

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA
FILHO”

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DOS MATERIAIS

**PROCESSOS TÉRMICOS E ESTADO RESISTIVO EM
SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS: DINÂMICA DE
VÓRTICES E GRADIENTE E DIFUSÃO TÉRMICA
ESTUDADOS USANDO O TEOREMA DA ENERGIA LIVRE
E O FORMALISMO DE GINZBURG-LANDAU**

ELWIS CARLOS SARTORELLI DUARTE

*Ilha Solteira-SP
5 de Fevereiro de 2018.*

“Universidade Estadual Paulista - UNESP”

“Departamento de Física e Química”

“Processos térmicos e estado resistivo em supercondutores mesoscópicos: dinâmica de vórtices e gradiente e difusão térmica estudados usando o teorema da energia livre e o formalismo de Ginzburg-Landau”

“Elwis Carlos Sartorelli Duarte”

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciência dos Materiais - Área: Física da Matéria Condensada/Supercondutividade.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Zadorosny

“Ilha Solteira”, “5 de Fevereiro” de “2018”.

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

D812p Duarte, Elwis Carlos Sartorelli.
Processos térmicos e estado resistivo em supercondutores mesoscópicos: dinâmica de vórtices e gradiente e difusão térmica estudados usando o teorema da energia livre e o formalismo de Ginzburg-Landau / Elwis Carlos Sartorelli Duarte. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
190 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Física da Matéria Condensada, 2018

Orientador: Rafael Zadorosny
Inclui bibliografia

1. Estado resistivo. 2. Supercondutores mesoscópicos. 3. Teoria de Ginzburg-Landau.


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Processos térmicos e estado resistivo em supercondutores mesoscópicos: dinâmica de vórtices e gradiente e difusão térmica estudados usando o teorema da energia livre e o formalismo de Ginzburg-Landau

AUTOR: ELWIS CARLOS SARTORELLI DUARTE

ORIENTADOR: RAFAEL ZADOROSNY

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em CIÊNCIA DOS MATERIAIS, área: FÍSICA DA MATERIA CONDENSADA pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. RAFAEL ZADOROSNY

Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. EDSON SARDEILA

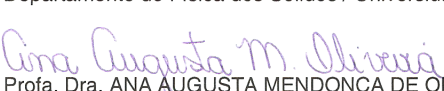
Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru


Prof. Dr. ANDRE LUIZ MALVEZZI

Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru


Prof. Dr. MAURO MELCHIADES DÓRIA

Departamento de Física dos Sólidos / Universidade Federal do Rio de Janeiro


Profa. Dra. ANA AUGUSTA MENDONÇA DE OLIVEIRA

Ensino Básico, Técnico e Tecnológico / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Ilha Solteira, 05 de fevereiro de 2018

*Este trabalho é dedicado com muito amor e carinho aos meus pais,
Aparecida Antônia Sartorelli Duarte e Luiz Carlos Duarte.*

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, luz que ilumina o caminho e me ajuda a seguir.

“Tudo é possível para aquele que crê” (Mc 9:23)

“Tudo posso naquele que me fortalece” (Fp 4:13)

Aos meus pais *Aparecida Antônia Sartorelli Duarte* e *Luiz Carlos Duarte* pelo apoio integral ao longo de toda essa jornada. A todos os meus familiares, em especial, a tia Maria que me acompanhou mais de perto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Zadorosny, pela dedicação, paciência, liberdade concebida para desenvolver essa pesquisa e pela “fé depositada” em mim para a realização desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Edson Sardella, por nos fornecer o alicerce no qual foi possível estruturar essa pesquisa.

Queria agradecer também aos meus amigos, companheiros e companheiras do DFQ, em especial, aos meus “irmãos de batalha” dos grupos GSMA/GDAM. No qual, ao longo desse tempo, menciono Danilo, Alice, Vinícius, Gisele, “Tata” (Atair), Maiara, Mariana, Vivian, Alexsander, Thiago, Maycon, Maicon e “Regi” (Regiane) que me acompanharam com maior proximidade.

A todos(as) meus amigos da “Gapira” (Álvares Florence) e de Ilha Solteira (Pá rá pá pá, fica mais um pouquinho), em especial, Bruno, Jana, Marina, Thais e Luana que viram mais de perto minha trajetória. Aos meus amigos da Rep Papo 10, Fita (Arthur), Cauby (César), Ameba (Fernando), Lu (Luis Felipe), Gerino (Eduardo), Docinho (Caique), Anão (Felipe), Mari e Jani pela convivência diária e por acompanharem de perto meus passos nesta jornada.

Aos meus professores e amigos da graduação na UNIFEV, pelo apoio e por me forneceram a base para que eu pudesse seguir meu caminho na Física. Ao Pirica (Michael) que me incentivou desde o ensino médio a seguir essa profissão.

Agradeço a CAPES pela bolsa de estudo e prometo honrar cada centavo que recebi, contribuindo para o avanço de pesquisa em Física na nossa Pátria Amada, Brasil.

Gostaria de agradecer ao DFQ e PPGCM que ajudaram a viabilizar minha participação em diversos científicos. Ao IIP pelo patrocínio para “Vortex 2017”, onde conheci diversos pesquisadores de renome que possibilitou valiosas trocas de experiência.

A todos(as) que de maneira direta ou indireta contribuíram nessa jornada, meu muito obrigado.

“Make Superconducting State Great Again”

Quem é correto nunca fracassará e será lembrado para sempre - Salmo 112:6

Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade se me revela... Aprender é o início da riqueza. Procurar e aprender é onde começa todo o processo de milagre. O grande avanço na sua vida vem quando você percebe que você pode aprender qualquer coisa que você precisa para aprender a realizar qualquer objetivo que você estabeleceu para si mesmo. Isso significa que não há limites sobre o que você pode ser, ter ou fazer - Albert Einstein.

Resumo

Este trabalho está estruturado em duas partes. A primeira, envolve o estudo do estado de vórtices e comportamento magnético de um supercondutor mesoscópico submetido a um gradiente térmico. Foi verificado que a influência de um gradiente térmico altera o estado de vórtice gigante e pode levar a magnetização a ter um comportamento anômalo, o qual depende do parâmetro κ e das temperaturas nas regiões “quente” e “fria”. Na segunda parte, abordamos o estado resistivo durante o movimento de um vórtice e durante a dinâmica de par vórtice-antivórtice (V-AV) para os tipos de Abrikosov e Cinemáticos. Estudamos quais parâmetros afetam as propriedades do não equilíbrio e os mecanismos de dissipação presentes no processo de difusão térmica. Para os processos envolvendo vórtice ou V-AV de Abrikosov, os mecanismos de dissipação devido à processos de relaxação contribuem para a maior parte da potência total dissipada e, conseqüentemente, exercem uma grande contribuição para a variação de temperatura. Por outro lado, para o caso de V-AV cinemáticos, os elétrons normais aparecem como principal mecanismo de dissipação, todavia os processos de relaxação tem uma contribuição considerável para esse caso. Para realizar tais estudos, utilizamos o teorema da energia livre e as equações de Ginzburg-Landau generalizadas.

Abstract

This work is structured in two parts. In the first one, the vortices states and the magnetic behavior were studied for a mesoscopic superconductor under a thermal gradient. It was verified that the thermal gradient changes the giant vortex state and could lead a exotic behavior of the magnetization curve, depending on the κ parameter and the temperature of the “hot” and the “cold”. In the second part, the focus was the resistive state during one vortex motion and during the annihilation process of a vortex-antivortex (V-AV) pair both with Abrikosov and Kinematic types. We defined which parameters affect the nonequilibrium proprieties and the dissipative mechanisms present in the thermal diffusion processes. For the cases involving a vortex or an Abrikosov’s V-AV pair, the dissipative mechanisms due to the relaxation process have the major contribution for the total power dissipated power and consequently, exert great contribution on the temperature variation. On the other hand, for the case of kinematic V-AV, the normal eletrons rised as the main dissipative mechanism, however relaxation process has a considerable contribution for this case. To realize such studies, we used the free energy theorem and the generalized Ginzburg-Landau equations.

Conteúdo

Introdução	4
1 O Estado supercondutor	6
1.1 Introdução	6
1.2 Teoria B.C.S	6
1.2.1 O Par de Cooper	7
1.2.2 Ground State	9
1.2.3 Estados excitados	18
1.3 Teoria de Ginzburg-Landau	25
1.3.1 Teoria de transições de fase de Landau	25
1.3.2 Equações de Ginzburg-Landau	28
1.3.3 Densidade de superelétrons e comprimento de coerência	29
1.3.4 Profundidade de penetração e vorticidade	30
1.3.5 Análise microscópica das equações GL	33
2 Supercondutividade do não equilíbrio	37
2.1 Teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo	37
2.2 Teoria generalizada de Ginzburg-Landau dependente do tempo	42
2.3 Teorema da energia livre	45
2.4 Equação de difusão térmica	50
3 Solução numérica da equação GTDGL para processos envolvendo difusão térmica	57
3.1 Solução numérica do parâmetro de ordem	57
3.1.1 Condições de contorno	63
3.2 Solução numérica do potencial vetor	64
3.2.1 Cálculo da magnetização, voltagem e condições de contorno	67
3.3 Solução numérica do potencial escalar	70
3.4 Solução numérica da temperatura	77
3.4.1 Condições de contorno e energia livre	79
3.4.2 Critério de estabilidade e condições iniciais	80

4	Supercondutor submetido a um gradiente térmico	83
4.1	Introdução	83
4.2	Resultados	84
4.2.1	Estado de vórtices	85
4.2.2	Magnetização Anômala	87
4.2.3	Discussão dos Resultados	91
5	Estado resistivo do movimento de vórtices de Abrikosov	93
5.1	Introdução	93
5.2	Resultados	105
5.2.1	Influência de impurezas e efeitos de confinamento no estado resistivo	105
5.2.2	Estado resistivo durante o movimento de um vórtice em um super- condutor <i>gapless</i>	109
5.2.3	Estado resistivo durante o movimento de um vórtice em um super- condutor com <i>gap</i>	112
5.2.4	Discussão dos Resultados	116
6	Estabilidade e dinâmica de pares de vórtice e antivórtice de Abrikosov	123
6.1	Introdução	123
6.1.1	Formação e estabilidade de estruturas V-AV	123
6.1.2	Dinâmica de V-AV	131
6.2	Resultados	134
6.2.1	Estado resistivo durante o processo de aniquilação de um par de V-AV em um supercondutor <i>gapless</i>	135
6.2.2	Estado resistivo durante o processo de aniquilação de um par de V-AV em um supercondutor com <i>gap</i>	140
6.2.3	Discussão dos resultados	146
7	Dinâmica de vórtice e antivórtice Cinemáticos	152
7.1	Introdução	152
7.1.1	A “Phase Slip Center”	152
7.1.2	Phase Slip Line	158
7.2	Resultados	162
7.2.1	Mecanismos de dissipação e difusão térmica envolvendo V-AV cinemáticos	162
7.2.2	Influência do substrato no estado resistivo	169
7.2.3	Discussão dos resultados	172
	Conclusão	178
	Apêndice A Demonstração da equação 2.42	180

Apêndice B	Demonstração da equação 2.48	181
Apêndice C	Demonstração das equações 2.49 e 2.50	183
Apêndice D	Lei de Wiedemann-Franz para o estado resistivo	186
Apêndice E	Publicações e apresentações em eventos científicos	189

Introdução

Em 1944 V. Ginzburg criou as bases para o estudo de supercondutores sob gradientes térmicos envolvendo efeito termoelétricos. A posteriori, o efeito de gradiente térmico também foi utilizado para estimar o cálculo do coeficiente de viscosidade em regime de *flux flow*. No entanto, a influência de gradientes térmicos no estado de vórtices, é ainda uma área não explorada. Neste sentido, nós verificamos que a influência do gradiente térmico altera o processo de formação de estado de vórtice gigante e, sob certas condições, altera as propriedades magnéticas em supercondutores mesoscópicos. Observamos que as curvas da magnetização em função do campo magnético externo, $M(H)$, apresentam um comportamento exótico quando o supercondutor entra no estado misto, ou seja, não é verificado o comportamento característico da $M(H)$ tal como apresentado por supercondutores mesoscópicos sob temperatura homogênea. Esse tópico consiste na primeira parte de nossa pesquisa.

Na segunda parte, abordamos diversos aspectos que caracterizam o estado resistivo devido a dois processos distintos. O primeiro deles, trabalhos pioneiros na área começaram no início da década de 1960, em situações nas quais os vórtices presentes no mar supercondutor não estão em equilíbrio, ou seja, estão em movimento. Assim, durante a década de 1960 procurou-se entender o estado resistivo devido a dois tipos de movimento dos vórtices, o *flux creep* e o *flux flow*. Nas décadas seguintes, diversas grandezas físicas tal como condutividade, viscosidade e os mecanismos de dissipação que surgem do estado resistivo, foram estudadas tanto do ponto de vista teórico quanto do experimental. Contudo, temos a carência de um estudo mais amplo e detalhado dos processos de difusão térmica e do comportamento de outras grandezas físicas que surgem nesse estado de não equilíbrio. Assim, em nossa pesquisa, mostramos como o comportamento das curvas da magnetização e da voltagem em função do tempo nos auxiliam a monitorar a dinâmica de um vórtice e o processo de aniquilação de par de vórtice-antivórtice (V-AV) em supercondutores mesoscópicos. Observamos que fatores como concentração de impurezas, efeitos de confinamento, velocidade do vórtice e relaxação do sistema afetam um ou mais dos mecanismos de dissipação que, por sua vez, afetam o processo de difusão térmica durante o movimento de um vórtice e ao longo de um processo de aniquilação do par V-AV.

Em um outro caso envolvendo o estado resistivo, novos estudos foram iniciados no final da década de 1960 e começo da década de 1970, onde apareceram transições resistivas em supercondutores quasi unidimensionais, as quais, posteriormente, ficaram conhecidas como *phase slip center* (PSC). Nas décadas seguintes, foram observadas observaram essas mesmas transições em filmes supercondutores. Então, para esse caso, foram chamadas de *phase slip lines* (PSL). No começo da década de 1990, A. Andronov e colaboradores utilizaram o termo vórtices cinemáticos para caracterizar o comportamento da PSL, que é devido à dinâmica de um par de vórtice e antivórtice cinemático. Diversos trabalhos desde então fizeram um mapeamento mais detalhado sobre diversas grandezas físicas que estão presentes no estado resistivo (decorrentes da formação e movimentação de pares de V-AV cinemáticos). Todavia, há poucos trabalhos que abordam os processo de difusão térmica e o comportamento oscilatório do potencial. Então, verificamos que a variação de temperatura durante o processo de difusão térmica altera a amplitude e a frequência do potencial, e que um ou mais dos mecanismos de dissipação presentes são afetados pela variação da corrente elétrica e mudanças na relaxação do sistema, levando, assim, a alterações no processo de difusão térmica. Em 2016, D. Halbertal e colaboradores publicaram um trabalho sobre uma técnica de mapeamento térmico em nanomateriais. Com isso, nossos estudos envolvendo processos de difusão térmica fornecem uma base teórica para que tal técnica seja utilizada para mapear a dinâmica de vórtices ou pares de V-AV em supercondutores mesoscópicos.

Esse trabalho está estruturado da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos as propriedades do equilíbrio de estado supercondutor por meio das teorias BCS e Ginzburg-Landau (GL); No Capítulo 2, temos as generalizações das equações GL e a equação de difusão térmica, onde, para se obter os mecanismos de dissipação, generalizamos o teorema da energia livre apresentado por A. Schmid em 1966; No Capítulo 3, resolvemos numericamente a equação de Ginzburg-Landau dependente do tempo generalizada (GTDGL) acoplada à equação de difusão térmica; No Capítulo 4, abordamos a influência do gradiente térmico no estado de vórtices e nas propriedades magnéticas; No Capítulo 5, abordamos o estado resistivo durante o movimento de um vórtice em um supercondutor *gapless* e com *gap*; No Capítulo 6, estudamos o estado resistivo durante um processo de aniquilação de V-AV de Abrikosov em um supercondutor *gapless* e com *gap*; No Capítulo 7, foi dedicado ao mesmo estudo para a dinâmica de V-AV cinemáticos. No início de cada capítulo há, uma introdução, onde fazemos uma revisão “físico-historiográfica” referente aos assuntos pertinentes à pesquisa presente em cada um deles.

Capítulo 1

O Estado supercondutor

1.1 Introdução

O estado supercondutor é caracterizado por possuir resistividade nula (quando temos uma corrente elétrica aplicada), descontinuidade na capacidade calorífica e diamagnetismo perfeito (Efeito Meissner) na presença de campo magnético externo. Do ponto de vista macroscópico, tal estado é tratado como uma transição de fase de segunda ordem, onde é observado uma descontinuidade na capacidade calorífica entre o estado normal e o estado supercondutor no ponto crítico. Assim, na ausência de correntes de transporte e campo magnético aplicado, o ponto crítico é a temperatura crítica T_c . Por outro lado, do ponto de vista microscópico, o modelo da supercondutividade convencional (*low's T_c*) é devido a interações elétron-elétron são mediadas via fônons (vibrações na rede cristalina). Esta interação propicia a formação de estados ligados entre dois elétrons devido a uma interação fracamente atrativa. Estes dois elétrons são chamados de Pares de Cooper. Em um supercondutor do tipo *s-wave* (estado de singlete), esses elétrons que formam os Pares de Cooper devem possuir momentos lineares e spin opostos, isto é, $\mathbf{k}, \uparrow$ e $-\mathbf{k}, \downarrow$, onde $\mathbf{k}$ é o número quântico associado ao momentum do elétron e $\uparrow, \downarrow$ são os estados de spin. Tendo em vista estes conceitos básicos, neste capítulo apresentaremos as teorias microscópica (Teoria B.C.S) e macroscópica (Teoria de Ginzburg-Landau) da supercondutividade.

1.2 Teoria B.C.S

A Teoria B.C.S da supercondutividade foi desenvolvida pelos físicos Americanos John Bardeen, Leon N. Cooper e John R. Schrieffer e publicada em 1957 [1]. Tal teoria explica o estado supercondutor para os materiais conhecidos como *low's T_c* . Por esse feito, o trio foi laureado com o prêmio Nobel de Física em 1972. Este modelo teórico tem como base os Pares de Cooper, unidades básicas do estado supercondutor. Tal conceito foi desenvolvido por Leon N. Cooper e publicado em 1956 [2], onde propôs um estado ligado (*boundstate*)

entre pares de elétrons em um gás de Fermi degenerado.

1.2.1 O Par de Cooper

Os Pares de Cooper são formados acima do mar de Fermi. Assim, os vetores de onda da função de onda do par possuírem valores de $\mathbf{k} > \mathbf{k}_F$, pois para $\mathbf{k} \leq \mathbf{k}_F$ os estados estão preenchidos. A função de onda plana para dois elétrons possuindo coordenadas $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ é dada por [3]:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi_q(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \chi(\sigma_1, \sigma_2), \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são as coordenadas para o elétron um e o elétron dois, $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ é a coordenada do centro de massa, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ é a coordenada relativa, σ_1 e σ_2 denotam os spins dos dois elétrons $\uparrow, \downarrow$, $\phi_q(\boldsymbol{\rho})$ e χ são a função de onda no centro de massa e a função de onda do spin (estado de singleto em nosso caso) respectivamente. Considerando que o centro de massa do par está em repouso em relação ao mar de Fermi, temos $\mathbf{q} = 0$. Assim, a equação (1.1) torna-se:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi(\boldsymbol{\rho}) \chi(\sigma_1, \sigma_2). \quad (1.2)$$

Escrevendo $\phi(\boldsymbol{\rho})$ em termos da expansão de Fourier

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (1.3)$$

e substituindo $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ na equação (1.3) temos que:

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (1.4)$$

Para se obter o valor da energia do par de Cooper, utilizaremos a equação de Schrödinger para duas partículas [4]

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.5)$$

O operador Hamiltoniano para esse caso é $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e $E = \varepsilon + 2\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, sendo E a energia total do sistema, ε a energia do par de Cooper e $2\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ é a energia de dois elétrons na superfície de Fermi. Denotemos por $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, que é a energia de Fermi. Neste caso, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ é devido somente a interação entre dois elétrons. Assim, a equação (1.5) torna-se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\varepsilon + 2\varepsilon_F)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.6)$$

Substituindo a equação (1.2) em (1.6), e com o auxílio de (1.4), e resolvendo o laplaciano para o par de elétrons, temos que:

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\hbar^2}{2m} 2k^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (1.7)$$

Assumindo a invariância translacional, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\boldsymbol{\rho})$, obtemos:

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\hbar^2}{m} k^2 + V(\boldsymbol{\rho}) \right] g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (1.8)$$

Multiplicando a equação (1.8) por $e^{-i\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\rho}}$ e integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{m} \int \sum_{\mathbf{k}} k^2 g(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d^3 \rho + \int \sum_{\mathbf{k}} V(\boldsymbol{\rho}) g(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d^3 \rho, \\ = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) \int \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d^3 \rho, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Usando a identidade:

$$\begin{aligned} \int e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d^3 \rho &= \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \\ L^3 & \text{se } \mathbf{k} = \mathbf{k}' \end{cases} \\ &= L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (1.10)$$

sendo $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ e L^3 o delta de Kronecker e o volume do sistema respectivamente. Aplicando a condição dada por (1.10), a equação (1.9) pode ser escrita como:

$$\frac{\hbar^2}{m} k^2 g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}) = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) g(\mathbf{k}) \quad (1.11)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{L^3} \int V(\boldsymbol{\rho}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\rho}} d^3 \rho. \quad (1.12)$$

O potencial (dado pela da equação 1.12) é atrativo e constante para as seguinte condições:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} \frac{-V}{L^3} & \varepsilon_k - \varepsilon_F \text{ e } \varepsilon_{k'} - \varepsilon_F \text{ forem } < \hbar\omega_D \\ 0 & \varepsilon_k - \varepsilon_F \text{ ou } \varepsilon_{k'} - \varepsilon_F \text{ forem } > \hbar\omega_D \end{cases} \quad (1.13)$$

Dadas tais condições, temos que uma interação fracamente atrativa elétron-elétron mediada por fônons ($-V$) somente ocorrem quando a diferença de energia $\varepsilon_k - \varepsilon_F$ e $\varepsilon_{k'} - \varepsilon_F$ menores que a energia de Debye ($E_D = \hbar\omega_D$), sendo ω_D a frequência de Debye, i.e., a frequência de corte. Assim, as equações (1.11) e (1.12) ficam:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} \frac{-V}{L^3} g(\mathbf{k}) = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) g(\mathbf{k}). \quad (1.14)$$

Rearranjando os termos obtemos:

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{-V}{L^3} g(\mathbf{k}) = \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \varepsilon + 2\varepsilon_F \right) g(\mathbf{k}), \quad (1.15)$$

Dividindo por $(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\mathbf{k}) + \varepsilon + 2\varepsilon_F)$ e fazendo uma $\sum_{\mathbf{k}'}$ em ambos os lados da equação (1.15), e como $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, de onde se obtém que:

$$\frac{V}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \varepsilon - 2\varepsilon_F} = 1. \quad (1.16)$$

Agora, vamos resolver a equação (1.16) em termos da energia. Para tal fim, escrevemos $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F = \xi$ e transformaremos a soma em $\mathbf{k}$ em uma integral ($\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{L^3}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k}$). Introduzindo o conceito de densidade de estados, obtemos uma integral em termos de ξ . Assim, temos que:

$$V \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{2\xi - \varepsilon} \aleph(\xi) d\xi = 1, \quad (1.17)$$

onde o termo $\aleph(\xi) = \frac{1}{\pi^2} k^2 \frac{dk}{d\xi}$ é a densidade de estados por spin. O limite de integração considerado é devido as condições dadas pela equação (1.13). Considerando que $\aleph(\xi)$ é constante dentro do intervalo de integração, resolvendo a integral, temos que:

$$\frac{1}{2} V \aleph(0) \ln \left(\frac{\varepsilon - 2\hbar\omega_D}{\varepsilon} \right) = 1, \quad (1.18)$$

Assumindo $\varepsilon \ll \hbar\omega_D$, a equação (1.18) fica:

$$\varepsilon = -2\hbar\omega_D e^{-2/\aleph(0)V}. \quad (1.19)$$

O sinal negativo na equação (1.19) indica que temos um estado ligado (*bound state*), e tal consideração nos fornece indícios de um *gap* no espectro de energia. Essa ideia é consistente com o decaimento exponencial verificado experimentalmente.

1.2.2 Ground State

Generalizando o problema dos pares de Cooper para um problema de muitos corpos, podemos obter uma função de onda para o estado fundamental (*ground state*). Para o caso de N pares de Cooper, definimos a função de onda da seguinte maneira:

$$\Psi_{GS} = \psi(1, 2)\psi(3, 4)\psi(5, 6) \dots \psi(N-1, N). \quad (1.20)$$

Os números entre parênteses denotam os elétrons. A função de onda para um par de Cooper é descrita em termos das coordenadas espaciais e spins dos elétrons

$$\psi(1, 2) = \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2), \quad (1.21)$$

sendo $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}$ (ver seção 1.2.1) e substituindo a equação (1.21) na (1.20), reescrevemos a função de onda para o estado fundamental (Ψ_{GS}) para N pares de Cooper, assim obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi_{GS} = \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g(\mathbf{k}_1) \dots g(\mathbf{k}_{N/2}) \hat{A}(e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \dots e^{i\mathbf{k}_{N/2}(\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N)}) \\ \times [(1 \uparrow)(2 \downarrow) \dots (N-1 \uparrow)(N \downarrow)]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde introduzimos o operador antissimetização ($\hat{A}$) para garantir que o princípio de exclusão de Pauli seja preservado. Como a equação (1.22) representa uma função de onda para o estado fundamental de N pares de Cooper, ou seja, temos um problema quântico de muitos corpos, vamos reescrevê-la utilizando a linguagem da segunda quantização [5, 6]. Como estado fundamental é formado de pares nos estados $(\mathbf{k} \uparrow)$ e $(-\mathbf{k} \downarrow)$, para um par de Cooper no formalismo da segunda quantização, temos que:

$$\hat{A}(e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)})[(1 \uparrow)(2 \downarrow)] = \hat{c}_{\mathbf{k}_1 \uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}_1 \downarrow}^\dagger |0\rangle. \quad (1.23)$$

onde $\hat{c}_{\mathbf{k}i\sigma}^\dagger$ é o operador de criação para um elétron com momentum $\mathbf{k}$ e para um certo valor de spin $\sigma = \uparrow$ ou $\downarrow$. $|0\rangle$ é o estado de vácuo. Assim, nosso estado fundamental é criado por pares de Cooper a partir do estado de vácuo. Para referência futura, vamos definir operadores de criação e aniquilação para os pares de Cooper para um estado de singleto:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger &= \hat{c}_{\mathbf{k} \uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k} \downarrow}^\dagger, \\ \hat{b}_{\mathbf{k}} &= \hat{c}_{\mathbf{k} \uparrow} \hat{c}_{-\mathbf{k} \downarrow}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Vamos reescrever a equação (1.22) utilizando as equações (1.23) e (1.24), assim Ψ_{GS} fica:

$$\Psi_{GS} = \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g(\mathbf{k}_1) \dots g(\mathbf{k}_{N/2}) \hat{b}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \dots \hat{b}_{\mathbf{k}_{N/2}}^\dagger |0\rangle. \quad (1.25)$$

Bardeen, Cooper e Schrieffer propuseram uma versão alternativa para a equação (1.25) [3], devido a dificuldade apresentada nos cálculos. Assim, tal versão ficou definida como:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}) |0\rangle. \quad (1.26)$$

onde $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$ são coeficientes e o produtório se estende para todos os estados de ondas planas. O estado supercondutor é descrito por um Hamiltoniano efetivo, i.e., que leva em conta a energia cinética dos pares de Cooper e as interações somente ocorrem entre pares. Na linguagem da segunda quantização o operador Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'}, \quad (1.27)$$

onde $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ é a energia cinética de um elétron. O cálculo da energia do estado fundamental associado ao estado $|\Psi_{BCS}\rangle$ é dada por:

$$F = \frac{\langle \Psi_{BCS} | \hat{H} | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle}. \quad (1.28)$$

Para obter F , precisaremos do *overlap* de $\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle$. Primeiramente, vamos escrever o Hermitiano conjugado da equação (1.26). Assim, temos que:

$$\langle \Psi_{BCS} | = \prod_{\mathbf{k}} \langle 0 | (u_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{\mathbf{k}}). \quad (1.29)$$

Expandindo a equação (1.25), temos que:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = (u_{\mathbf{k}_1} + v_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger})(u_{\mathbf{k}_2} + v_{\mathbf{k}_2} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger}) \dots (u_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}) \dots |0\rangle, \quad (1.30)$$

Em um primeiro momento, vamos fazer o *overlap* para um elemento de matriz i

$$\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle = \langle 0 | (u_{\mathbf{k}_i}^* + v_{\mathbf{k}_i}^* \hat{b}_{\mathbf{k}_i}) (u_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}) | 0 \rangle \quad (1.31)$$

Podemos expressar a equação (1.31) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle &= \langle 0 | (u_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}_i} | 0 \rangle + \langle 0 | (u_{\mathbf{k}_i}^* v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}) | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | v_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | 0 \rangle + \langle 0 | v_{\mathbf{k}_i}^* v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger}) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.32)$$

Como $\hat{b}_{\mathbf{k}_i} | 0 \rangle = 0$ e sendo o *overlap* de $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ e $\langle 0 | \mathbf{k}_i \rangle = 0$, no qual $|\mathbf{k}_i\rangle$ é um estado ocupado. Colocando em notação de produtório para os estados de $\mathbf{k}$, temos que:

$$\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle = \prod_{\mathbf{k}} (|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2). \quad (1.33)$$

Agora, vamos calcular o termo da energia cinética do Hamiltoniano:

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_o | \Psi_{BCS} \rangle = \langle \Psi_{BCS} | \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} | \Psi_{BCS} \rangle. \quad (1.34)$$

O operador $\hat{H}_o$ somente atuará com as autofunções que possuem a mesma configuração no espaço. Portanto, vamos escrever a equação (1.34) para um elemento de matriz i , assim temos que:

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_o | \Psi_{BCS} \rangle = \langle 0 | (u_{\mathbf{k}_i}^* + v_{\mathbf{k}_i}^* \hat{b}_{\mathbf{k}_i}) 2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} (u_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger) | 0 \rangle. \quad (1.35)$$

Aplicando os operadores de bósons, temos que:

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} (u_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= 2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} (u_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | 0 \rangle + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger | 0 \rangle) = v_{\mathbf{k}_i} | k_i \rangle, \end{aligned} \quad (1.36)$$

Substituindo a equação (1.36) em (1.35), obtemos:

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_o | \Psi_{BCS} \rangle = 2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} \langle 0 | u_{\mathbf{k}_i}^* v_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i}^* v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | k_i \rangle = 2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} |v_{\mathbf{k}_i}|^2. \quad (1.37)$$

O *overlap* também deve seguir possuir a mesma configuração no espaço. Portanto a equação (1.37) fica:

$$\frac{\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_o | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle} = \frac{2\varepsilon_{\mathbf{k}_i} |v_{\mathbf{k}_i}|^2}{|u_{\mathbf{k}_i}|^2 + |v_{\mathbf{k}_i}|^2}, \quad (1.38)$$

Somando para todos os i_s , obtemos:

$$\frac{\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_o | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\varepsilon_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2}{|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (1.39)$$

Para o cálculo do potencial, temos a interação entre os pares dos estados $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$. Assim $|\Psi_{BCS}\rangle$ fica da seguinte forma [1]

$$|\Psi_{BCS}\rangle = v_{\mathbf{k}'} \varphi_1 + u_{\mathbf{k}'} \varphi_0, \quad (1.40)$$

$$\varphi_1 = \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \varphi_0, \quad (1.41)$$

$$\varphi_0 = \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) | 0 \rangle. \quad (1.42)$$

Podemos reescrever esse conjunto de equações da seguinte forma:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) | 0 \rangle. \quad (1.43)$$

Os operadores do potencial somente irão atuar nas autofunções que possuem a mesma configuração no espaço. Portanto, vamos escrever a equação (1.43) para um elemento de matriz para os estados $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ dados respectivamente i e j , onde $i \neq j$. Assim, a equação (1.43) fica:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = (u_{\mathbf{k}'_j} + v_{\mathbf{k}'_j} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger)(u_{\mathbf{k}_i} + v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger)|0\rangle. \quad (1.44)$$

Podemos escreve-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |\Psi_{BCS}\rangle &= u_{\mathbf{k}'_j} u_{\mathbf{k}_i} |0\rangle + u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle \\ &+ v_{\mathbf{k}'_j} u_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger |0\rangle + v_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Aplicando o operador do potencial em (1.45), temos que:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} |\Psi_{BCS}\rangle &= V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} u_{\mathbf{k}'_j} u_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} |0\rangle + u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle \\ &+ v_{\mathbf{k}'_j} u_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger |0\rangle + v_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (1.46)$$

O segundo termo do lado direito da equação (1.46) é o único não nulo. Assim, temos que:

$$V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} |\Psi_{BCS}\rangle = V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} |\mathbf{k}'_j\rangle \quad (1.47)$$

Tomando o Hermitiano conjugado da equação (1.45) e utilizando a equação (1.47), o termo de interação do Hamiltoniano (H_I) transforma-se em:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_I | \Psi_{BCS} \rangle &= \langle \Psi_{BCS} | V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | \Psi_{BCS} \rangle \\ &= V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} (\langle 0 | u_{\mathbf{k}'_j}^* u_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} | \mathbf{k}'_j \rangle + \langle 0 | u_{\mathbf{k}'_j}^* v_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | \mathbf{k}'_j \rangle \\ &+ \langle 0 | v_{\mathbf{k}'_j}^* u_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j} | \mathbf{k}'_j \rangle + \langle 0 | v_{\mathbf{k}'_j}^* v_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i} \hat{b}_{\mathbf{k}'_j} \hat{b}_{\mathbf{k}_i} | \mathbf{k}'_j \rangle), \end{aligned} \quad (1.48)$$

O termo não nulo é dado por:

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_I | \Psi_{BCS} \rangle = V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} v_{\mathbf{k}'_j}^* u_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i}. \quad (1.49)$$

Fazendo um produto interno da equação (1.45) com o seu Hermitiano conjugado temos que o *overlap* do termo de interação é dado por:

$$\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle = (|u_{\mathbf{k}_i}|^2 + |v_{\mathbf{k}_i}|^2)(|u_{\mathbf{k}'_j}|^2 + |v_{\mathbf{k}'_j}|^2). \quad (1.50)$$

Por fim, somando sobre todos os estados i e j , lembrando que $i \neq j$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi_{BCS} | H_I | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle} &= V_{\mathbf{k}'_j \mathbf{k}_i} \frac{v_{\mathbf{k}'_j}^* u_{\mathbf{k}_i}^* u_{\mathbf{k}'_j} v_{\mathbf{k}_i}}{(|u_{\mathbf{k}_i}|^2 + |v_{\mathbf{k}_i}|^2)(|u_{\mathbf{k}'_j}|^2 + |v_{\mathbf{k}'_j}|^2)} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}' \mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}}{(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2)(|u_{\mathbf{k}'}|^2 + |v_{\mathbf{k}'}|^2)}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Combinando as equações (1.39) e (1.51), temos que a equação (1.28) pode ser escrita como:

$$F = \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\varepsilon_{\mathbf{k}}|v_{\mathbf{k}}|^2}{|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}}{(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2)(|u_{\mathbf{k}'}|^2 + |v_{\mathbf{k}'}|^2)}. \quad (1.52)$$

$|\Psi_{BCS}\rangle$ não fixa o número de elétrons, assim é necessário introduzir uma constrição para o número de partículas. Levando em conta tal consideração, temos que:

$$W = F - \mu N. \quad (1.53)$$

onde μ é um multiplicador de Lagrange, sendo N o número de partículas que é dado por [3]:

$$N = \frac{\langle \Psi_{BCS} | \hat{N} | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle} = \frac{\langle \Psi_{BCS} | \sum_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} | \Psi_{BCS} \rangle}{\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle}. \quad (1.54)$$

O cálculo de N é semelhante ao de H_o (repare na estrutura do operador $\hat{N}$). Assim, procedendo de forma análoga, temos que:

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|v_{\mathbf{k}}|^2}{|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (1.55)$$

Combinando as equações (1.52), (1.53) e (1.55), obtemos:

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2 \frac{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)|v_{\mathbf{k}}|^2}{|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{v_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}}{(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2)(|u_{\mathbf{k}'}|^2 + |v_{\mathbf{k}'}|^2)}. \quad (1.56)$$

A normalização da equação (1.56) é complicada por conta dos denominadores. Portanto, iremos impor que $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$. Então, com a finalidade de satisfazer tal imposição, iremos introduzir a seguinte definição:

$$u_{\mathbf{k}} = \cos(\theta_{\mathbf{k}}), \quad (1.57)$$

$$v_{\mathbf{k}} = \sin(\theta_{\mathbf{k}}). \quad (1.58)$$

Isso exige que $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$ sejam funções reais. Assim, a equação (1.56) torna-se:

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}. \quad (1.59)$$

Temos que W é um funcional compostos pelas variáveis $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$. Assim, a ideia da teoria BCS é determinar as equações para $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ de maneira variacional para W . Primeiramente, vamos substituir as equações (1.57) e (1.58) em (1.59), encontramos:

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \sin^2(\theta_{\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} \frac{1}{4} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}). \quad (1.60)$$

Nesta última passagem utilizamos as identidades trigonométricas $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ para os estados de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$. Utilizando cálculo variacional [7], iremos minimizar a equação (1.60) em relação a $\theta_{\mathbf{k}}$. Temos que:

$$\frac{\delta W}{\delta \theta_{\mathbf{k}}} = \frac{\partial W}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}_{\mathbf{k}}} = 0, \quad (1.61)$$

onde $\theta_{\dot{\mathbf{k}}} = \frac{\partial \theta_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$. Como não temos tal termo presente na estrutura de W , a equação (1.61) reduz-se a:

$$\frac{\delta W}{\delta \theta_{\mathbf{k}}} = \frac{\partial W}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} = 0. \quad (1.62)$$

Ao substituir W na equação (1.62), devemos efetuar as derivadas parciais, que são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} \sin^2(\theta_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta_{\mathbf{k}})) = \sin(2\theta_{\mathbf{k}}), \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}) = 2 \cos(2\theta_{\mathbf{k}}) \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}). \quad (1.64)$$

Substituindo ambas as derivadas na equação (1.62), obtemos:

$$\frac{\delta W}{\delta \theta_{\mathbf{k}}} = 2(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{2} \cos(2\theta_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}) = 0, \quad (1.65)$$

Definiremos:

$$2(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \tan(2\theta_{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}). \quad (1.66)$$

No qual:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}'}) = -\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'}. \quad (1.67)$$

onde $\Delta_{\mathbf{k}}$ é chamada como função de *gap*. O sinal é escolhido notando que o potencial $V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ é atrativo. A quantidade $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ é a energia das quasi-partículas. Nosso objetivo é obter expressões para $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$. Então, primeiramente iremos manipular as equações (1.66) e (1.67). Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}}^2 \sin^2(2\theta_{\mathbf{k}}) &= \cos^2(2\theta_{\mathbf{k}}) \Delta_{\mathbf{k}}^2 = -\sin^2(2\theta_{\mathbf{k}}) \Delta_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2, \\ \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) &= \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Sendo $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$ a energia de dispersão das quasi-partículas, podemos escrever que:

$$\sin(2\theta_{\mathbf{k}}) = 2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (1.69)$$

Como $\tan(2\theta_{\mathbf{k}}) = \frac{\sin(2\theta_{\mathbf{k}})}{\cos(2\theta_{\mathbf{k}})}$ e $\cos^2 \theta_{\mathbf{k}} - \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2$, com o auxílio das equações (1.66) e (1.68), obtemos:

$$\cos(2\theta_{\mathbf{k}}) = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2. \quad (1.70)$$

Sendo $2\cos^2 \theta_{\mathbf{k}} - 1 = \cos(2\theta_{\mathbf{k}}) = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}$ e $\cos^2 \theta_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^2$, temos que:

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (1.71)$$

Substituindo (1.71) em (1.70), encontramos:

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right). \quad (1.72)$$

$v_{\mathbf{k}}^2$ é proporcional à probabilidade de encontrar um elétron no estado $\mathbf{k}$. Quando o termo correspondente ao *gap* do supercondutor, i.e., $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, temos um comportamento de uma distribuição de Fermi em $T = 0$. Assim, temos que o estado de maior energia é o estado de Fermi. Substituindo (1.69) em (1.67) temos que:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}}. \quad (1.73)$$

Para $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$, temos que:

$$v_{\mathbf{k}}^2 = 1 \quad \text{para} \quad \xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - E_F < 0, \quad (1.74)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = 0 \quad \text{para} \quad \xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - E_F > 0. \quad (1.75)$$

onde identificamos μ como a energia de Fermi. Por outro lado, se $\Delta_{\mathbf{k}} \neq 0$, temos uma solução não trivial para a equação (1.73). Todavia, podemos resolvê-la utilizando a ideia de Cooper para o potencial, onde este é fracamente atrativo somente em uma pequena região próximo do nível de Fermi. Assim, temos que:

$$V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \begin{cases} -V_0, & \text{se} \quad |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu| \text{ e } |\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \mu| < \hbar\omega_D, \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (1.76)$$

Com as considerações do potencial, temos as seguintes condições para a equação (1.73):

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0, \text{ se } |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu| < \hbar\omega_D, \quad (1.77)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = 0, \text{ se } |\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu| > \hbar\omega_D, \quad (1.78)$$

Com as condições dadas pelas equações (1.76) e (1.77), a equação (1.73) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}}, \\ 1 &= V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Para resolver a equação (1.79), iremos transformar o somatório em uma integral em $\mathbf{k}$ [8]:

$$1 = V_0 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{1}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}}. \quad (1.80)$$

Como nossas condições para o potencial, e consequentemente para Δ_0 , estão em termos da energia de corte, ou seja, $\hbar\omega_D$, é conveniente fazermos uma mudança de variável de $\mathbf{k}$ para ξ . Assim, expressando a equação (1.80) em termos da energia, torna-se:

$$1 = V_0 \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{\aleph(\xi)}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}}. \quad (1.81)$$

onde $\aleph(\xi)$ é a densidade de estados. Considerando-a como uma constante no intervalo de integração, ou seja, considerando o seu valor no nível de Fermi, obtemos:

$$1 = V_0 \aleph(0) \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}}. \quad (1.82)$$

A integral pode ser resolvida através do método de substituição trigonométrica. Sendo $\xi = \Delta_0 \tan(\theta)$ e $\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2} = \Delta_0 \sec(\theta)$, obtemos:

$$1 = \frac{V_0 \aleph(0)}{2} \int \sec \theta d\theta, \quad (1.83)$$

A solução da integral da equação (1.83) é $\ln |\sec \theta + \tan \theta|$, e substituindo as expressões para $\sec \theta$ e $\tan \theta$, obtemos:

$$1 = \frac{V_0 \aleph(0)}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} + \frac{\xi}{\Delta_0} \right| = \frac{V_0 \aleph(0)}{2} \sinh^{-1}(x). \quad (1.84)$$

Neste última passagem utilizamos a representação logarítmica $\sinh^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, onde $x = \xi/\Delta_0$. Aplicando os limites de integração, a equação (1.84) produz:

$$1 = \frac{V_0 \aleph(0)}{2} 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\hbar \omega_D}{\Delta_0} \right). \quad (1.85)$$

Podemos escrever a equação (1.85) na seguinte forma:

$$\frac{\Delta_0}{\hbar \omega_D} = \left[\sinh \left(\frac{1}{V_0 \aleph(0)} \right) \right]^{-1} = \frac{2}{e^{\frac{1}{\aleph(0)V_0}} - e^{-\frac{1}{\aleph(0)V_0}}}, \quad (1.86)$$

Uma vez que $\Delta_0 \ll \hbar \omega_D$, obtemos:

$$\Delta_0 = \frac{2\hbar \omega_D}{e^{\frac{1}{\aleph(0)V_0}} - e^{-\frac{1}{\aleph(0)V_0}}} = 2\hbar \omega_D e^{-\frac{1}{\aleph(0)V_0}}. \quad (1.87)$$

Assim, obtemos o valor do *gap* no *ground state*, i.e., para $T = 0$.

1.2.3 Estados excitados

Quando consideramos $T \neq 0$, temos os estados excitados, cujo o “vácuo” é o estado fundamento BCS, i.e., o *ground state*. Assim, os estados excitados ocorrem a partir do *ground state*, e consistem em retirar um elétron de um estado $\mathbf{k}$ por spin e adicionar-lo em um estado $\mathbf{k}'$. Para tal fim, introduziremos os operadores de férmions atuando sobre a função de onda BCS.

