

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

LUCAS FERREIRA BERTÃO

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL, DESENVOLVIMENTO DE MODELOS
MATEMÁTICOS, LOCALIZAÇÃO E QUANTIFICAÇÃO DE FALHAS VIA
OBSERVADOR DE ESTADO EM TORRES DE TRANSMISSÃO

Ilha Solteira

2017

LUCAS FERREIRA BERTÃO

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL, DESENVOLVIMENTO DE MODELOS
MATEMÁTICOS, LOCALIZAÇÃO E QUANTIFICAÇÃO DE FALHAS VIA
OBSERVADOR DE ESTADO EM TORRES DE TRANSMISSÃO

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de Ilha Solteira –
UNESP como parte dos requisitos para obtenção
do título de Mestre em Engenharia Mecânica.
Especialidade: Mecânica dos Sólidos

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo
Orientador

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

- B545s Bertão, Lucas Ferreira.
Simulação numérica, desenvolvimento de modelos matemáticos, localização e quantificação de falhas via observador de estado em torres de transmissão / Lucas Ferreira Bertão. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
90 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2017
- Orientador: Gilberto Pechoto de Mello
Inclui bibliografia
1. Torre de transmissão. 2. Método dos elementos finitos. 3. Observador de estados.

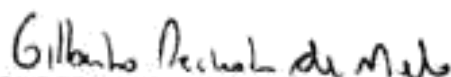
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL, DESENVOLVIMENTO DE
MODELOS MATEMÁTICOS, LOCALIZAÇÃO E QUANTIFICAÇÃO DE
FALHAS VIA OBSERVADORES DE ESTADO EM TORRES DE

AUTOR: LUCAS FERREIRA BERTÃO

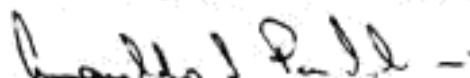
ORIENTADOR: GILBERTO PECHOTO DE MELO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA
MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. AMARILDO TABONE PASCHOALINI

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. FABRICIO CÉSAR LOBATO DE ALMEIDA

Departamento de Engenharia de Biosistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupã

Ilha Solteira, 02 de fevereiro de 2017

DEDICO

À minha família que sempre me incentivou a crescer.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, ao meu pai Paulo e a minha mãe Ana que sempre foram a base de toda a minha caminhada. A todos os professores que fizeram parte do meu curso de graduação e foram responsáveis pela formação necessária para que eu pudesse dar continuidade nos estudos e realizar esse trabalho de mestrado, em especial ao meu orientador Gilberto que me guiou e me mostrou o caminho a seguir.

Aos amigos de sala, Victor Hugo e Aurélio que me apoiaram e me auxiliaram nos momentos de dificuldade.

A todos os demais que de alguma forma contribuíram para o progresso do meu trabalho, seja com uma conversa ou com algum e-mail respondido.

E por fim, a Deus, o qual eu sei que me guia e me mostra o caminho apesar de eu as vezes me afastar um pouco dele em momentos que fico confuso.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível”.
Charles Chaplin

RESUMO

Monitorar a integridade de estruturas, sejam elas, máquinas ou equipamentos mecânicos, consiste em um ramo de estudo que está se firmando. As técnicas que englobam esse monitoramento fazem uso da combinação de sensores e rotinas computacionais para poder extrair os dados necessários da maneira que o operador/analista desejar. Uma das áreas carentes desse tipo de análise/controle é a de distribuição de energia. Todos os anos são noticiados casos envolvendo acidentes envolvendo torres de transmissão que vêm ao chão por, não um, mas vários fatores. Em meio as técnicas de monitoramento, a dos observadores de estado é a que se destaca mais. Contudo, apesar do destaque, a técnica dos observadores de estado possui restrições que motivam novas abordagens. Outro método numérico utilizado amplamente na área de análises em engenharia é o Método dos Elementos Finitos. Este conhecido método, que já possui base mais sólida de desenvolvimento, atualmente faz uso de softwares para a realização dos cálculos de análise estática e/ou dinâmica. O presente trabalho, em conjunto com os observadores de estado e o método dos elementos finitos, mostra uma abordagem, ainda que simples, de uma área pouco explorada com o método – a de detecção e localização de falhas em torres de transmissão via observadores de estados aliado ao método dos elementos finitos.

Palavras-chave: Torres de transmissão. Análise estática. Análise dinâmica. Método dos elementos finitos. Observadores de estado.

ABSTRACT

Monitor the integrity of structures, whether machinery or mechanical equipment consists of a branch of study that is steadying. The techniques include such monitoring makes use of the combination of computational sensors and routines can extract the necessary data in the way that the operator / analyst desired. One of the poorest areas of this type of analysis / control is the power distribution. Every year cases are reported involving accidents involving transmission towers that come to the ground by not one, but several factors. Among the monitoring techniques, the State Observer is the one that stands out more. However, despite the emphasis, the technique of state observers has restrictions that motivate new approaches. Another numerical method widely used in the area of analysis in engineering is the Finite Element Method. This known method, which already has more solid foundation of development, currently makes use of software to perform the calculations. This work, together with the status of observers and the finite element method, shows an approach, although simple, a little explored area to the method - the detection and fault location in transmission towers via state observers combined with the finite element method.

Keywords: Transmission towers. Static analysis. Dynamic analysis. Finite element method. State observers.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
1.1	CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO.....	10
1.2	OBJETIVO DO TRABALHO.....	11
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	11
2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	12
2.1	ELEMENTOS FINITOS	13
2.1.1	Aparência de um elemento finito.....	15
2.1.2	O processo de análise.....	17
2.1.3	Equacionamento variacional	20
2.1.4	Energia potencial estacionária.....	22
2.1.5	Equacionamento do método dos elementos finitos	23
2.2	MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO	26
2.2	MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO.....	28
2.2	EQUAÇÕES DE LAGRANGE.....	34
2.2	ESPAÇO DE ESTADOS.....	36
2.3	OBSERVADORES DE ESTADO	40
3	TORRES DE TRANSMISSÃO	48
3.1	AÇÃO DOS VENTOS	48
4	ETAPAS DA ANÁLISE COMPUTACIONAL	51
5	MODELO DE ESTUDO	52
5.1	TRAÇÃO ATUANTE NOS CABOS CONDUTORES	54
5.2	PERFIL DE VIGA.....	58
5.3	INSERÇÃO DA FALHA	59
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	65
6.1	ANÁLISES ESTÁTICA E DINÂMICA – MODOS DE VIBRAR E FREQUÊNCIAS NATURAIS	65
6.2	DIAGNOSE DE FALHA VIA OBSERVADOR DE ESTADO – PRIMEIROS RESULTADOS	71
7	CONSOLIDAÇÃO DOS RESULTADOS E COMENTÁRIOS.....	78
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	86
	REFERÊNCIAS.....	88

1 INTRODUÇÃO

A primeira linha de transmissão de que se tem registro no Brasil foi construída por volta de 1883, na cidade de Diamantina, Minas Gerais (ANEEL, 2016). Naquela época os estudos sobre estruturas não eram tão aprofundados como hoje, o que fazia com que os projetos fossem mais vulneráveis a erros técnicos por desconhecimento teórico ou até mesmo por deixar passar despercebido algum detalhe importante.

A ocorrência de diversos acidentes ao longo dos anos, e até mesmo recentemente, foi inevitável (vide figura 1). Com o passar do tempo esses acidentes puderam ser previstos e em muitos casos evitados com o avanço das tecnologias que envolviam simulação numérica, a qual permite a reprodução de um modelo computacional muito semelhante ao modelo real.

Figura 1 – Acidente que poderia ser evitado – Queda de torre mata seis trabalhadores peruanos em Rondônia. 2014.



Fonte: Denis Farias (2014)

As simulações numéricas aliadas à física e a matemática resultaram em poderosos softwares capazes de realizarem análises, sejam elas estáticas ou dinâmicas. São exemplos: Ansys®, MATLAB, GNU Octave.

Voltando os olhares para as Torres de Transmissões, tanto elas como qualquer outra estrutura ou sistema mecânico não estão totalmente livres de falhas mesmo que seus projetos

sejam sujeitos a análises rebuscadas em um computador. São vários os fatores que interferem e acabam ocasionando falhas em estruturas. No caso das Torres de Transmissão os principais causadores de falhas, além de comportamentos estruturais não previstos, são os agentes externos: chuvas, ventos, oscilações de temperatura, dentre outros.

É nesses casos que outra técnica é adotada. Os Observadores de Estado usados para a diagnose de falhas começaram a se difundir na década de 70, mais precisamente com Willsky (1976). Desde então, as técnicas de detecção e localização de falhas em estruturas têm sido aprimoradas. Hoje é possível monitorar os sistemas mecânicos para garantir seu bom funcionamento sem que alguma pane repentina provoque a interrupção das atividades desse sistema.

Embora as inúmeras ferramentas de análise teórica tenham atingido tamanho patamar de sofisticação, ainda existem dificuldades na diagnose de problemas que resultam em falhas. A inexatidão de modelos matemáticos aliados à dificuldade, ou até mesmo a impossibilidade de medição de variáveis que são relevantes para o sistema (LUENBERGER, 1964; WILLSKY, 1976).

É nesse contexto que os Observadores de Estado se encaixam. Eles consistem na elaboração de um modelo para o sistema ou estrutura em questão com a finalidade de comparar o sinal de saída estimado com o sinal de saída medido através de instrumentos. O propósito é “acoplar” um observador em cada variável do sistema (LUENBERGER, 1964; WILLSKY, 1976).

1.1 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Diversos trabalhos já foram realizados englobando o método dos Observadores de Estado e dos Elementos Finitos. Contudo, os observadores de estado são motivadores para o desenvolvimento de novas abordagens em áreas ainda poucos exploradas. O presente trabalho contribui nos seguintes pontos:

- A primeira e principal contribuição do presente trabalho é introduzir o método dos observadores de estado em uma área ainda pouco ou não explorada – torres de transmissão de energia elétrica.
- A segunda e não menos importante é, apesar das dificuldades de elaboração do modelo computacional (limitações de software e hardware impedindo muitos

detalhes), a análise assumindo a interligação entre torres em uma mesma linha de transmissão de energia.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Com o propósito de contribuir com as análises estáticas e dinâmicas e a diagnose e localização de falhas em estruturas e sistemas mecânicos, o presente trabalho visa estudar os resultados dessas análises além de utilizá-los como ferramentas para mostrar o funcionamento processo de detecção e localização de falhas em estruturas de torres interligadas em uma mesma linha de transmissão de energia através do método dos observadores de estado.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em capítulos, os quais foram organizados da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresenta uma introdução sobre a importância do uso do método dos observadores de estado a fim de diminuir a ocorrência de acidentes em torres de linhas de transmissão. Mostra também as contribuições e o objetivo principal do trabalho desenvolvidos.
- Capítulo 2: Aborda um breve histórico sobre como começaram as simulações computacionais e como a simulação e o Método dos Elementos finitos foi importante para o avanço dessa área além de explicar de maneira breve como o método dos elementos funciona (essência do método, montagem de matrizes de massa e rigidez). Por fim, o capítulo explica brevemente sobre Equações de Lagrange e Espaço de Estado, os quais são fundamentais no Método dos observadores de Estado, grande protagonista do presente trabalho.
- Capítulo 3: Mostra o alvo do estudo. As torres de transmissão são abordadas em relação ao comportamento sob ação de ventos.
- Capítulo 4: Em forma de fluxograma, as etapas da análise e simulação computacional são listadas.
- Capítulo 5: Detalhamento do modelo utilizado no estudo, tais como as forças que serão inseridas para simular a “conexão” de uma torre com a outra, o perfil de viga

que será adotado para o modelo e como a falha será inserida nas matrizes utilizadas nos cálculos.

- Capítulo 6: Todo e qualquer resultado obtido é mostrado aqui.
- Capítulo 7: Análise dos resultados e conclusões.
- Capítulo 8: Sugestões para trabalhos futuros.

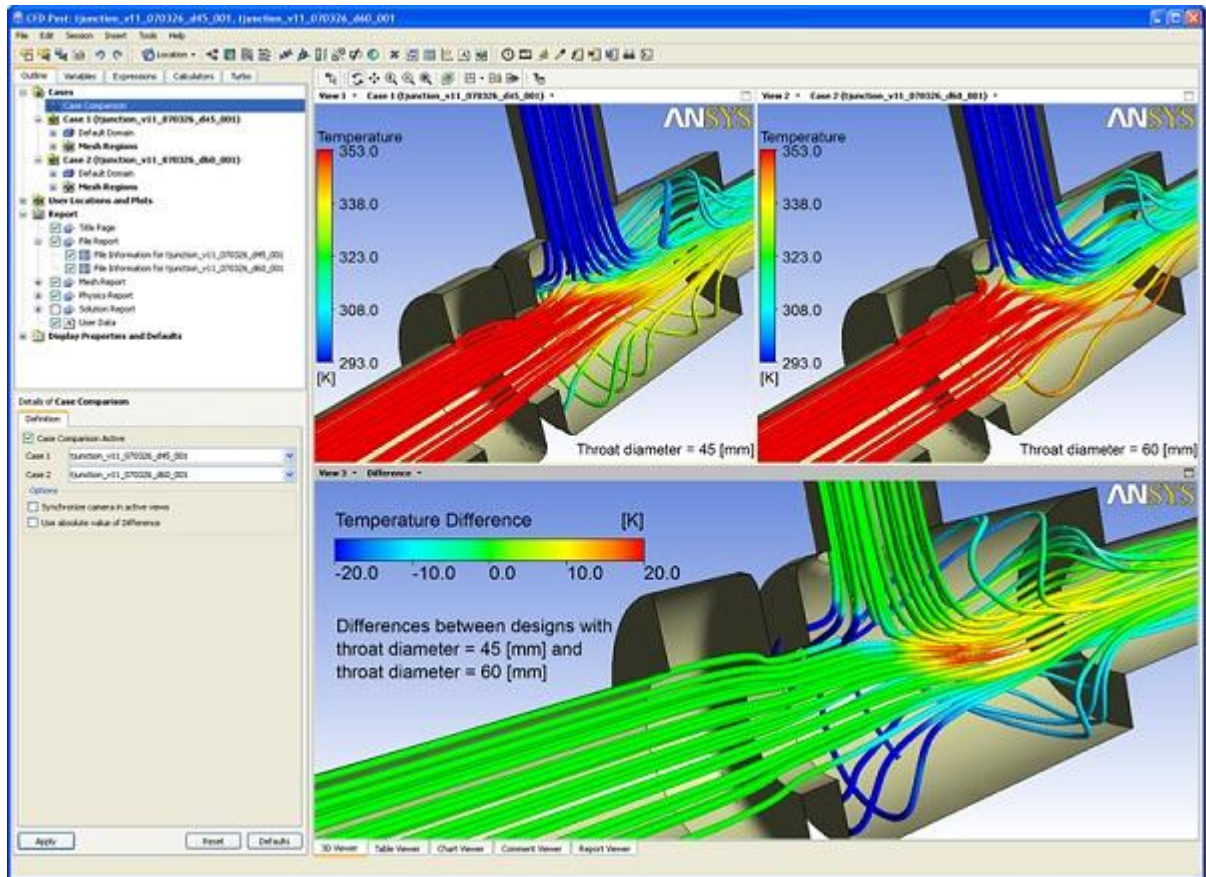
2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Segundo Pedgen (2010), um modelo de simulação numérica é executado em um computador para atuar dinamicamente no comportamento do sistema real ao longo do tempo ou, mais formalmente, a simulação é um conjunto de variáveis de estado e um mecanismo para alterar essas variáveis ao longo do tempo. Nos primórdios da simulação foram estabelecidas três visões de mundo que, mesmo passados 50 anos de história e estudo, não foram mudadas; são elas: eventos, processos e objetos (MARKOWITX; HAUSNER; KARR, 1962; GORDON, 1961; DAHL; NYGAARD, 1967 citados por PEDGEN, 2010).

Do ponto de vista de cada visão de mundo originada 50 anos atrás com os pioneiros, cada um deles enxerga a simulação de uma maneira. O sistema estudado pode visto como uma série de eventos instantâneos que mudam o estado do sistema ao longo do tempo, ou ainda se descrevermos o movimento de entidades passivas pelo sistema como sendo um fluxo de processo, pode-se definir esse fluxo de processos como sendo uma série de passos de processos que modelam as mudanças de estado que tem lugar no sistema; ao contrário de um simples evento, Pedgen (2010) diz que um passo do processo pode executar uma sequência de eventos ao longo do tempo.

Pedgen (2010) ainda comenta que apesar de a orientação a processos ter se demonstrado muito eficaz na prática, a orientação a objeto fornece um paradigma de modelagem alternativo que seja mais natural e, na maioria dos casos, mais fácil de ser utilizada. Em outras palavras, a simulação orientada a objeto descreve o sistema como sendo um conjunto desses objetos e o seu comportamento é resultado da interação desses objetos que o compõem.

Figura 2 - Exemplo de simulação numérica



Fonte: ESSS (2014)

É no contexto de simulação que inúmeros métodos numéricos, que antes eram feitos de próprio punho, começam a ser implementados em rotinas computacionais para serem utilizados para as mais diversas finalidades. O Método dos Elementos Finitos é um deles.

2.1 ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é amplamente utilizado em análises estáticas e dinâmicas de estruturas, o que o torna um dos protagonistas. Ele foi desenvolvido, inicialmente, para solucionar problemas de treliças em estruturas de grande complexidade. O método consiste em uma técnica de discretização que conquistou grande fama com o desenvolvimento dos computadores ao longo dos anos. Apesar de simplicidade nas palavras para descreve-lo, o método é constituído de soluções de diversos grupos de equações algébricas para problemas de ordem elevada de autovalor quando se trata de vibrações (problemas impraticáveis sem um computador como ferramenta de cálculo).

O método dos elementos finitos, apesar de não ter qualquer relação de dependência com qualquer outro método desde a sua origem, atualmente ele é reconhecido como a variável mais importante do método de Rayleigh-Ritz.

Assim como o método de Rayleigh-Ritz, o método dos elementos finitos prevê soluções aproximadas para problemas que envolvem vibrações linearmente combinadas em verificações de funções múltiplas com coeficientes indeterminados. Nesse caso, determina-se os coeficientes resolvendo o problema de autovalor correspondente. Além dessas características, as matrizes de massa e rigidez são as mesmas utilizadas no método de Rayleigh-Ritz com uma diferença básica residindo na natureza das funções em questão. Outra diferença notável entre os métodos é como as funções são construídas. No método de Rayleigh-Ritz as funções são globais se estendendo por todo o domínio do sistema. Já no método dos Elementos Finitos, as funções são locais e se estendem por pequenos subdomínios do sistema, ou seja, elementos finitos.

A versatilidade do método dos elementos finitos está exatamente no uso das funções locais, ou funções interpoladoras. Além disso, o tamanho reduzido dos elementos finitos também colabora para a eliminação da diferenciabilidade como problema, uma vez que as funções de interpolação podem ser polinômios de baixo grau, o que satisfaz as exigências mínimas de diferenciabilidade impostas para cada elemento. Outro ponto favorável: as funções interpoladoras são as mesmas para todos os elementos finitos. Assim a derivação das matrizes de massa e rigidez pode ser realizada de maneira mais eficiente, derivando primeiro as matrizes de massa e de rigidez e então reunindo-as para todo o sistema. Os elementos para as matrizes de massa e rigidez podem ser facilmente encontrados na literatura, e a tarefa de montagem fica reduzida a combinação dos mesmos acomodando as distribuições de parâmetros arbitrários e condições de contorno. Outra vantagem do método é que os elementos finitos podem ser feitos de modo a caberem por toda e qualquer contorno irregular permitindo a obtenção de solução que outros métodos não são capazes de fornecer.

A característica mais marcante do método talvez se resuma a codificação do computador de rotina. Na verdade, muitos códigos de computadores capazes de acomodar grande variedade de estruturas estão disponíveis comercialmente.

O método dos elementos finitos está associado ao método de Rayleigh-Ritz pelo fato de aproximar um sistema distribuído a um sistema simples fazendo uso da solução diferencial por autovalores de uma serie finita. O método dos elementos finitos possui, ainda, formas e

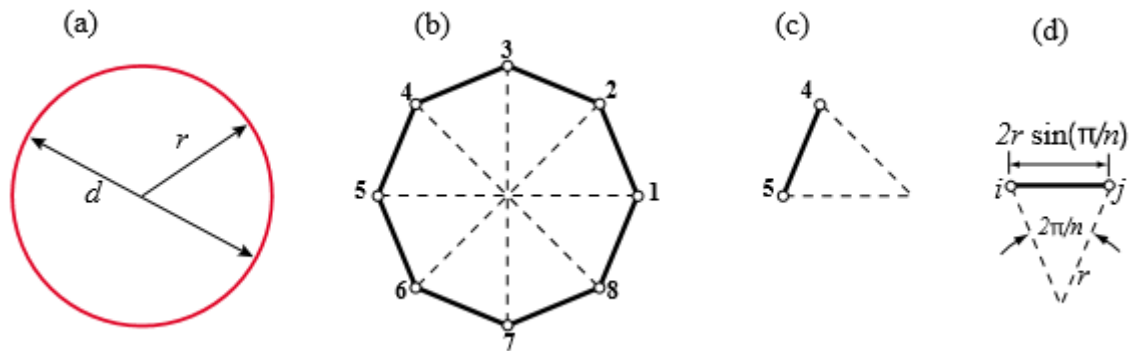
tamanhos de acomodação de parâmetros como irregularidades de fronteiras em problemas de duas ou três dimensões. Cada elemento finito é definido como cada subdivisão do sistema, onde a soma de todos eles define o domínio do problema. Uma boa distribuição dos elementos, ou discretização, requer boa experiência. A configuração dos elementos deve levar em conta as irregularidades, condições de contorno e forças aplicadas na estrutura em estudo. A distribuição dos elementos deve ser regulada para garantir a melhor solução à resposta dinâmica, frequências e modos de vibrar do sistema. Regiões de concentração de tensões devem ter uma maior atenção e uma distribuição mais fina dos elementos para garantir que todas as características da região sejam obtidas.

2.1.1 Aparência de um elemento finito

Os tópicos subsequentes tratarão da formulação do método dos elementos finitos, mas a aparência de um elemento sempre levanta dúvidas. Através de um problema clássico é possível demonstrar: O cálculo do perímetro L de um círculo de diâmetro d pode ajudar sanar essas dúvidas. Sabendo que $L = \pi d$, o problema do perímetro se resume no mesmo que calcular o valor numérico de π .

A solução se dá da seguinte maneira: desenhe um círculo de raio r e diâmetro $d = 2r$ como mostrado na figura 4(a); insira um polígono de n lados dentro do círculo (nesse caso $n=8$) como mostra a figura 4(b). Agora renomeie os lados do polígono para elementos e os vértices que conectam uns aos outros para pontos nodais, ou simplesmente, nós. Nomeie os nós com números de 1 a 8. Extraia um elemento típico (parte integrante do polígono), como mostrado na figura 4(c). Essa é a representação de um elemento genérico $i - j$ mostrado na figura 4(d). O comprimento do elemento é $L_{ij} = 2r \sin(\pi/n)$. Uma vez que todos os elementos tem o mesmo comprimento, pode-se afirmar que o perímetro do polígono é $L_n = nL_{ij}$, então a aproximação de π é $\pi_n = \frac{L_n}{d} = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016)

Figura 3 - O problema do π com o conceito do método dos elementos finitos: (a) Objeto contínuo, (b) Objeto discreto, (c) Elemento separado, (d) Elemento genérico.



