2} b_4 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta - \left(\alpha^2 \right)^{3/2} b_7 R^5 \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ & - 3 \alpha a_2 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta + 2 \alpha^2 a_4 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - \alpha b_1 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta \\ & + 2 \alpha^2 b_3 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - 3 \alpha^3 b_6 R^4 \sin \theta \cos^5 \theta - \alpha^2 a_5 R^6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \\ & \left. + \alpha^3 a_8 R^6 \sin^4 \theta \cos^4 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_2 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta - 2 \alpha \sqrt{\alpha^2} a_4 R^5 \sin^3 \theta \cos^4 \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3(\alpha^2)^{3/2}a_7R^5\sin^3\theta\cos^4\theta+2(\alpha^2)^{3/2}a_9R^5\sin^3\theta\cos^4\theta \\
& +\alpha\sqrt{\alpha^2}b_5R^5\sin^3\theta\cos^4\theta-(\alpha^2)^{3/2}b_8R^5\sin^3\theta\cos^4\theta+3\alpha a_1R^2\cos^4\theta \\
& -\alpha^2a_3R^2\cos^4\theta-\alpha^3a_6R^2\cos^4\theta-2\alpha a_1R^4\sin^2\theta\cos^4\theta \\
& +2\alpha^2a_5R^4\sin^2\theta\cos^4\theta+3\alpha^3a_6R^4\sin^2\theta\cos^4\theta-\alpha b_2R^4\sin^2\theta\cos^4\theta \\
& +2\alpha^2b_4R^4\sin^2\theta\cos^4\theta-3\alpha^3b_7R^4\sin^2\theta\cos^4\theta+2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_4R^3\sin\theta\cos^4\theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2}a_7R^3\sin\theta\cos^4\theta+2\sqrt{\alpha^2}b_1R^3\sin\theta\cos^4\theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2}b_6R^3\sin\theta\cos^4\theta+\alpha^3a_9R^6\sin^5\theta\cos^3\theta \\
& -2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_5R^5\sin^4\theta\cos^3\theta+3(\alpha^2)^{3/2}a_8R^5\sin^4\theta\cos^3\theta \\
& -(\alpha^2)^{3/2}b_9R^5\sin^4\theta\cos^3\theta-2\alpha a_2R^4\sin^3\theta\cos^3\theta \\
& +3\alpha^3a_7R^4\sin^3\theta\cos^3\theta+2\alpha^2b_5R^4\sin^3\theta\cos^3\theta-3\alpha^3b_8R^4\sin^3\theta\cos^3\theta \\
& -2\sqrt{\alpha^2}a_1R^3\sin^2\theta\cos^3\theta+2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_3R^3\sin^2\theta\cos^3\theta \\
& +2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_5R^3\sin^2\theta\cos^3\theta+(\alpha^2)^{3/2}a_6R^3\sin^2\theta\cos^3\theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2}a_8R^3\sin^2\theta\cos^3\theta+2\sqrt{\alpha^2}b_2R^3\sin^2\theta\cos^3\theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2}b_7R^3\sin^2\theta\cos^3\theta-\alpha\sqrt{\alpha^2}a_3R\cos^3\theta+3\alpha a_2R^2\sin\theta\cos^3\theta \\
& -\alpha^2a_4R^2\sin\theta\cos^3\theta-\alpha^3a_7R^2\sin\theta\cos^3\theta+2\alpha b_1R^2\sin\theta\cos^3\theta \\
& -2\alpha^2b_3R^2\sin\theta\cos^3\theta-\alpha^3b_6R^2\sin\theta\cos^3\theta+3(\alpha^2)^{3/2}a_9R^5\sin^5\theta\cos^2\theta \\
& +3\alpha^3a_8R^4\sin^4\theta\cos^2\theta-3\alpha^3b_9R^4\sin^4\theta\cos^2\theta-2\sqrt{\alpha^2}a_2R^3\sin^3\theta\cos^2\theta \\
& +2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_4R^3\sin^3\theta\cos^2\theta+(\alpha^2)^{3/2}a_7R^3\sin^3\theta\cos^2\theta \\
& -2(\alpha^2)^{3/2}a_9R^3\sin^3\theta\cos^2\theta-3(\alpha^2)^{3/2}b_8R^3\sin^3\theta\cos^2\theta \\
& +\alpha a_1R^2\sin^2\theta\cos^2\theta+\alpha^2a_3R^2\sin^2\theta\cos^2\theta-\alpha^2a_5R^2\sin^2\theta\cos^2\theta \\
& -\alpha^3a_8R^2\sin^2\theta\cos^2\theta+2\alpha b_2R^2\sin^2\theta\cos^2\theta-2\alpha^2b_4R^2\sin^2\theta\cos^2\theta \\
& -\alpha^3b_7R^2\sin^2\theta\cos^2\theta-\alpha a_1\cos^2\theta-\alpha\sqrt{\alpha^2}a_4R\sin\theta\cos^2\theta \\
& -\sqrt{\alpha^2}b_1R\sin\theta\cos^2\theta-\alpha\sqrt{\alpha^2}b_3R\sin\theta\cos^2\theta+3\alpha^3a_9R^4\sin^5\theta\cos\theta \\
& +2\alpha\sqrt{\alpha^2}a_5R^3\sin^4\theta\cos\theta+(\alpha^2)^{3/2}a_8R^3\sin^4\theta\cos\theta \\
& -3(\alpha^2)^{3/2}b_9R^3\sin^4\theta\cos\theta+\alpha a_2R^2\sin^3\theta\cos\theta+\alpha^2a_4R^2\sin^3\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha^3 a_9 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta - 2\alpha^2 b_5 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta - \alpha^3 b_8 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \\
& + \sqrt{\alpha^2} a_1 R \sin^2 \theta \cos \theta - \alpha \sqrt{\alpha^2} a_5 R \sin^2 \theta \cos \theta - \sqrt{\alpha^2} b_2 R \sin^2 \theta \cos \theta \\
& - \alpha \sqrt{\alpha^2} b_4 R \sin^2 \theta \cos \theta - \alpha a_2 \sin \theta \cos \theta - \alpha b_1 \sin \theta \cos \theta \\
& + (\alpha^2)^{3/2} a_9 R^3 \sin^5 \theta + \alpha^2 a_5 R^2 \sin^4 \theta - \alpha^3 b_9 R^2 \sin^4 \theta + \sqrt{\alpha^2} a_2 R \sin^3 \theta \\
& - \alpha \sqrt{\alpha^2} b_5 R \sin^3 \theta - \alpha b_2 \sin^2 \theta), \\
Q_3 &= 2\alpha(R \cos \theta - 1)(R \cos \theta + 1) \left(\sqrt{\alpha^2} R \cos \theta + \alpha \right)^4.
\end{aligned}$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (5.9), obtemos a função “averaging” $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}
f(R) &= f_0 \left[\frac{(\alpha^2 a_6 - 3\alpha^2 a_8)}{4\alpha^2} + \frac{-\alpha^2 b_7 b_9 + 3\alpha^2 + a_1 + b_2}{4\alpha^2} \right] \\
&+ f_1 \frac{(\alpha^2 a_6 + \alpha^2 a_8 - \alpha a_3 - \alpha a_5 + a_1)}{4\alpha^2} + \frac{1}{2} f_2 (a_8 - b_9) \\
&+ f_3 \frac{(a_6 - a_8 - b_7 + b_9)}{2},
\end{aligned}$$

onde

$$f_0 = R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{1 - R^2} \quad \text{e} \quad f_3 = (\sqrt{1 - R^2} - 1)/R.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
W(f_0) &= R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_3) = -\frac{2R^6}{(1 - R^2)^{3/2}}, \\
W(f_0, \dots, f_3) &= -12R^2 \frac{(R^4 - 8R^2 + 8 + 4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2))}{(R^2 - 1)^3}.
\end{aligned}$$

Os três primeiros Wronskianos não se anulam para $R \in (0, 1)$. O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$R^4 - 8R^2 + 8 + 4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2) = 0.$$

Passando o termo $4\sqrt{1 - R^2}(R^2 - 2)$ para o lado direito da equação anterior e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos $R^8 = 0$. Isso é impossível porque $R \in (0, 1)$. Assim, os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, $k = 0, \dots, 3$ não se anulam para $R \in (0, 1)$. Portanto, desde que $(f_0, \dots, f_3)$ é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 7, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (5.6).

5.3 Prova do Teorema 16

Primeiramente, suponhamos que $\alpha^2 + \beta < 0$. Como antes, obtemos a função positiva $\rho : (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho = \frac{\beta^2 R (\alpha^2 + \beta)}{\alpha \beta^2 R \cos \theta - \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))}},$$

resolvendo implicitamente a equação $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2$. O fator integrante

$$\mu(x, y) = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 (\beta + x^2) - 2\alpha\beta x + \beta^2)^2}$$

corresponde a integral primeira

$$H(x, y) = \frac{\alpha^2 \beta y^2 - \alpha^4 x^2}{\beta (\alpha^2 (\beta + x^2) - 2\alpha\beta x + \beta^2)}$$

porque eles satisfazem $\mu P = H_y$ e $\mu Q = -H_x$. Usando o Teorema 11, o sistema (5.2) torna-se

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_4(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.10)$$

onde

$a = (a_1, \dots, a_9)$, $b = (b_1, \dots, b_9)$ e

$$\begin{aligned} C_1 = & (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^2 \theta \cos^6 \theta (\alpha^2 a_1 - 2a_1 \beta - \beta b_2) + \alpha^8 \beta^2 (\alpha^2 \\ & + \beta)^2 \sin \theta \cos^7 \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^6 \beta^3 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (2\alpha^2 a_1 \\ & + \alpha^2 b_2 - a_1 \beta - 2\beta b_2) + \alpha^6 \beta^2 (\alpha^2 - 2\beta) (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^3 \theta \cos^5 \theta (\alpha^2 a_2 \\ & - \beta b_1) + \alpha^4 \beta^4 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^6 \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_1 + 2\alpha^2 b_2 - \beta b_2) \\ & + \alpha^4 \beta^4 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^7 \theta \cos \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^4 \beta^3 (2\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 \\ & + \beta)^2 \sin^5 \theta \cos^3 \theta (\alpha^2 a_2 - \beta b_1) - \alpha^4 \beta^5 b_2 (\alpha^2 + \beta)^2 \sin^8 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} (\alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 \\
& + \beta) \sin^7 \theta (\alpha^2 b_5 + \alpha a_2 + \beta b_5) + \alpha^6 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \cos^7 \theta (\alpha^2 a_3 + 3\alpha a_1 \\
& + a_3 \beta) - \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos \theta (\alpha^4 a_5 + \alpha^2 a_5 \beta - \alpha^2 \beta b_4 - \alpha a_1 \beta \\
& - 2\alpha \beta b_2 - \beta^2 b_4) + \alpha^4 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta \cos^5 \theta (\alpha^4 a_3 + \alpha^4 a_5 \\
& + 3\alpha^3 a_1 + \alpha^2 a_5 \beta - \alpha^2 \beta b_4 - 4\alpha a_1 \beta - 2\alpha \beta b_2 - a_3 \beta^2 - \beta^2 b_4) \\
& + \alpha^4 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin \theta \cos^6 \theta (\alpha^4 a_4 + 3\alpha^3 a_2 + \alpha^2 a_4 \beta - \alpha^2 \beta b_3 \\
& - 2\alpha \beta b_1 - \beta^2 b_3) - \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) \sin^5 \theta \cos^2 \theta (\alpha^4 a_4 + \alpha^4 b_5 \\
& + 4\alpha^3 a_2 + \alpha^2 a_4 \beta - \alpha^2 \beta b_3 - \alpha a_2 \beta - 2\alpha \beta b_1 - \beta^2 b_3 - \beta^2 b_5) \\
& + \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^4 \theta \cos^3 \theta (\alpha^6 a_5 - \alpha^4 a_3 \beta - \alpha^4 \beta b_4 - 4\alpha^3 a_1 \beta \\
& - 2\alpha^3 \beta b_2 - \alpha^2 a_3 \beta^2 - \alpha^2 a_5 \beta^2 + \alpha a_1 \beta^2 + 2\alpha \beta^2 b_2 + \beta^3 b_4) \\
& + \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + \beta) \sin^3 \theta \cos^4 \theta (\alpha^6 a_4 + 3\alpha^5 a_2 - \alpha^4 \beta b_3 - \alpha^4 \beta b_5 \\
& - 4\alpha^3 a_2 \beta - 2\alpha^3 \beta b_1 - \alpha^2 a_4 \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 b_5 + 2\alpha \beta^2 b_1 + \beta^3 b_3) \Big), \\
C_3 = & \alpha^6 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_1 \alpha^4 - a_6 \beta \alpha^4 - 2a_3 \beta \alpha^3 - 2a_6 \beta^2 \alpha^2 - 3a_1 \beta \alpha^2 \\
& - 2a_3 \beta^2 \alpha - a_6 \beta^3) \cos^8 \theta + \alpha^4 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_2 \alpha^6 - a_7 \beta \alpha^6 \\
& - 2a_4 \beta \alpha^5 - 2a_7 \beta^2 \alpha^4 - 3a_2 \beta \alpha^4 - \beta b_1 \alpha^4 + \beta^2 b_6 \alpha^4 - 2a_4 \beta^2 \alpha^3 \\
& + \beta^2 b_3 \alpha^3 - a_7 \beta^3 \alpha^2 + \beta^2 b_1 \alpha^2 + 2\beta^3 b_6 \alpha^2 + \beta^3 b_3 \alpha \\
& + \beta^4 b_6) \sin \theta \cos^7 \theta + \alpha^4 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_1 \alpha^6 - a_6 \beta \alpha^6 - a_8 \beta \alpha^6 \\
& - 2a_3 \beta \alpha^5 - 2a_5 \beta \alpha^5 - a_6 \beta^2 \alpha^4 - 2a_8 \beta^2 \alpha^4 - 6a_1 \beta \alpha^4 - \beta b_2 \alpha^4 \\
& + \beta^2 b_7 \alpha^4 + a_3 \beta^2 \alpha^3 - 2a_5 \beta^2 \alpha^3 + \beta^2 b_4 \alpha^3 + a_6 \beta^3 \alpha^2 - a_8 \beta^3 \alpha^2 \\
& + 5a_1 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_2 \alpha^2 + 2\beta^3 b_7 \alpha^2 + 3a_3 \beta^3 \alpha + \beta^3 b_4 \alpha + a_6 \beta^4 \\
& + \beta^4 b_7) \sin^2 \theta \cos^6 \theta + \alpha^2 \beta^3 (\alpha^2 + \beta) (2a_2 \alpha^8 - a_7 \beta \alpha^8 - a_9 \beta \alpha^8 \\
& - 2a_4 \beta \alpha^7 - a_7 \beta^2 \alpha^6 - 2a_9 \beta^2 \alpha^6 - 6a_2 \beta \alpha^6 - \beta b_1 \alpha^6 + \beta^2 b_6 \alpha^6 \\
& + \beta^2 b_8 \alpha^6 + a_4 \beta^2 \alpha^5 + \beta^2 b_3 \alpha^5 + \beta^2 b_5 \alpha^5 + a_7 \beta^3 \alpha^4 - a_9 \beta^3 \alpha^4 \\
& + 5a_2 \beta^2 \alpha^4 + 2\beta^2 b_1 \alpha^4 + \beta^3 b_6 \alpha^4 + 2\beta^3 b_8 \alpha^4 + 3a_4 \beta^3 \alpha^3 + \beta^3 b_5 \alpha^3 \\
& + a_7 \beta^4 \alpha^2 - \beta^3 b_1 \alpha^2 - \beta^4 b_6 \alpha^2 + \beta^4 b_8 \alpha^2 - \beta^4 b_3 \alpha - \beta^5 b_6) \sin^3 \theta \cos^5 \theta \\
& - \alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 + \beta) (a_8 \alpha^8 + 2a_5 \alpha^7 + 3a_1 \alpha^6 - a_6 \beta \alpha^6 + a_8 \beta \alpha^6 + b_2 \alpha^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta b_7 \alpha^6 - \beta b_9 \alpha^6 - 3a_3 \beta \alpha^5 - a_5 \beta \alpha^5 - \beta b_4 \alpha^5 - 2a_6 \beta^2 \alpha^4 - a_8 \beta^2 \alpha^4 \\
& -6a_1 \beta \alpha^4 - 2\beta b_2 \alpha^4 - \beta^2 b_7 \alpha^4 - 2\beta^2 b_9 \alpha^4 - 2a_3 \beta^2 \alpha^3 - 3a_5 \beta^2 \alpha^3 \\
& -a_6 \beta^3 \alpha^2 - a_8 \beta^3 \alpha^2 + 2a_1 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_2 \alpha^2 + \beta^3 b_7 \alpha^2 - \beta^3 b_9 \alpha^2 + a_3 \beta^3 \alpha \\
& + \beta^3 b_4 \alpha + \beta^4 b_7) \sin^4 \theta \cos^4 \theta - \alpha^2 \beta^4 (\alpha^2 + \beta) (a_9 \alpha^8 + 3a_2 \alpha^6 - a_7 \beta \alpha^6 \\
& + a_9 \beta \alpha^6 - \beta b_8 \alpha^6 - 3a_4 \beta \alpha^5 - \beta b_5 \alpha^5 - 2a_7 \beta^2 \alpha^4 - a_9 \beta^2 \alpha^4 - 6a_2 \beta \alpha^4 \\
& - \beta b_1 \alpha^4 + \beta^2 b_6 \alpha^4 - \beta^2 b_8 \alpha^4 - 2a_4 \beta^2 \alpha^3 + \beta^2 b_3 \alpha^3 - a_7 \beta^3 \alpha^2 - a_9 \beta^3 \alpha^2 \\
& + 2a_2 \beta^2 \alpha^2 + \beta^2 b_1 \alpha^2 + 2\beta^3 b_6 \alpha^2 + \beta^3 b_8 \alpha^2 + a_4 \beta^3 \alpha + \beta^3 b_3 \alpha + \beta^3 b_5 \alpha \\
& + \beta^4 b_6 + \beta^4 b_8) \sin^5 \theta \cos^3 \theta + \alpha^2 \beta^5 (\alpha^2 + \beta) (a_8 \alpha^6 + b_9 \alpha^6 + 3a_5 \alpha^5 \\
& + a_1 \alpha^4 + 2a_8 \beta \alpha^4 + b_2 \alpha^4 - \beta b_7 \alpha^4 + \beta b_9 \alpha^4 - a_3 \beta \alpha^3 + 2a_5 \beta \alpha^3 \\
& - \beta b_4 \alpha^3 + a_8 \beta^2 \alpha^2 - 2a_1 \beta \alpha^2 - \beta b_2 \alpha^2 - 2\beta^2 b_7 \alpha^2 - \beta^2 b_9 \alpha^2 - a_3 \beta^2 \alpha \\
& - a_5 \beta^2 \alpha - \beta^2 b_4 \alpha - \beta^3 b_7 - \beta^3 b_9) \sin^6 \theta \cos^2 \theta + \alpha^2 \beta^5 (\alpha^2 + \beta) (a_9 \alpha^6 \\
& + a_2 \alpha^4 + 2a_9 \beta \alpha^4 - \beta b_8 \alpha^4 - a_4 \beta \alpha^3 - \beta b_5 \alpha^3 + a_9 \beta^2 \alpha^2 - 2a_2 \beta \alpha^2 \\
& - 2\beta^2 b_8 \alpha^2 - a_4 \beta^2 \alpha - \beta^2 b_5 \alpha - \beta^3 b_8) \sin^7 \theta \cos \theta \\
& - \alpha^2 \beta^6 (\alpha^2 + \beta)^2 (b_9 \alpha^2 + a_5 \alpha + \beta b_9) \sin^8 \theta, \\
C_4 = & \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} (\alpha a_9 \beta^5 (\alpha^2 \\
& + \beta)^2 \sin^7 \theta - \alpha \beta^4 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos \theta (\alpha^3 a_5 - \alpha^2 a_8 \beta - \alpha a_5 \beta - a_8 \beta^2) \\
& - \alpha \beta^4 \sin^5 \theta \cos^2 \theta (\alpha^6 a_9 + \alpha^5 a_4 + 3\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta + \alpha^4 a_9 \beta - \alpha^2 a_2 \beta \\
& - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 - \alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3 - a_9 \beta^3) + \alpha^3 \beta^3 \cos^7 \theta (\alpha^5 a_3 \\
& + 3\alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta - \alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3) \\
& + \alpha^3 \beta^3 \sin \theta \cos^6 \theta (\alpha^5 a_4 + 3\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta - \alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 \\
& - \alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3) + \alpha \beta^3 \sin^2 \theta \cos^5 \theta (\alpha^7 a_3 + \alpha^7 a_5 + 3\alpha^6 a_1 \\
& - \alpha^6 a_6 \beta - \alpha^6 a_8 \beta - \alpha^5 a_3 \beta - 4\alpha^4 a_1 \beta - \alpha^4 a_6 \beta^2 - 2\alpha^4 a_8 \beta^2 - \alpha^3 a_3 \beta^2 \\
& - \alpha^3 a_5 \beta^2 + \alpha^2 a_1 \beta^2 + \alpha^2 a_6 \beta^3 - \alpha^2 a_8 \beta^3 + \alpha a_3 \beta^3 + a_6 \beta^4) \\
& + \alpha \beta^3 \sin^4 \theta \cos^3 \theta (\alpha^7 a_5 - \alpha^6 a_8 \beta - \alpha^5 a_3 \beta - \alpha^5 a_5 \beta - 3\alpha^4 a_1 \beta \\
& + \alpha^4 a_6 \beta^2 - \alpha^4 a_8 \beta^2 - \alpha^3 a_5 \beta^2 + \alpha^2 a_1 \beta^2 + 2\alpha^2 a_6 \beta^3 + \alpha^2 a_8 \beta^3 + \alpha a_3 \beta^3 \\
& + \alpha a_5 \beta^3 + a_6 \beta^4 + a_8 \beta^4) + \alpha \beta^3 \sin^3 \theta \cos^4 \theta (\alpha^7 a_4 + 3\alpha^6 a_2 - \alpha^6 a_7 \beta \\
& - \alpha^6 a_9 \beta - \alpha^5 a_4 \beta - 4\alpha^4 a_2 \beta - \alpha^4 a_7 \beta^2 - 2\alpha^4 a_9 \beta^2 - \alpha^3 a_4 \beta^2 + \alpha^2 a_2 \beta^2 \\
& + \alpha^2 a_7 \beta^3 - \alpha^2 a_9 \beta^3 + \alpha a_4 \beta^3 + a_7 \beta^4) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & \alpha^4 \beta^6 (\alpha^2 + \beta) \sin^6 \theta \cos^2 \theta (\alpha^2 a_8 + 2\alpha a_5 + a_8 \beta) + \alpha^4 a_9 \beta^6 (\alpha^2 \\
& + \beta)^2 \sin^7 \theta \cos \theta + \alpha^4 \beta^4 \sin^3 \theta \cos^5 \theta (\alpha^6 a_2 - \alpha^6 a_7 \beta - \alpha^6 a_9 \beta \\
& - 2\alpha^5 a_4 \beta - 4\alpha^4 a_2 \beta - \alpha^4 a_7 \beta^2 - 2\alpha^4 a_9 \beta^2 + 3\alpha^2 a_2 \beta^2 + \alpha^2 a_7 \beta^3 \\
& - \alpha^2 a_9 \beta^3 + 2\alpha a_4 \beta^3 + a_7 \beta^4) + \alpha^6 \beta^4 \cos^8 \theta (\alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta - 2\alpha^3 a_3 \beta \\
& - 3\alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - 2\alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3) - \alpha^4 \beta^5 \sin^5 \theta \cos^3 \theta (\alpha^6 a_9 \\
& + \alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta + \alpha^4 a_9 \beta - 2\alpha^3 a_4 \beta - 3\alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - \alpha^2 a_9 \beta^2 \\
& - 2\alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3 - a_9 \beta^3) + \alpha^6 \beta^4 \sin \theta \cos^7 \theta (\alpha^4 a_2 - \alpha^4 a_7 \beta \\
& - 2\alpha^3 a_4 \beta - 3\alpha^2 a_2 \beta - 2\alpha^2 a_7 \beta^2 - 2\alpha a_4 \beta^2 - a_7 \beta^3) \\
& - \alpha^4 \beta^5 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (\alpha^6 a_8 + 2\alpha^5 a_5 + \alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta + \alpha^4 a_8 \beta \\
& - 2\alpha^3 a_3 \beta - 3\alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 - \alpha^2 a_8 \beta^2 - 2\alpha a_3 \beta^2 - 2\alpha a_5 \beta^2 \\
& - a_6 \beta^3 - a_8 \beta^3) + \alpha^4 \beta^4 \sin^2 \theta \cos^6 \theta (\alpha^6 a_1 - \alpha^6 a_6 \beta - \alpha^6 a_8 \beta \\
& - 2\alpha^5 a_3 \beta - 2\alpha^5 a_5 \beta - 4\alpha^4 a_1 \beta - \alpha^4 a_6 \beta^2 - 2\alpha^4 a_8 \beta^2 - 2\alpha^3 a_5 \beta^2 \\
& + 3\alpha^2 a_1 \beta^2 + \alpha^2 a_6 \beta^3 - \alpha^2 a_8 \beta^3 + 2\alpha a_3 \beta^3 + a_6 \beta^4),
\end{aligned}$$

$$Q_4 = 2 (\alpha^2 + \beta)^2 (\alpha^2 \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta)^3 S (S - \alpha \beta^2 R \cos \theta),$$

com

$$S = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta (\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))}.$$

Integrando o lado direito da equação diferencial (5.10), obtemos a função “averaging”, $f : (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned}
f(R) = & \beta f_0 \left[\frac{(3\alpha^4 a_8 - 3\alpha^4 b_9 + \alpha^2 a_1 + \alpha^2 a_6 \beta + 3\alpha^2 a_8 \beta - \alpha^2 \beta b_7)}{4\alpha(-\beta)^{3/2} (\alpha^2 + \beta)} \right. \\
& \left. + \frac{-3\alpha^2 \beta b_9 + \alpha^2 b_2 + a_6 \beta^2 - \beta^2 b_7)}{4\alpha(-\beta)^{3/2} (\alpha^2 + \beta)} \right] \\
& + \beta^2 f_1 \left[\frac{(\alpha^6 a_8 + \alpha^5 a_5 + \alpha^4 a_1 - \alpha^4 a_6 \beta + 2\alpha^4 a_8 \beta - \alpha^3 a_3 \beta)}{4\alpha^3(-\beta)^{3/2} (\alpha^2 + \beta)^2} \right. \\
& \left. + \frac{\alpha^3 a_5 \beta - \alpha^2 a_1 \beta - 2\alpha^2 a_6 \beta^2 + \alpha^2 a_8 \beta^2 - \alpha a_3 \beta^2 - a_6 \beta^3)}{4\alpha^3(-\beta)^{3/2} (\alpha^2 + \beta)^2} \right] \\
& - f_2 \frac{\beta (\alpha^2 + \beta)^2 (a_8 - b_9)}{2(-\beta)^{3/2}} + f_3 \frac{(\alpha^2 a_8 - \alpha^2 b_9 + a_6 \beta - \beta b_7)}{2(-\beta)^{3/2}},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f_0 &= R, \quad f_1 = R^3, \quad f_2 = R\sqrt{\alpha^2 + \beta R^2}, \\ f_3 &= \left(\alpha - (\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} \right). \end{aligned}$$

Os Wronskianos $W(f_0, \dots, f_k)$, para $k = 0, \dots, 3$ são dados por

$$\begin{aligned} W(f_0) &= R, \quad W(f_0, f_1) = 2R^3, \quad W(f_0, f_1, f_2) = -\frac{2\beta^2 R^6}{(\alpha^2 + \beta R^2)^{3/2}}, \\ W(f_0, \dots, f_3) &= -\frac{12\beta^2 R^2}{(\alpha^2 + \beta R^2)^{7/2}} \left((\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} (8\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta R^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 R^4) - 4\alpha(\alpha^2 + \beta R^2)(2\alpha^2 + \beta R^2) \right). \end{aligned}$$

Obviamente, os três primeiros Wronskianos não se anulam porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$.