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger |\Psi_{BCS}\rangle &= (u_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) |0\rangle \\ &= u_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) |0\rangle \\ &= u_{\mathbf{k}} |\mathbf{k} \uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Nas passagem da equação (1.88) utilizamos o princípio de exclusão de Pauli. Além do mais, a equação nos diz que ao aplicarmos o operador criação com *spin up* no *ground state* BCS, criamos um estado $|\mathbf{k} \uparrow\rangle$ a partir da função de onda BCS. Agora, usaremos um procedimento análogo para os outros operadores de fermions. Temos que:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} |\Psi_{BCS}\rangle &= u_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} + v_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) |0\rangle, \\ &= -v_{\mathbf{k}} |\mathbf{k} \uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} |\Psi_{BCS}\rangle = v_{\mathbf{k}} |-\mathbf{k} \downarrow\rangle, \quad (1.90)$$

$$\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{BCS}\rangle = u_{\mathbf{k}} |-\mathbf{k} \downarrow\rangle. \quad (1.91)$$

Multiplicando a equação (1.88) por $v_{\mathbf{k}}$ e (1.89) por $u_{\mathbf{k}}$ e fazendo uma soma temos que:

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger|\Psi_{BCS}\rangle + u_{\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}|\Psi_{BCS}\rangle \\ (v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow})|\Psi_{BCS}\rangle = 0, \\ \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}|\Psi_{BCS}\rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

De maneira análoga, multiplicando $u_{\mathbf{k}}$ (1.90) e $v_{\mathbf{k}}$ (1.91) e subtraindo, obtemos:

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} - v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)|\Psi_{BCS}\rangle = 0 \\ \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}|\Psi_{BCS}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (1.88) por $u_{\mathbf{k}}$ e (1.89) por $v_{\mathbf{k}}$ e subtraindo os resultados, obtemos:

$$(u_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow})|\Psi_{BCS}\rangle = (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2)|\mathbf{k}\uparrow\rangle = \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger|\Psi_{BCS}\rangle. \quad (1.94)$$

Aqui utilizamos a condição de normalização $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$. Por fim, multiplicando $v_{\mathbf{k}}$ por (1.90) e $u_{\mathbf{k}}$ por (1.91) e somando os resultados, obtemos:

$$(v_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} + u_{\mathbf{k}}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)|\Psi_{BCS}\rangle = (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2)|-\mathbf{k}\downarrow\rangle = \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger|\Psi_{BCS}\rangle. \quad (1.95)$$

Os símbolos $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ e $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação de quasi-partículas, onde σ denota ambos os spins. Tais operadores são conhecidos como os operadores de Bogoliubov-Valatin em homenagem aos físicos que os introduziram [3]. Assim, podemos criar um estado excitado para N quasi-partículas da seguinte maneira:

$$|\mathbf{k}_1\sigma_1, \mathbf{k}_2\sigma_2, \mathbf{k}_3\sigma_3\dots\rangle = (\hat{\gamma}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}_3\sigma_3}^\dagger \dots)|\Psi_{BCS}\rangle. \quad (1.96)$$

O método de Bogoliubov-Valatin aparece como uma alternativa ao invés de utilizar explicitamente a função de onda B.C.S. Então, devemos reescrever o Hamiltoniano em termos de $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ e $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$. Manipulando o conjunto de equações (1.92)-(1.95), obtemos:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, \quad (1.97)$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger = u_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}, \quad (1.98)$$

$$\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} = u_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} - v_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, \quad (1.99)$$

$$\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger = u_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}}\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}. \quad (1.100)$$

Esse conjunto de equações permite-nos escrever o Hamiltoniano para o estado excitado. Por outro lado, essas excitações se comportam como férmions. Assim, o cálculo do valor médio do Hamiltoniano será a média térmica dos operadores $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ e $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$, que é dada pela estatística de Fermi-Dirac [3, 9]. Portanto, temos que:

$$\langle \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = f_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (1.101)$$

$$\langle \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \rangle = 1 - f_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (1.102)$$

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp \frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T} + 1}. \quad (1.103)$$

A média térmica será não nula apenas quando ambos os operadores estiverem o mesmo valor de $\mathbf{k}$ e de spin. A relação de anticomutação para tais operadores é dada por:

$$[\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\sigma'}]_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (1.104)$$

O operador Hamiltoniano (equação 1.27) escrito em termos dos operadores de férmions é dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}_I = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_k \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{-\mathbf{k}\uparrow}. \quad (1.105)$$

Considerando o termo não interagente $\hat{H}_o$ e substituindo o conjunto de equações (1.97)-(1.100), encontramos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_o &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_k \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k (\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{c}_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\downarrow}), \\ \hat{H}_o &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k [u_{\mathbf{k}}^2 (\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}) + v_{\mathbf{k}}^2 (\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)]. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Utilizando a relação dada pela equação (1.104), no segundo termo entre parênteses, vem que:

$$\hat{H}_o = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k [2v_{\mathbf{k}}^2 + (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) (\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow})]. \quad (1.107)$$

Por fim, com o auxílio da equação (1.101), temos que:

$$\langle \hat{H}_o \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k [v_{\mathbf{k}}^2 + (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) f_{\mathbf{k}}]. \quad (1.108)$$

Agora, procederemos de forma análoga para o termo de interação ($\hat{H}_I$). Então os termos não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} (-\hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \\ &+ \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger - \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}). \end{aligned} \quad (1.109)$$

Utilizando a relação dada pela equação (1.104) e organizando todas as contribuições, temos que:

$$\hat{H}_I = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \quad (1.110)$$

$$(1 - \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow})(1 - \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'\uparrow} - \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}'\downarrow})$$

Com o auxílio da equação (1.101), obtemos:

$$\langle \hat{H}_I \rangle = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}})(1 - 2f_{\mathbf{k}'}). \quad (1.111)$$

Combinando as equações (1.108) e (1.111), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \hat{H}_o \rangle + \langle \hat{H}_I \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k [v_{\mathbf{k}}^2 + (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) f_{\mathbf{k}}] \\ &+ \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}})(1 - 2f_{\mathbf{k}'}). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Da mesma forma que tratamos o *ground state*, temos que minimizar a equação (1.112) em relação a $\theta_{\mathbf{k}}$, introduzindo as condições de normalização $u_{\mathbf{k}} = \cos(\theta_{\mathbf{k}})$ e $v_{\mathbf{k}} = \sin(\theta_{\mathbf{k}})$. Fazendo a minimização, obtemos as seguintes expressões:

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (1.113)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (1.114)$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}, \quad (1.115)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} (1 - 2f_{\mathbf{k}'}). \quad (1.116)$$

Com exceção do termo do *gap* (equação 1.116), todos os demais são os mesmos que obtivemos para o caso do *ground state*. Com o auxílio da equação (1.69), podemos escrever:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{(1 - 2f_{\mathbf{k}'})}{2E_{\mathbf{k}'}} \Delta_{\mathbf{k}'}. \quad (1.117)$$

Para resolver a equação (1.117), utilizamos as condições dadas pelo conjunto de equações (1.76)-(1.81), que consiste em considerar o potencial fracamente atrativo para energias menores que a energia de Debye. Contudo, neste caso, $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow \Delta(T)$, pois estamos calculando os estados excitados. Encontramos:

$$1 = V_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - 2f_{\mathbf{k}})}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)}}. \quad (1.118)$$

Passando de uma soma em $\mathbf{k}$ para uma integral em ξ , vem que:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1 - 2f(E)}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}, \quad (1.119)$$

onde consideramos a densidade de estado constante no intervalo de integração. A equação (1.119) deve ser resolvida numericamente, porém a temperatura crítica do supercondutor pode ser obtida através da condição $\Delta(T_c) = 0$. Então a equação (1.119) fica:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1 - 2f(\xi)}{2\xi}. \quad (1.120)$$

Realizando a mudança de variável $x = \frac{\xi}{2k_B T_c}$, podemos escrever a equação (1.120) da seguinte forma:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} \frac{dx}{x} \tanh(x). \quad (1.121)$$

Usando integração por partes, temos que:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \left[\tanh\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right) \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right) - \int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} \frac{\ln(x)}{\cosh^2(x)} dx \right]. \quad (1.122)$$

Como $\hbar\omega_D \gg k_B T_c$, $\tanh(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}) \rightarrow 1$ podemos mudar o limite superior na integral remanescente para o infinito:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \left[\ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right) - \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\cosh^2(x)} dx \right]. \quad (1.123)$$

Resolvendo a integral [10], obtemos:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\cosh^2(x)} dx = -\ln\left(\frac{4e^\gamma}{\pi}\right), \quad (1.124)$$

onde $\gamma = 0,5772$ é o número de Euler-Machi. Substituindo a equação (1.124) na (1.123), temos que:

$$1 = V_0 \mathfrak{N}(0) \ln\left(\frac{1,14\hbar\omega_D}{k_B T_c}\right), \quad (1.125)$$

ou ainda,

$$k_B T_c = 1,14\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 \mathfrak{N}(0)}}. \quad (1.126)$$

Podemos calcular a capacidade calorífica do estado supercondutor através da entropia de férmions [11, 12] por meio das equações:

$$\begin{aligned}
S &= -k_B \sum_{\mathbf{k}\sigma} [f_{\mathbf{k}} \ln(f_{\mathbf{k}}) + (1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}})], \\
S &= -2k_B \sum_{\mathbf{k}} [f_{\mathbf{k}} \ln(f_{\mathbf{k}}) + (1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}})].
\end{aligned} \tag{1.127}$$

onde nesta última passagem fizemos a soma por spin. Pela termodinâmica clássica a capacidade calorífica é dada por:

$$C = T \frac{dS}{dT}. \tag{1.128}$$

Substituindo a equação (1.127) na (1.128) e utilizando a regra do produto e da cadeia ao derivar em relação à temperatura, encontramos:

$$C = -2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\ln(f_{\mathbf{k}}) + 1 - \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) - \frac{1}{(1 - f_{\mathbf{k}})} + \frac{f_{\mathbf{k}}}{(1 - f_{\mathbf{k}})} \right) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} \right], \tag{1.129}$$

Através de algumas manipulações algébricas, encontramos:

$$C = -2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\ln(f_{\mathbf{k}}) - \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) \right) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} \right]. \tag{1.130}$$

Podemos escrever o termo entre parênteses da seguinte maneira:

$$C = 2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T}. \tag{1.131}$$

Temos que $f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T}} + 1}$ e $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$. Assim, para os estados excitados $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow \Delta_{\mathbf{k}}(T)$. Portanto a derivada da equação (1.131), assume da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T}}} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f(T)}{g(T)} \right). \tag{1.132}$$

Utilizando a regra do quociente, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f(T)}{g(T)} \right) = \frac{f'(T)g(T) - f(T)g'(T)}{g^2(T)}. \tag{1.133}$$

Pela regra da cadeia, para $f'(T)$ temos:

$$f'(T) = -e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T}} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T} \right]', \tag{1.134}$$

utilizando a regra do quociente para o termo entre colchetes, obtemos:

$$\left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{k_B T} \right]' = \left(\frac{E'_{\mathbf{k}} k_B T - E_{\mathbf{k}} k_B}{(k_B T)^2} \right), \quad (1.135)$$

$$E'_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial T} \sqrt{\xi^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2(T)} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \Delta_{\mathbf{k}}(T) \frac{\partial \Delta_{\mathbf{k}}(T)}{\partial T}. \quad (1.136)$$

Combinando as equações (1.136) e (1.135), vem que:

$$f'(T) = -e^{\frac{-E_{\mathbf{k}}}{k_B T}} \left[\frac{1}{E_{\mathbf{k}} k_B T} \Delta_{\mathbf{k}}(T) \frac{\partial \Delta_{\mathbf{k}}(T)}{\partial T} - \frac{E_{\mathbf{k}} k_B}{(k_B T)^2} \right], \quad (1.137)$$

Fazendo um processo análogo com $g'(T)$, substituindo os resultados na equação (1.133) e comparando com a (1.131), após alguma álgebra encontramos:

$$C = \frac{-2}{k_B T^2} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(1 - f_{\mathbf{k}}) \left(-E_{\mathbf{k}}^2 + T \Delta_{\mathbf{k}}(T) \frac{\partial \Delta_{\mathbf{k}}(T)}{\partial T} \right). \quad (1.138)$$

Como procedemos anteriormente, vamos transformar o somatório em $\mathbf{k}$ em uma integral e, fazer uma mudança para ξ . Assim, temos que:

$$C = \frac{-2}{k_B T^2} \aleph(0) \int_0^\infty d\xi f(E)(1 - f(E)) \left(-E^2 + T \Delta(T) \frac{\partial \Delta(T)}{\partial T} \right). \quad (1.139)$$

Para baixas temperaturas, $\Delta_0 \gg k_B T$ e o *gap* é praticamente constante, assim $\Delta(T) \frac{\partial \Delta(T)}{\partial T} \approx 0$. A função de distribuição para tal regime de temperaturas fica $f(E) \ll 1$. Então, iremos aproxima-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{k_B T^2} \aleph(0) \int_0^\infty d\xi e^{-\frac{E}{k_B T}} E^2, \\ C &= \frac{2}{k_B T^2} \aleph(0) \left[\int_0^\infty d\xi e^{-\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \xi^2}}{k_B T}} \xi^2 + \int_0^\infty d\xi e^{-\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \xi^2}}{k_B T}} \Delta_0^2 \right] \\ C &\approx \frac{2}{k_B T^2} \aleph(0) \left[\int_0^\infty d\xi e^{-\frac{\Delta_0 + \frac{\xi^2}{2\Delta_0}}{k_B T}} \xi^2 + \int_0^\infty d\xi e^{-\frac{\Delta_0 + \frac{\xi^2}{2\Delta_0}}{k_B T}} \Delta_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.140)$$

onde utilizamos aproximação $x = \sqrt{\Delta_0^2 + \xi^2} \approx \Delta_0 + \frac{\xi^2}{2\Delta_0}$ [13] com o auxílio da série de Taylor, pois no regime de baixas temperaturas $\xi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ é pequeno. Desconsiderando a contribuição da primeira integral e resolvendo a segunda, obtemos:

$$C \approx 2\aleph(0) \Delta_0 (2\pi)^{1/2} k_B (\Delta_0 k_B T)^{3/2} e^{-\frac{\Delta_0}{k_B T}}. \quad (1.141)$$

A capacidade calorífica se aproxima do zero exponencialmente devido à presença do *gap*, como é verificado experimentalmente no alumínio (ver Ref.[10]).

1.3 Teoria de Ginzburg-Landau

1.3.1 Teoria de transições de fase de Landau

Em 1937, Landau propôs uma teoria fenomenológica para transições de fase de segunda ordem ou contínuas [14], na qual a simetria de um sistema é definida por um parâmetro de ordem. Dependendo do tipo de transição de fase o sistema pode ou não ter uma quebra de simetria. Para transições de fase de primeira ordem ou descontínuas, por exemplo, na transição líquido-sólido temos quebra de simetria, pois os ordenamentos moleculares difere consideravelmente. Entretanto, na transição líquido-gás não temos quebra de simetria. Para uma transição de fase de segunda ordem a simetria é sempre quebrada [12]. Assim, em tal transição aparece um parâmetro de ordem macroscópico que define a simetria da “nova” fase. O parâmetro de ordem vai depender do tipo de simetria que foi quebrada, pode ser uma grandeza escalar, vetorial, tensorial, função complexa etc. Na transição para-ferromagnética, o parâmetro de ordem é um vetor, pois, devido à magnetização espontânea a simetria rotacional é quebrada. Quando a simetria de *gauge* é quebrada, o parâmetro de ordem é uma função escalar complexa, como é o caso da transição normal-superfluido no He^4 e normal-supercondutor [12].

Definimos genericamente um potencial termodinâmico Φ que dependa das quantidades termodinâmicas P , T e do parâmetro de ordem ψ . A expansão deste potencial em séries de potência é dada por:

$$\begin{aligned}\Phi(P, T, \psi) = & \Phi_0(P, T) + a_1(P, T)\psi + a_2(P, T)\psi^2 \\ & + a_3(P, T)\psi^3 + a_4(P, T)\psi^4 + \dots a_n(P, T)\psi^n,\end{aligned}\tag{1.142}$$

onde $\Phi_0(P, T)$ é o potencial termodinâmico que não depende de ψ , e $a_1, \dots, a_n$ são coeficientes dependentes de P e T .

O valor que ψ deve assumir é tal que, o estado de equilíbrio térmico minimize $\Phi(P, T, \psi)$. Assim, para que a função $\Phi(P, T, \psi)$ atinja o ponto crítico, i.e., um mínimo local com respeito a ψ , temos que, $\frac{\partial \Phi(P, T, \psi)}{\partial \psi} = 0$ e $\frac{\partial^2 \Phi(P, T, \psi)}{\partial \psi^2} > 0$. Tais equações nos fornecem a condição de equilíbrio. Isso requer que $a_1(P, T) = 0$, tanto para $\psi = 0$ quanto para $\psi \neq 0$. Então, temos as soluções possíveis, para $\psi = 0 \rightarrow a_2(P, T) > 0$. Entretanto, para $\psi \neq 0$ temos que:

$$\begin{aligned}a_2(P, T) &= 0 \rightarrow a_3(P, T) \neq 0; a_4(P, T) > 0, \\ a_3(P, T) &= 0 \rightarrow a_2(P, T) < 0; a_4(P, T) > 0, \\ a_4(P, T) &= 0 \rightarrow a_2(P, T) < 0; a_3(P, T) > 0.\end{aligned}\tag{1.143}$$

A única condição para a qual temos uma linha de transição contínua é (ao invés de

pontos de transição) para $a_3(P, T) = 0$ [12, 15, 16]. Assim, o potencial termodinâmico assume a forma:

$$\Phi(P, T, \psi) = \Phi_0(P, T) + a_2(P, T)\psi^2 + a_4(P, T)\psi^4 + \dots a_n(P, T)\psi^n. \quad (1.144)$$

Considerando $a_4(P, T)$ como uma constante fenomenológica e $a_2(P, T)$ uma função fenomenológica dependente somente da temperatura, podemos expandi-la em série de Taylor:

$$a_2(P, T) = A(P)T - T_c + \frac{A(P)(T - T_c)^2}{2!} + \dots \quad (1.145)$$

Na vizinhança do ponto crítico, Landau definiu $a_2(P, T)$ como sendo uma função linear que se anulava quando $T = T_c$. Assim, temos que $a_2(P, T) = A(P)(T - T_c)$. As potências de ψ maior que a quarta ordem tem seu valor negligenciado, pois ψ é muito pequeno nas vizinhanças do ponto de transição. Tendo em vista estas condições para a_2, a_4 e ψ a equação (1.144) torna-se:

$$\Phi(P, T, \psi) = \Phi_0(P, T) + a_2(P, T)\psi^2 + a_4\psi^4. \quad (1.146)$$

Fazendo a minimização do potencial termodinâmico, o determinamos os valores possíveis para ψ . Assim temos, que:

$$\frac{\partial \Phi(P, T, \psi)}{\partial \psi} = +2a_2(P, T)\psi + 4a_4(P, T)\psi^3 = 0. \quad (1.147)$$

e as condições são:

$$\begin{aligned} a_2(P, T) &= 0 \rightarrow T = T_c \rightarrow \psi = 0, \\ a_2(P, T) &> 0 \rightarrow T > T_c \rightarrow \psi = 0, \\ a_2(P, T) &< 0 \rightarrow T < T_c \rightarrow \psi \neq 0. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Com efeito, para $a_2(P, T) = 0$ temos a ocorrência de um ponto crítico; para $a_2(P, T) > 0$ o potencial termodinâmico possui seu valor mínimo quando $\psi = 0$. Entretanto, se $a_2(P, T) < 0$, o valor mínimo ocorre quando $\psi \neq 0$. A estabilidade global do sistema requer que $a_4 > 0$, pois isso garante que o potencial termodinâmico aumente conforme ψ assume grandes valores [12]. Para exemplificar tais condições, a Figura 1.1 mostra o comportamento do potencial termodinâmico com relação a ψ .

Resolvendo a equação (1.147) em termos de $\psi \neq 0$, encontramos:

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{2a_4}}. \quad (1.149)$$

onde utilizamos as relações $a_2(P, T) = -A(P)T - T_c = A(P)T_c - T$ e $a_0 = A(P)$.

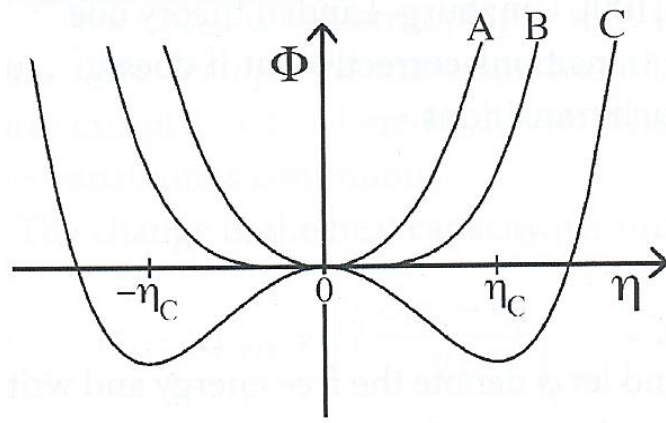


Figura 1.1: Comportamento do potencial termodinâmico (equação (1.146)) para diversos valores de a_2 . (A) $a_2 = 0,6$; (B) $a_2 = 0$; (C) $a_2 = -0,6$ [12].

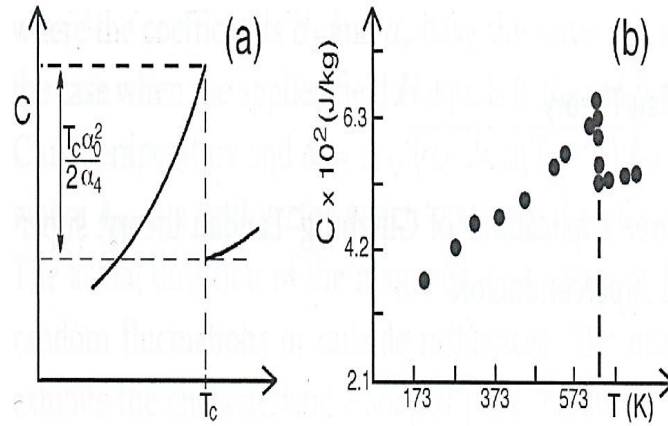


Figura 1.2: (a) Descontinuidade na capacidade calorífica de acordo com a teoria de Landau. (b) Capacidade calorífica do níquel na vizinhança da temperatura de Curie [12].

Substituindo a equação (1.149) na (1.146), reescrevemos o potencial termodinâmico em termos dos parâmetros fenomenológicos

$$\Phi(P, T, \psi) = \begin{cases} \Phi_0(P, T) & \text{para } T > T_c \\ \Phi_0(P, T) - \frac{a_0^2(T_c - T)^2}{4a_4} & \text{para } T < T_c \end{cases}$$

Uma vez que a segunda derivada de um potencial termodinâmico é descontínua em uma transição de fase de segunda ordem, iremos efetuar o cálculo da capacidade calorífica C . Identificamos o potencial como sendo a energia livre de Gibbs, pois depende de P e T . Sendo $C = \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{T \partial S}{\partial T}$ e $S = -\frac{\partial \Phi(P, T)}{\partial T}$, temos que:

$$C = -T \frac{\partial^2 \Phi(P, T)}{\partial T^2}. \quad (1.150)$$

Substituindo $\Phi(P, T)$ e considerando sua derivada no ponto crítico, i.e, em $T = T_c$, a diferença na capacidade calorífica entre as duas fases é:

$$\Delta C = \frac{T_c a_0^2}{2a_4} \quad (1.151)$$

A descontinuidade da capacidade calorífica está ilustrada na Figura 1.2.

1.3.2 Equações de Ginzburg-Landau

A transição de fase do estado normal para o estado supercondutor é uma transição de fase de segunda ordem (na ausência de campo magnético externo ($\mathbf{H}$)), onde temos uma quebra de simetria de calibre, i.e., a fase das funções de onda do sistema sofrem mudanças [12].

Tal estado é caracterizado por possuir resistividade nula, descontinuidade na capacidade calorífica e diamagnetismo perfeito (Efeito Meissner). Existem uma gama de materiais que apresentam supercondutividade, (ver Ref [10]). Para materiais supercondutores na ausência de campo magnético aplicado e de correntes de transporte, o único requisito para tal estado ser alcançado é estar em $T < T_c$. Entretanto, na presença de campo magnético aplicado e de correntes de transporte, além de $T < T_c$, os seguintes critérios devem ser satisfeitos: $\mathbf{H} < \mathbf{H}_c(T)$ e $\mathbf{J} < \mathbf{J}_c(T)$ para, respectivamente, o campo magnético externo e a densidade de corrente de transporte. Assim, tanto $\mathbf{H}$ e/ou $\mathbf{J}$ devem estar abaixo de seu valor crítico, caso contrário o estado supercondutor sofre uma transição de fase de primeira ordem para o estado normal, mesmo em $T < T_c$.

Para descrever as propriedades do estado supercondutor, vamos utilizar a teoria de Ginzburg-Landau [3, 10, 17] que foi publicada em 1950. Esta tem sua origem na teoria de transições de fase de segunda ordem desenvolvida por Landau. Considerando um supercondutor submetido à um campo magnético aplicado, e escrevendo o potencial termodinâmico (equação (1.146)) como sendo a densidade de energia livre de Gibbs do estado supercondutor [10], temos:

$$\begin{aligned} G_{SC}(\psi, \mathbf{A}) = & G_0 + \frac{1}{V} \int \left(a_2(P, T)|\psi|^2 + a_4|\psi|^4 + \frac{1}{2m_s}(-i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})\psi \cdot (i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})\psi^* \right. \\ & \left. + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} - \mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \right) d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.152)$$

onde: G_0 é a energia livre do estado normal;

O termo $K = \frac{1}{2m_s}(-i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})\psi \cdot (i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})\psi^* = \frac{1}{2m_s}|(-i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})\psi|^2 = \frac{1}{2m_s}P_K P_K^*$ é a energia cinética do condensado proposta por Ginzburg e Landau. $\mathbf{A}$ é o potencial vetor; $\frac{B^2\mathbf{r}}{2\mu_0}$ a densidade de energia do campo magnético penetrado (indução) e $\mu_0\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$ o trabalho realizado para expulsar o campo magnético aplicado e $a_2(P, T)|\psi|^2 + a_4|\psi|^4$

são a energia do condensado. Sendo $m_s = 2m$ e $e_s = 2e$, onde m e e são a massa e a carga do elétron respectivamente. $|\psi|^2$ fornece a densidade de superelétrons n_s , entes responsáveis pela supercondutividade, sendo $\psi = |\psi| \exp(i\theta)$ a função de onda escalar complexa macroscópica.

O estado supercondutor ocorre de tal forma que minimiza a energia do sistema. Assim, aplicamos a equação de Euler-Lagrange para minimizar G_{SC} com respeito a ψ e $\mathbf{A}$. Temos que:

$$\frac{\delta G_{SC}(\psi^*, \psi'^*, \mathbf{r})}{\delta \psi^*} = 0 \rightarrow \frac{\partial G_{SC}(\psi^*, \psi'^*, \mathbf{r})}{\partial \psi^*} - \nabla \frac{\partial G_{SC}(\psi^*, \psi'^*, \mathbf{r})}{\partial \psi'^*} = 0. \quad (1.153)$$

$$\frac{\delta G_{SC}(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{r})}{\delta \mathbf{A}} = 0 \rightarrow \frac{\partial G_{SC}(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{A}} - \nabla \times \frac{\partial G_{SC}(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{A}'} = 0. \quad (1.154)$$

Sendo $\psi' = \nabla \psi$ e $\mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$ onde este último é, de acordo com a eletrodinâmica clássica [18], é o campo de indução magnética $\mathbf{B}$. Substituindo G_{SC} nas equações equações (1.154) e (1.154) obtemos as equações de Ginzburg-Landau.

$$\frac{1}{2m_s}(-i\hbar\nabla - e_s\mathbf{A})^2\psi + a_2(P, T)\psi + a_4|\psi|^2\psi = 0, \quad (1.155)$$

$$\mathbf{J}_{SC} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} = -\frac{i\hbar e_s}{2m_s}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e_s^2}{m_s}A^2|\psi|^2, \quad (1.156)$$

onde utilizamos a Lei de Ampère $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$. Assim, temos uma densidade de corrente de blindagem que gera um campo magnético que se opõe (expulsa) ao campo magnético aplicado. Através das equações de Ginzburg-Landau (equações (1.154) e (1.156)) é possível descrever diversos efeitos do estado supercondutor.

1.3.3 Densidade de superelétrons e comprimento de coerência

Vamos considerar o supercondutor na ausência de campo magnético, assim não temos densidade de corrente supercondutora presente no sistema, ou seja, $\mathbf{A} = 0$. Além disso, consideramos ψ constante em todo o espaço. Assim, temos que a a equações 1.155 fica:

$$a_2(P, T)\psi + a_4|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.157)$$

As soluções são $\psi = 0$, i.e., estado normal e $\psi \neq 0$ quando $T < T_c$. Utilizando a definição de Landau para $a_2(P, T)$ e a_4 temos:

$$|\psi|^2 = \frac{|a_0(T - T_c)|}{a_4} = n_s. \quad (1.158)$$

Assim, a densidade de superelétrons vai crescendo linearmente conforme T decresce.

Considerando a outra situação onde $\mathbf{A} = 0$, porém com condição inomogênea, i.e $\nabla\psi \neq 0$, contudo mantendo sua fase constante, a equação (1.156) fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_s}\nabla^2\psi + a_2(P, T)\psi + a_4|\psi|^2\psi = 0. \quad (1.159)$$

Definindo $\psi = \sqrt{\frac{|a_2(P, T)|}{a_4}}f$ e lembrando que $a_2(P, T)$ é negativo para o estado supercondutor, a equação (1.159) pode ser escrita como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_s a_2(P, T)}\nabla^2 f - f(1 - f^2) = 0. \quad (1.160)$$

Identificamos $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m_s a_2(P, T)}$. Como sendo o comprimento de coerência, que mensura a variação espacial do parâmetro de ordem. Utilizando a definição de $a_2(P, T)$, temos que:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s a_0 |T - T_c|}} = \sqrt{\xi(0)^2 \frac{1}{|T - T_c|}} = \xi(0) \sqrt{\frac{1}{|T - T_c|}}. \quad (1.161)$$

Para avaliarmos a variação espacial de f , vamos considerar um caso unidimensional e reescrever a equação (1.160) da seguinte forma [3]:

$$\frac{d}{dx} \left[-\xi^2 \frac{f'^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right] = 0. \quad (1.162)$$

Com efeito, o termo entre colchetes deve ser uma constante. Assim, a solução da equação (1.162) é:

$$\begin{aligned} \xi^2 f'^2 &= \frac{1}{2}(1 - f^2)^2, \\ f &= \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi}. \end{aligned} \quad (1.163)$$

onde foram utilizados as seguintes condições de contorno $\frac{df}{dx} = 0$ e $f = 1$ para longe da interface vácuo-supercondutor e a expressão $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} f = 1/(1 - f^2)$. A interface pode ser defeitos e bordas. Lembramos que tal solução é válida quando $\mathbf{A} = 0$ e temos que a fase é constante.

1.3.4 Profundidade de penetração e vorticidade

Consideraremos agora a situação onde o potencial vetor não é nulo. Assim, temos uma densidade de corrente não nula. No primeiro caso, vamos considerar $\nabla\psi = 0$, sendo que $|\psi|^2 = n_s$ e utilizando a Lei de Ampère, temos que:

$$\mathbf{J}_{SC} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{e_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{A}. \quad (1.164)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados e utilizando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ [18], onde $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Lei de Gauss para o magnetismo, i.e., não existe na natureza monopolo magnético), a equação (1.164) assume a forma:

$$-\frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0} = -\frac{e_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{B}. \quad (1.165)$$

Resolvendo a equação diferencial encontramos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp -\frac{\mathbf{r}}{\lambda_L}. \quad (1.166)$$

Assim, a equação (1.166) descreve a variação de $\mathbf{B}$ no interior do supercondutor a partir do campo magnético na interface, que é o campo magnético aplicado $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$, decai exponencialmente com um comprimento característico $\lambda_L = \frac{m_s}{e_s^2 n_s \mu_0}$, que é chamada de profundidade de penetração de London. Como λ_L é da ordem de nanômetros, o campo $\mathbf{B}$ fica restrito às vizinhanças da interface do supercondutor. Como efeito, o fluxo magnético é nulo em seu interior, como é verificado em um processo *zero field cooling* (ZFC) e *field cooling* (FC).

Consideraremos agora $\mathbf{A} \neq 0$ e $\nabla \psi \neq 0$, na qual a função de onda apresente gradiente em seu módulo e em sua fase. Em tal situação temos que:

$$\nabla \psi = \nabla |\psi| \exp(i\theta) + i\psi \nabla \theta, \quad (1.167)$$

onde aplicamos, primeiramente, a regra do produto e posteriormente a regra da cadeia no segundo termo da equação, pois θ depende de $\mathbf{r}$. Substituindo a equação (1.167) na equação (1.156) vem que:

$$\mu_0 \mathbf{J}_{SC} = \frac{\hbar e_s}{m_s} |\psi|^2 \nabla \theta - \frac{e_s}{m_s} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (1.168)$$

Se tomamos o rotacional da equação (1.168) obteremos a equação (1.165) (lembrando que, $\nabla \times (\nabla \theta) = 0$). Todavia, Abrikosov propôs [19] que havia possibilidade de penetração de fluxo magnético no interior do supercondutor. Isso poderia ser possível caso a densidade de energia na interface normal-supercondutor possui-se valores negativos. Assim, torna-se energeticamente favorável a coexistência de região normal com a supercondutora, ao invés de todo supercondutor ir para o estado normal quando $\mathbf{H} > \mathbf{H}_c$. Tal região é delimitada como sendo o gradiente da fase em um circuito fechado. Então dividindo a equação (1.168) por $\frac{e_s^2}{m_s} |\psi|^2$ e integrando num caminho fechado, obtemos:

$$\frac{e_s}{m_s} \mu_0 \oint_C \frac{\mathbf{J}_{SC}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e_s} \oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.169)$$

A integral $\frac{\hbar}{e_s} \oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}$ deve possuir n vezes o valor de $2\pi \frac{\hbar}{e_s}$ pois a função de onda possui um único valor. Aplicando o teorema de Stokes em $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ obtemos o fluxo magnético (Φ).

$$\frac{e_s}{m_s} |\psi|^2 \mu_0 \oint_C \frac{\mathbf{J}_{SC}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e_s} n 2\pi - \Phi \quad (1.170)$$

O fluxo magnético entra no supercondutor de forma quantizada, onde $\frac{h}{e_s} = \phi_0$ é um quantum de fluxo magnético. O vórtice no supercondutor é um quantum de fluxo magnético rodeado por densidade de correntes de blindagem, no qual seu núcleo é formado por uma região normal, i.e., $|\psi|^2 = 0$ e o campo magnético local em tal região é máximo, ou seja, igual ao campo magnético externo. Por outro lado, quando temos a presença de quantum de fluxo magnético no interior do supercondutor rodeado por densidade de correntes de blindagem em sentido contrário ao do vórtice, introduzimos o conceito de antivórtice. Tal situação ocorre, por exemplo, quando temos campo magnético externo negativo, presença de dots magnéticos e efeitos de simetria (abordaremos esses últimos casos no capítulo 6). Supercondutores que apresentam tal propriedade são chamados de supercondutores do tipo II e apresentam um estado misto (devido à coexistência de regiões normais e supercondutoras) até um campo crítico H_{c2} , a partir do qual a supercondutividade *bulk* é extinta, restando apenas uma supercondutividade superficial que é destruída em H_{c3} , como mostra a Figura 1.3 [10]

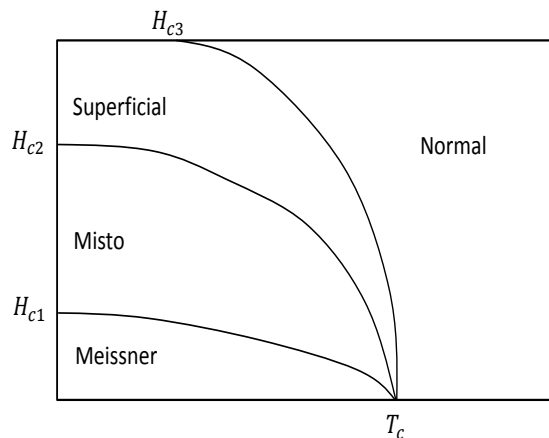


Figura 1.3: Diagrama de fases de um material supercondutor do tipo II mostrando a dependência com a temperatura para os campos críticos H_{c1} , H_{c2} e H_{c3} .

Quando um vórtice entra no supercondutor temos uma transição de fase de primeira ordem local (região do vórtice), pois há uma descontinuidade na magnetização, dada por $M = -\frac{\partial G_{SC}}{\partial H}$. Todavia, a descontinuidade torna-se mais evidente em supercondutores mesoscópicos (nanoescala), (veja Figura 1.4) cujo tamanho são da ordem dos comprimentos característicos do supercondutor, i.e., ξ ou λ [21]. Para supercondutores em nanoescala dois ou mais núcleos de vórtice podem se fundir formando um vórtice gigante [20]. Tal fenômeno ocorre devido aos efeitos de confinamento na nanoescala, e quando acontecem temos uma transição de fase de segunda ordem, ou seja, transição contínua na magnetização.

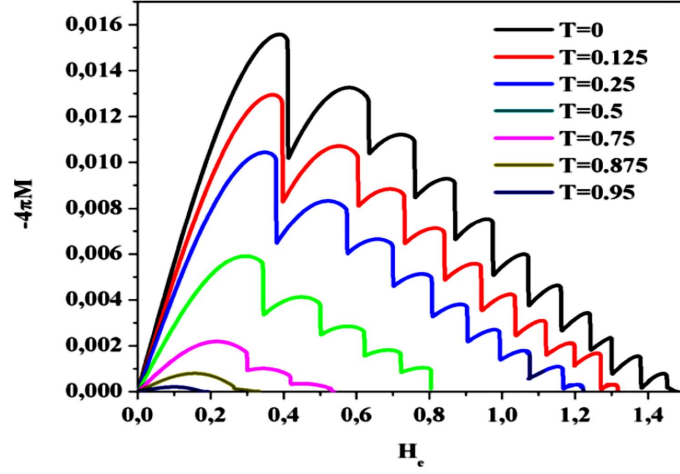


Figura 1.4: Magnetização em função do campo aplicado (H_e) para um supercondutor mesoscópico para diferentes temperaturas (em unidades de T_c). Cada descontinuidade representa a penetração de vórtices no material supercondutor, caracterizando uma transição de fase de primeira ordem local, ou seja, coexistência de regiões normais e supercondutora (estado misto)[22].

1.3.5 Análise microscópica das equações GL

L. P. Gor'kov mostrou em 1959 as fundações microscópicas das equações GL, possibilitando compreender o significado das constantes fenomenológicas [23]. Além do mais, introduziu uma proporcionalidade entre o parâmetro de ordem e o gap, introduzindo o conceito de “função de onda do par”. Assim, pela derivação microscópica, para $T \rightarrow T_c$, temos que [3, 13]:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{6\pi m(k_B T_c)^2}{7\zeta(3)p_F^2} (1 - T/T_c) = 7,04(k_B T_c)^2/\epsilon_F, \\
 a_4 &= 2\frac{a_2}{n}, \\
 m_s &= 2m, \\
 e_s &= 2e, \\
 \psi &= \left[\sqrt{\frac{7\zeta(3)n}{8(\pi k_B T_c)^2}} \right] \Delta
 \end{aligned} \tag{1.171}$$

onde $\zeta(3) = 1,202$, ϵ_F é a energia de Fermi e n a densidade total de elétrons. Podemos obter uma outra expressão para $\xi(0)$ utilizando a expressão para a_2 obtida através da derivação microscópica, assim temos:

$$\xi^2(0) = \frac{\hbar^2}{4ma_2} = \frac{\hbar^2 \epsilon_F}{28(k_B T_c)^2} = \frac{1}{56} \frac{\hbar^2 v_F^2}{(k_B T_c)^2} \tag{1.172}$$

Comparando as equações (1.87) e (1.126) podemos escrever $\xi(0)$ em termos de Δ_0 , então temos que:

$$\frac{\Delta_0}{k_B T_c} = 1,76 \quad (1.173)$$

$$\xi(0) = 0,23 \frac{\hbar v_F}{\Delta_0} = 0,13 \frac{\hbar v_F}{k_B T_c} \quad (1.174)$$

A interpretação que $|\psi|^2$ tem unidades da densidade de elétrons (superelétrons para o estado supercondutor) é obtida através da substituição das constantes a_2 e a_4 na expressão (1.158), então vem:

$$|\psi|^2 = \frac{a_2}{a_4} = \frac{n}{2} \quad (1.175)$$

onde $n_s \leq \frac{n}{2}$, contudo para o caso $T = 0$ temos o limite $n_s = \frac{n}{2}$ [10].

Para supercondutores no limite limpo, a temperatura tem que estar extremamente próxima de T_c . Por outro lado, no limite sujo ($l \ll \xi(0)$) temos uma faixa um pouco mais ampla para o qual é possível aplicar as equações GL, e com isso tornar mais viável a comparação com o experimento [24]. Mais recentemente, A. V. Vagov e colaboradores obtiveram uma versão estendida das equações GL utilizando como formalismo teórico a formulação de Gor'kov da teoria BCS para um supercondutor no limite limpo, *s-wave* e de uma banda [25]. Tal extensão ficou conhecida como EGL (do inglês, extended Ginzburg-Landau). Assim, o formalismo EGL abrange o valores de temperaturas bem abaixo de T_c , como mostra a Figura 1.5.

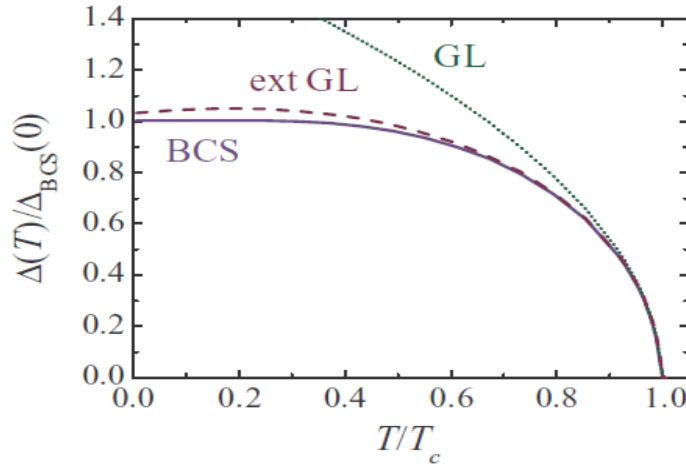


Figura 1.5: Variação do *gap* em função da temperatura para os formalismos EGL e GL em comparação com a teoria BCS [25].

Bibliografia

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [2] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104** 1189 (1956).
- [3] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Superconductivity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1ª edição, 1999. 497p.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Paris, 2ª edição, 1977. v.1. 898p.
- [5] G. D. Maham. *Many Particle Physics*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 3ª edição, 2000. 785p.
- [6] J. W. Negele and h. Orland. *Quantum Many-Particle Physics*. Westview Press, EUA, 2ª edição, 1998. 459p.
- [7] J. R. Taylor. *Mecânica Clássica*. Bookman, Porto Alegre, 2013. 804p.
- [8] I. S. Oliveira e V. L. B. de Jesus. *Introdução à física do estado sólido*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2ª edição, 2011. 507p.
- [9] P. G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Westview Press, EUA, 3ª edição, 1999. 274p.
- [10] C. P. Poole Junior *et al.* *Superconductivity*. Elsevier, Amsterdam, 2nd edition, 2007. 670p.
- [11] P. K. Pathria *Statistical Mechanics*. Elsevier, Oxford, 2ª edição, 1996. 529p.
- [12] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. 3ª edição Weinheim: Wiley-Vch, 2009. 411p.
- [13] K. H. Bennemann and J. B. Ketterson. *Superconductivity Conventional and Unconventional Superconductors* Volume 1. Springer, Berlin, 1ª edição, 2008. 1568p.
- [14] L. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7**, 19 (1937).

- [15] L. Landau and E. Lifchitz. *Curso de Física - Física Estadística*. Editorial Reverté, Barcelona, 2ª edição, 1975. 597 p.
- [16] M. J. de Oliveira *Termodinâmica*. Livraria da Física, São Paulo, 1ª edição, 2005. 365p.
- [17] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications Inc, New York, 2ª edição, 2004. 454p.
- [18] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy. *Fundamentos Da Teoria Eletromagnética*. Campus, Rio de Janeiro, 9ª edição, 1982. 516 p.
- [19] A. A. Abrikosov, Sov. Phys - JETP **5**, 1174 (1957).
- [20] A. K. Geim, I. V. Girgorvieva, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, J. C. Maaw, A. E. Filippov and F. M. Peeters, Nature **390**, 259 (1997).
- [21] R. Zadorosny, E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho and W. A. Ortiz, Phys. Rev. B **85**, 214511 (2012).
- [22] J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino Aguiar, Physica C **470**, 1964 (2010).
- [23] L. P. Gor'kov, Sov. Phys. JETP **9**, 1364 (1959).
- [24] L. P. Gor'kov, Sov. Phys.-JETP **10**, 998 (1960).
- [25] A. V. Vagov, A. A. Shanenko, M. V. Milosěvić, V. M. Axt and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **85** 014502 (2012).

Capítulo 2

Supercondutividade do não equilíbrio

2.1 Teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo

A teoria de Ginzburg-Landau (GL) descreve diversos fenômenos em supercondutividade para situações que envolvem equilíbrio termodinâmico, i.e., todas as grandezas físicas são constantes no tempo (tal como mencionado no capítulo anterior). Fenômenos como o movimento de vórtices no mar supercondutor começaram a ser amplamente estudados a partir do começo da década de 1960, o que, na época, levaram diversos físicos a formular extensões nas equações GL para investigar essas situações de não equilíbrio termodinâmico.

Os físicos M. J. Stephen e H. Suhl foram pioneiros em propor uma versão dependente do tempo das equações de Ginzburg-Landau no ano de 1964 [1]. A teoria foi formulada para supercondutores puros, onde a formulação de Gorkov da teoria BCS foi utilizada como base. Assim, os operadores de campo (criação e aniquilação) do elétron que constituem a função de Green foram definidos para levar em conta as variações temporais. No ano seguinte, P. W. Anderson, N. R. Werthamer e J. M. Luttinger propuseram uma equação GL adicional que leva em conta a variação temporal no parâmetro de ordem e uma dependência no tempo da equação da corrente supercondutora [2]. Ambas as equações foram obtidas, respectivamente, conectando o parâmetro do ordem em função do tempo com a equação de Poisson para o potencial escalar e vetor. A primeira “equação GL adicional” obtida pelos autores é bem parecida com a proposta na Ref. [1].

Posteriormente, H. Suhl introduziu o conceito de massa inercial por unidade de comprimento (μ), que é obtida analisando a energia cinética no núcleo e a energia eletromagnética durante o movimento do vórtice. Ele obteve o tempo de relaxação do vórtice (τ), que é da ordem de pico segundos [3], é dado pela expressão:

$$\tau = \frac{\mu_{EM}}{\eta}, \quad (2.1)$$

onde $\mu_{EM} = \frac{1}{4} \frac{\xi^2 H_c^2}{c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_d} \right)^4$ é a massa inercial eletromagnética, e λ_d é o comprimento de blindagem, que é da ordem de k_F^{-1} .

Em 1966, E. Jakeman e E. R. Pike obtiveram expressões dependentes do tempo para ψ , densidade de carga e corrente supercondutora através das funções de Green dependentes do tempo no limite de $T \rightarrow T_c$ [4]. Neste mesmo ano, o físico alemão Albert Schmid publicou um trabalho onde generalizou as equações de Ginzburg-Landau, i.e., estruturou uma versão dependente do tempo das equações GL. Nos próximos anos passou a ser conhecida de teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo (TDGL, do inglês) [5]. Para tal fim, Schmid utilizou a formulação de Gor'kov da teoria BCS, onde considerou um *gap* de energia pequeno e que sua variação no tempo ocorre lentamente.

Na ausência de campo elétrico e magnético, Schmid propôs uma equação onde ψ relaxa para o equilíbrio proporcionalmente a $\exp(-t/\tau_R)$, sendo τ_R o tempo de relaxação. Tal equação é baseada em um formalismo teórico desenvolvido para estudos envolvendo situações do não equilíbrio para o hélio superfluido. Assim, para o supercondutor a equação é dada por:

$$\hbar\gamma\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\hbar\nabla)^2\psi + a\psi - b|\psi|^2\psi, \quad (2.2)$$

onde a e b são as constantes fenomenológicas (definidas no capítulo anterior como a_2 e a_4 respectivamente), sendo $\tau_R = \frac{\hbar\gamma}{2a}$. Para determinar o valor de γ e, conseqüentemente, o valor de τ_R , Schmid considerou a dependência no tempo do *gap* supercondutor através da formulação de Gor'kov para o mesmo, i.e., utilizando o método das funções de Green (veja os detalhes na parte II da Ref.[5]). Os campos magnéticos e elétricos foram incorporados na equação (2.2) utilizando o potencial vetor e o potencial escalar. Para um supercondutor na presença de um campo magnético externo H , o termo da energia cinética deve ser modificado, pois há a presença de um potencial vetor. Assim, de acordo com a mecânica quântica [6], temos que:

$$(\hbar\nabla)^2\psi \rightarrow \left(\hbar\nabla + \frac{2ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \psi. \quad (2.3)$$

Por outro lado, a equação (2.2) não possui invariância de calibre [7], assim é necessário considerar o potencial escalar, fazendo a seguinte modificação $\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \rightarrow \hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2ie\Phi(\mathbf{r}, t)\psi$. Portanto, uma transformação de calibre consiste na substituição simultânea dos termos $\psi \rightarrow \psi e^{\frac{2ie}{\hbar c}\Phi}$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Phi$ e $\Phi \rightarrow \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ na equação GL dependente do tempo. Com isso, fazendo as modificações necessárias para considerar a presença de campos elétricos e magnéticos, a equação (2.2) assume a seguinte forma:

$$\gamma\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t} - 2ie\Phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(\hbar\nabla + \frac{2ie}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi + a\psi - b|\psi|^2\psi. \quad (2.4)$$

A. Schmid também adicionou a contribuição da densidade de corrente normal $\mathbf{J}_n$ na segunda equação GL. Assim, temos que $\mathbf{J} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s)$. Pela lei de Ohm, $\mathbf{J}_n = \sigma\mathbf{E}$, onde:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi\right). \quad (2.5)$$

Dessa forma, a equação das correntes assume a seguinte forma:

$$\sigma\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi\right) = \mathbf{J}_s - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.6)$$

sendo $\mathbf{J}_s$ dada por:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{i\hbar e}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e}{m}\mathbf{A}|\psi|^2. \quad (2.7)$$

Usualmente, escrevemos as equações TDGL da seguinte maneira:

$$\hbar\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2i\frac{e}{\hbar}\Phi\right)\psi = -\frac{\delta G_s}{\delta\psi^*}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\delta G_s}{\delta\psi^*} = \frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi - a\psi + b|\psi|^2\psi, \quad (2.9)$$

que é a equação que representa a evolução temporal do parâmetro de ordem. Para a equação das correntes temos que:

$$\sigma\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi\right) = -\frac{\delta G_s}{\delta\mathbf{A}}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\delta G_s}{\delta\mathbf{A}} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}_s. \quad (2.11)$$

Para ambas as equações, o lado direito do sinal de igual nos fornece, respectivamente, a primeira e a segunda equações de Ginzburg-Landau, as quais são obtidas via minimização da energia livre. Em 1968, L. P. Gor'kov e G. M. Eliashberg formularam a teoria microscópica do não equilíbrio. Por ela foi mostrado que as equações TDGL são derivadas de tal teoria somente para duas condições, em ligas metálicas com alta concentração de impurezas paramagnéticas (limite “muito sujo”) e para um campo magnético externo intenso $H_{c2} - H \ll H_{c2}$ [8, 9]. Por outro lado, para situações onde $H \ll H_{c2}$, as equações TDGL seguem quantitativamente a teoria microscópica quando $T \rightarrow T_c$. Tal condição é denominada de supercondutividade *gapless* para situações de não equilíbrio. Por outro lado, A. Abrikosov e L. P. Gor'kov publicaram um trabalho teórico em 1960 sobre supercondutividade *gapless* [10], tornando-se os pioneiros em tal estudo para o caso

de situações que envolvem equilíbrio termodinâmico. Para valores de concentração de impurezas (c_i) na faixa de $0,9 < c_i < c_{cr}$ (sendo c_{cr} o valor crítico, no qual $T_c = 0$), temos uma situação onde o *gap* é nulo, enquanto que T_c é não nulo.

Para tal fim, a equação (1.120) e o cálculo da energia de dispersão das quasipartículas (E_k) são tratados de maneira perturbativa. O termo perturbativo é dado por $\hbar/\tau_K$, que pode ser devido a um intenso campo magnético ou concentração de impurezas paramagnéticas (relacionado aos processos de colisão). Sendo τ_K o tempo de espalhamento do elétron relacionado ao operador de reversão temporal [11], conhecido como tempo de *spin slip*. Portanto, o processo de espalhamento quebra a coerência de *spin* do par de Cooper, ou seja, há uma quebra a simetria de reversão temporal [9], levando a supressão da supercondutividade com *gap* [7]. A Figura 2.1 mostra um diagrama de fase para o caso de um supercondutor com *gap* e *gapless*. Assim, o material não apresenta um *gap* no espectro de excitações, porém ainda é um supercondutor devido ao parâmetro de ordem não nulo, mantendo a coerência da fase [7, 11].