Fonte: University of Colorado at Boulder (2016)

Os valores de π_n podem ser obtidos para diferentes valores de n . Alguns desses valores estão listados na tabela 1, na qual pode-se notar que a convergência é um pouco lenta comparada ao algoritmo de Wynn's- ϵ .

Tabela 1- Aproximações do valor de π

n	$\pi_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$	Extrapolação por Wynn- ϵ	Valor exato de π para 16 casas
1	0.0000000000000000		
2	2.0000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

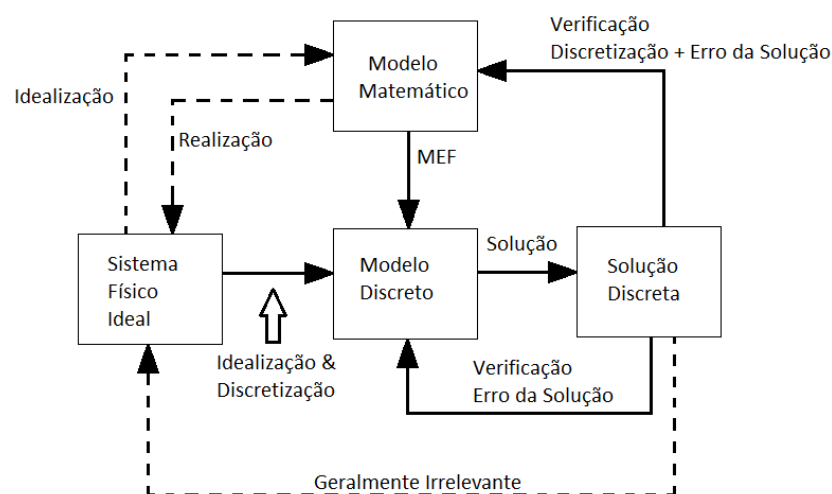
Fonte: University of Colorado at Boulder (2016)

Algumas das ideias-chaves do Método dos Elementos Finitos podem ser identificadas nesse exemplo simples. O círculo, visto como um objeto matemático, é substituído por polígonos. Esses polígonos representam a aproximação discreta do círculo. Os lados, chamados *elementos*, são especificados pelos *nós* em suas extremidades. Os elementos podem ser separados quando se desconectam os nós (processo chamado de *disassembly*, ou desmontagem). Após essa “desmontagem”, um elemento genérico pode ser definido, independente do círculo inicial, pelo segmento que une os nós i e j . A propriedade relevante do elemento, L_{ij} , pode ser computada no elemento genérico independente de todos os outros. Essa é uma propriedade chamada *domínio local* no Método dos Elementos Finitos. Finalmente, a propriedade que se desejava calcular desde o início: o perímetro do círculo. Ele é obtido através da junção de todos os n elementos e somando os seus comprimentos L_{ij} . O passo correspondente no Método dos Elementos Finitos são *Assembly* (ou associação) e *Solução*, nessa ordem. Essa mesma técnica pode ser usada para resolver inúmeros problemas. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

2.1.2 O processo de análise

O processo de simulação utilizando o Método dos Elementos Finitos envolve uma sequência de passos, os quais envolvem uma sequência pré-definida dependendo do tipo de ambiente que o método é utilizado.

Figura 4 - A matemática do Método dos Elementos Finitos



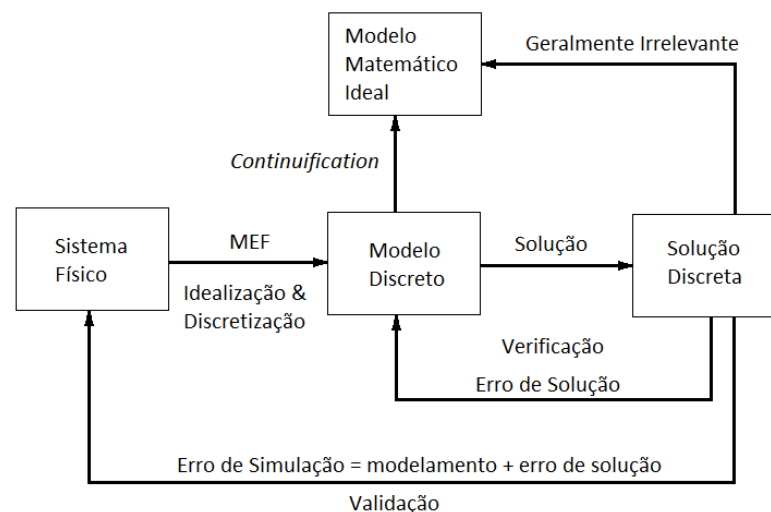
Fonte: Adaptado de University of Colorado at Boulder (2016)

A figura 5 mostra o modelo matemático, do qual todo o processo do método origina. O modelo em si, normalmente é uma equação diferencial ordinária ou parcial em função do tempo e do espaço. Um elemento finito discreto é gerado a partir de uma forma variacional do modelo matemático, o que constitui a parte de discretização. Então, o modelo discreto é sujeito a um *solver* que dará a solução discreta. O modelo físico pode ser encarado como uma realização do modelo matemático, o que faz do modelo matemático uma idealização do sistema físico. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

O conceito de erro fica nítido quando a solução discreta é inserida no modelo discreto. Geralmente essa etapa é chamada de *verificação*. O erro de solução é o quanto a solução discreta falha em satisfazer as equações do modelo discreto. Esse erro de solução requer atenção quando se usa computadores para a realização dos cálculos. Mais importante que o erro de solução, é o *erro de discretização*, o qual é a quantidade em que a solução discreta falha em relação ao modelo matemático. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

Substituindo o modelo ideal pelo modelo real é uma saída para quantificar os erros de modelo. Uma outra maneira de usar o Método dos Elementos Finitos é ilustrada na figura 6.

Figura 5 - O Método dos Elementos Finitos Físico. Quando o modelo matemático não é essencial.



Fonte: Adaptado de University of Colorado at Boulder (2016)

O centro das atenções, agora, é voltado para o Sistema Físico mostrado na figura 6. Toda a sequência envolvida é chamada Método dos Elementos Finitos Físico. Os processos de

Idealização e Discretização na figura 6, bem como na figura 5, são levados em paralelo para então gerar o modelo discreto. A solução é computada da mesma maneira. Assim como na figura 5, a figura 6 também apresenta um modelo matemático ideal, nesse caso. Para alguns isso pode não fazer sentido, mas para outros isso pode ser descrito como uma “continuificação”, ou *continuification* do modelo discreto. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

O conceito de erro no Método dos Elementos Finitos Físico pode ser apresentado através de duas maneiras, conhecidas, segundo a figura 6, como verificação e validação, respectivamente. A verificação se comporta do mesmo modo que no Método da figura 5: a solução discreta é substituída no modelo discreto para a obtenção do erro da solução. Realizando a substituição no modelo matemático ideal, pode-se obter o erro de discretização. Em sistemas complexos de engenharia, este é pouco utilizado uma vez que não é de se esperar que o modelo matemático sempre exista, e se existir, ele é mais fisicamente relevante que o modelo discreto. Por outro lado, a validação tenta comparar a solução discreta com a observação feita através do cálculo do erro de simulação, o qual é a combinação da modelagem e dos erros de solução. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

As sequencias físicas e matemáticas mostradas acima não são exclusivas, pelo contrário, são complementares uma da outra. Essa sinergia é uma das razões por de trás do poder e da aceitação do método. Historicamente o Método dos elementos Finitos Físico foi um dos primeiros a conseguir modelar um sistema complexo de uma aeronave. O Método Matemático veio mais tarde e, dentre outras coisas, ele forneceu a teoria necessária para expandir o Método dos Elementos Finitos para além das análises estruturais. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

Assim como existem duas maneiras de se usar o Método dos Elementos Finitos, há duas interpretações complementares para se ensiná-las. A interpretação física tem como conceito básico a separação de um sistema complexo em sistemas mais simples, ou seja, separar componentes chamados elementos finitos, ou simplesmente elementos. A resposta mecânica de um elemento é caracterizada por um número finito de graus de liberdade, os quais são representados como os valores de funções desconhecidas como um ponto nodal. A resposta do elemento é dada por equações algébricas elaboradas a partir da própria matemática ou de experimentos. A resposta do sistema original pode ser considerada uma

aproximação do sistema *modal discreto* construído através da conexão de todos os elementos. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

A interpretação matemática é muito perto do que foi apresentado na figura 5. Nesse caso o Método dos Elementos Finitos é visto como um procedimento de obtenção de valores numéricos aproximados para a solução de um problema de valor de contorno postado sobre um domínio predefinido. Esse domínio é substituído pela disjunção de subconjuntos chamados elementos. Geralmente o conjunto de subdomínios é apenas uma aproximação da geometria do domínio original. As funções desconhecidas são aproximadas localmente para cada elemento por uma formula de interpolação expressa em termos dos valores obtidos por essas funções, e possivelmente as suas derivadas em um conjunto de pontos nodais geralmente localizados nas fronteiras do elemento. Os estados das chamadas funções de desconhecidas determinadas pelos valores de nós unitários são chamadas *funções de forma*. A união das funções de forma gera uma *função base de prova* para a qual os valores dos nós representam as coordenadas generalizadas. A função de prova espacial pode ser inserida em meio as equações governantes e valores desconhecidos dos nós determinados pelo Método de Ritz ou por Garlekin, mínimos quadrados ou outro método de minimização residual-ponderado se o problema não puder ser expressado em uma forma variacional padrão. (UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER, 2016).

Em resumo a interpretação matemática enfatiza o conceito de aproximação local, o conceito de separação e junção de elemento por elemento por ser conveniente para a implementação computacional. Esclarecido como são feitas as interpretações e como o método é encarado do ponto de vista físico e matemático pode-se, então, partir para o equacionamento.

2.1.3 Equacionamento variacional

É chamado conservativo todo sistema no qual o trabalho tanto das forças internas quanto das forças externas não depende da trajetória da estrutura. Após a passagem pela configuração final, as condições de compatibilidade de forças internas e das condições de contornos devem ser satisfeitas. Assim, a energia potencial total pode ser escrita como:

$$\Pi_p = U + \Omega \quad (1)$$

U : Energia de deformação, ou ainda, energia potencial interna;

Ω : Energia potencial das forças externas que atuam na estrutura.

Em um sistema discreto a energia potencial total é a soma das energias potenciais de cada elemento discreto:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_{pe} \quad (2)$$

n_e : Número de elementos finitos (discretos) que compõem o sistema;

Π_{pe} : Energia potencial de cada elemento.

A energia potencial de cada elemento finito do sistema é dada por:

$$\Pi_{pe} = U_e + \Omega_e \quad (3)$$

U_e : Energia potencial interna (ou de deformação) acumulada pelo elemento;

Ω_e : Energia potencial das forças externas ao elemento após a deformação do elemento.

Supondo que o carregamento esteja aplicado nos nós da estrutura, a energia potencial das forças externas após a deformação do elemento pode ser dada como:

$$\Omega_e = -\tilde{f}_E^T \tilde{d}_\sim \quad (4)$$

$\tilde{f}_E$: Vetor das forças nodais equivalentes do elemento;

$\tilde{d}_\sim$: Vetor das componentes dos deslocamentos genéricos para cada nó do elemento.

Admitindo que o material seja linearmente elástico, as relações constitutivas são dadas pela Lei de Hooke Generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \quad (9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad (10)$$

E: Módulo de Elasticidade longitudinal do material;

ν : Coeficiente de Poisson;

ε : Deformação Linear específica;

γ : Deformação Tangencial ou Cisalhante;

x, y, z : Índices referentes as direções em que ocorrem as deformações;

xy, xz, yz : Índices referentes aos planos em que ocorrem as variações angulares.

Cada elemento possui uma energia de deformação que é definida por:

$$U_e = \int_{V_e} \mu_0 dV_e \quad (11)$$

μ_0 : Energia de deformação específica;

V_e : Volume do elemento finito.

A energia de deformação específica é dada por:

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz} \} \quad (12)$$

$$\mu_{\sim 0} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sim}^T \sigma_{\sim} \quad (13)$$

2.1.4 Energia potencial estacionária

Um sistema estrutural deve ser equilibrado, e para isso acontecer a variação da função da energia potencial total Π_p deve ser zero:

$$\delta \Pi_p = 0 \quad (14)$$

Em se tratando de funções ordinárias, uma condição diz que a derivada de uma função é nula e essa função tem um valor máximo, um valor mínimo ou valor constante. Assim, de acordo com o Teorema elaborado por Lagrange, se a condição de estacionaridade fornece um valor mínimo, então o sistema é estável.

Quando se aplica esse conceito para o funcional de cada elemento finito e admite-se que a energia de deformação é obtida em termos de deslocamentos nodais através de funções interpoladoras, então o funcional Π_{pe} passa a ser uma função das variáveis independentes d , e a sua variação se torna igual ao seu diferencial: $\delta \Pi_{pe} = d\Pi_{pe}$. Desse modo, tem-se:

$$\delta \Pi_{pe} = \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_1} \delta d_1 + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_2} \delta d_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_n} \delta d_n \quad (15)$$

$$\delta d_1 == dd_1; \delta d_2 == dd_2; \dots; \delta d_n == dd_n \text{ e } \delta \Pi_{pe} = d\Pi_{pe}$$

$$\delta \Pi_{pe} = \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_1} dd_1 + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_2} dd_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_n} dd_n \quad (16)$$

Uma vez que os deslocamentos são, ao mesmo tempo, diferentes de zero, pode-se aplicar o princípio de energia potencial estacionária:

$$\frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (17)$$

Novamente, a distribuição dos elementos deve ser regulada para uma maior certeza nos cálculos de respostas, frequências e modos de vibrar da estrutura e regiões de concentração de tensão merecem um olhar mais cuidadoso sendo necessária uma distribuição mais fina dos elementos.

2.1.5 Equacionamento do método dos elementos finitos

Antes de realizar qualquer cálculo, quando se pretende fazer uso do método dos Elementos Finito, é necessário dividir a estrutura em um número adequado de elementos dando maior atenção para as regiões de maior concentração de tensão, a qual exige um melhor

refinamento. Uma vez que os deslocamentos dos pontos nodais são generalizados em função das coordenadas da estrutura os deslocamentos $u_{\sim}$ dos elementos finitos podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais $d_{\sim}$, através do uso de funções interpoladoras adequadas:

$$u_{\sim} = \phi_{\sim} d_{\sim} \quad (18)$$

$\phi_{\sim}$: Matriz de funções interpoladoras que relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do eixo longitudinal com os deslocamentos nodais do elemento finito.

A energia de deformação de um elemento, de acordo com a equação (13), pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_{\sim}^t \sigma_{\sim} dV_e \quad (19)$$

As relações constitutivas (equações (5) a (10)), podem ser organizadas da seguinte forma:

$$\sigma_{\sim} = E_{\sim} \varepsilon_{\sim} \quad (20)$$

$E_{\sim}$: Matriz de coeficientes elásticos do material.

$$E_{\sim} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Rearranjando as equações (4), (19) e (20) na equação (3), a energia de deformação total de cada elemento finito pode ser expressa como:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_{\sim}^t E_{\sim} \varepsilon_{\sim} dV_e - f_{\sim E}^T d_{\sim} \quad (22)$$

Partindo das relações diferenciais entre as deformações e deslocamentos, por meio da definição de plano desviador, pode-se escrever a equação:

$$\varepsilon_{\sim} = L_{\sim} u_{\sim} \quad (23)$$

$L_{\sim}$: Matriz que contém os operadores de derivação.

$$L_{\sim} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Substituindo (18) em (23):

$$\varepsilon_{\sim} = L_{\sim} \phi_{\sim} d_{\sim} \quad (25)$$

ou:

$$\varepsilon_{\sim} = B_{\sim} d_{\sim} \quad (26)$$

na qual:

$$B_{\sim} = L_{\sim} \phi_{\sim} \quad (27)$$

Sabendo que $\varepsilon_{\sim}^T = d_{\sim}^T B_{\sim}^T$ e substituindo (26) em (22):

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} (d_{\sim}^T B_{\sim}^T E_{\sim} B_{\sim} d_{\sim}) dV_e - f_{\sim E}^T d_{\sim} \quad (28)$$

ou,

$$\Pi_{pe} = U_e(d_{\sim}) - f_{\sim E}^T d_{\sim} \quad (29)$$

Finalmente, de (17) em (29), tem-se:

$$\frac{\partial U_e(d_{\sim})}{\partial d_j} - f_{\sim E} = 0 \quad (30)$$

A equação (30) não é única. Todas as suas similares organizadas matricialmente resultarão em:

$$k_{\sim} d_{\sim} = -f_{\sim E} \quad (31)$$

$k_{\sim}$: Matriz de rigidez do elemento.

A equação (31) é local, ou seja, cada elemento finito é representado por uma equação nos moldes da (31). Arranjando todas as equações (31) referentes a todos os elementos finitos que compõem a estrutura em uma equação global, tem-se:

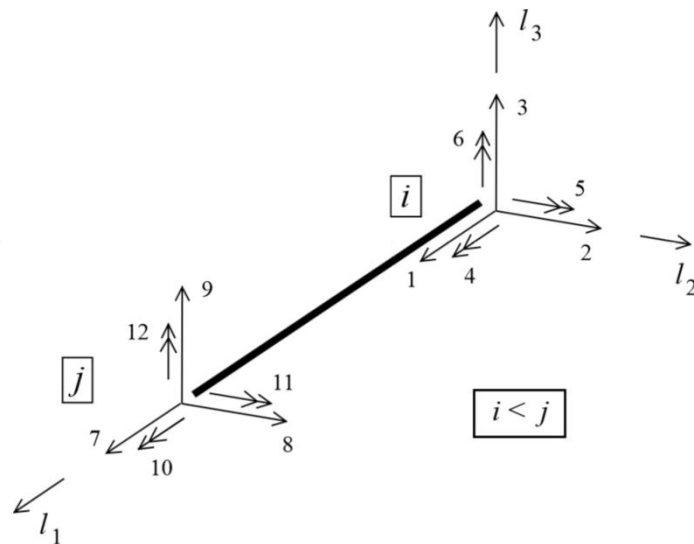
$$K_{\sim} D_{\sim} = -F_{\sim E} \quad (32)$$

Com a obtenção dos deslocamentos nodais do sistema todo, as funções de deslocamento ficam determinadas, sendo possível calcular o valor da deformação do elemento através de (26) ou (27) e, com isso, obter o valor da tensão do elemento através de (20), o que finaliza o processo.

2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Cada elemento discretizado possui suas coordenadas no sistema local e no sistema global. A figura 2 mostra o elemento em suas coordenadas locais.

Figura 6 - Graus de liberdade de um elemento de viga 3D no sistema local de coordenadas



Fonte: Azevedo (2011)

A matriz de rigidez no sistema local para o elemento de viga da figura 4 depende de alguns fatores:

E : Módulo de elasticidade longitudinal;

A : Área da seção transversal do elemento;

L : Comprimento do elemento;

G : Módulo de elasticidade transversal;

I_2 : Momento de inércia da seção transversal do elemento em relação ao eixo l_2 ;

I_3 : Momento de inércia da seção transversal do elemento em relação ao eixo l_3 ;

I_t : Momento de inércia de torção da seção transversal da barra.

Obs.: l_2 e l_3 são os eixos principais centrais de inércia da seção transversal do elemento.

A matriz de rigidez para o elemento de viga da figura 4 é dada por:

$$K_l = \begin{bmatrix} K_l^{ii} & K_l^{ij} \\ K_l^{ji} & K_l^{jj} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Cada um dos 4 termos da matriz da equação 1 são desenvolvidos a seguir.

$$\underline{K}_l^{ii} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & 6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\underline{K}_l^{ij} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 2EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3/L \end{bmatrix} \quad (35)$$

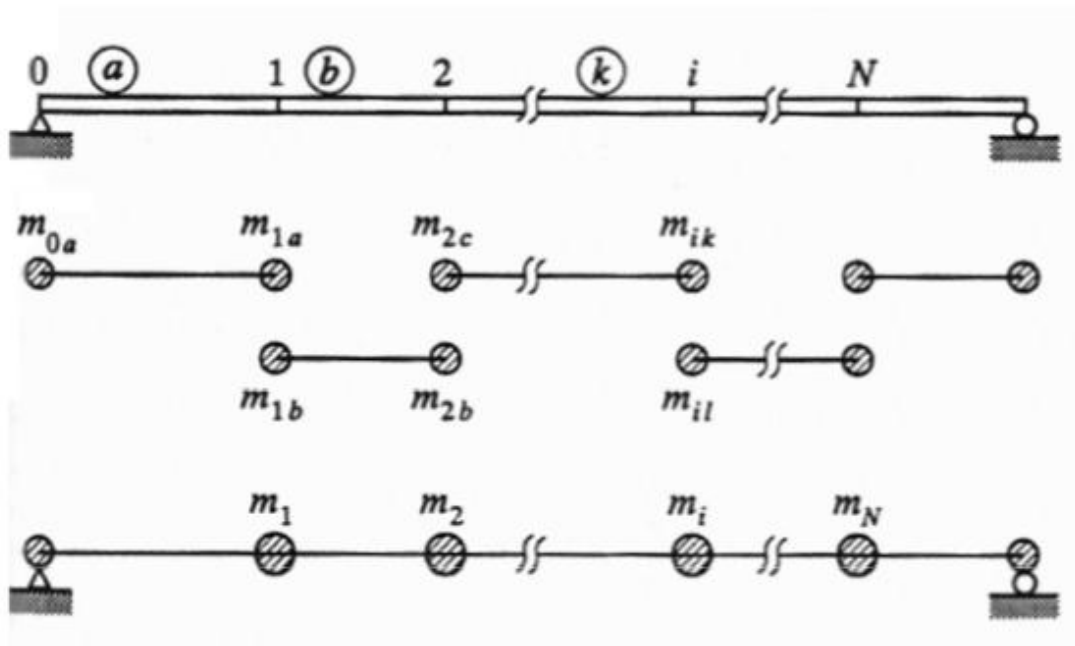
$$\underline{K}_l^{ji} = (\underline{K}_l^{ij})^T \quad (36)$$

$$\underline{K}_l^{jj} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (37)$$

2.2 MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

A maneira mais simples de se obter as propriedades de massa de uma estrutura é assumindo que toda a massa do elemento está concentrada nos pontos os quais os deslocamentos são definidos, ou seja, nos nós. Essa massa concentrada em cada nó é a soma das contribuições nodais de todos os elementos inerente a esse nó. (CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., 1993). A figura 5 exemplifica a ideia.

Figura 7 - Concentração da massa nos nós



Seguindo essa ideia a matriz de massa concentrada pode ser descrita como:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (38)$$

Outra maneira de esboçar a matriz de massa de uma estrutura é montando a matriz de massa consistente. Em razão da falta de confiabilidade em programas computacionais de autovalores, nem todos os deslocamentos que são utilizados nas análises estáticas são levados em consideração nas análises dinâmicas. Por exemplo, em uma análise dinâmica convencional de uma estrutura de uma asa de uma aeronave, somente as deflexões em relação a posição normal são levadas em consideração. Essa questão levanta hipóteses de como formular a matriz de massa para um número reduzido de graus de liberdade. Tal colocação pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais (PRZEMINIECKI, 1968).