O último Wronskiano é igual a zero se, e somente se,

$$(\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} (8\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta R^2 + \beta^2 R^4) - 4\alpha(\alpha^2 + \beta R^2)(2\alpha^2 + \beta R^2) = 0.$$

Passando o termo $[(\alpha^2 + \beta)^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta R^2} (8\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta R^2 + \beta^2 R^4)]$ para o lado direito da equação anterior e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} &(-\alpha^2 - \beta R^2) (64\alpha^{16} + 128\alpha^{14}\beta R^2 + 256\alpha^{14}\beta + 80\alpha^{12}\beta^2 R^4 \\ &+ 512\alpha^{12}\beta^2 R^2 + 384\alpha^{12}\beta^2 + 16\alpha^{10}\beta^3 R^6 + 320\alpha^{10}\beta^3 R^4 + 768\alpha^{10}\beta^3 R^2 \\ &+ 256\alpha^{10}\beta^3 + \alpha^8\beta^4 R^8 + 64\alpha^8\beta^4 R^6 + 480\alpha^8\beta^4 R^4 + 512\alpha^8\beta^4 R^2 + 64\alpha^8\beta^4 \\ &- 64\alpha^8 + 4\alpha^6\beta^5 R^8 + 96\alpha^6\beta^5 R^6 + 320\alpha^6\beta^5 R^4 + 128\alpha^6\beta^5 R^2 - 128\alpha^6\beta R^2 \\ &+ 6\alpha^4\beta^6 R^8 + 64\alpha^4\beta^6 R^6 + 80\alpha^4\beta^6 R^4 - 80\alpha^4\beta^2 R^4 + 4\alpha^2\beta^7 R^8 + 16\alpha^2\beta^7 R^6 \\ &- 16\alpha^2\beta^3 R^6 + \beta^8 R^8) = 0. \end{aligned}$$

O fator $(-\alpha^2 - \beta R^2)$ não se anula. Fazendo a mudança de variável $h = R^2$, no

segundo fator do lado esquerdo da equação anterior, obtemos o polinômio de grau 4

$$\begin{aligned}
p(h) = & 64\alpha^{16} + 128\alpha^{14}\beta h + 256\alpha^{14}\beta + 80\alpha^{12}\beta^2 h^2 + 512\alpha^{12}\beta^2 h \\
& + 384\alpha^{12}\beta^2 + 16\alpha^{10}\beta^3 h^3 + 320\alpha^{10}\beta^3 h^2 + 768\alpha^{10}\beta^3 h + 256\alpha^{10}\beta^3 \\
& + 64\alpha^8\beta^4 h^3 + 480\alpha^8\beta^4 h^2 + 512\alpha^8 + \alpha^8\beta^4 h^4\beta^4 h + 64\alpha^8\beta^4 \\
& - 64\alpha^8 + 4\alpha^6\beta^5 h^4 + 96\alpha^6\beta^5 h^3 + 320\alpha^6\beta^5 h^2 + 128\alpha^6\beta^5 h \\
& - 128\alpha^6\beta h + 6\alpha^4\beta^6 h^4 + 64\alpha^4\beta^6 h^3 + 80\alpha^4\beta^6 h^2 - 80\alpha^4\beta^2 h^2 \\
& + 4\alpha^2\beta^7 h^4 + 16\alpha^2\beta^7 h^3 - 16\alpha^2\beta^3 h^3 + \beta^8 h^4.
\end{aligned}$$

Para analisar seu número de zeros, aplicamos o resultado dado em [64]. Reescrevemos esse polinômio como segue

$$p(h) = s_4 + s_3 h + s_2 h^2 + s_1 h^3 + s_0 h^4.$$

Olhamos para as expressões

$$\begin{aligned}
D_2 &= 3s_1^2 - 8s_0s_2, \\
D_3 &= 16s_0^2s_2s_4 - 18s_0^2s_3^2 - 6s_0s_1^2s_4 + 14s_0s_1s_2s_3 - 4s_0s_2^3 - 3s_1^3s_3 + s_1^2s_2^2, \\
D_4 &= 256s_0^3s_4^3 - 192s_0^2s_1s_3s_4^2 - 128s_0^2s_2^2s_4^2 + 144s_0^2s_2s_3^2s_4 - 27s_0^2s_3^4 \\
&+ 144s_0s_1^2s_2s_4^2 - 6s_0s_1^2s_3^2s_4 - 80s_0s_1s_2^2s_3s_4 + 18s_0s_1s_2s_3^3 + 16s_0s_2^4s_4 \\
&- 4s_0s_2^3s_3^2 - 27s_1^4s_4^2 + 18s_1^3s_2s_3s_4 - 4s_1^3s_3^3 - 4s_1^2s_2^3s_4 + s_1^2s_2^2s_3^2, \\
E_1 &= 8s_0^2s_3 - 4s_0s_1s_2 + s_1^3.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
D_2 &= 128\alpha^4\beta^6(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)((\alpha^2 + \beta)^4 - 6), \\
D_3 &= 16384\alpha^{12}\beta^{10}(\alpha^2 + \beta - 1)^2(\alpha^2 + \beta + 1)^2((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)^2(17(\alpha^2 + \beta)^4 \\
&- 4), \\
D_4 &= 67108864\alpha^{24}\beta^{12}(\alpha^2 + \beta - 1)^3(\alpha^2 + \beta)^4(\alpha^2 + \beta + 1)^3((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)^3, \\
E_1 &= -1024\alpha^6\beta^9(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1)(3(\alpha^2 + \beta)^4 - 4).
\end{aligned}$$

Relembramos que $\beta < 0$, $\alpha^2 + \beta < 0$ e $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$. Assim,

- (i) Se $D_4 = 0$, então $D_2 = 0$ e $D_3 = 0$. Isso implica que o polinômio p tem uma raiz real de multiplicidade 4 (veja [64]). Entretanto, $D_4 = 0$ se, e somente se, $\alpha^2 + \beta + 1 = 0$. Temos que

$$p(0) = 64\alpha^8(\alpha^2 + \beta - 1)(\alpha^2 + \beta + 1)((\alpha^2 + \beta)^2 + 1).$$

Se $\alpha^2 + \beta + 1 = 0$, então $p(0) = 0$. Portanto, $h = 0$ é a raiz real de p de multiplicidade 4. Isso é impossível, porque $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$.

- (ii) Se $D_4 > 0$, então $\alpha^2 + \beta + 1 < 0$. Assim, $D_2 < 0$ e o polinômio p não tem raízes reais (veja [64]).
- (iii) Se $D_4 < 0$, i.é., $-1 < \alpha^2 + \beta < 0$, então o polinômio p tem 2 raízes reais, mas isso não acontece porque $\alpha^2 + \beta \notin (-1, 0)$.

Portanto, o Wronskiano $W(f_0, \dots, f_3)$ não se anula para $R \in (0, \sqrt{-\alpha^2/\beta})$. Assim, desde que $(f_0, \dots, f_3)$ é um sistema-ECT, a função “averaging” f tem no máximo 3 zeros simples e eles são realizáveis. Pelo Teorema 7, esses zeros fornecem 3 ciclos limite para o sistema (5.2).

Se supormos que $\alpha^2 + \beta > 0$, então repetimos os cálculos com a função positiva

$$\bar{\rho} = \frac{\beta^2 R(\alpha^2 + \beta)}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 (\beta(\alpha^2 + \beta) \sin^2 \theta - \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \beta R^2 + \beta))} + \alpha \beta^2 R \cos \theta}$$

e asseguramos que o sistema (5.2) tem no máximo 3 ciclos limite e eles são realizáveis desde que $\alpha^2 + \beta \notin (0, 1)$. Assim, o Teorema 16 está provado.

5.4 Comentários sobre as classes P_3 e P_5

O cálculo do número $\mathcal{N}$ para as classes P_3 e P_5 permanece em aberto. Para o caso P_3 , depois de transladar o centro para a origem, o novo sistema diferencial tem integral primeira

$$H(x, y) = \frac{\alpha^2 x^2 - 2\alpha^2 xy + \alpha^2 y^2 + x^2 + 2xy + y^2}{4\alpha^2 (\alpha^4 - 2\alpha^2 x - 2\alpha^2 y + \alpha^2 + x^2 + 2xy + y^2)},$$

e seu fator integrante correspondente

$$\mu(x, y) = \frac{1}{((- \alpha^2 + x + y)^2 + \alpha^2)^2}.$$

Repetindo o mesmo processo feito nas provas dos Teoremas 15 e 16 encontramos uma função positiva ρ dada por

$$\rho = \frac{4R^2\alpha^4(\sin \theta + \cos \theta) - 2R\sqrt{S}}{2 \sin \theta \cos \theta((4R^2 + 1)\alpha^2 - 1) + (4R^2 - 1)\alpha^2 - 1},$$

onde

$$S = \alpha^4((2 - 4R^2)\alpha^2 - 2 \sin \theta \cos \theta(4R^2\alpha^2 + \alpha^4 - 1) + \alpha^4 + 1),$$

e obtemos um sistema na forma padrão do teorema do “averaging”

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \sum_{i=1}^{11} \frac{D_i(\varphi, \alpha, \beta, a, b)}{Q_5(R, \varphi, \alpha, \beta)} R^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.11)$$

onde o denominador Q_5 é dado por

$$\begin{aligned} Q_5 = & \alpha^4((\alpha^2 - 1) \sin 2\theta - \alpha^2 - 1)^3(\sin 2\theta((4R^2 + 1)\alpha^2 - 1) + (4R^2 - 1)\alpha^2 \\ & - 1)((\alpha^2 - 1) \sin 2\theta((4R^2 - 1)\alpha^2 - 1) + \alpha^2(4R^2(\alpha^2 - 1) + \alpha^2 + 2) \\ & - 4R(\sin \theta \\ & + \cos \theta \sqrt{\alpha^4(\alpha^2(-4R^2 + \alpha^2 + 2) - \sin 2\theta(4R^2\alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 1)} \\ & + 1)^2(\sin 2\theta(4R^2\alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 2R \sin \theta) \\ & + \cos \theta) \sqrt{\alpha^4(\alpha^2(-4R^2 + \alpha^2 + 2) - \sin 2\theta(4R^2\alpha^2 + \alpha^4 - 1) + 1)} \\ & + (2R\alpha - \alpha^2 - 1)(2R\alpha + \alpha^2 + 1)). \end{aligned}$$

Devido a expressão do denominador Q_5 , não podemos calcular a integral para aplicar a teoria do “averaging” para a equação (5.11). O mesmo problema acontece com a classe P_5 . Mas obtemos o número máximo de ciclos limites que bifurcam da origem para essas classes usando a teoria do “averaging ” de quinta ordem.

5.5 Prova do Teorema 17

5.5.1 Prova para a classe P_3

A fim de simplificar os cálculos, denotamos $1 + \alpha^2$ por a no sistema correspondente a classe P_3 . Transladando o centro $(-a/2, -a/2)$ da classe P_3 para a origem das coordenadas, obtemos o seguinte sistema diferencial polinomial

$$\begin{aligned}\dot{X} &= P(X, Y) = \frac{1}{2}(a - 2X)(X(a - X - 2) - aY + Y^2), \\ \dot{Y} &= Q(X, Y) = -\frac{1}{2}(a - 2Y)(a(Y - X) + X^2 - Y(Y + 2)).\end{aligned}$$

Perturbamos o sistema anterior até quinta ordem da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{X} &= P(X, Y) + \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i p_i(X, Y), \\ \dot{Y} &= Q(X, Y) + \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i q_i(X, Y),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}p_1(X, Y) &= a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4XY + a_5Y^2 + a_6X^3 + a_7X^2Y \\ &\quad + a_8XY^2 + a_9Y^3, \\ q_1(X, Y) &= \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3X^2 + \alpha_4XY + \alpha_5Y^2 + \alpha_6X^3 + \alpha_7X^2Y \\ &\quad + \alpha_8XY^2 + \alpha_9Y^3.\end{aligned}$$

Os polinômios p_2, p_3, p_4 e p_5 são dados mudando a letra a por b, c, d e e em p_1 respectivamente e os polinômios q_2, q_3, q_4 e q_5 são obtidos mudando a letra α por β, γ, δ e ε respectivamente.

Tomando a mudança de variável $X = \varepsilon x$ e $Y = \varepsilon y$ apenas para estudar as bifurcações em torno da origem e passamos o sistema obtido nas variáveis x e y para a forma de Jordan. Devido ao tamanho do sistema obtidos na forma Jordan não apresentaremos explicitamente aqui. Depois passamos o sistema para as coordenadas polares tomando $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e tomamos o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ e obtemos a equação diferencial na forma padrão do averaging de quinta ordem

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{i=1}^5 K_i \varepsilon_i.$$

Os coeficientes K_i são muito grandes e não apresentaremos explicitamente aqui.

Calculando as funções f_i do Teorema 9 obtemos

$$f_1 = \frac{\pi r(a_1 + \alpha_2)}{\sqrt{(a-1)a^2}}.$$

Tomando $\alpha_2 = -a_1$. Assim temos $f_1 = 0$ e obtemos continuando o processo do Teorema 9

$$f_2 = \frac{\pi r(b_1 + \beta_2)}{\sqrt{(a-1)a^2}}.$$

Tomando $b_1 = -\beta_2$. Assim $f_2 = 0$ e temos

$$\begin{aligned} f_3 = & \frac{\pi(a-1)a^2r(c_1 + \gamma_2)}{((a-1)a^2)^{3/2}} + \frac{\pi(a-1)r^3}{4a((a-1)a^2)^{3/2}} (3a^3a_6 + 2a^3a_7 + a^3\alpha_7 \\ & + a^3a_8 + 2a^3\alpha_8 + 3a^3\alpha_9 + 4a^2a_3 + 4a^2\alpha_3 + 4a^2a_4 + 4a^2\alpha_4 + 4a^2a_5 \\ & + 4a^2\alpha_5 - 4a^2a_7 - 4a^2\alpha_8 + 8a\alpha_1 + 8aa_2 - 8aa_4 - 8a\alpha_4 - 16\alpha_1 \\ & - 16a_2). \end{aligned}$$

Resolvendo na variável a_4 a equação obtida igualando a zero o fator que multiplica

$\frac{\pi(a-1)r^3}{4a((a-1)a^2)^{3/2}}$ e tomando $c_1 = -\gamma_2$ temos $f_3 = 0$. Seguindo o processo obtemos

$$f_4 = A_1r + A_3r^3,$$

onde

$$A_1 = \frac{\pi r(d_1 + \delta_2)}{\sqrt{(a-1)a^2}}.$$

O coeficiente A_3 devido ao seu tamanho não apresentaremos explicitamente aqui, mas são dados pelas variáveis

$$\begin{aligned} & a, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \\ & \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7, \beta_8, \beta_9. \end{aligned}$$

Os coeficientes A_1 e A_3 são linearmente independente porque o parâmetro d_1 que aparece em A_1 não aparece em A_3 . Tomando $d_1 = -\delta_2$ e resolvendo $A_3 = 0$ na variável β_3 , temos $f_4 = 0$. Seguindo o processo obtemos

$$f_5 = C_1r + C_3r^3 + C_5r^5,$$

onde

$$C_1 = -\frac{\pi r(e_1 + \phi_2)}{\sqrt{(a-1)a^2}}.$$

devido ao seu tamanho não apresentaremos explicitamente C_3 mas são dados pelas variáveis

$$\begin{aligned} & a, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \\ & c_8, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \\ & \gamma_5, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9. \end{aligned}$$

O coeficiente C_5 é dado por

$$\frac{\pi((a-2)a_6 - a(2\alpha_6 + \alpha_7 + a_8 + 2a_9 - \alpha_9) + 2(\alpha_7 + a_8 - \alpha_9))}{2a^3\sqrt{(a-1)a^2}}.$$

Os coeficientes C_1, C_3 e C_5 são mutuamente linearmente independente. De fato, o parâmetro ϕ_2 que aparece em C_1 não aparece em C_3 e C_5 e o parâmetro a_1 que aparece em C_3 não aparece em C_1 e C_5 .

Portanto os ciclos limites aparecem na terceira, quarta e quinta ordem. As funções f_3 e f_4 tem no máximo 1 zero simples e a função f_5 tem no máximo 2 zeros simples e eles são alcançados. Isto significa que quando perturbamos a classe P_3 temos no máximo 2 ciclos limites usando a teoria do “averaging ” de quinta ordem.

5.5.2 Prova para a classe P_5 com $d = 0$

Tomando $d = 0$ na classe P_5 . Os dois centros obtidos são simétricos com o eixo x . Assim, sem perda de generalidade, consideramos o centro $(-\beta, -\beta\gamma)$. Transladando o centro para a origem obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{X} &= P(X, Y) = (\beta - X) (-X (\gamma^2(X - 2\beta) + X) - 2\beta\gamma Y + Y^2), \\ \dot{Y} &= Q(X, Y) = (Y - \beta\gamma) ((\gamma^2 + 1) X(X - 2\beta) + 2\beta\gamma Y - Y^2) \end{aligned}$$

Perturbamos o sistema anterior até quinta ordem da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{X} &= P(X, Y) + \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i p_i(X, Y), \\ \dot{Y} &= Q(X, Y) + \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i q_i(X, Y),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}p_1(X, Y) &= a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4XY + a_5Y^2 + a_6X^3 + a_7X^2Y \\ &\quad + a_8XY^2 + a_9Y^3, \\ q_1(X, Y) &= \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3X^2 + \alpha_4XY + \alpha_5Y^2 + \alpha_6X^3 + \alpha_7X^2Y \\ &\quad + \alpha_8XY^2 + \alpha_9Y^3.\end{aligned}$$

Os polinômios p_2, p_3, p_4 e p_5 são dados mudando a letra a por b, c, d e e em p_1 respectivamente, e os polinômios q_2, q_3, q_4 e q_5 são obtidos mudando a letra α por β, γ, δ e ε respectivamente

Agora, para estudar as bifurcações em torno da origem, tomamos as mudanças de variáveis $X = \varepsilon x$ e $Y = \varepsilon y$ e passamos o sistema obtido nas variáveis x e y para a forma de Jordan. Devido ao tamanho do sistema obtido na forma Jordan não apresentaremos explicitamente aqui. Depois passamos o sistema para as coordenadas polares tomando $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e tomamos o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ e obtemos a equação diferencial na forma padrão do averaging de quinta ordem

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{i=1}^5 K_i \varepsilon_i.$$

Os coeficientes K_i são muito grandes e não apresentaremos explicitamente aqui. Calculando as funções f_i do Teorema 9 obtemos

$$f_1 = -\frac{\pi r(a_1 + \alpha_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

Tomando $\alpha_2 = -a_1$. Assim temos $f_1 = 0$ e obtemos seguindo o processo do Teorema 9

$$f_2 = -\frac{\pi r(b_1 + \beta_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

Tomando $\beta_2 = -b_1$. Assim $f_2 = 0$ e temos

$$f_3 = \frac{\pi r^3}{8\beta^4\gamma^3} (2a_1 - 2a_2\gamma^3 - 2a_3\beta\gamma^2 - 2a_4\beta\gamma^3 - 2a_5\beta\gamma^4 - 2a_5\beta\gamma^2 - 3a_6\beta^2\gamma^2 - 2a_7\beta^2\gamma^3 - a_8\beta^2\gamma^4 - a_8\beta^2\gamma^2 - 3\alpha_9\beta^2\gamma^4 - 2\alpha_8\beta^2\gamma^3 - \alpha_7\beta^2\gamma^2 - 3\alpha_9\beta^2\gamma^2 - 2\alpha_5\beta\gamma^3 - 2\alpha_4\beta\gamma^2 - 2\alpha_3\beta\gamma - 2\alpha_5\beta\gamma - 2\alpha_1\gamma) - \frac{\pi r(c_1 + \gamma_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

Resolvendo na variável a_4 a equação obtida igualando a zero o fator que multiplica $\frac{\pi r^3}{8\beta^4\gamma^3}$ e tomando $c_1 = -\gamma_2$ temos $f_3 = 0$. Seguindo o processo obtemos

$$f_4 = A_1 r + A_3 r^3,$$

onde

$$A_1 = -\frac{\pi r(d_1 + \delta_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

O coeficiente A_3 devido ao seu tamanho não apresentaremos explicitamente aqui, mas são dados nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_1, a_3, a_5, a_6, a_8, a_2, \alpha_1, a_7, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, b_3, b_5, b_6, b_8, b_2, b_4, \\ \beta_7, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7, \beta_8, \beta_9.$$

Os coeficientes A_1 e A_3 são linearmente independentes porque o parâmetro d_1 que aparece em A_1 não aparece em A_3 . Tomando $d_1 = -\delta_2$ e resolvendo $A_3 = 0$ na variável β_3 temos $f_4 = 0$. Seguindo o processo obtemos

$$f_5 = C_1 r + C_3 r^3 + C_5 r^5,$$

onde

$$C_1 = -\frac{\pi r(e_1 + \phi_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

Novamente não mostraremos explicitamente C_3 , mas suas variáveis são

$$\beta, a_1, a_3, a_5, a_6, a_8, a_7, a_2, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, b_2, \beta_1, \beta_2, b_3, b_5, \\ b_4, \beta_4, \beta_5, b_6, b_8, b_7, \beta_7, \beta_8, \beta_9, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_7, \\ \gamma_8, \gamma_9.$$

O coeficiente C_5 é dado por

$$\frac{\pi(\gamma(-a_6 + \alpha_7 + a_8\gamma^2 + a_8 - \alpha_9(\gamma^2 + 1)) + 2\alpha_6 + 2a_9(\gamma^2 + 1)^2)}{16\beta^4\gamma^2}.$$

Os coeficientes C_1, C_2 e C_3 são mutuamente linearmente independentes. De fato, o parâmetro ϕ_2 que aparece em C_1 não aparece em C_3 e C_5 e o parâmetro a_1 que aparece em C_3 não aparece em C_1 e C_5 .

Assim, os ciclos limites aparecem na terceira, quarta e quinta ordem. As funções f_3 e f_4 tem no máximo 1 zero simples e a função f_5 tem no máximo 2 zeros simples e eles são alcançados. Isto significa que quando perturbamos a classe P_5 para $d = 0$ temos no máximo 2 ciclos limites usando a teoria do “averaging ” de quinta ordem.

Podemos repetir o processo para $d = 1$ com as mesmas ferramentas e concluir que a classe P_5 tem, no máximo 2 ciclos limite e eles são alcançados.