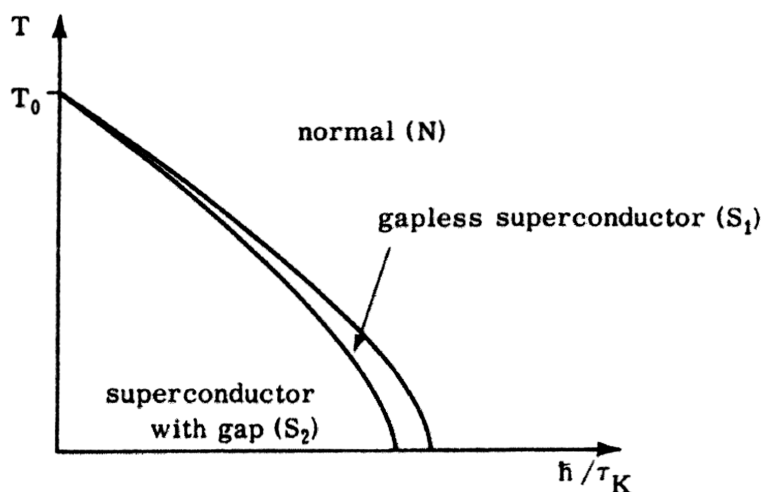


Figura 2.1: Diagrama de fase da temperatura em função de um termo perturbativo para o supercondutor com *gap* e *gapless* e o estado normal. Sendo T_0 é a temperatura crítica e $\hbar/\tau_K$ é o termo perturbativo [11].

M. A. Woolf e F. Reif em 1965 foram os pioneiros a mostrar a evidência experimental para um supercondutor *gapless* [12] através da técnica de tunelamento de elétrons, que possibilita investigar o comportamento do *gap* no supercondutor. Quando aumenta-se a concentração de impurezas, verificou-se que a energia do *gap* decresce rapidamente. Assim, na faixa de $0,9 < c_i < c_{cr}$ temos a ausência do *gap*, que leva a capacidade calorífica se comportar de maneira linear, i.e., como se estivesse no estado normal, não seguindo portanto a equação (1.141). Por outro lado, temos a correlação dos pares, supercorrente e efeito Meissner mantidos devido à presença do parâmetro de ordem. Portanto, é possível obter um supercondutor *gapless* através da concentração de um determinado elemento

químico em uma liga metálica. Por exemplo, N. Ya. Fogel mostrou que uma liga composta de 76% de Pb e 24% de In está no “limite muito sujo”, segundo o critério adotado por Gor’kov [13]. Assim, é possível obter um supercondutor *gapless* controlando os parâmetros H e T . Dessa forma, para um supercondutor *gapless* temos que γ e κ são dados por:

$$\gamma = \frac{\hbar}{4mD}, \quad (2.12)$$

$$\kappa = \frac{c}{(48\pi D\sigma)} \gg 1, \quad (2.13)$$

onde $D = \frac{1}{3}v_F l$ é o coeficiente de difusão do estado normal, sendo v_F e l a velocidade de Fermi e o caminho livre médio dos elétrons respectivamente. Substituindo a equação (2.12) em (2.8), obtemos:

$$\frac{\hbar^2}{4mD} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2i\frac{e}{\hbar}\Phi \right) \psi = -\frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2ie}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + a\psi - b|\psi|^2\psi. \quad (2.14)$$

Nos estudos analíticos ou numéricos, as equações TDGL são rotineiramente utilizadas em sua versão adimensional. Assim, temos que as equações (2.14) e (2.10) podem ser escritas como:

$$u \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \psi = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T)\psi(1 - |\psi|^2), \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi \right) = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.16)$$

onde ψ é normalizado em unidades de $\psi_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$, as distâncias estão em unidades do comprimento de coerência na temperatura igual a zero $\xi(0)$; o campo magnético é dado em unidades do campo crítico superior $H_{c2}(0)$; potencial vetor em unidades de $H_{c2}(0)\xi(0)$; o potencial escalar é dado em unidades de $\frac{\hbar}{2et_{GL}(0)}$ e a temperatura em unidades de T_c ; $t_{GL}(0) = \frac{\pi\hbar}{8k_B T_c u}$ é o tempo de Ginzburg-Landau, também conhecido como o tempo de relaxação da fase. O parâmetro u surge quando normalizamos a equação (2.14), sendo definido como a razão do tempo de relaxação do $|\psi|$ e o $t_{GL}(0)$, ou seja, $u = \frac{\tau_{|\psi|}(0)}{t_{GL}(0)}$. Estritamente falando, temos dois valores possíveis de u , que são obtidos em duas condições (que depende do limite sujo considerado) no qual a equação TDGL é derivada da teoria microscópica.

Na derivação microscópica para o caso de alta concentração de impurezas paramagnéticas (apresentada por L. P. Gor’kov e G. M. Eliashberg), que caracteriza um *deparing* forte, temos que $u = (\frac{3\hbar^2}{\tau_K \pi^2 k_B T_c^2}) / (\frac{\hbar^2}{4\tau_K \pi^2 k_B T_c^2})$, ou seja, $u = 12$ para um supercondutor *gapless*. Dessa forma, o estado de não equilíbrio é descrito pela equação (2.15). Por outro

lado, G. M. Eliashberg publicou um trabalho em 1969 no qual fez a derivação microscópica para o caso baixa concentrações de impurezas paramagnéticas, que caracteriza um *deparing* fraco, portanto temos que $u = 5,79$. Entretanto, a equação obtida por G. M. Eliashberg possui uma estrutura um pouco diferente da equação (2.15) [14], que ficou conhecida como “TDGL com termos adicionais”.

As equações TDGL são utilizadas para descrever a dinâmica de vórtices de uma maneira qualitativa e quantitativa (dentro das condições colocadas pela derivação microscópica). Trabalhos envolvendo matéria e dinâmica de vórtice podem ser estudados de maneira qualitativa sem a necessidade de seguir as condições colocadas pela derivação microscópica ($T \rightarrow T_c$ e $u = 12$, por exemplo), pois nestas situações os fenômenos estudados não são sensíveis a tais condições, como mostra as Refs.[15, 16]. Por exemplo, em uma simulação numérica, quanto maior o valor de u , maior será o tempo computacional gasto. Assim, torna-se desejável estudar dinâmica de vórtices com baixos valores de u ao invés de utilizar $u = 12$ na equação (2.15). Por outro lado, quando o objetivo é estudar a dinâmica de vórtices em uma heteroestrutura supercondutor-ferromagnético [17] ou o estado resistivo (que envolvam grandezas explicitamente dependentes do tempo) [18] as condições que advêm da derivação microscópica devem ser considerados.

2.2 Teoria generalizada de Ginzburg-Landau dependente do tempo

Apesar das equações TDGL terem êxito no estudo de movimento de vórtices, em fenômenos que caracterizam o estado resistivo através dos processos de *phase slip*, tais equações não conseguem descrevê-los de maneira completa [19]. As soluções das equações TDGL admitem apenas uma faixa muito estreita de corrente para a condição de *phase slip*. Em 1978, L. Kramer e H. J. Watts-Tobin publicaram um artigo no qual propuseram a generalização das equações TDGL as quais conseguem descrever o fenômeno de maneira completa [20]. Tal generalização veio a ser chamada de GTDGL (do inglês, generalized time dependent Ginzburg-Landau) e foi derivada da teoria microscópica utilizando o formalismo teórico de Larkin e Ovchinnikov [21] e Schmid e Schön [22] para um supercondutor no limite sujo e na temperatura próxima de T_c . Assim, a equação GTDGL é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{ut_{GL}(0)a_oT_c}{\sqrt{1 + 4\frac{t_E^2}{\hbar^2}|\psi|^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar}\Phi + 2\frac{t_E^2}{\hbar^2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right) \psi \\ &= -\frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + a\psi - b|\psi|^2\psi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde τ_E é o tempo de colisão inelástico elétron-fônon, que depende do material supercondutor e $u = \frac{\pi^4}{14\zeta(3)} = 5,79$; onde $\zeta(3) = 1,202$ é a função zeta de Riemann, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Notamos que, basicamente, o que difere a equação GTDGL da TDGL é a presença do tempo característico $\tau_E > 0$ e que u não é mais um parâmetro de “livre escolha”. Quando consideramos $\tau_E = 0$, obtemos a equação TDGL na estrutura apresentada pela equação (2.14). Contudo, tal situação nos proporciona uma versão aproximada da equação TDGL, pois como mencionamos anteriormente, $u = 5,79$ é obtido no limite de baixas concentrações de impurezas paramagnéticas (*depairing* fraco) como mostrado por Eliashberg [14], que nos leva a “TDGL com termos adicionais”. Também neste caso, a equação GTDGL é utilizada na forma adimensional para estudos teóricos envolvendo sua solução analítica ou numérica, que é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi \\ & = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T)(1 - |\psi|^2) \psi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $\gamma = \frac{2\tau_E}{\hbar} \psi_0$. Os demais termos foram normalizados pelas mesmas unidades utilizadas nas equações TDGL (ver sessão anterior). A presença de τ_E é uma grandeza relacionada ao *gap* do supercondutor (para situações de não equilíbrio), assim a equação GTDGL é utilizada para descrever um supercondutor com *gap*. Isso acarreta uma mudança no tempo de relaxação do sistema, ou seja, $\tau_{|\psi|} = u\tau_{GL} \sqrt{(1 + \gamma^2 |\psi|^2)}$. Contudo, para $\gamma = 0$, obtemos $\tau_{|\psi|}$ para um supercondutor *gapless*, onde $\tau_{|\psi|}$ não depende de $|\psi|^2$. A inclusão do *gap* no formalismo teórico torna-se necessário para investigar uma série de fenômenos, como os de phase slip e instabilidade nos movimentos dos vórtices. A equação GTDGL estritamente falando, é válida quando temos uma variação lenta no tempo na escala de tempo τ_E e uma variação espacial lenta sobre o comprimento de difusão inelástico, i.e., $L_E = \sqrt{D\tau_E}$ [23]. Em outras palavras, $L_E < \xi_D(T)$, sendo $\xi_D(T)$ o comprimento de coerência GL no limite sujo, que é dado por [24]:

$$\xi_D(T) = 0,853 \sqrt{\xi_0 l} \left(\frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}, \quad (2.19)$$

onde ξ_0 é o obtido da teoria BCS. Utilizando $D = \frac{1}{3} l v_F$ e $\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$, sendo l , v_F e $\Delta(0)$ o caminho livre médio, velocidade de Fermi e o *gap* em $T = 0$, respectivamente. Substituindo essas expressões na equação 2.19 e comparando com L_E , temos que:

$$\begin{aligned} L_E & < \xi_D(T), \\ 1 - \tilde{T} & < 2,183 \frac{\hbar}{\pi \Delta(0) \tau_E}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\tilde{T} = T/T_c$. A faixa de temperatura dada pela equação (2.20) vai depender dos valores de τ_E e $\Delta(0)$. Esse último parâmetro depende do tipo de acoplamento entre os

pares de Cooper, o qual depende do material [24]. O valor de $\Delta(0)$ na teoria BCS foi calculado para um acoplamento fraco, todavia, para metais e ligas metálicas, mostrou-se que tal valor pode ser um pouco maior, dependendo da concentração de impurezas ou dos elementos químicos que compõem a liga [25]. Devido a essa pequena variação em $\Delta(0)$, convencionou-se utilizar dois valores limites para o acoplamento. Por exemplo, para um acoplamento fraco (equação 2.21) temos a liga In-Pb, já para o acoplamento forte (equação 2.22) temos o Pb, e as expressões são dadas respectivamente por:

$$\Delta(0) = 1,76k_B T_c, \quad (2.21)$$

$$\Delta(0) = 2,15k_B T_c. \quad (2.22)$$

Substituindo as expressões (2.21) e (2.22) na equação (2.20) e explicitando os valores das constantes, temos respectivamente para os acoplamentos fraco e forte:

$$\Delta T_v < \frac{3 \times 10^{-12}}{\tau_E}, \quad (2.23)$$

$$\Delta T_v < \frac{2,5 \times 10^{-12}}{\tau_E}. \quad (2.24)$$

Assim, estritamente falando, ΔT_v delimita o intervalo de temperaturas ($\Delta T_v = T_c - T$) para aplicação da GTDGL. Utilizaremos a equação (2.23), pois é calculado no acoplamento fraco, que é o mesmo utilizado na formulação de Gorkov da teoria BCS, na qual é possível derivar as equações GL. Por outro lado, para efeitos práticos, ΔT_v tem uma forte dependência com τ_E , ao invés do tipo de acoplamento. Agora, vamos reescrever a equação (2.23) em termos de γ , utilizando as expressões [23]:

$$\gamma = \frac{2\tau_E}{\hbar} \Delta_0 \quad (2.25)$$

$$\Delta_0 = \frac{4k_B T_c u^{1/2}}{\pi} \quad (2.26)$$

Substituindo os valores das constantes em (2.25) e (2.26) e organizando os termos, encontramos:

$$3 \times 10^{-12} = \frac{\tau_E T_c u^{1/2}}{\gamma}. \quad (2.27)$$

Comparando a equação (2.27) com (2.24), encontramos:

$$1 - \tilde{T} < \frac{u^{1/2}}{\gamma}. \quad (2.28)$$

Na Ref. [26], R. Tidecks reuniu uma série de artigos com valores experimentais de T_c , τ_E , l , ξ , etc para diversos tipos de materiais supercondutores quasi unidimensionais,

cuja a ênfase era estudar experimentalmente o processo de *phase slip* e compará-la com diversas teorias, entre elas a GTDGL. Assim, tendo essas grandezas determinadas experimentalmente, utilizando a expressão $\gamma = 3 \times 10^{12} \tau_E T_c u^{1/2}$, podemos conectar a teoria com o experimento.

2.3 Teorema da energia livre

O estado resistivo ocorre quando temos movimento de vórtices ou processos de *phase slip* no supercondutor, que por sua vez causam dissipação de energia. Com um balanceamento de energia envolvida no processo, podemos obter os diferentes mecanismos de dissipação e identificar a natureza de cada um. Como o estado resistivo envolve processos fora do equilíbrio termodinâmico, vamos analisar a taxa de variação da energia livre no tempo. Em 1966, A. Schmid foi o primeiro a propor esse balanceamento enérgico para um supercondutor *gapless* em um campo eletromagnético e a unificar os mecanismos de dissipação que haviam sido propostos anteriormente de maneiras isoladas [5]. Por outro lado, neste trabalho nós estendemos o formalismo teórico adotado por Schmid para um supercondutor com *gap*. Assim, a densidade de energia livre de Helmholtz para um supercondutor *s-wave* e de uma banda é dada por:

$$F_s = \frac{1}{4m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 - a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \quad (2.29)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \left[(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right)^2 \right].$$

A energia livre do estado normal para um supercondutor metálico depende da densidade de carga e da temperatura é dada pela expressão:

$$F_n = -\frac{1}{e} \int \mu d\varrho', \quad (2.30)$$

onde $d\varrho'$ é um elemento infinitesimal da densidade de carga e μ é o potencial eletroquímico. Agora, nós iremos calcular a taxa de variação da energia livre no tempo

$$\frac{\partial F_T}{\partial t} = \frac{\partial F_{em}}{\partial t} + \frac{\partial F_n}{\partial t} + \frac{\partial F_{sn}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

onde F_{em} é a densidade de energia livre eletromagnética, F_{sn} é a densidade de energia total do condensado (os dois primeiros termos da equação 2.29) e F_T é a densidade de energia livre total. Primeiramente, iremos resolver o termo $\frac{\partial F_{em}}{\partial t}$ utilizando os conceitos de eletrodinâmica clássica [27, 28, 29]. Sabendo que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ and $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$, podemos reescrever F_{em} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{em}}{\partial t} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (B^2 + E^2) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Utilizando as equações de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ e $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, a equação (2.32) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial F_{em}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} [-(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}] - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.33}$$

Como o vetor de Poynting é definido por $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, tomando o seu divergente, temos que $\nabla \cdot \mathbf{S} = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}$. Assim, obtemos:

$$\frac{\partial F_{em}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.34}$$

Para a energia livre do metal normal, utilizaremos a equação da continuidade para tal estado, $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$. Assim, $\frac{\partial F_n}{\partial t}$ assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = -\frac{\mu}{e} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{e} \mu (\nabla \cdot \mathbf{J}). \tag{2.35}$$

Agora, nós iremos calcular a parte mais longa, i.e., $\frac{\partial F_{sn}}{\partial t}$. Esta é dividida em dois termos. A energia livre relacionada com a formação do condensado e a energia cinética. Assim, denotamos esses termos respectivamente por:

$$\frac{\partial F_{sn}}{\partial t} = \frac{\partial F_{cond}}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial t}. \tag{2.36}$$

Para o termo da energia do condensado temos que:

$$\frac{\partial F_{cond}}{\partial t} = -a \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^4. \tag{2.37}$$

Fazendo as derivadas em cada um dos termos, vem que:

$$-a \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -a \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right), \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^4 &= \frac{b}{2} \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial t} \psi^{*2} + \frac{\partial \psi^{*2}}{\partial t} \psi^2 \right), \\
&= b |\psi|^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Finalmente obtemos:

$$\frac{\partial F_{cond}}{\partial t} = \left(-a + b|\psi|^2 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right). \quad (2.40)$$

Para a variação temporal da energia cinética do condensado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4m} \left[\left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \left(i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4m} \frac{\partial}{\partial t} \left[\hbar^2 \nabla \psi \nabla \psi^* + \frac{2ie\hbar}{c} \mathbf{A} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{4e^2}{c^2} A^2 |\psi|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Utilizando a regra do produto diversas vezes para a derivada no tempo em cada um dos termos e, posteriormente organizando os termos em comum (ver os detalhes do processo no apêndice A), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \left[\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \right] \\ &+ \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \nabla \psi^* + \frac{\partial \nabla \psi^*}{\partial t} \nabla \psi \right) + \frac{e^2 A^2}{mc^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ &+ \frac{ie\hbar}{2mc} \mathbf{A} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \nabla \psi + \psi^* \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \psi^* - \psi \frac{\partial \nabla \psi^*}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Identificamos que:

$$-\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \left[\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \right]. \quad (2.43)$$

Juntando $\frac{\partial F_{cond}}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial t}$ e organizando a equação, temos o seguinte cenário:

$$\begin{aligned} 2\Re \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \left\{ \left(-\frac{ie\hbar}{2mc} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2 A^2}{mc^2} \right) \psi^* + (-a + b|\psi|^2) \psi^* \right\} \right] \\ + 2\Re \left[\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \nabla \psi^* + \frac{ie\hbar}{2mc} \mathbf{A} \psi^* \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \right] - \frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Podemos relacionar o operador entre parênteses com o complexo conjugado (C.C) do operador da energia cinética. Explicitando o C.C do operador da energia cinética com sua respectiva função de onda, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi^* &= -\frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 \psi^* - \frac{ie\hbar}{2mc} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi^* \\ &\quad - \frac{ie\hbar}{2mc} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi^* + \frac{e^2 A^2}{mc^2} \psi^*, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde consideramos a condição $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (calibre de Coulumb), i.e., o potencial escalar é constante no tempo (caso particular do calibre de Lorentz [29, 30]). Substituindo a equação (2.45) na equação (2.44), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= 2\Re \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - a + b|\psi|^2 \right\} \psi^* \right] \\ &+ 2\Re \left[\frac{\hbar}{4m} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie\mathbf{A}}{c} \right) \psi^* \right\} \right] - \frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Podemos relacionar o primeiro termo entre chaves com a equação GTDGL através do seu -C.C. Além do mais, podemos introduzir a relação $\nabla(\mathbf{J}_s \Phi) - (\nabla \cdot \mathbf{J}_s)\Phi - \mathbf{J}_s \nabla \Phi = 0$ sem que possa ter interferência na equação. Assim, a equação (2.46) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\ &+ 2\Re \left[-C \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-2ie}{\hbar} \Phi + 2\frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi^* \right] - (\nabla \cdot \mathbf{J}_s)\Phi \\ &+ 2\Re \left[\frac{\hbar}{4m} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie\mathbf{A}}{c} \right) \psi^* \right\} \right] + \nabla(\mathbf{J}_s \Phi). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Sendo $C = \frac{ut_{GL}(0)a_o T_c}{\sqrt{1+4\frac{\tau_E^2}{\hbar^2}|\psi|^2}}$. Agora, iremos resolver o termo o $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$ e relacionar com a equação GTDGL. Fazendo os cálculos (veja os detalhes no apêndice B), obtemos a seguinte expressão:

$$C \left(\frac{-2ie}{\hbar} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] + \frac{8e^2}{\hbar^2} \Phi |\psi|^2 \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_s. \quad (2.48)$$

Inserindo $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$ na equação (2.47) e fazendo alguns cálculos (veja os detalhes no apêndice C), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\ &- 2C \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{\tau_E^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &+ 2\Re \left[\frac{\hbar}{4m} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie\mathbf{A}}{c} \right) \psi^* \right\} \right] + \nabla(\mathbf{J}_s \Phi). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Entretanto, podemos reescrever a equação (2.49) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\
&- 2C \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{\tau_E^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\
&+ \nabla \cdot \left[\Re \left\{ \frac{1}{2m} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \psi \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Somando, as equações (2.34), (2.35) e (2.50) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_T}{\partial t} &= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{e} \mu (\nabla \cdot \mathbf{J}) \\
&- 2C \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{\tau_E^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\
&+ \nabla \cdot \left[\Re \left\{ \frac{1}{2m} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \psi \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Utilizando a relação $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$, onde $\mathbf{J}_n$ é dada pela equação (2.5), finalmente nós obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_T}{\partial t} &= -\sigma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right)^2 - 2C \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{\tau_E^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\
&- \nabla \cdot \left[\frac{c}{4\pi} \mathbf{S} - \frac{1}{e} \mu \mathbf{J} - \Re \left\{ \frac{1}{2m} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{c} \Phi \right) \psi \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Podemos reescrever a equação de uma maneira mais compacta:

$$\frac{\partial F_T}{\partial t} = -W - \nabla \cdot \mathbf{J}_E. \tag{2.53}$$

O teorema da energia livre nos fornece dois processos termodinâmicos. O primeiro (W) é um processo irreversível e o segundo termo ($\nabla \cdot \mathbf{J}_E$) é um processo reversível. Portanto, temos que W é a densidade de energia total dissipada por unidade de tempo, ou seja, a densidade de potência dissipada e $\nabla \cdot \mathbf{J}_E$ é a divergência da densidade direcional do fluxo de energia, onde $\mathbf{J}_E$ tem unidades de potência por unidade de área. De maneira geral, temos que a taxa de transferência no tempo de densidade de energia a partir de uma região é igual à potência dissipada mais o fluxo de energia que deixa essa região.

Agora, consideramos a natureza de cada um dos mecanismos de dissipação que pode estar presente no estado resistivo. Assim, temos que:

$$W = \sigma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right)^2 + 2C \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \tag{2.54}$$

Podemos considerar genericamente dois mecanismos de dissipação, um deles devido à presença de correntes normais, que corresponde ao o primeiro termo da equação (2.54) e o outro devido aos processos de relaxação do parâmetro de ordem que ocorre quando temos a conversão de regiões normais em supercondutoras devido do vórtice de um ponto a outro no mar supercondutor. Podemos considerar dois tipos de processos de relaxação: o termo $2C \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2$ está relacionado com a relaxação do parâmetro de ordem no regime de *gap* e $2C \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2$ é a relaxação devido à densidade de superelétrons, ou seja, a conversão de superelétrons em elétrons normais e vice-versa. Essa última só existe quando temos um τ_E não nulo, ou seja, a condição de um supercondutor com *gap*.

Para fins de solução numérica, vamos escrever W em sua versão adimensional, onde a densidade de potência dissipada é dada em unidades de $P_0 = \frac{H_{c2}^2(0)}{8\pi\kappa^2 t_{GL}(0)} = \frac{E_0}{t_{GL}(0)}$ e $\kappa = \frac{c}{(4\pi D u \sigma)}$ para o limite sujo. As demais unidades são as mesmas utilizadas nas equações TDGL e GTDGL. Assim, temos que:

$$W = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right)^2 + \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2}} \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Phi \psi \right|^2 + \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (2.55)$$

Para o caso de um regime *gapless*, $\gamma = 0$, e a equação (2.55) reduz-se a:

$$W = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right)^2 + 2u \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Phi \psi \right|^2 \right] \quad (2.56)$$

2.4 Equação de difusão térmica

A energia dissipada durante processos de não equilíbrio em supercondutores contribui para o aumento local de temperatura. A. F. Volkov e Sh. M. Kogan em 1974 foram os pioneiros ao utilizar um modelo fenomenológico com aplicação da equação de difusão térmica clássica em filmes supercondutores [31]. Em tal modelo, consideraram o efeito Joule como mecanismo de dissipação, onde a resistividade depende da temperatura e da densidade de corrente, i.e., $\rho(T, J)$. O comportamento da curva da corrente em função da voltagem é modificado para casos quando a temperatura não é uniforme (temos difusão térmica). Além disso, destacaram que o tempo necessário para atingir o estado estacionário é maior do que em casos onde os efeitos térmicos não são considerados.

Mais recentemente, D. Y. Vodolazov *et al.* estudaram os efeitos térmicos acoplando a equação de difusão térmica com a GTDGL. Mostraram a importância do substrato para a

transição do estado resistivo para o normal [32], onde também evidenciaram que o efeito de dissipação não altera o caráter qualitativo na dinâmica de vórtices.

Para calcular o aumento local de temperatura, determinaremos a equação de difusão térmica clássica para o estado resistivo. A densidade de corrente térmica ($\mathbf{J}_{Th}$) é dada pela Lei de Fourier. Assim temos que:

$$\mathbf{J}_{Th} = -K_o \nabla T, \quad (2.57)$$

onde K_o é a condutividade térmica. A corrente térmica (i_{Th}) envolvida irá depender somente da presença do calor sensível ($dQ = mcdT = CdT$). Portanto temos que:

$$i_{Th} = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt}. \quad (2.58)$$

Também podemos escrever a equação 2.58 da seguinte maneira:

$$i_{Th} = - \oint_A \mathbf{J}_{Th} \cdot \hat{n} d\mathbf{A} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_{Th} dV, \quad (2.59)$$

onde, nessa última passagem, utilizamos o teorema de Gauss. Tomando o divergente na equação (2.57) e combinando com a equação (2.59), temos que:

$$i_{Th} = \int_V K_o \nabla^2 T dV, \quad (2.60)$$

Comparando (2.60) com a equação (2.58), encontramos:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \int_V K_o \nabla^2 T dV. \quad (2.61)$$

Podemos escrever a capacidade calorífica da seguinte maneira, $C = c \int_v \rho dV$, sendo ρ a densidade e c o calor específico. Assim, o lado esquerdo equação (2.61) fica da seguinte forma:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \int_v c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (2.62)$$

Juntando com a equação (2.61), temos a seguinte situação:

$$\int_v \left[c \rho \frac{\partial T}{\partial t} - K_o \nabla^2 T \right] dV = 0. \quad (2.63)$$

Portanto, temos que o termo entre colchetes é conservado em um balanço de volume, assim podemos escrever da seguinte maneira:

$$C' \frac{\partial T}{\partial t} = K_o \nabla^2 T, \quad (2.64)$$

onde C' é a densidade de capacidade calorífica. Quando temos energia dissipada devido ao movimento de vórtices, ou a processos de *phase slip* (que são fontes de calor), temos

que acoplar o termo W , que nos dá a densidade de potência. Seguindo a Ref. [32], consideramos que a troca de calor ocorre somente com o substrato. Para as demais regiões consideramos a condição de contorno com o vácuo, que é válida quando $T \rightarrow T_c$ [33]. Levando em conta tais considerações, a equação de difusão térmica para o estado resistivo resulta em:

$$C' \frac{\partial T}{\partial t} = K_o \nabla^2 T + d_f W - h(T - T_0). \quad (2.65)$$

Sendo d_f a espessura do filme e $h(T - T_0)$ o termo correspondente ao substrato, onde h é o coeficiente de transferência de calor para o substrato e T_0 é a temperatura de banho térmico. Para calcular a variação de temperatura envolvida em um processo dissipativo, vamos seguir o formalismo teórico adotado na Ref. [32], no qual a dinâmica do sistema é descrita através da equação GTDGL. Em situações onde a temperatura é uma variável, é necessário explicitá-la na equação GTDGL, assim vamos modificar a normalização introduzida por $\psi_0 = \sqrt{|\frac{a}{b}|} \rightarrow \psi_0 = \sqrt{|\frac{a_0}{b}|}$, ou seja, a normalização do parâmetro de ordem torna-se independente da temperatura. Por outro lado, as demais variáveis e parâmetros continuam sendo normalizados da mesma maneira descrita anteriormente. Assim, a equação GTDGL para esse caso é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi \\ = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T - |\psi|^2) \psi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Para realizarmos uma simulação numérica, acoplamos as equações GTDGL e de difusão térmica. Entretanto, é necessário fazer algumas aproximações e normalizar a equação (2.65). O passo inicial para o processo de normalização é encontrar um termo em comum que normalize os termos do substrato e dos mecanismos de dissipação presentes em W . A taxa de transferência de calor para o substrato é normalizada pela expressão $h = \eta \frac{d_f j_0^2}{T_c \sigma_n}$, sendo $j_0^2 = \frac{\hbar^2 \sigma_n^2}{4e^2 t_{GL}^2(0) \xi^2(0)}$. Assim, o termo do substrato na equação (2.65) fica:

$$h(T - T_0) = \eta \frac{d_f \sigma_n \hbar^2}{4e^2 t_{GL}^2(0) \xi^2(0)} (\tilde{T} - \tilde{T}_0) = \eta \frac{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^2(0)}{c^2 t_{GL}^2(0)} (\tilde{T} - \tilde{T}_0). \quad (2.67)$$

Para normalizar $d_f W$, utilizaremos a mesma normalização descritos na seção 2.3. Então obtemos:

$$d_f W = \frac{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^2(0)}{c^2 t_{GL}^2(0)} W'. \quad (2.68)$$

Substituindo as equações (2.68) e (2.67) em (2.65), temos:

$$C' \frac{\partial T}{\partial t} = K_o \nabla^2 T + \frac{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^2(0)}{c^2 t_{GL}^2(0)} \left[W' - \eta (\tilde{T} - \tilde{T}_0) \right]. \quad (2.69)$$

O termo entre colchetes é o termo em comum, onde $W' = \frac{1}{2}W$, $\tilde{T}$ e $\tilde{T}_0$ são as temperaturas dependentes da posição e do tempo e a temperatura de banho térmico respectivamente, dadas em unidade de T_c . Agora, temos que resolver os termos C' e K_o , pois dependem do filme supercondutor e do substrato, dados respectivamente por $C_f d_f + C_s d_s$ e $K_f d_f + K_s d_s$, onde d_s é a espessura do substrato. Multiplicando ambos os lados da equação 2.69 por $\frac{c^2 t_{GL}^2(0)}{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^2(0)}$, vem que:

$$\begin{aligned} & \left(C_s d_s + C_f d_f \right) \left(\frac{c^2 t_{GL}^2(0) T_c}{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^2(0)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \left(K_s d_s + K_f d_f \right) \left(\frac{c^2 t_{GL}^2(0) T_c}{d_f H_{c2}^2(0) \sigma_n \xi^4(0)} \right) \nabla^2 T + \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde suprimimos o $\tilde{T}$ das temperaturas. Substituindo os valores de $H_{c2}^2(0)$, $\xi^2(0)$ e $t_{GL}^2(0)$ e reorganizando os termos, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C_s d_s}{d_f} + C_f \right) \left(\frac{D \pi^2 e^2}{\sigma_n T_c 16 k_B^2 u} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \left(\frac{K_s d_s}{d_f} + K_f \right) \left(\frac{\pi^2 e^2}{\sigma_n T_c 16 k_B^2 u^2} \right) \nabla^2 T + \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para terminar o processo de normalização da equação (2.71), temos que fazer duas considerações. Primeiramente, vamos fazer a seguinte aproximação:

$$\left(\frac{C_s d_s}{d_f} \ll C_f \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{K_s d_s}{d_f} \ll K_f \right)$$

Com essas aproximações, temos que a densidade de capacidade calorífica e a condutividade térmica dependem somente do filme supercondutor, tal como feito na Ref. [32]. Fazendo essas considerações, a equação (2.71) fica:

$$\begin{aligned} C_f \left(\frac{D \pi^2 e^2}{\sigma_n T_c 16 k_B^2 u} \right) \frac{\partial T}{\partial t} &= K_f \left(\frac{\pi^2 e^2}{\sigma_n T_c 16 k_B^2 u^2} \right) \nabla^2 T \\ &+ \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora, vamos utilizar a relação $K_f = C_f D$ [34] no lado esquerdo da equação (2.72), para que então possamos utilizar a Lei de Wiedemann-Franz, que estabelece que a contribuição dos elétrons na razão entre a condutividade térmica e elétrica em metais é proporcional à temperatura [35]

$$\frac{K}{\sigma} = L T, \quad (2.73)$$

onde L é a constante de proporcionalidade, conhecida como número de Lorentz, em homenagem ao físico L. Lorentz quem determinou o seu valor experimental. A expressão

teórica $L = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2}$ foi obtida através do modelo de A. Sommerfeld para as propriedades térmicas e elétricas em metais, que é conhecido como o modelo do gás de elétrons ou gás ideal quântico [36] (para maiores detalhes, ver no apêndice D). Para a difusão térmica de um metal no estado resistivo, consideramos $\frac{K}{\sigma} \rightarrow \frac{K_f}{\sigma_n}$ e $T \rightarrow T_c$, e substituindo a expressão para L em (2.72), obtemos:

$$\frac{\pi^4}{48u} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\pi^4}{48u^2} \nabla^2 T + \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0). \quad (2.74)$$

Definindo $C_{eff} = \frac{\pi^4}{48u}$ e $K_{eff} = \frac{\pi^4}{48u^2}$ como a densidade de capacidade calorífica específica efetiva e a condutividade térmica efetiva, respectivamente. Finalmente a equação (2.74), pode ser escrita como:

$$C_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} = K_{eff} \nabla^2 T + \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0). \quad (2.75)$$

Note que C_{eff} e K_{eff} dependem do valor de u , assim as contribuições desses na equação de difusão térmica, serão diferente para o caso de um supercondutor *gapless* ou com *gap*.

Bibliografia

- [1] M. J. Stephen and H. Sum, Phys. Rev. Letters **13**, 797 (1964).
- [2] P. W. Anderson, N. R. Werthamer and J. M. Luttinger Phys. Rev. **138**, A1157 (1965).
- [3] H. Suhl, Phys. Rev. Letters **14**, 226 (1964).
- [4] E. Jakeman and E. R. Pike, Phys. Letters **20**, 593 (1966).
- [5] A. Schmid, Phys. Kondens. Materie **5**, 302 (1966).
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Paris, 2nd edition, 1977. v.1. 898p.
- [7] N. B. Kopnin. *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*. Oxford University Press, New York, 1st edition, 2001. 325p.
- [8] L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg, Sov. Phys. JETP **27**, 328 (1968).
- [9] L. P. Gor'kov and N. B. Kopnin, Sov. Phys. Usp. **18** 496 (1975).
- [10] A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, Sov. Phys. JETP **12**, 1243 (1961).
- [11] P. G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Westview Press, EUA, 3rd edition, 1999. 274p.
- [12] M. A. Woolf and F. Reif, Phys. Rev. **137**, 557 (1965).
- [13] N. Ya. Fogel, Sov. Phys. JETP **36**, 725 (1973).
- [14] G. M. Eliashberg Sov. Phys. JETP **29**, 1298 (1969).
- [15] D. Yu. Vodolazov, Phys. Rev. B **62**, 8691 (2000).
- [16] D. Y. Vodolazov, I. L. Maksimov and E.H. Brandt, Physica C **384**, 211 (2003).
- [17] G. R. Berdiyrov, M. M. Doria, A. R. de C. Romaguera, M. V. Milosevic, E. H. Brandt and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **87**, 184508 (2013).

- [18] A. D. Hernández and D. Domínguez, Phys. Rev. B **77**, 224505 (2008).
- [19] L. Kramer and A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **38**, 518 (1977).
- [20] L. Kramer and R. J. Watts-Tobin, Phys. Rev. Lett. **40**, 1041 (1978).
- [21] A. I. Larkin and Yu N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor.Fiz. **73**, 299 (1977).
- [22] A. Schmid and G. Schon, J. Low Temp. Phys. **20**, 207 (1975).
- [23] L. Kramer and R. Ranger, J. of Low Temp Phys **57**, 391 (1984).
- [24] R. Tidecks and T. Werner, J. of Low Temp Phys **65**, 151 (1986).
- [25] T. Werner, R. Tidecks, and B. D. Johnston, J. Crystal Growth **73**, 467 (1985).
- [26] R. Tidecks. *Current-Induced Nonequilibrium Phenomena In Quasi-One-Dimensional Superconductors*. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1990. 341p.
- [27] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy. *Fundamentos Da Teoria Eletromagnética*. Campus, Rio de Janeiro, 9ª edição, 1982. 516p.
- [28] D. J. Griffiths. *Eletrodinâmica*. Pearson Education, São Paulo, 3ª edição, 2011. 424p.
- [29] J. D. Jackson. *Classical Eletrodynamics*. Wiley, New York, 3rd edition, 1998. 832p.
- [30] L. Landau, E. Lifchitz. *Curso de Física - Teoria do Campo*. Hemus, 1ª edição, 2004. 457p.
- [31] A. F. Volkov and Sh. M. Kogan, JETP Lett. **19**, 4 (1974).
- [32] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, M. Morelle, and V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. B **71**, 184502 (2005).
- [33] T.Y. Hsiang and J. Clarke, Phys. Rev. B **21**, 945 (1980).
- [34] C. Kittel. *Introdução à física do estado sólido*. LTC, Rio de Janeiro, 8ª edição, 2006. 578p.
- [35] W. Neil. Ashcroft, N. D. Mermin. *Física do estado sólido*. Editora Cengage, São Paulo, 1ª edição, 2011. 888p.
- [36] I. S. Oliveira, V. L. B. Jesus. *Introdução à física do estado sólido*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2ª edição, 2011. 507p.

Capítulo 3

Solução numérica da equação GTDGL para processos envolvendo difusão térmica

3.1 Solução numérica do parâmetro de ordem

Para estudar via simulação os efeitos de difusão térmica e outros fenômenos que envolvem o estado resistivo, temos que resolver numericamente as equações GTDGL. Por outro lado, temos que para o nosso caso de interesse tal equação são estruturada em termos das variáveis, ψ , $\mathbf{A}$, Φ e T . Assim, são necessário criar um método iterativo que conecte a solução numérica todas ou algumas dessas variáveis, que irá dependendo do objeto de estudo em si.

Desenvolveremos um método numérico começando pela equação GTDGL em sua forma adimensional. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi \\ = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T - |\psi|^2) \psi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denotamos por $\Delta = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T - |\psi|^2) \psi$ de tal modo que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi = \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2} - i\Phi \psi. \quad (3.2)$$

Utilizando a regra do produto temos que $\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi$ e substituindo na equação (3.2) encontramos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi^2 \right] = \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2 |\psi|^2} - i\Phi \psi, \quad (3.3)$$

ou ainda

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2|\psi|^2 \right) + \frac{1}{2}\gamma^2 \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi^2 = \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} - i\Phi\psi. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) é estruturada em termos da dependência temporal envolvendo ψ e do seu complexo conjugado (ψ^*). Então, temos que resolve-la em $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ e, para tal fim utilizaremos o método de Cramer [1]. Assim, precisaremos de equações para ψ^* e ψ . Fazendo o complexo conjugado da equação (3.4), temos que:

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2|\psi|^2 \right) + \frac{1}{2}\gamma^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^{*2} = \frac{\Delta^*}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} + i\Phi\psi^* \quad (3.5)$$

Colocando na forma de matricial, as equações (3.4) e (3.5) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{2} |\psi|^2 & \frac{\gamma^2}{2} \psi^2 \\ \frac{\gamma^2}{2} \psi^{*2} & 1 + \frac{\gamma^2}{2} |\psi|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} - i\Phi\psi \\ \frac{\Delta^*}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} + i\Phi\psi^* \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Calculando o determinante do segundo termo entre colchetes obtemos $1 + \gamma^2|\psi|^2$. Agora, vamos resolver para $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} \frac{\Delta}{u} - i\Phi\psi & \frac{\gamma^2}{2} \psi^2 \\ \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} \frac{\Delta^*}{u} + i\Phi\psi^* & 1 + \frac{\gamma^2}{2} |\psi|^2 \end{bmatrix} \div (1 + \gamma^2|\psi|^2), \quad (3.7)$$

Calculando o determinante do termo entre colchetes temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} = & \left(\frac{1}{2}\gamma^2|\psi|^2 \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} + \frac{\Delta}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} - \frac{1}{2}\gamma^2 i\Phi\psi|\psi|^2 \right. \\ & \left. - i\Phi\psi - \frac{1}{2}\gamma^2\psi^2 \frac{\Delta^*}{u} \sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2} - \frac{1}{2}\gamma^2 i\Phi\psi^*\psi^2 \right) / (1 + \gamma^2|\psi|^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Efetuada a divisão por $1 + \gamma^2|\psi|^2$ e organizando os termos em comum, em um primeiro momento temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} = & \frac{\Delta}{u} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2}}{1 + \gamma^2|\psi|^2} + \frac{\sqrt{1 + \gamma^2|\psi|^2}}{1 + \gamma^2|\psi|^2} \left(\frac{1}{2}\gamma^2|\psi|^2 \frac{\Delta}{u} - \frac{1}{2}\gamma^2\psi^2 \frac{\Delta^*}{u} \right) \\ & - \frac{i\Phi\psi}{1 + \gamma^2|\psi|^2} \left(1 + \gamma^2|\psi|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

Fazendo alguma algebra, obtemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\Delta}{u} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2|\psi|^2}} + \frac{\gamma^2\psi}{\sqrt{1+\gamma^2|\psi|^2}} \frac{1}{2} \left(\psi^* \frac{\Delta}{u} - \psi \frac{\Delta^*}{u} \right) - i\Phi\psi. \quad (3.10)$$

Podemos substituir o termo entre parênteses da equação (3.10) através da relação:

$$\begin{aligned} \psi^* \Delta &= -\psi^* (-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + (1 - T - |\psi|^2) |\psi|^2, \\ \psi \Delta^* &= -\psi (i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi^* + (1 - T - |\psi|^2) |\psi|^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, temos que:

$$\psi^* \frac{\Delta}{u} - \psi \frac{\Delta^*}{u} = \frac{1}{u} \left(-\psi^* (-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi + \psi (i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi^* \right). \quad (3.12)$$

Definindo $bb = -(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi$ e substituindo na equação (3.12), temos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2|\psi|^2}} \left(\frac{\Delta}{u} + \gamma^2\psi \left[\frac{1}{2} \left(\psi^* \frac{bb}{u} - \psi \frac{bb^*}{u} \right) \right] \right) - i\Phi\psi. \quad (3.13)$$

O termo entre colchetes é $\Im(\psi^* bb/u)$, reescrevendo fica:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2|\psi|^2}} \left(\frac{\Delta}{u} + \gamma^2\psi \Im(\psi^* bb/u) \right) - i\Phi\psi. \quad (3.14)$$

Para discretizar a equação 3.14, utilizamos o método das variáveis de ligação, que tem como base o trabalho da teoria da rede de calibre, publicado em 1979 pelo físico John B. Kogut [2]. Dez anos mais tarde, K. J. M. Moriarty *et al.* fizeram uma simulação numérica utilizando a teoria da rede de calibre, onde pontos no espaço são trocados por vértices em uma rede cúbica com um determinado espaçamento [3]. O parâmetro de ordem é calculado em cada vértice, enquanto que o potencial vetor situa-se entre os *links* da rede. Para garantir que o fluxo do parâmetro de ordem seja covariante (as equações físicas não se alteram sob mudanças de coordenadas) através dos *links* da rede, é necessário que seja acompanhado por uma variável de ligação [3, 4]. Utilizando tais conceitos, simulações numéricas envolvendo esse método floresceram no começo da década de 1990 onde investigou-se, por exemplo, a cinética envolvendo o crescimento da fase Meissner, i.e., regiões livres de campo magnético [5] e o comportamento da curva $V \times I$ quando há dinâmica de vórtice [6].

Em 1996, William D. Gropp *et al.* publicaram um trabalho onde ampliaram e popularizaram o método das variáveis de ligação [7] que, por sua vez, vem sendo utilizado como base para diversos estudos envolvendo simulação numérica de sistemas supercondutores até os dias atuais. Tal método preserva a invariância de calibre. Em todos os nossos

estudos, simulamos amostras supercondutoras em duas dimensões, i.e., um cilindro infinito de bases quadrada ou retangular. Assim, vamos começar o processo de discretização introduzindo os componentes do campo auxiliar:

$$U_x = e^{-i \int_0^x A_x dx}, \quad (3.15)$$

$$U_y = e^{-i \int_0^y A_y dy}, \quad (3.16)$$

Primeiramente, vamos considerar que cada componente do potencial vetor seja constante no intervalo de integração. Assim, resolvendo as integrais temos:

$$U_x = e^{-i A_x x}, \quad (3.17)$$

$$U_y = e^{-i A_y y}, \quad (3.18)$$

Vamos generalizar a notação do campo auxiliar para duas coordenadas. Assim, denotamos por U_u , onde $u = x, y$. Tomando uma derivada com relação a u obtemos:

$$\frac{\partial U_u}{\partial u} = -i A_u U_u. \quad (3.19)$$

Utilizando a regra do produto e a equação (3.19), obtemos uma expressão no qual “conectamos” o campo auxiliar, o parâmetro de ordem e o potencial vetor.

$$\frac{\partial(U_u \psi)}{\partial u} = \frac{\partial U_u}{\partial u} \psi + U_u \frac{\partial \psi}{\partial u} = -i A_u U_u \psi + U_u \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (3.20)$$

A ideia é escrever o termo da energia cinética em termos do campo auxiliar, assim vamos fazer uma segunda derivada com relação a u da equação (3.20)

$$\frac{\partial^2(U_u \psi)}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(-i A_u U_u \right) \psi + \frac{\partial U_u}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} U_u + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial U_u}{\partial u}. \quad (3.21)$$

onde utilizamos mais uma vez a regra do produto. Resolvendo o termo entre parênteses, vem:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(-i A_u U_u \right) \psi = -i \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} U_u + A_u \frac{\partial U_u}{\partial u} \right) \psi = -A_u^2 U_u \psi, \quad (3.22)$$

nesta última passagem utilizamos a equação (3.19) e o calibre de Coulomb, $\frac{\partial A_u}{\partial u} = 0$. Substituindo (3.22) em (3.21) e utilizando mais uma vez a equação (3.19), obtemos:

$$\frac{\partial^2(U_u \psi)}{\partial u^2} = -A_u^2 U_u \psi - 2i A_u \frac{\partial \psi}{\partial u} U_u + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} U_u, \quad (3.23)$$

Por fim, obtemos:

$$U_u^* \frac{\partial^2 (U_u \psi)}{\partial u^2} = -A_u^2 \psi - 2iA_u \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}. \quad (3.24)$$

No qual utilizamos a relação $U_u^* U_u = 1$, ao multiplicar U_u^* em ambos os lados da equação. Temos que o lado direito é igual do termo $-(i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi$. Assim, o termo bb na equação (3.14) fica:

$$bb = U_u^* \frac{\partial^2 (U_u \psi)}{\partial u^2}. \quad (3.25)$$

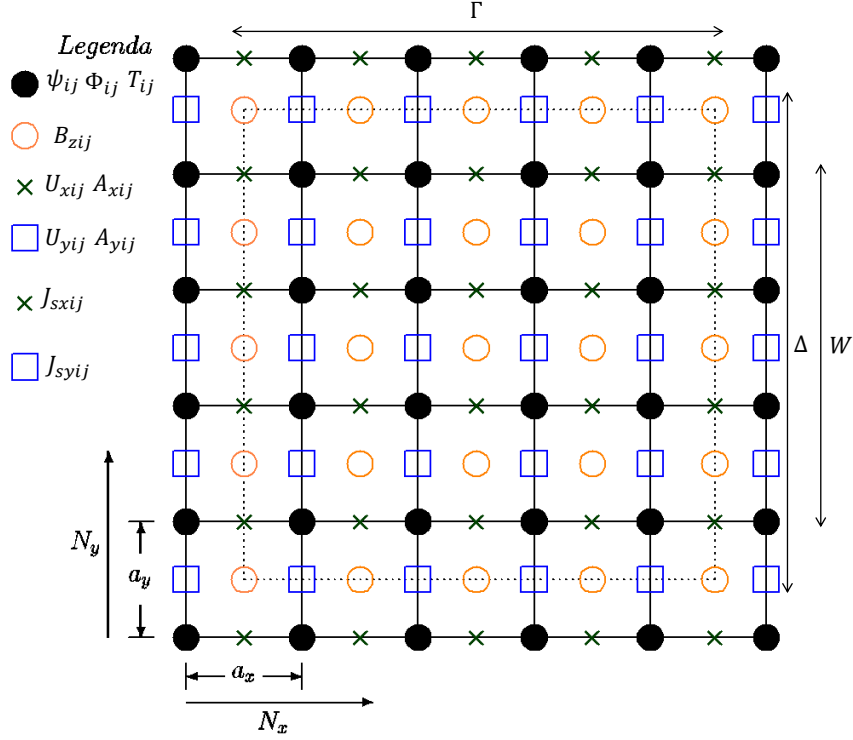


Figura 3.1: Malha numérica bidimensional para as diversas variáveis discretas. Em x temos que a_x e Γ delimitam o tamanho de cada célula unitária e da região pontilhada e N_x é a quantidade de células unitárias. Em y temos que a_y e Δ delimitam o tamanho de cada célula unitária e da região pontilhada e N_y é a quantidade de células unitárias. Sendo W o tamanho do contato metálico para casos onde Φ_{ij} não nulo.