O primeiro passo para se obter a matriz de massa consistente é separar a matriz de rigidez K da matriz de deslocamento U :

$$K_l = \begin{bmatrix} K_l^{ii} & K_l^{ij} \\ K_l^{ji} & K_l^{jj} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$U_l = \begin{bmatrix} U_l^{ii} \\ U_l^{ji} \end{bmatrix} \quad (40)$$

A matriz coluna U_l^{ii} se refere a todos os deslocamentos que se deseja obter como graus de liberdade para a análise dinâmica, enquanto U_l^{ji} representa todos os deslocamentos restantes, os quais são utilizados na análise estática e não serão levados em consideração na formulação da nova matriz de massa equivalente. Os deslocamento U_l^{ji} podem ser obtidos através do da equação de equilíbrio estático $P=KU$, assumindo que as forças externas P_l^{ji} correspondentes aos deslocamentos U_l^{ji} são todas iguais a zero. Então:

$$U_l^{ji} = -[K_l^{jj}]^{-1} K_l^{ji} U_l^{ii} \quad (41)$$

Quando se denomina a matriz de massa equivalente para os deslocamentos U_l^{ii} como M_e e se introduz os deslocamentos virtuais δU , isso se torna imediatamente equivalente ao trabalho virtual de duas representações de massa equivalente de um sistema contínuo:

$$\delta U_l^{iiT} (-M_e \ddot{U}_l^{ii}) = \delta U^T (-M \ddot{U}) = - \begin{bmatrix} \delta U_l^{iiT} & \delta U_l^{jjT} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \ddot{U}_l^{ii} \\ \ddot{U}_l^{jj} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Substituindo a equação (41) em (42):

$$\delta U_l^{iiT} M_e \ddot{U}_l^{ii} = \delta U_l^{iiT} \begin{bmatrix} I & -K_l^{ij} K_l^{jj-1} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I \\ -K_l^{jj-1} K_l^{ij} \end{bmatrix} \ddot{U}_l^{ii} \quad (43)$$

Então:

$$M_e = A_e^T M A_e \quad (44)$$

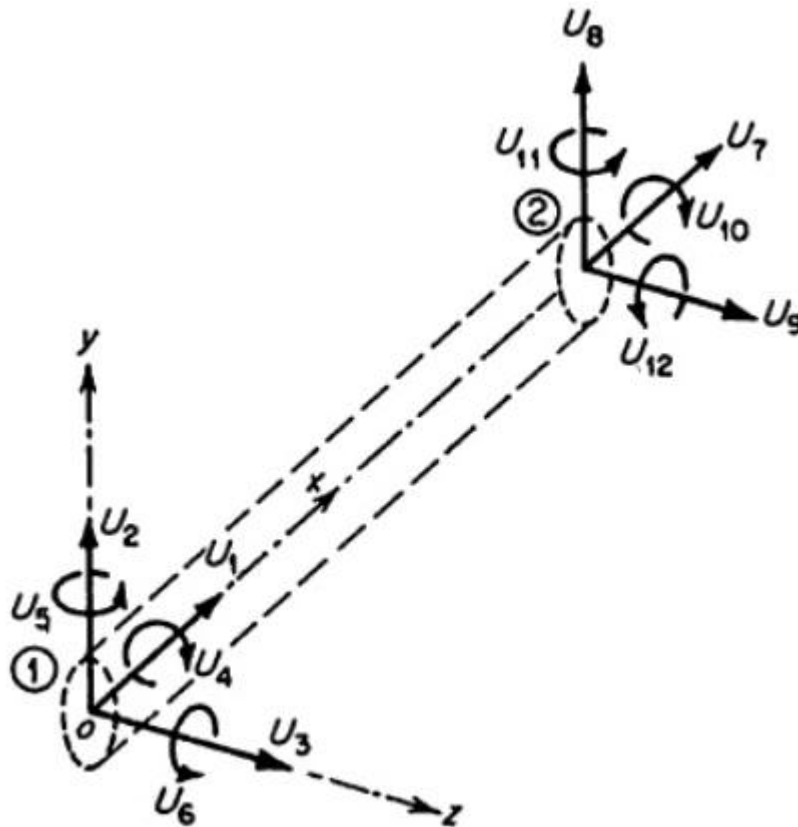
Na qual:

$$A_e = \begin{bmatrix} I \\ -K_l^{jj-1} K_l^{ij} \end{bmatrix} \quad (45)$$

A matriz de massa equivalente M_e se refere a matriz de massa concentrada para um número reduzido de graus de liberdade. Pode ser notado que a matriz de massa concentrada é obtida na equação (44) por uma transformação congruente similar usada na determinação de M e K (PRZEMINIECKI, 1968).

Para um elemento de viga a matriz de massa consistente segue alguns passos a mais. Para, então descreve-la, deve assumir um elemento de viga em coordenadas locais como mostrado na figura 6.

Figura 8 - Elemento de Viga em coordenadas locais



Fonte: Przemieniecki (1968)

A origem do sistema de coordenadas locais é no nó 1, com o eixo ox na direção longitudinal do elemento e os eixos oy e oz na seção perpendicular ao elemento. A matriz U para esse elemento é constituída de doze deslocamento, seis deflexões e seis rotação:

$$U = \{U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_{12}\} \quad (46)$$

Usando a teoria de flexão de engenharia e negligenciando deformações de cisalhamento, pode-se mostrar facilmente que a matriz a na relação $u = aU$ é dado pela equação (46).

$$a^T = \begin{matrix} & u_x & u_y & u_z \\ \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ 6(\xi - \xi^2)\eta \\ 6(\xi - \xi^2)\zeta \\ 0 \\ (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\zeta \\ (-1 + 4\xi - 3\xi^2)l\eta \\ \xi \\ 6(-\xi + \xi^2)\eta \\ 6(-\xi + \xi^2)\zeta \\ 0 \\ (-2\xi + 3\xi^2)l\zeta \\ (2\xi - 3\xi^2)l\eta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ 0 \\ -(1 - \xi)l\zeta \\ 0 \\ (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ 0 \\ 3\xi^2 - 2\xi^2 \\ 0 \\ -l\xi\zeta \\ 0 \\ (-\xi^2 + \xi^3)l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ -(1 - \xi)l\eta \\ (-\xi + 2\xi^2 - \xi^3)l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\xi^2 - 2\xi^2 \\ -l\xi\eta \\ (\xi^2 - \xi^3)l \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (47)$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \eta = \frac{y}{l} \quad \zeta = \frac{z}{l} \quad (48)$$

l : Comprimento do elemento de viga

Sabendo que a definição de matriz de massa vem da equação:

$$m = \int_v \rho a^T a dV \quad (49)$$

substitui-se a equação (47) na equação (49) e integrando por todo o volume do elemento, tem-se a matriz de massa consistente 12x12 do elemento de viga:

$$m = \rho A l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{11l}{210} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & & & & & & & \\ 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} & & & & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & \\ 0 & 0 & \frac{13l}{420} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_z}{30A} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & \\ 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_y}{30A} & 0 & -\frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} \end{bmatrix}$$

Simétrico

(50)

na qual, os termos que possuem os momentos de inércia I_y e I_z representam a inércia rotacional e os termos que possuem o termo de momento de inércia polar J_x representam a inércia torcional do elemento.

Os efeitos das deformações de cisalhamento até podem ser levados em consideração, mas essa abordagem levaria a expressões mais complicadas na matriz de massa consistente.

Continuando com o embasamento que é necessário ter para o presente trabalho, os tópicos adiantes tratarão das equações de Lagrange, espaços de estado e do protagonista Método dos Observadores de estado.

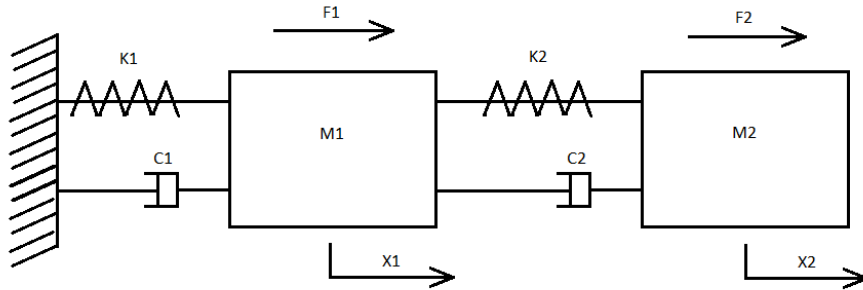
2.2 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

As equações propostas por Joseph-Louis Lagrange constituem uma formulação da mecânica clássica. Elas combinam a conservação do momento linear com a conservação de energia. São providas de uma poderosa ferramenta matemática e equivalem a outros equacionamentos da mecânica como o formalismo newtoniano. Na mecânica Lagrangiana, a trajetória de um sistema de partículas é obtida resolvendo as próprias equação de Lagrange e uma de suas formas, chamadas equações de primeira espécie tratando as restrições como equações adicionais. Por outro lado, as equações de segunda espécie incorporam as restrições diretamente na escolha das coordenadas generalizadas. Então, para um sistema com n graus de liberdade, elas são expressas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{(n)} \quad (51)$$

O termo q_i representa a coordenada generalizada, Q_i , por sua vez, é o termo representante da força generalizada não conservativa e, para um sistema conservativo de n graus de liberdade, essa força é nula. A figura 10 mostra um sistema ilustrativo com 2 graus de liberdade para a demonstração de como elaborar as equações de Lagrange.

Figura 9 - Sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade.



Fonte: Do próprio autor.

Aplicando as equações de Lagrange para o sistema da figura 10, tem-se:

- Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (52)$$

- Energia Potencial:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad (53)$$

- Energia dissipada (função de Rayleigh):

$$R = \frac{1}{2}C_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}C_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \quad (54)$$

Voltando os olhos para a equação (51), nota-se que é necessário realizar a derivação das equações (52), (53) e (54) para poderem ser substituídas em (51). Então, para as coordenadas X_1 e X_2 (figura 10), tem-se:

$$m_1\ddot{X}_1 + K_1X_1 + K_2(X_1 - X_2) + C_1\dot{X}_1 + C_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = F_1 \quad (55)$$

$$m_2\ddot{X}_2 - K_2(X_1 - X_2) - C_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = F_2 \quad (56)$$

Sabendo que a equação do movimento na forma matricial é dada por:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{\vec{F}\} \quad (57)$$

substituindo (55) e (56) em (57), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Essa modelagem permite integrar os efeitos de cada elemento finito que compõem qualquer tipo de sistema contínuo e permite a obtenção da equação do movimento da estrutura como um todo, caso seja necessário.

2.2 ESPAÇO DE ESTADOS

O *estado* de um sistema é sistema de equações matemáticas com variáveis chamadas variáveis de estado de modo que os valores iniciais desse sistema e as excitações correspondentes ao mesmo sejam suficientes para descrever a resposta do sistema durante todo o intervalo de tempo.

A modelagem em espaço de estado do sistema a ser analisado no presente trabalho será feita no software GNU Octave. O equacionamento para a modelagem de espaço de estado foi obtido a partir do livro Engenharia de Controle Moderno (OGATA, 1998). Essa modelagem em espaço de estado tem como característica usar o domínio do tempo. Para um caso particular de um sistema linear invariante no tempo, o modelo em espaço de estado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad (59)$$

A: Matriz dinâmica;

B: Matriz de entrada;

C: Matriz de saída;

D: Matriz de transmissão indireta;

$X(t)$: Vetor de variáveis de estado;

$Y(t)$: Vetor de variáveis de saída;

$u(t)$: Vetor de variáveis de entrada.

Para o caso mostrado na figura 10, rearranjando matematicamente as equações (59), tem-se:

$$\dot{X}_1 = \frac{-K_1+K_2}{m_1} X_1 - \frac{K_2}{m_1} X_2 - \frac{c_1+c_2}{m_1} \dot{X}_1 + \frac{c_2}{m_1} \dot{X}_2 + \frac{F_1}{m_1} \quad (60)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{K_2}{m_2} X_1 - \frac{K_2}{m_2} X_2 + \frac{c_2}{m_2} \dot{X}_1 - \frac{c_2}{m_2} \dot{X}_2 + \frac{F_2}{m_2} \quad (61)$$

As variáveis X_1 e X_2 são os deslocamento e $\dot{X}_1$ e $\dot{X}_2$ são as velocidades. Elas compreendem as variáveis físicas do sistema. O vetor de variáveis de estado é dado por:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Substituindo as variáveis de estado pelas variáveis físicas:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Reescrevendo as equações (60) e (61) utilizando as variáveis físicas de (63) obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1+K_2}{m_1} & \frac{-K_2}{m_1} & \frac{-c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} & \frac{-K_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

e a equação de saída, também na forma matricial, é:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Associando as equações (56) e (57) com (51), é possível notar que as igualdades:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1+K_2}{m_1} & \frac{-K_2}{m_1} & \frac{-c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} & \frac{-K_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \quad e \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Nesse ponto, tendo sido apresentada a modelagem por espaços de estado, é necessário fazer a correlação com as matrizes de massa e de rigidez previamente expostas, e ainda saber qual será a cara da matriz de amortecimento da estrutura da torre a ser analisada. A matriz A da equação (70) pode ser enxergada como uma composição de 4 outras matrizes diferentes:

$$A = \begin{bmatrix} Z & I \\ -KM^{-1} & -CM^{-1} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Z : Matriz quadrada nula da mesma ordem da matriz de massa;

I : Matriz identidade;

K : Matriz de rigidez;

M : Matriz de massa;

C : Matriz de amortecimento.

Na análise que será realizada, será considerado o amortecimento estrutural, de modo que esse amortecimento é contínuo decorrido do atrito interno do material que compõem a estrutura da torre. Porém chegar até a matriz dita de amortecimento estrutural proporcional

não é uma tarefa simples. Segundo Adhikari, a busca pelo amortecimento em estruturas que vibram sempre foi uma área muito ativa nas pesquisas em dinâmicas de estruturas e que, apesar do estudo em larga escala, o entendimento que se tem a respeito do amortecimento é ainda muito primitivo. Uma das idealizações aceitas foi proposta por Rayleigh e diz que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. Desde sua proposição tem sido usada largamente e, hoje, é conhecida como “Amortecimento de Rayleigh”, “Amortecimento Proporcional” ou ainda “Amortecimento Clássico”. (ADHIKARI; WOODHOUSE, 2000).

A matriz de amortecimento proporcional proposto por Rayleigh como sendo a combinação linear das matrizes de massa e rigidez é expressa por:

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M] \quad (71)$$

Na equação (71), a matriz de amortecimento C é ortogonal em relação aos autovetores do sistema. Aplicando uma transformação de coordenadas modal, a matriz $[c]$ de amortecimento modal se torna diagonal.

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [c] = \alpha[1] + \beta[\omega]^2 \quad (72)$$

A matriz de amortecimento $[c]$ é dada por:

$$[c] = 2[\xi\omega] \quad (73)$$

O coeficiente de amortecimento viscoso c_i para o i -ésimo modo é obtido por:

$$c_i = 2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \quad (74)$$

E a razão de amortecimento viscoso ξ_i é dada por:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (75)$$

E as razões de amortecimento para os modos i -ésimo e j -ésimo são ξ_i e ξ_j , então α e β podem ser obtidos através do sistema de equações algébricas abaixo:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} \quad (76)$$

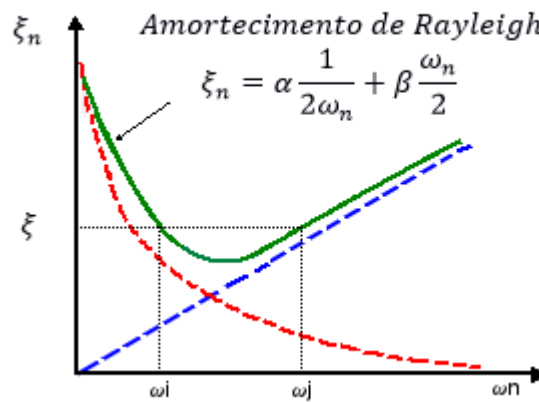
Uma vez que os dois modos possuem o mesmo coeficiente de amortecimento ($\xi_i = \xi_j = \xi$), os coeficientes α e β podem ser definidos como:

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (77)$$

$$\beta = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (78)$$

A razão de amortecimento viscoso não será sempre a mesma para qualquer modo. Ela muda de acordo com a frequência.

Figura 10 - Variação da razão de amortecimento



Fonte: Adaptado de Dassault Systemes (2012)

2.3 OBSERVADORES DE ESTADO

Antes de definir e exemplificar Observadores de Estado, algumas considerações devem ser feitas. Quando se fala em engenharia hoje em dia, está implícito algum tipo de sistema de controle. Cada vez mais esse tipo de sistema se difunde com o intuito de aprimorar ainda mais o funcionamento de sistemas e componentes.

Ogata (1998) diz que os sistemas de controle são peças importantes na constituição de um componente integrante de toda a sociedade industrial e são de suma importância para a produção de bens requeridos pelos consumidores. É esse sistema de controle que exerce influência direta no comando numérico de máquinas – ferramentas das indústrias; é, ainda, essencial em operações industriais como: controle de pressão de tubulações e caldeiras, temperaturas, umidade, viscosidade, vazão, dentre outros.

Segundo D’Azzo e Houpis (1998) e Ogata (1998) é creditado a James Watt o primeiro trabalho relevante utilizando sistemas de controle. Foi no século XVIII que Watt elaborou um controlador centrífugo para o controle de velocidade de uma máquina a vapor.

A teoria de controle que foi desenvolvida desde o trabalho de James Watt até a década de 50, classificada como teoria de controle convencional ou clássica, se tornou inadequada para lidar com sistemas mais modernos, pois ela tratava somente de sistemas que tinham uma única entrada e uma única saída.

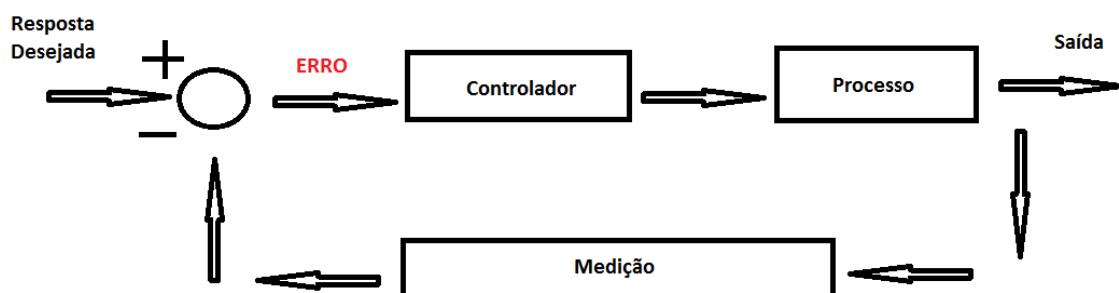
Com o advento do computador digital na década de 60, tornou-se possível a análise de sistemas mais complexos, ou seja, sistemas que apresentavam múltiplas entradas e múltiplas saídas. Além de atender esses sistemas multivariáveis, a nova teoria de controle estava hábil a lidar com a crescente complexidade dos novos sistemas que surgiam a todo o momento.

É nesse contexto que surge uma nova definição: a de controle moderno. Segundo Merovitch (1990), o controle moderno é uma aproximação do domínio do tempo baseada na descrição do espaço de estados do comportamento dos sistemas dinâmicos.

De posse das definições, adentrando na área abrangida pelo controle moderno, Schwarzenbach e Gill (1978) afirmam que o objetivo principal do uso do controle em um sistema dinâmico é voltado para o entendimento completo do sistema de modo que, controlando-o, seja possível obter os valores de saída requeridos. Se o objetivo é controlar, é necessário saber como esse controle vai ser exercido sobre o sistema. Existem sistemas de controle de malha fechada e de malha aberta.

Segundo Ogata (1998), em um sistema de controle de malha fechada, representado pela figura 11, é possível notar que o sinal de erro (diferença entre o sinal de entrada e o sinal retroagido) exerce influência sobre o controlador de modo a ser reduzido para que a saída seja a desejada.

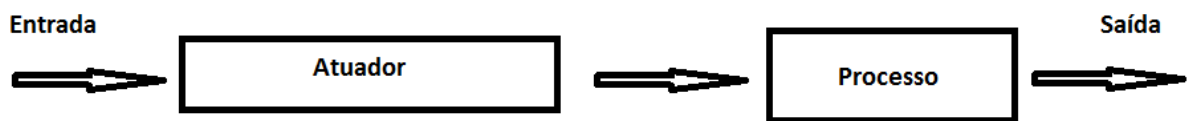
Figura 11 - Esquema de controle a malha fechada



Fonte: Do próprio autor.

Por outro lado, tem-se o sistema de controle a malha aberta (figura 12), o qual não se mostra muito satisfatório quanto ao controle do sistema em questão. Isso ocorre, pois, qualquer perturbação externa ao sistema de controle pode ocasionar em uma alteração quase sempre significativa do valor de saída. Porém, apesar de não se sair bem no controle propriamente dito, um sistema de controle a malha aberta se mostra essencial na diagnose e localização de falhas em sistemas mecânicos.

Figura 12 - Esquema de controle a malha aberta



Fonte: Do próprio autor.

Com todo o embasamento dado, é possível adentrar no âmbito de observadores de estados. Os observadores de estado foram propostos pela primeira vez por Luenberger (1964) que deu continuidade nos estudos para melhorar a técnica (LUENBERGER, 1971). A teoria de controle moderno engloba a teoria de observadores de estado e tem se difundido por diversas áreas de pesquisa.

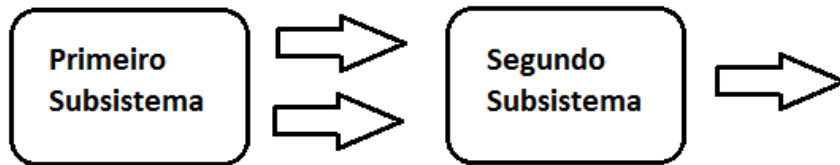
Desde a proposta de Luenberger (1964) os observadores têm se destacado em diversos projetos de pesquisa. A simplicidade da técnica faz dela um componente cada vez mais requerido em projetos em geral, principalmente por ter a capacidade de estimar com precisão um estado não medido.

Conforme Luenberger (1964), o projeto de um sistema mecânico que gera uma aproximação para o vetor de estado é chamado *observador de estado* e seu embasamento teórico está intimamente ligado aos conceitos de controlabilidade, observabilidade e estabilidade. O observador é um sistema dinâmico o qual apresenta características determinadas pelo seu criador (projetista) e tem como entradas as entradas e saídas do sistema real, cujo estado aproximado possui um vetor de estado linearmente relacionado com a aproximação que se deseja.

Luenberger (1964) ainda afirma que a maioria dos sistemas é, em sua essência, um observador. Como exemplo, ele propõe observar um sistema simples composto por dois subsistemas. O primeiro subsistema possui somente saídas que são entradas do segundo

subsistema que possui saídas. As saídas do primeiro subsistema, caso sejam utilizadas para monitorar o segundo subsistema farão desse segundo subsistema um observador do primeiro através de uma transformação linear que faz a relação entre o estado do observador e o estado do sistema original. A figura 13 mostra, de maneira sucinta, esse processo.

Figura 13 - Um observador simples



Fonte: Do próprio autor.

Uma facilidade proporcionada por observadores de estado é, se o sistema for linear, a possibilidade de estimar um estado não disponível através de medições. Essa prática é muito utilizada devido ao alto custo ou a própria impossibilidade de instalação de sensores para a obtenção de todas as variáveis de todos os estados desejados.

De volta ao âmbito do projeto de observadores, a obtenção de sistemas de controle linear que apresentam desempenho ótimo é subordinada as propriedades de *controlabilidade* e *observabilidade* do sistema.

Um sistema é caracterizado como completamente controlável se, em qualquer instante inicial, é possível transferir todo esse estado inicial para qualquer estado final em um intervalo de tempo finito através de um vetor de excitação livre de excitação (D'AZZO; HOUPIS, 1988). Para que isso ocorra é necessário satisfazer a condição da equação (79) que diz respeito ao posto de uma matriz que consiste no número de linhas não nulas de uma matriz que esteja escrita de forma reduzida ou escalonada, ou ainda, o número de linhas linearmente dependentes da matriz:

$$\text{Posto}[M_c] = \text{Posto}[[B][A][B] \dots [A]^{n-1}[B]] = n \quad (79)$$

$[M_c]$: Matriz de controlabilidade;

$[A]$: Matriz Dinâmica;

$[B]$: Matriz de Entradas;

n : Ordem do sistema.