5.6 Exemplo com 3 ciclos para a classe P_5

Agora vamos apresentar um exemplo com 3 ciclos limites para a classe P_5 . Este exemplo foi obtido para $d = 0$. Usando o mesmo algoritmo da seção anterior perturbando o sistema até sétima ordem, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{X} &= P(X, Y) + \sum_{i=1}^7 \varepsilon^i p_i(X, Y), \\ \dot{Y} &= Q(X, Y) + \sum_{i=1}^7 \varepsilon^i q_i(X, Y),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}p_1(X, Y) &= a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4XY + a_5Y^2 + a_6X^3 + a_7X^2Y \\ &\quad + a_8XY^2 + a_9Y^3, \\ q_1(X, Y) &= \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3X^2 + \alpha_4XY + \alpha_5Y^2 + \alpha_6X^3 + \alpha_7X^2Y \\ &\quad + \alpha_8XY^2 + \alpha_9Y^3.\end{aligned}$$

Os polinômios p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 e p_7 , são dados mudando a letra a por b, c, d, e, i e j em p_1 respectivamente, e os polinômios q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 e q_7 são obtidos mudando a

letra $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \iota$ e φ respectivamente. Fazendo igual a zero alguns coeficientes dos polinômios p_i e q_i para $i = 1, \dots, 7$. Os coeficientes zerados são

$$\begin{aligned} & a_3, a_5, a_7, a_8, a_9, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7, c_9, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \\ & d_7, d_8, d_9, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, \\ & j_8, j_9, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \beta_1, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \\ & \gamma_8, \delta_1, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \phi_1, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9, \iota_1, \iota_3, \iota_4, \iota_5, \iota_7, \iota_8, \iota_9, \\ & \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9. \end{aligned}$$

Como antes, tomando $X = \varepsilon x$ e $Y = \varepsilon y$, passando para a forma real de Jordan e depois passando o sistema para as coordenadas polares, obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{i=1}^7 K_i \varepsilon_i.$$

Calculando as funções f_i do Teorema 9 temos

$$f_1 = -\frac{\pi a_1 r}{2\beta^2 \gamma}.$$

Tomando $a_1 = 0$. Assim $f_1 = 0$ seguindo o processo temos

$$f_2 = -\frac{\pi \beta_2 r}{2\beta^2 \gamma}.$$

Tomando $\beta_2 = 0$. Assim $f_2 = 0$ e temos

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{\pi r^3 (-2a_2 \gamma^3 - 2a_4 \beta \gamma^3 - 3a_6 \beta^2 \gamma^2 - 3\alpha_9 \beta^2 \gamma^4 - \alpha_7 \beta^2 \gamma^2 - 3\alpha_9 \beta^2 \gamma^2)}{8\beta^4 \gamma^3} \\ &\quad - \frac{\pi r (c_1 + \gamma_2)}{2\beta^2 \gamma}. \end{aligned}$$

Tomando

$$a_4 = \frac{-2\alpha - 2\gamma - 3a_6 \beta^2 - \alpha_7 \beta^2 - 3\alpha_9 \beta^2 - 3\alpha_9 \beta^2 \gamma^2}{2\beta \gamma}, \quad c_1 = -\gamma_2.$$

Assim $f_3 = 0$ e obtemos

$$f_4 = D_1 r + D_3 r^3$$

onde

$$D_1 = -\frac{\pi \delta_2}{2\beta^2 \gamma},$$

$$D_3 = -\frac{1}{64\beta^6\gamma^4}\pi(2a_2^2(\gamma^3 + \gamma) + a_2\beta^2((-2\gamma^4 - 7\gamma^2 - 1)(3a_6 + \alpha_7) - 3a_9(\gamma^2 + 1)^2(2\gamma^2 + 1)) + \beta^2\gamma(9a_6^2\beta^2(\gamma^2 + 1) + 6a_6\beta^2(\gamma^2 + 1)(\alpha_7 + 3\alpha_9(\gamma^2 + 1)) + \beta(\gamma^2 + 1)((\alpha_7 + 3\alpha_9(\gamma^2 + 1))^2 + 24\beta_9\gamma^2) + 16\beta_3\gamma) + 16b_2\gamma^3)).$$

Tomando $\delta_2 = 0$ e resolvendo D_3 na variável β_3 temos $f_4 = 0$. Na sequência obtemos

$$f_5 = E_1r + E_3r^3 + E_5r^5$$

onde

$$E_1 = -\frac{\pi(e_1 + \phi_2)}{2\beta^2\gamma}, \quad E_5 = -\frac{\pi(a_6 - \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_9\gamma^2)}{16\beta^4\gamma}.$$

Devido ao seu tamanho não apresentaremos explicitamente E_3 mas são dados nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, a_6, \alpha_7, \alpha_9, b_2, \beta_9, \gamma_2, c_8, \gamma_9.$$

Tomando $e_1 = -\phi_2$, $\alpha_9 = \frac{\alpha_7 - a_6}{1 + \gamma^2}$ e resolvendo $E_3 = 0$ na variável b_2 temos $f_5 = 0$. Seguindo o processo temos

$$f_6 = F_1r + F_3r^3 + F_5r^5$$

onde

$$F_1 = -\frac{\pi(i_1 + \iota_2)}{2\beta^2\gamma}.$$

Novamente não mostraremos os coeficientes F_3 e F_5 mas F_3 é dado nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, \alpha_7, \alpha_6, b_2, \beta_9, d_6, \gamma_2, c_8, \gamma_9$$

e F_5 é dado pelas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, a_6, \alpha_7, b_9, \beta_9.$$

Tomando $i_1 = -\iota_2$ e resolvendo $F_3 = 0$ e $F_5 = 0$ respectivamente nas variáveis d_6 e b_9 temos $f_6 = 0$. Finalmente obtemos

$$f_7 = G_1r + G_2r^2 + G_3r^3 + G_5r^5$$

onde

$$G_2 = \frac{\pi (a_2 (\gamma^2 + 5) \phi_2 - 16\beta^2 \gamma (2\alpha_7 \phi_2 + 3\iota_2))}{192\beta^5 \gamma^3}.$$

Os outros coeficientes não apresentaremos devido ao seu tamanho, mas o coeficiente G_1 é dado nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, \alpha_7, a_6, \phi_2, \iota_2, \beta_9, \varphi_2, \gamma_2, c_8, \gamma_9,$$

o coeficiente G_2 é dado nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, \phi_2, \iota_2, \alpha_7,$$

o coeficiente G_3 é dado nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, \alpha_7, a_6, \beta_9, \gamma_2, c_8, \gamma_9, e_2, \phi_2,$$

e o coeficiente G_5 é dado nas variáveis

$$\beta, \gamma, a_2, \alpha_7, a_6, \beta_9, \gamma_2, c_8, \gamma_9.$$

Podemos notar que os coeficientes G_1, G_2, G_3 e G_5 são linearmente independentes. Assim a função f_7 tem no máximo 3 zeros simples e eles são alcançados. Esses zeros correspondem os ciclos limites para a classe P_5 .

Capítulo 6

Ciclos limites que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais homogêneos cúbicos

6.1 Introdução e enunciados dos principais resultados

Em [16] os autores classificam todos os sistemas diferenciais polinomiais homogêneos cúbicos. No artigo [34] os autores provam que qualquer sistema diferencial polinomial homogêneo cúbico no plano com um centro, pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + (b - 3\alpha\mu)x^2y - axy^2 - \alpha y^3 = P(x, y), \\ \dot{y} &= \alpha x^3 + ax^2y + (b + 3\alpha\mu)xy^2 - ay^3 = Q(x, y),\end{aligned}\tag{6.1}$$

com $\alpha \in \{-1, 1\}$, $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > -1/3$, depois de fazer uma mudança afim de variáveis e um reescalonamento do tempo.

É conhecido que o número máximo de ciclos limites que bifurcam das órbitas periódicas de um centro homogêneo cúbico (6.1) usando perturbações de primeira ordem dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau n é

$[(n-1)/2]$, veja para mais detalhes o item (c) do Teorema A de [35]. Sabendo que $[x]$ representa a função parte inteira de x .

O objetivo neste capítulo é *mostrar um polinômio explícito cujos os zeros simples reais positivos fornecem exatamente o número de ciclos limites que bifurcam na perturbação de primeira ordem, a partir das órbitas periódicas de qualquer centro cúbico homogêneo (6.1), usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.*

Mais precisamente, considere o sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + (b - 3\alpha\mu)x^2y - axy^2 - \alpha y^3 + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= \alpha x^3 + ax^2y + (b + 3\alpha\mu)xy^2 - \alpha y^3 + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{6.2}$$

onde

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^n p_i(x, y), \quad q(x, y) = \sum_{i=0}^n q_i(x, y),\tag{6.3}$$

p_i, q_i são polinômios homogêneos de grau i , e ε é um pequeno parâmetro.

Defina as seguintes funções

$$\begin{aligned}f_1(\theta) &= -a \sin^4 \theta + a \cos^4 \theta + (b - 3\alpha\mu + \alpha) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &\quad + (b + 3\alpha\mu - \alpha) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ g_1(\theta) &= \alpha (6\mu \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ k(\theta) &= \exp \left(\int_0^\theta \frac{f_1(s)}{g_1(s)} ds \right), \\ B_i(\theta) &= Q(\cos \theta, \sin \theta) p_i(\cos \theta, \sin \theta) - P(\cos \theta, \sin \theta) q_i(\cos \theta, \sin \theta).\end{aligned}$$

Na sequência enunciamos nosso resultado principal, onde a função $M(\theta)$ é definida em (6.5), não fornecermos aqui devido ao seu tamanho.

Teorema 18. *Para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno e para todo zero simples positivo r_0^* do polinômio*

$$r_0 \mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r_0^{2k} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}(\theta) d\theta,$$

onde

$$A_i(\theta) = \frac{B_i(\theta) k(\theta)^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)},$$

para $i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, o sistema perturbado (6.2) tem um ciclo limite que bifurca da órbita periódica $r(\theta, r_0^*) = k(\theta)r_0^*$ do anel periódico do centro (6.1) usando a teoria do “averaging” de primeira ordem. Em particular, o sistema perturbado (6.2) tem no máximo $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ciclos limites.

O Teorema 18 está provado na seção 6.2. Na seção 6.2.1 mostramos um exemplo que ilustra o Teorema 18 com $n = 5$. Obtemos 2 ciclos limites.

6.2 Prova do Teorema 18

O próximo resultado segue facilmente.

Lema 1. *Sejam $P_k(x, y)$ e $P_3(x, y)$ polinômios homogêneos de grau k e 3 respectivamente, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ temos*

$$\begin{aligned} P_k(r \cos \theta, r \sin \theta) P_3(r \cos \theta, r \sin \theta) &= (-1)^{k+1} P_k(r \cos(\theta + \pi), r \sin(\theta + \pi)) \\ &\quad \cdot P_3(r \cos(\theta + \pi), r \sin(\theta + \pi)). \end{aligned}$$

Agora passando o sistema (6.2) para coordenadas polares tomando $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^3 f_1(\theta) + \varepsilon (\cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)), \\ \dot{\theta} &= r^2 g_1(\theta) + \varepsilon \frac{1}{r} (\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)). \end{aligned}$$

Note que $g_1(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Assim, tomamos o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ e temos a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.4)$$

na forma padrão para aplicar a teoria do “averaging” de primeira ordem, onde

$$\begin{aligned}
F_0(r, \theta) &= \frac{f_1(\theta)}{g_1(\theta)} r, \\
F_1(r, \theta) &= \frac{1}{r^5 g_1(\theta)^2} (Q(r \cos \theta, r \sin \theta) p(r \cos \theta, r \sin \theta) \\
&\quad - P(r \cos \theta, r \sin \theta) q(r \cos \theta, r \sin \theta)).
\end{aligned}$$

Note que a equação diferencial (6.4) satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Considere $r(\theta, r_0)$ a solução periódica da equação diferencial $\dot{r} = r f_1(\theta)/g_1(\theta)$ tal que $r(0, r_0) = r_0$. Resolvendo essa equação diferencial obtemos

$$r(\theta, r_0) = k(\theta) r_0 = r_0 e^{k_1(\theta)} k_2(\theta),$$

onde

$$\begin{aligned}
k_1(\theta) &= -\frac{a\alpha}{2R} \left(\frac{(-3\mu + R - 1) \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu - R}} \right)}{\sqrt{3\mu - R}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(3\mu + R + 1) \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu + R}} \right)}{\sqrt{3\mu + R}} \right), \\
k_2(\theta) &= \sqrt{\sec^2 \theta (3\mu - R)^{\frac{R-\alpha b}{4R}} (3\mu + R)^{\frac{\alpha b + R}{4R}} (\tan^2 \theta + 3\mu - \alpha R)^{\frac{1}{4}(\frac{b}{R}-1)}} \\
&\quad \cdot (\tan^2 \theta + 3\mu + \alpha R)^{-\frac{b+R}{4R}}, \\
R &= \sqrt{9\mu^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação variacional (3.8) para a nossa equação diferencial (6.4) temos

que a matriz fundamental de (3.8) é

$$\begin{aligned}
M(\theta) = & \left(-2a\alpha(-3\mu + R - 1)\sqrt{3\mu + R}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3\mu - R}}\right) \right. \\
& -2a\alpha\sqrt{3\mu - R}(3\mu + R + 1)\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3\mu + R}}\right) + \alpha\sqrt{3\mu - R} \\
& \cdot\sqrt{3\mu + R}(b - \alpha R)\log(\tan^2\theta + 3\mu - R) - \alpha\sqrt{3\mu - R} \\
& \cdot\sqrt{3\mu + R}(b + \alpha R)\log(\tan^2\theta + 3\mu + R) + \sqrt{3\mu - R}\sqrt{3\mu + R} \quad (6.5) \\
& \cdot(R - \alpha b)\log(3\mu - R) + \sqrt{3\mu - R}\sqrt{3\mu + R}(\alpha b + R)\log(3\mu + R) \\
& + 2R\sqrt{3\mu - R}\sqrt{3\mu + R}\log(\sec^2\theta) \\
& \left. + 4R\sqrt{3\mu - R}\sqrt{3\mu + R} \right) / \left(4R\sqrt{3\mu - R}\sqrt{3\mu + R} \right).
\end{aligned}$$

Note que $M(\theta)$ não depende de r_0 . Usando os polinômios p e q dado em (6.3) e o sistema (6.1) temos o integrando da integral (3.9) para a nossa equação diferencial é

$$M^{-1}(\theta)F_1(\theta, r(\theta, r_0)) = \frac{F_1(\theta, r(\theta, r_0))}{M(\theta)} = \frac{h(r, \theta)}{r^5 g_1(\theta)^2 M(\theta)}, \quad (6.6)$$

onde

$$h(r, \theta) = Q(r \cos \theta, r \sin \theta)p(r \cos \theta, r \sin \theta) - P(r \cos \theta, r \sin \theta)q(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Como p e q são somas de polinômios homogêneos (ver eq.(6.3)), podemos reescrever a igualdade (6.6) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
M^{-1}(\theta)F_1(\theta, r(\theta, r_0)) &= \sum_{i=0}^n \frac{B_i(\theta)}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} r(\theta, r_0)^{i-2} \\
&= \sum_{i=0}^n r_0^{i-2} \frac{B_i(\theta)(e^{k_1(\theta)} k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} \\
&= \sum_{i=0}^n r_0^{i-2} A_i(\theta).
\end{aligned}$$

Calculando a integral (3.9) temos

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(\theta)F_1(\theta, r(\theta, r_0))d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n r_0^{i-2} \int_0^{2\pi} A_i(\theta)d\theta.$$

Se i é par então pelo Lema 1 implica $B_i(\theta) = -B_i(\theta + \pi)$. Assim como $k_1(\theta) = k_1(\theta + \pi)$, $k_2(\theta) = k_2(\theta + \pi)$ e $M(\theta) = M(\theta + \pi)$ facilmente obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{B_i(\theta)(e^{k_1(\theta)}k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{B_i(\theta + \pi)(e^{k_1(\theta + \pi)}k_2(\theta + \pi))^{i-2}}{g_1(\theta + \pi)^2 M(\theta + \pi)} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{B_i(\theta)(e^{k_1(\theta)}k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\
 &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta, \\
 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{B_i(\theta)(e^{k_1(\theta)}k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{B_i(\theta + \pi)(e^{k_1(\theta + \pi)}k_2(\theta + \pi))^{i-2}}{g_1(\theta + \pi)^2 M(\theta + \pi)} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{B_i(\theta)(e^{k_1(\theta)}k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\
 &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_i(\theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Portanto para i par temos

$$\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta = 0.$$

Analogamente se i é ímpar então pelo Lema 1 implica $B_i(\theta) = B_i(\theta + \pi)$. Assim facilmente podemos checar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta \quad \text{e} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_i(\theta) d\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} A_i(\theta) d\theta.$$

Portanto temos

$$\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} A_i(\theta) d\theta \neq 0,$$

porque A_i é uma função par π -periódica. Logo a função $\mathcal{F}$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} r_0^{2k-1} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}(\theta) d\theta. \quad (6.7)$$

Note que os coeficientes $A_{2k+1}(\theta)$ em (6.7) são linearmente independentes porque os polinômios p_i e q_i são linearmente independentes. Assim a função “averaging”

$\mathcal{F}$ tem no máximo $[(n-1)/2]$ zeros simples que correspondem os ciclos limites do sistema (6.2) e assim o Teorema 18 é provado.

6.2.1 Exemplo

Nesta seção apresentamos um exemplo que ilustra o Teorema 18.

Considere o centro polinomial homogêneo cúbico

$$\dot{x} = -y^3, \quad \dot{y} = x^3,$$

e o sistema perturbado

$$\dot{x} = -y^3 + \varepsilon(a_1x + a_2x^3 + a_3x^5), \quad \dot{y} = x^3. \quad (6.8)$$

Passando o sistema (6.8) para coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^3(\sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) + \varepsilon r \cos^2 \theta (a_1 + a_2 r^2 \cos^2 \theta + a_3 r^4 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} &= r^2(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \varepsilon \sin \theta \cos \theta (a_1 + a_2 r^2 \cos^2 \theta + a_3 r^4 \cos^4 \theta). \end{aligned}$$

Tomamos o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ obtemos o seguinte sistema na forma padrão do Teorema 10 para aplicar a teoria do “averaging”

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.9)$$

onde

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \frac{r \sin \theta \cos^3 \theta - r \sin^3 \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}, \\ F_1(r, \theta) &= \frac{\cos^4 \theta (a_1 + a_2 r^2 \cos^2 \theta + a_3 r^4 \cos^4 \theta)}{r(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^2}. \end{aligned}$$

Assim para o sistema (6.9) temos

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\cos(4\theta) + 3}}, \\ M(\theta) &= \frac{1}{4}(-\log(\cos(4\theta) + 3) + 4 + \log 4), \end{aligned}$$

e o integrando da integral (3.9) do sistema (6.9) é

$$\frac{A(\theta) + B(\theta)r_0^2 + C(\theta)r_0^4}{r_0},$$

onde

$$\begin{aligned} A(\theta) &= a_1 \frac{32\sqrt{2} \cos^4 \theta}{(\cos(4\theta) + 3)^{7/4} (-\log(\cos(4\theta) + 3) + 4 + \log 4)}, \\ B(\theta) &= a_2 \frac{64\sqrt{2} \cos^6 \theta}{(\cos(4\theta) + 3)^{9/4} (-\log(\cos(4\theta) + 3) + 4 + \log 4)}, \\ C(\theta) &= a_3 \frac{128\sqrt{2} \cos^8 \theta}{(\cos(4\theta) + 3)^{11/4} (-\log(\cos(4\theta) + 3) + 4 + \log 4)}. \end{aligned}$$

Calculando numericamente a integral (3.9) para o sistema (6.9) obtemos

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{3.72731... a_1 + 3.34745... a_2 r_0^2 + 3.10284... a_3 r_0^4}{r_0}.$$

Tomando

$$a_1 = \frac{-1}{3.72731...}, \quad a_2 = \frac{2}{3.34745...} \quad \text{and} \quad a_3 = \frac{-0.1}{3.10284...},$$

é simples ver que $\mathcal{F}$ tem dois zeros simples positivos dado por

$$r_0^* = 0.716357... \quad \text{and} \quad r_0^{**} = 4.41439...$$

que correspondem a dois ciclos limites do sistema perturbado (6.8) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno.

Capítulo 7

Ciclos limite que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais Homogêneos–Ponderados de grau–ponderado 2

7.1 Introdução e enunciados dos principais resultados

Em [49] os autores classificaram todos os centros dos sistemas diferenciais polinomiais *Homogêneos–Ponderados* até grau–ponderado 4. Em particular provaram que a única família de sistemas diferenciais polinomiais homogêneos–ponderados com um centro com grau–ponderado 2 é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{20}x^2 + a_{01}y = P(x, y), \\ \dot{y} &= b_{30}x^3 + b_{11}xy = Q(x, y),\end{aligned}\tag{7.1}$$

com

$$(b_{11} - 2a_{20})^2 + 8a_{01}b_{30} = -a^2 < 0.$$

O expoente–ponderado desta família $(s_1, s_2) = (1, 2)$.

O sistema diferencial polinomial (7.1) tem um centro global na origem de coordenadas, e seu retrato de fase no disco de Poincaré é dado na Figura (7.1). Para detalhes, a fim de estudar o retrato de fase global de um sistema diferencial polinomial no disco de Poincaré, veja o Capítulo 5 de [20].

Nosso principal resultado nesse capítulo é *mostrar um polinômio explícito cujos os zeros simples reais positivos fornecem exatamente o número de ciclos limites que bifurcam na perturbação de primeira ordem, a partir das órbitas periódicas de qualquer centro de uma sistema diferencial polinomial homogêneo-ponderado (7.1), usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.*

Mais precisamente, considere o sistema polinomial diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{20}x^2 + a_{01}y + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= b_{30}x^3 + b_{11}xy + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{7.2}$$

onde

$$\begin{aligned}p(x, y) &= c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y \\ &\quad + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3, \\ q(x, y) &= d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2 + d_{30}x^3 + d_{21}x^2y \\ &\quad + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3,\end{aligned}$$

e ε é um pequeno parâmetro.

Considere a seguinte função

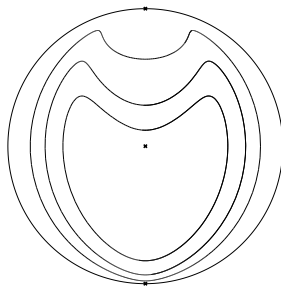


Figura 7.1: Retrato de fase do sistema diferencial polinomial (7.1) no disco de Poincaré.

$$g_1(\theta) = a^2 \cos^4 \theta + (4a_{01} \sin \theta + (2a_{20} - b_{11}) \cos^2 \theta)^2.$$

Na sequência apresentaremos nosso principal resultado deste capítulo, onde as funções $f_i(\theta)$, for $i = 0, 1, \dots, 7$, $W(\theta)$ e $k(\theta)$ são definidas na seção 7.2.

Teorema 19. *Seja $|\varepsilon| > 0$ um parâmetro suficientemente pequeno e considere r_0^* sendo uma raiz simples positiva do polinômio*

$$r_0^2 \mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^3 r_0^{2k} \int_0^{2\pi} A_{2k}(\theta) d\theta, \quad (7.3)$$

onde

$$A_i(\theta) = \frac{W(\theta) f_i(\theta) k(\theta)^{i-3}}{g_1(\theta)^2}.$$

Então as seguintes afirmações valem:

- (a) *O sistema perturbado (7.2) tem um ciclo limite que bifurca da órbita periódica $r(\theta, r_0^*) = k(\theta) r_0^*$ do anel periódico do centro (7.1) usando a teoria do “averaging” de primeira ordem.*
- (b) *O polinômio (7.3) pode ter 0, 1, 2 ou 3 raízes reais positivas dependendo da perturbação do sistema (7.1).*

A afirmação (a) do Teorema 19 está provado na seção 7.2, e a afirmação (b) na seção 7.3 .