Agora daremos início ao processo de discretização, i.e., nós vamos transformar as variáveis contínuas em discretas, inserindo-as em uma malha numérica em duas dimensões, como mostra a Figura 3.1. Em termos das variáveis discretas a equação (3.14) fica:

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left(\frac{\Delta_{ij}}{u} + \gamma^2 \psi_{ij} \Im(\psi_{ij}^* bb_{ij}/u) \right) - i \Phi_{ij} \psi_{ij}. \quad (3.26)$$

Sendo $\Delta_{ij} = bb_{ij} + (1 - T_{ij} - |\psi_{ij}|^2) \psi_{ij}$. Primeiramente, temos que resolver bb_{ij} , que consiste na solução numérica de uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Como

temos um sistema em duas dimensões, temos que resolver numericamente a derivada parcial em relação aos componentes x e y . Assim, em x o termo bb_{ij} fica:

$$bb_{xij} = U_{xij}^* \frac{\partial^2 (U_{xij} \psi_{ij})}{\partial x^2}. \quad (3.27)$$

Vamos resolver a derivada parcial utilizando o método das diferenças finitas [8], identificando $f(x) = U_{xij} \psi_{ij}$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \right], \\ f'(x) &= \frac{f(x+a_x) - f(x)}{a_x} \quad \text{e} \\ f''(x) &= \frac{f'(x) - f'(x-a_x)}{a_x}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Em nossa resolução, $dx \rightarrow 0$ corresponde à componente a_x da célula unitária (ver Figura 3.1), que é nossa menor dimensão espacial em x na malha numérica. Substituindo $f(x) = U_{xij} \psi_{ij}$, obtemos:

$$f'(x) = \frac{\partial (U_{xij} \psi_{ij})}{\partial x} = \frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - U_{xij} \psi_{ij}}{a_x}. \quad (3.29)$$

Utilizando mais uma vez a relação dada em (3.28), iremos fazer a derivada de segunda ordem de (3.29), tal que:

$$f''(x) = \frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - U_{xi,j} \psi_{i,j} - U_{xij} \psi_{ij} + U_{xi-1,j} \psi_{i-1,j}}{a_x^2}, \quad (3.30)$$

$$f''(x) = \frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - 2U_{xi,j} \psi_{i,j} + U_{xi-1,j} \psi_{i-1,j}}{a_x^2}. \quad (3.31)$$

O conceito de variável de ligação é introduzido quando temos o produto de dois campos auxiliares vizinhos na malha numérica. Para o componente x temos:

$$\begin{aligned} U_{xij} &= e^{-i \int_{x_i}^{x_i+1} A_x dx} = e^{-i A_{xi+1,j} a_x + i A_{xij} a_x}, \\ U_{xij} &= e^{-i A_{xi+1,j} a_x} e^{i A_{xij} a_x} = U_{xi+1,j} U_{xij}^*. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.31) em (3.27) temos:

$$bb_{xij} = U_{xij}^* \left[\frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - 2U_{xi,j} \psi_{i,j} + U_{xi-1,j} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right]. \quad (3.33)$$

Utilizando a relação dada em (3.32), a expressão de bb_{xij} fica:

$$bb_{xij} = U_{xij}^* \frac{\partial^2 (U_{xij} \psi_{ij})}{\partial x^2} = \frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + U_{xi-1,j}^* \psi_{i-1,j}}{a_x^2}. \quad (3.34)$$

O componente y se resolve de maneira análoga. Para calcular a evolução temporal do parâmetro de ordem, devemos discretizar a derivada temporal e depois fazermos uma integração numérica. Então, o termo à esquerda do sinal de igual na equação (3.27) fica:

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\psi_{ij}(t + dt) - \psi_{ij}(t)}{dt} \right]. \quad (3.35)$$

Consideramos $dt \rightarrow 0$ como sendo Δt e, substituindo (3.35) em (3.26) e utilizando a notação $t + \Delta t = t'$, obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(t') &= \psi_{ij}(t) \\ &+ \Delta t \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left(\frac{\Delta_{ij}}{u} + \gamma^2 \psi_{ij} \Im(\psi_{ij}^* b b_{ij}/u) \right) \right. \\ &\left. - i \Phi_{ij} \psi_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sendo a estrutura matemática da equação de ψ uma EDP não linear, utilizamos o método FTCS (do inglês, forward time central space) [8]. Em tal método, resolve-se a derivada no tempo de forma não simetrizada e as derivadas espaciais de maneira simetrizada. A condição de estabilidade numérica (k) do método FTCS para duas dimensões é satisfeita se $k = \frac{2\Delta t \gamma^2}{a_x^2 u \sqrt{1 + \gamma^2}} \leq 1/2$. Como iremos acoplar a equação do potencial vetor e da difusão térmica que também são EDPs, o valor que escolhemos de Δt deve ter o menor valor entre as três condições de estabilidade na solução numérica de ψ , $\mathbf{A}$ e T . O nosso critério de convergência considerado é dado pela condição $\psi_{ij}(t') - \psi_{ij}(t) < 10^{-5}$, que é uma boa aproximação e não demanda um alto custo computacional. A equação (3.36) pode ser calculada em toda a região dentro da área pontilhada da malha numérica mostrada na Figura 3.1. Assim somando em todas as células unitárias a equação (3.36) fica:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(t') &= \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} \psi_{ij}(t) \\ &+ \Delta t \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left(\frac{\Delta_{ij}}{u} + \gamma^2 \psi_{ij} \Im(\psi_{ij}^* b b_{ij}/u) \right) \right. \\ &\left. - i \Phi_{ij} \psi_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.1 Condições de contorno

Para a região externa à área pontilha da Figura 3.1, os pontos que representam ψ_{ij} são calculados via condições de contorno. Em nosso caso, utilizamos a interface supercondu-

tor/vácuo que é válida para quando $T \rightarrow T_c$ [9]. Pela equação (1.19), temos:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})\psi = \frac{i\psi}{b}. \quad (3.38)$$

onde b é a condição de contorno de de Gennes [10]. Sabendo que para interface com o vácuo $b = \infty$ e com o auxílio da equação (3.29), reescrevemos a equação em termos das variáveis discretas na componente x :

$$U_x^* \frac{\partial(U_x \psi)}{\partial x} = U_{xj}^* \left[\frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - U_{xij}^* \psi_{ij}}{a_x} \right] = 0, \quad (3.39)$$

Utilizando a relação dada em (3.32), obtemos:

$$\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{a_x} = 0. \quad (3.40)$$

Resolvendo para $\psi_{1,j}$ e $\psi_{Nx+1,j}$ temos respectivamente:

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} U_{x1,j} \psi_{2,j} \quad \text{e} \\ \psi_{Nx+1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} U_{xNx,j}^* \psi_{Nx,j}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

As condições de contorno para $\psi_{i,1}$ e ψ_{i,N_y+1} são feitas de maneira análoga.

Por fim, falta calcular ψ_{ij} nos cantos da malha numérica, que são estimados como sendo a média dos ψ_{ij} vizinhos, ou seja, os pontos vizinhos das quinas na Figura 3.1. Assim, para esses quatro pontos temos que:

$$\begin{aligned} \psi_{1,1} &= \frac{1}{2}(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}), \\ \psi_{1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(\psi_{1,N_y} + \psi_{2,N_y+1}), \\ \psi_{Nx+1,1} &= \frac{1}{2}(\psi_{Nx,1} + \psi_{Nx+1,2}) \quad \text{e} \\ \psi_{Nx+1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(\psi_{Nx+1,N_y} + \psi_{Nx,N_y+1}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2 Solução numérica do potencial vetor

Em situações onde temos uma fonte de campo magnético presente, é necessário resolver numericamente a o potencial vetor. Com tal solução, é possível mapear, por exemplo, o campo de indução magnética ($\mathbf{B}$), magnetização ($\mathbf{M}$), voltagem induzida V e a energia dissipada devido ao surgimento de correntes normais durante o movimento de vórtices. Para iniciar tal processo, vamos começar pela expressão da densidade de corrente, dada por:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi\right) = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.43)$$

Nos estudos que fizemos nos Capítulos 4, 5 e 6 não foi considerada a presença de corrente de transporte, portanto $\Phi = 0$. Assim, a equação 3.43 fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.44)$$

onde utilizarmos $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e, sendo $\mathbf{J}_s = \Re[\psi^*(-i\nabla - \mathbf{A})\psi]$. Como podemos notar, $\mathbf{J}_s$ é o único termo onde temos o operador atuando sobre ψ . Portanto teremos que fazer um procedimento semelhante ao da seção (3.1). Primeiramente, vamos expandir o termo entre colchetes

$$\psi^*(-i\nabla - \mathbf{A})\psi = -i\psi^*\nabla\psi - \mathbf{A}|\psi|^2, \quad (3.45)$$

agora, vamos introduzir o campo auxiliar com o auxílio da equação (3.20).

$$\frac{\partial(U_u\psi)}{\partial u} = \frac{\partial U_u}{\partial u}\psi + U_u\frac{\partial\psi}{\partial u} = -iA_uU_u\psi + U_u\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad (3.46)$$

Multiplicando a equação (3.46) em ambos os lados por $-i\psi^*U_u^*$ e comparando com (3.45), podemos escrever a seguinte expressão:

$$-i\psi^*U_u^*\frac{\partial(U_u\psi)}{\partial u} = \psi^*(-i\nabla - \mathbf{A})\psi. \quad (3.47)$$

assim, $\mathbf{J}_s$ fica:

$$\mathbf{J}_s = \Re\left[-i\psi^*U_u^*\frac{\partial(U_u\psi)}{\partial u}\right]. \quad (3.48)$$

Utilizando a propriedade $\Re(-iz) = \Re[-ia + b]$, logo $\Re(-iz) = \Im(z)$. Neste caso $z = \psi^*U_u^*\frac{\partial(U_u\psi)}{\partial u}$. Então, a equação (2.6) fica da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_s = \Im\left[\psi^*U_u^*\frac{\partial(U_u\psi)}{\partial u}\right]. \quad (3.49)$$

Substituindo a equação (3.49) em (3.44) e escrevendo somente em termos do componente x , temos que:

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = J_{sx} - \kappa^2\left(-\frac{\delta B_z}{\delta y}\right) \quad (3.50)$$

onde $J_{sx} = \Im\left[\psi^*U_x^*\frac{\partial(U_x\psi)}{\partial x}\right]$. Vamos discretizar cada um dos termos da equação 3.50, começando por J_{sx} . Resolvemos a derivada parcial em x com o auxílio da equação (2.29), assim temos:

$$J_{sxi j} = \Im \left[\psi_{ij}^* U_{xij}^* \left(\frac{U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} - U_{xij} \psi_{ij}}{a_x} \right) \right], \quad (3.51)$$

$$J_{sxi j} = \Im \left(\frac{U_{xij}^* U_{xi+1,j} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^* - U_{xij}^* U_{xij} \psi_{ij} \psi_{ij}^*}{a_x} \right). \quad (3.52)$$

Como $U_{xij}^* U_{xij} = 1$ e $U_{xij}^* U_{xi+1,j} = U_{xij}$ (pela relação (3.32)), obtemos:

$$J_{sxi j} = \Im \left(\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^* - \psi_{ij} \psi_{ij}^*}{a_x} \right). \quad (3.53)$$

O termo $\psi_{ij} \psi_{ij}^* = |\psi_{ij}|^2$ é uma variável real, portanto é cancelada no cálculo da equação (2.11), ou seja, $J_{sx} = \frac{1i}{2a_x} \left(U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^* - \psi_{ij} \psi_{ij}^* - U_{xij}^* \psi_{i+1,j} \psi_{ij} + \psi_{ij}^* \psi_{ij} \right)$, então podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$J_{sxi j} = \Im \left(\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^*}{a_x} \right). \quad (3.54)$$

Vamos resolver o termo do campo de indução magnética, onde em uma malha numérica em 2D temos somente o componente B_z . Com essa condição temos:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \hat{z} = -\frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (3.55)$$

Discretizando a equação (3.55), obtemos:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial y} = -\frac{B_{zij+1} - B_{zij}}{a_y}. \quad (3.56)$$

Combinando as equações (3.54) e (3.56) podemos obter a evolução temporal de A_x (equação 3.50)

$$\frac{\partial A_{xij}}{\partial t} = \Im \left(\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^*}{a_x} \right) + \kappa^2 \frac{B_{zij+1} - B_{zij}}{a_y}, \quad (3.57)$$

Para resolver a derivada temporal utilizaremos o mesmo método desenvolvido na equação (3.35), então temos:

$$A_{xij}(t') = A_{xij}(t) + \Delta t \left[\Im \left(\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^*}{a_x} \right) + \kappa^2 \frac{B_{zij+1} - B_{zij}}{a_y} \right]. \quad (3.58)$$

O cálculo para a componente y do potencial vetor se dá de maneira análoga. A condição de estabilidade da solução numérica do potencial vetor é $\frac{2\Delta t \kappa^2}{a_x} \leq \frac{1}{2}$. Fazendo o somatório de A_{xij} em toda região dentro do perímetro pontilhado (ver na Figura 3.1), obtemos:

$$\begin{aligned} A_{xij}(t') &= \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} A_{xij}(t) \\ &+ \Delta t \left[\Im \left(\frac{U_{xij} \psi_{i+1,j} \psi_{ij}^*}{a_x} \right) + \kappa^2 \frac{B_{zij+1} - B_{zij}}{a_y} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.2.1 Cálculo da magnetização, voltagem e condições de contorno

Através da solução numérica de $\mathbf{A}$, podemos obter outras grandezas físicas, tais como o campo de indução magnético ($\mathbf{B}$), a magnetização ($\mathbf{M}$) e voltagem induzida V (quando temos movimento de vórtices). Essas grandezas serão abordadas em diversas situações nos capítulos 4-6. Introduzindo o conceito de fluxo magnético, temos que:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\mathbf{S}. \quad (3.60)$$

Sendo que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e utilizando o teorema de Stokes, vem:

$$\Phi_B = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.61)$$

Comparando as equações (3.60) e (3.61), encontramos:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.62)$$

Como temos uma malha numérica bidimensional (Figura 3.1), o campo de indução assume a forma $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{k}}$, assim a forma discreta do lado esquerdo da equação (2.20), fica:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\mathbf{S} = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} B_{zij} a_x a_y. \quad (3.63)$$

na passagem do contínuo para o discreto, transformamos a integral de área em uma soma das superfícies de cada célula unitária (dadas por $a_x a_y$) que compõe a nossa malha numérica. Resolvendo numericamente o lado direito da equação (3.62), temos que:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} A_{xij} a_x + A_{yi+1,j} a_y - A_{xi,j+1} a_x - A_{yij} a_y. \quad (3.64)$$

assim a integral de contorno torna-se a soma do perímetro de cada célula unitária. Combinando as equações (3.63) e (3.64), encontramos:

$$B_{zij} = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} \frac{A_{xij} a_x + A_{yi+1,j} a_y - A_{xi,j+1} a_x - A_{yij} a_y}{a_x a_y}. \quad (3.65)$$

Utilizando a equação constitutiva dos campos, temos que:

$$\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M} + \mathbf{H}, \quad (3.66)$$

ou ainda

$$4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{H}. \quad (3.67)$$

onde a equação (3.67) esta normalizada em termos de $H_{c2}(0)/4\pi$. Como a magnetização é uma resposta global (média) do supercondutor submetido a um campo magnético externo $\mathbf{H}$, temos que calcular o valor médio de $\mathbf{B}$. De maneira discreta é dado por:

$$\langle B_z \rangle = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} B_{zij} \quad (3.68)$$

Sendo $N_x N_y$ a superfície total da nossa malha numérica, onde N_x e N_y é a quantidade de células unitárias em x e y respectivamente. Somente teremos resposta magnética em $\mathbf{M} = M_z \hat{\mathbf{k}}$, assim, com essas considerações, a equação (3.67) fica:

$$M_z = \langle B_z \rangle - H_z \quad (3.69)$$

onde H_z é perpendicular à superfície $N_x N_y$. O cálculo da voltagem induzida é dada pela lei de Faraday-Lenz, assim temos que:

$$V = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.70)$$

Substituindo (3.64) em (3.71), obtemos:

$$V = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} A_{xij} a_x + A_{yi+1,j} a_y - A_{xi,j+1} a_x - A_{yij} a_y. \quad (3.71)$$

Para resolver V numericamente e ainda deixá-la mais compacta, vamos introduzir a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \phi_{xij} &= A_{xij} a_x \quad \text{e} \\ \phi_{yij} &= A_{yij} a_y. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Substituindo ambas as equações (3.72) em (3.71) e resolvendo a derivada no tempo numericamente, obtemos:

$$\begin{aligned} V = -\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} & \phi_{xij}(t') - \phi_{xij}(t) + \phi_{yi+1,j}(t') - \phi_{yi+1,j}(t) \\ & - (\phi_{xi,j+1}(t') - \phi_{xi,j+1}(t)) - (\phi_{yij}(t') - \phi_{yij}(t)). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Como o campo magnético penetra no supercondutor a partir da interface supercondutor/vácuo, que é delimitada pelo perímetro da amostra, ou em termos discretos é delimitado pela linha pontilhada da malha numérica (ver Figura 3.1). Em tais regiões temos que $B_{zij} = H_z$, assim temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_y} B_{z1,j} &= H_z, \\
\sum_{j=1}^{N_y} B_{zN_x,j} &= H_z, \\
\sum_{i=2}^{N_x-1} B_{zi,1} &= H_z, \\
\sum_{i=2}^{N_x-1} B_{zi,N_y} &= H_z.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Podemos obter as condições de contorno para o potencial vetor, onde utilizaremos a notação dada em (3.72). Com o auxílio da equação (3.65), com isso temos:

$$\begin{aligned}
\phi_{y1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y-1} \phi_{y2,j} + \phi_{x1,j+1} - \phi_{x1,j} - H_z a_x a_y \\
\phi_{yN_x+1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y-1} \phi_{yN_x,j} - \phi_{xN_x,j+1} + \phi_{xN_x,j} + H_z a_x a_y \\
\phi_{xi,1} &= \sum_{i=2}^{N_x-1} \phi_{xi,2} - \phi_{yi+1,1} + \phi_{yi,1} + H_z a_x a_y \\
\phi_{xi,N_y+1} &= \sum_{i=2}^{N_x-1} \phi_{xi,N_y} + \phi_{yi+1,N_y} - \phi_{yi,N_y} - H_z a_x a_y
\end{aligned} \tag{3.75}$$

As variáveis discretas A_{xij} e A_{yij} não podem ser obtidas simultaneamente, ou seja, ao mesmo tempo para células unitárias que compõem cada canto da malha numérica. Assim para calculá-las, fizemos a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
\phi_{y1,1}(t') &= \phi_{y2,1}(t') + \phi_{x1,2}(t') - \phi_{x1,1}(t) - H_z a_x a_y \\
\phi_{y1,N_y}(t') &= \phi_{y2,N_y}(t') + \phi_{x1,N_y+1}(t) - \phi_{x1,N_y}(t') - H_z a_x a_y \\
\phi_{yN_x+1,1}(t') &= \phi_{yN_x,1}(t') - \phi_{xN_x,2}(t') + \phi_{xN_x,1}(t) + H_z a_x a_y \\
\phi_{yN_x+1,N_y}(t') &= \phi_{yN_x,N_y}(t') - \phi_{xN_x,N_y+1}(t) + \phi_{xN_x,N_y}(t') \\
&+ H_z a_x a_y
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{x1,1}(t') &= \phi_{x1,2}(t') - \phi_{y2,1}(t') + \phi_{y1,1}(t) + H_z a_x a_y \\
\phi_{x1,N_y+1}(t') &= \phi_{y2,N_y}(t') - \phi_{y1,N_y}(t) + \phi_{x1,N_y}(t') - H_z a_x a_y \\
\phi_{xN_x,1}(t') &= \phi_{xN_x,2}(t') + \phi_{yN_x,1}(t') - \phi_{yN_x+1,1}(t) + H_z a_x a_y \\
\phi_{xN_x,N_y+1}(t') &= \phi_{xN_x,N_y}(t') - \phi_{yN_x,N_y}(t') + \phi_{yN_x+1,N_y}(t) \\
&\quad - H_z a_x a_y
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.3 Solução numérica do potencial escalar

Para casos onde temos corrente de transporte (Capítulo 7), precisamos resolver a equação do potencial escalar, para acoplar com a solução numérica do parâmetro de ordem. Em eletrodinâmica clássica, a equação da continuidade é dada por [11, 12, 13]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.78}$$

No qual temos que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n$, onde $\mathbf{J}_n = -\nabla \Phi$. Assumindo que ρ seja uma constante em relação ao tempo e substituindo a expressão para $\mathbf{J}$ em (3.78), temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s - \nabla^2 \Phi = 0, \tag{3.79}$$

Definindo $\rho \equiv \nabla \cdot \mathbf{J}_s$, a equação (3.79) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 \Phi = \rho. \tag{3.80}$$

A solução do potencial escalar possui duas partes, quando $\rho = 0$ e $\rho \neq 0$, que nos leva à estrutura matemática das equações de Laplace e Poisson respectivamente. Assim, vamos separar Φ da seguinte forma

$$\Phi = \Phi_H + \Phi_{NH}, \tag{3.81}$$

que correspondem à solução homogênea e não homogênea respectivamente. Vamos colocar as condições de contorno para ambas as soluções para x e y , assim temos que:

$$\left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} = -J_e, \frac{-W + a_y}{2} \leq y \leq \frac{W - a_y}{2}, \tag{3.82}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial y} \right)_{\pm \frac{\Delta}{2}} = 0, \tag{3.83}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{NH}}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} = \left(\frac{\partial \Phi_{NH}}{\partial y} \right)_{\pm \frac{\Delta}{2}} = 0. \tag{3.84}$$

As equações (3.82) nos diz que a corrente de transporte J_e é aplicada somente na região dos contatos metálicos, delimitada pelo intervalo de y na direção do eixo x (veja Figura 3.1). Já na equação (3.73), é mostrado que a corrente normal é nula. Agora, vamos obter a solução para Φ_H , utilizando o método de separação das variáveis

$$\nabla^2 \Phi_H = \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial y^2} = 0. \quad (3.85)$$

onde $\Phi_H(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação (3.85) obtemos as soluções:

$$X''(x) = \beta^2 X(x), \quad (3.86)$$

$$Y''(y) = \beta^2 Y(y). \quad (3.87)$$

Para $\beta^2 = 0$, temos que $Y(y) = Ay + B$ já que a segunda derivada é nula, logo a primeira derivada deve dar uma constante. Todavia, de acordo com a condição (3.83), tem-se que $A = 0$. Para $\beta^2 > 0$, a solução da equação (3.87) é dada por:

$$Y(y) = A \cos(\beta y) + B \sin(\beta y). \quad (3.88)$$

Substituindo a equação (3.87) em (3.83) e realizando as derivadas, encontramos:

$$A \sin\left(\beta \frac{\Delta}{2}\right) + B \cos\left(\beta \frac{\Delta}{2}\right) = 0, \quad (3.89)$$

$$-A \sin\left(\beta \frac{\Delta}{2}\right) + B \cos\left(\beta \frac{\Delta}{2}\right) = 0. \quad (3.90)$$

Supondo $\cos(\beta \frac{\Delta}{2}) \neq 0$, temos que $B = 0$. Por outro lado, supondo $A \neq 0$, obtemos $\sin(\beta \frac{\Delta}{2}) = 0$. Assim, para tal condição ser satisfeita requer que o termo entre parênteses assumam valores de $m\pi$, onde $m = 1, 2, 3, \dots$. Então, podemos escrever β como:

$$\beta_m = \frac{2\pi m}{\Delta}. \quad (3.91)$$

As soluções para a equação $Y(y)$ são dadas por:

$$Y_m(y) = \cos(\beta_m y). \quad (3.92)$$

Agora vamos fazer o mesmo processo para a equação (3.86), onde para $\beta^2 = 0$ tem-se que $X(x) = Ax + B$. Por outro lado, para $\beta^2 > 0$, obtemos:

$$X_m(x) = a_m e^{-\beta_m x} + b_m e^{\beta_m x}. \quad (3.93)$$

A solução geral para $\Phi_H(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(x)Y_m(y)$ será dada pelo conjunto de soluções para $\beta^2 = 0$ e $\beta^2 > 0$ para ambas as variáveis. Assim, temos que:

$$\Phi_H(x, y) = Ax + B + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{-\beta_m x} + b_m e^{\beta_m x}) \cdot \cos(\beta_m y) \quad (3.94)$$

As constantes podem ser obtidas com o auxílio das condições de contorno dadas pelas equações (3.82) e (3.83). Substituindo a equação (3.94) na (3.82) temos que:

$$\left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} = A + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (-a_m e^{-\beta_m x} + b_m e^{\beta_m x}) \cos(\beta_m y). \quad (3.95)$$

Como que a derivada foi aplicada nos pontos $\pm \frac{\Gamma}{2}$, a equação (3.95) fica:

$$\left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} = A + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (-a_m e^{-\beta_m \pm \frac{\Gamma}{2}} + b_m e^{\beta_m \pm \frac{\Gamma}{2}}) \cos(\beta_m y). \quad (3.96)$$

Integrando ambos os lados da equação 3.96 por $\frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\beta'_m y) dy$ e utilizando a relação da ortogonalidade, do lado direito da igualdade fica:

$$\frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\beta_m y) \cos(\beta'_m y) dy = \delta_{mm'}, \quad (3.97)$$

$$b_m e^{-\beta_m \frac{\Gamma}{2}} - a_m e^{\beta_m \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\gamma_m}{\beta_m}, \quad (3.98)$$

$$b_m e^{\beta_m \frac{\Gamma}{2}} - a_m e^{-\beta_m \frac{\Gamma}{2}} = \frac{\gamma_m}{\beta_m}. \quad (3.99)$$

Sendo γ_m o lado esquerdo do sinal de igual devido à integração de (3.96), que é dado por:

$$\gamma_m = \frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} \cos(\beta'_m y) dy. \quad (3.100)$$

Como a equação (3.82) não é nula somente nas regiões dos contatos metálicos, a equação (3.100) fica:

$$\gamma_m = -\frac{2J_e}{\Delta} \int_{\frac{-W+a_y}{2}}^{\frac{W-a_y}{2}} \cos(\beta'_m y) dy, \quad (3.101)$$

Resolvendo a integral obtemos:

$$\gamma_m = -\frac{4J_e}{\beta_m \Delta} \sin \left(\beta_m \frac{W - a_y}{2} \right). \quad (3.102)$$

Podemos obter os valores de a_m e b_m para todo $m \geq 1$ resolvendo o sistema linear dado pelas equações (3.98) e (3.99), então temos que:

$$a_m = -\frac{\gamma_m}{\beta_m} \frac{1}{\cosh(\beta_m \frac{\Gamma}{2})}, \quad (3.103)$$

$$b_m = \frac{\gamma_m}{\beta_m} \frac{1}{\cosh(\beta_m \frac{\Gamma}{2})}. \quad (3.104)$$

Para $m = 0$, o resultado da integração de $\frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\beta'_m y) dy$ (o lado direito do sinal de igual na equação 3.96) será nulo, exceto para A . Assim, temos a seguinte expressão:

$$A = \frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} dy, \quad (3.105)$$

Como no caso de $m \geq 1$, a integração será não nula somente nas condições da pela equação (3.82), portanto temos que:

$$A = -\frac{2J_e}{L_y} \int_{-\frac{W+a_y}{2}}^{\frac{W-a_y}{2}} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial x} \right)_{\pm \frac{\Gamma}{2}} dy, \quad (3.106)$$

$$A = -\frac{J_e(W - \Delta y)}{\Delta}. \quad (3.107)$$

Por fim, para a condição de que $\Phi_H(x, y)$ é simétrica em relação ao centro da malha, i.e., $\Phi_H(0, y) = 0$. Dada essa condição, a equação (3.94) fica:

$$\Phi_H(0, y) = B + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + b_m) \cos(\beta_m y) = 0. \quad (3.108)$$

Substituindo as expressões encontrados de $a_m + b_m$, temos que para todo valor de m , o termo do somatório é nulo, o que nos leva a $B = 0$. Substituindo na equação (3.96) as expressões de (3.107), (3.104), (3.103) e sendo $B = 0$, por fim, a solução homogênea do potencial escalar é dada por:

$$\Phi_H(x, y) = -\frac{J_e(W - a_y)}{\Delta} x + \frac{\gamma_m \sinh(\beta_m x)}{\beta_m \cosh(\beta_m \frac{\Gamma}{2})} \cos(\beta_m y). \quad (3.109)$$

Para resolver Φ_{NH} , vamos obter uma solução aproximada. Para tal fim consideraremos Φ_{NH} como tendo uma estrutura matemática de uma série de Fourier, que satisfaz a condição de contorno dada pela equação (3.84).

$$\Phi_{NH}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x) \cos(\beta_m y). \quad (3.110)$$

Substituindo-a na equação (3.80), obtemos a seguinte expressão:

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\phi_m''(x) - \beta_m^2 \phi_m(x)] \cos(\beta_m y) = \rho(x, y). \quad (3.111)$$

Integrando ambos os lados por $\frac{2}{L_y} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\beta'_m y) dy$ e utilizando a relação da ortogonalidade, obtemos:

$$\phi_m''(x) - \beta_m^2 \phi_m(x) = R_m(x), \quad (3.112)$$

$$R_m(x) = \frac{2}{L_y} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \rho(x, y) \cos(\beta_{m'} y) dy. \quad (3.113)$$

para o caso de $m \geq 1$. Por outro lado, se $m = 0$, temos:

$$R_o(x) = \frac{2}{L_y} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \rho(x, y) dy = \phi_o''(x). \quad (3.114)$$

Discretizando a equação (3.112), temos a estrutura de um algoritmo de Thomas [8],

$$\frac{\phi_{mi+1} - 2\phi_{mi+1} - \phi_{mi-1}}{a_x^2} - \beta_m^2 \phi_{mi} = R_{mi}. \quad (3.115)$$

As condições de contorno são dadas pelas condições da equação (3.83):

$$\phi_{m1} = \phi_{m2}, \quad (3.116)$$

$$\phi_{mN_x+1} = \phi_{mN_x}. \quad (3.117)$$

Agora, vamos resolver para o caso de $m = 0$. Substituindo $\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \frac{\partial J_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{sy}}{\partial y}$ e utilizando a condição de contorno $J_{sy}(x, \pm \frac{\Delta}{2}) = 0$

$$R_o(x) = \frac{d\bar{J}_{sx}(x)}{dx} = \phi_o''(x). \quad (3.118)$$

onde $\bar{J}_{sx}(x) = \frac{2}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} J_{sx}(x, y) dy$. Integrando a equação (3.118), obtemos:

$$\phi_o'(x) = A + \bar{J}_{sx}(x). \quad (3.119)$$

A constante de integração pode ser obtida utilizando as condições de contorno $\bar{J}_{sx}(\pm \frac{\Gamma}{2}) = 0$ e $\phi_o'(\pm \frac{\Gamma}{2}) = 0$, que leva $A = 0$. Integrando a equação (3.119), temos que:

$$\phi_o(x) = \int_{x_o}^x \bar{J}_{sx}(s) ds. \quad (3.120)$$

O limite inferior de integração deve assumir tal valor que $\phi_o(x)$ seja simétrica com relação a x . Assim, $x_o = 0$. Por fim, vamos discretizar R_m , $\bar{J}_{sx}(x)$ e $\phi_o(x)$. Transformando a integral em uma soma discreta, a equação (3.113) fica:

$$R_{m,i} = \frac{2a_y}{\Delta} \sum_{j=2}^{N_y} \rho_{ij} \cos(\beta_m a_{yj}), \quad (3.121)$$

Sendo $\rho_{ij} = (J_{sx,ij} - J_{sxi-1,j})a_x + (J_{sy,ij} - J_{syi,j-1})/a_y$, onde pela equação (3.54), vamos definir $Q_{x,ij} = \Im(U_{x,ij}\psi_{i+1,j}\psi_{ij}^*)$ e $Q_{y,ij} = \Im(U_{y,ij}\psi_{i,j+1}\psi_{ij}^*)$. Como $\Delta = L_y - a_y = N_y a_y - a_y = (N_y - 1)a_y$, podemos reescrever a equação (3.121) da seguinte forma:

$$R_{m,i} = \frac{2}{(N_y - 1)} \sum_{j=2}^{N_y} \rho_{ij} \cos(\beta_m a_{y_j}). \quad (3.122)$$

Similarmente como fizemos para as equações (3.121) e (3.122), a versão discreta de $\bar{J}_{sx}(x)$ fica:

$$\bar{J}_{sx,i} = \frac{2}{(N_y - 1)} \sum_{j=2}^{N_y} J_{sx,ij}. \quad (3.123)$$

Para $x > 0$, temos que a integral de (3.120) fica:

$$\phi_{o,i} = a_x \sum_{k=\frac{N_x}{2}}^{i-1} \bar{J}_{sx,k}. \quad (3.124)$$

Sendo $i > \frac{N_x}{2} + 1$. Por outro lado, para $x < 0$, a equação (3.120) fica:

$$\phi_o(x) = - \int_x^0 \bar{J}_{sx}(s) ds, \quad (3.125)$$

Discretizando a equação (3.125), temos a seguinte expressão:

$$\phi_{o,i} = a_x \sum_{k=i}^{\frac{N_x}{2}} \bar{J}_{sx,k}. \quad (3.126)$$

Neste caso, $i < \frac{N_x}{2} + 1$. Substituindo a equação (3.123) em (3.124) e (3.126) e com o auxilio versão discreta de J_{sx} (3.54), vem:

$$\phi_{o,i} = a_x \sum_{k=\frac{N_x}{2}}^{i-1} \sum_{j=2}^{N_y} J_{sx,ij} = \sum_{k=\frac{N_x}{2}}^{i-1} \sum_{j=2}^{N_y} Q_{x,ij}, \quad (3.127)$$

$$\phi_{o,i} = a_x \sum_{k=i}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{j=2}^{N_y} J_{sx,ij} = \sum_{k=\frac{N_x}{2}}^{i-1} \sum_{j=2}^{N_y} Q_{x,ij}. \quad (3.128)$$

Dadas essas considerações, a versão discreta da equação (3.110), fica:

$$\Phi_{NH,ij} = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} \phi_{o,i} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{m,i} \cos(\beta_{m,j}). \quad (3.129)$$

Discretizando a solução homogênea (3.109) temos que:

$$\Phi_{H,ij} = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} -\frac{J_e(W - a_y)}{\Delta} a_{x,i} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m \sinh(\beta_{m,i})}{\beta_m \cosh(\beta_m \frac{\Gamma}{2})} \cos(\beta_{m,j}). \quad (3.130)$$

Somando ambas as soluções, obtemos:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{H,ij} + \Phi_{NH,ij}. \quad (3.131)$$

As condições de contorno de Φ_{ij} são dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} \Phi_{2,j}, \\ \Phi_{N_x+1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} \Phi_{N_x,j}, \\ \Phi_{i,1} &= \sum_{i=2}^{N_x} \Phi_{i,2}, \\ \Phi_{i,N_y+1} &= \sum_{i=2}^{N_x} \Phi_{i,N_y}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Para os cantos das malha numérica, temos que:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} &= \frac{1}{2}(\Phi_{1,2} + \Phi_{2,1}), \\ \Phi_{N_x+1,1} &= \frac{1}{2}(\Phi_{N_x+1,2} + \Phi_{N_x,1}), \\ \Phi_{1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(\Phi_{1,N_y} + \Phi_{2,N_y+1}), \\ \Phi_{N_x+1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(\Phi_{N_x+1,N_y} + \Phi_{N_x,N_y+1}). \end{aligned} \quad (3.133)$$

Devido à presença dos contatos metálicos, as condições de contorno para ψ tem um aspecto diferente do mostrado na seção 3.1, pois temos uma interface diferente do vácuo, i.e., com um metal. Pela equação (3.37), para ambos os contatos metálicos, a versão discreta em x é dada por:

$$\frac{\psi_{ij} - U_{xi-1,j}^* \psi_{ij}}{a_x} = \frac{\psi_{ij}}{b} \quad (3.134)$$

$$\frac{U_{xi,j} \psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{a_x} = -\frac{\psi_{ij}}{b} \quad (3.135)$$

onde as equações (3.134) e (3.135) são as condições de contorno para os contatos metálicos do lado esquerdo e direito respectivamente. Assim, ψ nas regiões dos contatos fica:

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} &= \frac{1 - a_x}{b} U_{x1,j} \psi_{2,j} \\ \psi_{N_x+1,j} &= \frac{1 - a_x}{b} U_{xN_x,j}^* \psi_{N_x,j} \end{aligned} \quad (3.136)$$

3.4 Solução numérica da temperatura

Quando consideramos os efeitos térmicos presente no estado restitivo, temos que acoplar a equação de difusão térmica à GTDGL. Como mostramos no Capítulo 2, a versão adimensional da equação de difusão térmica é dada por:

$$C_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} = K_{eff} \nabla^2 T + \frac{1}{2} W - \eta(T - T_0), \quad (3.137)$$

Escrevendo sua versão discreta temos que:

$$C_{eff} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = K_{eff} \nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{2} W_{ij} - \eta(T_{ij} - T_0). \quad (3.138)$$

sendo

$$W_{ij} = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial t} + \nabla \Phi_{ij} \right)^2 + \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left[\left| \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial t} + i \Phi_{ij} \psi_{ij} \right|^2 + \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\partial |\psi_{ij}|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (3.139)$$

onde as variáveis ψ_{ij} , A_{ij} e Φ_{ij} que compõem cada mecanismos de dissipação foram resolvidas numericamente nas seções anteriores. Contudo, temos que fazer algumas aproximações para os cálculos dos mecanismos de dissipação e classifica-los de uma maneira um pouco mais detalhada do que fizemos no Capítulo 2. Essas aproximações são devidas aos termos $(\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + \nabla \Phi_{ij})$, que são vetores (densidade de corrente normal), portanto, para garantir uma simetria na malha numérica é necessário que os componentes do campo elétrico total (induzido e o da lei de Ohm) estejam no mesmo ponto na malha. Para o primeiro caso temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial A_{x,ij}}{\partial t} + \frac{\partial A_{y,ij}}{\partial t}, \\ \frac{\partial A_{x,ij}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_{xi+1,j}(t') - A_{xi+1,j}(t)}{\Delta t} + \frac{A_{xi-1,j}(t') - A_{xi-1,j}(t)}{\Delta t} \right), \\ \frac{\partial A_{y,ij}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_{yi,j+1}(t') - A_{yi,j+1}(t)}{\Delta t} + \frac{A_{yi,j-1}(t') - A_{yi,j-1}(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Veja, com essa média, temos que o ambos os componente do campo elétrico induzido são calculados no mesmo ponto. Agora, vamos fazer o mesmo procedimento para o caso do campo elétrico devido à presença de Φ_{ij} .

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{ij} &= \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{a_x} + \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{a_x} \right), \\ \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{a_y} + \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{a_y} \right). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Nos Capítulos 5 e 6 abordaremos situações onde $\Phi_{ij} = 0$, assim, distinguiremos os mecanismos de dissipação da seguinte forma:

$$W_{\mathbf{A}_{ij}} = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial t} \right)^2, \quad (3.142)$$

$$W_{\psi_{ij}} = \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left[\left| \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial t} \right|^2 \right], \quad (3.143)$$

$$W_{\gamma_{ij}} = \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left[\frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\partial |\psi_{ij}|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (3.144)$$

Por outro lado, no Capítulo 7 temos que $A_{ij} = 0$, assim os mecanismos de dissipação ficam:

$$W_{\Phi_{ij}} = 2(\nabla \Phi_{ij})^2, \quad (3.145)$$

$$W_{\psi_{ij}} = \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left[\left| \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial t} + i\Phi_{ij}\psi_{ij} \right|^2 \right], \quad (3.146)$$

$$W_{\gamma_{ij}} = \frac{2u}{\sqrt{1 + \gamma^2 |\psi_{ij}|^2}} \left[\frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\partial |\psi_{ij}|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (3.147)$$

Feitas as aproximações e distinguindo cada um dos mecanismos de dissipação, temos que resolver o Laplaciano e a derivada no tempo presentes na equação (3.138). Neste caso, também utilizamos o método FTCS. Primeiramente, discretizamos o Laplaciano com o auxílio da equação (3.27), assim temos:

$$\nabla^2 T_{ij} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{a_x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{a_y^2}. \quad (3.148)$$

Discretizando o termo da derivada no tempo, obtemos:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = \frac{T_{ij}(t') - T_{ij}(t)}{\Delta t}. \quad (3.149)$$

Substituindo as equações (3.148) e (3.149) em (3.139) e resolvendo para $T_{ij}(t')$, temos que:

$$T_{ij}(t') = T_{ij}(t) + \frac{\Delta t}{C_{eff}} \left[K_{eff} \left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{a_x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{a_y^2} \right) + \frac{1}{2} W_{ij} - \eta(T_{ij} - T_0) \right]. \quad (3.150)$$

Neste caso, a condição de estabilidade é dada pelo termo $\frac{2\Delta t K_{eff}}{C_{eff} a_x^2} \leq \frac{1}{2}$. Somando para cada um dos pontos da malha numérica, a equação (3.150), fica:

$$T_{ij}(t') = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} T_{ij}(t) + \quad (3.151)$$

$$\frac{\Delta t}{C_{eff}} \left[K_{eff} \left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{a_x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{a_y^2} \right) + \frac{1}{2} W_{ij} - \eta(T_{ij} - T_0) \right]$$

3.4.1 Condições de contorno e energia livre

Considerando a troca de calor apenas com o substrato, para outras interfaces temos:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.152)$$

o que nos leva às seguintes expressões para uma malha numérica bidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \frac{T_{i+1,j} - T_{ij}}{a_x} &= 0, \\ \frac{T_{i,j+1} - T_{ij}}{a_y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.153)$$

Então, nas regiões de interface temos que:

$$\begin{aligned} T_{N_x+1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} T_{N_x,j}, \\ T_{1,j} &= \sum_{j=2}^{N_y} T_{1,j}, \\ T_{i,N_y+1} &= \sum_{i=2}^{N_x} T_{i,N_y}, \\ T_{i,1} &= \sum_{i=2}^{N_x} T_{i,2}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Para os cantos da malha, o procedimento é o mesmo que fizemos para ψ_{ij} e Φ_{ij} (seções 3.1 e 3.3 respectivamente). Assim, temos:

$$\begin{aligned}
T_{1,1} &= \frac{1}{2}(T_{1,2} + T_{2,1}), \\
T_{1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(T_{1,N_y} + T_{2,N_y+1}), \\
T_{N_x+1,N_y+1} &= \frac{1}{2}(T_{N_x+1,N_y} + T_{N_x,N_y+1}), \\
T_{N_x+1,1} &= \frac{1}{2}(T_{N_x+1,2} + T_{N_x,1}).
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Com as soluções numéricas de ψ_{ij} , A_{ij} e T_{ij} , podemos calcular a densidade de energia livre de Gibbs (G) do estado supercondutor. Então, para o termos que dependem de ψ_{ij} , temos que:

$$G_c = \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} \left[|\psi_{ij}|^2 \left(\frac{1}{2} |\psi_{ij}|^2 - (1 - T_{ij}) \right) + \left| \frac{U_{uij} \psi_{ij} - \psi_{ij}}{a_u} \right|^2 \right]. \tag{3.156}$$

No qual utilizamos a notação $u = x, y$. A parte devido ao campo magnético da energia livre (G_B) é dada por:

$$G_B = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \kappa^2 (B_{zij} - H_z)^2. \tag{3.157}$$

Por fim, fazendo $G_c + G_s$ e dividindo pela superfície da nossa malha numérica, obtemos:

$$G = \frac{1}{N_x N_y} (G_c + G_B). \tag{3.158}$$

3.4.2 Critério de estabilidade e condições iniciais

O passo de tempo Δt escolhido será o menor entre as três diferentes condições de estabilidade, para as soluções numéricas de ψ , $\mathbf{A}$ e T via método FTCS, assim temos:

$$\begin{aligned}
\frac{2\Delta t \gamma^2}{a_x^2 u \sqrt{1 + \gamma^2}} &\leq \frac{1}{2} \\
\frac{2\Delta t \kappa^2}{a_x} &\leq \frac{1}{2} \\
\frac{2\Delta t K_{eff}}{C_{eff} a_x^2} &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.159}$$

As condições iniciais para todas as simulações dos capítulos 4-7 são dadas por:

$$\begin{aligned}
H_z &= 0 \\
J_e &= 0 \\
\sum_{j=1}^{N_y+1} \sum_{i=1}^{N_x+1} T_{ij} &= T_0 \\
\sum_{j=1}^{N_y+1} \sum_{i=1}^{N_x+1} |\psi_{ij}| &= \sqrt{1 - T_{ij}} \\
\sum_{j=1}^{N_y+1} \sum_{i=1}^{N_x+1} \Phi_{ij} &= 0
\end{aligned} \tag{3.160}$$

onde T_0 é a temperatura de banho térmico.

Bibliografia

- [1] L. J. Boldrini, R. I. S. Costa, L. V. Figueredo, W. G. Henry. *Álgebra Linear*. Editora Harbra, São Paulo, 3ª Edição, 1986. 412p.
- [2] J. B. Kogut, Reviews of Modern Physics **51**, 659 (1979).
- [3] K. J. M. Moriarty, E. Myers and C. Rebbi, Comput. Phys. Commun. **54**, 272 (1989).
- [4] H. Frahm, S. Ullah and A.T. Dorsey, Phys. Rev. Lett **66**, 3067 (1991).
- [5] Fong Liu, M. Mondello and Nigel Goldenfeld, Phys. Rev. Lett **66**, 3071 (1991).
- [6] M. Machida and H. Kaburaki, Phys. Rev. Lett **71**, 3206 (1993).
- [7] W. D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo and V.M. Vinokur, J. of Comp. Phys **123**, 254 (1996).
- [8] C. Scherer. *Métodos Computacionais da Física*. Editora livraria da física, São Paulo, 2ª Edição, 2010.
- [9] T. Y. Hsiang and J. Clarke, Phys. Rev. B **21**, 945 (1980).
- [10] P. G. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Westview Press, Boca Raton, 3ª edição, 1999. 288p.
- [11] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy. *Fundamentos Da Teoria Eletromagnética*. Campus, Rio de Janeiro, 9ª edição, 1982. 516p.
- [12] D. J. Griffiths. *Eletrodinâmica*. Pearson Education, São paulo, 3ª edição, 2011. 424p.
- [13] J. D. Jackson. *Classical Eletrodynamics*. Wiley, New York, 3rd edition, 1998. 832p.

Capítulo 4

Supercondutor submetido a um gradiente térmico

4.1 Introdução

Tanto do ponto de vista experimental quanto teórico, normalmente a temperatura do supercondutor é mantida constante em todo o sistema.

Por outro lado, trabalhos onde se tem a presença de um gradiente térmico começaram a ser estudados por volta do final da década de 1960. Um dos pioneiros na área foi W. Meissner, através da medida do coeficiente termo-elétrico (η_k) em 1927 [1]. John R. Clem em 1968 publicou um artigo onde se determina a contribuição do gradiente térmico no coeficiente de viscosidade durante um regime de flux-flow [2]. Utilizando o *normal core model*, o movimento de vórtices produz um gradiente térmico na vizinhança do seu núcleo, fazendo com que o coeficiente de viscosidade possua uma dependência com a temperatura $\eta_f(T)$. Para o limite sujo ($l \ll \xi(0)$), $\eta_f(T)$ exibe um valor de máximo que não é observado no caso do limite limpo $l \gg \xi(0)$. Esse máximo é devido a dissipação gerada pelo gradiente térmico na vizinhança do núcleo do vórtice.

Na década seguinte, o efeito termo-elétrico continuou sendo investigado, onde uma corrente de excitação normal (J_T), proporcional ao gradiente de temperatura, é gerada no supercondutor (tal conceito foi apresentado por Ginzburg em 1944 [3]) [4]. Por outro lado, uma corrente supercondutora igual e oposta surge em todo sistema. Portanto, temos que $J_T + J_s = 0$, onde $J_T = -\eta_k \nabla T$. Como J_s é proporcional ao gradiente da fase do parâmetro de ordem, podemos investigar tal fenômeno mensurando a diferença de fase utilizando um interferômetro quântico de Josephson ou através de um circuito fechado composto por dois tipos diferentes de supercondutores mantidos a diferentes temperaturas, como mostram as sessões 3 e 4 da Ref. [4]. Quando consideramos uma corrente de transporte e um gradiente térmico no supercondutor, observa-se o aparecimento de uma diferença

de potencial devido ao um desbalanceamento de carga. O formalismo teórico para estudar tal fenômeno é apoiado na equação do transporte de Boltzmann no limite limpo e $\Delta \ll k_B T$, onde Δ é o *gap* do supercondutor. Obtém-se que a diferença de potencial é proporcional ao produto da supervelocidade (proporcional à supercorrente) com o gradiente térmico, ou seja, $v_s \Delta T$ [5]. Uma publicação contendo a confirmação experimental ocorreu logo em seguida [6]. Na ausência de uma corrente de transporte, o processo é análogo ao termoelétrico (veja [4, 7]) e a voltagem é sete ordens de grandeza menor que no caso com corrente aplicada. Outros trabalhos teóricos utilizam um formalismo análogo ao da Ref. [5] e também obtiveram êxito quando seus resultados são comparados com os experimentais. A Ref. [8] apresenta uma versão alternativa para a equação de Boltzmann tanto para o limite sujo quanto para o limpo. Na Ref. [9] o cálculo do desequilíbrio de carga e da voltagem no limite limpo são diferentes do apresentado em [5]. Tais mudanças foram necessárias devido ao valor incorreto no cálculo da voltagem quando a temperatura estava próxima de T_c . Para fazer essa correção, introduziram a energia associada à velocidade do superfluido no cálculo da energia de dispersão das quasi-partículas, i.e., $E_{\mathbf{k}}$ (veja Capítulo 1, seção 1.2).