Por outro lado, um sistema é caracterizado como completamente observável se todo e qualquer estado inicial $\{x(t_0)\}$ é obtido a partir da resposta $\{y(t)\}$ durante um intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_f$ (D'AZZO; HOUPIS, 1988). Analogamente, a condição da equação (80) deve ser satisfeita:

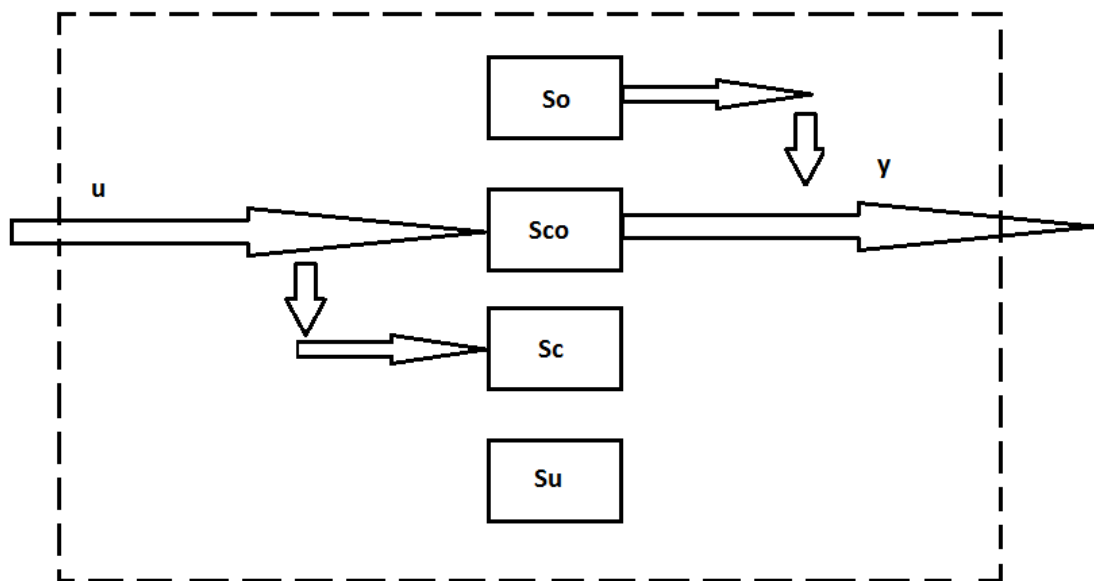
$$\text{Posto}[M_o] = \text{Posto}[[C_{me}]^T [A]^T [C_{me}]^T [A^T]^2 [C_{me}]^T \dots [A^T]^{n-p} [C_{me}]^T] = n \quad (80)$$

M_o : Matriz de Observabilidade

$[C_{me}]$: Matriz de Dados

A figura 14 ilustra com mais clareza os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

Figura 14 - Divisões possíveis de um sistema



Fonte: Do próprio autor.

S_{co} : Subsistema controlável e observável;

S_o : Subsistema não controlável e observável;

S_c : Subsistema controlável e não observável;

S_u : Subsistema não controlável e não observável.

Foi com Luenberger (1964) que o método dos observadores de estado foi incorporado a sistemas de controle, ou seja, o observador passou a ser o responsável por abastecer o vetor de estado do sistema sob controle com as variáveis que não foram medidas de maneira direta.

Sendo assim, um observador de estado pode ser descrito conforme as equações (81) e (82):

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (81)$$

$$\{y(t)\} = [C_{me}]\{x(t)\} + [D]\{u(t)\} \quad (82)$$

$\{x(t)\} \in R^{nx1}$: Vetor de estados;

$\{u(t)\} \in R^{px1}$: Vetor de entrada;

$\{y(t)\} \in R^{kx1}$: Vetor de saída;

$[A] \in R^{nxn}$: Matriz dinâmica;

$[B] \in R^{n \times p}$: Matriz de distribuição;

$[C_{me}] \in R^{k \times n}$: Matriz de medidas;

$[D] \in R^{k \times p}$: Matriz constante;

n : Ordem do sistema;

p : Número de entradas;

k : Número de saídas.

A principal vantagem desse tipo de representação é que o vetor de estado contém todas as informações necessárias para reconstituir completamente um estado passado do sistema além de fazer com que um estado futuro do próprio sistema seja representado por uma equação diferencial de primeira ordem.

É através dessa capacidade de previsão e reconstituição de estados que o observador se torna uma importante ferramenta para identificar qualquer tipo de alterações no sistema devido a sua alta sensibilidade a qualquer mudança por mínima que seja. Tantas características só são realmente eficazes se os observadores forem montados de maneira correta.

O método dos observadores de estado é um conjunto de equações diferenciais que representa a mesma resposta do sistema real uma vez que este esteja funcionando de maneira correta. Sua montagem é dividida em duas etapas:

- Montagem do observador global;
- Montagem dos observadores robustos acoplados as variáveis sujeitas a alterações.

Para a montagem do observador global, utiliza-se a mesma matriz dinâmica do sistema que está sendo estudado. Isso é feito para que quando o sistema estiver funcionando corretamente, uma cópia do comportamento seja feita e a presença de qualquer avaria, no momento que for feita a leitura do sistema e comparado com a cópia obtida pelo observador, possa ser notada a diferença e, assim, reconhecida a mudança.

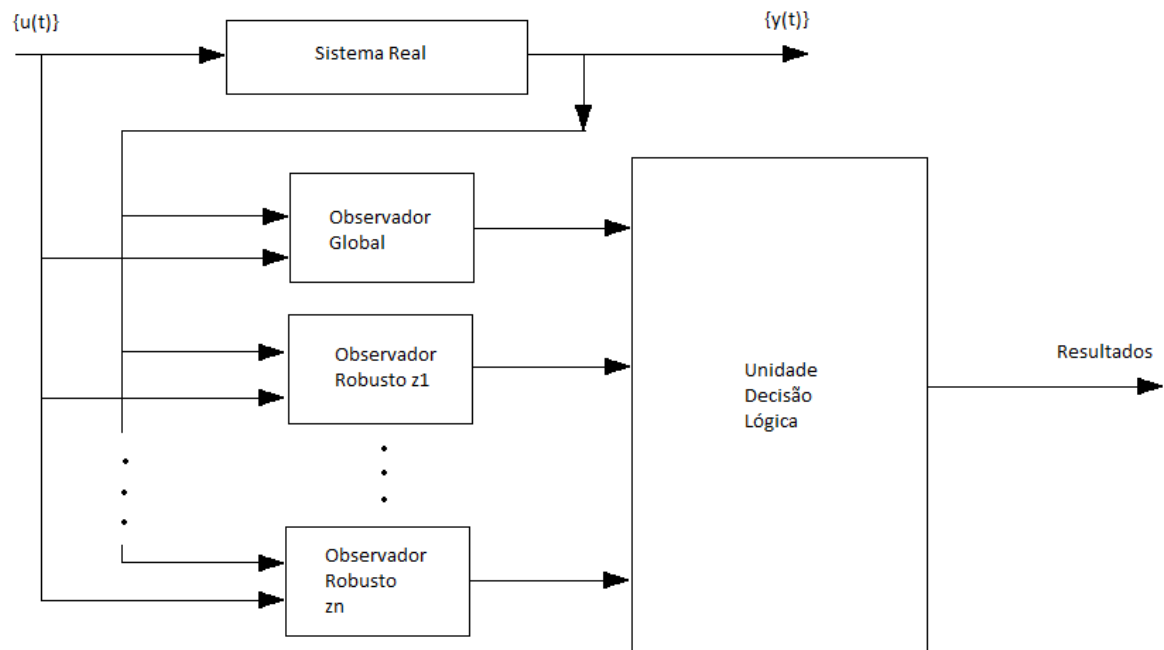
Além de detectar a variação em algum parâmetro do sistema, Clark (1978) e Melo (1998) afirmam que esse observador também pode ser usado para verificar falhas em sensores depois de descartada a possibilidade de haver falha nos parâmetros do sistema em estudo através da verificação via observadores robustos.

O próximo passo consiste na montagem dos observadores robustos junto dos parâmetros que estão sujeitos a falhas ou avarias. Porém, antes da montagem é retirado dos observadores o percentual de perda dos parâmetros a serem estudados para que, dessa forma, o observador que ficar próximo da resposta do sistema será o responsável pela identificação da falha.

Além disso, há a possibilidade de vários parâmetros sofrerem avarias ou falharem ao mesmo tempo. A solução para contornar esse problema é a montagem de um observador robusto em todos os parâmetros que podem sofrer avarias ou falhas, ou ainda, montar observadores em todos os parâmetros do sistema para assim conseguir um controle mais eficaz.

A figura 16 ilustra a montagem de um sistema de observação que possui uma entrada (vetor força de excitação) e uma saída (vetor resposta).

Figura 15 - Sistema de Observação



Fonte: Do próprio autor.

Ainda na figura 16, nota-se a presença de uma unidade de decisão lógica que é responsável por coletar os dados dos observadores montados e comparar com a resposta do sistema a fim de localizar as alterações.

3 TORRES DE TRANSMISSÃO

Segundo a *Metálica – Construção Civil*, o papel fundamental de uma torre de transmissão é acomodar, da maneira mais segura e eficaz possível, as linhas de transmissões. A energia que percorre as linhas de transmissão pode ser transportada de modo subterrâneo ou em sobrecarga. O transporte de energia em sobrecarga é, em geral, a melhor opção devido à facilidade de manutenção e instalação. Nesse caso, as linhas de transmissão são acomodadas em estruturas metálicas de grandes altitudes, as torres de transmissão.

As torres de transmissão geralmente são instaladas em locais planejados e abertos e distantes de qualquer lugar habitado para garantir a segurança. Tais torres são estruturas compostas por barras combinadas de modo a dar resistência e estabilidade para a estrutura final. Em teoria, essas medidas de segurança associadas a outras deveriam englobar todo e qualquer tipo de previsão a respeito de acidentes que poderiam ocorrer nas torres, porém não é o que acontece.

3.1 AÇÃO DOS VENTOS

Assim como em diversos outros casos, a ação dos ventos também foi analisada e normatizada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. Em seu conjunto de regulamentação consta a norma NBR 6123, denominada *Forças devidas ao vento em edificações*, a qual informa as etapas para lidar com a ação dos ventos em diversos tipos de estruturas e edificações.

Estabelecida em 1987, a NBR 6123 apesar de tudo, não conseguiu prevenir que acidentes em estruturas ocorressem. Em âmbito nacional é possível citar, como exemplo de incidente envolvendo torres de transmissão, o vendaval que atingiu a cidade de Ilha Solteira em 16 de outubro de 2010 provocando a queda de dez torres de transmissão nas proximidades da maior usina hidrelétrica do estado de São Paulo (vide figura 17).

Figura 16 - Torres e linhas de transmissão que caíram no Rio Paraná.



Fonte: Zamperin (2010)

Outro caso de queda de torres ocorreu no sul do estado do Rio de Janeiro atingindo algumas cidades como Resende, Itatiaia e Porto Real. Na ocasião, quatro torres vieram ao chão e uma sofreu avarias sérias as quais provocaram uma interrupção de mais de vinte horas no fornecimento de energia elétrica.

Figura 17 - Torres de transmissão caídas após chuva forte no Sul do estado do Rio de Janeiro



Fonte: G1 Sul do Rio e Costa Verde (2013)

No âmbito internacional, o exemplo mais clássico de incidente envolvendo uma estrutura e a ação de ventos é a queda da Ponte de Tacoma localizada no Estreito de Tacoma em Washington nos Estados Unidos.

Figura 18 - Ponte de Tacoma



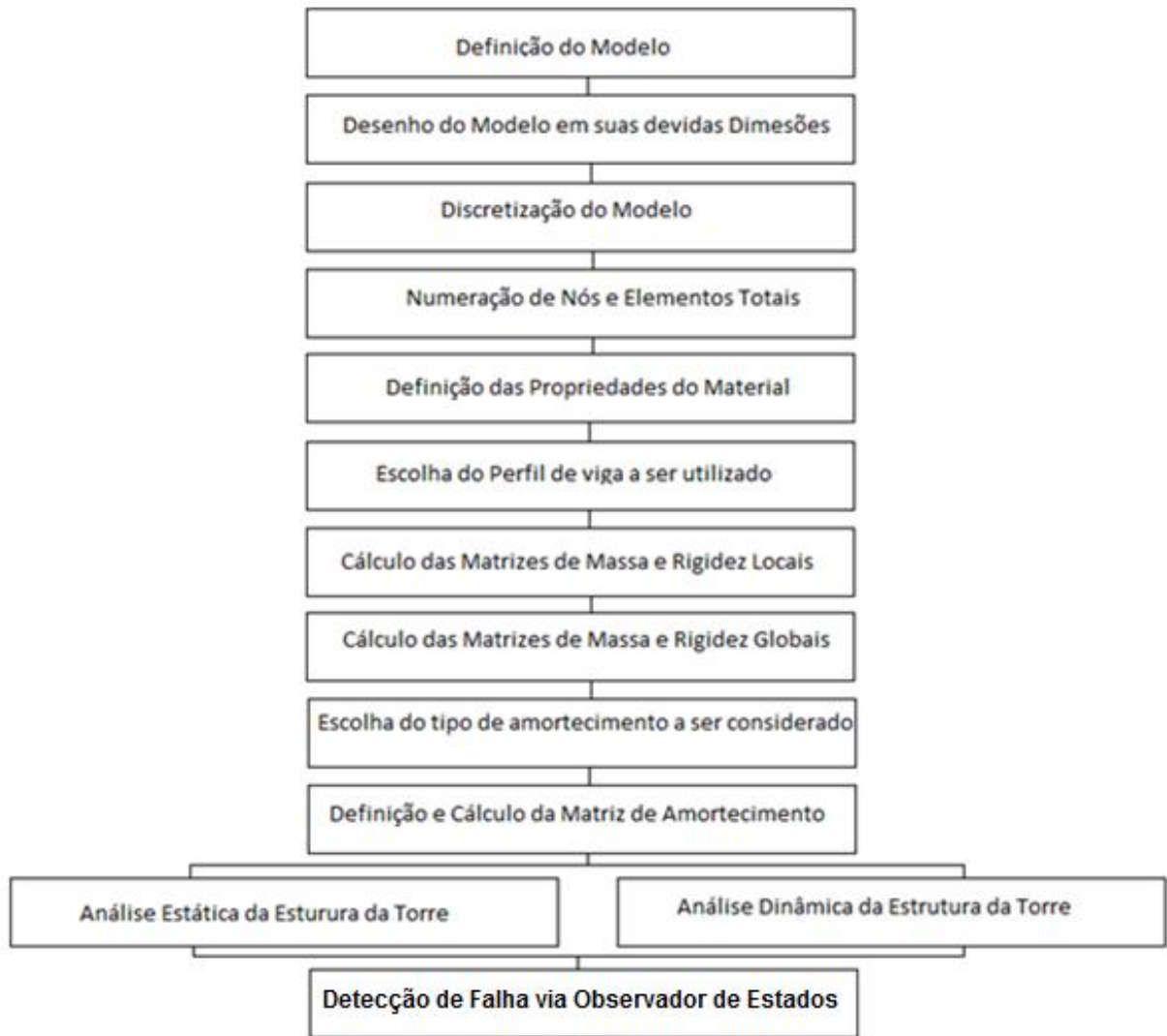
Fonte: Dias (2016)

A queda da ponte foi ocasionada por ventos que excitaram a ponte em uma de suas frequências naturais. Como é de conhecimento, quando uma estrutura é excitada em alguma frequência natural, a amplitude de vibração é máxima para aquela frequência em questão. Situações desse tipo causam grandes esforços internos em estruturas exigindo mais do que ela pode suportar ocasionando a falha.

Esses exemplos de incidentes mostram o tamanho do problema que uma simples falta de verificação pode causar. No caso do Brasil, mesmo com a vigência da norma NBR 6123, que prevê esforços estáticos ainda é possível observar acidentes muito recentes ocasionados pela ação dos ventos, os quais se enquadram em esforços dinâmicos.

4 ETAPAS DA ANÁLISE COMPUTACIONAL

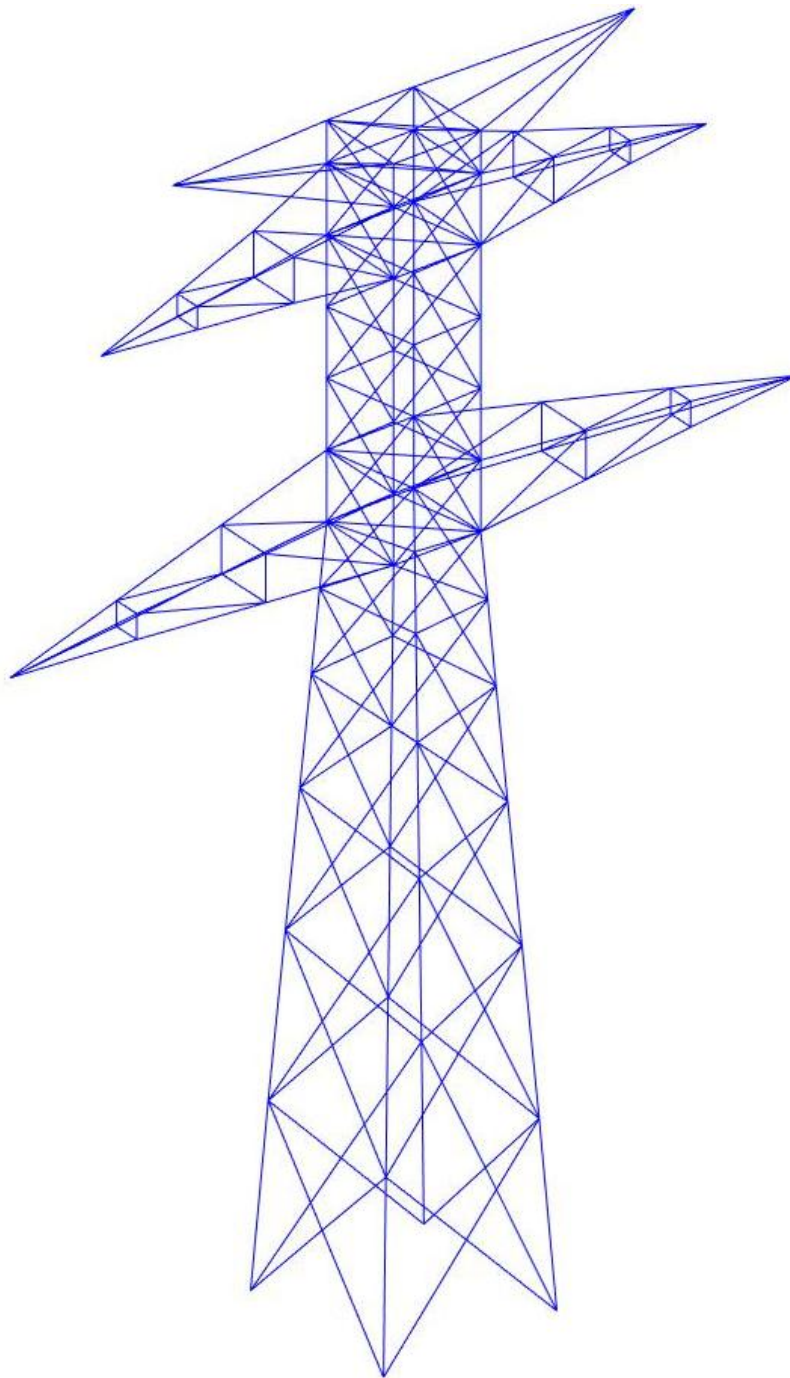
Figura 19 - Fluxograma da Sequência a ser seguida para a análise computacional



Fonte: Do próprio autor.

complexidade estrutural. Tanto o modelo 2D da figura 21 quanto o modelo 3D extrapolado das figuras 22, 23 e 24 (mesmo modelo diferenciados pelas medidas apresentadas) NÃO representam um modelo de torre de transmissão real. Todas as dimensões relevantes da figura 22 podem ser encontradas na figura 21.

Figura 21 - Modelo 3D utilizado nos cálculos



Fonte: Do próprio autor.

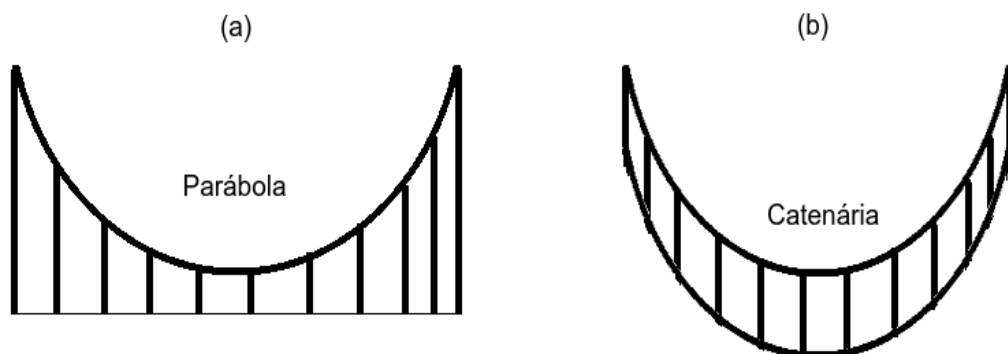
5.1 TRAÇÃO ATUANTE NOS CABOS CONDUTORES

Com a finalidade de simular a ligação entre torres niveladas, sem necessariamente inseri-las na simulação, fez-se necessário encontrar a força de tração presente nos cabos das linhas de transmissão estudada. Porém, antes de qualquer consideração se faz necessário alguns comentários a respeito de cabos condutores em linhas de transmissão.

Cabos são, por definição, elementos que suportam somente esforços axiais. Os cabos das linhas de transmissão apresentam tal característica além de uma peculiar. Eles não ficam totalmente esticados entre uma torre e outra, o que justifica a curvatura que o cabo faz entre as torres. Essa “barriga” é chamada de Catenária. Segundo o dicionário, Catenária é (sub. Fem.) 1. *geom* curva plana que representa a forma de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, pesado, suspenso por suas extremidades a partir de dois pontos fixos, e submetido exclusivamente à força da gravidade; 2. *geom.anl* curva plana que se obtém pela suspensão de uma cadeia uniforme por seus dois extremos; curva da função cosseno hiperbólico.

É comum que a Catenária seja confundida com a Parábola. Apesar da semelhança aos olhos de quem vê as curvas, conceitualmente elas são bem distintas. Comparada ao conceito já exposto da Catenária, a Parábola, segundo o dicionário, é (subst. fem.) 2. *geom.* lugar geométrico dos pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa são iguais. A figura 23 mostra a diferença conceitual das duas curvas enfatizando a distribuição de um carregamento em ambas.

Figura 22 - Curvas: (a) Parábola e (b) Catenária



Fonte: Do próprio autor.

Como já exposto, os cabos condutes das linhas de transmissão apresentam curvaturas características de catenárias e essa será a base dos breves cálculos a seguir para que a tração atuante neles seja descoberta. Para que os cálculos sejam realmente breves, algumas condições foram impostas e outras foram adotadas de padrões fornecidos pela COPEL e pela ELETRONORTE. São elas:

- O centro de distribuição de energia é a Usina de Ilha Solteira;
- A linha estudada é de 380 kV;
- As torres estão niveladas e o ambiente está a 25°C;
- A potência média fornecida pela usina é de 174 MW;
- O fator de potência da usina é de 0.85;
- A perda por efeito Joule é de 2.5 %;
- Os cabos são do tipo CAA (Corpo de Alumínio e alma de Aço);
- Tensão atuante no condutor não deve exceder a tensão máxima de ruptura;
- O centro consumidor está a pelo menos 100 km de distância da usina.