7.2 Prova da afirmação (a) do Teorema 19

Podemos escrever o sistema (7.2) nas coordenadas polares generalizadas $x = r \cos \theta$, $y = r^2 \sin \theta$, e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (7.4)$$

na forma padrão para aplicar a teoria do “averaging” de primeira ordem descrito na Seção 3.3, onde

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \frac{h_1(\theta)}{g_1(\theta)} r, \\ F_1(r, \theta) &= \frac{16a_{01}^2(\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta)}{r^4 g_1(\theta)^2} \left(Q(r \cos \theta, r^2 \sin \theta) p(r \cos \theta, r^2 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - P(r \cos \theta, r^2 \sin \theta) q(r \cos \theta, r^2 \sin \theta) \right), \\ h_1(\theta) &= r \cos \theta \left(\cos^2 \theta ((a^2 + (b_{11} - 2a_{20})^2) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - 8a_{01}a_{20}) - 8a_{01}(a_{01} + b_{11} \sin \theta) \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Note que a equação diferencial (7.4) satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Considere $r(\theta, r_0)$ a solução periódica da equação diferencial $dr/d\theta = rh_1(\theta)/g_1(\theta)$ tal que $r(0, r_0) = r_0$. Para resolver essa equação diferencial tomamos $z = \sin \theta$ em $g_1(\theta)$, e assim obtemos um polinômio de grau 4 em z que pode ser fatorizado da seguinte forma

$$g_1(z) = H_1(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4),$$

onde $H_1 = a^2 + (b_{11} - 2a_{20})^2$, os coeficientes de $g_1^*(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ e $g_2^*(z) = (z - z_3)(z - z_4)$ são reais, e z_i são raízes complexas de g_1 para $i = 1, \dots, 4$ dado por

$$\begin{aligned} z_1 &= H_3 - \sqrt{\frac{N_1}{H_1^2}} - 2H_2, & z_2 &= H_3 - \sqrt{\frac{N_2}{H_1^2}} + 2H_2, \\ z_3 &= H_3 + \sqrt{\frac{N_1}{H_1^2}} - 2H_2, & z_4 &= H_3 + \sqrt{\frac{N_2}{H_1^2}} + 2H_2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} H_2 &= \sqrt{-\frac{a^2 a_{01}^2}{H_1^2}}, & H_3 &= \frac{a_{01}(4a_{20} - 2b_{11})}{a^2 + (b_{11} - 2a_{20})^2}, \\ N_1 &= a^4 + 2a^2(-2a_{01}^2 + 4a_{01}H_2(b_{11} - 2a_{20}) + (b_{11} - 2a_{20})^2) \\ &\quad + (b_{11} - 2a_{20})^2(4a_{01}(a_{01} + 2H_2(b_{11} - 2a_{20})) + (b_{11} - 2a_{20})^2), \\ N_2 &= a^4 + 2a^2((b_{11} - 2a_{20})^2 - 2a_{01}(a_{01} + 2H_2(b_{11} - 2a_{20}))) \\ &\quad + (b_{11} - 2a_{20})^2(4a_{01}(a_{01} + 2H_2(2a_{20} - b_{11})) + (b_{11} - 2a_{20})^2). \end{aligned}$$

Assim a equação diferencial (7.4) com $\varepsilon = 0$ pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{1}{H_1} \left(\frac{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \cos \theta}{A_0 + A_1 \sin \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\gamma \cos \theta + \delta \sin \theta \cos \theta}{B_0 + B_1 \sin \theta + \sin^2 \theta} \right), \quad (7.5)$$

onde $A_0 = z_1 z_2$, $A_1 = -z_1 - z_2$, $B_0 = z_3 z_4$ e $B_1 = -z_3 - z_4$ e os parâmetros α , β , γ e δ são soluções do sistema

$$\begin{aligned} \alpha B_0 + A_0 \gamma + 8a_{01}a_{20} &= 0, \\ \beta B_0 + \alpha B_1 + A_1 \gamma + A_0 \delta - a^2 + 8a_{01}^2 - 4a_{20}^2 + 4a_{20}b_{11} - b_{11}^2 &= 0, \\ \beta B_1 + \alpha + \gamma + A_1 \delta - 8a_{01}a_{20} + 8a_{01}b_{11} &= 0, \\ \beta + \delta + a^2 + 4a_{20}^2 - 4a_{20}b_{11} + b_{11}^2 &= 0. \end{aligned}$$

A solução da equação diferencial (7.5) é

$$r(\theta, r_0) = k(\theta)r_0 = r_0 e^{k_1(\theta)} k_2(\theta),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1(\theta) &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{(2\alpha - A_1\beta) \left(\arctan \frac{A_1+2\sin\theta}{\sqrt{R}} - \arctan \frac{A_1}{\sqrt{R}} \right)}{\sqrt{R}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\gamma - B_1\delta) \left(\arctan \frac{B_1+2\sin\theta}{\sqrt{S}} - \arctan \frac{B_1}{\sqrt{S}} \right)}{\sqrt{S}} \right), \\ k_2(\theta) &= A_0^{-\frac{\beta}{2H_1}} B_0^{-\frac{\delta}{2H_1}} (A_0 + \sin\theta(A_1 + \sin\theta))^{\frac{\beta}{2H_1}} (B_0 \\ &\quad + \sin\theta(B_1 + \sin\theta))^{\frac{\delta}{2H_1}}, \\ S &= 4B_0 - B_1^2, \\ R &= 4A_0 - A_1^2. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação varacional (3.8) para a nossa equação diferencial (7.4) temos que a matriz fundamental é $M(\theta) = k(\theta)$. Observe que $M(\theta)$ não depende de r_0 . Usando os polinômios p e q dado em (7.2) e o sistema (7.1) temos que o integrando

da integral (3.9) para a equação diferencial (7.5) é

$$\begin{aligned}
 M^{-1}(\theta)F_1(\theta, r(\theta, r_0)) &= \sum_{i=0}^7 \frac{W(\theta)f_i(\theta)}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} r(\theta, r_0)^{i-2} \\
 &= \sum_{i=0}^n r_0^{i-2} \frac{W(\theta)f_i(\theta)(e^{k_1(\theta)}k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} \\
 &= \sum_{i=0}^7 r_0^{i-2} A_i(\theta),
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 f_0(\theta) &= 8a_{01}^2 d_{00} \sin \theta + 8a_{01} a_{20} d_{00} \cos^2 \theta, \\
 f_1(\theta) &= \cos^3 \theta (a^2 c_{00} + 8a_{01} a_{20} d_{10} + 4a_{20}^2 c_{00} - 4a_{20} b_{11} c_{00} + b_{11}^2 c_{00}) \\
 &\quad + 8a_{01} \sin \theta \cos \theta (a_{01} d_{10} - b_{11} c_{00}), \\
 f_2(\theta) &= \cos^4 \theta (a^2 c_{10} + 8a_{01} a_{20} d_{20} + 4a_{20}^2 c_{10} - 4a_{20} b_{11} c_{10} + b_{11}^2 c_{10}) \\
 &\quad + 8a_{01}^2 d_{01} \sin^2 \theta + 8a_{01} \sin \theta \cos^2 \theta (a_{01} d_{20} + a_{20} d_{01} - b_{11} c_{10}), \\
 f_3(\theta) &= \sin \theta \cos^3 \theta (a^2 c_{01} + 8a_{01}^2 d_{30} + 8a_{01} a_{20} d_{11} - 8a_{01} b_{11} c_{20} + 4a_{20}^2 c_{01} \\
 &\quad - 4a_{20} b_{11} c_{01} + b_{11}^2 c_{01}) + \cos^5 \theta (a^2 c_{20} + 8a_{01} a_{20} d_{30} + 4a_{20}^2 c_{20} \\
 &\quad - 4a_{20} b_{11} c_{20} + b_{11}^2 c_{20}) + 8a_{01} \sin^2 \theta \cos \theta (a_{01} d_{11} - b_{11} c_{01}), \\
 f_4(\theta) &= \sin \theta \cos^4 \theta (a^2 c_{11} + 8a_{01} a_{20} d_{21} - 8a_{01} b_{11} c_{30} + 4a_{20}^2 c_{11} \\
 &\quad - 4a_{20} b_{11} c_{11} + b_{11}^2 c_{11}) + c_{30} \cos^6 \theta (a^2 + 4a_{20}^2 - 4a_{20} b_{11} + b_{11}^2) \\
 &\quad + 8a_{01}^2 d_{02} \sin^3 \theta + 8a_{01} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (a_{01} d_{21} + a_{20} d_{02} - b_{11} c_{11}), \\
 f_5(\theta) &= \sin^2 \theta \cos^3 \theta (a^2 c_{02} + 8a_{01} a_{20} d_{12} - 8a_{01} b_{11} c_{21} + 4a_{20}^2 c_{02} \\
 &\quad - 4a_{20} b_{11} c_{02} + b_{11}^2 c_{02}) + c_{21} \sin \theta \cos^5 \theta (a^2 + 4a_{20}^2 - 4a_{20} b_{11} + b_{11}^2) \\
 &\quad + 8a_{01} \sin^3 \theta \cos \theta (a_{01} d_{12} - b_{11} c_{02}), \\
 f_6(\theta) &= c_{12} \sin^2 \theta \cos^4 \theta (a^2 + 4a_{20}^2 - 4a_{20} b_{11} + b_{11}^2) + 8a_{01}^2 d_{03} \sin^4 \theta \\
 &\quad - 8a_{01} \sin^3 \theta \cos^2 \theta (b_{11} c_{12} - a_{20} d_{03}), \\
 f_7(\theta) &= c_{03} \sin^3 \theta \cos^3 \theta (a^2 + 4a_{20}^2 - 4a_{20} b_{11} + b_{11}^2) \\
 &\quad - 8a_{01} b_{11} c_{03} \sin^4 \theta \cos \theta, \\
 W(\theta) &= -8a_{01} (2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta).
 \end{aligned}$$

Calculando a integral (3.9) obtemos

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(\theta) F_1(\theta, r(\theta, r_0)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n r_0^{i-2} \int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta,$$

onde as funções $A_i(\theta)$ são definidas no enunciado do Teorema 19.

Se i é ímpar então é fácil mostrar que $f_i(\theta) = -f_i(\theta + \pi/2)$, para $i = 0, \dots, 7$, e $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$. Sabendo que $k_1(\theta) = k_1(\theta + \pi/2)$, $k_2(\theta) = k_2(\theta + \pi/2)$, $M(\theta) = M(\theta + \pi/2)$ e $W(\theta) = W(\theta + \pi/2)$, para $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{W(\theta) f_i(\theta) (e^{k_1(\theta)} k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{W(\theta + \pi/2) f_i(\theta + \pi/2) (e^{k_1(\theta + \pi/2)} k_2(\theta + \pi/2))^{i-2}}{g_1(\theta + \pi/2)^2 M(\theta + \pi/2)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{W(\theta) f_i(\theta) (e^{k_1(\theta)} k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{W(\theta) f_i(\theta) (e^{k_1(\theta)} k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{W(\theta + \pi/2) f_i(\theta + \pi/2) (e^{k_1(\theta + \pi/2)} k_2(\theta + \pi/2))^{i-2}}{g_1(\theta + \pi/2)^2 M(\theta + \pi/2)} d\theta \\ &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{W(\theta) f_i(\theta) (e^{k_1(\theta)} k_2(\theta))^{i-2}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Portanto para i ímpar temos

$$\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta = 0.$$

Analogamente, se i é par então a função $g \in \{k_1, k_2, M, W, f_i, \text{ para } i = 0, \dots, 7\}$ satisfaz a seguinte igualdade $g(\theta) = g(\theta + \pi/2)$ se $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$. Assim podemos facilmente mostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_i(\theta) d\theta \quad \text{e} \quad \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} A_i(\theta) d\theta.$$

Assim temos

$$\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta \neq 0.$$

Portanto a função $\mathcal{F}$ definida em (3.9) pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^3 r_0^{2k-2} \int_0^{2\pi} A_{2k}(\theta) d\theta. \quad (7.6)$$

Observe que os coeficientes $A_{2k}(\theta)$ em (7.6) são linearmente independentes para $k = 0, \dots, 3$. Assim pelo Teorema generalizado de Descartes, a função “averaging” $\mathcal{F}$ tem no máximo 3 zeros simples positivos que proporcionam ciclos limite do sistema (7.2). Assim o item (a) do Teorema 19 é provado.

7.3 Prova da afirmação (b) do Teorema 19

Nesta seção apresentaremos exemplos que ilustra a afirmação (b) do Teorema 19 para $l = 0, 1, 2, 3$.

Considere o sistema diferencial polinomial cúbico que tem um centro na origem

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = -\frac{x^3}{4} + 3xy,$$

com a perturbação

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = -\frac{x^3}{4} + 3xy + \varepsilon(d_{00} + d_{20}x^2 + d_{21}x^2y + d_{03}y^3). \quad (7.7)$$

Escrevendo o sistema (7.7) nas coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r^2 \sin \theta$, e tomando o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ obtemos o seguinte sistema na forma padrão do Teorema 10 para aplicar a teoria do “averaging”

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (7.8)$$

onde

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \frac{r \cos \theta (-15 \sin \theta + \sin(3\theta) + 16 \cos(2\theta) - 32)}{4 (8 \sin^2 \theta + \cos^4 \theta - 4 \sin \theta \cos^2 \theta)}, \\ F_1(r, \theta) &= -\frac{16H(\theta) (d_{00} + d_{03}r^6 \sin^3 \theta + d_{20}r^2 \cos^2 \theta + d_{21}r^4 \sin \theta \cos^2 \theta)}{r^2 (8 \sin^2 \theta + \cos^4 \theta - 4 \sin \theta \cos^2 \theta)^2}, \\ H(\theta) &= (\cos^2 \theta + \sin \theta)(\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Assim para o sistema (7.8) temos

$$k(\theta) = M(\theta) = \frac{2^{3/4} \exp\left(-\frac{5}{2} \arctan \frac{4 \sin \theta}{-4 \sin \theta + \cos(2\theta) + 1}\right)}{\sqrt[4]{-8 \sin \theta - 8 \sin(3\theta) - 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 35}},$$

e o integrando da integral (3.9) do sistema (7.8) é

$$\frac{A(\theta) + B(\theta)r_0^2 + C(\theta)r_0^4 + D(\theta)r_0^6}{r_0^2},$$

onde

$$\begin{aligned} A(\theta) &= -\frac{2^{31/4} d_{00} H(\theta) \exp\left(\frac{15}{2} \arctan \frac{4 \sin \theta}{-4 \sin \theta + \cos(2\theta) + 1}\right)}{(-8 \sin \theta - 8 \sin(3\theta) - 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 35)^{5/4}}, \\ B(\theta) &= -\frac{2^{37/4} d_{20} H(\theta) \cos^2 \theta \exp\left(\frac{5}{2} \arctan \frac{4 \sin \theta}{-4 \sin \theta + \cos(2\theta) + 1}\right)}{(-8 \sin \theta - 8 \sin(3\theta) - 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 35)^{7/4}}, \\ C(\theta) &= -\frac{2^{43/4} d_{21} H(\theta) \sin \theta \cos^2 \theta \exp\left(-\frac{5}{2} \arctan \frac{4 \sin \theta}{-4 \sin \theta + \cos(2\theta) + 1}\right)}{(-8 \sin \theta - 8 \sin(3\theta) - 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 35)^{9/4}}, \\ D(\theta) &= -\frac{2^{49/4} d_{03} H(\theta) \sin^3 \theta \exp\left(-\frac{15}{2} \arctan \frac{4 \sin \theta}{-4 \sin \theta + \cos(2\theta) + 1}\right)}{(-8 \sin \theta - 8 \sin(3\theta) - 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 35)^{11/4}}. \end{aligned}$$

Calculando numericamente a integral (3.9) para o sistema (7.8) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0) &= \frac{1}{r_0^2} \left(-427527.30772.. d_{00} - 590.65521.. d_{20} r_0^2 \right. \\ &\quad \left. - 133.80248.. d_{21} r_0^4 - 48202.93168.. d_{03} r_0^6 \right). \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} d_{00} &= \frac{-36}{427527.30772..}, & d_{20} &= \frac{-49}{590.65521..}, & d_{21} &= \frac{-14}{133.80248..}, \\ d_{03} &= \frac{-1}{48202.93168..}, \end{aligned}$$

a função $\mathcal{F}$ torna-se

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{36 + 49r_0^2 + 14r_0^4 + r_0^6}{r_0^2}.$$

Podemos facilmente checar que $\mathcal{F}$ não tem zeros simples positivos e pelo Teorema 10 o sistema perturbado (7.7) não tem ciclos limites para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Assim a afirmação (b) é provada para $l = 0$.

Atribuindo

$$d_{00} = \frac{36}{427527.30772..}, \quad d_{20} = \frac{41}{590.65521..}, \quad d_{21} = \frac{4}{133.80248..},$$

$$d_{03} = \frac{-1}{48202.93168..},$$

a função $\mathcal{F}$ é dada por

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{-36 - 41r_0^2 - 4r_0^4 + r_0^6}{r_0^2}.$$

Assim temos que a função $\mathcal{F}$ tem um único zero simples positivo dado por $r_{0,1} = 3$ e pelo Teorema 10, fornece 1 ciclo limite do sistema perturbado (7.7) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Assim mostramos a afirmação (b) para $l = 1$.

Tomando

$$d_{00} = \frac{-36}{427527.30772..}, \quad d_{20} = \frac{-23}{590.65521..}, \quad d_{21} = \frac{12}{133.80248..},$$

$$d_{03} = \frac{-1}{48202.93168..},$$

a função $\mathcal{F}$ se transforma em

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{36 + 23r_0^2 - 12r_0^4 + r_0^6}{r_0^2}.$$

Podemos checar que $\mathcal{F}$ tem exatamente 2 zeros simples positivos dado por $r_{0,1} = 2$ e $r_{0,2} = 3$ e pelo Teorema 10, que proporcionam 2 ciclos limites do sistema perturbado (7.7) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Portanto a afirmação (b) é provada para $l = 2$.

Finalmente, tomando

$$d_{00} = \frac{36}{427527.30772..}, \quad d_{20} = \frac{-49}{590.65521..}, \quad d_{21} = \frac{14}{133.80248..},$$

$$d_{03} = \frac{-1}{48202.93168..},$$

a função $\mathcal{F}$ torna-se

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{-36 + 49r_0^2 - 14r_0^4 + r_0^6}{r_0^2}.$$

Assim, facilmente checamos que $\mathcal{F}$ tem exatamente 3 zeros simples positivos dado por $r_{0,1} = 1$, $r_{0,2} = 2$ e $r_{0,3} = 3$ e pelo Teorema 10, proporcionam 3 ciclos limites do sistema perturbado (7.7) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Portanto provamos a afirmação (b) do Teorema 19.

Capítulo 8

Ciclos limite que bifurcam do anel periódico de centros polinomiais Homogêneos–Ponderados de grau–ponderado 3

8.1 Introdução e enunciados dos principais resultados

A classificação de todos centros de sistemas diferenciais polinomiais *homogêneo–ponderado* no plano foi feita em [49] até grau–ponderado 4. Particularmente eles fornecem duas famílias de sistemas diferenciais polinomiais *homogêneo–ponderado* que tem centros com grau–ponderado 3. A primeira família pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + (b - 3\alpha\mu)x^2y - axy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} &= \alpha x^3 + ax^2y + (b + 3\alpha\mu)xy^2 - ay^3,\end{aligned}\tag{8.1}$$

com $\alpha \in \{-1, 1\}$, $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > -1/3$, depois de fazer uma mudança de variáveis afim e um redimensionamento do tempo. O expoente–ponderado dessa família é

$$(s_1, s_2) = (1, 1).$$

A segunda família é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + by = P(x, y), \\ \dot{y} &= cx^5 + dx^2y = Q(x, y),\end{aligned}\tag{8.2}$$

com $bc \neq 0$, $(3a + d) = 0$ e $12(bc - ad) < 0$. O expoente-ponderado dessa família é $(s_1, s_2) = (1, 2)$.

Em [41] apresentamos um polinômio cujo os zeros simples reais positivos fornecem exatamente o número de ciclos limites que bifurcam de órbitas periódicas do sistema (8.1) quando é perturbado dentro da classe de todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau n . Em particular, o número máximo de ciclos limite obtidos é exatamente $[(n - 1)/2]$, onde $[x]$ denota a função parte inteira de x . Mais precisamente, considere o sistema diferencial polinomial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + by + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= cx^5 + dx^2y + \varepsilon q(x, y),\end{aligned}\tag{8.3}$$

onde

$$\begin{aligned}p(x, y) &= \sum_{k=0}^n p_k(x, y), \quad q(x, y) = \sum_{i=0}^n q_i(x, y), \\ p_k(x, y) &= \sum_{i=0}^k c_{k-i} x^{k-i} y^i, \quad q_i(x, y) = \sum_{i=0}^k d_{k-i} x^{k-i} y^i,\end{aligned}\tag{8.4}$$

e ε é um pequeno parâmetro.

Em [35] os autores encontram uma cota superior do número máximo de ciclos limites do sistema (8.3). Veja a afirmação (c) do Teorema A de [35] com $n = 5$, $p = 3$ e $q = 1$ a cota superior para o número de ciclos limites de sistema (8.3) com ε suficientemente pequeno proveniente das órbitas periódicas de um centro (8.2) é 8. Aqui demonstramos que o número máximo de ciclos limites que o sistema (8.3) pode ter é exatamente 6 e é alcançado.

Na sequência apresentaremos nossos resultados onde a função $M(\theta)$ e as funções $f_i(\theta)$, para $i = 0, 1, \dots, W(\theta)$ e $k(\theta)$ são dadas na Seção 8.2.

Teorema 20. *Suponha que $d \neq 0$. Seja $|\varepsilon| > 0$ um parâmetro suficientemente pequeno e considere $r_{0,s}$ sendo uma raiz simples do polinômio*

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^7 r_0^{2k-3} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}(\theta) d\theta, \quad (8.5)$$

onde

$$A_i(\theta) = \frac{W(\theta)f_i(\theta)k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)}.$$

Assim, o sistema perturbado (8.3) tem um ciclo limite bifurcando da órbita periódica $r(\theta, r_{0,s}) = k(\theta)r_{0,s}$ do anel periódico do centro (8.2) usando a teoria do “averaging” de primeira ordem. Em particular, o polinômio (8.5) tem no máximo 6 zeros simples reais positivos e eles são alcançados.

Teorema 21. *Suponha que $d = 0$. Seja $|\varepsilon| > 0$ um parâmetro suficientemente pequeno e considere $r_{0,s}$ sendo uma raiz simples do polinômio*

$$\mathcal{F}^*(r_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^5 r_0^{2k-3} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}^*(\theta) d\theta + r_0^9 \int_0^{2\pi} A_{15}^*(\theta) d\theta \right), \quad (8.6)$$

onde

$$A_i^*(\theta) = \frac{W^*(\theta)f_i^*(\theta)k^*(\theta)^{i-4}}{g_1^*(\theta)^2 M^*(\theta)}.$$

Assim, o sistema perturbado (8.3) tem um ciclo limite bifurcando da órbita periódica $r(\theta, r_{0,s}) = k(\theta)r_{0,s}$ do anel periódico do centro (8.2) usando a teoria do “averaging” de primeira ordem. Em particular, o polinômio (8.6) tem no máximo 5 zeros simples reais positivos e eles são alcançados.

O Teorema 20 está provado na Seção 8.2 e o Teorema 21 está provado na Seção 8.3. Na Seção 8.4 apresentamos exemplos que ilustram os Teoremas 20 e 21.

Segue dos Teoremas 20 e 21 o nosso próximo resultado.

Corolário 22. *Para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno o sistema perturbado (8.3) tem no máximo 6 ciclos limites bifurcando das órbitas periódicas do centro (8.2) usando a teoria do “averaging” de primeira ordem e eles são alcançados.*

8.2 Prova do Teorema 20

Suponha que $d \neq 0$. Aplicando uma mudança de variável afim

$$\tilde{x} = \alpha x, \quad \tilde{y} = \frac{\alpha^3 b}{d} y, \quad \tilde{t} = \frac{d}{\alpha^2} t$$

com $\alpha \neq 0$ e sistema (8.2) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + y, \\ \dot{y} &= Q(x, y) = a_1 x^5 + x^2 y, \end{aligned}$$

onde $a_1 = -(4 + b^2)/12$ e $b \neq 0$. O sistema perturbado referente ao sistema anterior é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{3}x^3 + y + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} &= a_1 x^5 + x^2 y + \varepsilon q(x, y), \end{aligned} \tag{8.7}$$

Escrevemos o sistema (8.7) nas coordenadas polares generalizadas $x = r \cos \theta$, $y = r^3 \sin \theta$, e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{8.8}$$

na forma padrão para aplicar a teoria do “averaging” de primeira ordem descrita na Seção 3.3, onde

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \frac{h_1(\theta)}{g_1(\theta)} r, \\ F_1(r, \theta) &= \frac{144(\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)}{r^7 g_1(\theta)^2} \left(Q(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) p(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - P(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) q(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) \right), \\ h_1(\theta) &= \cos \theta \left((b^2 + 4) \sin \theta \cos^4 \theta - 6 \sin \theta (\sin(2\theta) + 2) + 4 \cos^3 \theta \right). \end{aligned}$$

Note que a equação diferencial (8.8) satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Considere $r(\theta, r_0)$ a solução periódica da equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{h_1(\theta)}{g_1(\theta)} \tag{8.9}$$

tal que $r(0, r_0) = r_0$.

Resolvendo a equação diferencial anterior obtemos

$$r(\theta, r_0) = k(\theta)r_0,$$

onde

$$k(\theta) = \frac{2^{5/6}(4+b^2)^{1/6}}{A},$$

com

$$A = (3(5b^2 - 172) \cos(2\theta) + 6(b^2 + 4) \cos(4\theta) + (b^2 + 4) \cos(6\theta) + 10b^2 - 192 \sin(2\theta) - 96 \sin(4\theta) + 616)^{1/6}.$$

Resolvendo a equação varacional (3.8) para a nossa equação diferencial (8.8) obtemos que a matriz fundamental $M(\theta)$ é igual $k(\theta)$.