A derivação microscópica tanto para o limite limpo quanto para o sujo é mostrado em [10]. Além disso, é apresentado um termo adicional no cálculo da voltagem devido ao efeito de um gradiente térmico não uniforme que se sobrepõe ao apresentado em [5], para um supercondutor no limite limpo e próximo a temperatura crítica. Em tal referência também é possível encontrar uma síntese dos trabalhos desenvolvidos anteriormente.

4.2 Resultados

Há poucos trabalhos que envolvem supercondutores sob influência de gradiente térmico. Boa parte desses são voltados para estudos envolvendo o fenômeno termo-elétrico, como comentamos na seção 4.1. Por outro lado, dinâmica de vórtices em supercondutores mesoscópicos foram amplamente estudados desde a metade da década de 1990 até os dias atuais, contudo esses trabalhos sempre consideram um supercondutor com temperatura homogênea. Assim, neste trabalho nós estudamos matéria de vórtices em supercondutores mesoscópicos na presença de um gradiente térmico linear (ver equação 4.1.) e no qual abordamos a configuração dos vórtices e suas propriedades magnéticas. Temos que:

$$T(x)_{ij} = \sum_{i=1, N_x+1} T_l + \left(\frac{T_r - T_l}{N_x} a_{xi} \right). \quad (4.1)$$

onde T_l e T_r são as temperaturas do lado esquerdo e direito da amostra, respectivamente.

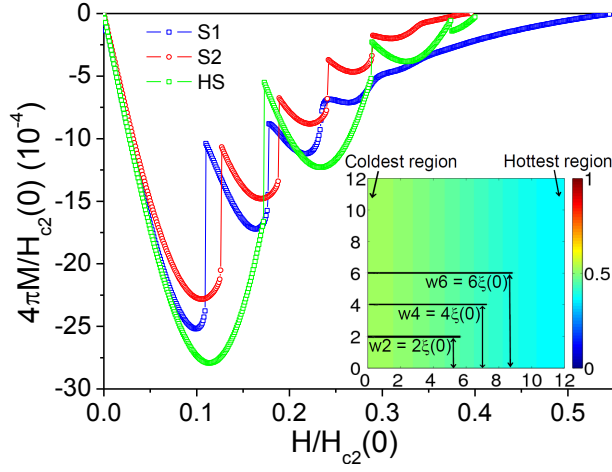


Figura 4.1: Curva da magnetização em função do campo magnético externo para as amostras S_1 , S_2 e HT . O inset mostra a intensidade do $|\psi|$ no estado inicial ($H = 0$) sobre um gradiente térmico.

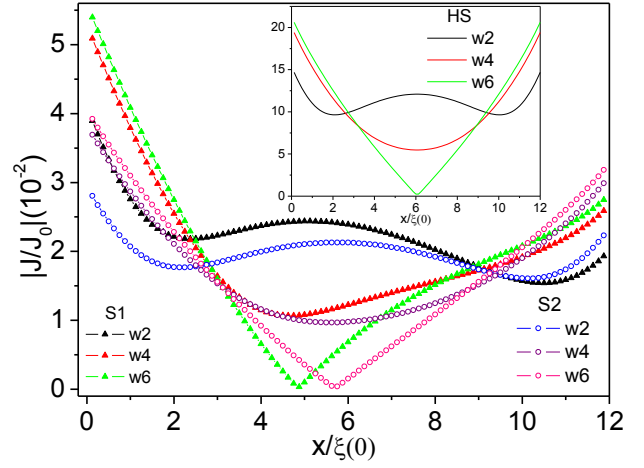


Figura 4.2: Varredura do $|J|$ ao longo do eixo x para três diferentes regiões mostradas no inset da figura 4.1 para S_1 e S_2 . O inset desta presente figura mostra um comportamento simétrico da corrente para a amostra HT .

4.2.1 Estado de vórtices

Foram feitas simulações numéricas utilizando o conjunto de equações apresentadas no capítulo 3, para sistemas quadrados com tamanho lateral de $12\xi(0)$, $u = 1$ e $\kappa = 5$ que é equivalente à liga de Pb-In [11]. O tamanho da malha utilizada foi $\Delta x = \Delta y = 0,125\xi(0)$ e o campo magnético externo evoluiu a passos de $\Delta H = 10^{-3}H_{c2}(0)$. Toda a dinâmica foi analisada sob um gradiente térmico que altera o valor do parâmetro de ordem ao longo do eixo x do sistema. Investigamos a dinâmica de dois sistemas submetidos a dois diferentes gradientes térmicos, i.e., um com uma temperatura que varia de $T_l = 0,7T_c$ até $T_r = 0,9T_c$, chamado de S_1 e outro de $T_l = 0,8T_c$ até $T_r = 0,85T_c$ chamado de S_2 .

Também comparamos os resultados com um sistema de temperatura homogênea (HS) de $T = 0,85T_c$. Na Figura 1.4 e mostramos a curva de magnetização em função do campo magnético externo, $M(H)$. O comportamento de tal curva é similar com a exibida do sistema HT , i.e., cada descontinuidade é devida a uma ou mais penetrações de vórtices. Perceba que, o campo correspondente à primeira penetração para o S_1 é menor que para o S_2 . Isto se deve ao fato de que S_1 possui uma temperatura mais alta no lado direito do que o S_2 , que por sua vez, possui um comportamento similar ao apresentado no sistema HS . O campo para destruir a supercondutividade é maior para S_1 do que para S_2 porque a temperatura na região mais fria é menor para esse sistema. Na Figura 4.2 nós ilustramos o módulo da densidade de corrente J/J_0 , onde J_0 é a corrente de desemparelhamento, ao longo do eixo do x para três diferentes distâncias w a partir da parte de baixo do sistema (ver inset da Figura 4.1).

A comparação entre S_1 e S_2 é mostrado na Figura 4.2. Vale a pena mencionar a distribuição assimétrica de J em comparação com o inset desta mesma figura para o sistema

HS . Todavia, S_2 apresenta uma menor assimetria quando comparado com S_1 . Como esperado, observa-se que J apresenta um maior valor na região mais fria e um menor valor na região de supercondutividade degradada (região mais quente). Para ambos os casos (S_1 e S_2) os vórtices nuclearam no supercondutor um a um. A penetração sempre ocorreu no lado direito do sistema, pois $T_r > T_l$. Estudamos, ainda a influência de uma distribuição não homogênea de temperatura no estado de vórtice gigante que tem sido encontrado para sistemas HS [12]. Na Figura 4.3, são mostrados dois estados de vórtice para S_1 , S_2 e HS . No painel 4.3(a) é mostrada a intensidade de $|\psi|$ sobreposto por *streamlines* de J . Em tal figura são claramente vistos dois vórtices separados, confirmado pela fase de ψ no painel 4.3(b). De forma análoga, tem-se os painéis 4.3(c) e (d) para S_2 , e 4.3(e) e (f) para o sistema HS . Observa-se claramente a formação de um estado de vórtice gigante. Como consequência, concluímos que para pequenos gradientes de temperatura, é ainda permitida a formação de vórtices gigantes.

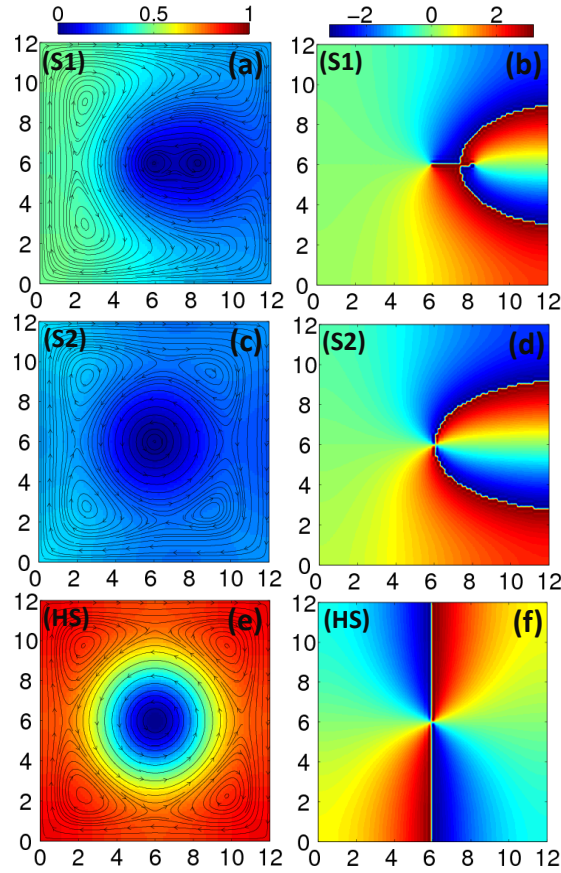


Figura 4.3: Configuração do estado de vórtices para cada um das amostras simuladas S_1 (a,b); S_2 (c,d); HS (e,f). Esquerda: intensidade do parâmetro de ordem junto com a distribuição da densidade de corrente (*streamlines*); Direita fase do parâmetro de ordem comprovando as situações que houveram (ou não) a formação de vórtice gigante.

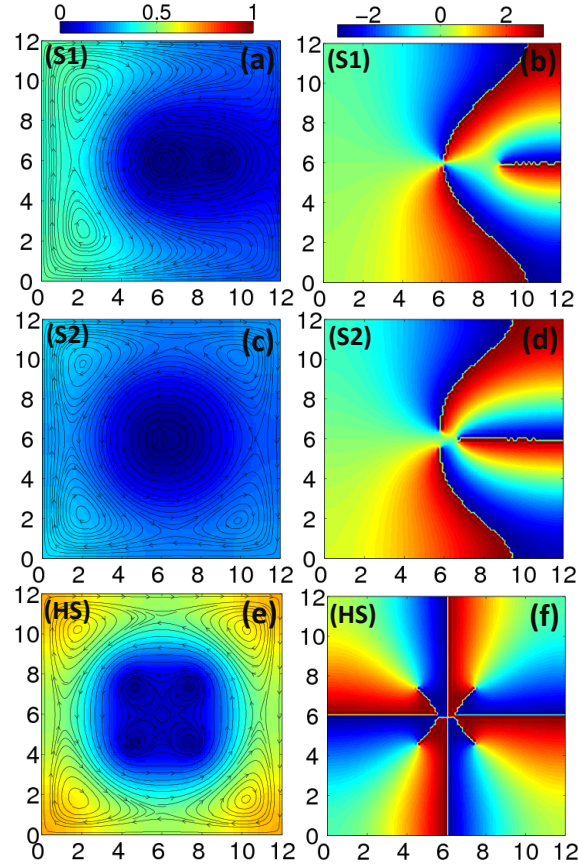


Figura 4.4: Configuração do estado de vórtices para vorticidade ímpar em S_1 e S_2 . Sendo S_1 (a,b); S_2 (c,d); H_S (e,f). Esquerda: intensidade do parâmetro de ordem junto com a distribuição da densidade de corrente (*streamlines*); Direita fase do parâmetro de ordem comprovando as situações que houveram (ou não) a formação de vórtice gigante.

A Figura 4.4 ilustra o cenário associado com a terceira penetração para S_1 e S_2 . Ambas as amostras apresentam a mesma dinâmica de penetração com três vórtices no estado estacionário. Entretanto, o sistema HS apresenta quatro vórtices já na segunda penetração (ver os painéis 4.4(e) e (f)). Isto indica que o gradiente térmico quebra a simetria de vorticidade igual a quatro nesses sistemas. Por outro lado, é interessante notar que um vórtice gigante é criado em S_1 , o que significa que uma grande variação de temperatura induz uma interação de vórtices não usual em amostras mesoscópicas.

4.2.2 Magnetização Anômala

Nesta parte do estudo, simulamos amostras retangulares de tamanho $(40\xi(0) \times 20\xi(0))$, com uma malha de $\Delta x = \Delta y = 0,125\xi(0)$. Dois diferentes valores para as regiões mais frias e mais quentes foram escolhidos, como mostrado na Figura 4.5. Os sistemas foram denominados de TG1 e TG2 com $0,7T_c < TG1 < 0,9T_c$ para o primeiro e $0,1T_c < TG1 < 0,9T_c$ para o segundo. Para sistemas homogêneos, HS, a temperatura foi fixada

em $T = 0,8T_c$. Todos os sistemas começaram no estado Meissner e o campo magnético externo foi aumentado em passos de $\Delta H = 10^{-3}H_{c2}(0)$. Trabalhamos, também, com diferentes “materiais” onde escolhemos os parâmetros de Ginzburg-Landau $\kappa = 1$ e $\kappa = 5$, que correspondem a baixos e moderados valores de κ .

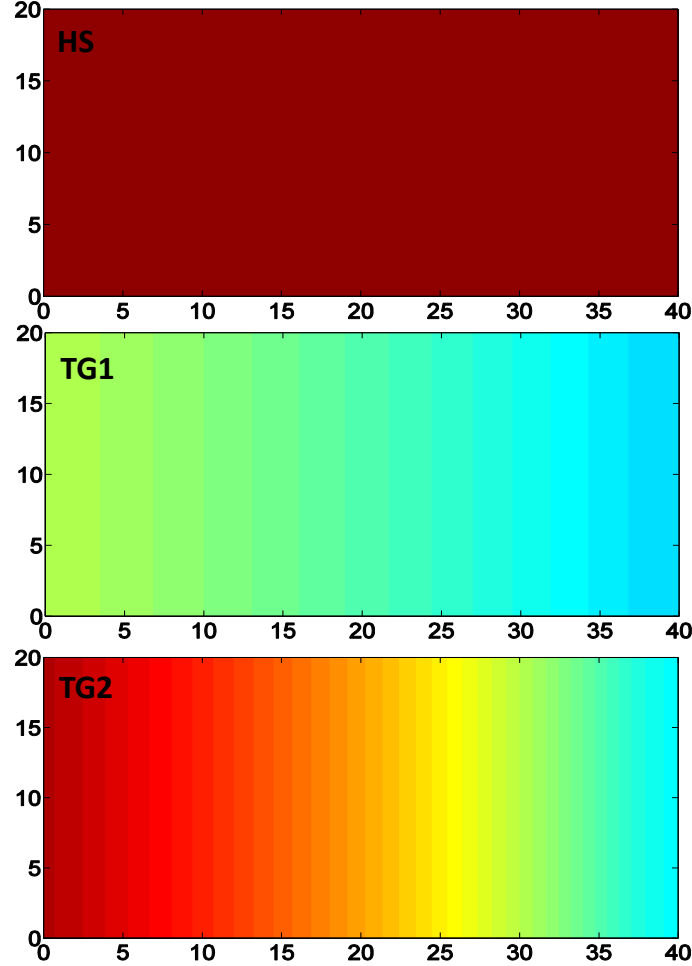


Figura 4.5: Variação de $|\psi|$ para as amostras simuladas em $H = 0$, onde em vermelho temos $|\psi|$ é máximo e em azul escuro $|\psi| = 0$. (a) Amostra de temperatura homogênea, HS, com $T = 0,8T_c$; (b) Amostra TG1 com $T_l = 0,7T_c$ e $T_r = 0,9T_c$ e (c) Amostra TG2 com $T_l = 0,1T_c$ e $T_r = 0,9T_c$.

No estado misto, as curvas de $M(H)$ exibem um comportamento não esperado quando comparamos os sistemas TG2 com TG1 e HS, tal como é mostrado na Figura 4.6. Os saltos nas curvas de $M(H)$, ocorrem em cada penetração de vórtice. Partindo da Figura 4.6(a) até a Figura 4.6(c), o valor máximo do módulo da magnetização ocorre no final do estado Meissner, i.e., em H_{c1} .

Depois desse ponto, a magnetização é sempre menor que seu valor em H_{c1} . Tal resposta é devido a uma condição de vorticidade não nula.

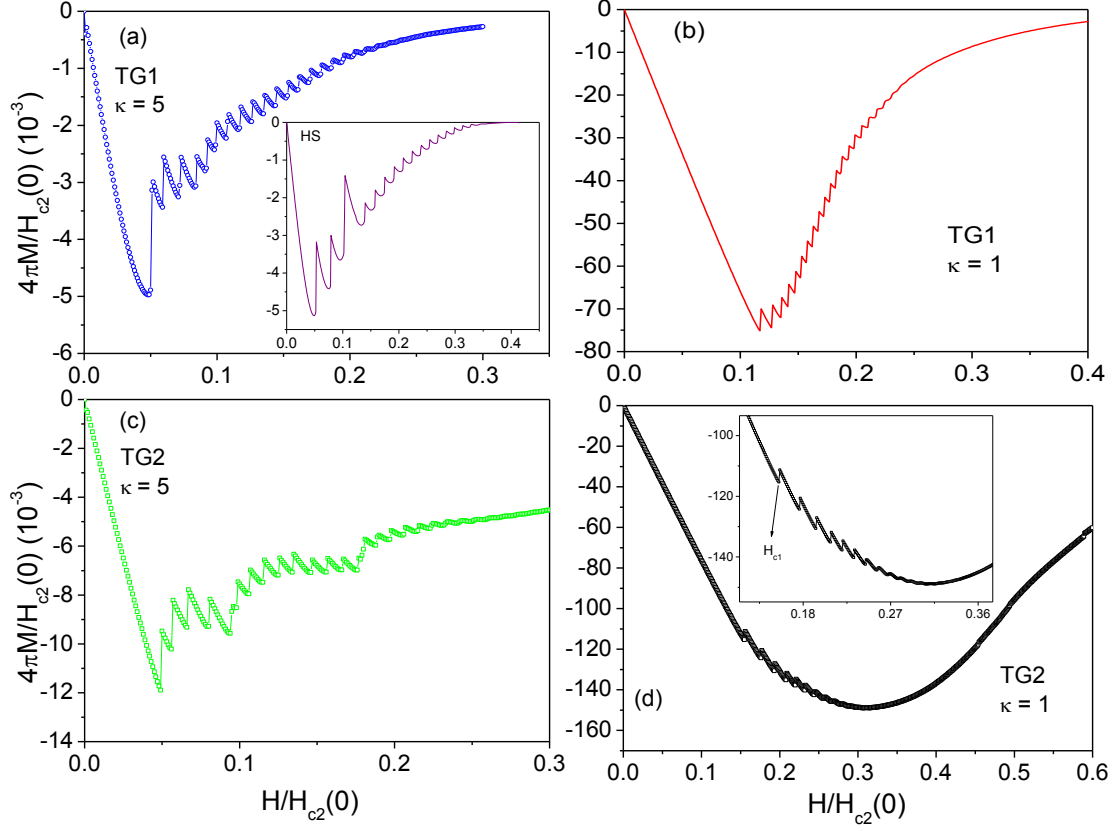


Figura 4.6: Curva da magnetização em função do campo magnético externo para amostra sobre gradiente térmico. (a) TG1 $\kappa = 5$; (b) TG1 $\kappa = 1$; (c) TG2 $\kappa = 5$ e (d) TG2 $\kappa = 1$. O inset em (a) indica a curva $M(H)$ para a amostra HS . Já o inset em (d), mostra um zoom nos campos próximos a H_{c1} .

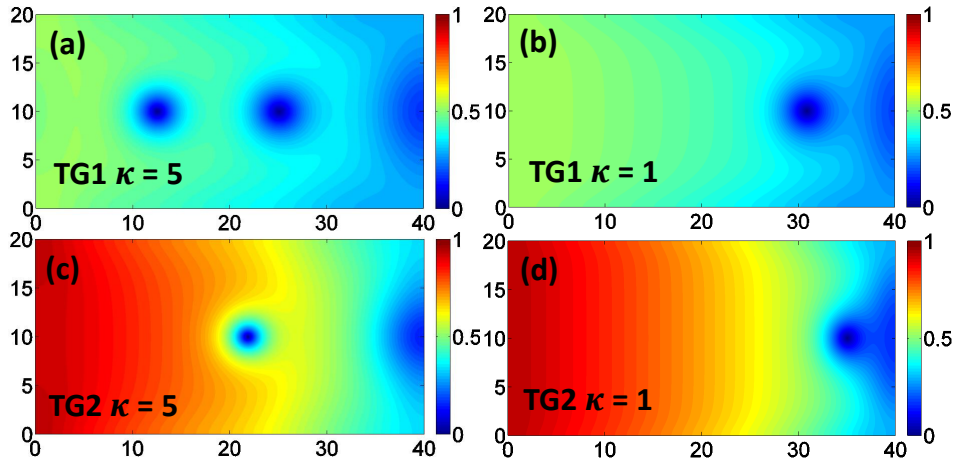


Figura 4.7: $|\psi|$ em $H = H_{p2} - \Delta H$ mostrando a distribuição dos vórtices em um passo de campo magnético anterior ao da segunda penetração, para (a) TG1 $\kappa = 5$; (b) TG1 $\kappa = 1$; (c) TG2 $\kappa = 5$ e (d) TG2 $\kappa = 1$.

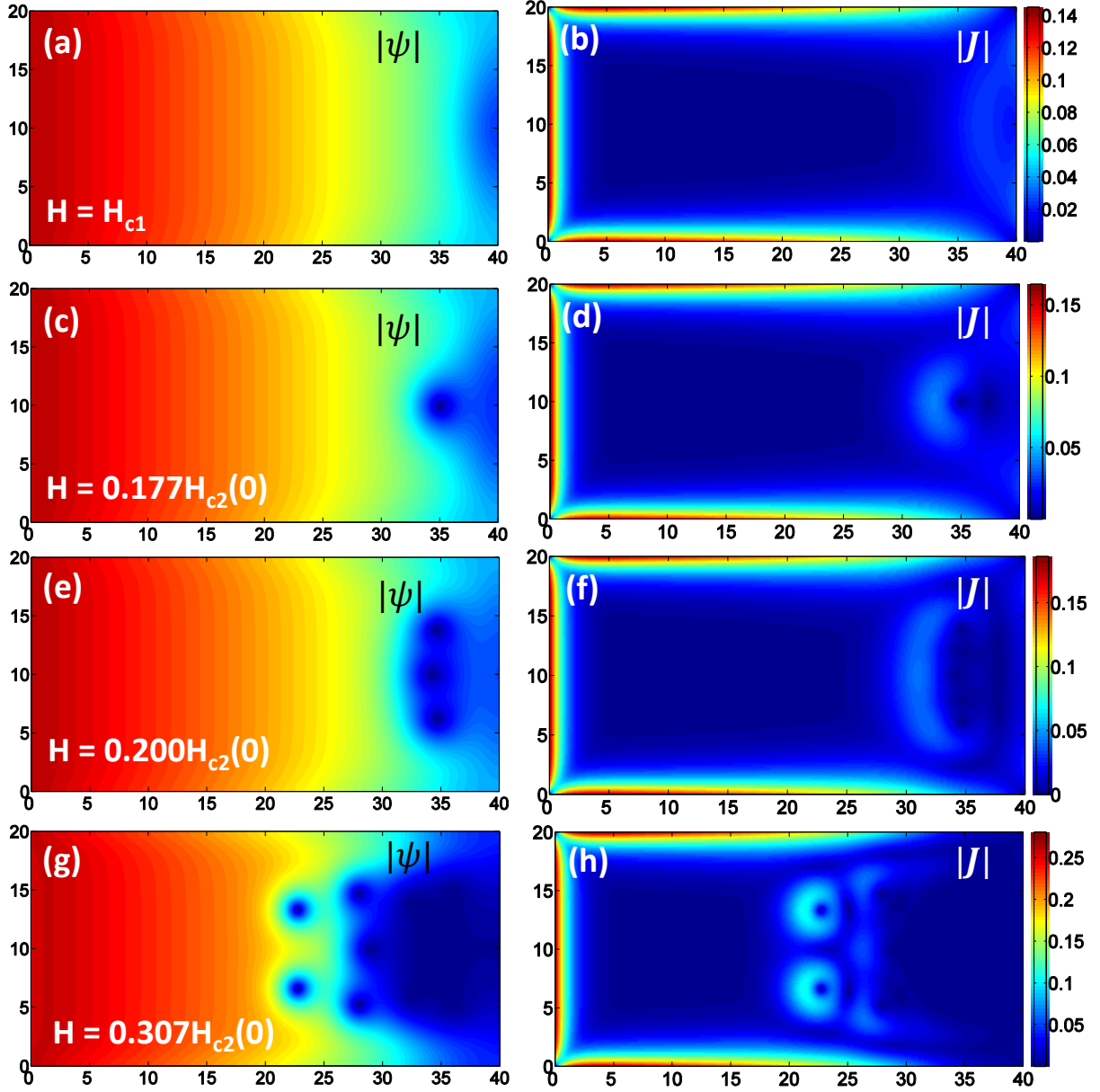


Figura 4.8: Evolução de $|\psi|$ e $(\mathbf{J}_s)$ em função do campo magnético externo para amostra TG2 $\kappa = 1$, mostrados na coluna da esquerda e da direita respectivamente. As regiões vermelha/azul escuro representam ψ máximo/nulo nos painéis (a), (c), (e) e (g). Até em $H = 0,307H_{c2}(0)$, temos um aumento de $(\mathbf{J}_s)$, o que leva a uma maior preservação do estado supercondutor na região mais fria, como mostra a distribuição de $|\psi|$. (a) e (b) $H = H_{c1}$; (c) e (d) $H = 0,177H_{c2}(0)$; (e) e (f) $H = 0,200H_{c2}(0)$; (g) e (h) $H = 0,307H_{c2}(0)$.

Entretanto, uma situação diferente ocorre na Figura 4.6(d), onde os vórtices penetram no sistema sem que M alcance seu valor máximo. Em um supercondutor com temperatura homogênea, o estado de mínima energia é obtido com os vórtices estão na região central da amostra. Todavia, para TG1 e TG2, um comportamento similar somente ocorre para

$\kappa = 5$ (ver Figura 4.7). Para $\kappa = 1$, o vórtice é localizado na região mais quente, como é mostrado nas Figuras 4.7(b) e 4.7(d). A curva $M(H)$ é dependente da distribuição das correntes de blindagem ($\mathbf{J}_s$), a qual, por sua vez, é afetada pelo gradiente térmico. Adicionalmente, a distribuição de $\mathbf{J}_s$ é também afetada pelo valor de κ . O tamanho total do vórtice, i.e., $2\lambda(T)$, é proporcional ao valor de κ , que é dado por $\lambda(T) = \frac{\kappa}{\sqrt{1-T}}$ em unidades normalizadas. Assim, na amostra TG2 para $\kappa = 5$ (Figura 4.7(a)), o vórtice é, em geral, dez vezes maior do que para $\kappa = 1$ (Figura 4.7(b)). Tal fato contribui para uma forte interação entre as correntes de blindagem e o vórtice nucleado, expelindo-o para as regiões mais frias. Com essa nova configuração, a distribuição de corrente é mudada ao longo do sistema. Por outro lado, para $\kappa = 1$, a interação entre os vórtices e correntes é mais fraca e os vórtices serão aprisionados na região mais quente. Conforme o campo magnético externo aumenta, $\mathbf{J}_s$ na região mais fria aumenta (ver barra de cores na Figura 4.8) blindando-a dos vórtices que permanecem na região mais quente. Para campos acima de $H = 0,307H_{c2}(0)$, a densidade de vórtices é tal que esses passam a penetrar as regiões de menor temperatura, afetando a distribuição de $\mathbf{J}_s$ e, conseqüentemente o módulo de $M(H)$ passa a diminuir (ver Figura 4.6(d)). Em TG1 com $\kappa = 1$, não temos uma grande diferença entre T_l e T_r , e, com isso, a intensidade das correntes de blindagem não se alteram significativamente. Dessa forma, a curva $M(H)$ é similar a sistemas do tipo HS (ver o inset da Figura 4.6(a)).

4.2.3 Discussão dos Resultados

Em conclusão, analisamos amostras, em situações que podem estar em ambientes experimentais com gradiente de temperatura. Dependendo da amostra, ou seja, se o material supercondutor é de baixo ($\kappa = 1$), ou intermediário ($\kappa = 5$) e também das variações de temperatura, a dinâmica de vórtices é alterada de forma que a mesma pode ser detectada em medidas de $M(H)$. Como o gradiente térmico altera a variação local do $|\psi|$, uma adaptação do formalismo apresentado nesse capítulo, seria estudar via simulação numérica filmes supercondutores depositados com diferentes espessuras, formando um cunha. Recentemente, V. N. Gladilin e colaboradores [13] estudaram via TDGL o padrão de penetração de fluxo em um material na forma de cunha que, inclusive, apresenta um comportamento do tipo II no lado menos espesso e do tipo I no mais espesso. Situações como essas são interessantes no estudo de controle e manipulação de fluxo magnético.

Bibliografia

- [1] W. Meissner, Z. ges. Kalte-Ind. **34**, 197 (1927).
- [2] John R. Clem, Phys. Rev. Lett **20** 735 (1968).
- [3] L. Ginzburg, Zh. Ekspo Teor. Fiz. **14**, 177 (1944).
- [4] Yu. M. Gal'perin, V. L. Gurevich and V. I. Kozub, Sov. Phys.-JETP **39**, 680 (1974).
- [5] C. J. Pethick and H. Smith, Phys. Rev. Lett **43** 640 (1979).
- [6] J. Clarke, B. R. Fjordbodge and P. E. Lindelof, Phys. Rev. Lett **43** 642 (1979).
- [7] C. M. Falco, Phys. Rev. Lett. **39**, 660 (1977).
- [8] A. Schmid and G. Schon, Phys. Rev. Lett **43**, 793 (1979).
- [9] J. Clarke and M. Tinkham, Phys. Rev. Lett **44** 106, (1980).
- [10] Ora Entin-Wohlman and R. Orbach, Phys. Rev. B **22** 4271, (1980).
- [11] C. P. Poole Junior *et al.* *Superconductivity*. Elsevier, Amsterdam, 2nd edition, 2007. 670p.
- [12] E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho and W. A. Ortiz, Phys. Rev. B **74** 014512 (2006).
- [13] V. N. Gladilin, J. Ge, J. Gutierrez, M. Timmermans, J. Van de Vondel, J. Tempere, J. T. Devreese and V. V. Moshchalkov, New. J. Phys **17** 063032, (2015).

Capítulo 5

Estado resistivo do movimento de vórtices de Abrikosov

5.1 Introdução

Quando temos a presença de campo magnético externo em supercondutores do tipo II, vórtices de Abrikosov penetram na amostra e o material tem uma transição para o estado misto. Na presença de uma corrente elétrica, os vórtices se movem (considerando a força de Lorentz (FL) maior que a força de *pinning*), e com isso aparece uma voltagem ao longo do supercondutor, caracterizando o estado resistivo. Trabalhos pioneiros nessa área surgiram no começo da primeira metade da década de 1960 e continuaram a ser investigados de uma maneira mais intensa até o começo da segunda metade da década 1970. Em tal período, teorias com fundamentos na mecânica e eletrodinâmica clássica, bem como surgimento das teorias da supercondutividade do não equilíbrio (tanto no aspecto fenomenológico, quanto microscópico) foram amplamente utilizadas para amparar os dados experimentais obtidos em diversos estudos envolvendo ligas metálicas.

Em 1962, J. C. Gorter[1, 2] foi o primeiro a associar o movimento do vórtice devido a ação da força de Lorentz. Contudo, estudos mais detalhados do problema foram feitos por P.W. Anderson no ano seguinte ficando conhecida por teoria de *flux creep* [3]. Nesse regime de fluxo, há o movimento de um agrupamento de vórtices (*bundle*) sobre centros de *pinning* guiados pela FL quando há presença de corrente elétrica e campo magnético. Esse conceito foi desenvolvido levando em conta que um vórtice ao ser aprisionado, precisa da ajuda de outros vórtices para sair do equilíbrio. Assim, tal agrupamento exerce uma força total contra a barreira de *pinning* levando-os ao movimento. A dinâmica desse sistema é regida por dois parâmetros α e B_0 que foram propostos empiricamente anteriormente por Y. B. Kim *et al* [4], os quais são dados por:

$$\alpha = J(H + B_0). \quad (5.1)$$

P. W. Anderson em seu modelo de *flux creep* obteve que $B_0 = \Phi_0/d^2$, onde d é a distância percorrida pelo bundle. Um trabalho experimental elaborado por Kim *et al* para tal estudo foi apresentado em 1963 [5]. Em tal estudo, procurou-se unificar diversos fenômenos envolvendo um “supercondutor duro”(ou *hard superconductor*, do inglês), ou seja, materiais supercondutores com $\kappa \gg 1$ e sob campos magnéticos externos $H_{c1} < H < H_{c2}$. Em tal regime, foram mensurados padrões de voltagem, resistividade e potência dissipada. Foram verificados que o comportamento da voltagem depende da temperatura e a determinação experimental dos parâmetros calculados por P. W. Anderson (B_0). Como resultado, apesar da teoria do *flux creep* concordar muito bem com os experimentos, mostrou algumas questões abertas, como a dependência de α com a voltagem e B_0 com a temperatura. Com isso uma nova proposta para a teoria de *flux creep* foi estruturada por P.W. Anderson e Y. B. Kim em 1964 [6].

O modelo foi estendido de tal maneira a mapear situações envolvendo o estado resistivo, por exemplo, potencia dissipada e variação da temperatura envolvida no processo. Os autores apontaram que haviam problemas remanescente no modelo, por exemplo, melhor entendimento sobre a interação entre os vórtices, interpretações física de B_0 e o estado viscoso. Em casos onde o potencial efetivo de *pinning* não é muito maior que a energia térmica, ou a força de Lorentz é muito maior que a força de *pinning*, podemos considerar que o movimento do vórtice experimenta, efetivamente, apenas uma resistência viscosa devida à interação deste com o mar supercondutor. Em tais condições, temos um regime de *flux flow*. Tal situação é caracterizada com um comportamento linear na voltagem em função de α . Para se discutir tal situação, Y. B. Kim et al mostraram experimentalmente esse comportamento em fios de 3Nb-Zr e introduziram o conceito de diferenciação entre os regimes de *flux creep* e *flux flow* envolvendo a velocidade dos vórtices [7]. Do ponto de vista teórico, utilizando os conceitos de mecânica e eletrodinâmica clássica, foi-se estruturado equações para a velocidade nos diferentes regimes de movimento, dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} v_{flow} &= (b\Phi_0/c)J, \\ v_{creep} &= \omega_0/N \exp \left[\frac{-F_0 + q\alpha}{k_B T} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo $q = \frac{\xi(0)\delta^2 l}{c}$, onde l e δ são a distância entre o centro de ancoramento e o *bundle* e a largura do *bundle*. No qual, $b = 1/\eta_f$, ou seja, é o inverso do coeficiente de viscosidade o qual depende da temperatura e do campo magnético, $\eta_f(H, T)$. Φ_0 é o quantum de fluxo magnético, ω_0 é a frequência angular do *bundle*. N é o número de centros de ancoramento

por unidade de comprimento, $-F_b + q\alpha$ é a diferença entre a energia livre da barreira de ancoramento e do *bundle*. A relação obtida da voltagem em função de α no *flux flow* é:

$$V = (b\Phi_0/c)\alpha = H v_{flow}/c. \quad (5.3)$$

Para valores muito pequenos de α , as amostras apresentaram um comportamento de *flux creep* devido a pinagem de vórtice por defeitos residuais [8]. Por volta de 1964, cresceu o interesse em mapear o estado resistivo durante um regime de *flux flow*. Neste seguimento, A. R. Strnad, C.F. Hempstead e Y.B. Kim mensuraram o valor da resistividade em tal regime (ρ_f), onde ρ_f é obtido em termos da resistividade do estado normal (ρ_n). A relação $\frac{\rho_f}{\rho_n}$ depende do campo magnético e da temperatura, como mostra os seus resultados obtidos [9]. Além do mais, foi mostrada uma relação entre ρ_f e $\eta_f(H, T)$ e duas características importantes merecem destaque: (I) Para $T \ll T_c$, ρ_f aumenta linearmente com o campo magnético; (II) ρ_f exibe um valor não nulo mesmo em $T = 0$ na presença de um campo magnético.

J. Volger, F. A. Staas e A. G. van Vijfeijken consideraram o campo elétrico induzido (que geram correntes normais) nas vizinhanças do vórtice para calcular o coeficiente de viscosidade durante o movimento do vórtice [10]. Por outro lado, M. Tinkham desenvolveu uma proposta alternativa para o cálculo de η_f , que tem como base a contribuição dos elétrons normais (já considerada em trabalhos anteriores, veja Ref.[10, 9]) e da relaxação do parâmetro de ordem (ψ), sendo esse último introduzido pelo próprio Tinkham [11]. O processo de relaxação ocorre da seguinte maneira, temos uma variação de ψ no tempo que ocorre durante o movimento dos vórtices, e assim, este oscila entre um valor máximo ψ_o , e 0 durante um tempo característico, conhecido como tempo de relaxação. A expressão para $\frac{\rho_f}{\rho_n}$ obtida por Tinkham teve uma boa concordância com os dados experimentais de Strnad, Hempstead e Kim [9]. Além do mais, o processo envolvendo a relaxação de ψ tem uma contribuição mais predominante para o cálculo de η_f e consequentemente de $\frac{\rho_f}{\rho_n}$ do que a consideração dos elétrons normais para o caso $H \ll H_{c2}$.

J. Bardeen propôs uma maneira alternativa para obter η_f baseado no campo elétrico envolvido no processo do movimento do vórtice. Primeiramente, apresentou que tal movimento é composto por uma relação entre a velocidade da linha do fluxo (quantum de fluxo) e velocidade dos elétrons supercondutores [12]. Algumas semanas depois, J. Bardeen junto com M.J. Stephen propuseram um campo elétrico adicional que está relacionado com a velocidade dos elétrons supercondutores durante o movimento do vórtice e obtiveram uma expressão de η_f no limite sujo ($l \ll \xi(0)$) e $T \rightarrow T_c$ com o auxílio da teoria GL. Tal expressão é muito próxima da obtida empiricamente na Ref.[9], dada por [13]:

$$\eta_f = a\eta_f^{emp}, \quad (5.4)$$

onde a varia um pouco com a temperatura e com a concentração de impurezas. Entretanto, para região de temperaturas próximas a T_c , $a = 1/2$.

Em agosto de 1965 foi publicado um artigo [14], onde foi feita uma síntese dos trabalhos publicados anteriormente (tanto teóricos, quanto experimentais). Adicionalmente, tal artigo menciona a importância de uma dependência temporal da teoria GLAG (iniciais de Ginzburg, Landau, Abrikosov e Gorkov), para os avanços no estudo do estado resistivo. No mesmo ano, Bardeen e Stephen [15] desenvolveram uma teoria baseada na generalização das equações de London para descrever o movimento dos vórtices, que é conhecido como o modelo local. Em tal modelo, o valor do *gap* é zero no núcleo do vórtice, como mostra a Figura 5.1. As equações de movimento foram derivadas no limite limpo ($l \gg \xi(0)$) e em $T \rightarrow 0$, onde para descrever a estrutura e movimento do vórtice foram utilizadas coordenadas cilíndricas.

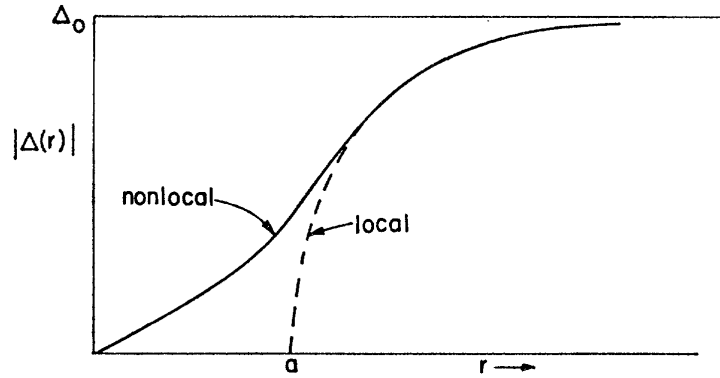


Figura 5.1: Variação do *gap* em função da distância radial a partir do eixo do vórtice para os modelos local e não local. Em $r = a$ temos o raio do núcleo do vórtice [15].

Para se obter o valor do coeficiente de viscosidade, as grandezas físicas como velocidade do vórtice e dissipação foram calculadas dentro e fora do seu núcleo. Assim, as expressões encontradas para η_f concordam com os valores obtidos empiricamente por Kim [14] para as duas situações distintas. A primeira é quando $H \rightarrow H_{c2}$, pois em tal modelo não tem como obter o comportamento do momentum em função do campo magnético. A segunda situação envolve uma condição de $T \rightarrow T_c$ tanto para o limite sujo quanto para o limpo, pois a condutividade pode ser aproximada como a de um metal normal. Por outro lado, no limite sujo ($l \ll \xi(0)$) e/ou no regime $0 < T \ll T_c$ o modelo local não é satisfatório devido a mudanças na densidade do superfluido e no *gap*. Em tal trabalho, os autores também sugerem uma versão completa da teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo para se estudar os movimento dos vórtices no limite sujo.

Em 1966, Albert Schmid [16] apresentou as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) e sua aplicação para o cálculo da resistividade no estado misto. Schmid calculou $\frac{\rho_f}{\rho_n}$ para casos onde $H \rightarrow H_{c2}$ e $H \geq H_{c1}$. Para o primeiro caso, as equações

TDGL foram resolvidas analiticamente, considerando-se $|\psi|^2 \rightarrow 0$ (nesse regime de campo magnético $|\psi|$), e mantendo $\mathbf{A}$ e Φ constantes. Já no segundo caso, utilizou-se um modelo semelhante ao de Bardeen e Stephen, i.e., calculou dissipação devida ao movimento dos vórtices. Todavia, a diferença é que no modelo de Schmid a dissipação advém do teorema da energia livre (veja Capítulo 2). Para ambos os casos, os dados obtidos concordaram com os resultados experimentais [14, 9] para temperaturas $\frac{T}{T_c} \geq 0,6$. Por outro lado, Caroli e Maki foram pioneiros ao apresentar uma teoria microscópica para o estado resistivo em ligas metálicas supercondutoras do tipo II no final da década de 1960 [17, 18]. Eles utilizaram como base seus cálculos realizados anteriormente sobre as flutuações do parâmetro de ordem para o limite limpo e sujo no regime de $H \rightarrow H_{c2}$ [19, 20]. Assim, obtiveram a condutividade do estado resistivo (σ_f) para ambos os casos.

Com o advento da teoria microscópica da supercondutividade do não equilíbrio no final dos anos 1960, as equações TDGL foram derivadas de tal formalismo para o caso de supercondutor com impurezas paramagnéticas (veja a discussão no Capítulo 2). Durante a primeira metade da década de 1970 tivemos diversos estudos envolvendo o regime de *flux flow* em ligas metálicas oriundos de tal derivação e do formalismo microscópico.

Para uma liga supercondutora sem impurezas paramagnéticas e no regime de $H \rightarrow H_{c2}$, R.S. Thompson [21] calculou σ_f levando em conta as excitações devido a condição de não equilíbrio da corrente elétrica (não consideradas em trabalhos anteriores [5, 17, 18]). A expressão obtida por ele foi:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + \frac{4\kappa^2 a^2 L_D(T)}{1, 16(2\kappa_2^2 T - 1) + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right). \quad (5.5)$$

Sendo que $L_D(T)$ a correção feita por R. S. Thompson, que é dada por:

$$L_D(T) = 2 + \rho \left[\psi''(1/2 + \rho) \psi'(1/2 + \rho) \right], \quad (5.6)$$

no qual $a = 1, 20$, ψ'' e ψ' são as derivadas da função psi (que é a derivada logarítmica da função gama [23]) e $\rho = \frac{2eDH}{4\pi T}$, onde D é o coeficiente de difusão. $\kappa_2^2(T)$ é o parâmetro de Ginzburg-Landau generalizado. No caso de $T \rightarrow T_c$, é equivalente ao κ ordinário. Em um estudo envolvendo diversas concentrações de impurezas paramagnéticas e temperaturas no regime de $H \rightarrow H_{c2}$, Baba e Maki [22] calcularam a taxa de variação de ρ_f em relação ao campo magnético ($r(\theta)$), onde mostraram que ($r(\theta)$) decai conforme a temperatura diminui em ligas ordinárias (baixos valores de concentração ou sem impurezas), enquanto que para altos valores de impureza, ($r(\theta)$) cresce conforme a temperatura diminui, como mostra a Figura 2.

Em 1971, R. S. Thompson e C.R. Hu [24] estudaram a dinâmica de vórtices em um supercondutor com alta concentração de impurezas paramagnéticas e mostraram que o

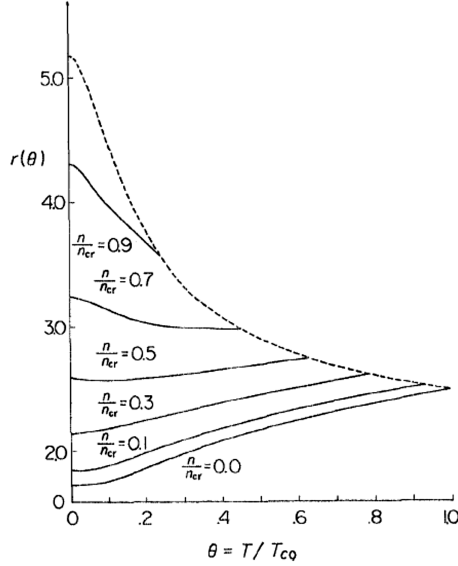


Figura 5.2: Variação de $(r(\theta))$ em função da temperatura para diversas taxas de concentrações de impurezas no regime de $H \rightarrow H_{c2}$ [22].

campo elétrico induzido não é simplesmente proporcional ao campo magnético local, bem como tem-se o surgimento de uma corrente “backflow” (J_b). Neste caso, surge um novo comprimento característico relacionado ao campo elétrico ($\zeta = \frac{\xi}{u}$), que depende da quantidade de impurezas paramagnéticas (controladas pelo parâmetro u). Quando $\zeta = \lambda$ temos um caso particular onde o campo elétrico é proporcional ao campo magnético, todavia, se $\zeta \neq \lambda$ são necessários termos adicionais, o que deixa o cálculo mais complexo. Além do mais, no caso de $\zeta \neq \lambda$, temos o surgimento de J_b , que é uma corrente não dissipativa, e portanto possuindo a característica de uma supercorrente. Tal corrente flui através do núcleo do vórtice e retorna em torno de seu perímetro. Para caso de $H \rightarrow H_{c2}$, as expressões para σ_f e sua taxa de variação com o campo magnético (que foram obtidas por Thompson e Hu) são semelhantes às de Schmid, com exceção do parâmetro ζ , que está ausente no trabalho deste último autor [5].

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + \frac{12\kappa^2}{1,16(2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right), \quad (5.7)$$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 5,17 \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right) \text{ se } \kappa \gg 1.$$

Neste mesmo ano, L. P. Gor’kov e N. B. Kopnin [25] obtiveram expressões para a σ_f e η_f em regime de *flux flow* para um supercondutor com alta e baixa concentração de impurezas paramagnéticas em campos $H \ll H_{c2}$. Para o primeiro caso temos:

$$\begin{aligned}\sigma_f &= 6\Gamma\sigma_n H_{c2}(T)/B, \\ \eta_f &= 6\Gamma\sigma_n H_{c2}\phi_0/c^2,\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde Γ é a densidade de potência dissipada e B é o campo magnético local. Para o segundo caso, os autores demonstraram somente a equação para σ_f , que é dada por:

$$\sigma_f = \frac{a}{2}\Gamma_a\sigma_n v H_{c2}(T)/B,\tag{5.9}$$

onde a é uma constante e $v = \frac{a}{\pi\hbar}\tau_s T_c$, sendo τ_s o tempo médio de entre a colisão dos elétrons com a impureza. Os resultados obtidos tem uma conexão com a relação experimental da Ref.[14]. M.Yu Kupriyanov e K.K. Likharev em 1972 obtiveram expressões para η_f calculando os valores de Γ para ambas as concentrações de impurezas paramagnéticas [26], complementando, assim, o trabalho de L.P. Gor'kov e N.B. Kopnin. Com isso, o valor de Γ para o caso da equação (5.8) é:

$$\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_N = 0,279 + 0,159 = 0,438,\tag{5.10}$$

sendo $\Gamma_R + \Gamma_N$ são respectivamente a densidade de potência dissipada devido a relaxação de ψ e à corrente normal no núcleo do vórtice (não calculado na Ref.[25]). Para o caso de um supercondutor com baixas impurezas paramagnéticas, $\Gamma_a = 0,566$ é conhecido o coeficiente anômalo, os valores obtidos para Γ e η_f são:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_R + v\Gamma_a + \Gamma_N = 0,279 + v0,566 + 0,233, \\ \Gamma &= 0,512 + v0,566, \\ \eta_f &= \frac{a\sigma}{2}\Gamma\phi_0 H_{c2}/c^2.\end{aligned}\tag{5.11}$$

sendo $\Gamma_R + v\Gamma_a$ são energias devidas a relaxação de ψ . Assim, para esse caso, o termo de relaxação tem uma contribuição adicional devido ao termo anômalo. Na equação (5.11), temos que $v \gg 1$, assim $v\Gamma_a$ se superpõe aos demais termos (como é apresentado na equação 5.9) [25].