Uma vez definida a situação, pode-se então dar início aos cálculos que resultarão na tração do cabo e suas componentes vertical e horizontal.

Antes de tudo é necessário conhecer a corrente que passa pelo condutor.

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}Vfp} \quad (83)$$

P: Potência média da linha;

V: Tensão da linha;

fp: Fator de Potência.

Logo, $I = 311A$.

Se a perda é de 2,5 % por efeito Joule, a Potência Dissipada (Pd) é:

$$Pd = "perda".P = 0,025.174 = 4,35MW \quad (84)$$

A resistência (R) no condutor é dada por:

$$R = \frac{Pd}{I^2} \simeq 45W \quad (85)$$

Se, da literatura, a resistividade do alumínio é $\rho = 0.02688W \cdot mm^2/m$, então a Área da Seção do cabo condutor é dada por:

$$A = \frac{\rho \cdot D}{R} \simeq 60mm^2 \quad (86)$$

Uma vez obtida a área da seção do cabo condutor, é necessário buscar em catálogos qual seria o mais adequado para suprir as condições impostas para essa linha de transmissão. A figura 26 traz parte de um catalogo fornecido pela PLP Brasil, uma empresa fornecedora de materiais para linhas e torres de transmissão.

Figura 23 - Cabos de Alumínio com Alma de Aço – CAA

Cabos de Alumínio CAA ou ACSR

Codigo	Bitola AWC ou MCM	Área Nominal			Área de Cobre Equival. (mm²)	Encordoamento Nº de fios X Diâmetro (mm)		Diâmetro Nominal do Cabo (mm)	Peso Nominal (kg/km)	Carga de Ruptura (kgf)
		Alumínio (mm²)	Aço (mm²)	Total (mm²)		Alumínio	Aço			
Wren	8	8,37	1,44	9,81	5,26	6x1,33	1x1,33	3,99	33,77	340
Warbler	7	10,55	1,77	12,32	6,63	6x1,50	1x1,50	4,50	42,53	425
Turkey	6	13,30	2,16	15,46	8,37	6x1,68	1x1,68	5,04	53,61	530
Thrush	5	16,77	2,78	19,55	10,55	6x1,89	1x1,89	5,67	67,64	660
Swan	4	21,15	3,56	24,71	13,30	6x2,12	1x2,12	6,36	85,31	830
Swallow	3	26,67	4,43	31,10	16,77	6x2,38	1x2,38	7,14	107,60	1.025
Sparrow	2	33,62	5,60	39,22	21,15	6x2,67	1x2,67	8,01	135,60	1.265
Robin	1	42,41	7,07	49,48	26,67	6x3,00	1x3,00	9,00	171,10	1.585
Raven	1/0	53,49	8,89	62,38	33,62	6x3,37	1x3,37	10,11	215,90	1.940
Quail	2/0	67,43	11,21	78,64	42,41	6x3,78	1x3,78	11,34	272,10	2.425
Pigeon	3/0	85,01	14,22	99,23	53,49	6x4,25	1x4,25	12,75	342,90	3.030
Penguin	4/0	107,20	17,90	125,10	67,43	6x4,77	1x4,77	14,31	432,50	3.820
Partridge	266.8	135,20	22,00	157,20	85,01	26x2,57	7x2,00	16,28	545,40	5.100
Owl	266.8	135,20	17,50	152,70	85,01	6x5,36	7x1,79	16,09	506,80	4.330
Waxwing	266.8	135,20	7,40	142,60	85,01	18x3,09	1x3,09	15,47	429,80	3.210
Piper	300	152,00	35,50	187,50	95,60	30x2,54	7x2,54	17,78	697,00	7.000
Ostrich	300	152,00	24,70	176,70	95,60	26x2,73	7x2,12	17,28	612,70	5.730
Oriole	336.4	170,50	39,80	210,30	107,20	30x2,69	7x2,69	18,83	781,30	7.735
Linnet	336.4	170,50	27,80	198,30	107,20	26x2,89	7x2,25	18,31	687,40	6.375
Martin	336.4	170,50	9,40	179,90	107,20	18x3,47	1x3,47	17,37	542,00	4.060
Chickadee	397.5	201,40	11,20	212,60	126,70	18x3,77	1x3,77	18,87	641,50	4.717
Lark	397.5	201,40	47,00	248,40	126,70	30x2,92	7x2,92	20,44	923,30	9.060
Ibis	397.5	201,40	32,80	234,20	126,70	26x3,14	7x2,44	19,88	811,70	7.340
Pelican	477	241,70	13,40	255,10	152,00	18x4,14	1x4,14	20,68	770,90	5.579
Flicker	477	241,70	31,30	273,00	152,00	24x3,58	7x2,39	21,49	914,10	7.802
Hen	477	241,70	56,40	298,10	152,00	30x3,20	7x3,20	22,40	1.108,00	10.590
Hawk	477	241,70	39,40	298,10	152,00	26x3,44	7x2,68	21,80	974,90	10.590
Heron	500	253,30	59,10	312,40	159,40	30x3,28	7x3,28	22,96	1.162,00	8.820
Osprey	556	282,00	15,70	297,70	177,40	18x4,47	1x4,47	22,33	898,80	6.509
Parakeet	556	282,00	36,50	318,50	177,40	24x3,87	7x2,58	23,22	1.067,00	9.004
Eagle	556.5	282,00	65,80	347,80	177,40	30x3,46	7x3,46	24,22	1.293,00	12.360
Dove	556.5	282,00	45,90	327,90	177,40	26x3,72	7x2,89	23,55	1.137,00	10.190
Peacock	605	306,60	39,80	346,40	192,80	24x4,03	7x2,69	24,21	1.159,00	9.798
Squab	605	306,60	49,90	356,50	192,80	26x3,87	7x3,01	24,54	1.268,00	10.954
Teal	605	306,60	69,90	376,50	192,80	30x3,61	19x2,16	25,25	1.397,00	13.630
Duck	605	306,60	39,80	346,40	192,80	54x2,69	7x2,69	24,21	1.158,00	10.210
Rook	636	322,30	41,70	364,00	202,70	24x4,14	7x2,76	24,82	1.219,00	10.274

Fonte: PLP Brasil (2016)

Observado a tabela da figura 26, a possibilidade que supre as necessidades dos

Figura 24 - Cabo RAVEN.

Código	Bitola AWC ou MCM	Área Nominal			Área de Cobre Equival. (mm²)	Encordoamento Nº de fios X Diâmetro (mm)		Diâmetro Nominal do Cabo (mm)	Peso Nominal (kg/km)	Carga de Ruptura (kgf)
		Alumínio (mm²)	Aço (mm²)	Total (mm²)		Alumínio	Aço			
● ● ●										
Sparrow	2	33,62	5,60	39,22	21,15	6x2,67	1x2,67	8,01	135,60	1.265
Robin	1	68,64	7,07	75,71	36,67	6x3,37	1x3,37	9,90	171,10	1.585
Raven	1/0	53,49	8,89	62,38	33,62	6x3,37	1x3,37	10,11	215,90	1.940
Quail	2/0	87,43	11,21	98,64	42,41	6x3,78	1x3,78	11,34	272,10	2.425
Pigeon	3/0	85,01	14,22	99,23	53,49	6x4,25	1x4,25	12,75	342,90	3.030

resultados obtidos é o cabo de codinome RAVEN como mostra a figura 27.

Fonte: Adaptado de PLP Brasil (2016)

Para que o cabo escolhido seja aprovado, é necessário que a tensão atuante no cabo não exceda a carga de ruptura mostrada na última coluna referente ao cabo RAVEN na figura 27. Segundo a COPEL e a ELETRONORTE, a distância média entre as torres de transmissão de 380 kV é, em média, de 400 m podendo variar entre 300 m e 500 m e a flecha é de 10,5 m para torres de 42 m de altura com condutores distantes de 4,5 m dos braços de apoio das torres. Com esses dados é possível encontrar os valores da tração axial atuante no cabo condutor e duas componentes vertical e horizontal.

A tração horizontal (T_o) do cabo condutor é dada por:

$$T_o = \frac{\rho_m V_t}{8.y} \quad (88)$$

ρ_m : Massa por unidade de comprimento;

V_t : Vão entre torres;

y : Flecha do cabo condutor.

Realocando os valores em suas respectivas posições, obtêm-se o valor da componente horizontal da tração atuante no cabo condutor (a qual será utilizada como força atuante na parte da torre que confere suporte ao cabo condutor):

$$T_o = 411,24 \text{ kgf} \quad (89)$$

O próximo passo é obter a componente vertical da tração, porém, antes é necessário conhecer o comprimento do cabo. Então:

$$L = V_t + \frac{8y^2}{3V_t} = 400,735m \quad (90)$$

Conhecido o valor do comprimento do cabo condutor, o valor da componente vertical da tração $\{T_v\}$ é dada por:

$$T_v = \frac{L\rho}{2} \simeq 43,3kgf \quad (91)$$

Por fim, a tensão axial no cabo condutor pode ser escrita como:

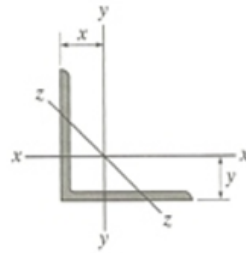
$$T_a = \sqrt{T_v^2 + T_o^2} \quad (92)$$

$$T_a = 413,5 \text{ kgf} < 1940 \text{ kgf} \quad \text{OK!} \quad (93)$$

Como foi verificado nos cálculos o cabo condutor escolhido atente as especificações e pode, então, ser usado para o fim que foi destinado.

5.2 PERFIL DE VIGA

Com a finalidade de facilitar cálculos, muitos trabalhos trazem consigo perfis de vigas com a forma retangular. Essa prática pode fornecer resultados que fogem a realidade do modelo usado no estudo e não provendo os resultados esperados. O presente trabalho, como visa uma proximidade com a realidade (apesar das simplificações que apresenta), traz um perfil na forma de cantoneira de abas iguais (também usado em estruturas reais de torres) como pode ser visto na figura 25.

Figura 25 - Perfil em forma de Cantoneira de abas iguais

Fonte: Hibbeler (2008)

Todas as informações a respeito do perfil e que são necessárias para todo e qualquer cálculo podem ser observadas na figura 26.

Figura 26 - Dados do perfil da viga.

Cantoneiras de abas iguais Unidades SI										
Tamanho e espessura	Peso por metro	Área	eixo x-x				eixo y-y			
			I	S	r	y	I	S	r	x
mm	kg	mm ²	10 ⁶ mm ⁴	10 ⁶ mm ³	mm	mm	10 ⁶ mm ⁴	10 ⁶ mm ³	mm	mm
L203 × 203 × 25,4	75,9	9.680	36,9	258	61,7	60,1	36,9	258	61,7	60,1

Fonte: Hibbeler (2008)

5.3 INSERÇÃO DA FALHA

Até o presente vários assuntos foram abordados com o intuito de situar o leitor dos conceitos que abrangem o presente trabalho. Porém ainda há mais um ponto, o mais crucial deles, a ser explanado para que tudo que já foi dito faça sentido e seja utilizado da maneira correta. Recapitulando o objetivo do trabalho, que talvez possa ter se perdido em meio a tanta informação, a busca é para se encontrar um elemento trincado em meio a uma estrutura composta essencialmente por elementos de viga. A frente, será tratado o aparecimento dessa trinca nesse (s) elemento (s).

De acordo com o princípio de Saint Venant, a simples presença de uma trinca é capaz de causar um distúrbio na distribuição de tensão nos arredores da trinca. Essa “bagunça” nas tensões se torna ainda maior quando a trinca está aberta e ocasiona uma redução na rigidez local. Por outro lado, se a trinca estiver fechada, há situações em que um elemento trincado

pode ser modelado como se fosse um elemento sem trinca, como é o caso de uma trinca fechada em compressão.

Agora, é importante saber como ficará a matriz de rigidez desse elemento apresenta uma trinca. Para isso, alguns tópicos devem ser abordados para que o contexto da matriz de rigidez faça sentido e seja embasado da maneira correta.

A energia de deformação de um elemento sem trinca, levando em conta apenas a força cisalhante, pode ser expressa como:

$$W^{(0)} = \frac{1}{2EI} \int_0^h (M + Pz)^2 dz = \frac{1}{2EI} (M^2 h_i + \frac{P^2 h_i^3}{3} + MP h_i^2) \quad (94)$$

Da equação (94), E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia e h_i é o comprimento do elemento. P e M são, respectivamente, as forças cisalhantes e momento fletor. A energia adicional, tomando como exemplo uma viga retangular de altura h e de largura b, devido a trinca, pode ser escrita como:

$$W^{(1)} = b \int_0^a \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E} da \quad (95)$$

Na equação (95), $E' = E$ para o estado plano de tensão e $E' = \frac{E}{1+\nu}$ para o estado plano de deformação. O extremo superior de integração a é a profundidade da trinca e ν é o coeficiente de Poisson. Para um elemento flexionado, a equação (95) leva a:

$$W^{(1)} = b \int_0^a \frac{(K_{IM} + K_{IP})^2 + K_{IIP}^2}{E'} da \quad (96)$$

$$K_{IM} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(s)$$

$$K_{IP} = \frac{3PL}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(s) \quad (97)$$

$$K_{IIP} = \frac{P}{bh} \sqrt{\pi a} F_{II}(s)$$

A equação (97) mostra os fatores de intensidade da tensão para as trincas do tipo aberta e escorregamento devido as forças P e M, e

$$F_I(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s} \tan \frac{\pi s}{2} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin \frac{\pi s}{2}]^4}{\cos \frac{\pi s}{2}}} \quad (98)$$

$$F_{II}(s) = (3s - 2s^2) \frac{1.122 - 0.561s + 0.085s^2 + 0.18s^3}{\sqrt{1-s}} \quad (99)$$

A variável s denota a relação entre a profundidade da trinca e a altura do elemento ($s = a/h$). Os elementos que compõem a matriz de flexibilidade $c_e^{(o)}$ do elemento sem a presença da trinca pode ser obtido através da equação (100):

$$c_{ij}^{(o)} = \frac{\partial^2 W^{(o)}}{\partial P_i \partial P_j}; \Rightarrow i, j = 1, 2 \Rightarrow P_1 = P, P_2 = M \quad (100)$$

Analogamente, tem-se os elementos da matriz adicional de flexibilidade:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial P_i \partial P_j}; \Rightarrow i, j = 1, 2 \Rightarrow P_1 = P, P_2 = M \quad (101)$$

Logo, a matriz de flexibilidade para o elemento que possui uma trinca aberta é

$$c_e = c_e^{(o)} + c_e^{(1)} \quad (102)$$

Das condições de equilíbrio:

$$(P_i \quad M_i \quad P_{i+1} \quad M_{i+1})^T = T(P_{i+1} \quad M_{i+1})^T \quad (103)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (104)$$

O princípio do trabalho virtual permite obter as matrizes dos elementos sem trinca e com trinca. São elas, respectivamente:

$$k_u = T c_e^{(o)-1} T^T$$

$$k_u = T c_e^{-1} T^T \quad (105)$$

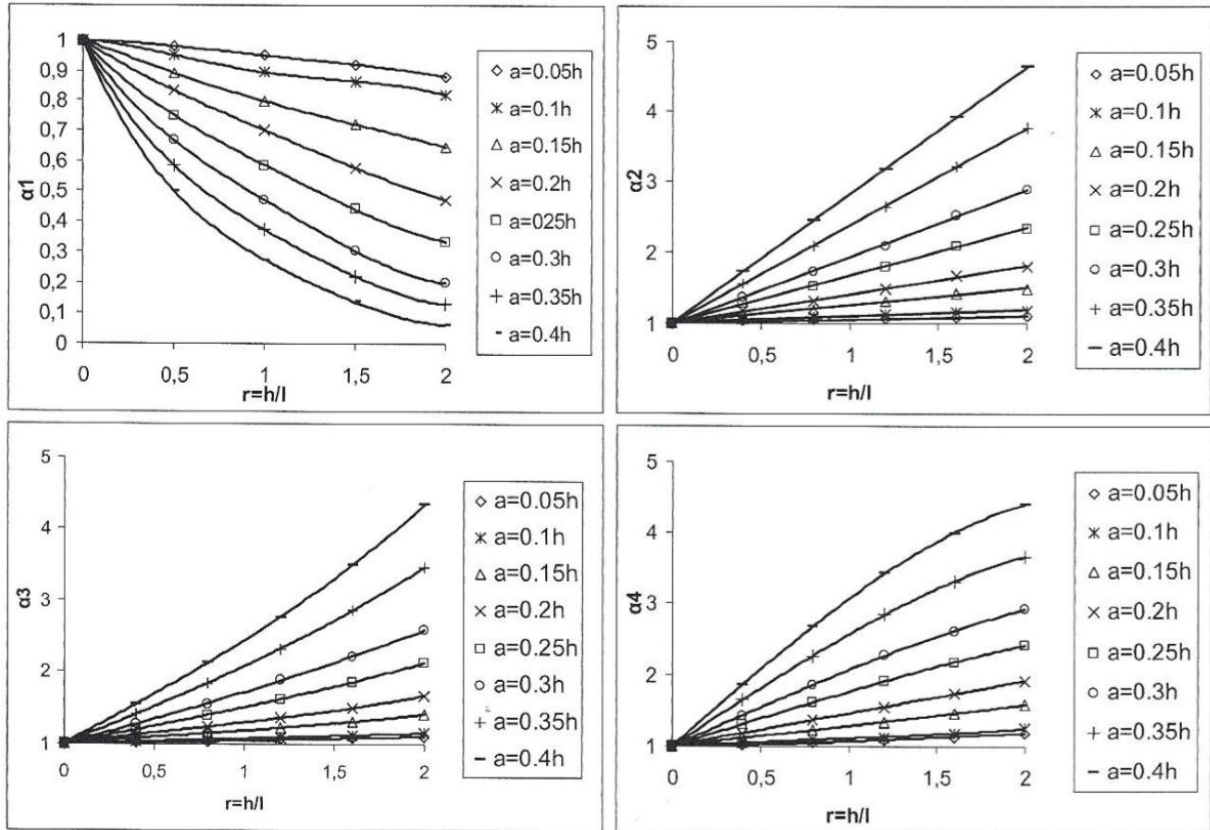
A matriz de rigidez para um elemento de viga sem trinca já foi mostrada anteriormente no tópico 2.2, então sua passagem por aqui será omitida para evitar possíveis confusões. Dando sequência ao raciocínio, a matriz de rigidez para um elemento trincado é uma função explícita que envolve todos os parâmetros já citados na matriz de rigidez do elemento não trincado. Os valores de k na equação (106) remetem aos elementos da matriz de rigidez local do elemento de viga citado no tópico 2.2.

$$\begin{array}{c}
k_c = \alpha_1 \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
k_{11}\alpha_2 & k_{12}\alpha_2 & k_{13}\alpha_2 & k_{14}\alpha_2 & k_{15}\alpha_2 & k_{16}\alpha_2 & k_{17}\alpha_2 & k_{18}\alpha_2 & k_{19}\alpha_2 & k_{110}\alpha_2 & k_{111}\alpha_2 & k_{112}\alpha_2 \\
& k_{22}\alpha_3 & k_{23}\alpha_2 & k_{24}\alpha_4 & k_{25}\alpha_2 & k_{26}\alpha_3 & k_{27}\alpha_2 & k_{28}\alpha_4 & k_{29}\alpha_2 & k_{210}\alpha_3 & k_{211}\alpha_2 & k_{212}\alpha_4 \\
& & k_{33}\alpha_2 & k_{34}\alpha_2 & k_{35}\alpha_2 & k_{36}\alpha_2 & k_{37}\alpha_2 & k_{38}\alpha_2 & k_{39}\alpha_2 & k_{310}\alpha_2 & k_{311}\alpha_2 & k_{312}\alpha_2 \\
& & & k_{44}\alpha_3 & k_{45}\alpha_2 & k_{46}\alpha_4 & k_{47}\alpha_2 & k_{48}\alpha_3 & k_{49}\alpha_2 & k_{410}\alpha_4 & k_{411}\alpha_2 & k_{412}\alpha_3 \\
& & & & k_{55}\alpha_2 & k_{56}\alpha_2 & k_{57}\alpha_2 & k_{58}\alpha_2 & k_{59}\alpha_2 & k_{510}\alpha_2 & k_{511}\alpha_2 & k_{512}\alpha_2 \\
& & & & & k_{66}\alpha_3 & k_{67}\alpha_2 & k_{68}\alpha_4 & k_{69}\alpha_2 & k_{610}\alpha_3 & k_{611}\alpha_2 & k_{612}\alpha_4 \\
& & & & & & k_{77}\alpha_2 & k_{78}\alpha_2 & k_{79}\alpha_2 & k_{710}\alpha_2 & k_{711}\alpha_2 & k_{712}\alpha_2 \\
& & & & & & & k_{88}\alpha_3 & k_{89}\alpha_2 & k_{810}\alpha_4 & k_{811}\alpha_2 & k_{812}\alpha_3 \\
& & & & & & & & k_{99}\alpha_2 & k_{910}\alpha_2 & k_{911}\alpha_2 & k_{912}\alpha_2 \\
& & & & & & & & & k_{1010}\alpha_3 & k_{1011}\alpha_2 & k_{1012}\alpha_4 \\
& & & & & & & & & & k_{1111}\alpha_2 & k_{1112}\alpha_2 \\
& & & & & & & & & & & k_{1212}\alpha_3
\end{array} \right]
\end{array}$$

Simétrico

A figura 27 mostra as curvas que dão origem as equações para o cálculo dos valores de α_1 , α_2 , α_3 e α_4 (tabela 2).

Figura 27 - Coeficiente de avaliação da matriz de rigidez para a condição de trinca aberta



Fonte: Muscolino (2003)

Tabela 2 - Equações das curvas dos coeficientes

α_1	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -0,0133r^4 + 0,0533r^3 - 0,0767r^2 - 0,0133r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = -0,0493r^4 + 0,1907r^3 - 0,2117r^2 - 0,0357r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = -0,0133r^4 + 0,0447r^3 - 0,0157r^2 - 0,2187r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0227r^4 - 0,1013r^3 + 0,1803r^2 - 0,4017r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,057r^4 - 0,2583r^3 + 0,4577r^2 - 0,6714r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0913r^4 - 0,4153r^3 + 0,7352r^2 - 0,9412r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0972r^4 - 0,4843r^3 + 0,9653r^2 - 1,2067r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,1031r^4 - 0,5532r^3 + 1,1954r^2 - 1,4723r + 1$
α_2	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = 0,0306r + 1$

$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 0,0857r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,2421r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,3985r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,6712r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,9439r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 1,381r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 1,8181r + 1$
α_3	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -3^{-14}r^2 + 0,05r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 1^{14}r^3 - 3^{-14}r^2 + 0,075r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,0182r^3 - 0,0364r^2 + 0,2045r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0363r^3 - 0,0729r^2 + 0,334r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,0184r^3 + 0,0001r^2 + 0,4867r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0004r^3 + 0,0731r^2 + 0,6394r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0385r^3 + 0,0392r^2 + 0,9938r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,0765r^3 + 0,0053r^2 + 1,3482r + 1$
α_4	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -0,0043r^3 + 0,0342r^2 + 0,0388r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$

Fonte: Muscolino (2003)

Sendo r a variável que representa a razão entre a altura e o comprimento do elemento trincado ($r = h/l$).