Usando os polinômios p e q dado em (8.3) e o sistema (8.2) temos que o integrando da integral (3.9) para a equação diferencial (8.9) é

$$\begin{aligned} M^{-1}(\theta)F_1(\theta, r(\theta, r_0)) &= \sum_{i=0}^{17} \frac{W(\theta)f_i(\theta)}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} r(\theta, r_0)^{i-4} \\ &= \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} \frac{W(\theta)f_i(\theta)k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} \\ &= \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} A_i(\theta), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= 4d_{00} \cos^3 \theta - 12d_{00} \sin \theta, \\ f_1(\theta) &= 4d_{10} \cos^4 \theta - 12d_{10} \sin \theta \cos \theta, \\ f_2(\theta) &= \cos^5 \theta (-b^2 c_{00} - 4c_{00} + 4d_{20}) + 12(c_{00} - d_{20}) \sin \theta \cos^2 \theta, \\ f_3(\theta) &= \cos^6 \theta (-b^2 c_{10} - 4c_{10} + 4d_{30}) + 4 \sin \theta \cos^3 \theta (3c_{10} + d_{01} - 3d_{30}) \\ &\quad - 12d_{01} \sin^2 \theta, \\ f_4(\theta) &= \cos^7 \theta (-b^2 c_{20} - 4c_{20} + 4d_{40}) + 4 \sin \theta \cos^4 \theta (3c_{20} + d_{11} - 3d_{40}) \\ &\quad - 12d_{11} \sin^2 \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5(\theta) &= \sin \theta \cos^5 \theta \left(-b^2 c_{01} - 4c_{01} + 12c_{30} + 4d_{21} - 12d_{50} \right), \\
&\quad + \cos^8 \theta \left(-b^2 c_{30} - 4c_{30} + 4d_{50} \right) + 12(c_{01} - d_{21}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
f_6(\theta) &= \sin \theta \cos^6 \theta \left(-b^2 c_{11} - 4c_{11} + 12c_{40} + 4d_{31} \right) - (b^2 + 4) c_{40} \cos^9 \theta \\
&\quad + 4 \sin^2 \theta \cos^3 \theta (3c_{11} + d_{02} - 3d_{31}) - 12d_{02} \sin^3 \theta, \\
f_7(\theta) &= \sin \theta \cos^7 \theta \left(-b^2 c_{21} - 4c_{21} + 12c_{50} + 4d_{41} \right) - (b^2 + 4) c_{50} \cos^{10} \theta \\
&\quad + 4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta (3c_{21} + d_{12} - 3d_{41}) - 12d_{12} \sin^3 \theta \cos \theta, \\
f_8(\theta) &= \sin^2 \theta \cos^5 \theta \left(-b^2 c_{02} - 4c_{02} + 12c_{31} + 4d_{22} \right) \\
&\quad - (b^2 + 4) c_{31} \sin \theta \cos^8 \theta + 12(c_{02} - d_{22}) \sin^3 \theta \cos^2 \theta, \\
f_9(\theta) &= \sin^2 \theta \cos^6 \theta \left(-b^2 c_{12} - 4c_{12} + 12c_{41} + 4d_{32} \right) \\
&\quad - (b^2 + 4) c_{41} \sin \theta \cos^9 \theta + 4 \sin^3 \theta \cos^3 \theta (3c_{12} + d_{03} - 3d_{32}) \\
&\quad - 12d_{03} \sin^4 \theta, \\
f_{10}(\theta) &= - (b^2 + 4) c_{22} \sin^2 \theta \cos^7 \theta + 4(3c_{22} + d_{13}) \sin^3 \theta \cos^4 \theta \\
&\quad - 12d_{13} \sin^4 \theta \cos \theta, \\
f_{11}(\theta) &= \sin^3 \theta \cos^5 \theta \left(-b^2 c_{03} - 4c_{03} + 12c_{32} + 4d_{23} \right) \\
&\quad - (b^2 + 4) c_{32} \sin^2 \theta \cos^8 \theta + 12(c_{03} - d_{23}) \sin^4 \theta \cos^2 \theta, \\
f_{12}(\theta) &= - (b^2 + 4) c_{13} \sin^3 \theta \cos^6 \theta + 4(3c_{13} + d_{04}) \sin^4 \theta \cos^3 \theta \\
&\quad - 12d_{04} \sin^5 \theta, \\
f_{13}(\theta) &= - (b^2 + 4) c_{23} \sin^3 \theta \cos^7 \theta + 4(3c_{23} + d_{14}) \sin^4 \theta \cos^4 \theta \\
&\quad - 12d_{14} \sin^5 \theta \cos \theta, \\
f_{14}(\theta) &= 12c_{04} \sin^5 \theta \cos^2 \theta - (b^2 + 4) c_{04} \sin^4 \theta \cos^5 \theta, \\
f_{15}(\theta) &= - (b^2 + 4) c_{14} \sin^4 \theta \cos^6 \theta + 4(3c_{14} + d_{05}) \sin^5 \theta \cos^3 \theta \\
&\quad - 12d_{05} \sin^6 \theta, \\
f_{16}(\theta) &= 0, \\
f_{17}(\theta) &= 12c_{05} \sin^6 \theta \cos^2 \theta - (b^2 + 4) c_{05} \sin^5 \theta \cos^5 \theta, \\
W(\theta) &= 12 (3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta).
\end{aligned}$$

Calculando a integral (3.9) obtemos

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(\theta) F_1(\theta, r(\theta, r_0)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} \int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta,$$

onde as funções $A_i(\theta)$ são definidas no enunciado do Teorema 20.

Se i é par então é fácil checar que $f_i(\theta) = -f_i(\theta + \pi)$, para $i = 0, \dots, 17$, e $\theta \in [\pi, 3\pi/2] \cup [3\pi/2, \pi]$. Sabendo que $k_1(\theta) = k_1(\theta + \pi)$, $k_2(\theta) = k_2(\theta + \pi)$, $M(\theta) = M(\theta + \pi)$ e $W(\theta) = W(\theta + \pi)$, para $\theta \in [\pi, 3\pi/2] \cup [3\pi/2, \pi]$ podemos facilmente checar

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{f_i(\theta) W(\theta) k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_i(\theta + \pi) W(\theta + \pi) k(\theta + \pi)^{i-4}}{g_1(\theta + \pi)^2 M(\theta + \pi)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{f_i(\theta) W(\theta) k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} A_i(\theta) d\theta &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{f_i(\theta) W(\theta) k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f_i(\theta + \pi) W(\theta + \pi) k(\theta + \pi)^{i-4}}{g_1(\theta + \pi)^2 M(\theta + \pi)} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{f_i(\theta) W(\theta) k(\theta)^{i-4}}{g_1(\theta)^2 M(\theta)} d\theta \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_i(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Assim se i é par concluímos que

$$\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta = 0.$$

Os coeficientes A_1 e A_{17} são dados por

$$A_1 = [768 \cdot 2^{2/3} d_{10} \cos \theta (\cos(2\theta) - 2) (-12 \sin \theta + 3 \cos \theta + \cos(3\theta))] / L$$

$$A_{17} = [3 \times 2^{22} (b^2 + 4)^2 c_{05} \sin^5 \theta \cos^2 \theta (\cos(2\theta) - 2) M] / N$$

onde,

$$\begin{aligned}
L &= (b^2 + 4)^{2/3} \left(3(5b^2 - 172) \cos(2\theta) + 6(b^2 + 4) \cos(4\theta) \right. \\
&\quad \left. + (b^2 + 4) \cos(6\theta) + 10b^2 - 192 \sin(2\theta) - 96 \sin(4\theta) + 616 \right)^{4/3}, \\
M &= (b^2 + 4) \cos^3 \theta - 12 \sin \theta, \\
N &= \left(3(5b^2 - 172) \cos(2\theta) + 6(b^2 + 4) \cos(4\theta) + (b^2 + 4) \cos(6\theta) \right. \\
&\quad \left. + 10b^2 - 192 \sin(2\theta) - 96 \sin(4\theta) + 616 \right)^4.
\end{aligned}$$

Calculamos as integrais dos coeficientes A_1 e A_{17} na variável θ , no intervalo $[0, 2\pi]$ e obtemos que ambas são iguais a zero

Afirmção: Para $i = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ou 15 temos $\int_0^{2\pi} A_i(\theta) d\theta \neq 0$.

Demonstração. A prova desta Afirmção segue pelo Exemplo 1.

□

Portanto a função $\mathcal{F}$ definida em (3.9) pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^7 r_0^{2k-3} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}(\theta) d\theta. \quad (8.10)$$

Note que os coeficientes de $A_{2k+1}(\theta)$ em (8.10) são linearmente independentes para $k = 1, \dots, 7$. Assim pelo Teorema generalizado de Descartes, a função “averaging” $\mathcal{F}$ tem no máximo 6 zeros simples positivos que proporcionam ciclos limites do sistema (8.3).

8.3 Prova do Teorema 21

Suponha que $d = 0$. Tomando uma mudança de variável afim

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y\sqrt{-b/c}, \quad \tilde{t} = t\sqrt{-bc}$$

o sistema (8.2) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x^5,\end{aligned}$$

Escrevendo o sistema (8.3) nas coordenadas polares generalizadas $x = r \cos \theta$, $y = r^3 \sin \theta$, e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.11)$$

na forma padrão para aplicar a teoria do “averaging” de primeira ordem descrita na Seção 3.3, onde

$$\begin{aligned}F_0(r, \theta) &= \frac{r (\sin \theta \cos^5 \theta - \sin \theta \cos \theta)}{\cos^6 \theta - 3 \cos^2 \theta + 3}, \\ F_1(r, \theta) &= -\frac{\cos(2\theta) - 2}{r^4 (3 \sin^2 \theta + \cos^6 \theta)^2} \left(r^2 \cos^5 \theta p(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta q(r \cos \theta, r^3 \sin \theta) \right).\end{aligned}$$

Defina $g_1(\theta) = \cos^6 \theta - 3 \cos^2 \theta + 3$.

Note que a equação diferencial (8.11) satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Considere $r(\theta, r_0)$ a solução periódica da equação diferencial $\dot{r} = F_0(r, \theta)$ tal que $r(0, r_0) = r_0$. Para resolver essa equação diferencial tomamos $z = \cos^2 \theta$ em $g_1(\theta)$, e obtemos um polinômio de grau 3 em z que pode ser fatorado da seguinte forma

$$g_1(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

onde os coeficientes de $g_1^*(z) = (z - z_1)$ e $g_2^*(z) = (z - z_2)(z - z_3)$ são reais e z_i são raízes de g_1 para $i = 1, \dots, 3$ dada por

$$\begin{aligned}z_1 &= -\frac{2 + \sqrt[3]{2} (3 - \sqrt{5})^{2/3}}{2^{2/3} \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}}}, \\ z_{2,3} &= \frac{2 \sqrt[3]{2} (1 \mp i\sqrt{3}) + (1 \pm i\sqrt{3}) (6 - 2\sqrt{5})^{2/3}}{4 \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}}}.\end{aligned}$$

Assim a equação diferencial (8.8) com $\varepsilon = 0$ pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\frac{dr}{d\theta} = r \left(C_1 \frac{\cos \theta \sin \theta}{-z_3 + \cos^2 \theta} + C_2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{-z_1 + \cos^2 \theta} + C_3 \frac{\cos \theta \sin \theta}{-z_2 + \cos^2 \theta} \right), \quad (8.12)$$

onde

$$C_1 = \frac{-1 + z_3^2}{(-z_1 + z_3)(-z_2 + z_3)}, \quad C_2 = \frac{-1 + z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)},$$

$$C_3 = \frac{-1 + z_2^2}{(-z_1 + z_2)(z_2 - z_3)}.$$

A solução da equação diferencial (8.12) com condição inicial $r(0, r_0) = r_0$ é

$$r(\theta, r_0) = r_0 k^*(\theta),$$

onde

$$k^*(\theta) = r_0 (1 - z_3)^{C_1/2} (1 - z_1)^{C_2/2} (1 - z_2)^{C_3/2} (\cos^2 \theta - z_3)^{-C_1/2}$$

$$\times (\cos^2 \theta - z_1)^{-C_2/2} (\cos^2 \theta - z_2)^{-C_3/2}.$$

Resolvendo a equação varacional (3.8) para a nossa equação diferencial (8.11) obtemos que a matriz fundamental $M^*(\theta) = k^*(\theta)$. Note que $M^*(\theta)$ não depende de r_0 . Usando os polinômios p e q dado em (8.3) e o sistema (8.2) temos que o integrando da integral (3.9) para a equação diferencial (8.12) é

$$M^{*-1}(\theta) F_1(\theta, r(\theta, r_0)) = \sum_{i=0}^{17} \frac{W^*(\theta) f_i^*(\theta)}{g_1^*(\theta)^2 M^*(\theta)} r(\theta, r_0)^{i-4}$$

$$= \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} \frac{W^*(\theta) f_i^*(\theta) k^*(\theta)^{i-4}}{g_1^*(\theta)^2 M^*(\theta)}$$

$$= \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} A_i^*(\theta),$$

onde

$$f_0^*(\theta) = d_{00} \sin \theta,$$

$$f_1^*(\theta) = d_{10} \sin \theta \cos \theta,$$

$$f_2^*(\theta) = c_{00} \cos^5 \theta + d_{20} \sin \theta \cos^2 \theta,$$

$$f_3^*(\theta) = c_{10} \cos^6 \theta + d_{01} \sin^2 \theta + d_{30} \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$\begin{aligned}
f_4^*(\theta) &= c_{20} \cos^7 \theta + d_{11} \sin^2 \theta \cos \theta + d_{40} \sin \theta \cos^4 \theta, \\
f_5^*(\theta) &= (c_{01} + d_{50}) \sin \theta \cos^5 \theta + c_{30} \cos^8 \theta + d_{21} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
f_6^*(\theta) &= c_{11} \sin \theta \cos^6 \theta + c_{40} \cos^9 \theta + d_{02} \sin^3 \theta + d_{31} \sin^2 \theta \cos^3 \theta, \\
f_7^*(\theta) &= c_{21} \sin \theta \cos^7 \theta + c_{50} \cos^{10} \theta + d_{12} \sin^3 \theta \cos \theta + d_{41} \sin^2 \theta \cos^4 \theta, \\
f_8^*(\theta) &= c_{02} \sin^2 \theta \cos^5 \theta + c_{31} \sin \theta \cos^8 \theta + d_{22} \sin^3 \theta \cos^2 \theta, \\
f_9^*(\theta) &= c_{12} \sin^2 \theta \cos^6 \theta + c_{41} \sin \theta \cos^9 \theta + d_{03} \sin^4 \theta + d_{32} \sin^3 \theta \cos^3 \theta, \\
f_{10}^*(\theta) &= c_{22} \sin^2 \theta \cos^7 \theta + d_{13} \sin^4 \theta \cos \theta, \\
f_{11}^*(\theta) &= c_{03} \sin^3 \theta \cos^5 \theta + c_{32} \sin^2 \theta \cos^8 \theta + d_{23} \sin^4 \theta \cos^2 \theta, \\
f_{12}^*(\theta) &= c_{13} \sin^3 \theta \cos^6 \theta + d_{04} \sin^5 \theta, \\
f_{13}^*(\theta) &= c_{23} \sin^3 \theta \cos^7 \theta + d_{14} \sin^5 \theta \cos \theta, \\
f_{14}^*(\theta) &= c_{04} \sin^4 \theta \cos^5 \theta, \\
f_{15}^*(\theta) &= c_{14} \sin^4 \theta \cos^6 \theta + d_{05} \sin^6 \theta, \\
f_{16}^*(\theta) &= 0, \\
f_{17}^*(\theta) &= c_{05} \sin^5 \theta \cos^5 \theta, \\
W^*(\theta) &= 3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

Calculando as integrais (3.9) obtemos

$$\mathcal{F}^*(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{*-1}(\theta) F_1(\theta, r(\theta, r_0)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{17} r_0^{i-4} \int_0^{2\pi} A_i^*(\theta) d\theta,$$

onde as funções $A_i(\theta)$ são definidas no enunciado do Teorema 21.

Analogamente como na prova do Teorema 20 podemos mostrar que se i é par então

$$\int_0^{2\pi} A_i^*(\theta) d\theta = 0.$$

Os coeficientes A_1^* , A_{13}^* e A_{17}^* são dados por

$$\begin{aligned} A_1^* &= -d_{10} \frac{2^{\frac{55}{9}} (7 - 3\sqrt{5})^{4/9} \sin(2\theta)(\cos(2\theta) - 2)}{(3 - \sqrt{5})^{8/9} (-33 \cos(2\theta) + 6 \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + 58)^{4/3}}, \\ A_{13}^* &= -\frac{2^{\frac{4}{3}} (2 + \sqrt{5})^{4/9} \sin^3 \theta \cos \theta (\cos(2\theta) - 2) (c_{23} \cos^6 \theta + d_{14} \sin^2 \theta)}{(1 + \sqrt{5})^{4/3} (\cos^6 \theta - 3 \cos^2 \theta + 3)^{4/3} (3 \sin^2 \theta + \cos^6 \theta)^2}, \\ A_{17}^* &= -c_{05} \frac{32 \sin^5 \theta \cos^5 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{N}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} N &= \sqrt[3]{47 + 21\sqrt{5}} \left(2\sqrt[3]{2} \cos^4 \theta + 4\sqrt[3]{3} \left(2 + 2^{2/3} \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}} + 2^{2/3} \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}} \right) \right. \\ &\quad \times \cos^2 \theta + \left(2(3 + \sqrt{5}) \right)^{2/3} + \left(6 - 2\sqrt{5} \right)^{2/3} + 4\sqrt[3]{2} \left. \right) \left(-2(3 - \sqrt{5}) \right)^{2/3} \\ &\quad \times \cos^4 \theta + \left(2\sqrt[3]{6 - 2\sqrt{5}} - 2^{2/3} (\sqrt{5} - 3) \right) \cos^2 \theta + \sqrt[3]{30\sqrt{5} - 50} \\ &\quad + 2 \left(3 - \sqrt{5} \right)^{2/3} - 3\sqrt[3]{6 - 2\sqrt{5}} - 2 \cdot 2^{2/3} \left. \right)^2 (3 \sin^2 \theta + \cos^6 \theta)^2. \end{aligned}$$

As integrais dos coeficientes A_1^* , A_{13}^* e A_{17}^* na variável θ , no intervalo $[0, 2\pi]$ são iguais a zero porque são funções ímpares.

Afirmção: Para $i = 3, 5, 7, 9, 11$ ou 15 temos $\int_0^{2\pi} A_i^*(\theta) d\theta \neq 0$.

Demonstração. A prova desta Afirmção segue pelo Exemplo 2.

□

Portanto a função $\mathcal{F}$ definida em (3.9) pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^5 r_0^{2k-3} \int_0^{2\pi} A_{2k+1}^*(\theta) d\theta + r_0^9 \int_0^{2\pi} A_{15}^*(\theta) d\theta \right). \quad (8.13)$$

Observe que os coeficientes de $A_{2k+1}^*(\theta)$ em (8.13) são linearmente independentes para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7$. Assim pelo Teorema generalizado de Descartes, a função “averaging” $\mathcal{F}$ tem no máximo 5 zeros simples positivos que proporcionam ciclos limites do sistema (8.3).

8.4 Exemplos

Exemplo 1. Considere o sistema diferencial polinomial cúbico com um centro na origem

$$\dot{x} = -\frac{1}{3}x^3 + y, \quad \dot{y} = -\frac{5}{12}x^5 + x^2y,$$

com a perturbação

$$\dot{x} = \dot{x} = -\frac{1}{3}x^3 + y, \quad \dot{y} = -\frac{5}{12}x^5 + x^2y + \varepsilon q(x, y), \quad (8.14)$$

onde

$$q(x, y) = d_{01}y + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3 + d_{23}x^2y^3 + d_{14}xy^4 + d_{05}y^5.$$

Escrevendo o sistema (8.14) nas coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r^3 \sin \theta$ e tomando o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ obtemos o seguinte sistema na forma padrão do Teorema 10 para aplicar a teoria do “averaging”

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.15)$$

onde

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \frac{r \cos \theta (-6 \sin \theta (\sin(2\theta) + 2) + 4 \cos^3 \theta + 5 \sin \theta \cos^4 \theta)}{36 \sin^2 \theta + 5 \cos^6 \theta - 24 \sin \theta \cos^3 \theta}, \\ F_1(r, \theta) &= -48H(\theta) \frac{A(\theta) q(r \cos \theta, r^3 \sin \theta)}{r^4 (36 \sin^2 \theta + 5 \cos^6 \theta - 24 \sin \theta \cos^3 \theta)^2}, \end{aligned}$$

e

$$A(\theta) = \cos^3 \theta - 3 \sin \theta,$$

$$H(\theta) = \cos(2\theta) - 2.$$

Assim para o sistema (8.15) temos

$$k(\theta) = M(\theta) = \sqrt[6]{\frac{160}{B}},$$

onde

$$B = -192 \sin(2\theta) - 96 \sin(4\theta) - 501 \cos(2\theta) + 30 \cos(4\theta) + 5 \cos(6\theta) + 626$$

e o integrando da integral (3.9) do sistema (8.15) é

$$\sum_{k=1}^7 r_0^{2k-3} A_{2k+1}(\theta),$$

onde

$$\begin{aligned} A_3(\theta) &= -d_{01} \frac{3072 \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \sin \theta H(\theta) (-12 \sin \theta + 3 \cos \theta + \cos(3\theta))}{T(\theta)^{5/3}}, \\ A_5(\theta) &= -d_{21} \frac{48 \sin \theta \cos^2 \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{(36 \sin^2 \theta + 5 \cos^6 \theta - 24 \sin \theta \cos^3 \theta)^2}, \\ A_7(\theta) &= -d_{12} \frac{98304 \cdot 2^{2/3} \sqrt[3]{5} \sin^2 \theta \cos \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{T(\theta)^{7/3}}, \\ A_9(\theta) &= -d_{03} \frac{393216 \sqrt[3]{2} \cdot 5^{2/3} \sin^3 \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{T(\theta)^{8/3}}, \\ A_{11}(\theta) &= -d_{23} \frac{7864320 \sin^3 \theta \cos^2 \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{T(\theta)^3}, \\ A_{13}(\theta) &= -d_{14} \frac{15728640 \cdot 2^{2/3} \sqrt[3]{5} \sin^4 \theta \cos \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{T(\theta)^{10/3}}, \\ A_{15}(\theta) &= -d_{05} \frac{62914560 \sqrt[3]{2} \cdot 5^{2/3} \sin^5 \theta H(\theta) (\cos^3 \theta - 3 \sin \theta)}{T(\theta)^{11/3}}, \end{aligned}$$

e

$$T(\theta) = -192 \sin(2\theta) - 96 \sin(4\theta) - 501 \cos(2\theta) + 30 \cos(4\theta) + 5 \cos(6\theta) + 626.$$

Calculando numericamente a integral (3.9) para o sistema (8.15) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0) &= \frac{1}{r_0} \left(-4.2608.. d_{01} - 2.0944.. d_{21} r_0^2 - 1.2770.. d_{12} r_0^4 - 1.2427.. d_{03} r_0^6 \right. \\ &\quad \left. - 1.0908.. d_{23} r_0^8 - 0.7348.. d_{14} r_0^{10} - 0.5419.. d_{05} r_0^{12} \right). \end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} d_{01} &= -\frac{720}{4.2608..}, & d_{21} &= \frac{1764}{2.0944..}, & d_{12} &= -\frac{1624}{1.2770..}, \\ d_{03} &= \frac{735}{1.2427..}, & d_{23} &= -\frac{175}{1.0908..}, & d_{14} &= \frac{21}{0.7348..}, \\ d_{05} &= -\frac{1}{0.5419..}. \end{aligned}$$

A função $\mathcal{F}$ agora é dada por

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{r_0^{12} - 21r_0^{10} + 175r_0^8 - 735r_0^6 + 1624r_0^4 - 1764r_0^2 + 720}{r_0} = \frac{1}{r_0} \prod_{i=1}^6 (r_0^2 - i).$$

Assim temos que $\mathcal{F}$ tem 6 zeros simples positivos dado por $r_{0,i} = \sqrt{i}$, para $i = 1..6$ pelo Teorema 10, fornecem 6 ciclos limites do sistema perturbado (8.14) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno.

Exemplo 2. Considere o sistema diferencial polinomial cúbico com um centro na origem

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x^5,$$

com a perturbação

$$\dot{x} = \dot{x} = -y + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = x^5 + \varepsilon q(x, y), \quad (8.16)$$

onde

$$\begin{aligned} p(x, y) &= c_{30}x^3 + c_{50}x^5 + c_{14}xy^4, \\ q(x, y) &= d_{01}y + d_{03}y^3 + d_{23}x^2y^3. \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema (8.16) nas coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r^3 \sin \theta$ e tomando o quociente $\dot{r}/\dot{\theta}$ obtemos o seguinte sistema na forma padrão do Teorema 10 para aplicar a teoria do “averaging”

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(r, \theta) + \varepsilon F_1(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.17)$$

com $F_0(r, \theta)$ dado na prova do Teorema 21 e

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= -\frac{\cos(2\theta) - 2}{r(3\sin^2\theta + \cos^6\theta)^2} \left[r^6 \sin^4\theta (c_{14}r^6 \cos^6\theta + d_{03} + d_{23}r^2 \cos^2\theta) \right. \\ &\quad \left. + r^2 \cos^8\theta (c_{30} + c_{50}r^2 \cos^2\theta) + d_{01} \sin^2\theta \right]. \end{aligned}$$

As funções $k^*(\theta)$ e $M^*(\theta)$ para o sistema (8.17) são dadas também na prova do Teorema 21 e o integrando da integral (3.9) do sistema (8.17) é

$$\sum_{k=1}^5 r_0^{2k-3} A_{2k+1}^*(\theta) + r_0^{11} A_{15}^*(\theta),$$

onde

$$\begin{aligned}
A_3^*(\theta) &= -d_{01} \frac{256 (6 - 2\sqrt{5})^{2/9} \sin^2 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{\sqrt[9]{7 - 3\sqrt{5}} (-33 \cos(2\theta) + 6 \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + 58)^{5/3}}, \\
A_5^*(\theta) &= -c_{30} \frac{\cos^8 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{(3 \sin^2 \theta + \cos^6 \theta)^2}, \\
A_7(\theta) &= -c_{50} \frac{\cos^{10} \theta (\cos(2\theta) - 2)}{\sqrt[3]{\cos^6 \theta - 3 \cos^2 \theta + 3} (3 \sin^2 \theta + \cos^6 \theta)^2}, \\
A_9^*(\theta) &= -d_{03} \frac{2^{40/3} \sin^4 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{(-33 \cos(2\theta) + 6 \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + 58)^{8/3}}, \\
A_{11}^*(\theta) &= -d_{23} \frac{2^{43/3} (\sqrt{5} - 1)^{4/3} \sin^4 \theta \cos^2 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{(3 - \sqrt{5})^{2/3} (-33 \cos(2\theta) + 6 \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + 58)^3}, \\
A_{15}^*(\theta) &= -c_{14} \frac{2^{55/3} \sin^4(\theta) \cos^6 \theta (\cos(2\theta) - 2)}{(-33 \cos(2\theta) + 6 \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + 58)^{11/3}},
\end{aligned}$$

Calculando numericamente a integral (3.9) para o sistema (8.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(r_0) &= \frac{1}{r_0} \left(2.1033.. d_{01} + 1.8138.. c_{30} r_0^2 + 1.6169.. c_{50} r_0^4 + 0.6310.. d_{03} r_0^6 \right. \\
&\quad \left. + 0.1512.. d_{23} r_0^8 + 0.0394.. c_{14} r_0^{12} \right).
\end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned}
d_{01} &= -\frac{1800}{2.1033..}, & c_{30} &= \frac{3990}{1.8138..}, & c_{50} &= -\frac{3101}{1.6169..}, \\
d_{03} &= \frac{1050}{0.6310..}, & d_{23} &= -\frac{140}{0.0394..}, & c_{14} &= \frac{1}{0.0394..}.
\end{aligned}$$

As funções $\mathcal{F}$ agora é dada por

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{r_0^{12} - 140r_0^8 + 1050r_0^6 - 3101r_0^4 + 3990r_0^2 - 1800}{r_0} = \frac{r_0^2 + 15}{r_0} \prod_{i=1}^5 (r_0^2 - i).$$

Assim temos que $\mathcal{F}$ tem 5 zeros simples positivos dado por $r_{0,i} = \sqrt{i}$, for $i = 1..5$ pelo Teorema 10, fornece 5 ciclos limites do sistema perturbado (8.16) com $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno.