R. S. Thompson and C. R. Hu publicaram outro um trabalho sobre a dinâmica de vórtices em supercondutores com alta impureza paramagnética, porém abrangendo o regime de $H \ll H_{c2}$ [27]. Tal trabalho é um paralelo do desenvolvido por L. P. Gor'kov e N. B. Kopnin (somente para o caso de alta impureza paramagnética), onde são levadas em contas questões não consideradas pelos últimos autores. Nos cálculos de L. P. Gor'kov e N. B. Kopnin, devido à ausência de um termo no campo elétrico, $\rho_f = 1/\sigma_f$ é duas vezes maior que o encontrado na Ref.[27], ou seja, quando não é considerado o $\Gamma_N = 0,159$ na equação (5.8). Além do mais, R. S. Thompson and C.R. Hu também calcularam J_b para o caso de $H \rightarrow H_{c2}$ (não estudado na Ref.[25]). Em contraste com seu trabalho anterior

(veja Ref.[24]), temos que se $\zeta = \lambda$, o campo elétrico é proporcional ao campo magnético local para todos os κ . Em contrapartida, para J_b ser nulo, temos que além de $\zeta = \lambda$, a condição de $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Um trabalho experimental mensurou a dependência da viscosidade com a temperatura ($\eta_f(T)$) e comparou com os valores obtidos na teoria fenomenológica e microscópica. Tal estudo foi feito utilizando uma liga de Pb-In no limite muito sujo, onde que para baixos valores de campo magnético (porém maiores que H_{c1}), η_f é somente em função da temperatura, pois a distância entre os vórtices é muito maior que $\xi(T)$. Assim, o experimento realizado por N.Ya. Fogel [28] teve um resultado satisfatório para o valor mínimo de η_f , quando comparado com as Refs.[25, 26], por outro lado, tem uma taxa de aumento significativo quando em faixas próximas à T_c . O comportamento de $\eta_f(T)$ teve uma ótima concordância com os modelos fenomenológicos quando são considerados os mecanismos de dissipação devido aos elétrons normais e a relaxação de ψ . Além disso, a medida de ρ_f tem o mesmo comportamento da relação empírica da Ref. [7] para o caso de baixo campo magnético. Em um artigo publicado em 1973 [29], L.P. Gor'kov e N.B. Kopnin estruturam um formalismo teórico em um regime de *flux flow* em ligas supercondutoras sem impurezas paramagnética (conhecidas também como ligas ordinárias) no caso $H \ll H_{c2}$, $\kappa \gg 1$ e em $T \rightarrow T_c$, além disso, citam as contribuições das Refs. [27] e [26] em seu trabalho de 1971. Os valores obtidos para η_f e σ_f são:

$$\begin{aligned}\eta_f &= 1,1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{T}}} \sigma \phi_0 H_{c2}(\tilde{T}) / c^2 \\ \sigma_f &= 1,1 \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{T}}} \frac{\sigma H_{c2}(\tilde{T})}{H}\end{aligned}\tag{5.12}$$

com $\tilde{T} = T/T_c$. Onde verifica-se uma taxa de aumento maior de η_f nas vizinhanças de T_c , como mostrado experimentalmente por Fogel [28].

Uma outra situação onde valores arbitrários de impurezas paramagnéticas em um regime de *flux flow* foi considerada por C.R. Hu e R. S. Thompson em 1973 [30]. Eles usaram uma condição especial na derivação microscópica das equações TDGL. Os autores assumiram a condição de um supercondutor *gapless*, porém a concentração de impurezas foi mensurada através de uma razão entre os tempos τ_s/τ_1 , sendo τ_1 o tempo de espalhamento. Foram obtidos valores para ρ_f em função da temperatura para diversos valores de τ_s/τ_1 , nas condições $H \rightarrow H_{c2}$ e $H \ll H_{c2}$. Os resultados obtidos mostram que a relação empírica para ρ_f (Ref.[14]) não se aplica para um supercondutor *gapless*. Por outro lado, os autores citam a necessidade de dados experimentais na condição de *gapless* como propostas em seu artigo, que é $\tau_s \Delta_0 \ll 1$, onde Δ_0 é o valor de equilíbrio para o parâmetro de ordem na ausência de campos. No mesmo ano, A. I. Larkin e Yu. N. Ovchinnikov, publicaram um trabalho onde calcularam ρ_f para o caso de um supercondu-

tor com baixas impurezas paramagnéticas e para uma liga ordinária no regime $H \rightarrow H_{c2}$ e quando $T \rightarrow T_c$ [31]. Todavia, o cálculo para liga ordinária é considerado no limite $1 \gg 1 - H/H_{c2} \gg 1 - T/T_c$ que não é válido para a equação proposta pela Ref. [21]. Assim, para ambos os casos as equações são dadas respectivamente por (5.13) e (5.14):

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,32 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} \left[\frac{2\kappa^2}{1,16(2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{H}{H_{c2}} \right) \right]^2, \quad (5.13)$$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,18 \frac{1}{\sqrt{(1 - \tilde{T})}} \left[\frac{2\kappa^2}{1,16(2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{H}{H_{c2}} \right) \right]^{3/2}. \quad (5.14)$$

Em 1974, L.P. Gor'kov e N.B. Kopnin apresentaram uma continuidade do seu trabalho anterior (veja Ref.[29]) para determinar η_f e σ_f para o caso de $T \ll T_c$ e $H \ll H_{c2}$ em uma liga ordinária. Os valores encontrados são [33]:

$$\begin{aligned} \eta_f &= \beta(0) \sigma \phi_0 H_{c2}(0)/c^2, \\ \sigma_f &= \beta(0) \frac{\sigma H_{c2}(0)}{B}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

sendo $\beta(0) = 0,9$. Comparando com os dados experimentais da Ref.[14], temos uma boa concordância com a equação obtida empiricamente para o caso $T \rightarrow 0$. Neste mesmo ano, Yu. N. Ovchinnikov mostrou que termos adicionais são necessários para corrigir o cálculo de σ_f para o caso de ligas ordinárias e supercondutor com baixas concentrações de impurezas quando $T \rightarrow T_c$ nos regimes $H \rightarrow H_{c2}$ e $H \ll H_{c2}$ [32]. Essas correções surgem devido ao comportamento não linear de σ_f em relação ao *gap*. Todavia, em uma região bem próxima de T_c , temos respectivamente para ligas ordinárias e supercondutor com baixas concentrações de impurezas, o conjunto de equações 5.12 e 5.14 e 5.9 e 5.13 são satisfeitos sem considerar os termos adicionais.

L.P. Gor'kov e N. B.Kopnin, elaboraram uma revisão [34] com dezenas de trabalhos que foram desenvolvidos, apresentando as teorias envolvidas e os dados experimentais sobre o regime de *flux flow* e o estado resistivo durante o período de 1957 até 1975. Comentam, ainda sobre as dificuldades em se obter σ_f para valores arbitrários de H e T de maneira analítica. E sugerem como uma alternativa, a utilização de métodos numéricos. Apenas para o caso de um supercondutor com grande concentração de impurezas paramagnéticas foi possível obter σ_f para um intervalo completo de temperaturas quando $H \rightarrow H_{c2}$.

Durante um regime de *flux flow*, temos a supressão de ψ na frente do núcleo e uma recuperação do mesmo atrás dele. Todavia, essa dinâmica nem sempre é estável. Estudos envolvendo instabilidades no movimento dos vórtices ficaram conhecidos com a sigla FFI (do inglês, *flux flow instabilities*). Em 1976, Larkin e Ovchinnikov foram os pioneiros em

estudar casos que envolvem instabilidade no movimento do vórtice. Na situação em questão, tal instabilidade é devida a um desvio na função de distribuição das quasipartículas perto do núcleo do vórtice em $T \rightarrow T_c$ [35]. Isso ocorre devido ao longo tempo na energia de relaxação dos elétrons de condução. Tal fenômeno é caracterizado com salto na curva de $V(I)$ quando a velocidade do vórtice atinge um valor crítico, causando um comportamento não linear em σ_f . Isso ocorre para altos e baixos valores de campo magnético em regimes de altas e baixas concentrações de impurezas paramagnéticas. Por outro lado, entre 1973 e 1974 Kramer e Pesch discutiram que no limite limpo em $T \ll T_c$, o núcleo do vórtice diminui proporcionalmente com o decréscimo de temperatura, o que leva a um aumento de ψ e J , devido a estado ligado no núcleo do vórtice. Tal efeito acarreta em uma função logarítmica de σ_f para casos de temperaturas muito baixas [36].

O outro fenômeno ligado à instabilidade no movimento dos vórtices, é uma nova fase dinâmica que surge em um regime de *flux flow* para casos de altas densidades de fluxo. A partir de um certo valor de velocidade em um regime de *flux flow* temos uma distorção espacial no fluxo, que é caracterizada com um comportamento do tipo zig zag da densidade de corrente elétrica em função do campo elétrico [37]. Tal distorção faz com que os vórtices se movimentem com velocidades diferentes na amostra, que é devido a uma diferença entre a força de arrasto e a força de Lorentz. Os autores estruturaram teoricamente o balanceamento entre as forças envolvidas por medidas elétricas em filmes de YBaCuO verificaram a consistência do modelo. Em contraste com a Ref.[35], Milind N. Kunchur mostrou que um regime de instabilidade no movimento dos vórtices pode ocorrer para situações $T \ll T_c$. O fenômeno pode ser descrito por um modelo onde o gás de elétrons é aquecido acima da temperatura de banho térmico devido à dissipação de energia envolvida no processo de movimento dos vórtices. Isso leva a uma geração de quasipartículas e perda na viscosidade conforme temos um aumento no núcleo do vórtice e uma redução em ψ . A instabilidade ocorre quando uma certa temperatura crítica é atingida, ou seja, $T = T^*$ e como consequência temos um comportamento descontínuo da corrente em função do campo elétrico [38]. Tal modelo teve uma boa concordância com medidas elétricas em YBaCuO em $T = 20K$. D. Babic et al, publicaram um trabalho onde realizaram medidas elétricas em micro pontes de NbGe mostrando a não linearidade de $V(I)$ numa situação de FFI [39]. As análises realizadas em situações de $T \rightarrow T_c$, concordam quantitativamente com a teoria de Larkin e Ovchinnikov, enquanto que para $T \ll T_c$ é bem descrita pela ideia do aquecimento dos elétrons proposta por Milind N. Kunchur.

Com o advento dos supercondutores mesoscópicos na década de 1990, simulações numéricas envolvendo as equações TDGL foram intensamente utilizadas para descrever a dinâmica de vórtices em tais sistemas. As características do estado resistivo durante um

regime de *flux flow* foi investigado por alguns autores durante esse período. Neste sentido, D. Y. Vodolazov e F. M. Peeters em 2007 fizeram simulações numéricas via equações GTDGL para verificar o rearranjo na rede de vórtice devido à instabilidades em um regime de *flux flow* [41]. O movimento dos vórtices começa depois de um certo valor de corrente devido à presença da barreira de superfície e, conforme vamos aumentando o valor da corrente elétrica, temos uma transição na rede de vórtice, que começa a se mover em um ordenamento triangular e passa a se organizar em estrutura de fileiras como mostra a Figura 5.3

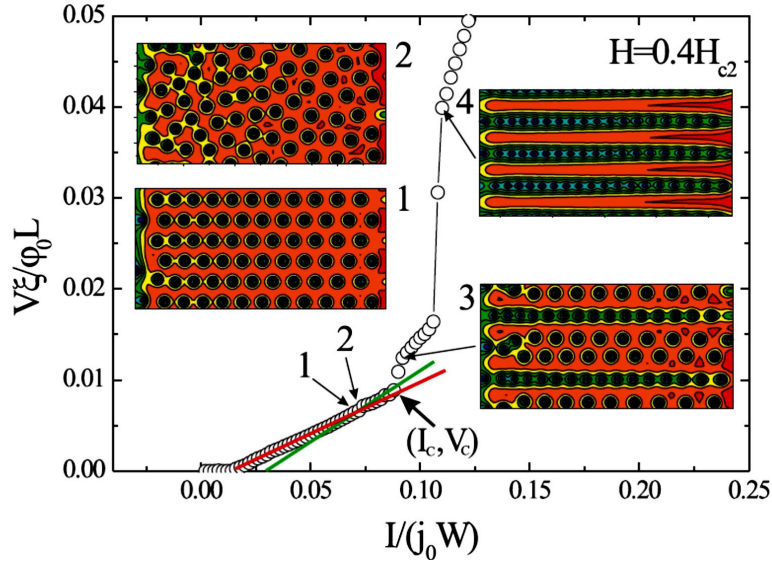


Figura 5.3: Comportamento da voltagem em função da corrente elétrica durante a transição da rede de vórtice triangular para uma estrutura de fileiras durante um regime de *flux flow*. Os *snapshots* indicam o $|\psi|$ para diferentes regiões da curva $V \times I$ [41]. A intersecção das retas vermelha e verde indicam o ponto no qual ocorre o início do processo de rearranjo dos vórtices.

Tal transição é caracterizada como uma descontinuidade no comportamento da voltagem em função da corrente. Nas diversas fileiras de vórtices temos a coexistência de um movimento lento e rápido (que forma uma *quasi-phase slip line*, PSL). Na região da PSL a corrente supercondutora decai com um comprimento L_E dado pela equação:

$$L_E = \sqrt{\gamma/u\xi}, \quad (5.16)$$

onde γ é um parâmetro referente ao *gap* do supercondutor. Aumentando γ , diminuimos o valor do campo magnético externo para o qual ocorre a coexistência de um movimento lento e rápido de vórtices. Além do mais, L_E é modificado, porém não é observado nenhuma distribuição irregular de vórtices. Para um supercondutor *gapless*, não foi observado transições de um movimento dos vórtices, i.e., lento para rápido (PSL) e mudanças

na estrutura dos vórtices. Isso se deve às alterações no cálculo da relaxação de ψ para um supercondutor *gap* e *gapless*, que é dada pela equação:

$$\tau_{|\psi|} = u\tau_{GL}\sqrt{(1 + \gamma^2|\psi|^2)}. \quad (5.17)$$

Assim, para $\gamma = 0$, $\tau_{|\psi|}$ não depende de $|\psi|^2$.

A Ref. [42] também aborda situações em envolvendo a transição de movimento lento para PSL via simulação numérica utilizando as equações GTDGL aplicadas em supercondutores mesoscópicos. Conforme há o aumento da corrente elétrica, os vórtices nucleados vão se organizando e movendo-se em fileiras, quando a corrente atinge um valor crítico, forma-se diversas PSL uma paralela a outra deixando a amostra em um estado altamente resistivo.

Em 2014, pesquisadores brasileiros P. Sánchez-Lotero e J. Albino Aguiar em parceria com o argentino D. Domínguez, notaram que o comportamento da relação ρ_f/B_m , sendo B_m o campo de indução magnético médio não seguia um valor constante para um regime mesoscópico (para amostras muito pequenas) como o relatado em um macroscópico [43]. Isso se deve à forte influência dos efeitos de confinamento, que atua sobre o regime de *flux flow*. Como observado na Ref. [41], encontraram pequenos saltos no campo elétrico induzido em função da corrente elétrica aplicada. Evidenciando um aumento na velocidade do vórtice ao atingir o valor crítico.

Com o surgimento dos supercondutores pnictídeos (contendo átomos de ferro, Fe-SC) e dos de multi bandas (que também podem ser de Fe-SC) no começo do século XXI, estudos envolvendo movimento de vórtice foram realizados para essa nova classe de materiais. De maneira geral, a resistividade de *flux flow*, ρ_f , apresenta o seguinte comportamento quando $H \ll H_{c2}$, dada por:

$$\frac{\rho_f}{\rho_n} = \alpha \frac{H}{H_{c2}}. \quad (5.18)$$

Para supercondutores convencionais temos que $\alpha = 0,93$ e Fe-SC $\alpha \geq 1$. T. Okada et al, mostraram recentemente que o excesso de átomos Fe em uma amostra de FeSeTe pode causar uma queda no valor de α e conseqüentemente decair o valor de ρ_f [40].

Mihail Silaev e Artjom Vargunin, em um artigo publicado em 2016, apresentaram os cálculos de σ_f para supercondutores de multi bandas utilizando a generalização da teoria microscópica do não equilíbrio [44]. O formalismo teórico é derivado no limite sujo e baseia-se em um supercondutor com grande concentração de impurezas paramagnéticas, onde, segundo os autores, é apropriado para certos materiais como o MgB_2 , como mostra o formalismo microscópico elaborado por de A. Gurevich para um supercondutor de duas bandas no limite sujo [45]. A taxa de variação da condutividade no estado resistivo em relação ao campo magnético ($S = H_{c2}/\sigma_n \frac{d\sigma_f}{dB}$) foi calculada para um supercondutor

com duas bandas. Na situação onde $H \rightarrow H_{c2}$, o comportamento de S em função da temperatura se difere do caso de supercondutores de uma banda, pois S também depende da relação de difusão $\left(d = \frac{D_2}{D_1}\right)$ entre as duas bandas. Para o caso de uma liga ordinária, no regime $H \ll H_{c2}$ e $T \ll T_c$, foi mostrada que o valor de β (que é equivalente a 0,9 para o caso de uma banda, veja equação 5.15) se altera em relação ao parâmetro d . O valor máximo encontrado para β é bem próximo de $\beta(0)$ obtido por Gor'kov e Kopnin. Assim, ajustando o valor de d pode-se obter valores de σ_f próximos aos supercondutores de uma banda.

5.2 Resultados

O estado resistivo durante o movimento de vórtices de Abrikosov tem sido amplamente estudado desde o início da década de 1960. Todavia, temos poucos trabalhos na literatura que tratam sobre os processos dissipativos que surgem em tal estado. Apesar de se conhecer a natureza dos mecanismos de dissipação bem como a influência de cada um desses no cálculo da viscosidade e consequentemente da resistividade (ver discussão na seção 5.1). Tampouco conhece-se a quais parâmetros os mecanismos de dissipação são sensíveis e como esses afetam o processo de difusão térmica. Em nossa proposta, fizemos um mapeamento mais detalhado de toda a conjuntura que envolve o estado resistivo. Assim, analisamos diversos parâmetros que alteram as propriedades da supercondutividade de não equilíbrio, com ênfase no processo de difusão térmica.

5.2.1 Influência de impurezas e efeitos de confinamento no estado resistivo

Nosso objetivo foi estudar as características do estado resistivo durante a primeira penetração de vórtices para um supercondutor mesoscópico do tipo II submetido a um campo magnético externo homogêneo. Fizemos simulações numérica para amostras quadradas com tamanho lateral variando de $L = 20\xi(0)$ até $L = 100\xi(0)$. Para tal fim, utilizamos o conjunto de equações discretizados no capítulo 3. Em todas as simulações, nossa malha numérica possuiu a resolução $\Delta x = \Delta y = 0,1\xi(0)$, $\kappa = 5$ e a temperatura de banho térmico $T_0 = 0,93T_c$. O campo magnético externo foi variado a passos de $\Delta H = 10^{-3}H_{c2}(0)$ e o coeficiente de transferência de calor sendo $\eta = 2 \times 10^{-4}$ cuja a intensidade é equivalente a uma taxa de remoção de calor intermediária, como discutido na Ref. [46].

Focamos nossas análises em limites de grandes e pequenas amostras mesoscópicas. A potência dissipada foi analisada durante a primeira penetração de vórtice para os seguintes valores u : 12, 5,79 e 1. Os dois primeiros surgem na derivação microscópica das equações

de Ginzburg-Landau dependentes do tempo. Já o último, é quando consideramos $\tau_{|\psi|} = \tau_{GL}$, para $\gamma = 0$ (ver a equação 5.17). Na Figura 5.4 são mostradas as curvas das potências dissipadas médias para os mecanismos $\langle W_A \rangle$ e $\langle W_\psi \rangle$ em função do tempo.

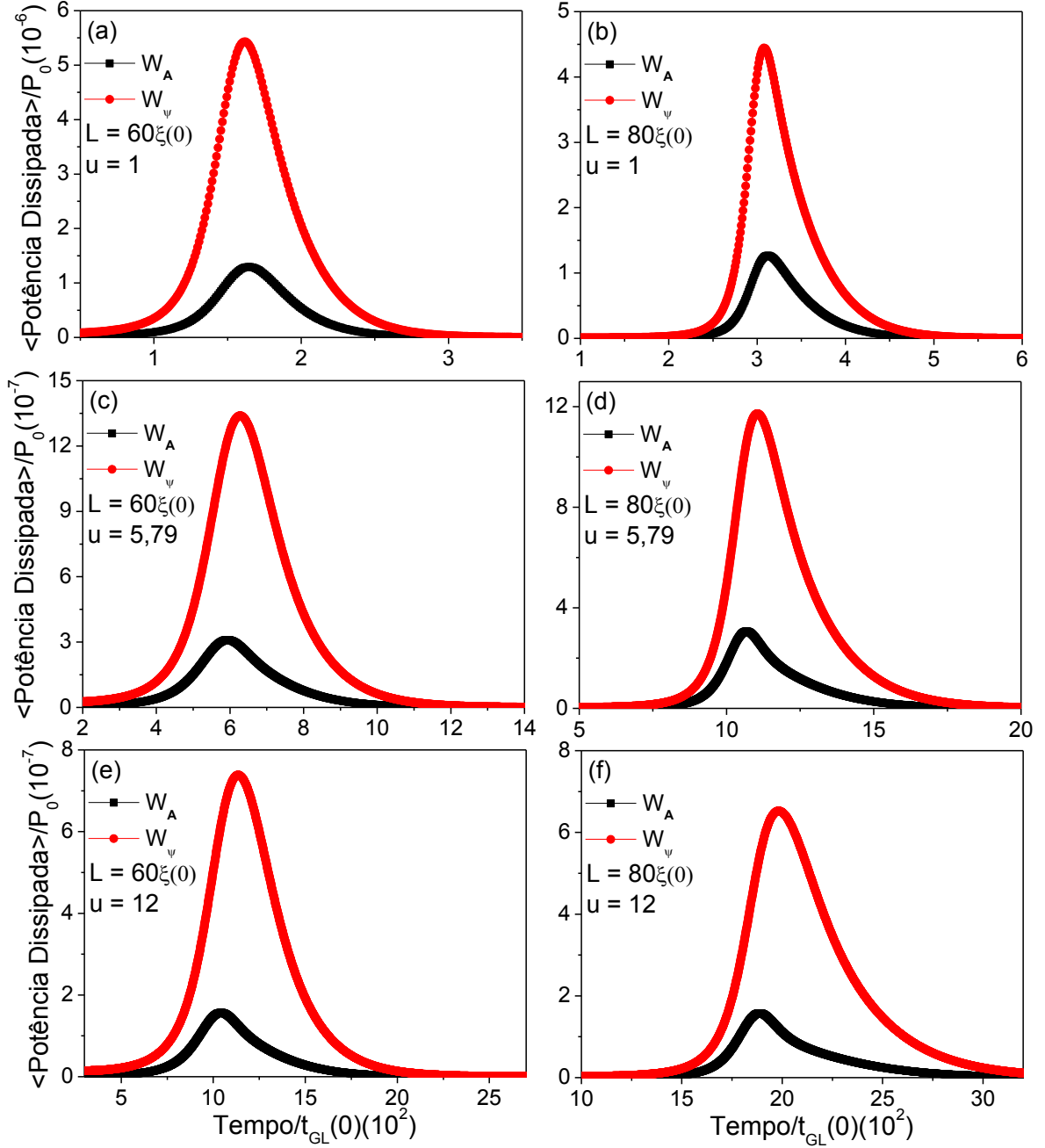


Figura 5.4: Densidade de potência dissipada média em função do tempo para diversos valores de u em $T_0 = 0,93T_c$, sendo (a), (b) e (c) para o tamanho $L = 60\xi(0)$ e (d), (e) e (f) para $L = 80\xi(0)$.

Como se pode notar, o valor de u tem um papel determinante para a contribuição dos dois tipos de mecanismos de dissipação, i.e., W_A e W_ψ . Qualitativamente, todos os valores de u apresentam o mesmo comportamento para ambos os tipos de potência dissipada. Todavia, em uma análise quantitativa, podemos notar uma mudança significativa para os

diferentes valores de u . Apesar de termos a penetração de quatro vórtices para os tamanhos $L = 60\xi(0)$ e $L = 80\xi(0)$, nota-se um tempo maior para o equilíbrio ser alcançado para $L = 80\xi(0)$, isso deve-se a uma menor interação entre os vórtices. Na Figura 5.5 são mostrados os valores de máximo local de W_A , W_ψ e W_{total} (o valor máximo da potência dissipada total para um certo instante de tempo) em função do tamanho lateral das amostras. Podemos observar que W_A e W_ψ e (consequentemente W_{total}) aumentam com o crescimento de L . Isso é devido a uma menor influência dos efeitos de confinamento e, consequentemente da interação entre os vórtices. Na faixa $40\xi(0) \leq L \leq 80\xi(0)$, a vorticidade é a mesma. Entretanto, apesar dos efeitos de confinamento em $L = 20\xi(0)$ serem maiores que em $L = 40\xi(0)$, esta última possui o dobro de vórtices. Assim, a repulsão intensa entre eles que se superpõe a diminuição dos efeitos de confinamento (devido ao aumento de L), que leva a um decréscimo na intensidade de W_A , W_ψ e W_{total} . Para ilustrar a dinâmica de penetração, a Figura 5.6 mostra os *snapshots* para algumas das amostras simuladas.

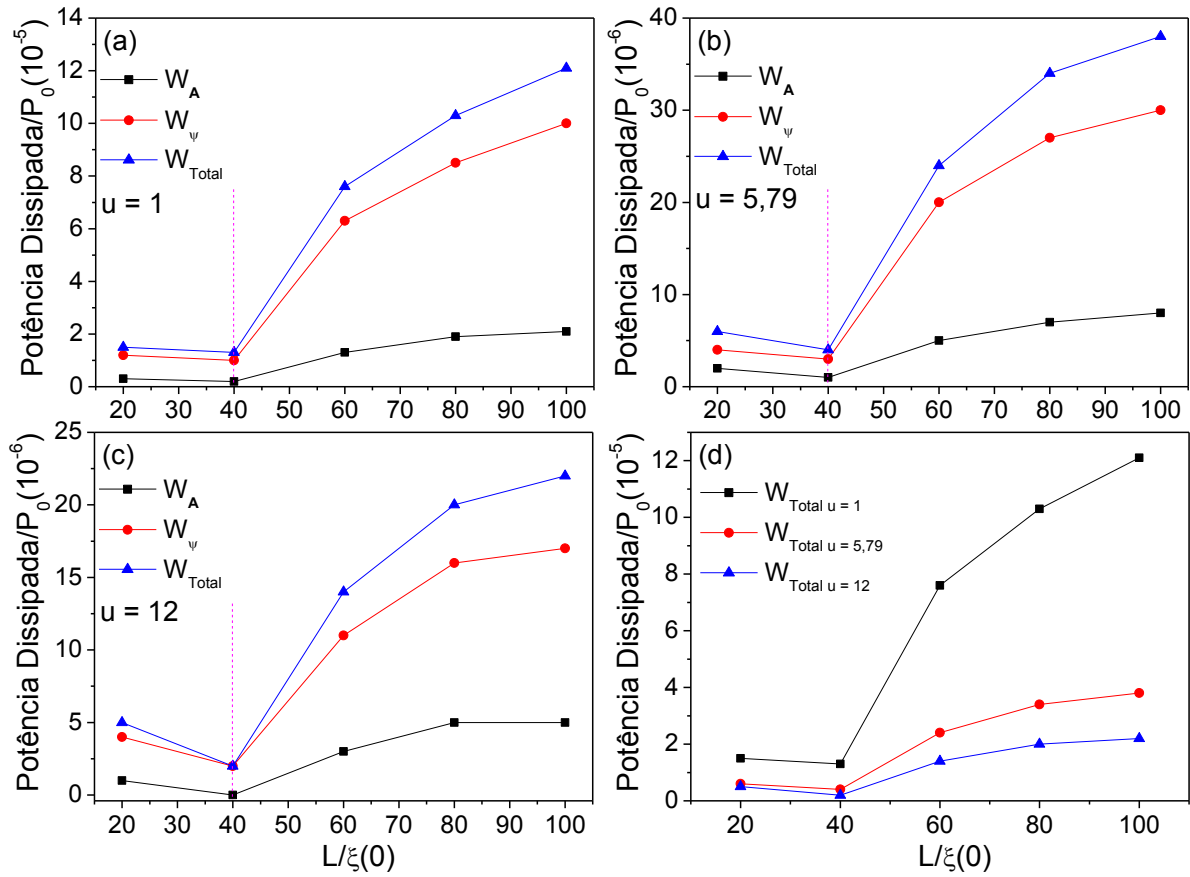


Figura 5.5: Densidade de potência dissipada máxima local em um determinado instante de tempo para diversos valores de u em função do tamanho lateral L em $T_0 = 0,93T_c$.

Por outro lado, notamos uma tendência de saturação quando ultrapassa-se a transição do regime meso-para-macroscópico (que ocorre por volta de $L = 80\xi(0)$ para $T_0 = 0,93T_c$)

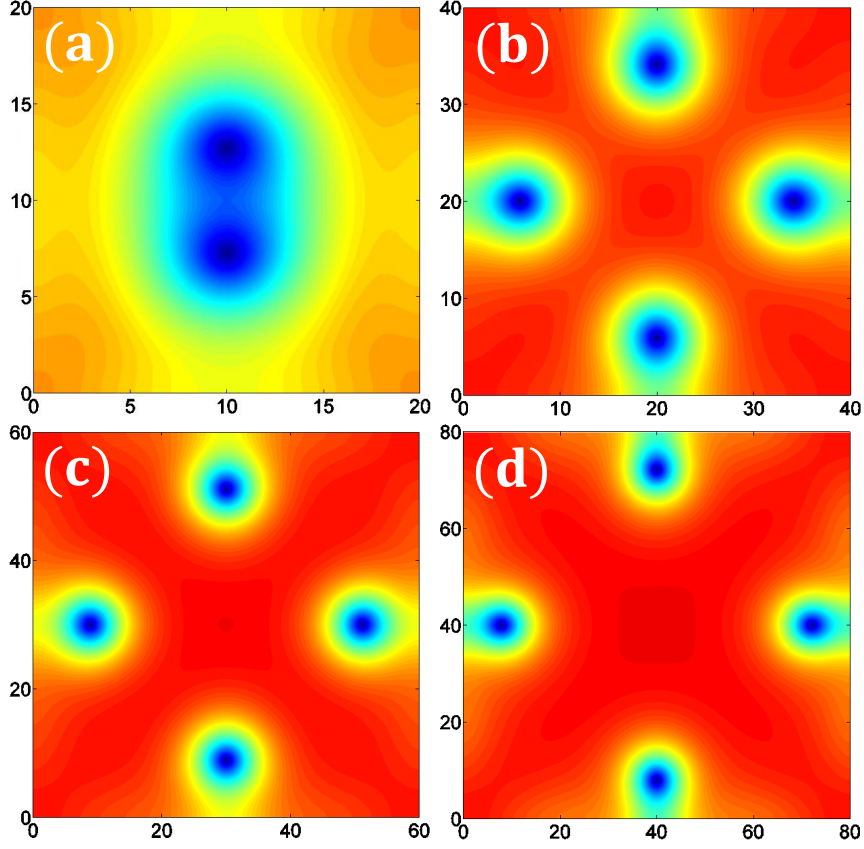


Figura 5.6: *Snapshots* ilustrando a dinâmica de penetração de vórtices para diversos tamanhos laterais L em $T_0 = 0,93T_c$.

como é descrito na Ref. [47]. Considerando a potência dissipada total, $W_{total} = W_{\mathbf{A}} + W_{\psi}$, podemos notar que para $20\xi(0) \geq L \leq 40\xi(0)$ tem-se que $W_{total}^{u=5,79} \simeq W_{total}^{u=12}$. Isso ocorre devido às fundamentações teóricas em comum que envolvem tais valores de u . Em ambos os casos, o supercondutor está no limite sujo porém, um devido a um “deparing fraco” e o outro forte, respectivamente e que surgem na derivação microscópica das equações TDGL, como discutimos no Capítulo 2.

Durante o processo de nucleação dos vórtices até o equilíbrio, analisamos o comportamento da magnetização e da voltagem durante esse estado metaestável, que são mostradas na Figura 5.7. Apesar do número de vórtices que entram na amostra ser o mesmo, ou seja, independem do valor de u , o valor máximo da voltagem sofre grandes alterações. Contudo, seu aspecto qualitativo permanece o mesmo para os três valores de u . Por outro lado, não temos uma diferença significativa no comportamento da magnetização em função do tempo, ou seja, tal grandeza não é sensível aos valores de u , apenas nota-se que o estado de equilíbrio demora um tempo maior para ser atingido conforme aumenta-se o valor de u .

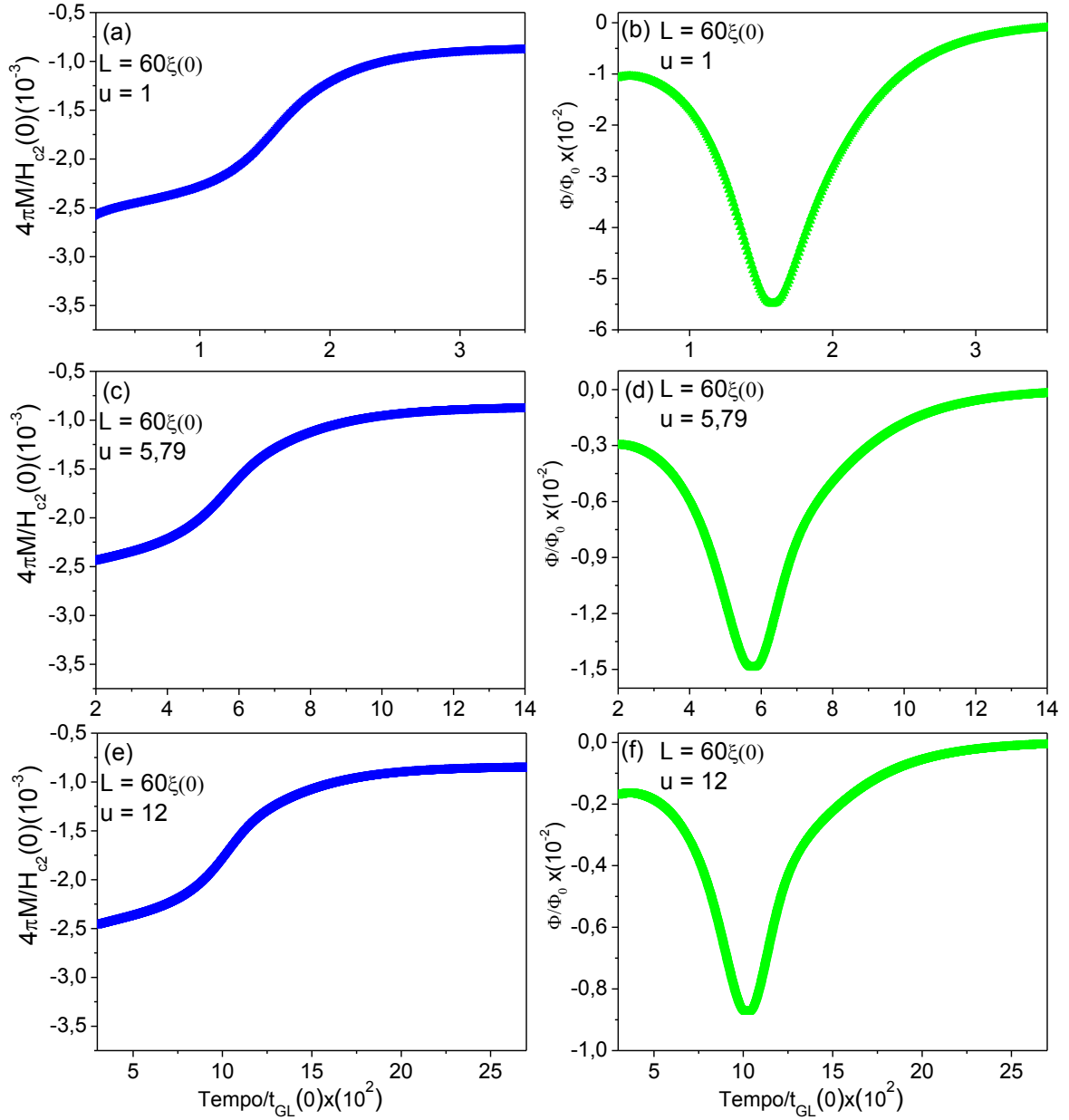


Figura 5.7: Magnetização e voltagem em função do tempo durante a penetração de vórtices para diversos valores de u .

5.2.2 Estado resistivo durante o movimento de um vórtice em um supercondutor *gapless*

Para monitorar de uma maneira mais detalhada os mecanismos de dissipação durante o movimento de um vórtice, utilizamos uma amostra supercondutora quadrada com um buraco (antidot, AD) em seu centro com tamanhos laterais L e w respectivamente, como ilustrado na Figura 8. Assim, aplicamos um campo magnético externo em passos $\Delta H = 10^{-3}H_{c2}(0)$ até que dois vórtices entrassem na amostra e fossem aprisionados no AD central (Figura 5.8(b)). Depois diminuimos o campo a passos de $\Delta H = -10^{-3}H_{c2}(0)$ até

que um dos vórtices deixe a amostra (Figura 5.8(c)). É durante essa dinâmica que fizemos o estudo da cinética envolvida neste processo de não equilíbrio para um supercondutor *gapless*.

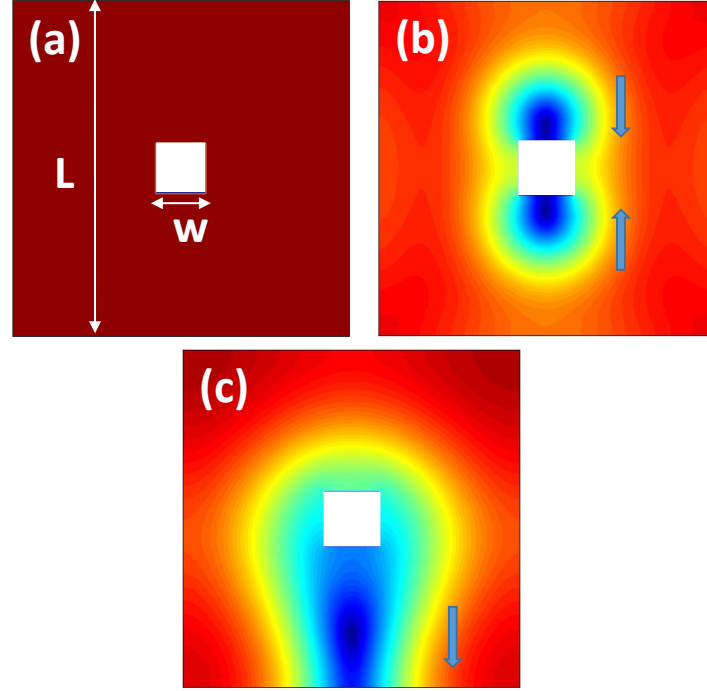


Figura 5.8: Dinâmica das amostras simuladas para fazer um mapeamento dos mecanismos de dissipação durante o movimento de um vórtice. (a) Amostra no estado Meissner com AD central (em branco); (b) os vórtices são aprisionados no AD central; (c) Com o decréscimo do campo magnético externo, um dos vórtices deixa a amostra. As regiões (vermelho/azul escuro) são regiões nas quais $|\psi|$ é (máximo/nulo).

A Figura 5.9 mostra o máximo local de $W_{\mathbf{A}}$, W_{ψ} e W_{total} em função da velocidade média do vórtice. Para fazer esse monitoramento das velocidades, variamos os valores de L e w , onde, do lado esquerdo da linha tracejada azul, alteramos o valor de L e mantivemos fixo $w = 4\xi(0)$, já à direita da linha, utilizamos $w = 6\xi(0)$. De maneira geral, notamos que ambos mecanismos de dissipação aumentam em função da velocidade do vórtice para um dado valor de w . Por outro lado, notamos que na transição de $w = 4\xi(0)$ para $w = 6\xi(0)$ somente $W_{\mathbf{A}}$ aumentou (em uma taxa muito baixa) com o aumento da velocidade. Assim, W_{ψ} é sensível tanto à velocidade do vórtice quanto às características da amostra, que apesar da velocidade aumentar, foi notado um grande decréscimo quando alteramos o valor de w . Os *snapshots* na Figura 5.10 mostram que quando alteramos o tamanho w , mantendo fixo $L = 26\xi(0)$, (que corresponde à velocidade que intercepta com a linha azul na Figura 5.9), apesar da velocidade do vórtice aumentar para o AD maior, o núcleo do vórtice torna-se mais oval. Como efeito, tal mudança afeta o processo de relaxação do parâmetro de ordem (veja Figura 5.10 coluna da direita) e consequentemente W_{ψ} .

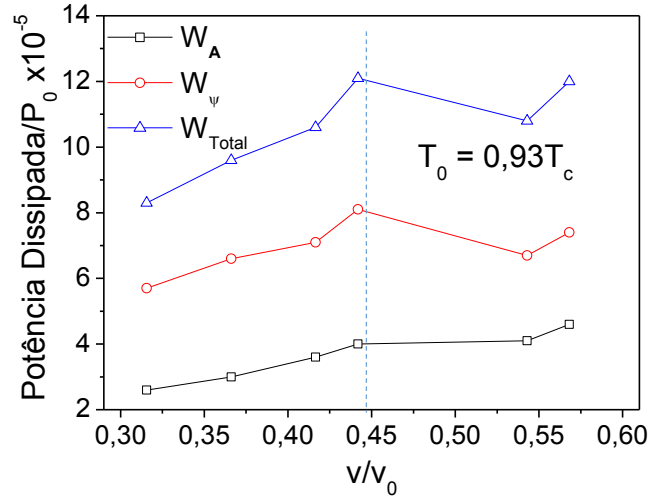


Figura 5.9: Densidade de potência local máxima dissipada em um determinado instante de tempo em função da velocidade média. A linha pontilhada delimita as velocidades obtidas para sistemas com $w = 4\xi(0)$ e $w = 6\xi(0)$ que estão à esquerda e à direita respectivamente.

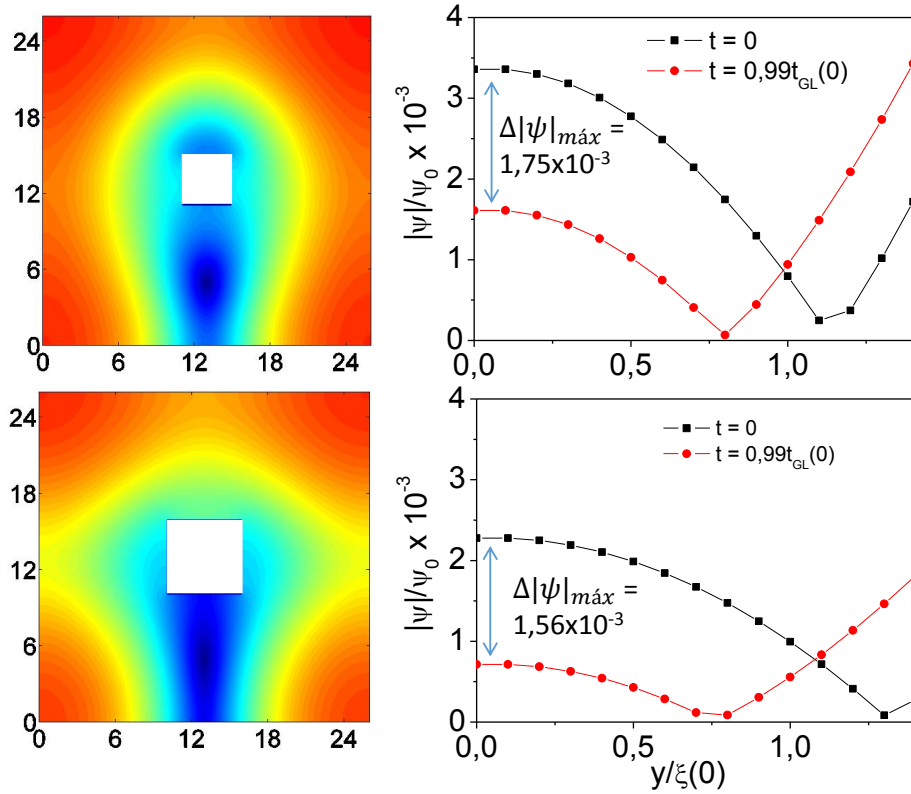


Figura 5.10: Os *snapshots* ilustrando a mudança na estrutura do vórtice para a amostra $L = 26\xi(0)$ com $w = 4\xi(0)$ e $w = 6\xi(0)$. Com o núcleo se situando a uma distância de $y = 5,05\xi(0)$ a partir da borda inferior para ambos os casos. Os gráficos (a) e (b) mostram as oscilações do $|\psi|$ passando pelo núcleo do vórtice em instantes antes de deixar a amostra para $w = 4\xi(0)$ e $w = 6\xi(0)$ em $x = 13\xi(0)$.

Na Figura 5.11 mostramos os *snapshots* para os mecanismos de dissipação e o mapa da variação espacial da temperatura ($\Delta T = T - T_0$) para o caso em que obtivemos o maior valor de W_{total} . A região na qual temos as maiores intensidades para W_A , W_ψ e ΔT ocorrem nas proximidades da borda inferior, região na qual o vórtice deixa a amostra, onde sua velocidade é máxima.

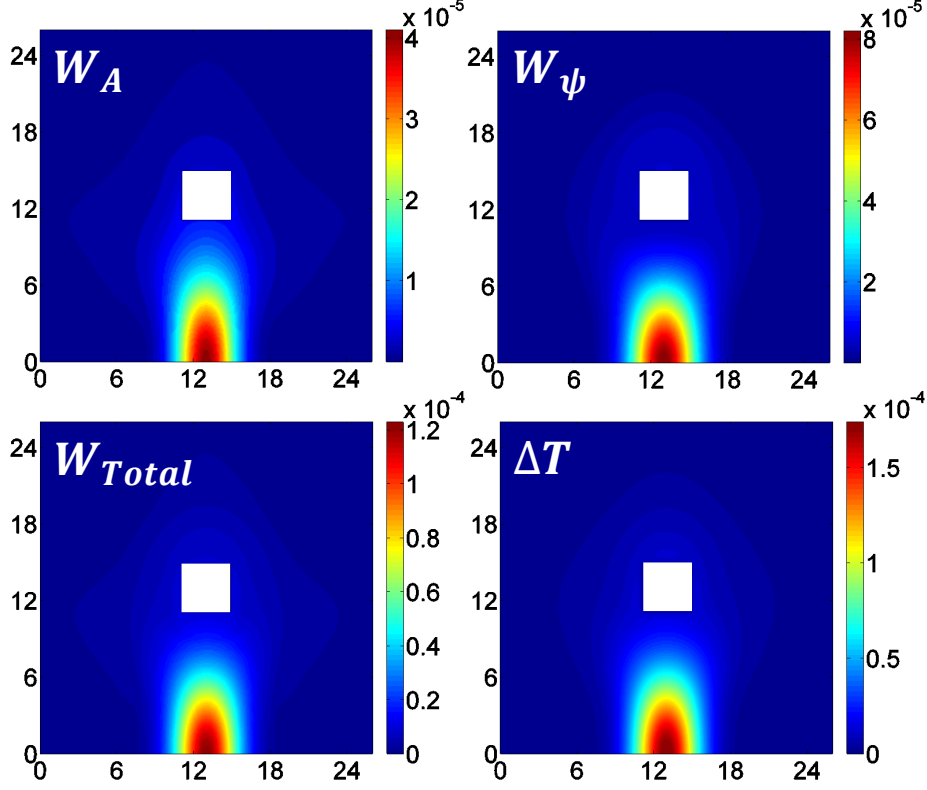


Figura 5.11: Os *snapshots* mostram a distribuição espacial e a intensidade máxima para W_A , W_ψ , W_{total} e ΔT para amostra $L = 26\xi(0)$ com $w = 4\xi(0)$.

5.2.3 Estado resistivo durante o movimento de um vórtice em um supercondutor com *gap*

Nesta sessão estudamos de uma maneira mais detalhada os mecanismos de dissipação durante o movimento de um vórtice para um supercondutor com *gap* utilizando o mesmo esquema apresentado na sessão anterior, ou seja, com a dinâmica ilustrada pela Figura 5.4 e mantendo $T_0 = 0,93T_c$. Neste caso, em um primeiro momento, mantivemos fixos os valores de $L = 26\xi(0)$ e $w = 4\xi(0)$. A Figura 5.12(a) e (b) mostram os valores $\langle W_A \rangle$, $\langle W_\psi \rangle$ e $\langle W_\gamma \rangle$ para $\gamma = 4$ e $\gamma = 14$. Tais valores de γ foram escolhidos pelo fato de querermos analisar o comportamento dos mecanismos de dissipação de 1 vórtice ao deixar o AD. Já que 2 vórtices se movendo dificulta a análise dos resultados. Assim, notamos que para $\gamma > 14$ os dois vórtices deixam o AD simultaneamente, ou seja, γ também

influencia no aprisionamento de vórtices. Pelo que podemos notar (com base na equação 5.17), o tempo de relaxação do sistema aumenta com o aumento de γ , que leva a uma diminuição na eficiência do ancoramento de vórtices. Tal fenômeno necessita de um estudo mais detalhado, que pretendemos realizar futuramente. Pela curva da potência dissipada média em função do tempo, observamos que $\langle W_\gamma \rangle$ aumenta em função do γ , enquanto que $\langle W_\psi \rangle$ decai, todavia $\langle W_A \rangle$ manteve-se praticamente estável, apresentando um leve decréscimo em seu valor de pico. Nota-se, ainda, que $\langle W_\psi \rangle$ diminui drasticamente com o aumento de γ . Por outro lado, quando olhamos o máximo local da potência dissipada (mostrado pela 5.12 (c)), percebemos um outro cenário. Apesar de $\langle W_\psi \rangle$ ter um valor inferior ao de $\langle W_A \rangle$ e $\langle W_\gamma \rangle$ no caso de $\gamma = 14$, temos que seu máximo local é superior ao dos demais mecanismos de dissipação. Entretanto, sua intensidade continua caindo com o aumento de γ . W_A tem seu máximo local praticamente constante, enquanto que W_γ aumenta. Contudo, o aumento de W_γ não supera o decréscimo de W_ψ . Assim, W_{total} também decresce com o aumento de γ . A Figura 5.13 mostra os *snapshots* para os três mecanismos de dissipação, W_{total} e ΔT para ambos os valores de γ (4 e 14).