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

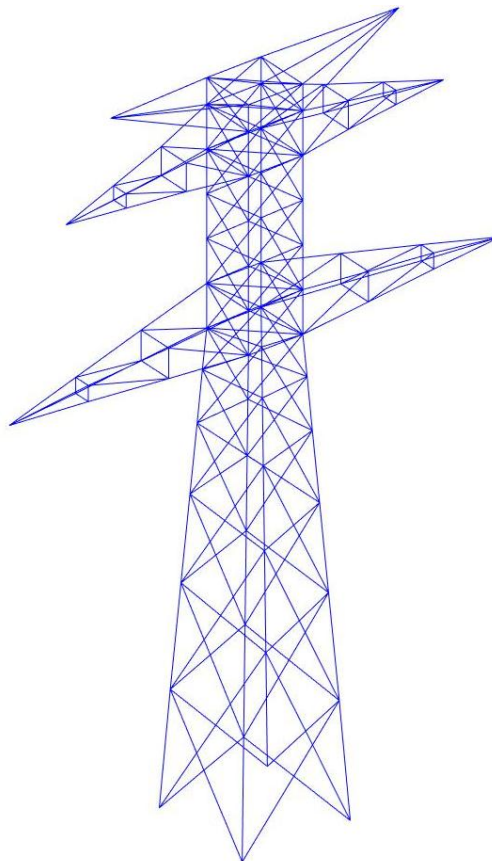
Os tópicos a seguir têm o propósito de mostrar os resultados obtidos com a análise computacional de um modelo simplificado de uma torre de transmissão.

6.1 ANÁLISES ESTÁTICA E DINÂMICA – MODOS DE VIBRAR E FREQUÊNCIAS NATURAIS

Para que o esboço simplificado do modelo da torre fosse feito, foi necessário tomar como base um modelo real. O modelo real escolhido foi o de uma torre autoportante utilizada pela CESP no estado de São Paulo que conduz linhas de transmissão de 380kV.

A figura 28, como já visto anteriormente, ilustra o modelo simplificado da torre alvo do estudo.

Figura 28 - Modelo da Torre de Transmissão utilizada no estudo.



Fonte: Do próprio autor.

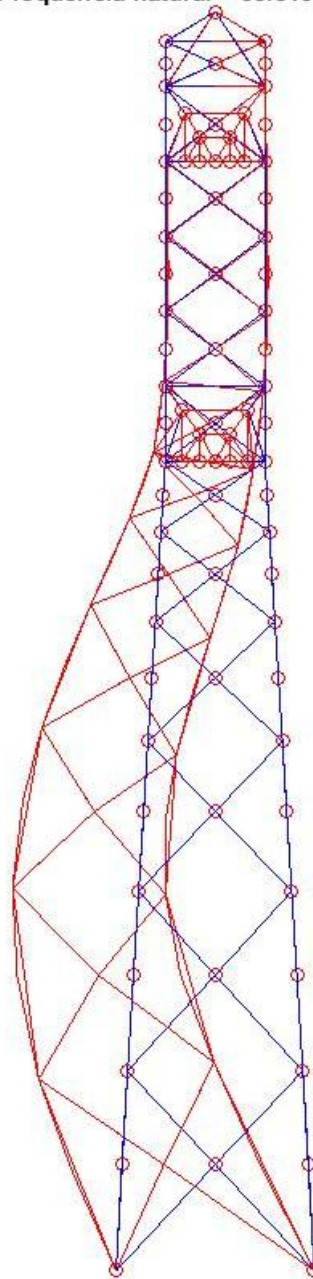
Utilizando o software GNU Octave, foi feita modelo numérico da torre da seguinte forma:

- Discretização em nós e elementos;
- Numeração dos nós e elementos;
- Montagem dos vetores de coordenadas (x, y, z) dos nós;
- Montagem da matriz dos elementos de acordo com a sua posição entre nós;
- Características do material e do perfil da viga utilizada;
- Determinação dos graus de liberdade livres e restritos.
- E, por fim, aplicação das forças nos devidos graus de liberdade simulando um carregamento por ventos.

Como dessas análises praticamente só as matrizes foram aproveitadas, julgou-se desnecessário o a apresentação das mesmas nessa seção uma vez que as dimensões não possibilitaram. Mas não quer dizer que somente as matrizes foram calculadas. As figuras abaixo mostram alguns valores das primeiras frequências naturais do modelo da torre e seus modos de vibrar uma vez que elas já estão interligadas umas às outras. Nota-se que as extremidades dos braços parecem fixas. Ao longo das discussões no tópico seguinte esse ponto será melhor explicado.

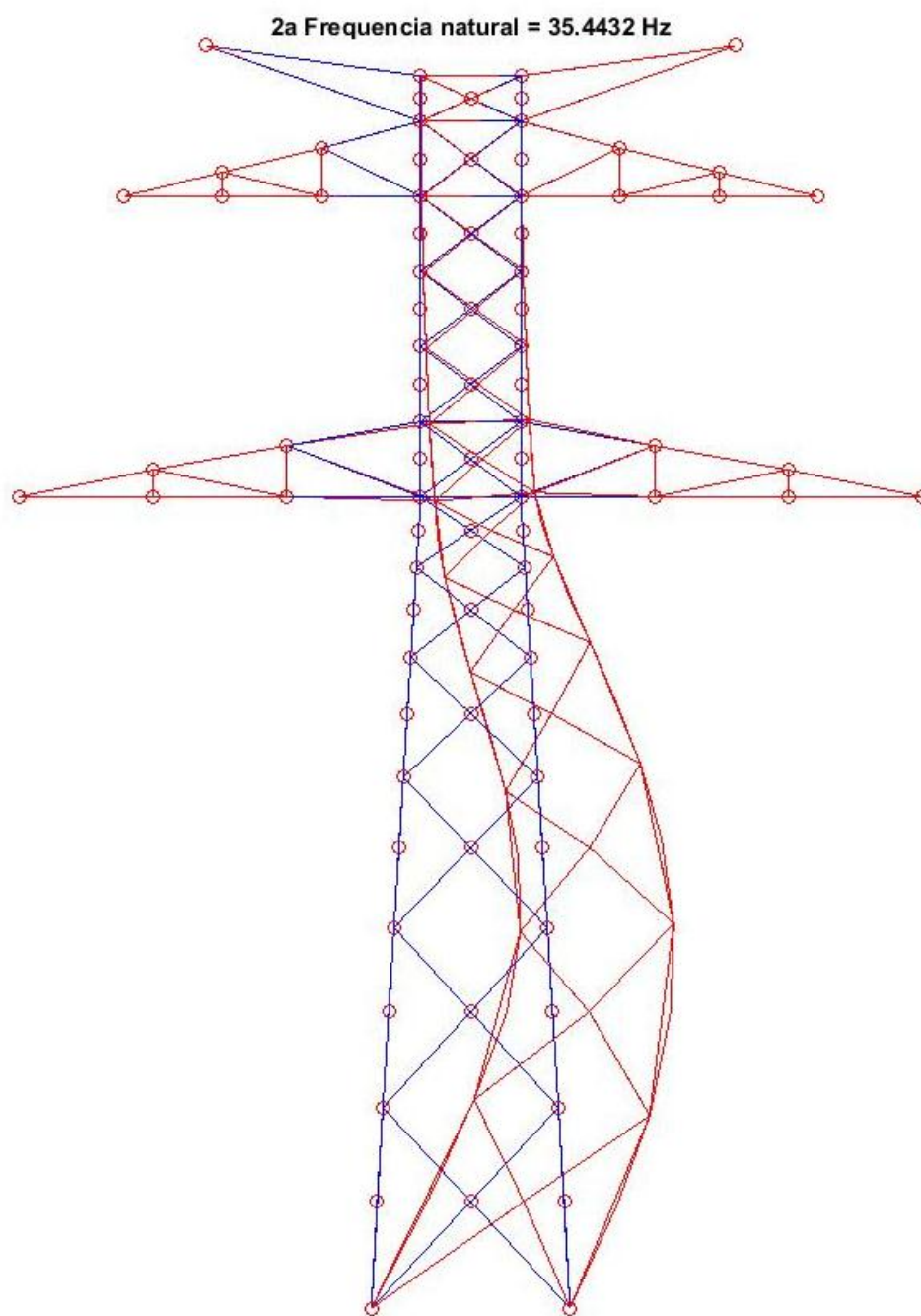
Figura 29 - Primeiro modo de vibrar

1a Frequencia natural = 33.8158 Hz



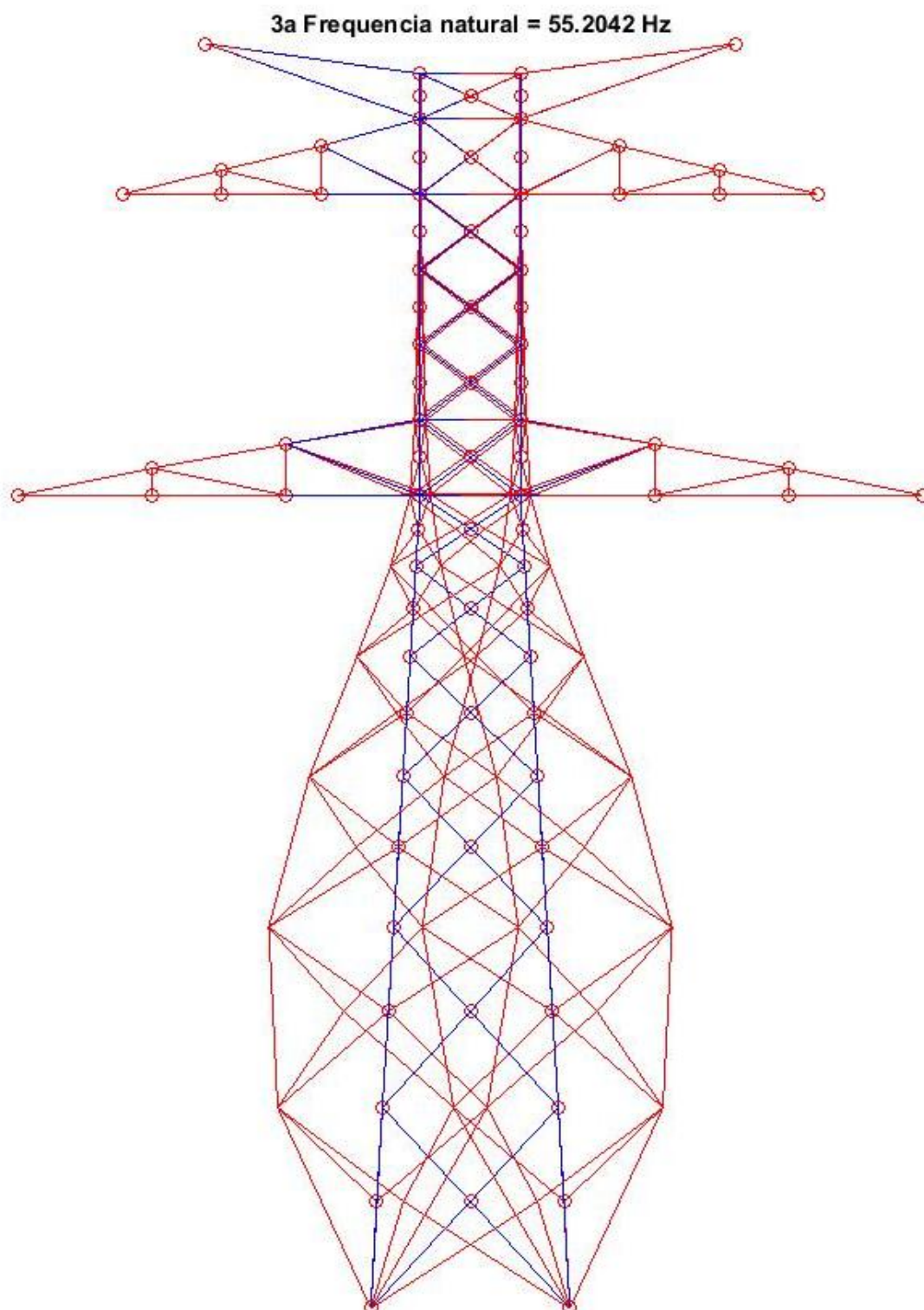
Fonte: Do próprio autor.

Figura 30 - Segundo modo de vibrar



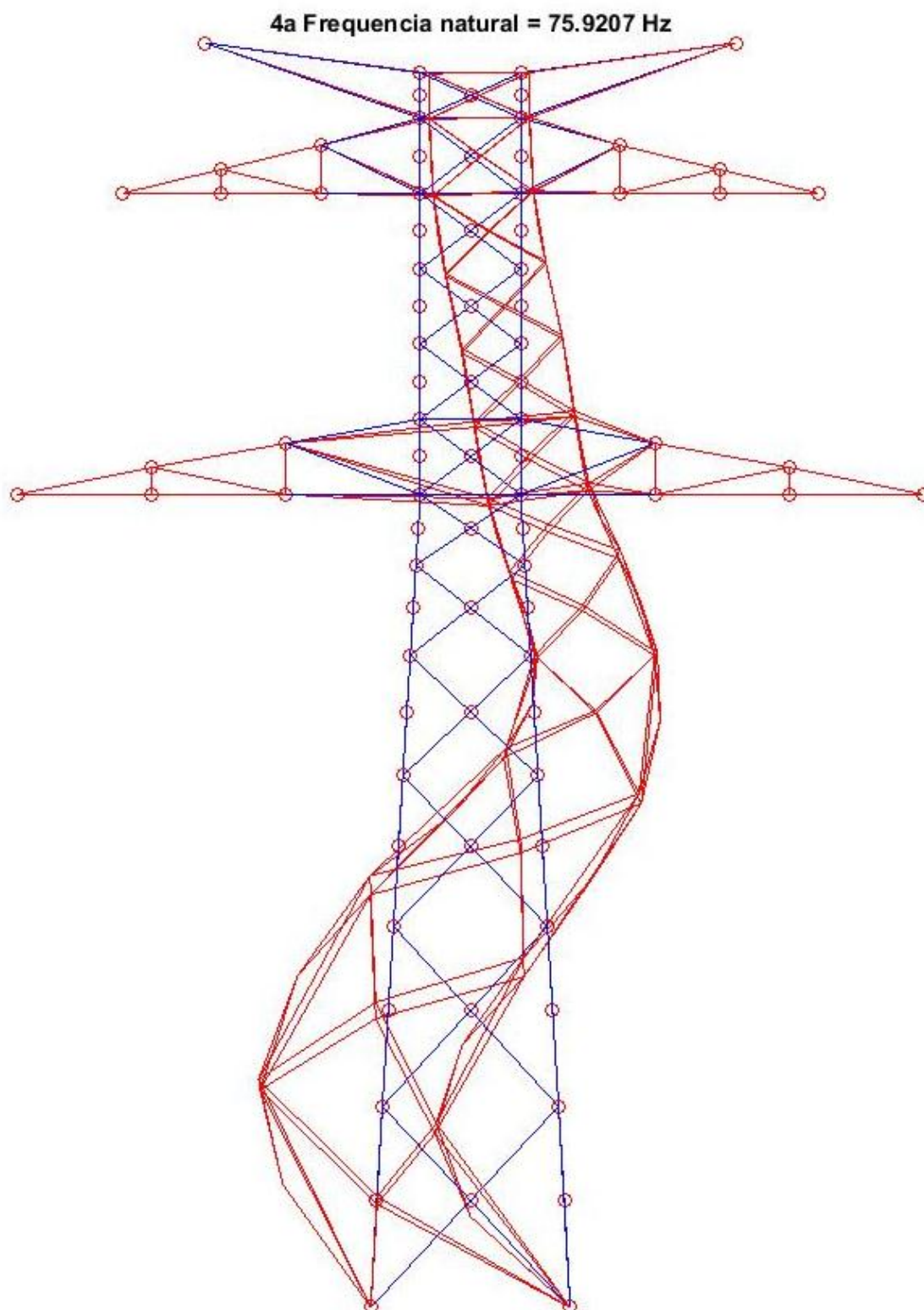
Fonte: Do próprio autor

Figura 31 - Terceiro modo de vibrar



Fonte: Do próprio autor

Figura 32 - Quarto modo de vibrar



Fonte: Do próprio autor

6.2 DIAGNOSE DE FALHA VIA OBSERVADOR DE ESTADO – PRIMEIROS RESULTADOS

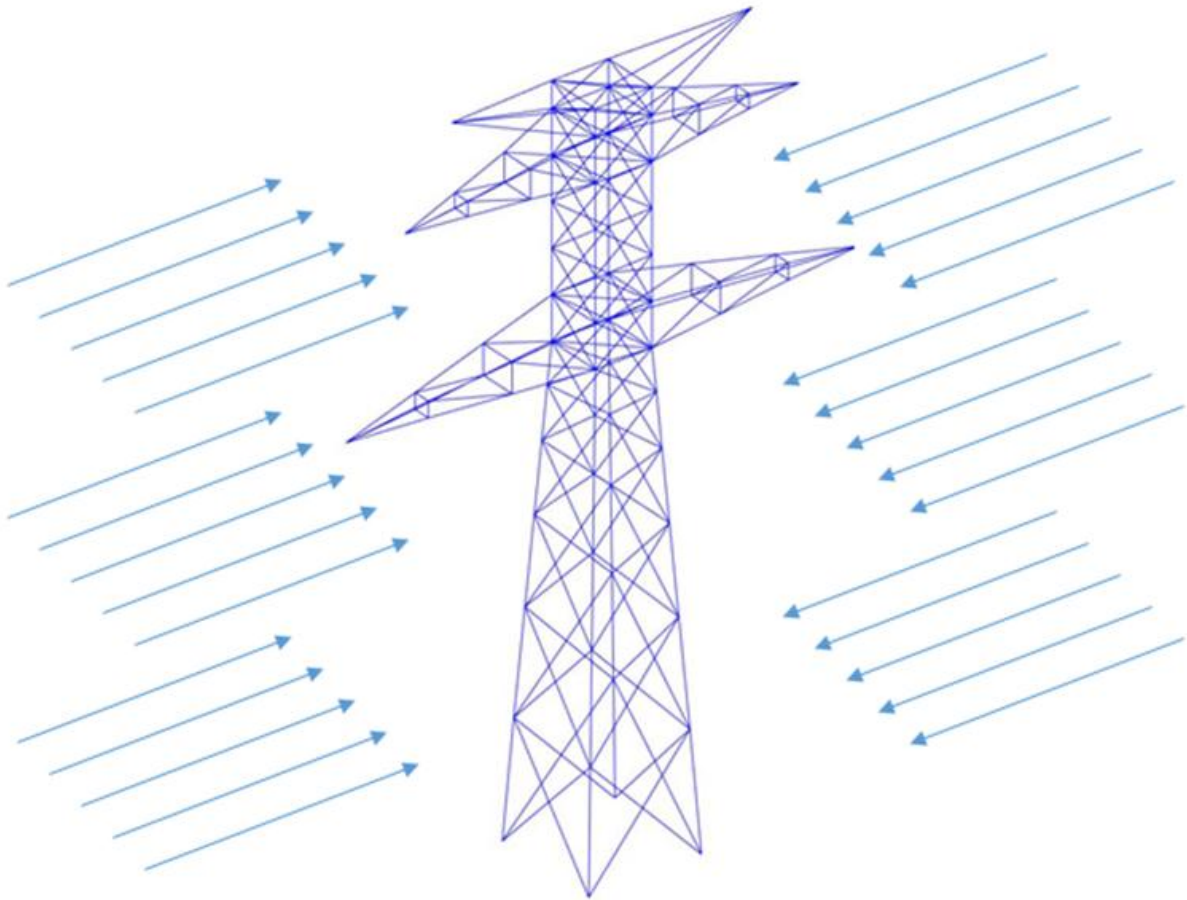
A detecção e localização de falha na estrutura da torre de transmissão se deu a partir de algumas condições impostas com o propósito de não deixar cara a execução do método do ponto de vista computacional. São elas:

- A falha – alteração de rigidez do elemento – estaria localizada em aleatoriamente em algum elemento de um dos braços da torre, os quais são responsáveis pela sustentação dos cabos condutores;
- A maior porcentagem de falha permitida antes de ser necessário a intervenção da equipe manutenção para um possível reparo – manutenção corretiva – foi limitada a 40%, na qual a porcentagem se refere a abertura da trinca máxima em relação ao seu comprimento;

Para que uma falha aparecesse, uma condição foi imposta. O modelo foi submetido a uma excitação senoidal aleatória, de modo que ao longo de 4 (quatro) segundos, frequências entre 1 (um) e 10 (dez) Hertz (Hz) e forças entre 1 (um) e 700 (setecentos) Newtons (N) fossem responsáveis pela excitação do modelo em estudo.