Perspectivas Futuras

Dentre as perspectivas futuras de continuidade deste trabalho destacamos

- (a) Em [49] os autores classificaram todos os centros dos sistemas diferenciais polinomiais *homogêneos-ponderados* até grau-ponderado 4. Em particular, provaram que a única família de sistemas diferenciais polinomiais homogêneos-ponderados com um centro com grau-ponderado 4 é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{40}x^4 + a_{01}y = P(x, y), \\ \dot{y} &= b_{70}x^7 + b_{31}x^3y = Q(x, y),\end{aligned}\tag{8.18}$$

com

$$a_{01}b_{70} \neq 0$$

e

$$(4a_{40} + b_{31})^2 + 16(b_{70}a_{01} - b_{31}a_{40}) < 0.$$

O expoente-ponderado desta família $(s_1, s_2) = (1, 4)$.

A questão em aberto que está dentro das perspectivas de futuros estudos é *mostrar um polinômio explícito cujos os zeros simples reais positivos fornecem exatamente o número de ciclos limites que bifurcam na perturbação de primeira ordem, a partir das órbitas periódicas de qualquer centro de um sistema diferencial polinomial homogêneo-ponderado (8.18).*

- (b) Considere o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= y + \varepsilon|z| - \varepsilon ax^{2n},\end{aligned}\tag{8.19}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, estamos estudando os números de ciclos limite que aparecem variando o valor de n .

Considerações Finais

Os resultados do Capítulo 2 estão submetidos para publicação, ver [55].

Os resultados do Capítulo 4 estão publicados na revista *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, para mais detalhes ver [39].

Os resultados do Capítulo 5 estão publicados na revista *Applied Mathematics and Computation*, para mais detalhes ver [40].

O resultado do Capítulo 6 está publicado na revista *Electronic Journal of Differential Equations*, para mais detalhes ver [41].

O resultado do Capítulo 7 está publicado na revista *Applied Mathematics and Computation*, para mais detalhes ver [42].

Os resultados do Capítulo 8 estão submetidos para publicação, ver [43].

Apêndice A

Fórmulas das funções y_6 e y_7

Agora vamos apresentar explicitamente as funções y_6 e y_7 estabelecidas no Teorema 9 que utilizamos para obter um exemplo com 3 ciclos limites para a classe P_5 na Seção 5.6. As funções y_6 e y_7 são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} y_6(t, z) = & \int_0^t \left(720F_6(s, z) + 720\frac{\partial F_5}{\partial x}(s, z)y_1(s, z) + 360\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z)^2 \right. \\ & + 360\frac{\partial F_4}{\partial x}(s, z)y_2(s, z) + 360\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_2(s, z) \\ & + 120\frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^3 + 120\frac{\partial F_3}{\partial x}(s, z)y_3(s, z) \\ & + 120\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_3(s, z) \\ & + 90\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z)^2 + 180\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_2(s, z) \\ & + 30\frac{\partial^4 F_2}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^4 + 30\frac{\partial F_2}{\partial x}(s, z)y_4(s, z) \\ & + 30\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_4(s, z) + 60\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_3(s, z) \\ & + 60\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^3 \odot y_2(s, z) + 90\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_2(s, z)^2 \odot y_1(s, z) \\ & + 6\frac{\partial^5 F_1}{\partial x^5}(s, z)y_1(s, z)^5 + 60\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z) \odot y_3(s, z) \\ & \left. + 6\frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z)y_5(s, z) \right) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_7(t, z) = & \int_0^t \left(5040F_7(s, z) + 5040\frac{\partial F_6}{\partial x}(s, z)y_1(s, z) \right. \\
& + 2520\frac{\partial^2 F_5}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z)^2 + 2520\frac{\partial F_5}{\partial x}(s, z)y_2(s, z) \\
& + 2520\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_2(s, z) + 840\frac{\partial^3 F_4}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^3 \\
& + 840\frac{\partial F_4}{\partial x}(s, z)y_3(s, z) + 840\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_3(s, z) \\
& + 630\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z)^2 + 1260\frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_2(s, z) \\
& + 210\frac{\partial^4 F_3}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^4 + 210\frac{\partial F_3}{\partial x}(s, z)y_4(s, z) \\
& + 210\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_4(s, z) \\
& + 420\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_3(s, z) \\
& + 420\frac{\partial^4 F_2}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^3 \odot y_2(s, z) \\
& + 630\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(s, z)y_2(s, z)^2 \odot y_1(s, z) + 42\frac{\partial^5 F_2}{\partial x^5}(s, z)y_1(s, z)^5 \\
& + 420\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z) \odot y_3(s, z) + 42\frac{\partial F_2}{\partial x}(s, z)y_5(s, z) \\
& + 630\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}(s, z)y_2(s, z)^2 \odot y_1(s, z) + 7\frac{\partial^6 F_1}{\partial x^6}(s, z)y_1(s, z)^6 \\
& + 105\frac{\partial^5 F_1}{\partial x^5}(s, z)y_1(s, z)^4 \odot y_2(s, z) \\
& + 140\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^3 \odot y_3(s, z) \\
& + 630\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_2(s, z)^2 \\
& + 105\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z)^2 \odot y_4(s, z) \\
& + 42\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_1(s, z) \odot y_5(s, z) \\
& + 420\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_1(s, z) \odot y_2(s, z) \odot y_3(s, z) \\
& + 105\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(s, z)y_2(s, z)^3 + 105\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_2(s, z) \odot y_4(s, z) \\
& \left. + 70\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(s, z)y_3(s, z)^2 + 7\frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z)y_6(s, z) \right) ds.
\end{aligned}$$

Apêndice B

Algoritmo no Mathematica

Exemplo com 3 ciclos limites para classe P_5

$$\mathbf{x_p} = \mathbf{P} = \mathbf{x1} (\mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 + 2 (\mathbf{b} + \mathbf{c} \mathbf{d}) \mathbf{x1} + (\mathbf{c}^2 + 1) \mathbf{x1}^2 - \mathbf{y1}^2) /. \mathbf{d} \rightarrow 0$$

$$\mathbf{y_p} = \mathbf{Q} = \mathbf{y1} (-\mathbf{b}^2 - \mathbf{d}^2 - 2 \mathbf{d} \mathbf{y1} + (\mathbf{c}^2 + 1) \mathbf{x1}^2 - \mathbf{y1}^2) /. \mathbf{d} \rightarrow 0$$

$$\mathbf{FullSimplify[Solve[\{P, Q\} == 0, \{x1, y1\}]]}$$

$$\left\{ \left\{ \mathbf{x1} \rightarrow 0, \mathbf{y1} \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow 0, \mathbf{x1} \rightarrow \frac{\mathbf{i} \mathbf{b}}{-\mathbf{i} + \mathbf{c}} \right\}, \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow 0, \mathbf{x1} \rightarrow -\frac{\mathbf{i} \mathbf{b}}{\mathbf{i} + \mathbf{c}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow -\mathbf{i} \mathbf{b}, \mathbf{x1} \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow \mathbf{i} \mathbf{b}, \mathbf{x1} \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow -\mathbf{b} \mathbf{c}, \mathbf{x1} \rightarrow -\mathbf{b} \right\}, \left\{ \mathbf{y1} \rightarrow \mathbf{b} \mathbf{c}, \mathbf{x1} \rightarrow -\mathbf{b} \right\} \right\}$$

$$\mathbf{Xp} = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{x_p} /. \{\mathbf{x1} \rightarrow \mathbf{X} - \mathbf{b}, \mathbf{y1} \rightarrow \mathbf{Y} - \mathbf{b} \mathbf{c}\}]$$

$$(\mathbf{b} - \mathbf{X}) \left(-\mathbf{X} \left(\mathbf{X} + \mathbf{c}^2 (-2 \mathbf{b} + \mathbf{X}) \right) - 2 \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^2 \right)$$

$$\mathbf{Yp} = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{y_p} /. \{\mathbf{x1} \rightarrow \mathbf{X} - \mathbf{b}, \mathbf{y1} \rightarrow \mathbf{Y} - \mathbf{b} \mathbf{c}\}]$$

$$(-\mathbf{b} \mathbf{c} + \mathbf{Y}) \left((1 + \mathbf{c}^2) \mathbf{X} (-2 \mathbf{b} + \mathbf{X}) + 2 \mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^2 \right)$$

$$\mathbf{Xp} = \mathbf{Xp} + \left(\mathbf{a0} + \mathbf{a1} \mathbf{X} + \mathbf{a3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{a6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{a2} \mathbf{Y} + \mathbf{a4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{a7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{a5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{a8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{a9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e} + \\ \left(\mathbf{b0} + \mathbf{b1} \mathbf{X} + \mathbf{b3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{b6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{b2} \mathbf{Y} + \mathbf{b4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{b7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{b5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{b8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{b9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^2 + \\ \left(\mathbf{c0} + \mathbf{c1} \mathbf{X} + \mathbf{c3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{c6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{c2} \mathbf{Y} + \mathbf{c4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{c7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{c5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{c8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{c9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^3 + \\ \left(\mathbf{d0} + \mathbf{d1} \mathbf{X} + \mathbf{d3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{d6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{d2} \mathbf{Y} + \mathbf{d4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{d7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{d5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{d8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{d9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^4 + \\ \left(\mathbf{e0} + \mathbf{e1} \mathbf{X} + \mathbf{e3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{e6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{e2} \mathbf{Y} + \mathbf{e4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{e7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{e5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{e8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{e9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^5 + \\ \left(\mathbf{i0} + \mathbf{i1} \mathbf{X} + \mathbf{i3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{i6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{i2} \mathbf{Y} + \mathbf{i4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{i7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{i5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{i8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{i9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^6 + \\ \left(\mathbf{j0} + \mathbf{j1} \mathbf{X} + \mathbf{j3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{j6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{j2} \mathbf{Y} + \mathbf{j4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{j7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{j5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{j8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{j9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^7 + \\ \left(\mathbf{k0} + \mathbf{k1} \mathbf{X} + \mathbf{k3} \mathbf{X}^2 + \mathbf{k6} \mathbf{X}^3 + \mathbf{k2} \mathbf{Y} + \mathbf{k4} \mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{k7} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{k5} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{k8} \mathbf{X} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{k9} \mathbf{Y}^3 \right) \mathbf{e}^8;$$

$$\begin{aligned}
Y_p = & Y_p + (\alpha_0 + X \alpha_1 + Y \alpha_2 + X^2 \alpha_3 + X Y \alpha_4 + Y^2 \alpha_5 + X^3 \alpha_6 + X^2 Y \alpha_7 + X Y^2 \alpha_8 + Y^3 \alpha_9) \epsilon + \\
& (\beta_0 + X \beta_1 + Y \beta_2 + X^2 \beta_3 + X Y \beta_4 + Y^2 \beta_5 + X^3 \beta_6 + X^2 Y \beta_7 + X Y^2 \beta_8 + Y^3 \beta_9) \epsilon^2 + \\
& (\gamma_0 + X \gamma_1 + Y \gamma_2 + X^2 \gamma_3 + X Y \gamma_4 + Y^2 \gamma_5 + X^3 \gamma_6 + X^2 Y \gamma_7 + X Y^2 \gamma_8 + Y^3 \gamma_9) \epsilon^3 + \\
& (\delta_0 + X \delta_1 + Y \delta_2 + X^2 \delta_3 + X Y \delta_4 + Y^2 \delta_5 + X^3 \delta_6 + X^2 Y \delta_7 + X Y^2 \delta_8 + Y^3 \delta_9) \epsilon^4 + \\
& (\phi_0 + X \phi_1 + Y \phi_2 + X^2 \phi_3 + X Y \phi_4 + Y^2 \phi_5 + X^3 \phi_6 + X^2 Y \phi_7 + X Y^2 \phi_8 + Y^3 \phi_9) \epsilon^5 + \\
& (\iota_0 + X \iota_1 + Y \iota_2 + X^2 \iota_3 + X Y \iota_4 + Y^2 \iota_5 + X^3 \iota_6 + X^2 Y \iota_7 + X Y^2 \iota_8 + Y^3 \iota_9) \epsilon^6 + \\
& (\varphi_0 + X \varphi_1 + Y \varphi_2 + X^2 \varphi_3 + X Y \varphi_4 + Y^2 \varphi_5 + X^3 \varphi_6 + X^2 Y \varphi_7 + X Y^2 \varphi_8 + Y^3 \varphi_9) \epsilon^7 + \\
& (\kappa_0 + X \kappa_1 + Y \kappa_2 + X^2 \kappa_3 + X Y \kappa_4 + Y^2 \kappa_5 + X^3 \kappa_6 + X^2 Y \kappa_7 + X Y^2 \kappa_8 + Y^3 \kappa_9) \epsilon^8 ;
\end{aligned}$$

$$w = \{X \rightarrow \epsilon x, Y \rightarrow \epsilon y\};$$

$$xp = \text{FullSimplify}[Xp / \epsilon /. w]$$

$$\begin{aligned}
& a_0 + 2 b^2 c (c x - y) + b (- (1 + 3 c^2) x^2 + 2 c x y + y^2) \epsilon + \\
& \epsilon (b_0 + a_1 x + a_2 y + (c_0 + x (b_1 + x (a_3 + x + c^2 x))) \epsilon + y (b_2 + a_4 x + a_5 y - x y) \epsilon + \\
& (d_0 + x (c_1 + x (b_3 + a_6 x)) + (c_2 + x (b_4 + a_7 x)) y + (b_5 + a_8 x) y^2 + a_9 y^3) \epsilon^2 + \\
& (e_0 + x (d_1 + x (c_3 + b_6 x)) + (d_2 + x (c_4 + b_7 x)) y + (c_5 + b_8 x) y^2 + b_9 y^3) \epsilon^3 + \\
& (i_0 + x (e_1 + x (d_3 + c_6 x)) + (e_2 + x (d_4 + c_7 x)) y + (d_5 + c_8 x) y^2 + c_9 y^3) \epsilon^4 + \\
& (j_0 + x (i_1 + x (e_3 + d_6 x)) + (i_2 + x (e_4 + d_7 x)) y + (e_5 + d_8 x) y^2 + d_9 y^3) \epsilon^5 + \\
& (k_0 + x (j_1 + x (i_3 + e_6 x)) + (j_2 + x (i_4 + e_7 x)) y + (i_5 + e_8 x) y^2 + e_9 y^3) \epsilon^6 + \\
& (x (k_1 + x (j_3 + i_6 x)) + (k_2 + x (j_4 + i_7 x)) y + (j_5 + i_8 x) y^2 + i_9 y^3) \epsilon^7 + \\
& (x^2 (k_3 + j_6 x) + x (k_4 + j_7 x) y + (k_5 + j_8 x) y^2 + j_9 y^3) \epsilon^8 + (k_6 x^3 + y (k_7 x^2 + k_8 x y + k_9 y^2)) \epsilon^9)
\end{aligned}$$

$$yp = \text{FullSimplify}[Yp / \epsilon /. w]$$

$$\begin{aligned}
& 2 b^2 c (x + c^2 x - c y) + \alpha_0 - b ((c + c^3) x^2 + 2 (1 + c^2) x y - 3 c y^2) \epsilon + \\
& \epsilon (y \alpha_2 + \beta_0 + x^3 \epsilon^2 (\alpha_6 + \epsilon (\beta_6 + \epsilon (\gamma_6 + \epsilon (\delta_6 + \epsilon (\phi_6 + \epsilon (\iota_6 + \epsilon (\epsilon \kappa_6 + \varphi_6))))))) + \\
& x^2 \epsilon (\alpha_3 + \epsilon (\beta_3 + \epsilon (\gamma_3 + \epsilon (\delta_3 + \epsilon (\phi_3 + \epsilon (\iota_3 + \epsilon (\epsilon \kappa_3 + \varphi_3)))))) + \\
& y (1 + c^2 + \epsilon (\alpha_7 + \epsilon (\beta_7 + \epsilon (\gamma_7 + \epsilon (\delta_7 + \epsilon (\phi_7 + \epsilon (\iota_7 + \epsilon (\epsilon \kappa_7 + \varphi_7))))))) + \\
& x (\alpha_1 + \epsilon (\beta_1 + \epsilon (\gamma_1 + \epsilon (\delta_1 + \epsilon (\phi_1 + \epsilon (\iota_1 + \epsilon (\epsilon \kappa_1 + \varphi_1)))))) + \\
& y (\alpha_4 + \epsilon (\beta_4 + \epsilon (\gamma_4 + \epsilon (\delta_4 + \epsilon (\phi_4 + \epsilon (\iota_4 + \epsilon (\epsilon \kappa_4 + \varphi_4)))))) + \\
& y^2 \epsilon (\alpha_8 + \epsilon (\beta_8 + \epsilon (\gamma_8 + \epsilon (\delta_8 + \epsilon (\phi_8 + \epsilon (\iota_8 + \epsilon (\epsilon \kappa_8 + \varphi_8)))))) + \\
& \epsilon (\gamma_0 + \epsilon (\delta_0 + \epsilon (\phi_0 + \epsilon (\iota_0 + \epsilon (\epsilon \kappa_0 + \varphi_0)))) + \\
& y (\beta_2 + \epsilon (\gamma_2 + \epsilon (\delta_2 + \epsilon (\phi_2 + \epsilon (\iota_2 + \epsilon (\epsilon \kappa_2 + \varphi_2)))) + \\
& y^2 (\alpha_5 + \epsilon (\beta_5 + \epsilon (\gamma_5 + \epsilon (\delta_5 + \epsilon (\phi_5 + \epsilon (\iota_5 + \epsilon (\epsilon \kappa_5 + \varphi_5)))))) + \\
& y^3 (-1 + \epsilon (\alpha_9 + \epsilon (\beta_9 + \epsilon (\gamma_9 + \epsilon (\delta_9 + \epsilon (\phi_9 + \epsilon (\iota_9 + \epsilon (\epsilon \kappa_9 + \varphi_9)))))))
\end{aligned}$$

$$a_0 = 0; \alpha_0 = 0;$$

$$\text{FullSimplify}[\{yp, xp\} /. \epsilon \rightarrow 0]$$

$$\{2 b^2 c (x + c^2 x - c y), 2 b^2 c (c x - y)\}$$

$$M = \{\{D[xp, x], D[xp, y]\}, \{D[yp, x], D[yp, y]\}\} /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0\}$$

$$\{\{2 b^2 c^2, -2 b^2 c\}, \{2 b^2 c (1 + c^2), -2 b^2 c^2\}\}$$

$$\text{Eigenvalues}[M]$$

$$\{-2 i b^2 c, 2 i b^2 c\}$$

$$J = \{\{0, 2 b^2 c\}, \{-2 b^2 c, 0\}\}$$

$$\{\{0, 2 b^2 c\}, \{-2 b^2 c, 0\}\}$$

$$\text{Eigenvalues}[J]$$

$$\{-2 i b^2 c, 2 i b^2 c\}$$

$$A = \{\{y_1, y_2\}, \{y_3, y_4\}\};$$

$$eq = A.M - J.A;$$

$$aa = \text{Part}[\text{Solve}[eq == 0, \text{Variables}[A]], 1];$$

A = A /. aa;

Factor[Det[A]]

$-y^3^2 - 2 c y^3 y^4 - y^4^2 - c^2 y^4^2$

y3 = 1; y4 = 0;

Factor[Det[A]]

-1

A = FullSimplify[A]

{{-c, 1}, {1, 0}}

FullSimplify[Inverse[A].{u, v}]

{v, u + c v}

bb = {x → v, y → u + c v};

{up, vp} = Collect[A.{xp, yp} /. bb, e, FullSimplify];

FullSimplify[({up, vp} /. e → 0) - J.{u, v}]

{0, 0}

up

$2 b^2 c v + (-b_0 c + 2 b c u^2 - a_1 c v - 2 b u v - 2 b c v^2 - a_2 c (u + c v) + v \alpha_1 + u \alpha_2 + c v \alpha_2 + \beta_0) \epsilon +$
 $(-u^3 - a_5 c^3 v^2 - c^2 v (b_2 + 2 a_5 u + v (a_4 - \alpha_5)) + u^2 \alpha_5 + v (v \alpha_3 + \beta_1) -$
 $c (c_0 + b_2 u + a_5 u^2 + v (b_1 + a_3 v - v \alpha_4 + u (a_4 + 2 u - 2 \alpha_5) - \beta_2)) + u (v (v + \alpha_4) + \beta_2) + \gamma_0) \epsilon^2 +$
 $(-c (d_0 + (b_5 + a_8 v) (u + c v)^2 + a_9 (u + c v)^3 + v (c_1 + v (b_3 + a_6 v)) + (u + c v) (c_2 + v (b_4 + a_7 v))) +$
 $v^3 \alpha_6 + v^2 (u + c v) \alpha_7 + v (u + c v)^2 \alpha_8 + (u + c v)^3 \alpha_9 + v^2 \beta_3 +$
 $v (u + c v) \beta_4 + (u + c v)^2 \beta_5 + v \gamma_1 + (u + c v) \gamma_2 + \delta_0) \epsilon^3 +$
 $\epsilon^{10} (-c (k_9 (u + c v)^3 + v (k_8 (u + c v)^2 + v (k_7 u + k_6 v + c k_7 v))) + v^3 \kappa_6 +$
 $v^2 (u + c v) \kappa_7 + v (u + c v)^2 \kappa_8 + (u + c v)^3 \kappa_9) + \epsilon^4$
 $(-c (e_0 + (c_5 + b_8 v) (u + c v)^2 + b_9 (u + c v)^3 + v (d_1 + v (c_3 + b_6 v)) + (u + c v) (d_2 + v (c_4 + b_7 v))) +$
 $v^3 \beta_6 + v^2 (u + c v) \beta_7 + v (u + c v)^2 \beta_8 + (u + c v)^3 \beta_9 + v^2 \gamma_3 +$
 $v (u + c v) \gamma_4 + (u + c v)^2 \gamma_5 + v \delta_1 + (u + c v) \delta_2 + \phi_0) + \epsilon^5$
 $(-c (i_0 + c_9 (u + c v)^3 + (u + c v)^2 (d_5 + c_8 v) + v (e_1 + v (d_3 + c_6 v)) + (u + c v) (e_2 + v (d_4 + c_7 v))) +$
 $v^3 \gamma_6 + v^2 (u + c v) \gamma_7 + v (u + c v)^2 \gamma_8 + (u + c v)^3 \gamma_9 + v^2 \delta_3 +$
 $v (u + c v) \delta_4 + (u + c v)^2 \delta_5 + \iota_0 + v \phi_1 + (u + c v) \phi_2) + \epsilon^6$
 $(-c (j_0 + d_9 (u + c v)^3 + (u + c v)^2 (e_5 + d_8 v) + v (i_1 + v (e_3 + d_6 v)) + (u + c v) (i_2 + v (e_4 + d_7 v))) +$
 $v^3 \delta_6 + v^2 (u + c v) \delta_7 + v (u + c v)^2 \delta_8 + (u + c v)^3 \delta_9 + v \iota_1 +$
 $(u + c v) \iota_2 + \phi_0 + v^2 \phi_3 + v (u + c v) \phi_4 + (u + c v)^2 \phi_5) +$
 $\epsilon^8 (-c (i_9 (u + c v)^3 + (u + c v)^2 (j_5 + i_8 v) + v (k_1 + v (j_3 + i_6 v)) + (u + c v) (k_2 + v (j_4 + i_7 v))) +$
 $v^3 \iota_6 + v^2 (u + c v) \iota_7 + v (u + c v)^2 \iota_8 + (u + c v)^3 \iota_9 + v \kappa_1 +$
 $(u + c v) \kappa_2 + v^2 \phi_3 + v (u + c v) \phi_4 + (u + c v)^2 \phi_5) + \epsilon^7$
 $(-c (k_0 + e_9 (u + c v)^3 + (u + c v)^2 (i_5 + e_8 v) + v (j_1 + v (i_3 + e_6 v)) + (u + c v) (j_2 + v (i_4 + e_7 v))) +$
 $v^2 \iota_3 + v (u + c v) \iota_4 + (u + c v)^2 \iota_5 + \kappa_0 + v \phi_1 + (u + c v) \phi_2 +$
 $v^3 \phi_6 + v^2 (u + c v) \phi_7 + v (u + c v)^2 \phi_8 + (u + c v)^3 \phi_9) +$
 $\epsilon^9 (-c (j_9 (u + c v)^3 + v^2 (k_3 + j_6 v) + v (u + c v) (k_4 + j_7 v) + (u + c v)^2 (k_5 + j_8 v)) + v^2 \kappa_3 +$
 $v (u + c v) \kappa_4 + (u + c v)^2 \kappa_5 + v^3 \phi_6 + v^2 (u + c v) \phi_7 + v (u + c v)^2 \phi_8 + (u + c v)^3 \phi_9)$

vp

$$\begin{aligned}
 & -2b^2cu + (b0 + u(a2 + bu) + (a1 + c(a2 + 4bu))v - bv^2)\epsilon + \\
 & (c0 + (u + cv)(b2 + a4v + (a5 - v)(u + cv)) + v(b1 + v(a3 + v + c^2v)))\epsilon^2 + \\
 & (d0 + (b5 + a8v)(u + cv)^2 + a9(u + cv)^3 + v(c1 + v(b3 + a6v)) + (u + cv)(c2 + v(b4 + a7v)))\epsilon^3 + \\
 & (e0 + (c5 + b8v)(u + cv)^2 + b9(u + cv)^3 + v(d1 + v(c3 + b6v)) + (u + cv)(d2 + v(c4 + b7v)))\epsilon^4 + \\
 & (i0 + c9(u + cv)^3 + (u + cv)^2(d5 + c8v) + v(e1 + v(d3 + c6v)) + (u + cv)(e2 + v(d4 + c7v)))\epsilon^5 + \\
 & (j0 + d9(u + cv)^3 + (u + cv)^2(e5 + d8v) + v(i1 + v(e3 + d6v)) + (u + cv)(i2 + v(e4 + d7v)))\epsilon^6 + \\
 & (k0 + e9(u + cv)^3 + (u + cv)^2(i5 + e8v) + v(j1 + v(i3 + e6v)) + (u + cv)(j2 + v(i4 + e7v)))\epsilon^7 + \\
 & (i9(u + cv)^3 + (u + cv)^2(j5 + i8v) + v(k1 + v(j3 + i6v)) + (u + cv)(k2 + v(j4 + i7v)))\epsilon^8 + \\
 & (j9(u + cv)^3 + v^2(k3 + j6v) + v(u + cv)(k4 + j7v) + (u + cv)^2(k5 + j8v))\epsilon^9 + \\
 & (k9(u + cv)^3 + v(k8(u + cv)^2 + v(k7u + k6v + ck7v)))\epsilon^{10}
 \end{aligned}$$

aa = {u → r Cos[θ], v → r Sin[θ]};

rp = Collect[(u up + v vp) / r /. aa, ε, Expand] /. (Cos[θ]^2 + Sin[θ]^2) → 1;