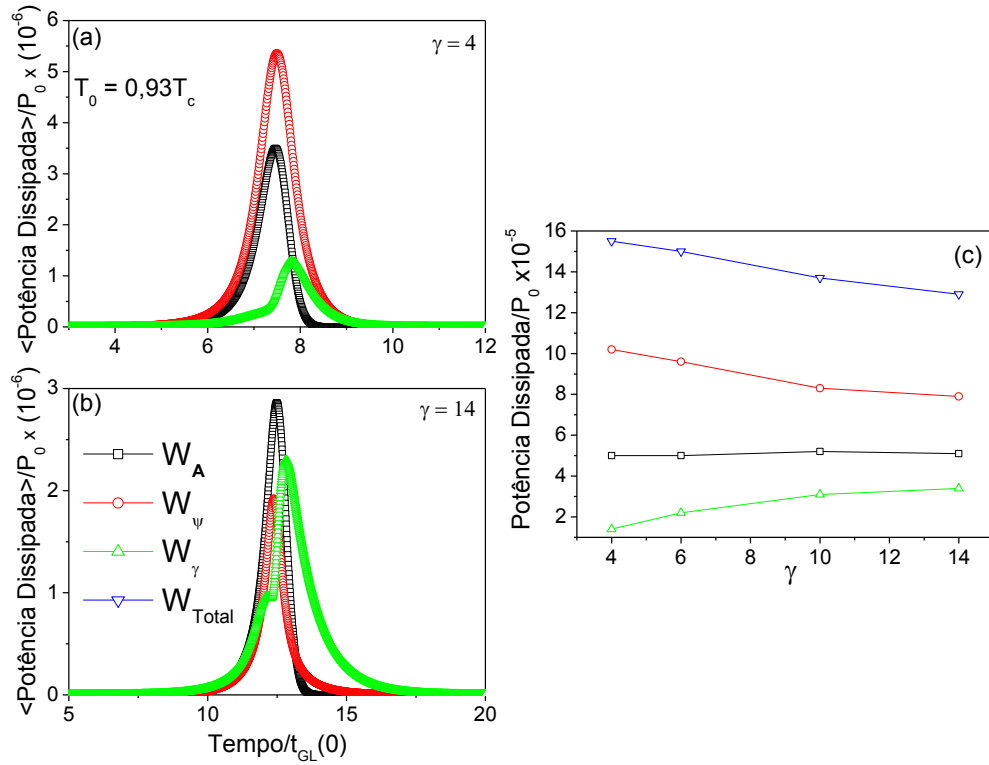


Figura 5.12: Densidade de potência dissipada média em função do tempo para (a) $\gamma = 4$ e (b) $\gamma = 14$. Em (c) temos Densidade de potência dissipada máxima local em um determinado instante de tempo em função de γ .

Analisando o comportamento das potências em função da velocidade do vórtice para γ fixo, temos que W_A e W_ψ aumentam consideravelmente com o aumento da velocidade. Por outro lado, W_γ permanece praticamente constante, tendo um aumento extrema-

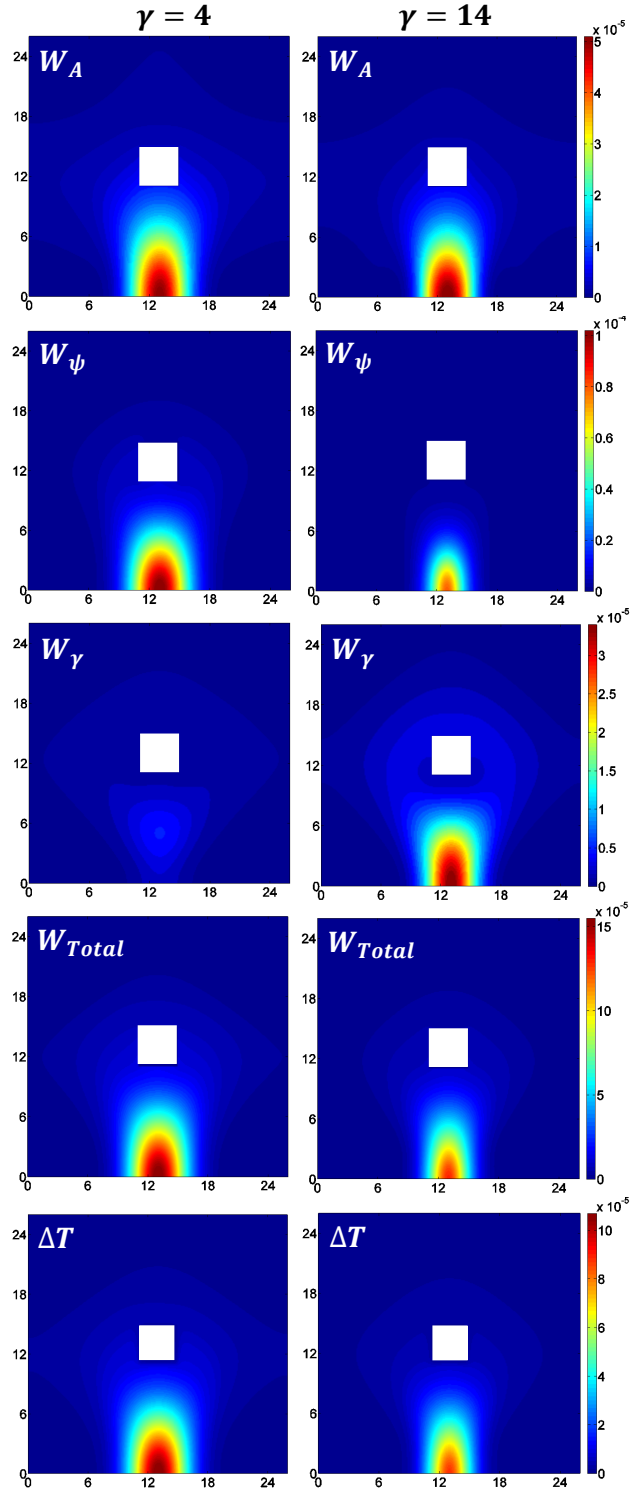


Figura 5.13: Comparação entre os mecanismos de dissipação, W_{total} e ΔT para os valores de $\gamma = 4$ e $\gamma = 14$.

mente baixo (veja a Figura 5.14 (a)). Como mostra a Figura 5.14 (b), a velocidade decai com o aumento do γ . Porém, entre os mecanismos de dissipação somente W_ψ decresce com o decréscimo na velocidade decorrente da variação de γ (ver Figura 5.12 (c)). W_A

não apresenta mudanças consideráveis quando a velocidade muda devido à variação de γ . W_γ não é sensível às mudanças de velocidade mesmo para o caso de γ fixo.

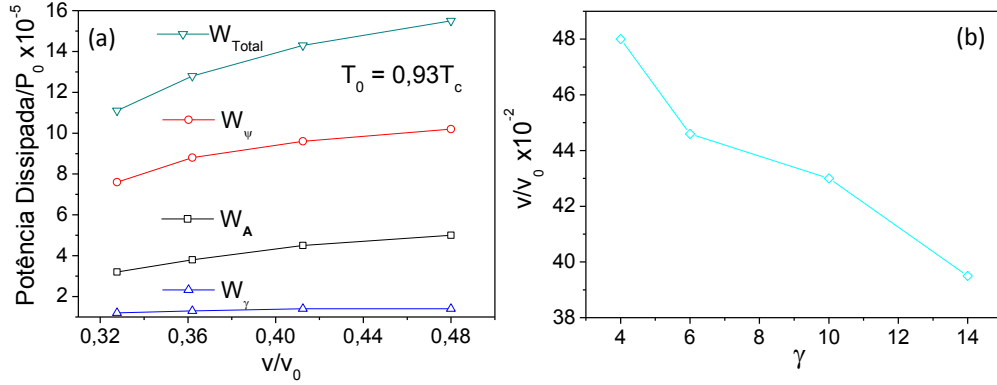


Figura 5.14: (a) Variações nos mecanismos de dissipação e W_{total} em função da velocidade para $\gamma = 4$; (b) Velocidade do vórtice instantes antes de deixar a amostra em função de γ para a amostra $L = 26\xi(0)$ e $w = 4\xi(0)$.

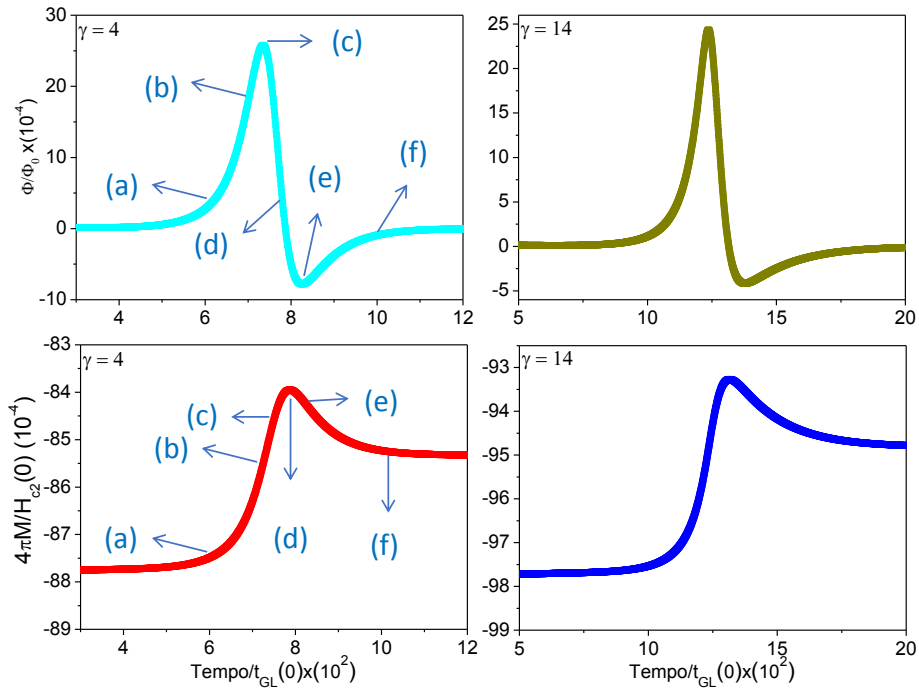


Figura 5.15: Comportamento da magnetização e da voltagem em função do tempo para os valores de $\gamma = 4$ e $\gamma = 14$.

Todavia, W_γ tende a aumentar/diminuir conforme γ aumenta/diminui. Em contrapartida, quando γ aumenta/diminui a velocidade diminui/aumenta (compare as Figuras 5.12 (c) e 5.14 (b)). Isso ocorre devido W_γ ter uma dependência com γ^2 (ver equação (3.144)), que o deixa praticamente independente das variações da velocidade do vórtice. O comportamento das curvas $M \times t$ e $V \times t$ durante o processo de saída do vórtice não apresentam

mudanças qualitativas em função do γ , como mostra a Figura 5.15. O instante no qual é atingido o valor de pico na magnetização é o mesmo em que ocorre a inversão do sinal na voltagem, ou seja, de uma resposta positiva para uma negativa. Na Figura 5.16 são exibidos os *snapshots* da dinâmica envolvida no processo, onde fizemos um mapeamento para diversos instantes de tempo indicados por setas na Figura 5.15. Assim, o primeiro pico na voltagem (Φ) ocorre em instantes antes do vórtice deixar a amostra (ver Figura 5.16 (c)), e o da magnetização ocorre em instantes depois. Há a inversão do sinal da voltagem, que ocorre quando o vórtice deixa completamente a amostra, conforme mostra a Figura 5.16 (d). Por fim, o valor de pico negativo na voltagem ocorre quando temos uma recuperação do estado supercondutor, i.e., de $|\psi|$ na região que havia ficado destruída ou bastante depreciada durante o movimento do vórtice.

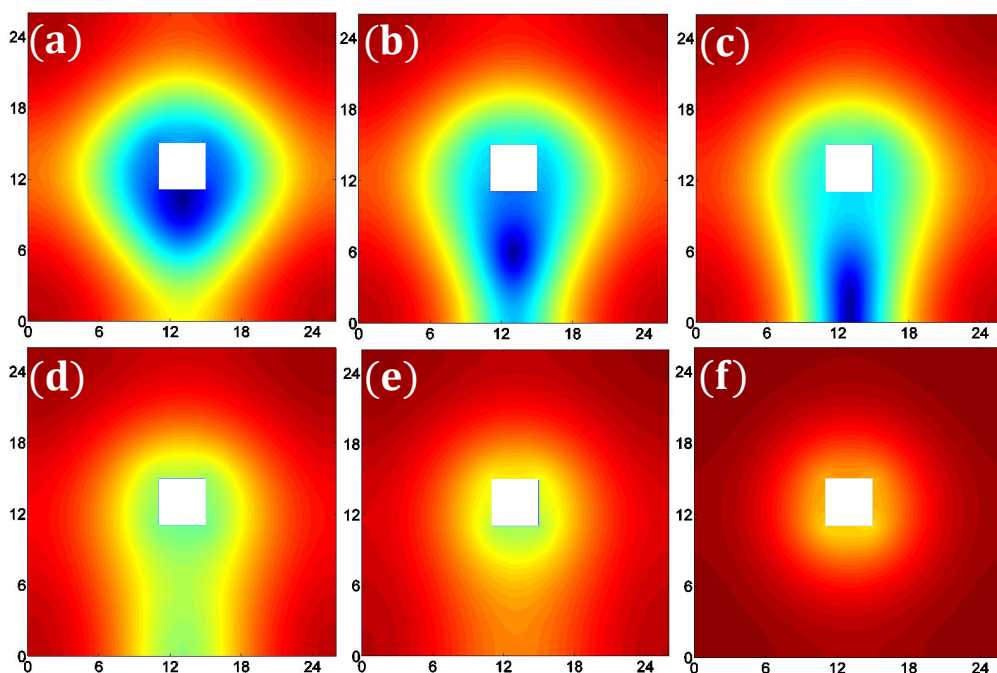


Figura 5.16: *Snapshots* do $|\psi|$ mostram a dinâmica de vórtice para os instantes de tempo indicados na Figura 5.15.

5.2.4 Discussão dos Resultados

O mapeamento que fizemos do estado resistivo em um supercondutor *gapless* mostra que os mecanismos de dissipação e a voltagem sofrem grandes mudanças quantitativas em função do parâmetro u . Todavia, o mesmo não ocorre com a oscilação da magnetização, que apresenta mudanças bem sutis. Anteriormente, D. Y. Vodolazov e F. M. Peeters verificaram alterações no processo de relaxação de $|\psi|$ para diversos valores de u [48]. Cabe ressaltar que para um supercondutor ser *gapless* de fato, temos que ter $\gamma = 0$ e $u = 12$. Assim, para o limite limpo ou com poucas impurezas paramagnéticas, apresentam uma

grande divergência para W_A , W_ψ e Φ mesmo para casos de pequenos valores de L . Por outro lado, há uma concordância razoável dos valores de W_{total} para situações com poucas e grandes concentrações de impurezas paramagnéticas para $20\xi(0) \leq L \leq 40\xi(0)$, que são caracterizadas com os valores de $u = 5,79$ e $u = 12$. Para casos envolvendo um tratamento mais qualitativo do estado resistivo e dinâmica de vórtice, $u = 1$ (que é um valor muito utilizado na literatura) oferecem uma boa concordância com os dados experimentais [49].

Com exceção de W_γ , todos os mecanismos de dissipação são sensíveis às mudanças de velocidade do vórtice, tanto em supercondutores *gap* quanto nos *gapless*. W_ψ e W_γ apresentaram grandes mudanças em relação a fatores como o valor de γ e a estrutura do vórtice (formato do núcleo) no meio supercondutor. Na Figura 5.17 mostramos uma comparação entre W_{total} e ΔT no regime *gapless* e com *gap* para a amostra $L = 26\xi(0)$ e $w = 4\xi(0)$. Apesar de W_{total} no regime com *gap* ser maior que para o caso *gapless*, ΔT possui uma intensidade maior para supercondutores *gapless*. Isso ocorre devido aos valores de C_{eff} e K_{eff} , que também dependem do valor de u . Assim, quando determinamos a solução numérica da equação de difusão (ver Capítulo 3, equação (3.150)), temos que a intensidade de ΔT aumenta proporcionalmente com u para um determinado valor de W_{total} . Utilizando a relação $\frac{u_{gapless}}{u_{gap}} = 12/5,79 = 2,0725$, obtemos que $W_{total}^{gap} > 2,0725 W_{total}^{gapless}$ para $\Delta T_{gap} > \Delta T_{gapless}$.

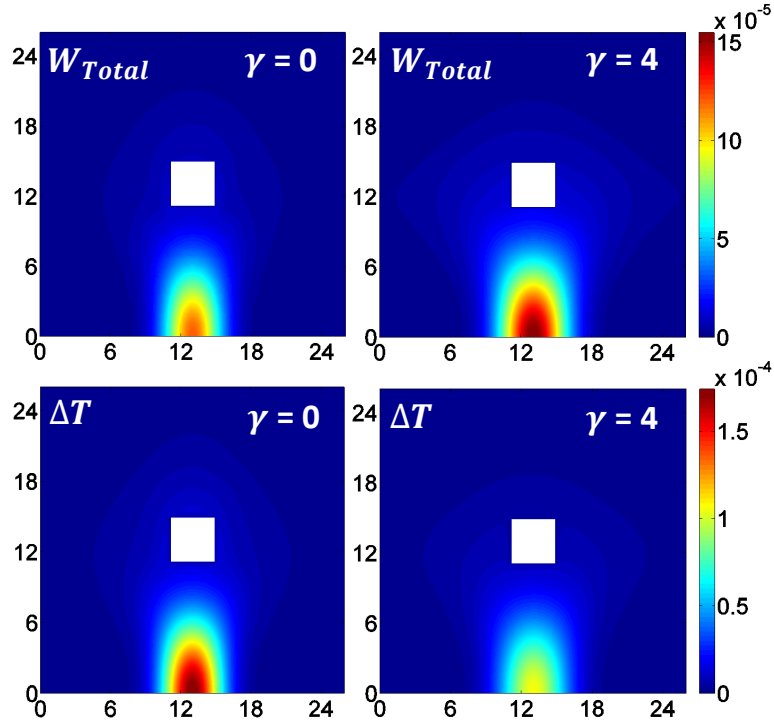


Figura 5.17: Comparação entre W_{total} e ΔT para um supercondutor *gap* ($\gamma = 4$) e *gapless* ($\gamma = 0$) para amostra $L = 26\xi(0)$ com $w = 4\xi(0)$.

Para todos os casos estudados, W_ψ é o principal mecanismo de dissipação durante a dinâmica de um vórtice. Sendo assim, tem fundamental importância para o cálculo de ΔT . Outros trabalhos teóricos também mostraram que a maior parte da densidade de potência total em uma dinâmica de vórtices no regime $H \ll H_{c2}$ é devido a processos de relaxação do parâmetro de ordem [25, 26].

M. Yu Kupriyanov e K. K. Likharev mostraram que $\frac{\Gamma_R}{\Gamma_N} = 1,7547$, é uma razão entre os processos envolvendo elétrons normais e relaxação para um supercondutor *gapless*. Em nosso caso, obtivemos variações no intervalo de $1,608 < \frac{W_\psi}{W_A} < 2,193$ para os sistemas simulados. Comparando a variação da velocidade do vórtice (Δv) com os diferentes mecanismos de dissipação para casos onde W_ψ não se altera devido ao “alongamento do núcleo do vórtice” (linha pontilhada da Figura 5.8), temos que, quando $\Delta v = 28\%$, há um aumento de W_A e W_ψ em 35% e 29,6% respectivamente.

Analisando para o cenário de um supercondutor com *gap* para $\gamma = 4$, obtemos uma faixa de $2,04 < \frac{W_\psi}{W_A} < 2,375$. Neste caso, podemos diminuir/aumentar os limites inferiores e superiores do intervalo com o aumento/diminuição do valor de γ , pois demonstramos que isso afeta fortemente W_ψ . Obtivemos $\Delta v = 31,73\%$ nas amostra simuladas. Assim, as variações de W_A e W_ψ são 36% e 25,5% respectivamente. Note, a taxa de variação de W_ψ em relação à velocidade do vórtice é menor que no supercondutor *gapless*.

Temos poucos trabalhos que comparam as medidas experimentais de viscosidade devido ao movimento de vórtices em um regime $H \ll H_{c2}$ com as obtidas teoricamente, no qual as potências dissipadas tem um papel central (como discutimos anteriormente). Destacam-se os trabalhos de N.Ya. Fogel e V. N. Gubankov [28, 50], que mostraram que o valor da viscosidade quando consideramos somente elétrons normais é muito menor do que o verificado experimentalmente. Todavia, quando a potência dissipada devida à relaxação é também considerada, temos uma boa concordância com o valor experimental [28]. Para o caso de filmes finos com baixas concentrações de impurezas paramagnéticas, o processo envolvendo a relaxação é também o principal mecanismo de dissipação [51]. S. J. Poon e K. M. Wong mostraram que, por medidas de resistividade em materiais “bulk” de Zr_3Ni e Zr_3Rh para o caso $H \ll H_{c2}$ que, utilizando apenas um mecanismo de dissipação, não é possível obter uma concordância com o experimento. Porém, quando todos os mecanismos são levados em conta, temos uma excelente concordância com o experimento. Assim, contribuições dos termos de relaxação (que são os mais dissipativos) e das correntes normais tem uma grande concordância com o caso experimental para os seguintes intervalos de temperatura $0,66T_c < T_0 < 0,95T_c$ [52, 53]. Por outro lado, nossos cálculos dos mecanismos de dissipação advém do teorema da energia livre e seguem as verificações experimentais aqui apresentadas, que utilizaram como base o formalismo teórico das Refs. [25, 26] ou os modelos propostos por Bardeen-Stephen e Tinkham.

Nos casos de W_{total} , os valores obtidos de ΔT são da ordem de $10^{-4}T_c$ e podem ser mensurados com nanoSQUIDs tal como foi recentemente demonstrado por Halbertal e colaboradores [54]. Assim, tal técnica nos revela em qual região do mar supercondutor ocorreu o movimento do vórtice. No regime $H \ll H_{c2}$, mostramos que W_ψ tem um papel central para a contribuição de W_{total} e consequentemente ΔT . Portanto, temos que a velocidade do vórtice e o formato do supercondutor nanoestruturado são parâmetros importantes para a obtenção de maiores valores de W_ψ . Para um supercondutor com *gap*, temos adicionalmente o parâmetro γ , onde menores valores de γ levam a maiores intensidades de W_ψ .

O formalismo teórico apresentado poderia ser aplicado futuramente para descrever devidamente os processos de dissipação e difusão térmica em dispositivos supercondutores tais como *single photon detectors*, *fluxonic cellular automata* [55, 56], ou *vortex random access memory* [57], onde o controle de dissipação durante o movimento de vórtice é um ingrediente essencial para uma performance confiável, pois o aumento local de temperatura contribui para a degradação do estado supercondutor, afetando por exemplo, parâmetros como corrente e campo magnético crítico.

Bibliografia

- [1] J. C. Gorter, Phys. Letters **1**, 69 (1962).
- [2] J. C. Gorter, Phys. Letters **2**, 26 (1962).
- [3] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett **9**, 309 (1962).
- [4] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, Phys. Rev. Lett **9**, 306 (1962).
- [5] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, Phys. Rev. **131**, 2486 (1963).
- [6] P.W. Anderson and Y.B. Kim, Rev. of Mod. Phys **36**, 39 (1964).
- [7] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, Rev. Mod. Phys. **36**, 43 (1964).
- [8] C. F. Hempstead and Y. B. Kim, Phys. Rev.Letters **12**, 145 (1964).
- [9] A.R. Strnad, C. F. Hempstead and Y.B. Kim, Phys. Rev. Lett **13**, 794 (1964).
- [10] J. Volger, F. A. Staas and A. G. van Vijfeijken, Phys. Letters **9**, 303 (1964).
- [11] M. Tinkham, Phys. Rev. Lett. **13**, 804 (1964).
- [12] J. Bardeen, Phys. Rev. Letters **13**, 747 (1964).
- [13] M. J. Stephen e J. Bardeen, Phys. Rev. Lett. **14**, 112 (1965).
- [14] Y.B. Kim, C. F. Hempstead and A. R. Strnad, Phys. Rev. **139**, A1163 (1965).
- [15] J. Bardeen and M. J. Stephen, Phys. Rev. **140**, A1197 (1965).
- [16] A. Schmid, Kond. Mat. Phys **5**, 302 (1966).
- [17] C. Caroli e K. Maki, Phys. Rev. **164**, 591 (1967).
- [18] K. Maki J. of Low Temp. Phys **1**, 45 (1969).
- [19] C. Caroli and K. Maki, Phys. Rev. **159**, 306 (1967).
- [20] C. Caroli e K. Maki, Phys. Rev. **159**, 316 (1967).

- [21] R. S. Thompson, Phys. Rev. B **1**, 327 (1970).
- [22] Baba and K. Maki, Progr. Theor. Phys. **44**, 1431 (1970).
- [23] J. B. NETO. *Matemática para Físicos: com aplicações* Volume II. Editora livraria da Física, São Paulo, 1^a edição. 2010
- [24] R.S. Thompson and C. R. Hu, Phys. Rev. Letters **27**, 1352 (1971).
- [25] L. P. Gor'kov and N. B. Kopnin, Sov. Phys. JETP **33**, 1251 (1971).
- [26] M. Yu. Kupriyanov and K. K. Likharev ZhETF Pis. Red. **15**, 349 (1972).
- [27] C. R. Hu and R.S. Thompson, Phys. Rev. B **6**, 110 (1972).
- [28] N.Ya. Fogel, Sov. Phys. JETP **36**, 725 (1973).
- [29] L. P. Gor'kov and N.B. Kopnin, Sov. Phys. JETP **37**, 183 (1973).
- [30] C. R. Hu and R.S. Thompson, Phys. Rev. Lett **31**, 217 (1973).
- [31] I . A. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **37**, 557 (1973).
- [32] Yu. N. Ovchinnikov, **38**, 143 (1974).
- [33] L. P. Gor'kov and N. B. Kopnin, Sov. Phys. JETP **38**, 195 (1974).
- [34] L. P. Gor'kov and N. B. Kopnin, Sov. Phys. Usp **18**, 496 (1976).
- [35] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **41**, 960 (1976).
- [36] S. G. Doettinger, R. P. Huebener, and S. Kittelberger, Phys. Rev.B **55**, 6044 (1997).
- [37] M. N. Kunchur, B. I. Ivlev, and J. M. Knight, Phys. Rev. B **66**, 060505 (2002).
- [38] M. N. Kunchur, Phys. Rev. Lett. **89**, 137005 (2002).
- [39] D. Babic, J. Bentner, C. Surgers, and C. Strunk, Phys. Rev. B **69**, 092510 (2004).
- [40] T. Okada, F. Nabeshima, H. Takahashi, Y. Imai, and A. Maeda, Phys. Rev. B **91**, 054510 (2015).
- [41] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **76**, 014521 (2007).
- [42] G. R. Berdiyorov, A. K. Elmurodov, F. M. Peeters and D. Y. Vodolazov, Phys. Rev. B **79**, 174506 (2009).
- [43] P. Sánchez-Lotero, J. Albino Aguiar, D. Domínguez Physica C **503**, 120 (2014).

- [44] Mihail Silaev and Artjom Vargunin, Phys. Rev. B **94**, 224506 (2016).
- [45] A. Gurevich, Phys. Rev. B **67**, 184515 (2003).
- [46] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. B **71**, 184502 (2005).
- [47] R. Zadorosny, E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho and W. A. Ortiz, Phys. Rev. B **85**, 214511 (2012).
- [48] D. Y. Vodolazov and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **66**, 054537 (2002).
- [49] G. R. Berdiyorov, X. C. Chao, F. M. Peeters, H. B. Wang, V. V. Moshchalkov and B. Y. Zhu, Phys. Rev. B **86** 224504 (2012).
- [50] V. N. Gubankov, Sov. Phys. Solid State **14**, 2264 (1973).
- [51] T. Takayama, J. of Low. Temp. Phys **27**, 359 (1977).
- [52] S. J. Poon and K. M. Wong, Phys. Rev. B **27**, 6985 (1983).
- [53] S. J. Poon and K. M. Wong, J. of Low. Temp. Phys **54**, 15 (1984).
- [54] D. Halbertal et al, Nature, **539**, 407 (2016).
- [55] M. V. Milosēvić, G. R. Berdiyorov and F. M. Peeters, Appy. Phys. Lett, **21**, 2501 (2007).
- [56] M. V. Milosēvić, G. R. Berdiyorov and F. M. Peeters, Appy. Phys. Lett, **96**, 192501 (2010).
- [57] T. Golod, A. Iovan and V. M. Krasnov, Nat Comm, **6**, 8628 (2015).

Capítulo 6

Estabilidade e dinâmica de pares de vórtice e antivórtice de Abrikosov

6.1 Introdução

6.1.1 Formação e estabilidade de estruturas V-AV

As ideias envolvendo a possibilidade de haver estruturas de vórtice (V) e antivórtice (AV) em supercondutores começaram a florescer no fim da década de 1970. Porém, foi a partir do advento dos supercondutores mesoscópicos, e principalmente no século XXI, que tais estruturas foram investigadas extensivamente. Durante a primeira década de 2000, a maioria dos trabalhos focou em abordar as formas de produzir estruturas V-AV bem como propiciar condições para a sua estabilidade. Por outro lado, nos últimos 10 anos a dinâmica de V-AV ganhou destaque, onde os estudos foram voltados para formas de manipular essa dinâmica, obter os valores de campo magnético e a corrente crítica, bem como caracterizar o seu estado resistivo. Esse fenômeno de V-AV ocorre de maneira geral em situações onde temos a matéria de vórtice confinada, como em superfluidos e condensados de Bose-Einstein. M. R. Beasley, J. E. Mooij e T. P. Orlando abordaram a possibilidade de dissociação de um sistema de vórtice-antivórtice (V-AV) em filmes muito finos supercondutores, baseados na ideia de Kosterlitz e Thouless apresentada em 1973 para o caso de um filme de hélio superfluido [1]. A proposta mostra que um sistema de V-AV pode estar ligado para o limite de baixa temperaturas e se separar quando a temperatura for maior que um certo valor crítico, (T_{KT}), que leva as iniciais dos físicos Kosterlitz e Thouless.

V-AV induzidos pela simetria

Em certas condições podemos ter a presença de V-AV de Abrikosov no estado misto. Um trabalho pioneiro de L. F. Chibotaru *et.al* [2] publicado no ano 2000, mostrou que

um sistema V-AV pode surgir induzido pela geometria da amostra. Resolvendo a equação de Ginzburg-Landau linearizada (que só podem ser aplicada em na região muito próxima da interface supercondutor/normal), mostraram que antivórtices podem ser formados em um supercondutor mesoscópico como meio de preservar a simetria da amostra no arranjo do estado de vórtices, ou seja, dependendo do formato da amostra (quadrada, triangular, circular) os vórtices se organizam de tal forma a seguir sua geometria. Isso é uma característica dos efeitos de confinamento que surgem na escala mesoscópica. Assim, para tal situação, vórtices ou antivórtices adicionais são requeridos. Além do mais, essas formações também conservam a vorticidade total (L_v). Dadas tais condições, os valores possíveis para a vorticidade são dados pela seguinte equação:

$$L_v = n + 4m. \quad (6.1)$$

onde $n = 0, 1, 2, -1$ é a quantidade de vórtice ou antivórtice (sinal negativo) no centro da amostra e $m = 0$ ou 1 indica se teremos ou não vórtices nas quatro diagonais para o caso de um supercondutor mesoscópico quadrado. Em outro artigo publicado no ano seguinte, L.F. Chibotaru et.al verificaram tanto experimentalmente como através da solução da equação de Ginzburg-Landau linearizada a formação de V-AV induzida pela simetria em uma amostra triangular [3]. Para esse caso, os valores possíveis para a vorticidade são dados por:

$$L_v = n + 3m. \quad (6.2)$$

onde $n = 0, 1$ e -1 é a quantidade de vórtice ou antivórtice no centro do triângulo e $m = 0$ ou 1 indica se teremos ou não vórtice em cada um dos vértices.

Dois anos depois do trabalho de L. F. Chibotaru et.al [3], em uma amostra quadrada, A. S. Melnikov e colaboradores realizaram uma simulação numérica utilizando as equações TDGL para tal geometria. Eles também obtiveram uma configuração de quatro vórtices na diagonal e um antivórtice no centro [4]. As condições encontradas para tal configuração foi a mesma que em [3], i.e., sistemas extremamente pequenos e campo magnético externo próximo de H_{c3} . Além do mais, mostraram que um pequeno defeito na borda do supercondutor interfere na estabilidade da molécula de V-AV, podendo resultar na aniquilação do antivórtice com um dos quatro vórtices.

Em 2003, V. R. Misko et al propuseram uma nova forma para estabilizar um estados de V-AV em supercondutores mesoscópicos de simetria triangular [5]. Tal proposta é a estabilidade de vórtice-antivórtice em um supercondutor mesoscópico do tipo I, pois nessa classe de materiais a interação de um sistema de V-AV é repulsiva para o caso onde a distância é maior que o tamanho do vórtice (ou antivórtice). Para descrever tal fenômeno, os autores utilizaram as equações GL em sua versão não linear, que possibilitam uma validade da teoria mais longe da interface supercondutor/normal. A configuração

de três vórtices situados entre o centro e o vértices do triângulo e um antivórtice no centro, garante a estabilidade termodinâmica (i.e., energeticamente favorável, exibindo um mínimo na energia livre) da molécula V-AV. Tal configuração é possível ser obtida para uma faixa de $\kappa < 0,707$. Por outro lado, para altos κ temos estado de vórtices gigante no centro. Dependendo do valor para baixos κ , podemos ter duas situações, ou os vórtices são expulsos ou não penetraram no sistema (comportamento de uma amostra bulk do tipo I).

T. Mertelj and V. V. Kabanov analisaram uma situação de estabilidade de V-AV para caso $L = 4 - 1$, ou seja, um vórtice em cada vértice e um antivórtice no centro para o caso de um supercondutor quadrado baseado nos resultados obtidos por L.F. Chibotaru et.al. [6]. Os autores construíram diagramas de fase para diversos valores de $\kappa \geq 1$ mostrando regiões possíveis para $L = 4 - 1$. Diferentemente do que ocorre na Ref. [5], a estratégia de utilizar um supercondutor do tipo I para uma melhor estabilidade de uma molécula de V-AV parece não funcionar para o caso de uma geometria quadrada, pois a distância do vórtice e do antivórtice diminui conforme o valor de κ fica menor. Assim, os autores acreditam que essa estabilidade não seja possível.

Pouco mais de uma década após o trabalho de L.F Chibataru, L.F. Zhang e colaboradores encontraram uma condição de estabilidade para o caso V-AV $L = 4 - 1$ induzido pela simetria de uma amostra muito pequena, onde os efeitos quânticos de confinamento tornam-se evidentes [7]. Para tais fins, utilizaram as equações de Bogulibov-de Gennes (BdG), pois cobrem os efeitos de confinamentos quânticos que surgem em uma amostra que possui um tamanho da ordem de um comprimento de onda de Fermi. Em tal regime, temos um comportamento oscilatório do parâmetro de ordem que torna possível a estabilidade da molécula V-AV para diversos valores de campo magnético. Com isso, esse e outros estados de vórtices podem ser acessados através de STM (do inglês, scanning tunneling microscopy).

V-AV em estruturas SC-FM

Por volta da década de 1990, sistemas híbridos de supercondutor-ferromagnéticos (SC-FM) começaram a ser utilizados para aprisionamento de vórtices, ou seja, evitar que os vórtices entrem em um regime de *flux flow*. Por outro lado, essas estruturas que podem ser dots magnéticos ou layers, podem produzir pares de V-AV dependendo do valor de sua magnetização. Esses fenômenos vem sendo amplamente estudados ao longo do século XXI.

Em 2003, M. V. Milosévić e F. M. Peeters [8] apresentaram a estabilidade de uma molécula de V-AV em um disco supercondutor com um disco ferromagnético em seu topo (chamado de “dot”). Os vórtices são confinados no campo magnético positivo abaixo do disco ferromagnético onde, graças ao forte confinamento, torna-se energeticamente fa-

vorável a formação de vórtice gigante. Por outro lado, os antivórtices são distribuídos simetricamente em volta do vórtice gigante. Controlando parâmetros como o raio do dot e a intensidade da magnetização, o vórtice gigante evoluir para o estado de multi-vórtices e/ou a formação de anéis de antivórtices em torno do dot. Em um trabalho anterior, os autores supracitados juntamente com S. V. Yampolskii mostraram que, com o aumento do raio do disco supercondutor, diminui a energia da estrutura formada por um vórtice gigante rodeado por outros vórtices. Assim, podemos ter a formação de um vórtice gigante rodeado por antivórtices [9]. Uma diferença no formalismo teórico envolvendo ambos os trabalhos leva a configurações diferentes na vorticidade no caso de convívio de vórtices e antivórtices. Na Ref. [8] temos que a vorticidade é sempre nula, pois todas as linhas de fluxo geradas pelo dot magnético penetram no supercondutor, enquanto que na Ref. [9] isso não ocorre, levando a condições de vorticidade não nula.

D. J. Priour Jr e H. A. Fertig [10] publicaram um estudo envolvendo a geração de pares de V-AV em um sistema supercondutor com uma rede de dots magnéticos. Para tal estrutura, mostraram que, dependendo da intensidade da magnetização dos dots magnéticos, podemos ter estados metaestáveis ou estáveis de pares de V-AV para cada um dos dots. Além do mais, é possível obter a configuração de estados fracionais de V-AV. O uso da teoria GL para esse tipo de estudo tem um papel fundamental, pois possibilita um mapeamento das variações dos Pares de Cooper ($|\psi|^2$). Com altas magnetizações ou campos dos dots magnéticos, a degradação de $|\psi|^2$ torna-se cada vez maior na vizinhança (aumento de pares de V-AV), que pode levar o sistema a um estado transiente, i.e., a aniquilação dos pares de V-AV. Seguindo nesta mesma linha, M. V. Milosëvić e F. M. Peeters publicaram um trabalho mostrando que temos uma transição de fase de primeira ordem quando o número de V-AV em cada dot se altera [11]. Por outro lado, uma transição de fase de segunda ordem ocorre quando o número de V-AV é constante, mas a sua distribuição é alterada. Tais transições irão depender da magnetização e da distribuição da rede de dots magnéticos. Outro fenômeno associado a esses parâmetros são o estado de V-AV fracionais, onde temos um compartilhamento de V-AV entre os dots vizinhos.

A nucleação V-AV em supercondutores pode se dar também através de excitação térmica e campo magnético externo em um sistema híbrido de supercondutor-ferromagnético. Assim, em 2005, M.V. Milosevic and F.M. Peeters, publicaram uma “Letter” abordando esse problema teoricamente onde utilizaram as equações TDGL para um supercondutor *gapless* [12], ideal para descrever um sistema SC/FM. Além do mais, a temperatura foi explicitada nas equações para que se possa levar em conta o efeito da excitação térmica. Em uma situação com campo magnético externo nulo, a energia de barreira (energia livre) torna-se menos intensa com o aumento de temperatura o que viabiliza a nucleação de pares de V-AV em cada dot magnético (DM). Por outro lado, quando temos campo externo não nulo ($H \neq 0$), vórtices são pinados nos DMs quando sua magnetização é baixa. Com

o aumento da magnetização, temos a nucleação de antivórtices devido ao aumento da supercorrente (em sentido contrário) em tais DM, que como efeito, leva o sistema a uma energia livre menor do que no caso de $H = 0$.

Do ponto de vista experimental, M. Lange et al, fizeram uma rede de DM de Co/Pd sobre um filmes supercondutor de Pb [13]. Em tal artigo, leva-se em conta uma corrente de transporte, que controla a duas diferentes dinâmicas de vórtices. Se a corrente for baixa, temos o movimento de linhas de fluxo intersticial, assim um regime de *flux creep* de antivórtices é estabelecido. Para um campo magnético externo nulo ou positivo temos um regime de *flux creep*, todavia para valores de campo negativos o comportamento da voltagem em função da corrente indica a ausência de tal regime. Uma questão colocada pelos autores, é a de termos uma dinâmica de aniquilação com os vórtices e a geração de novos antivórtices ou se a dinâmica é tal que o processo de creep ocorre com o antivórtice se movendo através dos canais entre os MDs. Se a corrente aplicada for alta, tanto as linhas de fluxo intersticiais quando as que estão pinadas se movem. Em tal experimento, os autores também verificaram um regime de *flux flow*.

Caso um DM em uma estrutura híbrida SC-FM tenha uma magnetização paralela ao plano do supercondutor, os vórtices não são gerados logo abaixo do dot magnético, mas sim em suas bordas. M. V. Milosević e F. M. Peeters utilizaram tal estrutura para estudar os parâmetros críticos quando temos um $H \neq 0$ e uma corrente aplicada $J_{Tr} \neq 0$ [14]. Para $H \neq 0$ em ambas as polaridades e $J_{Tr} = 0$, verificou-se um aumento no campo crítico devido aos vórtices(antivórtices) que entram e se aniquilam com os antivórtices(vórtices) que estão pinados no dot magnético. Na situação onde $J_{Tr} \neq 0$ e $H = 0$, a presença do DM contribui para aumentar j_{c1} quando este possui pequenos valores de magnetização. A Figura 6.1 ilustra a diferença na configuração da molécula V-AV para quando temos dots com magnetização paralela e perpendicular ao plano do supercondutor.

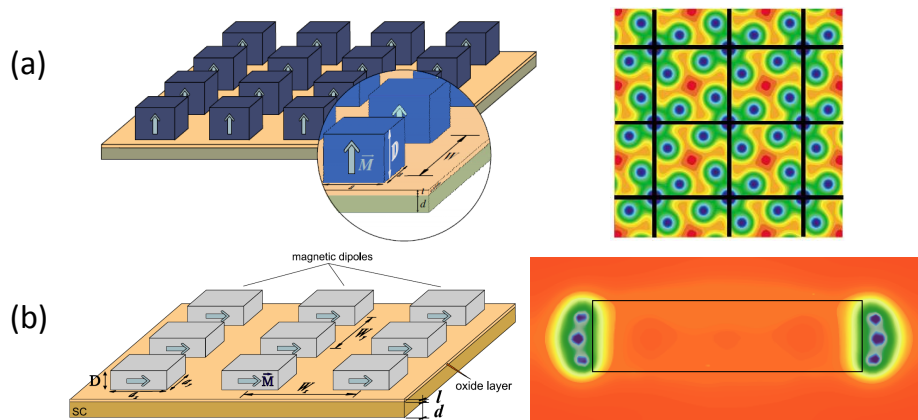


Figura 6.1: Diferentes configurações de moléculas V-AV gerados por dots magnéticos com magnetização perpendicular (a) e paralela (b) ao plano do supercondutor. Adaptado de [14] e [55].

Um outro caso de uma estrutura SC-FM e uma magnetização paralela ao plano do supercondutor em casos de $H \neq 0$ e/ou $J_{Tr} \neq 0$ foi estudada na Ref. [15], todavia, neste caso temos uma rede de DM sobre o supercondutor. Devido ao arranjo dos vórtices e antivórtices em bordas opostas de cada DM, as dimensões das mesmas se tornam importantes para que não haja aniquilação com os vórtices e antivórtices do DM vizinho e diminuição da intensidade da magnetização. O maior valor possível de corrente crítica (J_c) para que não haja movimento ou aniquilação, é aquele onde o número de vórtices que entram são múltiplos inteiros do número de centros de aprisionamento (neste casos os DM), assim para $H > 0$, o número de vórtices que entrarão na amostra deve ser o mesmo de antivórtices existente.

C. Carballeira *et al.* estudaram um sistema SC-FM utilizando a equação GL linearizada para uma amostra supercondutora quadrada e o DM com geometria circular [16]. Dependendo da intensidade da magnetização do DM e na presença de um fluxo magnético negativo, tal estrutura apresenta oscilações na vorticidade ocorrem devido à diferentes topologias no arranjo dos vórtices, quando variação módulo da vorticidade se da $|\Delta L_v| > 1$

Um mapeamento experimental da estrutura de moléculas de V-AV em um sistema SC-FM foi obtido por J. S. Neal e colaboradores utilizando a técnica de microscopia de escaneamento Hall de alta resolução (SHPM, em inglês) [17]. Utilizando um filme supercondutor de Pb e com dots constituídos de Co/Pt (com magnetização perpendicular ao filme), o SHPM mostrou um comportamento negativo do campo de indução nas vizinhas dos DMs, indicando, portanto, a mesma configuração observada em simulações envolvendo a teoria de Ginzburg-Landau. Com um campo externo negativo, os AVs que entram na amostra alteram a configuração dos AVs na região do DM. Por outro lado, quando temos a entrada de vórtices, devido a um campo magnético externo positivo, ocorre o processo de aniquilação com os AVs presentes. Para o caso quando não existem mais AVs na amostra, temos um estado onde todos os vórtices se encontram pinados sobre os MDs.

Até o ano de 2006, as condições para ter um estado estável de V-AV em um sistema SC-FM foram obtidos do ponto de vista teórico levando em conta um sistema infinito, exposto a um fluxo total igual a zero e para uma determinada geometria (triângulo ou quadrado). Eis que no ano seguinte, foi publicado um estudo teórico para verificar estados estáveis de V-AV em um disco supercondutor com um nanodot magnético seu topo [18]. O formalismo teórico para tal estudo leva-se em conta um sistema finito e com fluxo total diferente de zero. Como nos trabalhos anteriores, pares de V-AV são formados com o vórtice debaixo do dot magnético e o antivórtice pinado nas suas proximidades, porém o fato do sistema ser finito faz com que o antivórtice tende a ser expulso, gerando um estado metaestável. Assim, para valores pequenos da razão do raio do disco supercondutor com o raio do dot magnético ($\frac{R_s}{R_m}$), não há a formação de pares de V-AV. Para o caso de um campo magnético externo baixo, a dinâmica do sistema ocorre quando um antivórtice é

expulso e um novo par de V-AV é formado na região do dot, levando o sistema para um estado estacionário.

Utilizando um microscópio de força magnética (MFM) é possível investigar arranjos de V-AV em formato de corrente em um sistema SC-FM planar [19]. Quando é feito um processo de resfriamento com um campo externo presente, i.e., um field cooling, ocorre uma mudança na população de vórtices e antivórtices, pois, em tal processo, um dos domínios (positivo ou negativo) é compensado. Outro trabalho envolvendo a técnica de MFM foi utilizado para mapear as condições de formação de V-AV para diferentes valores de espessura em sistemas Nb-Py, sendo Nb o supercondutor [20].

Recentemente, um trabalho com a participação de físicos brasileiros foi publicado envolvendo um sistema bicamada supercondutor-ferromagnético atrelado o fenômeno dos pares de V-AV com fatores externos (como campo magnético externo e/ou corrente elétrica)[21]. Para $H = 0$ e $J_{Tr} = 0$, surgem pares de V-AV sobre os domínios do ferro magneto, exibindo diferentes topologias dependendo do valor da energia livre em função da magnetização do ferromagneto. Para $H > 0$ e $J_{Tr} = 0$, dependendo da intensidade da magnetização dos domínios, os vórtices que entram no sistema podem ser pinados ou aniquilados com o antivórtice do par V-AV. No caso $J_{Tr} > 0$, a dinâmica de V-AV tem uma característica anisotrópica. Os pares de V-AV se quebram, i.e., se movem em sentidos opostos caso a corrente seja aplicada ao longo da estrutura V-AV. Por outro lado, se a corrente for perpendicular à estrutura de V-AV, podemos ter um processo de aniquilação. Assim, para valores $0 \leq \theta \leq \pi/2$ de corrente aplicada, temos uma dinâmica V-AV não trivial e alteração no valor da corrente crítica para quando temos ou não pares de V-AV presente no sistema.