A figura abaixo mostra de maneira simples a incidência do vento na estrutura como sendo uma rajada direta na lateral da torre. Porém o vento não é um fenômeno imutável, muito pelo contrário, o fato de ele ser sempre aleatório e turbulento faz com que essa mesma rajada possa incidir de diferentes maneiras na estrutura da torre. Isso foi levado em consideração em partes de modo que somente as rajadas que incidiam de maneira horizontal da torre fossem levadas em consideração devido à complexidade da implementação de rajadas oblíquas aleatórias. Desse modo as rajadas podem estar tanto incidindo contra a torre pela direita ou pela esquerda

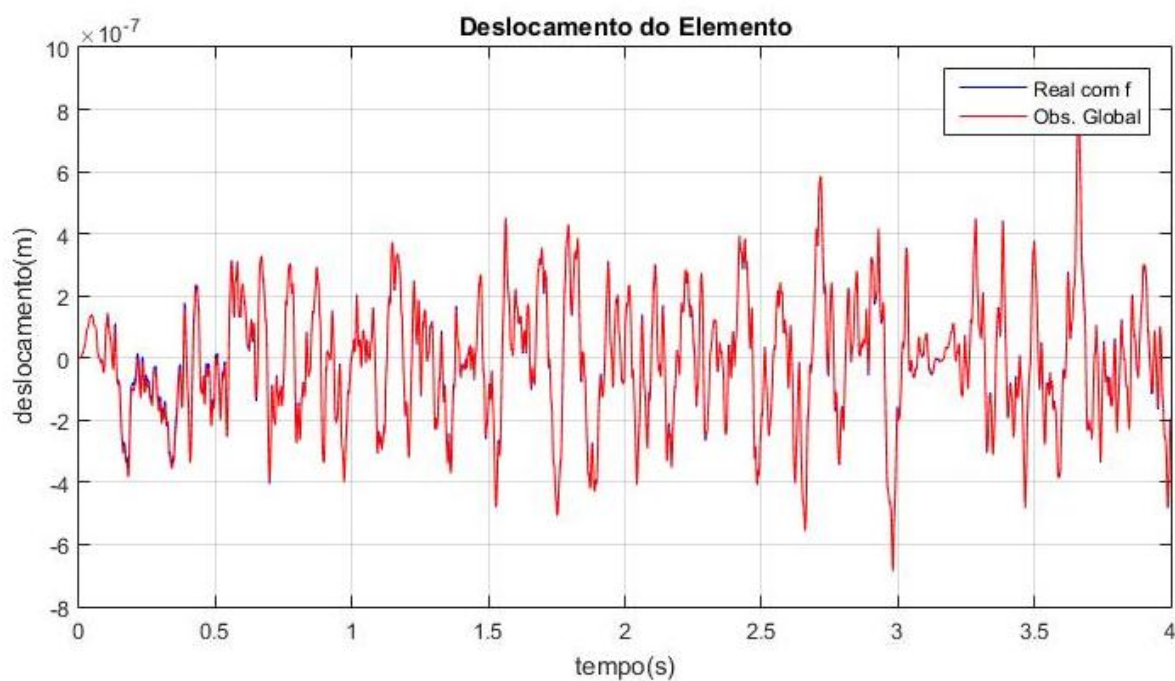
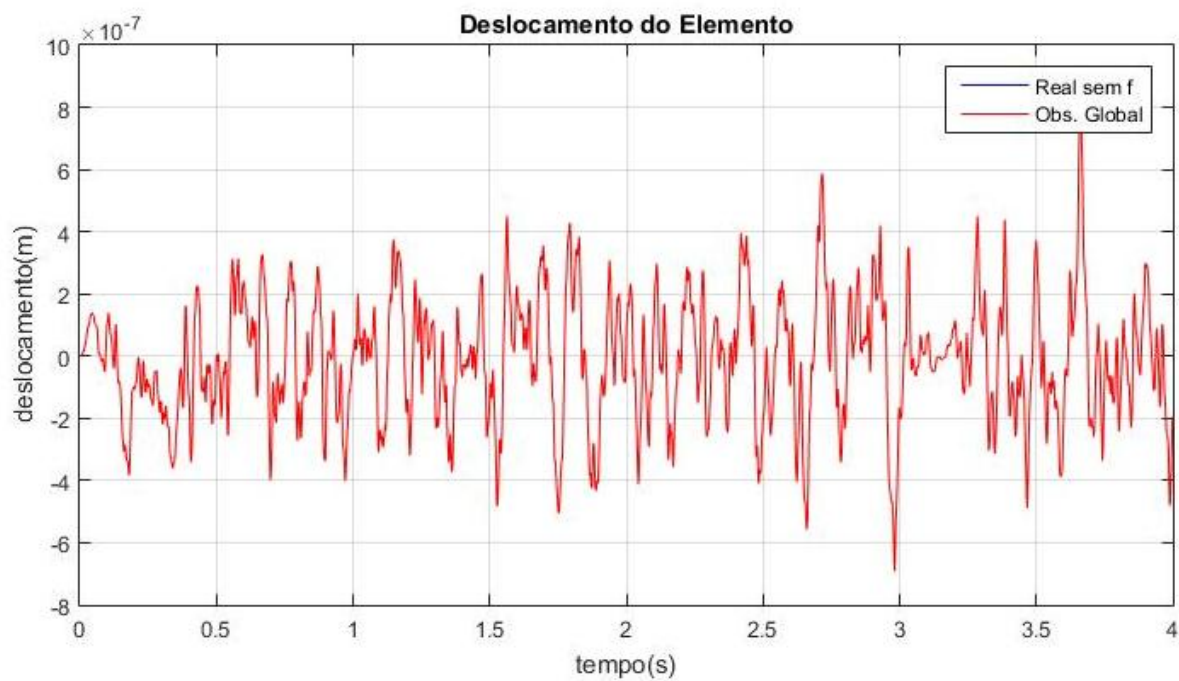
Figura 33 - Incidência de vento lateral

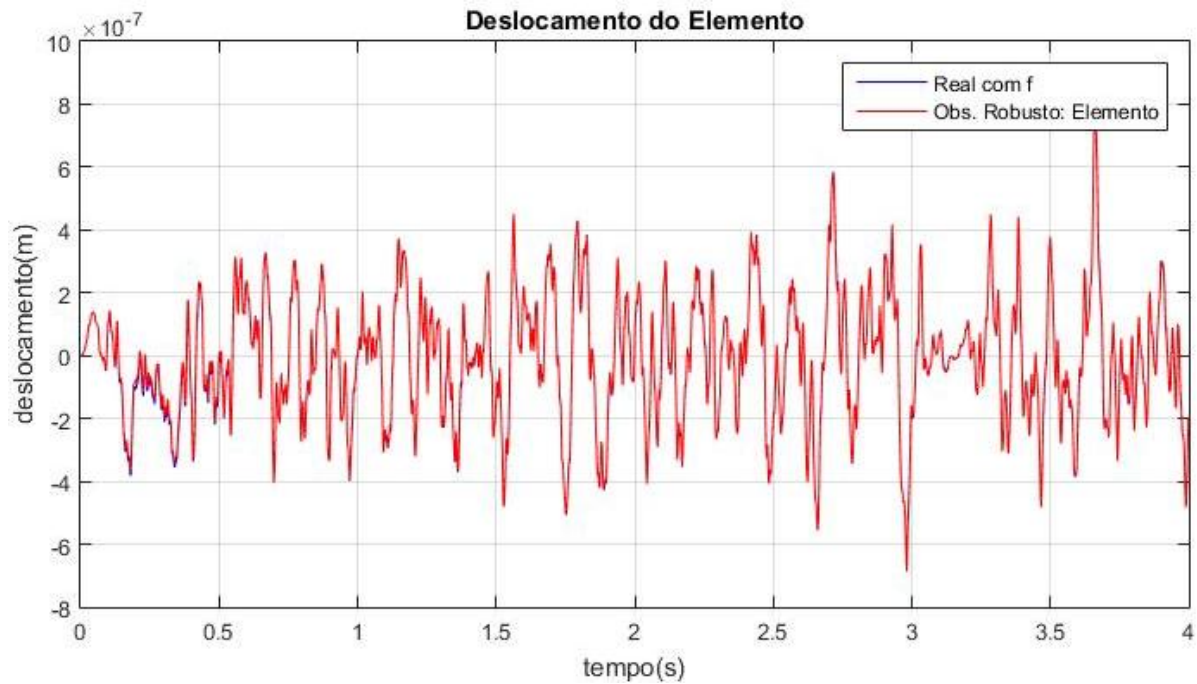


Fonte: Do próprio autor

Um observador atento pode questionar sobre a incidência de rajadas nos dois lados restantes. Como nas outras direções existe a conexão de uma torre com a outra pelos cabos condutores, o movimento desconsiderado uma vez que a chance de um incidente acontecer devido a uma rajada nesse sentido ser muito inferior comparado a incidente de rajadas laterais da torre, lado mais suscetível.

Esclarecidos todos os pontos, a rotina foi executada e abaixo as figuras mostram a localização dos elementos analisado e a resposta no tempo de cada um.

Figura 35 - Elemento 287 com abertura de trinca em 10%



Fonte: Do próprio autor.

As tabelas a seguir mostram, para cada um dos 3 casos de cada figura acima, a diferença RMS de um sinal para com o outro para evidenciar as diferenças existentes entre eles, as quais as imagens por vezes não conseguiram destacar devido as escalas dos eixos e também devido a diferença da ordem de 10^{-6} em média.

Tabela 3 - Valores RMS – Diferença RMS entres os pares de sinais em cada uma das figuras anteriores. Sistema Real sem Falha x Observador Global.

	10% de Abertura	20% de Abertura	30% de Abertura	40% de Abertura
Elemento 287	-1.6922e-19	-1.6922e-19	-1.6922e-19	-1.6922e-19
Elemento 288	2.1787e-16	2.1787e-16	2.1787e-16	2.1787e-16
Elemento 289	2.0024e-16	2.0024e-16	2.0024e-16	2.1123e-08
Elemento 290	2.7474e-16	2.7474e-16	2.7474e-16	2.7474e-16
Elemento 337	3.2672e-16	3.2672e-16	3.2672e-16	3.2672e-16

Elemento 338	2.3194e-16	2.3194e-16	2.3194e-16	2.3194e-16
Elemento 339	-1.5099e-18	-1.5099e-18	-1.5099e-18	-1.5099e-18
Elemento 340	-9.0675e-19	-9.0675e-19	-9.0675e-19	-9.0675e-19

Fonte: Do próprio autor.

Tabela 4 - Valores RMS – Diferença RMS entres os pares de sinais em cada uma das figuras anteriores. Sistema Real com Falha x Observador Global.

	10% de Abertura	20% de Abertura	30% de Abertura	40% de Abertura
Elemento 287	-1.7954e-09	-1.7954e-09	-1.7954e-09	-1.7954e-09
Elemento 288	-7.8561e-09	-7.8561e-09	-7.8561e-09	-7.8561e-09
Elemento 289	2.1123e-08	2.1123e-08	2.1123e-08	2.1123e-08
Elemento 290	-3.2449e-08	-3.2449e-08	-3.2449e-08	-3.2449e-08
Elemento 337	5.0699e-08	5.0699e-08	5.0699e-08	5.0699e-08
Elemento 338	-2.1784e-08	-2.1784e-08	-2.1784e-08	-2.1784e-08
Elemento 339	1.2716e-08	1.2716e-08	1.2716e-08	1.2716e-08
Elemento 340	5.1697e-09	5.1697e-09	5.1697e-09	5.1697e-09

Fonte: Do próprio autor.

Tabela 5 - Valores RMS – Diferença RMS entres os pares de sinais em cada uma das figuras anteriores. Sistema Real com Falha x Observador Robusto ao Elemento (destaque para o elemento e a percentagem de falha em vermelho).

	10% de Abertura	20% de Abertura	30% de Abertura	40% de Abertura
Elemento 287	1.5811e-09	1.3494e-09	1.1021e-09	8.4186e-10
Elemento 288	6.9552e-09	5.9995e-09	4.9942e-09	3.9476e-09
Elemento 289	-2.1112e-08	-2.1092e-08	-2.1061e-08	-2.1015e-08
Elemento 290	3.1459e-08	3.0417e-08	2.9323e-08	2.8179e-08
Elemento 337	-3.9073e-08	-2.6794e-08	-1.3796e-08	-2.3012e-16
Elemento 338	1.7742e-08	1.7742e-08	9.0623e-09	4.5413e-09
Elemento 339	-1.0847e-08	-8.7802e-09	-6.6078e-09	-4.4472e-09
Elemento 340	-4.2743e-09	-3.3118e-09	-2.3059e-09	-1.2864e-09

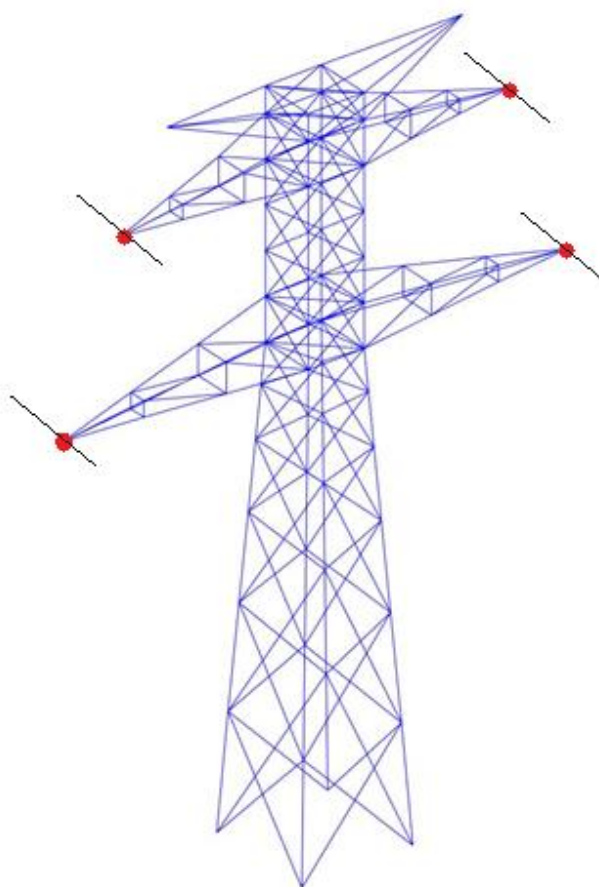
Fonte: Do próprio autor.

7 CONSOLIDAÇÃO DOS RESULTADOS E COMENTÁRIOS

Até o presente momento só foram mostrados figuras e tabelas com imagens e valores e breves explicações do que eram. Esse tópico abordara cada um de forma individual dando as devidas explicações e conclusões tiradas em cada caso analisado.

Como mencionado no tópico anterior, além dos engastes nos 4 pontos que tocam o solo, a torre também aparentava estar presa pelas extremidades dos braços. Bom, isso é parcialmente verdade. Na rotina responsável pelos cálculos, os respectivos nós das extremidades (evidenciados em vermelho na figura 36) tiveram seus movimentos restringidos nas direções mostradas na figura 36 devido à presença de cabos condutores que, de certa forma, interligam as torres, dificultando o movimento nessa direção.

Figura 36 - Modelo da Torre



Fonte: Do próprio autor.

No tópico 6.1 nos deparamos com frequências naturais e modos de vibrar da torre já com as condições de contorno impostas, ou seja, os 4 pontos de contato com o solo na base da torre e as restrições de movimento dos braços comentadas anteriormente.

Como resultado dessas análises pode-se notar, para o modelo utilizado, que as frequências que devem ser atingidas para que uma frequência natural seja excitada são deveras altas. Seus valores foram organizados na tabela 6.

Tabela 6 - Frequências Naturais

Modo	Frequência (Hz)
1	33,8
2	35,4
3	55,2
4	75,9

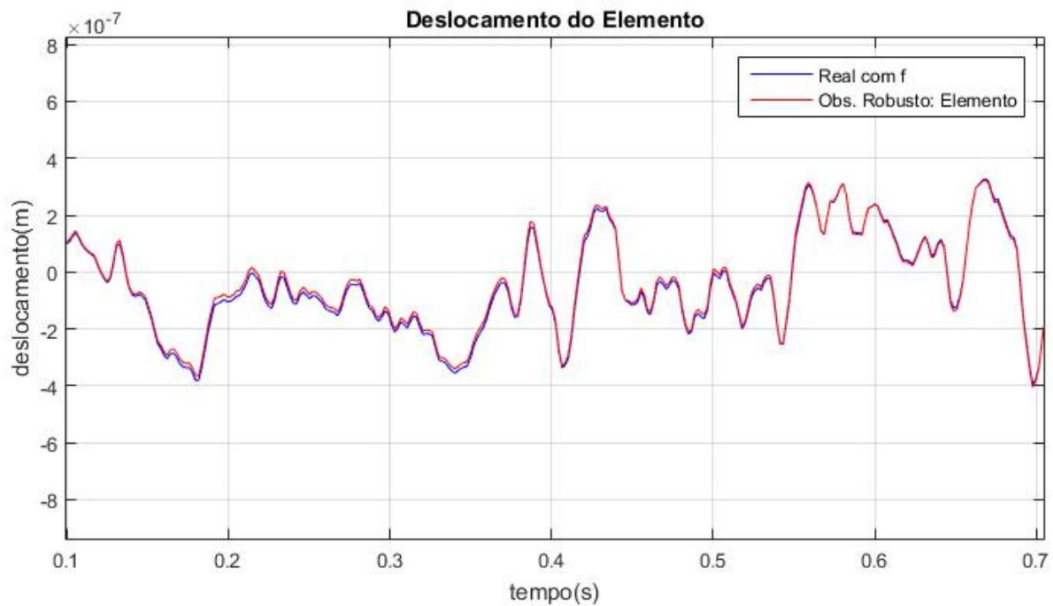
Fonte: Do próprio autor.

Os valores mostrados na tabela 6 mostram que o estudo realizado (com excitações entre 1 e 10 Hz) foi seguro e nenhuma frequência natural foi excitada evitando, assim, um colapso da estrutura durante a simulação.

A figuras 30 a 33 mostraram também os modos de vibrar da torre. As amplitudes mostradas nas figuras citadas, logicamente, foram superestimadas, ou seja, as amplitudes originais eram tão pequenas que não foi possível observar graficamente. Então um multiplicador foi utilizado para que as amplitudes e os modos fossem melhor caracterizados.

A curva referente ao gráfico *Real com falha x Observador Robusto* é mostrado com zoom na figura 37. O fato dessa diferença não ser possível de ser notada nos gráficos originais é devido a sua ordem de grandeza muito baixa (da ordem de 10^{-9}) como foi mostrado nas tabela 3, 4 e 5. E, ainda mais importante que a diferença pequena entre as curvas, o motivo de elas não serem iguais é a não existência de falha no elemento ao qual o observador robusto foi acoplado.

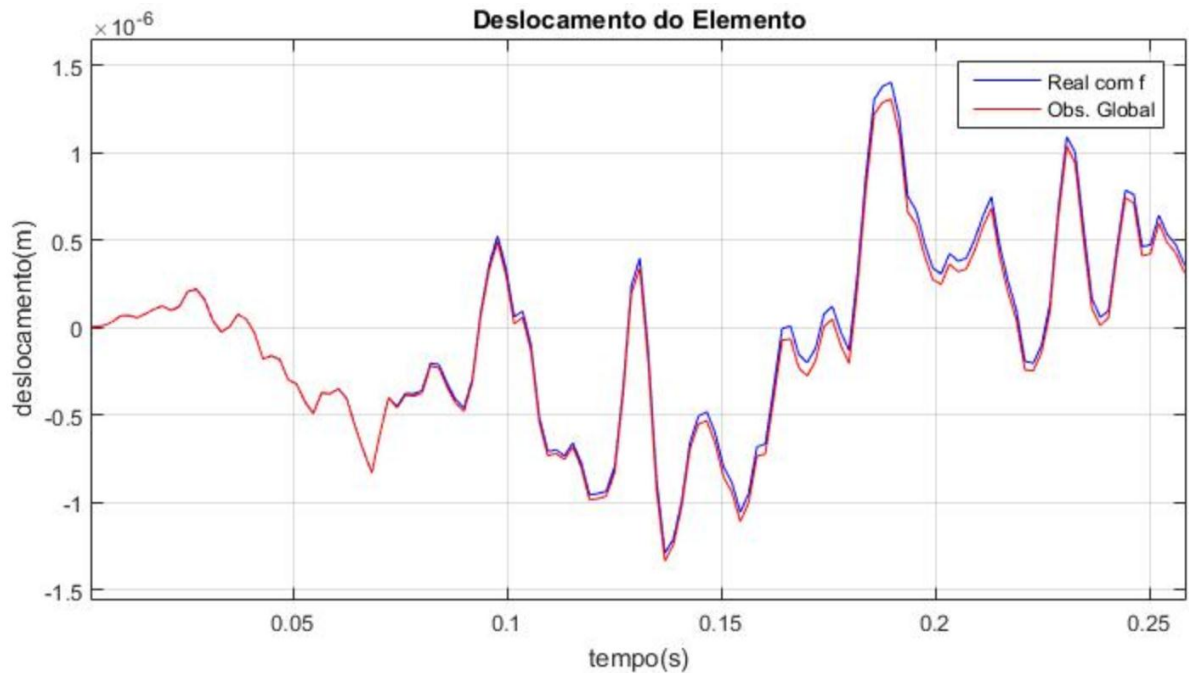
Figura 37 - Zoom para evidenciar a diferença de curvas. Elemento 287. Abertura de trinca em 10%.



Fonte: Do próprio autor

O segundo gráfico, *Sistema Real com falha x Observador global* é outro caso que apresenta curvas diferentes. Novamente não foi possível observar a disparidade das curvas nos gráficos apresentados no tópico anterior uma vez que, pelo mesmo motivo apresentado na figura 68, as diferenças estavam na ordem de 10^{-9} (vide tabelas 3,4 e 5). De forma análoga ao caso anterior, as curvas não se sobrepõem nesse caso, pois, agora, o observador global utilizado para “copiar” o Sistema Real sem Falha é comparado com o Sistema Real com Falha. É natural que as curvas não se sobreponham evidenciando a presença de falha no sistema, ou seja, a detecção da falha foi realizada com sucesso! A figura 38 exibe com clareza a diferença entre as curvas.

Figura 38 - Zoom para evidenciar a diferença de curvas. Elemento 339. Abertura de trinca em 40%

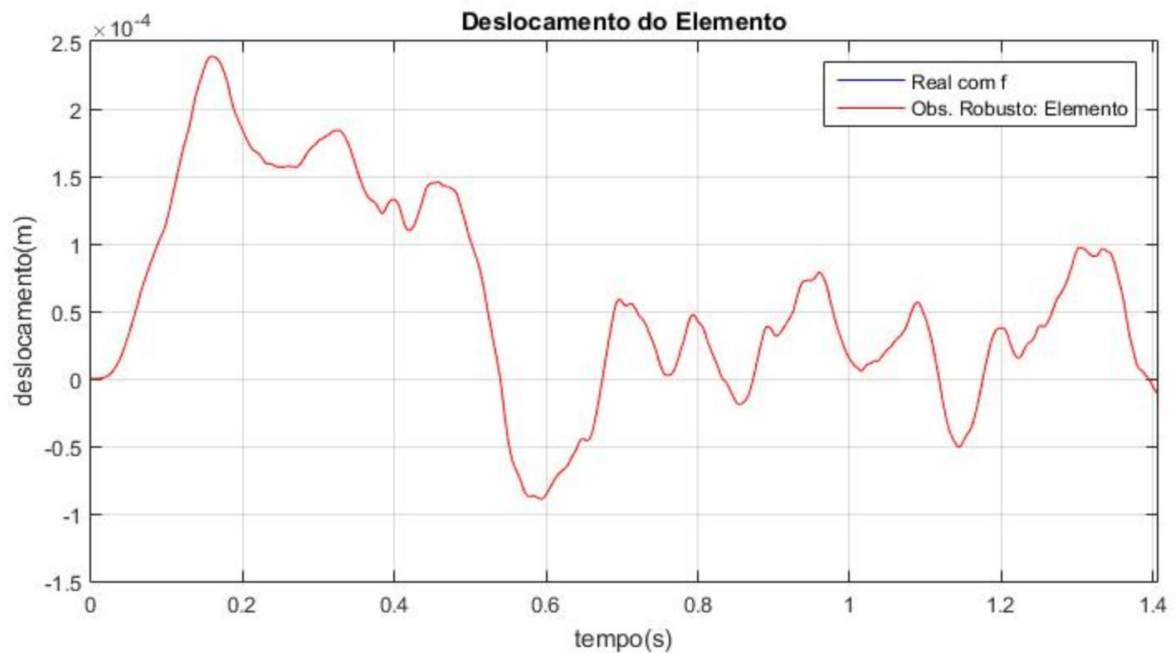


Fonte: Do próprio autor.

Os casos que apresenta uma curva praticamente idêntica são: todos os gráficos que apresentam curvas do *Sistema Real sem Falha x Observador Global* e o Elemento 337 para uma abertura de trinca em 40% no gráfico que apresenta as curvas do *Sistema Real com Falha x Observador Robusto ao Elemento*. O primeiro caso que envolve o Sistema Real sem Falha é natural que a curva do observador seja idêntica a curva de resposta do sistema, pois não existe falha para ser detectada. O segundo caso que envolve um elemento específico diz respeito a localização da falha. Como o primeiro passo já havia sido feito e a falha já tinha sido detectada, restava apenas a sua localização. Ora, uma vez que o Observador Robusto ao Elemento (337 nesse caso) apresentou a mesma resposta que o Sistema Real com Falha é dada como localizada a falha. A tabela 5, nesse passo da análise, se faz de enorme importância, uma vez que a determinação através de análise visual é comprometida devido as diferenças imperceptíveis das curvas. Ela, a tabela 5, mostra um valor em destaque (vermelho) o qual diz respeito ao elemento 337 e ao gráfico mostrado na figura 70.

Finalmente, a figura 39 mostra o gráfico que, em conjunto com o valor vermelho em destaque na tabela 5, a falha foi localizada com sucesso!