θp = Collect[(u vp - v up) / r^2 /. aa, ε, Factor] /. (Cos[θ]^2 + Sin[θ]^2) → 1;

Expand[θp];

θp /. ε → 0

$$-2b^2c$$

$$b0 = d0 = e0 = c0 = \gamma0 = \delta0 = \phi0 = \beta0 = \iota0 = i0 = j0 = k0 = \kappa0 = \varphi0 = 0;$$

θp;

Calculo da expressão rp/θp

eq1 = Collect[Normal[Series[rp / θp, {ε, 0, 7}]], ε];

FullSimplify[eq1 /. ε → 0]

0

F1 = Simplify[Coefficient[eq1, ε, 1]]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4b^2c}r(a1 + a2 + 4bcr\cos[\theta] + (-a1 - 2a2c + a2)\cos[2\theta] - 2br\sin[\theta] + \\
 & a2\sin[2\theta] - a1c\sin[2\theta] - a2c^2\sin[2\theta] + a1\sin[2\theta] + ca2\sin[2\theta])
 \end{aligned}$$

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/F1", {F1}];

```

f1 = Integrate[F1, {θ, 0, 2 π}]


$$-\frac{\pi r (a_1 + \alpha_2)}{2 b^2 c}$$


α2 = -a1;

f1

0

y1 = Simplify[Integrate[TrigReduce[F1] /. θ → s, {s, 0, θ}]]


$$-\frac{r \left( -2 b r + 4 b c r \sin[\theta] + (a_2 - 2 a_1 c - a_2 c^2 + \alpha_1) \sin[\theta]^2 - 2 \cos[\theta] (-b r + (a_1 + a_2 c) \sin[\theta]) \right)}{4 b^2 c}$$


F2 = TrigReduce[Coefficient[eq1, ε, 2]];

Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/F2", {F2}];

f2 = Integrate[TrigReduce[D[F1, r] y1 + F2], {θ, 0, 2 π}];

Collect[f2, r, Factor]


$$-\frac{\pi r (b_1 + \beta_2)}{2 b^2 c}$$


b1 = -β2;

Simplify[f2]

0

t = TrigReduce[2 D[F1, r] y1 + 2 F2]

t = Collect[t, {Sin[8 θ], Sin[7 θ], Sin[6 θ], Sin[5 θ], Sin[4 θ], Sin[3 θ], Sin[2 θ], Sin[θ],
Cos[8 θ], Cos[7 θ], Cos[6 θ], Cos[5 θ], Cos[4 θ], Cos[3 θ], Cos[2 θ], Cos[θ]}];

y2 = Integrate[t /. θ → s, {s, 0, θ}];

Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y2", {y2}];

F3 = Coefficient[eq1, ε, 3];

Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/F3", {F3}];

intf301 = TrigReduce[F3];

intf302 = TrigReduce[D[F2, r] y1];

intf303 = TrigReduce[(1 / 2) D[D[F1, r], r] y1^2];

intf304 = TrigReduce[(1 / 2) D[F1, r] y2];

f301 = Integrate[intf301, {θ, 0, 2 π}];

f302 = Integrate[intf302, {θ, 0, 2 π}];

f303 = Integrate[intf303, {θ, 0, 2 π}];

f304 = Integrate[intf304, {θ, 0, 2 π}];

ff3 = Collect[f301 + f302 + f303 + f304, r, Factor]


$$\frac{1}{8 b^4 c^3} \pi r^3 \left( 2 a_1 - 2 a_3 b c^2 - 2 a_5 b c^2 - 3 a_6 b^2 c^2 - a_8 b^2 c^2 - \right.$$


$$2 a_2 c^3 - 2 a_4 b c^3 - 2 a_7 b^2 c^3 - 2 a_5 b c^4 - a_8 b^2 c^4 - 2 c \alpha_1 - 2 b c \alpha_3 - 2 b c^2 \alpha_4 -$$


$$\left. 2 b c \alpha_5 - 2 b c^3 \alpha_5 - b^2 c^2 \alpha_7 - 2 b^2 c^3 \alpha_8 - 3 b^2 c^2 \alpha_9 - 3 b^2 c^4 \alpha_9 \right) - \frac{\pi r (c_1 + \gamma_2)}{2 b^2 c}$$


```

```

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/ff3", {ff3}];

Solve[
  (2 a1 - 2 a3 b c^2 - 2 a5 b c^2 - 3 a6 b^2 c^2 - a8 b^2 c^2 - 2 a2 c^3 - 2 a4 b c^3 - 2 a7 b^2 c^3 - 2 a5 b c^4 - a8 b^2 c^4 - 2 c
    α1 - 2 b c α3 - 2 b c^2 α4 - 2 b c α5 - 2 b c^3 α5 - b^2 c^2 α7 - 2 b^2 c^3 α8 - 3 b^2 c^2 α9 - 3 b^2 c^4 α9) == 0, a4]

{{a4 →  $\frac{1}{2 b c^3} (2 a1 - 2 a3 b c^2 - 2 a5 b c^2 - 3 a6 b^2 c^2 - a8 b^2 c^2 - 2 a2 c^3 - 2 a7 b^2 c^3 - 2 a5 b c^4 - a8 b^2 c^4 -$ 
  2 c α1 - 2 b c α3 - 2 b c^2 α4 - 2 b c α5 - 2 b c^3 α5 - b^2 c^2 α7 - 2 b^2 c^3 α8 - 3 b^2 c^2 α9 - 3 b^2 c^4 α9)}}

{{a4 →  $\frac{1}{2 b c^3} (2 a1 - 2 a3 b c^2 - 2 a5 b c^2 - 3 a6 b^2 c^2 - a8 b^2 c^2 - 2 a2 c^3 - 2 a7 b^2 c^3 - 2 a5 b c^4 - a8 b^2 c^4 -$ 
  2 c α1 - 2 b c α3 - 2 b c^2 α4 - 2 b c α5 - 2 b c^3 α5 - b^2 c^2 α7 - 2 b^2 c^3 α8 - 3 b^2 c^2 α9 - 3 b^2 c^4 α9)}}

a4 =  $\frac{1}{2 b c^3} (2 a1 - 2 a3 b c^2 - 2 a5 b c^2 - 3 a6 b^2 c^2 - a8 b^2 c^2 - 2 a2 c^3 - 2 a7 b^2 c^3 - 2 a5 b c^4 - a8 b^2 c^4 -$ 
  2 c α1 - 2 b c α3 - 2 b c^2 α4 - 2 b c α5 - 2 b c^3 α5 - b^2 c^2 α7 - 2 b^2 c^3 α8 - 3 b^2 c^2 α9 - 3 b^2 c^4 α9);

c1 = -γ2;

FullSimplify[ff3]

0

tt = intf301 /. θ → s;

A1 = Integrate[tt, {s, 0, θ}];

A1 = TrigReduce[A1];

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/A1", {A1}];

A2 = Integrate[intf302 /. θ → s, {s, 0, θ}]

A2 = TrigReduce[A2];

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/A2", {A2}];

A3 = Integrate[intf303 /. θ → s, {s, 0, θ}];

A3 = TrigReduce[A3];

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/A3", {A3}];

A4 = Integrate[intf304 /. θ → s, {s, 0, θ}]

A4 = TrigReduce[A4];

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/A4", {A4}];

y3 = 6 (A1 + A2 + A3 + A4)

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y3", {y3}];

F4 = Coefficient[eq1, e, 4];

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/F4", {F4}];

```

```

intf401 = TrigReduce[F4];
intf402 = TrigReduce[D[F3, r] y1];
intf403 = TrigReduce[(1 / 2) D[D[F2, r], r] y1^2];
intf404 = TrigReduce[(1 / 2) D[F2, r] y2];
intf405 = TrigReduce[(1 / 2) D[D[F1, r], r] y1 y2];
intf406 = TrigReduce[(1 / 6) D[D[D[F1, r], r], r] y1^3];
intf407 = TrigReduce[(1 / 6) D[F1, r] y3]

f401 = Integrate[intf401, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f401", {f401}];
f402 = Integrate[intf402, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f402", {f402}];
f403 = Integrate[intf403, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f403", {f403}];
f404 = Integrate[intf404, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f404", {f404}];
f405 = Integrate[intf405, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f405", {f405}];
f406 = Integrate[intf406, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f406", {f406}];
f407 = Integrate[intf407, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f407", {f407}];

f4 = f401 + f402 + f403 + f404 + f405 + f406 + f407;
ff4 = Collect[f4, r]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/ff4", {ff4}];
FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 0]]

FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 1]]

FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 2]]

FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 3]]

FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 4]]
FullSimplify[Coefficient[ff4, r, 5]]

```

$$d1 = -\delta 2;$$

$$\beta 3 = \frac{1}{16 b^3 c^5} \left(\begin{aligned} & -4 a^2 - 2 a^2 c - 12 a^2 c^2 + 4 a^2 a^3 b c^2 + 4 a^2 a^5 b c^2 + 12 a^2 a^6 b^2 c^2 + 4 a^2 a^8 b^2 c^2 - 2 a^2 a^2 c^3 + \\ & 2 a^2 a^3 b c^3 + 2 a^2 a^5 b c^3 + 3 a^2 a^6 b^2 c^3 + 8 a^2 a^7 b^2 c^3 + a^2 a^8 b^2 c^3 - 2 a^2 c^4 + 4 a^2 a^3 b c^4 + \\ & 24 a^2 a^5 b c^4 + 24 a^2 a^6 b^2 c^4 + 2 a^2 a^7 b^2 c^4 + 12 a^2 a^8 b^2 c^4 - 6 a^2 a^6 b^3 c^4 - 6 a^2 a^5 a^6 b^3 c^4 - \\ & 2 a^2 a^8 b^3 c^4 - 2 a^2 a^5 a^8 b^3 c^4 - 9 a^2 b^4 c^4 - 6 a^2 a^6 b^4 c^4 - a^2 b^4 c^4 + 10 a^2 a^3 b c^5 + 4 a^2 a^5 b c^5 + \\ & 21 a^2 a^6 b^2 c^5 + 8 a^2 a^7 b^2 c^5 + 4 a^2 a^8 b^2 c^5 - 4 a^2 a^7 b^3 c^5 - 4 a^2 a^5 a^7 b^3 c^5 - 12 a^2 a^6 a^7 b^4 c^5 - \\ & 4 a^2 a^8 b^4 c^5 - 2 a^2 c^6 - 8 a^2 a^3 b c^6 + 28 a^2 a^5 b c^6 + 12 a^2 a^6 b^2 c^6 + 6 a^2 a^7 b^2 c^6 + 12 a^2 a^8 b^2 c^6 + \\ & 6 a^2 a^6 b^3 c^6 - 12 a^2 a^5 a^6 b^3 c^6 - 6 a^2 a^8 b^3 c^6 - 9 a^2 b^4 c^6 - 4 a^2 a^7 b^4 c^6 - 12 a^2 a^6 a^7 b^4 c^6 - 3 a^2 b^4 c^6 - \\ & 16 b^3 b^3 c^6 - 16 b^3 b^5 c^6 - 24 b^4 b^6 c^6 - 8 b^4 b^8 c^6 - 8 a^2 a^2 c^7 + 2 a^2 a^5 b c^7 + 6 a^2 a^6 b^2 c^7 + \\ & 8 a^2 a^7 b^2 c^7 + 5 a^2 a^8 b^2 c^7 + 4 a^2 a^3 a^7 b^3 c^7 - 8 a^2 a^5 a^7 b^3 c^7 - 12 a^2 a^6 a^7 b^4 c^7 - 8 a^2 a^8 a^7 b^4 c^7 - \\ & 16 b^2 b^2 c^7 - 16 b^3 b^4 c^7 - 16 b^4 b^7 c^7 + 8 a^2 a^5 b c^8 + 4 a^2 a^7 b^2 c^8 + 4 a^2 a^8 b^2 c^8 - 6 a^2 a^6 b^3 c^8 + \\ & 2 a^2 a^8 b^3 c^8 - 6 a^2 a^5 a^8 b^3 c^8 - 4 a^2 b^4 c^8 - 6 a^2 a^6 b^4 c^8 - 3 a^2 b^4 c^8 - 16 b^3 b^5 c^8 - 8 b^4 b^8 c^8 + \\ & 2 a^2 a^8 b^2 c^9 - 4 a^2 a^5 a^7 b^3 c^9 - 4 a^2 a^8 b^4 c^9 - 2 a^2 a^5 a^8 b^3 c^{10} - a^2 b^4 c^{10} + 6 a^2 c^4 a^2 + 2 a^2 c^2 a^2 + \\ & 8 a^2 c^3 a^2 - 2 a^2 b c^3 a^2 - 2 a^2 b c^3 a^2 - 9 a^2 b^2 c^3 a^2 - 3 a^2 b^2 c^3 a^2 + 4 a^2 c^4 a^2 - 6 a^2 b^2 c^4 a^2 - \\ & 8 a^2 c^5 a^2 + 8 a^2 b c^5 a^2 - 18 a^2 b c^5 a^2 - 6 a^2 b^2 c^5 a^2 - 9 a^2 b^2 c^5 a^2 + 8 a^2 c^6 a^2 - 4 a^2 b^2 c^6 a^2 - \\ & 8 a^2 b c^7 a^2 - 2 a^2 b^2 c^7 a^2 - 2 c^2 a^2 + 8 c^4 a^2 + 8 a^2 b c^3 a^2 + 2 a^2 b c^3 a^2 + 20 a^2 b c^3 a^2 - \\ & 4 a^2 b^2 c^3 a^2 - 4 a^2 b^2 c^3 a^2 - 12 a^2 b^3 c^3 a^2 - 4 a^2 b^3 c^3 a^2 + 14 a^2 b c^4 a^2 - 8 a^2 b^3 c^4 a^2 + \\ & 8 a^2 b c^5 a^2 + 8 a^2 b^2 c^5 a^2 - 12 a^2 b^2 c^5 a^2 - 18 a^2 b^3 c^5 a^2 - 10 a^2 b^3 c^5 a^2 + 8 a^2 b^3 c^5 a^2 - \\ & 12 a^2 b^3 c^6 a^2 - 8 a^2 b^2 c^7 a^2 - 6 a^2 b^3 c^7 a^2 - 6 b^2 c^2 a^2 - 8 b^2 c^4 a^2 - 8 b^2 c^4 a^2 + 8 a^2 b c^2 a^2 + \\ & 2 a^2 b c^3 a^2 + 4 a^2 b c^4 a^2 - 4 a^2 b^2 c^4 a^2 - 4 a^2 b^2 c^4 a^2 - 12 a^2 b^3 c^4 a^2 - 4 a^2 b^3 c^4 a^2 + \\ & 6 a^2 b c^5 a^2 - 8 a^2 b^3 c^5 a^2 + 8 a^2 b^2 c^6 a^2 - 12 a^2 b^2 c^6 a^2 - 12 a^2 b^3 c^6 a^2 - 8 a^2 b^3 c^6 a^2 + \\ & 8 a^2 b c^7 a^2 - 8 a^2 b^3 c^7 a^2 - 8 a^2 b^2 c^8 a^2 - 4 a^2 b^3 c^8 a^2 - 6 b^2 c^3 a^2 + 8 b^2 c^5 a^2 - \\ & 8 b^2 c^3 a^2 - 8 b^2 c^5 a^2 - 4 b^2 c^4 a^2 + 8 a^2 b c^5 a^2 + 2 a^2 b c^2 a^2 + 20 a^2 b c^3 a^2 - 4 a^2 b^2 c^3 a^2 - \\ & 4 a^2 b^2 c^3 a^2 - 12 a^2 b^3 c^3 a^2 - 4 a^2 b^3 c^3 a^2 + 4 a^2 b c^4 a^2 - 8 a^2 b^3 c^4 a^2 + 4 a^2 b c^5 a^2 + \\ & 4 a^2 b^2 c^5 a^2 - 16 a^2 b^2 c^5 a^2 - 18 a^2 b^3 c^5 a^2 - 10 a^2 b^3 c^5 a^2 + 10 a^2 b c^6 a^2 - 12 a^2 b^3 c^6 a^2 - \\ & 8 a^2 b c^7 a^2 + 8 a^2 b^2 c^7 a^2 - 20 a^2 b^2 c^7 a^2 - 6 a^2 b^3 c^7 a^2 - 8 a^2 b^3 c^7 a^2 + 8 a^2 b c^8 a^2 - \\ & 4 a^2 b^3 c^8 a^2 - 8 a^2 b^2 c^9 a^2 - 2 a^2 b^3 c^9 a^2 - 6 b^2 c^2 a^2 - 10 b^2 c^4 a^2 + 16 b^2 c^6 a^2 - \\ & 8 b^2 c^2 a^2 - 16 b^2 c^4 a^2 - 8 b^2 c^3 a^2 - 8 b^2 c^5 a^2 + 8 b^2 c^7 a^2 - 4 b^2 c^2 a^2 - \\ & 8 b^2 c^4 a^2 + 4 b^2 c^6 a^2 + 8 b^2 c^8 a^2 + 4 a^2 b^2 c^2 a^2 + a^2 b^2 c^3 a^2 + 8 a^2 b^2 c^4 a^2 - 2 a^2 b^3 c^4 a^2 - \\ & 2 a^2 b^3 c^4 a^2 - 6 a^2 b^4 c^4 a^2 - 2 a^2 b^4 c^4 a^2 + 7 a^2 b^2 c^5 a^2 - 4 a^2 b^4 c^5 a^2 + 4 a^2 b^2 c^6 a^2 + \\ & 2 a^2 b^3 c^6 a^2 - 4 a^2 b^3 c^6 a^2 - 6 a^2 b^4 c^6 a^2 - 4 a^2 b^4 c^6 a^2 + 2 a^2 b^2 c^7 a^2 - 4 a^2 b^4 c^7 a^2 - \\ & 2 a^2 b^3 c^8 a^2 - 2 a^2 b^4 c^8 a^2 - 3 b^2 c^3 a^2 - 2 b^2 c^5 a^2 - 4 b^3 c^3 a^2 - 6 b^3 c^5 a^2 - \\ & 4 b^3 c^4 a^2 - 4 b^3 c^6 a^2 - 4 b^3 c^3 a^2 - 6 b^3 c^5 a^2 - 2 b^3 c^7 a^2 - b^4 c^4 a^2 - b^4 c^6 a^2 + \\ & 8 a^2 b^2 c^3 a^2 + 2 a^2 b^2 c^4 a^2 + 8 a^2 b^2 c^5 a^2 - 4 a^2 b^3 c^5 a^2 - 4 a^2 b^3 c^5 a^2 - 12 a^2 b^4 c^5 a^2 - \\ & 4 a^2 b^4 c^5 a^2 + 6 a^2 b^2 c^6 a^2 - 8 a^2 b^4 c^6 a^2 + 8 a^2 b^2 c^7 a^2 + 4 a^2 b^3 c^7 a^2 - 8 a^2 b^3 c^7 a^2 - \\ & 12 a^2 b^4 c^7 a^2 - 8 a^2 b^4 c^7 a^2 + 4 a^2 b^2 c^8 a^2 - 8 a^2 b^4 c^8 a^2 - 4 a^2 b^3 c^9 a^2 - 4 a^2 b^4 c^9 a^2 - \\ & 6 b^2 c^4 a^2 - 4 b^2 c^6 a^2 - 8 b^3 c^4 a^2 - 12 b^3 c^6 a^2 - 8 b^3 c^5 a^2 - 8 b^3 c^7 a^2 - 8 b^3 c^4 a^2 - \\ & 8 b^3 c^4 a^2 - 12 b^3 c^6 a^2 - 4 b^3 c^8 a^2 - 4 b^4 c^5 a^2 - 4 b^4 c^7 a^2 - 4 b^4 c^6 a^2 - 4 b^4 c^8 a^2 + \\ & 12 a^2 b^2 c^2 a^2 + 3 a^2 b^2 c^3 a^2 + 36 a^2 b^2 c^4 a^2 - 6 a^2 b^3 c^4 a^2 - 6 a^2 b^3 c^4 a^2 - 18 a^2 b^4 c^4 a^2 - \\ & 6 a^2 b^4 c^4 a^2 + 12 a^2 b^2 c^5 a^2 - 12 a^2 b^4 c^5 a^2 + 36 a^2 b^2 c^6 a^2 - 18 a^2 b^3 c^6 a^2 - 36 a^2 b^4 c^6 a^2 - \\ & 18 a^2 b^4 c^6 a^2 + 15 a^2 b^2 c^7 a^2 - 24 a^2 b^4 c^7 a^2 + 12 a^2 b^2 c^8 a^2 + 6 a^2 b^3 c^8 a^2 - 18 a^2 b^3 c^8 a^2 - \\ & 18 a^2 b^4 c^8 a^2 - 18 a^2 b^4 c^8 a^2 + 6 a^2 b^2 c^9 a^2 - 12 a^2 b^4 c^9 a^2 - 6 a^2 b^3 c^{10} a^2 - 6 a^2 b^4 c^{10} a^2 - \\ & 9 b^2 c^3 a^2 - 27 b^2 c^5 a^2 - 6 b^2 c^7 a^2 - 12 b^3 c^3 a^2 - 30 b^3 c^5 a^2 - 18 b^3 c^7 a^2 - \\ & 12 b^3 c^4 a^2 - 24 b^3 c^6 a^2 - 12 b^3 c^8 a^2 - 12 b^3 c^3 a^2 - 30 b^3 c^5 a^2 - 24 b^3 c^7 a^2 - \\ & 6 b^3 c^9 a^2 - 6 b^4 c^4 a^2 - 12 b^4 c^6 a^2 - 6 b^4 c^8 a^2 - 12 b^4 c^5 a^2 - 24 b^4 c^7 a^2 - \\ & 12 b^4 c^9 a^2 - 9 b^4 c^4 a^2 - 27 b^4 c^6 a^2 - 27 b^4 c^8 a^2 - 9 b^4 c^{10} a^2 - 16 b^2 c^5 a^2 - 16 b^2 c^4 a^2 - \\ & 16 b^3 c^6 a^2 - 16 b^3 c^5 a^2 - 16 b^3 c^7 a^2 - 8 b^4 c^6 a^2 - 16 b^4 c^7 a^2 - 24 b^4 c^6 a^2 - 24 b^4 c^8 a^2 \end{aligned} \right);$$