Figura 39 - Zoom para evidenciar a igualdade de curvas. Elemento 337. Abertura de trinca em 40%



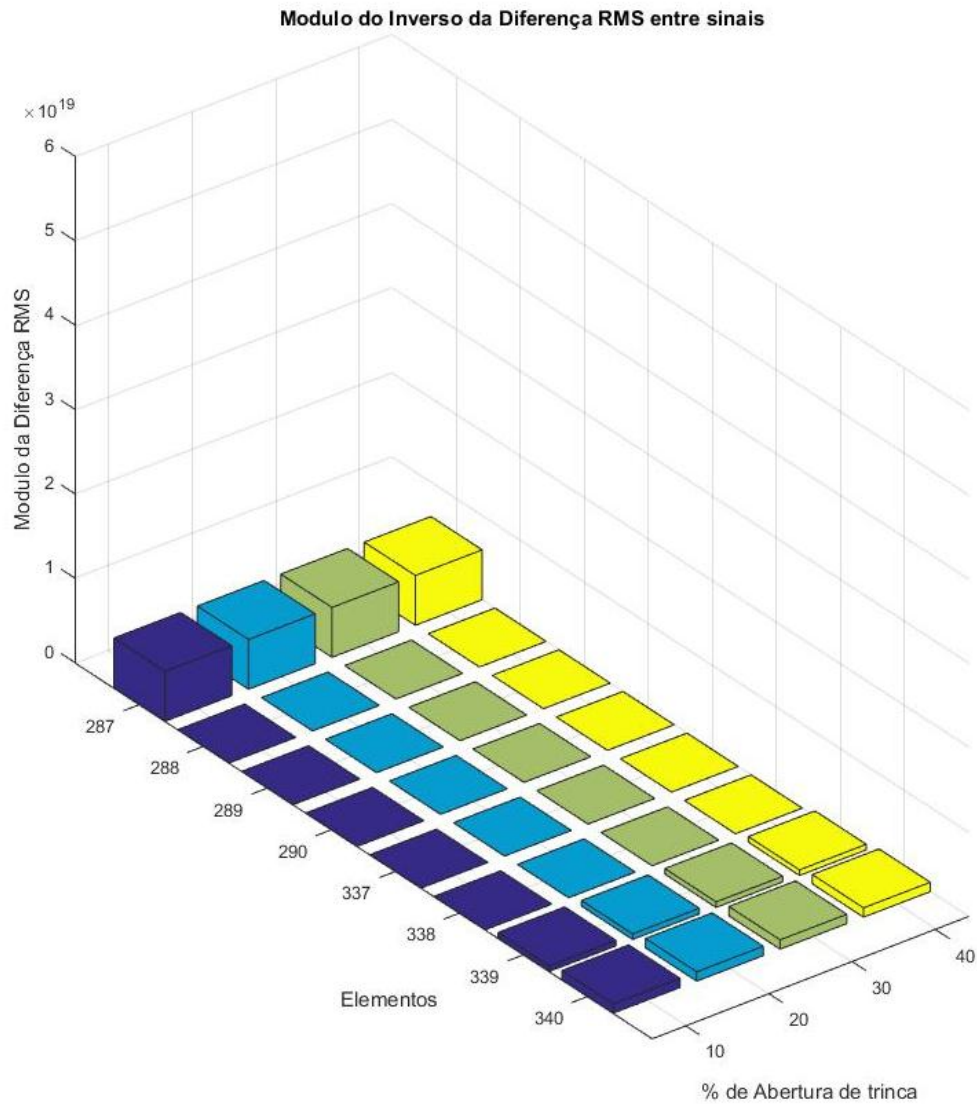
Fonte: Do próprio autor

Outra maneira gráfica de visualizar o elemento que apresenta a falha é mostrada na figura 73. Ela consiste em fazer uso dos valores mostrados na tabela 5 da seguinte maneira:

- Foi calculado o módulo dos valores;
- Os valores de módulo foram invertidos;
- O gráfico de barras 3D foi obtido permitindo a localização e quantificação da falha.

As figuras 40 e 41 também mostram uma outra maneira de se enxergar os números expostos nas tabelas 3 e 4 respectivamente. Em ambos os casos as figuras mostram barras quase planas. A explicação é análoga, porém a justificativa é diferente. Na figura 40 o motivo das barras estarem praticamente planas é que a diferença entre as curvas de todos os elementos analisados (vide exemplo na figura 35) é mínima, ou seja, a curva do observador global é praticamente idêntica a curva da resposta do sistema.

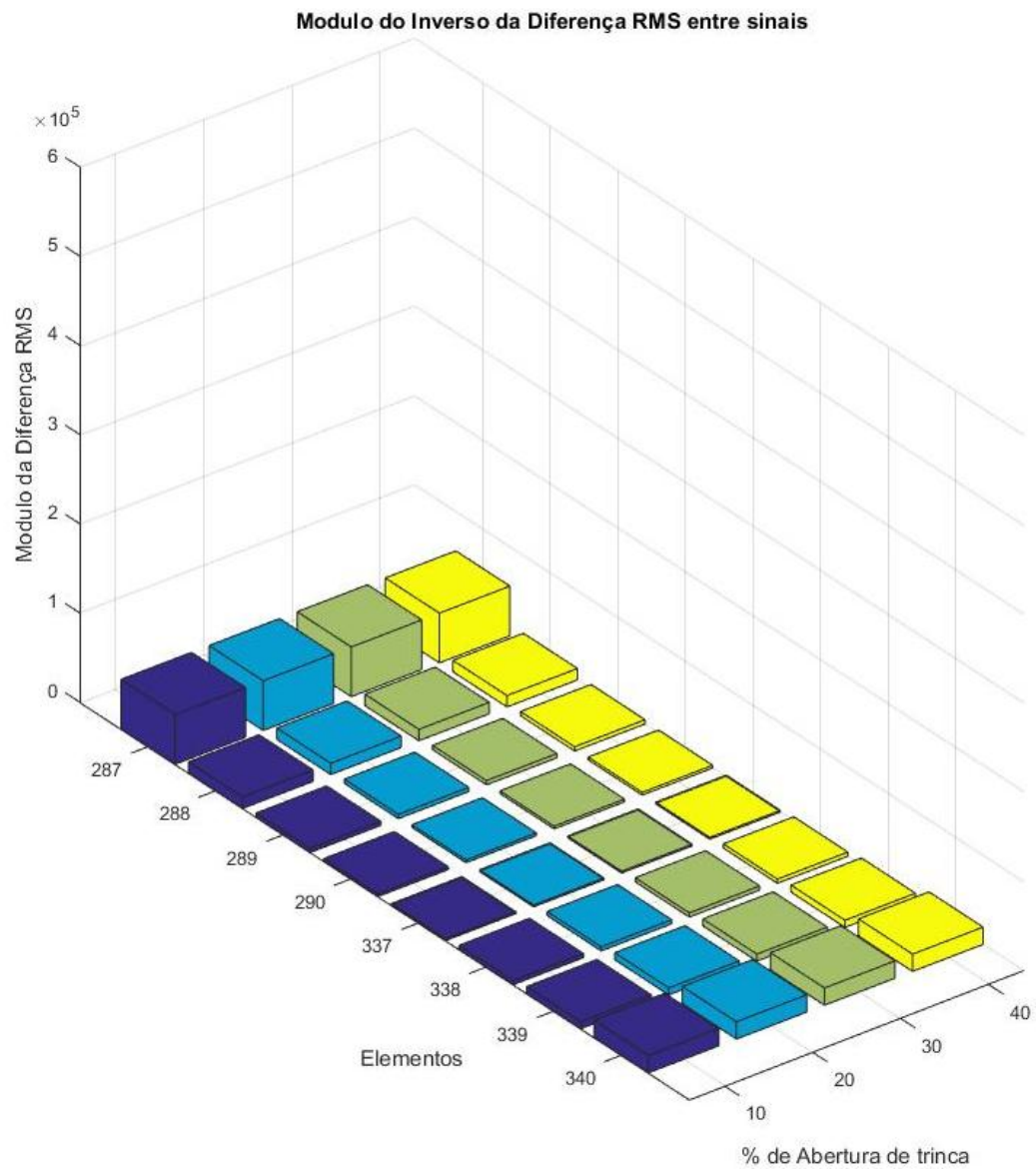
Figura 40 - Módulo do Inverso da Diferença RMS entre sinais - Gráfico de Barras referente a tabela 3



Fonte: Do próprio autor.

Já para o caso da figura 41, o fato de todas as barras estarem praticamente planas se deve ao fato de a diferença entre as curvas do sistema real (com a presença da falha) e do observador global (espelho do sistema sem falha) estarem maiores (vide ordem de grandeza dos gráficos das figuras 40 e 41).

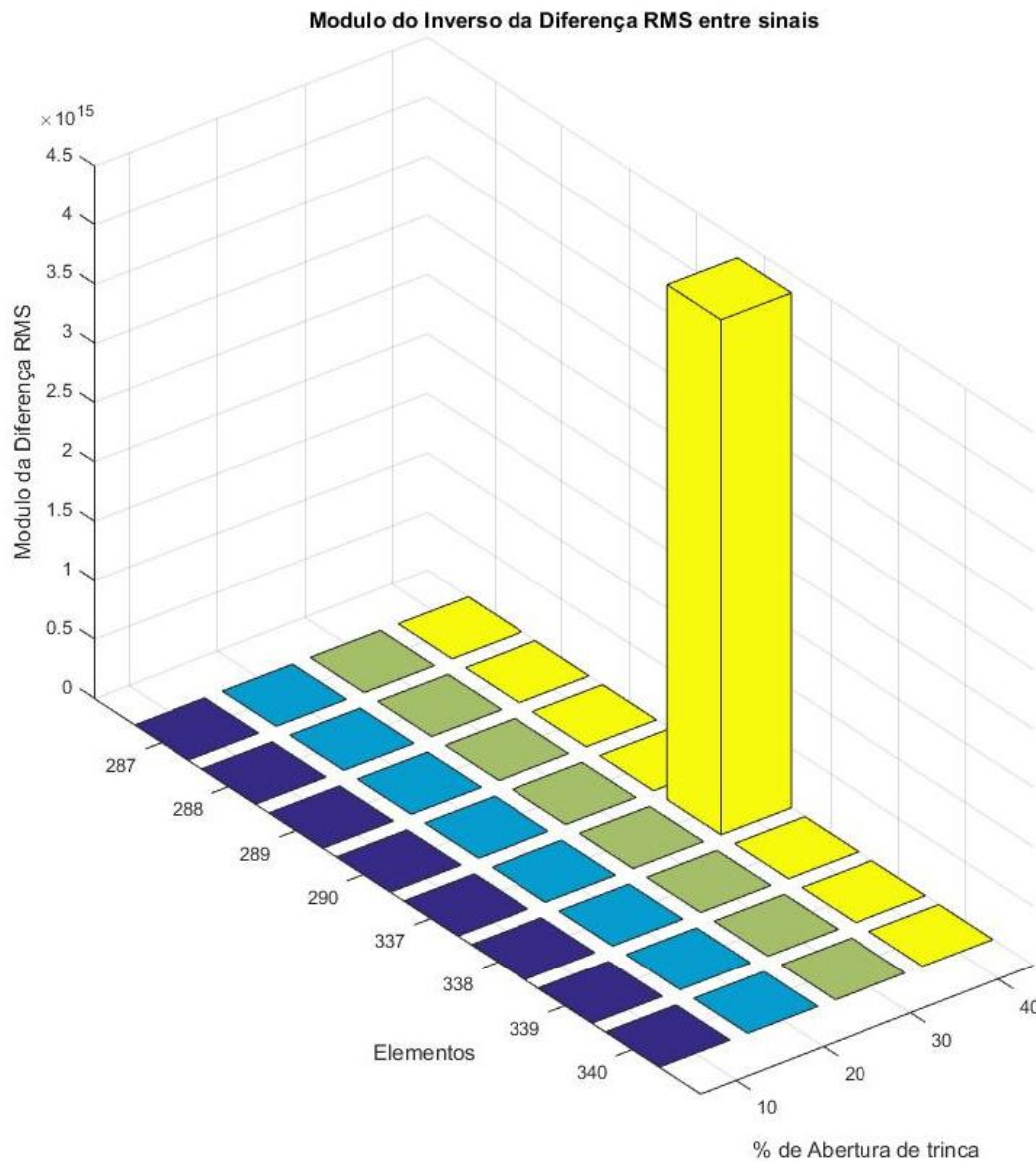
Figura 41 - Módulo do Inverso da Diferença RMS entre sinais - Gráfico de Barras referente a tabela 4



Fonte: Do próprio autor.

A figura 72 mostra o gráfico de barras que destaca o Elemento 337. O sistema foi detectado com falha pelas curvas do *Sistema Real com Falha x Observador Global* e quantificada pelas curvas do *Sistema Real com Falha x Observador Robusto* (ao Elemento 337).

Figura 42 - Módulo do Inverso da Diferença RMS entre sinais - Gráfico de Barras referente a tabela 5



Fonte: Do próprio autor

Nesse ponto de análise, é possível perceber que todos os gráficos e curvas geradas anteriormente só serviram, basicamente, para mostrar como é a resposta do sistema já que a escala dos eixos não permitiu a visibilidade da diferença entre as curvas. O zoom visto nas figuras 69 – 71 e o gráfico de barras da figura 72 vem para preencher a lacuna deixada pelos resultados anteriores e esclarecer as dúvidas que ficaram permitindo, assim, a detecção e a localização e quantificação da falha, remetendo ao objetivo deste trabalho.

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Finalmente, após expostos todos os resultados e considerações julgadas necessárias a respeito deles, pode-se emitir um parecer sobre os métodos e cálculos utilizados. Com relação aos cálculos e análises realizadas antes da implementação do método dos observadores de estado, pode-se dizer que contribuíram de forma significativa no que diz respeito as matrizes de massa e rigidez utilizadas (através do Método dos Elementos Finitos) para os cálculos dos observadores de estado.

Voltando os olhos para o modelo utilizado, o ponto mais problemático de se adaptar no presente trabalho, pode-se citar as dificuldades enfrentadas devido ao alto custo computacional do Método dos Observadores de Estado. A tentativa de se utilizar um modelo muito simplificado no começo caiu por terra devido aos resultados completamente fora da realidade. O Segundo modelo, mais refinado que o primeiro e utilizado nos cálculos, apresentou melhores resultados quando se olha para os números. A razão dele também não ter apresentado bons resultados gráficos fica por conta da força de excitação utilizada, a qual provocou oscilações muito pequenas na estrutura do modelo levando a uma diferença mínima entre os sinais de resposta. Outra razão, pela qual o segundo e atual modelo utilizado pode ainda não ter sido o melhor para resultados mais próximos a realidade, diz respeito a maneira como foi feita as limitações de movimento nos braços da torre. O ideal seria ter estabelecido uma restrição do tipo mola para que o movimento não ficasse totalmente restrito como aconteceu.

Com as atenções de volta na obtenção das matrizes para a execução do Método dos Observadores de Estado, outro ponto de dificuldade foi a matriz de amortecimento da estrutura. A maneira ideal de se obter os coeficientes de proporcionalidade é via ensaio de impacto devidamente instrumentado em laboratório utilizando como corpo de prova um modelo devidamente construído e em escala adequada. Como não era viável construir um modelo fiel ao simulado, apesar da construção ser possível, a ideia foi deixada de lado e os coeficientes de amortecimento proporcional foram obtidos de forma numérica como mostrado no tópico 2.2.

Outra dificuldade, não mesmo importante que as citadas, foi como simular o comportamento do vento uma vez que este não segue nenhum padrão. A princípio o vento foi interpretado como uma rajada que exercia força somente em uma lateral da torre com

frequência e amplitude constante. Essa combinação gerou uma resposta harmônica por parte do modelo simulado. Totalmente fora da realidade. A alternativa que contornou o problema foi a criação de um novo modelo para simular o vento. Ainda limitado, o novo modelo consistiu em uma força incidindo em duas laterais da torre (perpendiculares ao sentido dos cabos de condução de energia) com amplitude variando entre 1 e 700 N (Newton) e frequência variando entre 1 e 10 Hz (Hertz), ambos de maneira aleatória geradas por uma função nativa do software.

Seguindo adiante, outro ponto importante que pode ter sido influenciador dos resultados foi a tração exercida pelos cabos condutores. Estes são suspensos pelos braços e exercem forças na direção vertical e na direção horizontal paralela ao cabo. Porém a força foi aplicada diretamente no braço da torre por um motivo similar a restrição de movimento que esse mesmo braço sofreu e foi explicado anteriormente. O sistema de mola e amortecedor responsável pela sustentação dos cabos condutores foi encarado como algo rígido na análise, razão a qual motivou a aplicação da força, exercida pelo peso dos cabos, ser aplicada diretamente no braço.

Como último ponto julgado como dificuldade do presente trabalho, o perfil de viga utilizado nos cálculos pode não ter se comportado da maneira como era esperado, uma vez que, devido a sua forma de L, nenhuma orientação foi determinada a respeito de como ficaria posicionado esse perfil.

Por fim, o trabalho se deu por encerrado mesmo após todos as dificuldades encontradas. Logicamente que, por ser um foco novo englobando o Método dos Observadores de Estado, muitas otimizações são necessárias, tanto no modelo utilizado quanto na rotina escrita para a realização dos cálculos. Então ficam aqui as sugestões para futuros trabalhos que envolverão o tema: uma otimização do modelo e da rotina que diz respeito ao Método dos Observadores de Estados (apesar do alto custo computacional); um melhor estudo do comportamento dos ventos; devida construção do modelo em escala reduzida para a obtenção dos coeficientes de amortecimento proporcional via ensaio de impacto em laboratório; e a utilização de um segundo software (este de simulação 3D) para acompanhar o andamento das análises.

REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia cae**. São Paulo: Érica, 2000. ISBN 85-7194-7414.
- BEHZAD, M.; GHADAMI A.; MAGHSOODI A.; HALE J. M. Vibration based algorithm for crack detection on catilever beam containing two different types of cracks. **Journal of Sound and Vibration**, Newcastle, v. 332, n. 24 pp.6312-6320, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.07.003>>. Acesso em 24 ago. 2015.
- CAVALINI JUNIOR, A. A. **Monitoramento da integridade estrutural de sistemas mecânicos via observador de estado modal**. 2009. 206 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94524>>. Acesso em 24 ago. 2015.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 2. ed. Berkley: McGraw-Hill, 1993. 738 p.
- DASSAULT Systemes. **Amortecimento de rayleigh**. [S. l.], 2012. Disponível em: <http://help.solidworks.com/2012/Portuguese-Brazilian/SolidWorks/cworks/Rayleigh_Damping.htm>. Acesso em 2 set. 2015.
- DIAS, A. **Colapso da ponte de Tacoma Narrows**. [S. l.: s. n.], 2015. Disponível em: <<http://estruturandocivil.com.br/2016/08/16/causa-do-colapso-da-ponte-de-tacoma-narrows/>>. Acesso em 30 ago. 2015.
- ESSS. **Qual a importância do engenheiro na simulação computacional?** [S. l.: s. n.], 2015. Disponível em: <<http://www.esss.com.br/blog/2016/03/qual-a-importancia-do-engenheiro-na-simulacao-computacional/>>. Acesso em 1 set. 2015.
- FARIAS, D. **Queda de torre mata seis trabalhadores peruanos em RO**. [S. l.: s. n.], 2015. Disponível em: <<https://noticias.terra.com.br/brasil/cidades/queda-de-torre-mata-seis-trabalhadores-peruanos-em-ro,e0725dcce5617410VgnVCM10000098cceb0aRCRD.html>>. Acesso em: 30 ago. 2015.
- FELLIPA, C. **Introduction to finite element methods**. [S. l.: s. n.], 2015. Disponível em: <<http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>>. Acesso em: 10 set. 2015.
- G1 Sul do Rio e Costa Verde. **Queda de torre causa mais de 20 horas de falta de energia no sul do RJ**. [S. l.: s. n.], 2015. Disponível em: <<http://g1.globo.com/rj/sul-do-rio-costa-verde/noticia/2013/10/queda-de-torres-causa-mais-de-20-horas-de-falta-de-energia-no-sul-do-rj.html>>. Acesso em: 29 ago. 2015.
- GE, W.; FANG, C. Z. Detection of faulty components via robust observation. **International Journal of Control**, Pequim, v. 47, n. 2, p. 581-599, 1988. DOI: 10.1080/00207178808906033.
- GORDON, G. The development of the General Purpose Simulation System (GPSS). **ACM SIGPLAN Notices**, Nova Iorque, v. 13, n. 8, p. 183-198, 1978. Disponível em: <[10.1145/800025.1198386](http://dx.doi.org/10.1145/800025.1198386)>. Acesso em: 01 set. 2015.

LAS CASAS, E. B de. **3: o método dos elementos finitos: notas sobre o método dos elementos finitos: versão beta.** Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

MELO, G. P. **Deteção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida.** 1998. 125 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MENDES, T. **Simulação numérica: O que é e para que serve.** Florianópolis: Instituto Federal de Santa Catarina, 2009. Material de aula.

NGUYEN, V. K.; OLATUNBOSUN O. A. A proposed method for fatigue crack detection and monitoring using the breathing crack phenomenon and wavelet analysys. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, Birmingham, v. 2, n. 3, p. 339-420, 2007. Disponível em: <10.2140/jomms.2007.2.399>. Acesso em: 24 ago. 2015.

PEGDEN, C. D. Advanced tutorial: overview of simulation world views. of the 2010 IEEE In: WINTER SIMULATION CONFERENCE, 2010, Sewickley. **Proceedings...** Pensilvânia: IEEE, 2010. p. 210-215. DOI:10.1109/WSC.2010.5679161.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. In: PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Vigas.** São Paulo: EESC, 2003.

PLP Brasil. **Seção 6: armaduras e emendas preformadas.** Disponível em: <<http://www.plp.com.br/site/area-de-download>>. Acesso em: 10 out. 2015.

RAO, N. P.; KNIGHT, G. M. S.; LAKSHMANAN, N.; IYER, N. R. Investigation of Transmission Line Tower Failures. **Engineering Failure Analysis**, Chennai, v. 17, n. 5, p. 1127-1141, 2010. Disponível em: <10.1016/j.engfailanal.2010.01.008>. Acesso em: 26 ago. 2015.

RAO, N. P.; KNIGHT, G. M. S.; LAKSHMANAN, N.; IYER, N. R. Studies on failure of transmission line towers in testing. **Engineering Failure Analysis**, Chennai, v. 35, n. 5, p. 55-70, 2012. Disponível em: <10.1016/j.engstruct.2011.10.017>. Acesso em: 26 ago. 2015.

RUOTOLO R.; SURACE, C.; CRESPO, P.; STORER, D. Harmonic analysys of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack. **OP Conf. Series: Materials Science and Engineering**, Covina, v. 61, n. 6, p. 1057-1074, 1996.

WATANABE, L. **Utilização de modelos de falhas e observadores de estado em estruturas reticuladas.** 2010. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94522>>. Acesso em: 24 ago. 2015.

WAZEN R. N. **Avaliação da suscetibilidade de falhas em estruturas metálicas de linhas de transmissão.** 2011. 137 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

ZACARIAS, A. T. **Determinação da variação de rigidez em placas, através da metodologia dos observadores de estados.** 2008. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94563>>. Acesso em 24 ago. 2015.

ZAMPERINN, J. L. B. **Vendaval derruba tores de energia de Ilha Solteira, em São Paulo.** Ilha Solteira: [s. n.], 2010. Disponível em <<http://g1.globo.com/vc-no-g1/noticia/2010/10/vendaval-derruba-torres-da-maior-hidreletrica-do-estado-de-sao-paulo.html>>. Acesso em: 30 ago. 2015.

ZHANG W.; WU W.; SUN, X; XIAO L.; QU, W. Damage Detection of Closed Crack in a Metallic Plate Using Nonlinear Ultrasonic Time Reversal Method. **Journal of Sensors.** Wuhan, v. 2013. p. 10, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1155/2013/652743>>. Acesso em: 24 ago. 2015.