FullSimplify[ff4]

0

```

B1 = Integrate[intf401 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B1", {B1}];

B2 = Integrate[intf402 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B2", {B2}];

B3 = Integrate[intf403 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B3", {B3}];

B4 = Integrate[intf404 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B4", {B4}];

B5 = Integrate[intf405 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B5", {B5}];

B6 = Integrate[intf406 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B6", {B6}];

B7 = Integrate[intf407 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ }]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/B7", {B7}];

y4 = Collect[24 (B1 + B2 + B3 + B4 + B5 + B6 + B7), r]
Get["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y4", {y4}];

F5 = Coefficient[eq1,  $\epsilon$ , 5]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/F5", {F5}];

intf501 = TrigReduce[F5]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf501", {intf501}];

intf502 = TrigReduce[D[F4, r] y1]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf502", {intf502}];

intf503 = TrigReduce[(1 / 2) D[D[F3, r], r] y1^2]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf503", {intf503}]

```

```

intf504 = TrigReduce[(1 / 2) D[F3, r] y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf504", {intf504}]

intf505 = TrigReduce[(1 / 2) D[D[F2, r], r] y1 y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf505", {intf505}]

intf506 = TrigReduce[(1 / 6) D[D[D[F2, r], r], r] y1^3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf506", {intf506}]

intf507 = TrigReduce[(1 / 6) D[F2, r] y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf507", {intf507}]

intf508 = TrigReduce[(1 / 6) D[D[F1, r], r] y1 y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf508", {intf508}]

intf509 = TrigReduce[(1 / 8) D[D[F1, r], r] y2^2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf509", {intf509}]

intf5010 = TrigReduce[(1 / 4) D[D[D[F1, r], r], r] y1^2 y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf5010", {intf5010}]

intf5011 = TrigReduce[(1 / 24) D[D[D[D[F1, r], r], r], r] y1^4]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf5011", {intf5011}]

intf5012 = TrigReduce[(1 / 24) D[F1, r] y4]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf5012", {intf5012}]

f501 = Integrate[intf501, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f501", {f501}]

f502 = Integrate[intf502, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f502", {f502}]

f503 = Integrate[intf503, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f503", {f503}]

f504 = Integrate[intf504, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f504", {f504}]

f505 = Integrate[intf505, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f505", {f505}]

f506 = Integrate[intf506, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f506", {f506}]

f507 = Integrate[intf507, {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f507", {f507}]

```

```

f508 = Integrate[intf508, {θ, 0, 2 π}]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f508", {f508}]

f509 = Integrate[intf509, {θ, 0, 2 π}]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f509", {f509}]

f5010 = Integrate[intf5010, {θ, 0, 2 π}]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f5010", {f5010}]

f5011 = Integrate[intf5011, {θ, 0, 2 π}]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f5011", {f5011}]

f5012 = Integrate[intf5012, {θ, 0, 2 π}]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/integraais save p5_d=0/f5012", {f5012}]

f5 = f501 + f502 + f503 + f504 + f505 + f506 + f507 + f508 + f509 + f5010 + f5011 + f5012;

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/ff5", {ff5}]

C0 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 0]]
C1 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 1]]
C2 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 2]]
C3 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 3]]

Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/integraais save p5_d=0/C3", {C3}]

C4 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 4]]
C5 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 5]]
C6 = FullSimplify[Coefficient[ff5, r, 6]]

Solve[C1 == 0, e1]

e1 = -φ2

Solve[C3 == 0, b2]

b2 = ...

Solve[C5 == 0, α9]


$$\alpha_9 = \frac{2 a_9 - a_6 c + a_8 c + 4 a_9 c^2 + a_8 c^3 + 2 a_9 c^4 + 2 a_6 + c \alpha_7}{c (1 + c^2)}$$


FullSimplify[ff5]

0

2 ciclos limites

```

```

c5 = c6 = c7 = c8 = d2 = d3 = d4 = d5 = d6 = d7 = d8 = d4 = d5 = d7 = d8 = d9
=  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_7 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7$ 
=  $\alpha_8 = \beta_7 = \beta_8 = c_2 = c_3 = c_4 = \gamma_8 = \gamma_9 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = a_3 = a_5 = b_5 = b_6 = b_7$ 
=  $a_7 = b_3 = \beta_6 = a_1 = a_8 = a_2 = 0$ 

0

y501 = Integrate[intf501 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y501", {y501}]

y502 = Integrate[intf502 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y502", {y502}]

y503 = Integrate[intf503 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y503", {y503}]

y504 = Integrate[intf504 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y504", {y504}]

y505 = Integrate[intf505 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y505", {y505}]

y506 = Integrate[intf506 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y506", {y506}]

y507 = Integrate[intf507 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y507", {y507}]

y508 = Integrate[intf508 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y508", {y508}]

y509 = Integrate[intf509 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y509", {y509}]

y510 = Integrate[intf5010 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y510", {y510}]

y511 = Integrate[intf5011 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y511", {y511}]

y512 = Integrate[intf5012 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y512", {y512}]

y5 = Collect[120 (y501 + y502 + y503 + y504 + y505 + y506 + y507 + y508 + y509 + y510 + y511 + y512), r]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y5", {y5}]

F6 = Coefficient[eq1,  $\epsilon$ , 6]

intf601 = TrigReduce[F6]

Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf601", {intf601}];
intf602 = TrigReduce[D[F5, r] y1]
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf602", {intf602}]

```

```

intf603 = TrigReduce[D[D[F4, r], r] y1^2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf603", {intf603}]

intf604 = TrigReduce[D[F4, r] y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf604", {intf604}]

intf605 = TrigReduce[D[D[F3, r], r] y1 y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf605", {intf605}]

intf606 = TrigReduce[D[D[D[F3, r], r], r] y1^3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf606", {intf606}]

intf607 = TrigReduce[D[F3, r] y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf607", {intf607}]

intf608 = TrigReduce[D[D[F2, r], r] y1 y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf608", {intf608}]

intf609 = TrigReduce[D[D[F2, r], r] y2^2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf609", {intf609}]

intf6010 = TrigReduce[D[D[D[F2, r], r], r] y1^2 y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6010", {intf6010}]

intf6011 = TrigReduce[D[D[D[D[F2, r], r], r], r] y1^4]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6011", {intf6011}]

intf6012 = TrigReduce[D[F2, r] y4]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6012", {intf6012}]

intf6013 = TrigReduce[D[D[F1, r], r] y1 y4]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6013", {intf6013}]

intf6014 = TrigReduce[D[D[D[F1, r], r], r] y1^2 y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6014", {intf6014}]

intf6015 = TrigReduce[D[D[D[D[F1, r], r], r], r] y1^3 y2]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6015", {intf6015}]

intf6016 = TrigReduce[D[D[D[F1, r], r], r] y2^2 y1]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6016", {intf6016}]

intf6017 = TrigReduce[D[D[D[D[D[F1, r], r], r], r], r] y1^5]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6017", {intf6017}]

intf6018 = TrigReduce[D[D[F1, r], r] y2 y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6018", {intf6018}]

```

```

intf6018 = TrigReduce[D[D[F1, r], r] y2 y3]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6018", {intf6018}]

intf6019 = TrigReduce[D[F1, r] y5]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/intf6019", {intf6019}]


y601 = Integrate[intf601 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y601", {y601}]

y602 = Integrate[intf602 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y602", {y602}]

y603 = Integrate[intf603 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y603", {y603}]

y604 = Integrate[intf604 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y604", {y604}]

y605 = Integrate[intf605 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y605", {y605}]

y606 = Integrate[intf606 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y606", {y606}]

y607 = Integrate[intf607 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y607", {y607}]

y608 = Integrate[intf608 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y608", {y608}]

y609 = Integrate[intf609 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y609", {y609}]

y6010 = Integrate[intf6010 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6010", {y6010}]

y6011 = Integrate[intf6011 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6011", {y6011}]

y6012 = Integrate[intf6012 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6012", {y6012}]

y6013 = Integrate[intf6013 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6013", {y6013}]

```

```

y6014 = Integrate[intf6014 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6014", {y6014}]

y6015 = Integrate[intf6015 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6015", {y6015}]

y6016 = Integrate[intf6016 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6016", {y6016}]

y6017 = Integrate[intf6017 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6017", {y6017}]

y6018 = Integrate[intf6018 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6018", {y6018}]

y6019 = Integrate[intf6019 /.  $\theta \rightarrow s$ , {s, 0,  $\theta$ ]];
Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6019", {y6019}]

f6 = (y601 + y602 + y603 / 2 + y604 / 2 + y605 / 2 + y606 / 6 + y607 / 6 +
      y608 / 6 + y609 / 8 + y6010 / 4 + y6011 / 24 + y6012 / 24 + y6013 / 24 + y6014 / 12 +
      y6015 / 12 + y6016 / 8 + y6017 / 120 + y6018 / 12 + y6019 / 120) /.  $\theta \rightarrow 2\pi$ 
ff6aux = Collect[Expand[f6], b2]

Coefficient[ff6aux, b2, 0]

Coefficient[ff6aux, b2, 1]

Coefficient[ff6aux, b2, 2]

Coefficient[ff6aux, b2, 3]

ff6 = ff6aux

Save["/Users/brunodomiciano/lopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/ff6", {ff6}]

C0 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 0]]
C1 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 1]]
C2 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 2]]
C3 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 3]]
C4 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 4]]
C5 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 5]]
C6 = FullSimplify[Coefficient[ff6, r, 6]]

Variables[C1]

Variables[C3]

Variables[C5]

```

```

bbb = {b → 2, c → 5, a → 3, r → 0.1, a1 → 1, a2 → 1, a3 → 1, a5 → 1, a6 → 1, a7 → 1, a8 → 1, a9 → 1,
b3 → 1, b4 → 1, b5 → 1, b6 → 1, b7 → 1, b8 → 1, b9 → 1, c2 → 1, c3 → 1, c4 → 1, c5 → 1, c6 → 1,
c7 → 1, c8 → 1, c9 → 1, d2 → 1, d3 → 1, d4 → 1, d5 → 1, d6 → 1, d7 → 1, d8 → 1, d9 → 1, e2 → 1,
e3 → 1, e4 → 1, e5 → 1, e6 → 1, e7 → 1, e8 → 1, e9 → 1, α1 → 1, α3 → 1, α4 → 1, α5 → 1, α6 → 1,
α7 → 1, α8 → 1, β0 → 1, β1 → 1, β2 → 1, β4 → 1, β5 → 1, β6 → 1, β7 → 1, β8 → 1, β9 → 1,
γ0 → 1, γ1 → 1, γ2 → 1, γ3 → 1, γ4 → 1, γ5 → 1, γ6 → 1, γ7 → 1, γ8 → 1, γ9 → 1,
δ0 → 1, δ1 → 1, δ2 → 1, δ3 → 1, δ4 → 1, δ5 → 1, δ6 → 1, δ7 → 1, δ8 → 1, δ9 → 1,
φ0 → 1, φ1 → 1, φ2 → 1, φ3 → 1, φ4 → 1, φ5 → 1, φ6 → 1, φ7 → 1, φ8 → 1, φ9 → 1,
ι0 → 1, ι1 → 1, ι2 → 1, ι3 → 1, ι4 → 1, ι5 → 1, ι6 → 1, ι7 → 1, ι8 → 1, ι9 → 1,
j0 → 1, j1 → 1, j2 → 1, j3 → 1, j4 → 1, j5 → 1, j6 → 1, j7 → 1, j8 → 1, j9 → 1,
ι0 → 1, ι1 → 1, ι2 → 1, ι3 → 1, ι4 → 1, ι5 → 1, ι6 → 1, ι7 → 1, ι8 → 1, ι9 → 1,
φ0 → 1, φ1 → 1, φ2 → 1, φ3 → 1, φ4 → 1, φ5 → 1, φ6 → 1, φ7 → 1, φ8 → 1, φ9 → 1};

```

```
Solve[C1 == 0, i1]
```

```
i1 = -ι2
```

```
a9 = 0
```

```
β9 = 0
```

```
Solve[C3 == 0, b4]
```

$$b4 = -\frac{b b8 c (1 + c^2)}{2 (1 + 2 c^2)}$$

```
FullSimplify[Solve[C5 == 0, b9]]
```

$$b9 = -\frac{b8 c}{2 (1 + c^2)}$$

```
FullSimplify[ff6]
```

```
0
```

```

y6 = 720 (y601 + y602 + y603 / 2 + y604 / 2 + y605 / 2 + y606 / 6 +
y607 / 6 + y608 / 6 + y609 / 8 + y6010 / 4 + y6011 / 24 + y6012 / 24 + y6013 / 24 +
y6014 / 12 + y6015 / 12 + y6016 / 8 + y6017 / 120 + y6018 / 12 + y6019 / 120);

```

```
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/y6", {y6}]
```

```
F7 = Coefficient[eq1, ε, 7]
```

```
tt = TrigReduce[Expand[F7]]
```

```
f701 = Integrate[tt, {θ, 0, 2 π}]
```

```
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f701", {f701}]
```

```
f702 = Integrate[TrigReduce[D[F6, r] y1], {θ, 0, 2 π}]
```

```
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f702", {f702}]
```

```
f703 = Integrate[TrigReduce[D[F5, {r, 2}] y1^2], {θ, 0, 2 π}]
```

```
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f703", {f703}]
```

```

f704 = Integrate[TrigReduce[D[F5, r] y2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f704", {f704}]

f705 = Integrate[TrigReduce[D[F4, {r, 3}] y1^3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f705", {f705}]

f706 = Integrate[TrigReduce[D[F4, {r, 2}] y1 y2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f706", {f706}]

f707 = Integrate[TrigReduce[D[F4, r] y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f707", {f707}]

f708 = Integrate[TrigReduce[D[F3, {r, 4}] y1^4], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f708", {f708}]

f709 = Integrate[TrigReduce[D[F3, {r, 3}] y1^2 y2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f709", {f709}]

f710 = Integrate[TrigReduce[D[F3, {r, 2}] y1 y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f710", {f710}]

f711 = Integrate[TrigReduce[D[F3, {r, 2}] y2^2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f711", {f711}]

f712 = Integrate[TrigReduce[D[F3, r] y4], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f712", {f712}]

f713 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 5}] y1^5], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f713", {f713}]

f714 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 4}] y1^3 y2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f714", {f714}]

f715 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 3}] y1^2 y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f715", {f715}]

f716 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 3}] y1 y2^2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f716", {f716}]

f717 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 2}] y1 y4], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f717", {f717}]

```

```

f718 = Integrate[TrigReduce[D[F2, {r, 2}] y2 y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f718", {f718}]
f719 = Integrate[TrigReduce[D[F2, r] y5], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f719", {f719}]
f720 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 6}] y1^6], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f720", {f720}]
f721 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 5}] y1^4 y2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f721", {f721}]
f722 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 4}] y1^3 y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f722", {f722}]
f723 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 4}] y1^2 y2^2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f723", {f723}]
f724 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 3}] y1^2 y4], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f724", {f724}]
f725 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 2}] y1 y5], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f725", {f725}]
f726 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 3}] y1 y2 y3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f726", {f726}]
f727 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 3}] y2^3], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f727", {f727}]
f728 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 2}] y2 y4], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f728", {f728}]
f729 = Integrate[TrigReduce[D[F1, {r, 2}] y3^2], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f729", {f729}]
f730 = Integrate[TrigReduce[D[F1, r] y6], {θ, 0, 2 π}]
Save["/Users/brunodomicianolopes/Desktop/P5_d=0_ ordem 7/f730", {f730}]

f7 = Collect[f701 + f702 + f703 / 2 + f704 / 2 + f705 / 6 + f706 / 2 + f707 / 6 + f708 / 24 +
  f709 / 4 + f710 / 6 + f711 / 8 + f712 / 24 + f713 / 120 + f714 / 12 + f715 / 12 + f716 / 8 +
  f717 / 24 + f718 / 12 + f719 / 120 + f720 / 720 + f721 / 48 + f722 / 36 + f723 / 8 + f724 / 48 +
  f725 / 120 + f726 / 12 + f727 / 48 + f728 / 48 + f729 / 72 + f730 / 720, r, Factor]

```

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **189** (1929), 559–561.
- [2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maïer, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont., 1973, Translated from the Russian.
- [3] V.I. Arnold and Y.S. Ilyashenko, *Dynamical Systems I. Ordinary differential equations*, Encyclopedia Math. Sci., vol 1, Springer, Berlin, 1988.
- [4] V. I. Arnold (1987). *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, 2nd ed, Springer-Verlag, New york.
- [5] I.S. Berezin and N.P. Zhidkov, *Computing Methods*, vol. II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [6] T.R. Blows and L.M. Perko, *Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems*, SIAM Rev. **36** (1994), 341–376.
- [7] J. W. Bruce, F. Tari (2000). Duality and implicit differential equations, *nonlinearity*.**13**, 791–811.
- [8] A. Buică J.P. Francis and J. Llibre, *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*, Commun. Pure Appl. Anal. **6** (2007),

-
- [9] A. Buică and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7–22.
 - [10] C. Buzzi, P. R. Silva and M. A. Teixeira (2006). A Singular approach to discontinuous vector fields on the plane, *J. Diff. Equation.* **231**, 633–655.
 - [11] J. Chavarriga, *Integrable systems in the plane with a center type linear*, Applicationes Mathematicae **22** (1996), 285–309.
 - [12] J. Chavarriga and I. Garcia, *Isochronous centers of cubic reversible systems*, Dynamical Systems, Plasmas and Gravitation (Orléans la Source, 1997), 255–268, Lecture Notes in Phis. **518**, Springer, Berlin, 1999.
 - [13] J. Chavarriga and M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qual. Theory of Dyn. Syst. **1** (1999), 1–70.
 - [14] C. Chicone and M. Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, J. Differential Equations **91** (1991), 268–326.
 - [15] C. Christopher and C. Li, *Limit cycles in differential equations*, Birkhauser, Boston, 1999.
 - [16] A. Cima and J. Llibre, *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*, J. Math. Anal. Appl. **147** (1990), 420–448.
 - [17] A. A. Davydov (1994). Qualitative theory of control systems , *Translation of mathematical monographs.* **141**.
 - [18] A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya and W. Z. Sun (2008). Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, *Japan. J. Math.* **3**, 93–119.
 - [19] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys and P. Kowalczyk (2008). *Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications*, Applied Mathematical Science 163, Springer-Verlag, London.

-
- [20] F. Dumortier, J. Llibre, and J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer–Verlag, Berlin, 2006.
 - [21] N. Fenichel (1979). Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Equations* **31**, 53–98.
 - [22] A. F. Filippov (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
 - [23] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, *Nonlinearity* **9** (1996), 501–516.
 - [24] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers*, *Nonlinear Anal.* **43** (2000), 523–537.
 - [25] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the shape of limit cycles that bifurcate from non-Hamiltonian centers*, *Nonlinear Anal.* **43** (2001), 837–859.
 - [26] J. Giné, *Higher order limit cycle bifurcations from non-degenerate centers*, *Appl. Math. Comput.* **218** (2012), no. 17, 8853–8860.
 - [27] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1986.
 - [28] M. Han, *Asymptotic expansions of Melnikov functions and limit cycle bifurcations*, *Int. J. Bifur. Chaos* **22** (2012), no. 12, 1250296, 30 pp.
 - [29] M. Han, J. Yang and P. Yu, *Hopf bifurcations for near-Hamiltonian systems*, *Int. J. Bifur. Chaos* **19** (2009), 4117–4130.
 - [30] M. Han and P. Yu, *Normal forms, Melnikov functions and bifurcations of limit cycles*, vol. 181, Applied Mathematical Sciences, Springer, London 2012.
 - [31] C. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys.*

-
- KL.* (1900), 253–297; English transl., *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902), 437–479; *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **37** (2000), 407–436.
- [32] J. Karlin and W.J. Studden, *T-Systems: With applications in analysis and statistics*, Pure Appl. Math., Interscience Publishers, New York, London, Sidney, (1966).
- [33] C. Li and W. Li, *Linear estimation of the number of zeros of abelian integrals for some cubic isochronous centers*, J. of Differential Equations **180** (2002), 307–333.
- [34] C. Li and J. Llibre, *Cubic homogeneous polynomial centers*, Publ. Mat. **58** (2014), 297–308.
- [35] W. Li, J. Llibre, J. Yang and Z. Zhang, *Limit cycles bifurcating from the period annulus of quasi-homogeneous centers*, J. Dynam. Differential Equations **21** (2009), 133–152.
- [36] C. Li, W. Li, J. Llibre and Z. Zhang, *Linear estimation of the number of zeros of abelian integrals for some cubic isochronous centers*, J. Differential Equations **180** (2002), 307–333.
- [37] M. F. S. Lima and J. Llibre, *Limit cycles and invariant cylinders for a class of continuous and discontinuous vector field in dimension $2n$* , Appl. Math. Comput. **217** (2011), no. 24, 9985–9996.
- [38] J. Llibre, *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*, Rad. Mat. **11** (2002/3), 215–228.
- [39] J. Llibre, B. D. Lopes and J. R. de Moraes, *Limit cycles for a class continuous and discontinuous cubic polynomial systems*, Qual. Theory Dyn. Syst. **13** (2014), 129–148.
- [40] J. Llibre, B. D. Lopes and J. R. de Moraes, *Limit cycles of cubic polynomial differential systems with rational first integrals of degree 2*, Applied mathematics and computation **250** (2015), 887–907.
- [41] J. Llibre, B. D. Lopes and J. R. de Moraes, *Limit Cycles Bifurcating from the Periodic Annulus of Cubic Homogeneous Polynomial Cen-*

-
- ters, *Electronic Journal of Differential Equations* **271** (2015), 1–8.
- [42] J. Llibre, B. D. Lopes and J. R. de Moraes, *Limit cycles bifurcating from the periodic annulus of the weight-homogeneous polynomial centers of weight-degree 2*, *Applied mathematics and computation* **274** (2016), 47–54.
- [43] J. Llibre, B. D. Lopes and J. R. de Moraes, *Limit cycles bifurcating from the periodic annulus of the weight-homogeneous polynomial centers of weight-degree 3*, Preprint.
- [44] J. Llibre, A. Mahdi and J. Roé, *The geometry of the real planar polynomial differential systems having their orbits embedded in conics*, *Dynamical Systems* **3** (2011), 287–321.
- [45] J. Llibre, A. Mahdi and N. Vulpe, *Phase portraits and invariant straight lines of cubic polynomial vector fields having a quadratic rational first integral*, *Rocky Mountain J. of Math.* **41** (2011), 1585–1629.
- [46] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, *Averaging methods for studying the periodic orbits of discontinuous differential systems*, <http://arxiv.org/pdf/1205.4211.pdf>.
- [47] J. Llibre, D. D. Novaes and M. A. Teixeira, *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*, *Nonlinearity* **27** (2014), 563–583.
- [48] J. Llibre and G. Świrszcz, *On the limit cycles of polynomial vector fields*, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Serie A* **18** (2011), 203–214.
- [49] J. Llibre and C. Pessoa, *On the centers of the weight-homogeneous polynomial vector fields on the plane*, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009), 722–730.
- [50] J. Llibre, P. R. Silva and M. A. Teixeira (2007). Regularization of discontinuous vector fields via singular perturbation, *J. Dynam. Differential Equation.* **19**, n.2, 309–331.

-
- [51] J. Llibre, P. R. Silva and M. A. Teixeira (2008). Sliding vector fields via slow fast systems, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin* **15**, 851–869.
 - [52] J. Llibre, P. R. Silva and M. A. Teixeira (2009). Study of singularities in non smooth dynamical systems via singular perturbation, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **8**, 508–526.
 - [53] J. Llibre and M. A. Teixeira (1997). Regularization of discontinuous vector fields in dimension three, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **3**, 235–241.
 - [54] N.G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, 1978.
 - [55] B. D. Lopes, P. R. Silva and M. A. Teixeira, *Piecewise implicit differential systems*, Preprint.
 - [56] W.S. Loud, *Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contributions to Differential Equations **3** (1964), 21–36.
 - [57] L.S. Pontrjagin, *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **6** (1934), 25–28.
 - [58] J.A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging methods in non-linear dynamical systems*, Applied Mathematical Sci., vol. 59, Springer, New York, 2007.
 - [59] S. Smale, *Mathematical problems for next century*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 2, 7–15.
 - [60] J. Sotomayor and M. A. Teixeira (1996). Regularization of discontinuous vector fields, *International Conference on Differential Equations*, Lisboa, Equadiff 95, 207–223.
 - [61] F. Takens (1976) *Implicit differential equations; some open problems. Singularités d'applications différentiables (Sém., Plans-sur-Bex)*. Lecture Notes in Math., **535**, Springer, Berlin, 237–253.

- [62] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [63] M. Viano, J. Llibre and H. Giacomini, *Arbitrary order bifurcations for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 117–136.
- [64] L. Yang, *Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials*, J. Symbolic Computation **28** (1999), 225–242.
- [65] Y. Yanqian, *Theory of Limit Cycles*, vol. 66, Transl. Math. Monogr., American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [66] W. Yusen and C. Zang, *Bifurcation of limit cycles and pseudo-isochronous center at degenerate singular point in a septic system*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), no. 17, 8513–8525.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____/____/____

Assinatura do autor