V-AV com AD

Por volta da segunda metade dos anos 2000, começaram os estudos envolvendo o uso de centros de aprisionamento artificiais, conhecidos como anti-dots (ADs) para estabilizar molécula de V-AV. Em 2006, R. Geurts, M. V. Milosëvić e F. M. Peeters [22] propuseram um mecanismo para estabilizar uma molécula de V-AV em uma simetria quadrada através do uso ADs estrategicamente posicionados. A mudança do estado de multivórtices $L_v = 3$ para $L_v = 4 - 1$ ocorre através de uma transição de segunda ordem que vai depender da temperatura e do fluxo magnético. Fazendo um contraste com trabalhos anteriores, temos que, diferentemente do apontado por V.R. Misko et al (sistema triangular), baixos κ em uma simetria quadrada (com e sem ADs) são favoráveis a configuração de vórtice gigante. Em sistemas quadrados na presença de ADs com um pequeno defeito superficial situado na borda da amostra ou na borda de um AD, não interferem na estabilidade da molécula de V-AV. Por outro lado, como apontado por A.S. Melnikov et al, na ausência de ADs

em tais sistemas a estabilidade não é possível.

Com a dificuldade de se mensurar experimentalmente os estados de V-AV em um sistema SC/FM, e uma geração de V-AV induzida pela simetria extremamente sensível, R. Geurts e colaboradores propuseram um novo método para se obter estados de vórtices-antivórtices estáveis através de centros de ADs em supercondutores mesoscópicos [23]. Diferentemente do seu trabalho anterior [22], que reforça a ideia de uma molécula de V-AV induzido pela simetria, porém tendo uma estabilidade com a pinagem dos vórtice, neste trabalho, tal estado é induzido e estabilizado pelos ADs. Para a configuração $L_v = 4 - 1$, temos uma situação com 4 vórtices nos cantos e um antivórtice no centro convivendo em equilíbrio. Todavia, os autores salientam que tal estado de V-AV é completamente estabilizado pelos ADs, que por sua vez difere-se do caso imposto pela simetria. Para que haja estabilidade entre os vórtices e o antivórtice no caso de pinagem, o tamanho da amostra (que são maiores do que no caso induzido pela simetria) e dos ADs tem papel fundamental. Os autores elaboraram um diagrama de fases para comparar as áreas de estabilidade de V-AV com uso dos ADs e, no caso que são induzidos pela simetria, como mostra a Figura 6.2.

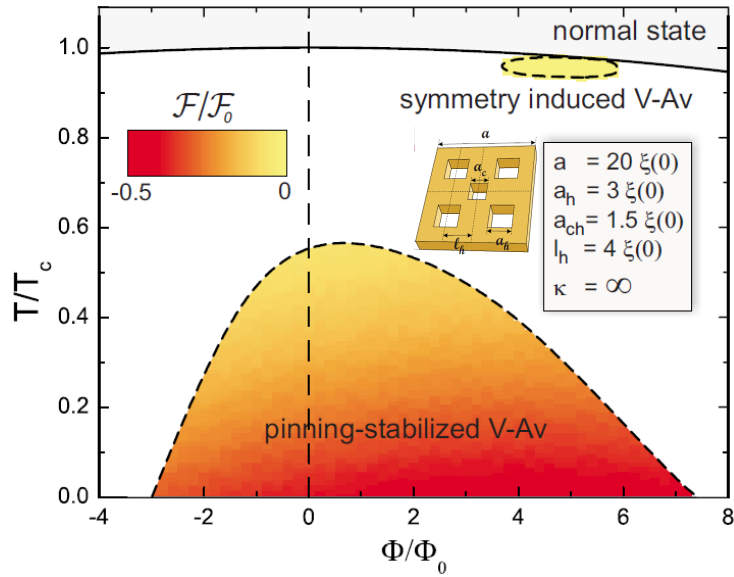


Figura 6.2: Diagrama de fases da temperatura em função do fluxo magnético, mostrando as regiões que são estáveis para a molécula de V-AV quando temos ADs e induzidos pela simetria. O inset mostra o tipo da amostra estudada. Fonte: Adaptado da Ref. [23].

Sete anos após a publicação do artigo sobre o uso de ADs (2x2) para estabilizar a molécula de V-AV em um sistema quadrado, R. Geurts e colaboradores generalizaram o formalismo teórico estendendo a ideia para o caso de um supercondutor *bilayer* [24]. Neste caso temos dois materiais supercondutores que apresentam diferentes parâmetros (como temperatura crítica, comprimento de coerência, etc) e que podem ou não estar acoplados (através do acoplamento Josephson). Para baixas temperaturas, independente se as *layers*

estão ou não acopladas, a *layer* 2 hospeda a molécula de V-AV com a vorticidade $L_v = 4 - 1$. Por outro lado, em altas temperaturas temos a molécula de V-AV em ambas as *layers* (quando temos um acoplamento Josephson). Aumentando-se a razão da temperatura crítica entre ambas as *layers* ou a intensidade do acoplamento, obtemos uma região maior no diagrama de fase da temperatura em função do fluxo magnético no qual apresenta $L_v = 4 - 1$ em ambas as *layers*. Com o advento dos supercondutores de duas bandas, no início do século XXI, e devido à similaridade no formalismo teórico (ver Ref. [24]) para ambos os casos, os autores estudaram sistemas de duas bandas com a mesma geometria e tamanho daquelas do caso das *layers*.

Com o aumento da razão das temperaturas críticas entre as bandas e a intensidade do seu acoplamento, tem-se uma maior região no diagrama de fases onde a vorticidade $L_v = 4 - 1$ ocorre em ambas as bandas. Para maiores detalhes sobre como os parâmetros das *layers* e bandas influenciam na estrutura $L_v = 4 - 1$, consulte a Ref. [24]. Alguns meses depois, um grupo de físicos chineses [25] fizeram um estudo utilizando equações TDGL para um supercondutor de duas bandas onde verificaram a formação de pares de V-AV.

6.1.2 Dinâmica de V-AV

O estudo da dinâmica de V-AV ganhou mais notoriedade a partir metade da década de 2000. Certas situações envolvendo uma estrutura SC-FM (sendo FM é um “dot” magnético) e uma corrente de transporte, pode-se ter uma dinâmica de V-AV de Abrikosov na amostra, acarretando um estado resistivo [14]. Dependendo do valor da corrente e da magnetização dos dots, V-AV são nucleados e se movimentam deixando a amostra em um estado resistivo. Com o aumento da corrente, a dinâmica passa a ser mais intensa, formando uma *phase slip* (região com o $|\psi|$ extremamente degradado). Por outro lado, para altos valores de magnetização, o estado resistivo já surge mesmo para baixos valores de corrente, pois não é necessário uma contribuição adicional da corrente de transporte para que o valor crítico seja atingido, fazendo com que o par de V-AV seja criado sobre o dot magnético. Para o caso de uma rede de DM com uma $J_{Tr} \neq 0$ o processo da dinâmica de V-AV é análoga ao do caso Ref. [14]. Com um DM em forma de barra sobre o supercondutor, também observa-se a formação de *phase slip* com o fluxo de vórtices e antivórtices saindo dos polos positivo e negativo da barra, movendo-se na mesma direção e em sentidos opostos até deixarem a amostra [26]. Quando temos um campo externo presente (positivo), os vórtices que não estão aprisionados e os que entram na amostra, se organizam e movem-se na região do polo positivo da barra. Por outro lado, na parte negativa, temos uma dinâmica de aniquilação V-AV, que faz com poucos AV deixem a amostra. Além do mais, temos uma força de Lorentz adicional ($B_o J_{Tr}$) que faz com que o valor de J_{Tr} diminua para a formação do *phase slip*. Utilizando a variação temporal do

módulo do parâmetro de ordem, os autores conseguiram registrar o caminho (ou rastro) dos vórtices através equação:

$$S(x, y) = \sqrt{\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial |\psi(x, y)|^2}{\partial \tau} \right)^2 d\tau}. \quad (6.3)$$

O uso da dinâmica molecular pode ser útil no entendimento de uma dinâmica de V-AV em um sistema SC-FM, como mostra o trabalho desenvolvido pelos físicos brasileiros Cléssio Lima e Clécio Silva [27]. O estudo mostrou um comportamento anisotrópico da corrente crítica para libertar os vórtices (ou antivórtices), que leva a uma dependência angular na dinâmica V-AV. Como efeito, os componentes do campo elétrico apresentam um ruído característico (que depende do ângulo), possibilitando o surgimento de uma resistência transversal.

Fazendo um apanhado geral dos trabalhos das Refs [26, 27], A. V. Kapra e colaboradores consideram novas possibilidades de guiar pares de V-AV em um sistema SC-FM, onde FM é uma barra magnética coloca sobre o supercondutor formando um angulo α com o eixo x [28]. Para o caso de uma barra, foram encontrados três regimes, $\alpha = 0^\circ$ que leva à mesma situação observada na Ref.[26], $0^\circ < \alpha < 75^\circ$ tem uma movimento em duas dimensões no qual sua direção não é regida pela força de Lorentz devido a J_{Tr} , ou seja, os V-AV são guiados, $75^\circ < \alpha < 285^\circ$ temos um processo de aniquilação, pois a atração entre V-AV supera a força de Lorentz. Generalizando para o caso de uma rede de barras magnéticas, em $\alpha = 0^\circ$ temos uma aniquilação dos vórtices com antivórtices da barra vizinha e vice versa; com $\alpha > 0^\circ$, ocorre a presença de um movimento em duas dimensões que também não é guiado pela força de Lorentz e um processo de aniquilação em cada barra quando $\alpha = \alpha_c$, sendo α_c um ângulo crítico. O valor de α_c aumenta conforme aumenta-se o tamanho da amostra e/ou a corrente de transporte.

Alejandro V. Silhanek e colaboradores, publicaram um trabalho híbrido (teoria e experimental) sobre dinâmica de V-AV em um sistema SC-FM, onde FM um conjunto de barras magnéticas muito próximas uma das outras dispostas paralelamente com o eixo x . Tal proximidade leva o campo magnético a ter um comportamento bem inhomogêneo e exibir alterações nos valores da corrente crítica [29]. Quando há um campo magnético externo suficientemente alto, uma *phase slip line* é formada ao longo dos polos positivos das barras. O campo externo pode auxiliar no aumento da corrente crítica (em relação quando $H = 0$) através dos chamados “matching field” [29], que são valores do campo externo onde temos números inteiros e semi inteiros de pares de antivórtices ou vórtices para $H < 0$ ou $H > 0$ respectivamente. Por outro lado, se a magnetização das barras forem anti-paralelas, verificaram que o valor da corrente crítica aumenta mais do que no caso dos *matching fields*. Considerando somente uma corrente elétrica alternada, os autores verificaram modulações no comportamento da curva $V(I)$ que ocorre quando a frequência da corrente coincide com a relação $\frac{V_m}{w}$, onde V_m e w são a velocidade média do

vórtice e a distância entre as barras respectivamente. Tal fenômeno é chamado de degraus de Shapiro [29].

Uma maneira alternativa de produzir um estado dinâmico de pares de V-AV e consequente um regime de *flux flow*, é introduzindo a corrente elétrica via condição de contorno nas equações GTDGL na ausência de campo magnético externo [30]. Assim, temos uma não uniformidade na corrente ao longo do sistema, acarretando na nucleação de vórtices e antivórtices que se movem perpendicularmente à J_{Tr} e aniquilam no centro da amostra. Dependendo do valor corrente, o regime de *flux flow* pode transicionar em uma situação de *quase-slip line* devido a alta velocidade dos vórtices e antivórtices, caracterizada por uma descontinuidade na curva da voltagem. Nas mesmas condições a para dinâmica de aniquilação que foi feita na Ref. [30], o comportamento da dinâmica de V-AV e $V(t)$ quando temos um supercondutor do tipo I foi verificado na Ref. [31].

Uma outra proposta de se produzir uma dinâmica de V-AV foi apresentada em 2009 pelo físico brasileiro Edson Sardella e colaboradores [32]. Durante um loop de histerese em um certo valor de campo magnético externo positivo, vórtices entram no mar supercondutor e são pinados por um AD central. Com a reversão da polaridade do campo magnético externo, um antivórtice entra no mar supercondutor, se move no sentido do AD onde se aniquila com o vórtice que estava pinado. Esse evento pode ocorrer no AD ou no mar supercondutor em torno dele, que irá depender do tamanho da amostra, temperatura e parâmetro de Ginzburg-Landau. Os autores mostraram que fixando T e κ , a região da aniquilação vai depender da força de Lorentz do vórtice sobre o antivórtice, que por sua vez é maior para amostras menores, levando a um tamanho mínimo para que a colisão ocorra no mar supercondutor. Durante o processo de aniquilação, a interação é tão forte que tanto o vórtice quanto o antivórtice atingem uma velocidade da ordem de $v \approx 10^5 m/s$, que ocasiona uma deformação do seu núcleo. Cerca de um ano depois, J. Barba-Ortega e colaboradores fizeram um trabalho análogo ao da Ref.[32], onde mapearam a dinâmica de aniquilação de um par de V-AV utilizando uma condição de contorno na interface supercondutor/normal com o AD, diferente do vácuo, tal condição é regida pelo parâmetro de extrapolação de Gennes, dado pela seguinte expressão [33]:

$$\hat{n} \cdot \left[-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right] \psi = \frac{-i\hbar}{b} \psi. \quad (6.4)$$

sendo b o parâmetro de Gennes. Para os valores de $b > 0, b < 0, b = 0$ e $b = \infty$ temos, respectivamente, a interface supercondutor/metal, supercondutor/supercondutor com temperaturas críticas diferentes, SC/FM ou material com altas densidades de defeitos e supercondutor/vácuo. A localização da colisão do par de V-AV depende do valor de b . Para um AD mais metálico, i.e., para valor de b positivo, mas pequeno, a aniquilação ocorre mais próxima do AD devido a um decréscimo na força de Lorentz, o que leva a uma diminuição da velocidade do antivórtice.

Guo-Qiao Zha et al estudaram via equações TDGL como a dinâmica de V-AV pode ser modificada em casos onde temos pinning simétricos, assimétricos e uma corrente elétrica alternada aplicada (introduzida via condição de contorno) [34]. A condição de contorno no buraco (AD) é supercondutor/metal e supercondutor/vácuo nas demais regiões. Para o caso de um AD simétrico, com uma corrente dc aplicada, temos um ciclo onde um par de V-AV se forma no AD e se afastam em direção as bordas do sistema (sob o efeito da força de Lorentz) e são expulsos do sistema. Com uma corrente ac aplicada, o processo é análogo durante o meio ciclo de oscilação, assim ao invés do par de V-AV deixar o sistema, eles retornam (são atraídos) e se aniquilam no AD com um novo par de V-AV (com vorticidades oposta ao primeiro par) durante o outro meio ciclo de oscilação. Para o caso de um AD assimétrico e $H = 0$, o processo de aniquilação acontece dentro do mar supercondutor, assim podemos ter uma resposta de oscilação paramagnética no comportamento da magnetização. Por outro lado, com $H > 0$ o processo de aniquilação corre no AD, assim a resposta é diamagnética. Dependendo da intensidade de H , o comportamento qualitativo da oscilação na magnetização sofre alterações para todos os casos estudados pelos autores. Onde, para o caso do AD simétrico, as oscilações magnéticas podem apresentar um comportamento senoidal.

Convencionalmente, a dinâmica de V-AV possui grandezas físicas lineares, porém um trabalho publicado recentemente possibilitou obter-se uma dinâmica de rotação para uma estrutura de V-AV através do uso de um disco de Corbino supercondutor com um dot magnético no topo [35]. Em tal disco, a corrente flui radialmente do centro para as bordas da amostra, assim podemos obter um movimento azimutal de uma estrutura de V-AV. Os vórtice e antivórtices se organizam por camadas em torno do centro do disco. Os autores estudaram analiticamente via equações de London e dinâmica molecular quando tem-se duas camadas, sendo a mais interna composta por vórtices e a mais externa por antivórtices. Foram calculadas grandezas físicas como, velocidade angular, frequência e voltagem para cada uma das camadas. Os autores salientam que tais resultados podem ser experimentalmente acessíveis.

6.2 Resultados

Como vimos anteriormente, foram abordadas diversas formas de gerar e controlar dinâmica de V-AV de Abrikosov e sua influência em parâmetros críticos (como J_c , por exemplo). No entanto, um mapeamento mais detalhado do estado resistivo envolvido em tal processo ainda não foi estudado. Assim, nesta seção de resultados, apresentaremos os dados obtidos em nossa pesquisa.

6.2.1 Estado resistivo durante o processo de aniquilação de um par de V-AV em um supercondutor *gapless*

Investigamos a dinâmica, cinética e as oscilações da magnetização e da voltagem envolvidas durante o processo de aniquilação de um par de V-AV de Abrikosov para um supercondutor *gapless*. Para tal fim, utilizamos amostras supercondutoras quadradas de tamanho lateral L com um AD concêntrico, como descrito nas Refs. [32, 33]. Partindo do estado Meissner, aumentamos o campo magnético externo a passos de $\Delta H \times 10^{-3} H_{c2}(0)$ até que dois vórtices fossem aprisionados no AD. Conforme diminuimos o valor do campo, um dos vórtices sai do AD deixando a amostra. Quando chegamos a valores negativos do campo externo, tem-se o processo de aniquilação V-AV (esse processo é exemplificado na Figura 6.3).

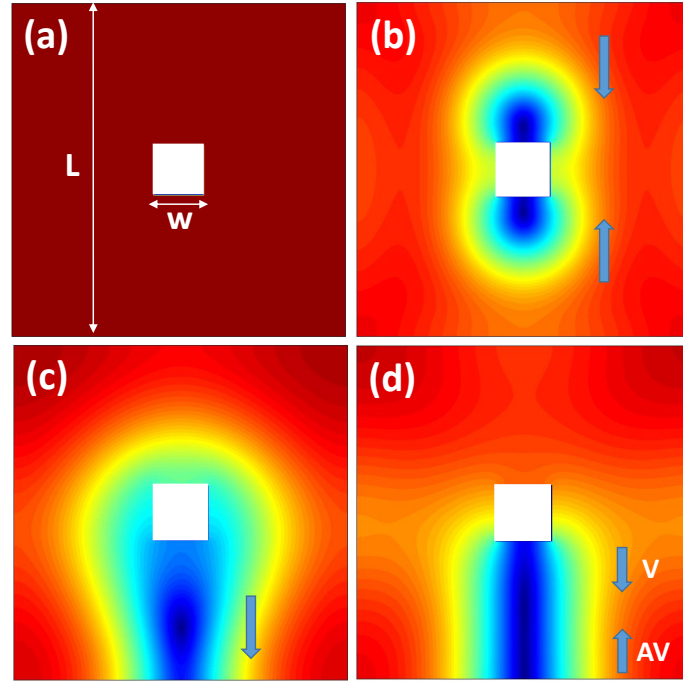


Figura 6.3: (a) Distribuição de $|\psi|$ quando $H = 0$, sendo $|\psi|$ (máximo/nulo) nas regiões em (vermelho escuro/azul escuro); (b) Dois vórtices sendo aprisionados no AD central (azul escuro) durante a primeira penetração; (c) Com o decréscimo de H , um dos vórtices deixa o supercondutor; (d) O antivórtice entra e se aniquila com o vórtice que estava no AD na região supercondutora, para um determinado valor de $-H$.

Fizemos simulações numéricas utilizando o conjunto de equações que resolvemos numericamente no capítulo 3, onde utilizamos $\kappa = 5$, o coeficiente de transferência de calor para o substrato $\eta = 2 \times 10^{-4}$ e a malha numérica na resolução de $\Delta x = \Delta y = 0,1 \xi(0)$ em todas as simulações. A Figura 6.4 mostra as mudanças ocorridas na energia livre do sistema durante o processo de aniquilação V-AV. Os mecanismos de dissipação que contribuem para a dissipação térmica total durante o processo de aniquilação são mostrados na Figura 6.4

(a). Vemos que a variação da densidade de energia livre no tempo (Figura 6.4 (b) curva em vermelho) corresponde ao momento em que ocorre a aniquilação e consequentemente o mesmo intervalo de tempo no qual ocorre o processo de dissipação térmica (curva em preto). Ao longo do processo de aniquilação, os diferentes mecanismos de dissipação tem tempos característicos. Assim, os picos de $\langle W_A \rangle$ e $\langle W_\psi \rangle$ não são coincidentes e $\langle W_\psi \rangle$ decai mais lentamente devido à relaxação de ψ . Os “*snapshots*” ilustram o valor máximo local em um determinado instante de tempo para cada mecanismo de dissipação, i.e., densidade de potência dissipada total (W_{total}) e a variação de temperatura envolvida no processo $\Delta T = T - T_0$.

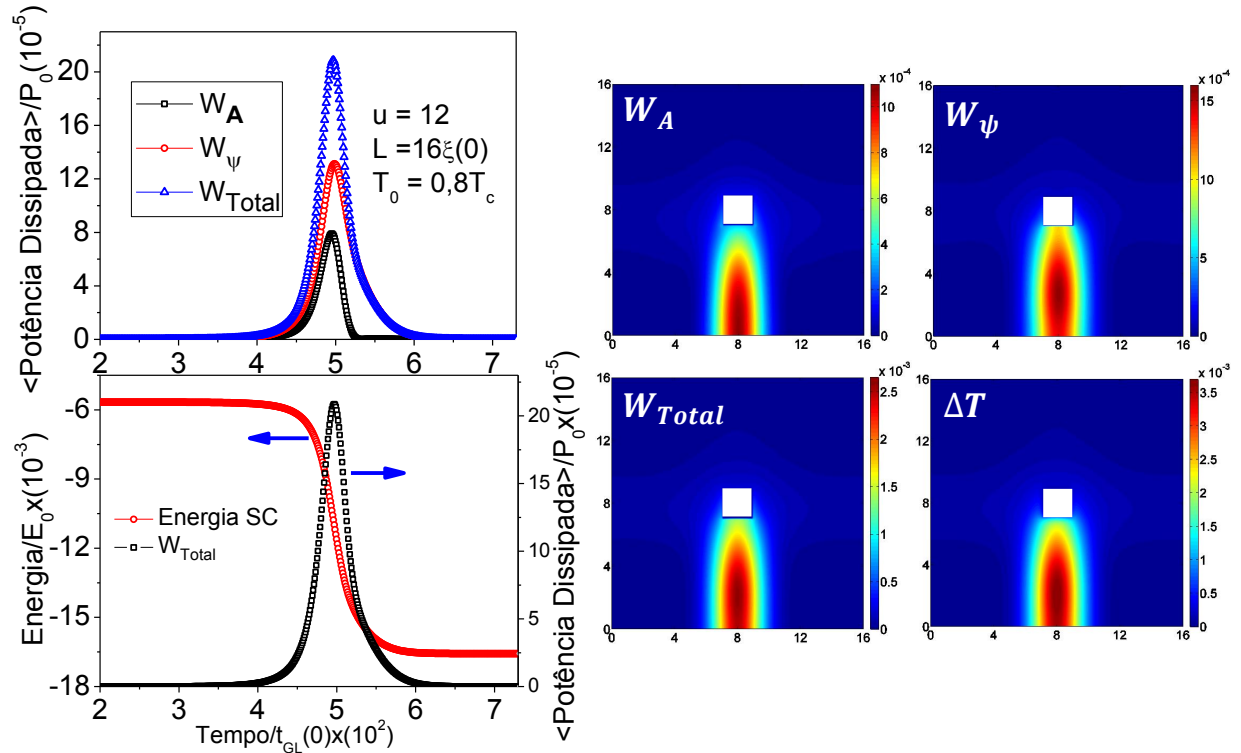


Figura 6.4: (a) Comparação entre a densidade de potência dissipada média total e a energia livre supercondutora no tempo; (b) Densidade de potência dissipada média para cada mecanismo de dissipação durante o processo de aniquilação de V-AV.

Analisamos a cinemática do vórtice durante o processo de aniquilação, onde a velocidade máxima do vórtice é atingida instantes antes de se aniquilar com o antivórtice, como mostra a Figura 6.5. Os *snapshots* indicam diferentes instantes da dinâmica de aniquilação, indicados na Figura 6.5 (1-3). Investigamos o comportamento da magnetização e da voltagem durante o processo de aniquilação. O primeiro pico na voltagem (Figura 6.6 (3)) ocorre instantes depois da aniquilação, enquanto que, o instante de tempo no qual ocorre o vale na magnetização (Figura 6.6 (4)) coincide com o momento em que ocorre uma inversão de sinal da voltagem, que acontece momentos depois da aniquilação do V-AV. O segundo pico ocorre quando temos uma recuperação do estado supercondutor na região

da aniquilação (Figura 6.6 (3)).

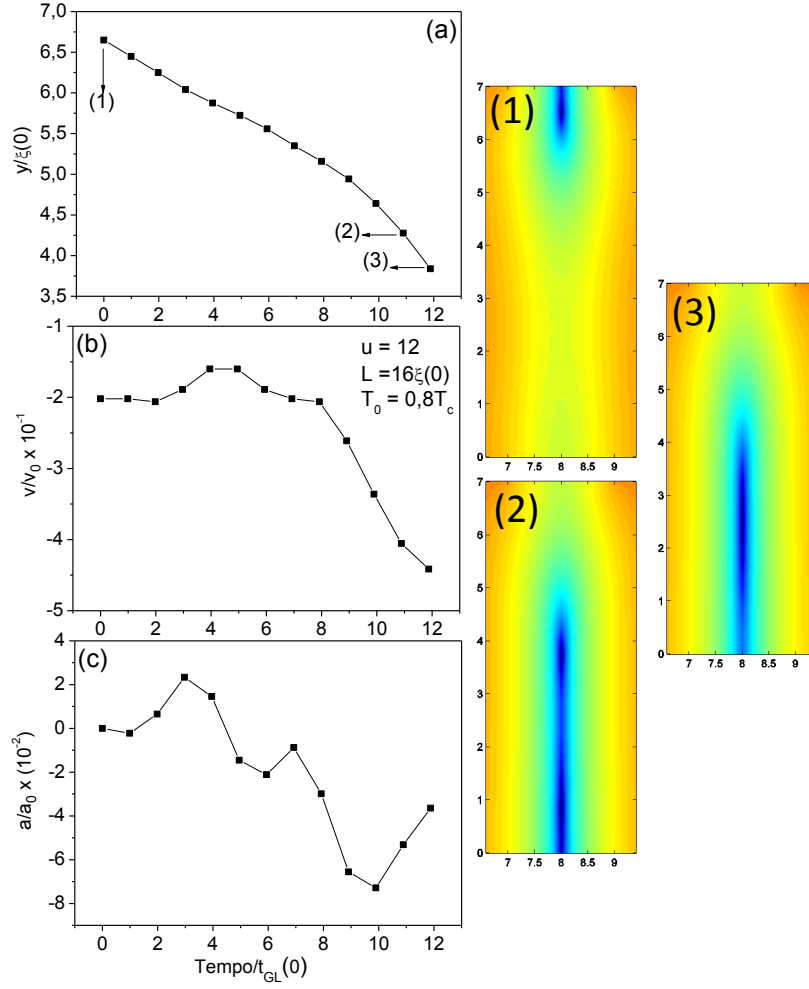


Figura 6.5: Cinemática durante o processo de aniquilação de V-AV. Os *snapshots* indicam quando (1) $t = 0$, vórtice sai do AD; (2) $t = 10,89t_{GL}(0)$, antivórtice entra no mar supercondutor; (3) $t = 11,88t_{GL}(0)$ instantes antes da aniquilação.

Para fazer um mapeamento mais detalhado da cinética durante o processo de aniquilação de V-AV, alteramos o valor de L para avaliar como os efeitos de confinamento e a região em que ocorre a aniquilação influenciam os mecanismos de dissipação. A Figura 6.7 mostra a trajetória do vórtice e do antivórtice para diversos valores de L e w , mostrando como a variação desses parâmetros interfere na região da aniquilação. Para os casos da Figura 6.7 (a) e (f), a colisão do vórtice com o antivórtice não ocorre no mar supercondutor. Para o primeiro caso, o vórtice sai da amostra, já para o segundo caso (Figura 6.7 (f)), a aniquilação ocorre no AD, pois o vórtice ficou aprisionado. Os valores e comportamentos dos mecanismos de dissipação não sofrem mudanças consideráveis para esse caso. Além disso, o comportamento qualitativo (como mostrado na Figura 6.6) das oscilações magnéticas e da voltagem não sofrem alterações com a região onde acontecerá a aniquilação, i.e., se ocorrer no mar supercondutor, no AD ou fora da amostra.

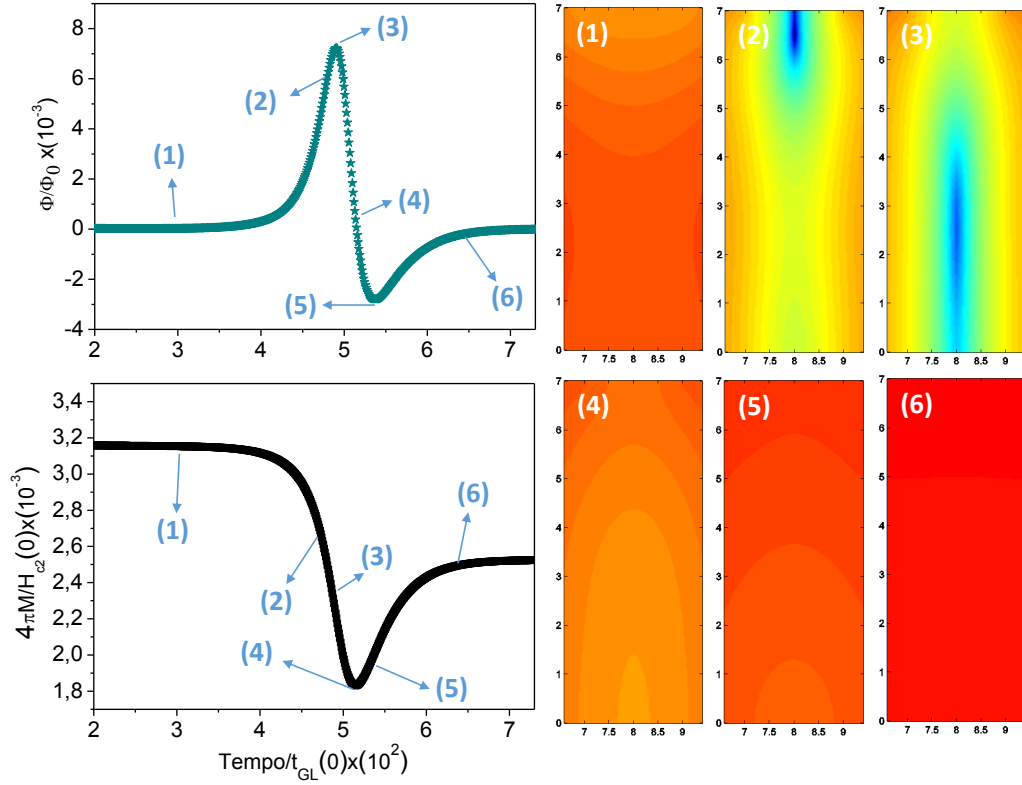


Figura 6.6: Oscilações da magnetização e da voltagem em função do tempo durante o processo de aniquilação. Os *snapshots* ilustram a variação do $\log|\psi|$ para diferentes instantes de tempo indicados nas oscilações da magnetização e da voltagem para a amostra $L = 26\xi(0)$ em $T_0 = 0,93T_c$.

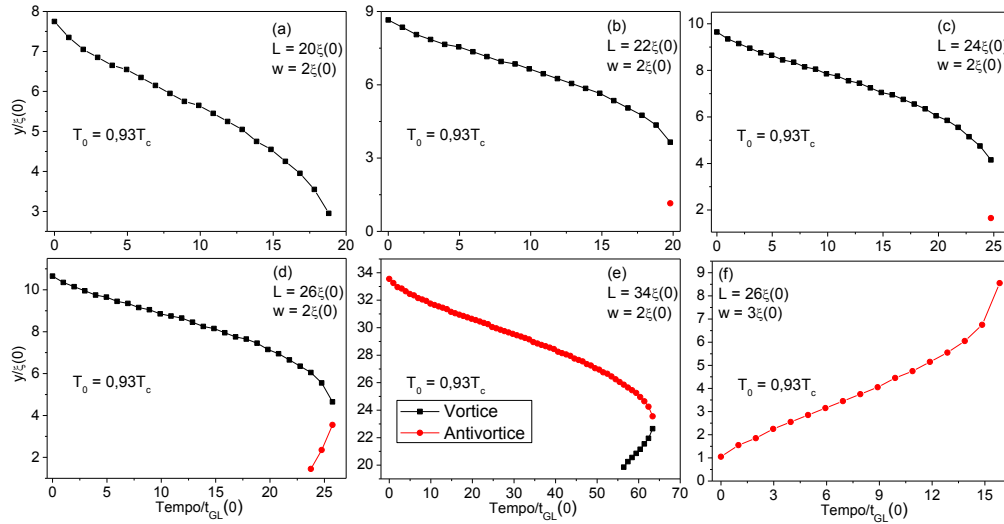


Figura 6.7: Trajetória do vórtice (em preto) e do antivórtice (em vermelho) durante o processo de aniquilação para diferentes valores de L e w , em $T_0 = 0,93T_c$. (a) e (e) a aniquilação ocorre no AD e fora do supercondutor respectivamente. (b)-(e) a aniquilação ocorre em diferentes regiões no mar supercondutor.

De acordo com as Figuras 6.7 (b)-(e), tem-se que a aniquilação ocorre no mar supercondutor. Como esperado, para maiores valores de L , maior o tempo para ocorrer a colisão do vórtice com o antivórtice. Para esses casos, analisamos o comportamento dos mecanismos de dissipação W_A , W_ψ e W_{Total} , como mostra a Figura 6.8. W_A aumenta com o aumento de L , contudo para o caso de $L = 34\xi(0)$ ocorre uma reversão de comportamento, i.e., um pequeno decréscimo no valor de W_A . Neste caso, notamos que a aniquilação ocorre mais próximo do centro da amostra e que o antivórtice percorre uma trajetória maior que o do vórtice (ver Figura 6.7 (e)). Como efeito, temos um campo elétrico induzido menor do que em processos de aniquilação com menores valores de L . Temos que W_ψ aumenta com o aumento de L , o que acompanha uma redução nos efeitos de confinamento. Por outro lado, como sabe-se, tal mecanismo de dissipação é intimamente ligado ao processo de relaxação de ψ , assim, para o caso onde W_ψ possui o maior valor ($L = 34\xi(0)$), espera-se que o tempo de recuperação do estado supercondutor após a aniquilação seja menor do que nos outros casos.

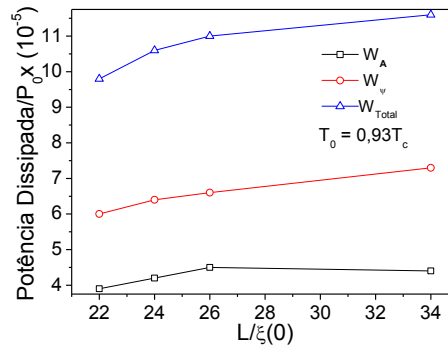


Figura 6.8: Potência máxima local por unidade de volume em um determinado instante de tempo por W_A , W_ψ e W_{Total} para diferentes valores de L , onde o processo de aniquilação ocorre no mar supercondutor (casos Figuras 6.7 (b)-(e)).

Tendo isso em vista, fizemos uma varredura do $|\psi|$ na região da aniquilação no instante em que ela ocorre, para estudar tal comportamento (veja Figura 6.9). A variação da amplitude do $|\psi|$ ocorre de maneira mais intensa no caso da Figura 6.9 (d) do que nos demais casos, para o mesmo intervalo de tempo. Assim, com o decréscimo dos efeitos de confinamento devido ao aumento de L , há uma maior taxa de variação do $|\psi|$ no tempo, que leva a uma recuperação mais rápida do estado supercondutor na região da aniquilação e uma maior dissipação devido W_ψ . W_A teve um leve decréscimo para $L = 34\xi(0)$, que foi o caso onde a aniquilação ocorre mais para o “interior” da amostra (veja Figura 6.7 (e)), em contrapartida com os casos das Figuras 6.7 (b)-(d), onde a aniquilação ocorreu mais próxima da borda da amostra.

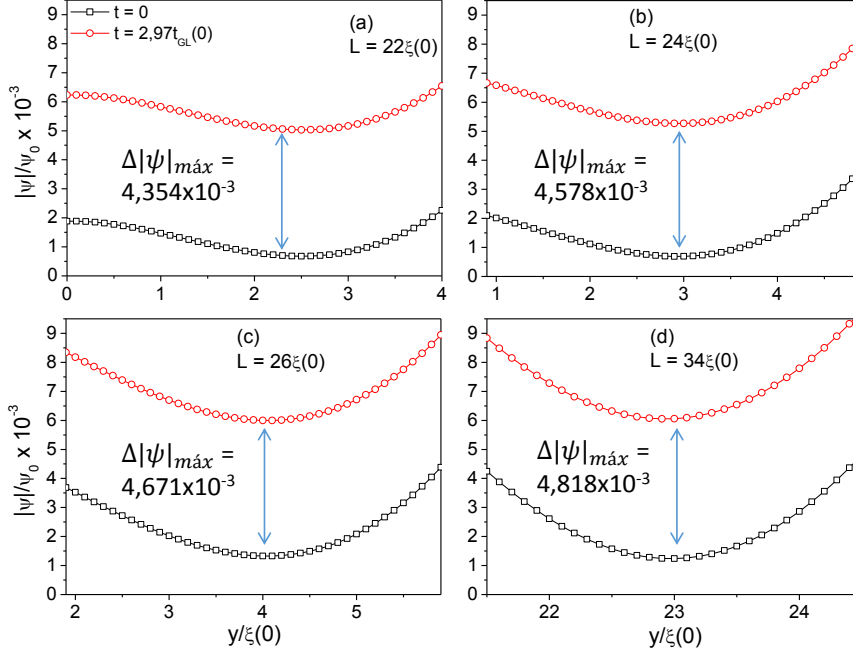


Figura 6.9: Varredura do $|\psi|$ passando pela região da aniquilação para os casos da Figura 6.7 (b)-(e). A varredura foi analisada em função de y , tendo x fixo em $L/2$. Definimos $t = 0$ como o instante no qual ocorre a aniquilação. A escolha de $t = 2,97t_{GL}(0)$ como intervalo de tempo, possibilita uma boa visualização da variação da amplitude do $|\psi|$ sem perder uma boa resolução numérica.

6.2.2 Estado resistivo durante o processo de aniquilação de um par de V-AV em um supercondutor com *gap*

Da mesma maneira como fizemos para um supercondutor *gapless*, agora vamos investigar a dinâmica, cinética e a magnetização e voltagem em função do tempo durante o processo de aniquilação de um par de V-AV em um supercondutor com *gap*. A Figura 6.10 exibe os mecanismos de dissipação envolvidos em tal processo.

Apesar de $\langle W_\gamma \rangle$ ter um valor maior que $\langle W_\psi \rangle$, seu máximo local tem um valor bem inferior ao de W_ψ (veja *ossnapshots*). Além do mais, $\langle W_\gamma \rangle$ é o único mecanismo de dissipação que apresenta dois valores de pico durante o processo de aniquilação. O primeiro valor de pico ocorre quando o vórtice sai do AD (Figura 6.10 (b)), depois tem um leve decréscimo até momentos antes da aniquilação (Figura 6.10 (c)). O segundo pico (e mais intenso) ocorre quando temos a recuperação do estado supercondutor (Figura 6.10 (e)), portanto há uma rápida variação de $|\psi|$ nos intervalos que figuraram os *snapshots* (Figura 6.10 (d)-(e)), contribuindo para $\langle W_\gamma \rangle$. A Figura 6.11 mostra a soma dos dois mecanismos de dissipação que envolvem processo de relaxação, que denotamos por (W_Ψ) , W_A , W_{total} e ΔT . Como esperado, $\langle W_{total} \rangle$ (ver Figura 11, gráfico superior) acontece no mesmo intervalo de tempo da variação da energia livre (ver Figura 11, gráfico inferior). Apesar do valor de pico de $\langle W_A \rangle$ ser maior que $\langle W_\Psi \rangle$, seu máximo local é menor (veja *snapshots* da Figura 6.11), além do mais, quando $t > 6,70 \times 10^2 / t_{GL}(0)$ (observe

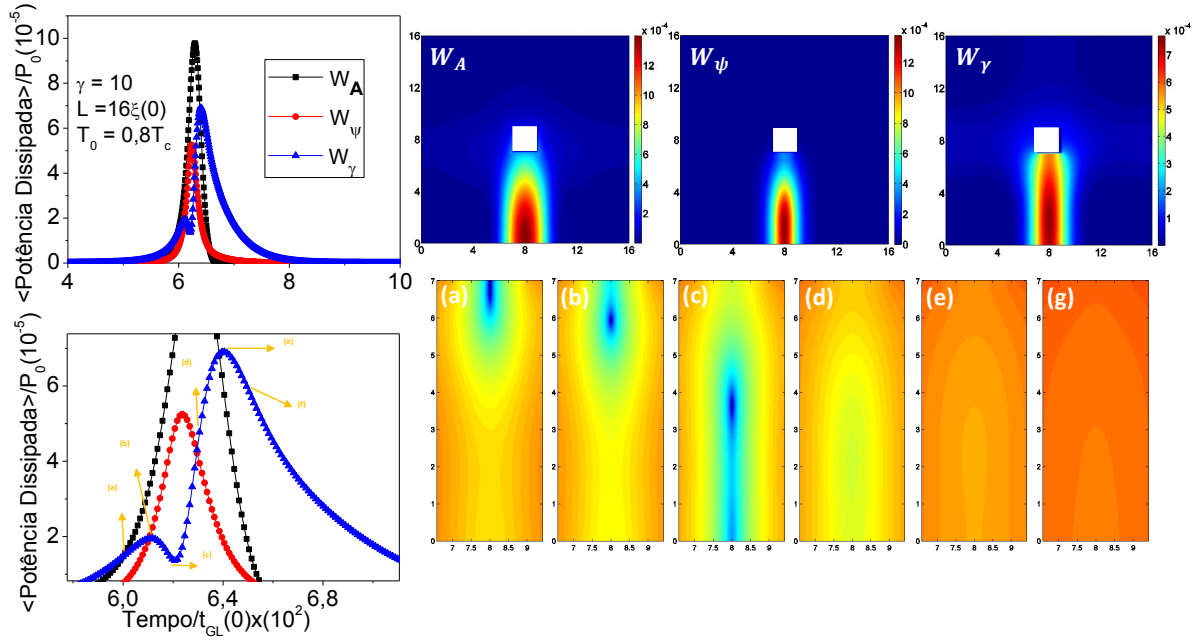


Figura 6.10: Densidade de potência média ($\langle W_A \rangle$, $\langle W_\psi \rangle$ e $\langle W_\gamma \rangle$) para cada um dos mecanismos de dissipação em função do tempo durante o processo de aniquilação. Os *snapshots* W_A , W_ψ e W_γ ilustram o valor máximo local em um dado instante de tempo. Os *snapshots* do $\log|\psi|$ (a)-(f) mostram a relação entre a dinâmica de aniquilação com o comportamento de $\langle W_\gamma \rangle$ para diversos instantes de tempo (gráfico com ênfase em $\langle W_\gamma \rangle$).

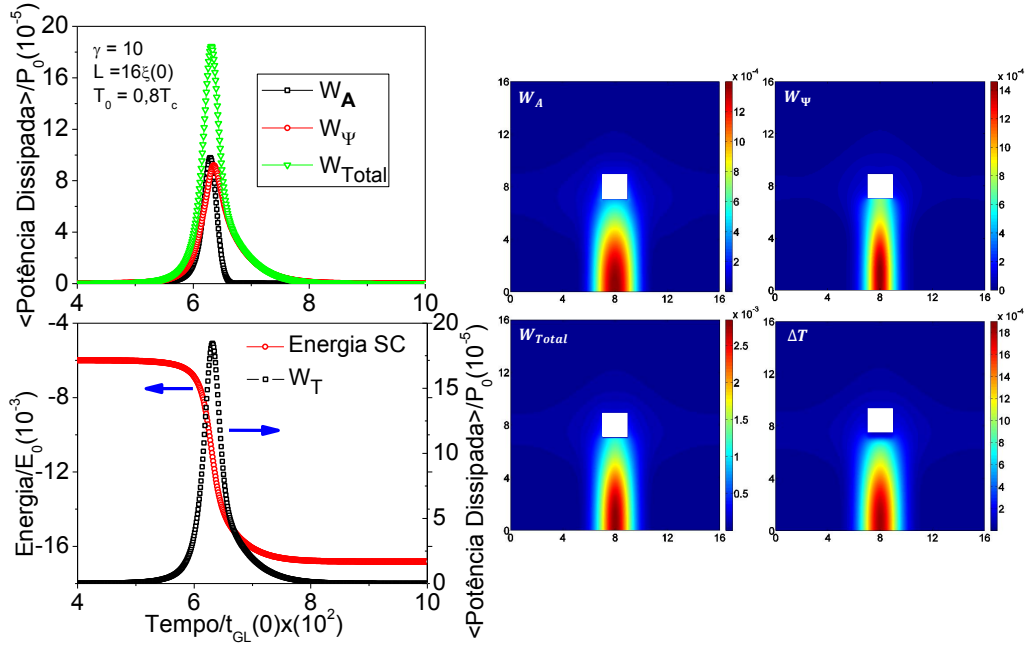


Figura 6.11: $\langle W_A \rangle$, $\langle W_\psi \rangle$ e $\langle W_{total} \rangle$ em função do tempo (gráfico superior). Variação da densidade energia livre e $\langle W_{total} \rangle$ em função do tempo (gráfico inferior). Os *snapshots* W_A , W_ψ e W_{total} ilustram o valor máximo local em um dado instante de tempo. ΔT mostra a variação máxima de temperatura devido ao processo de aniquilação.

na Figura 6.11), a dissipação na amostra é devido majoritariamente aos processos de relaxação. De maneira semelhante ao do supercondutor *gapless*, a variação da energia livre ocorre no mesmo intervalo de tempo da aniquilação e dissipação. A velocidade máxima do vórtice ocorre em instantes antes da aniquilação, a cinemática envolvida em tal processo é mostrada na Figura 6.12.

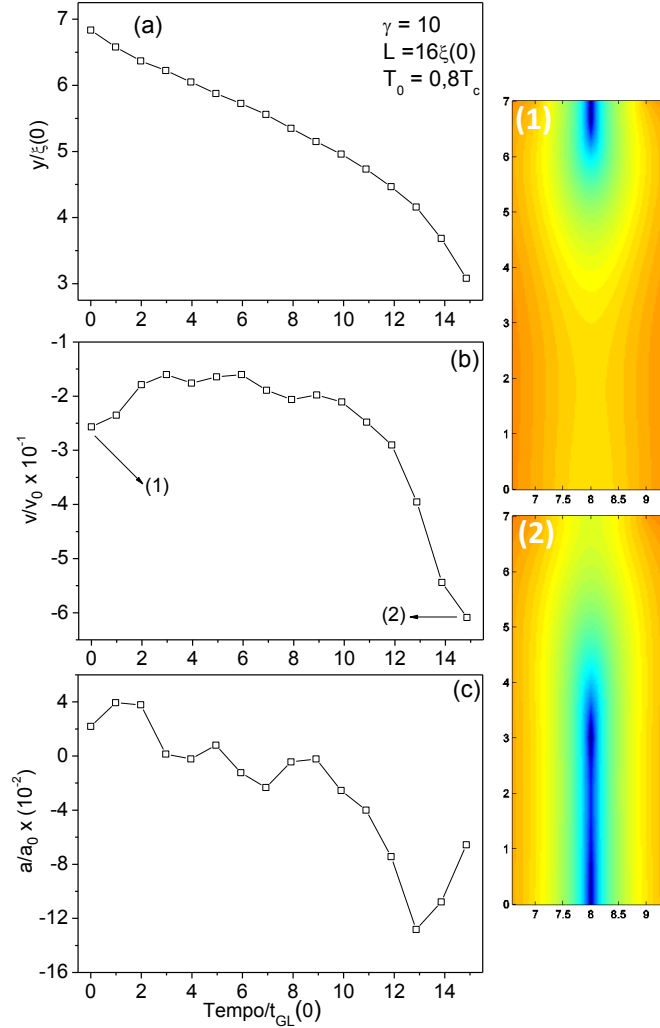


Figura 6.12: $\langle W_A \rangle$, $\langle W_\Psi \rangle$ e $\langle W_{total} \rangle$ em função do tempo (gráfico superior). Variação da densidade energia livre e $\langle W_{total} \rangle$ em função do tempo (gráfico inferior). Os *snapshots* W_A , W_Ψ e W_{total} ilustram o valor máximo local em um dado instante de tempo. ΔT mostra a variação máxima de temperatura devido ao processo de aniquilação para amostra $L = 16\xi(0)$ em $T_0 = 0,80T_c$ e $\gamma = 10$.

O comportamento qualitativo da voltagem e magnetização em função do tempo não sofrem alterações para o supercondutor com *gap*. Fizemos um mapeamento (ver Figura 6.13 (a) e (b)) para mostrar que tais oscilações se comportam de maneira análoga, contudo a amplitude da voltagem após a aniquilação é maior que no caso *gapless*, por outro lado o segundo pico (quando o supercondutor se recupera) é menor. Os *snapshots* de 1 a 3 mostram o mapeamento de $\log|\psi|$ nos instantes iniciais onde o vórtice deixa o AD

(2) e se aniquila com o AV (3). De 4 a 6 tem-se a evolução do sistema com o estado supercondutor sendo recuperado. O instante em que temos uma inversão no sinal da voltagem é o mesmo em que ocorre o pico na magnetização e acontece momentos depois da aniquilação (Figura 6.13 (4)). O primeiro pico na voltagem ocorre em instantes depois da aniquilação, enquanto que o segundo pico acontece no processo de recuperação da supercondutividade, que são representados respectivamente em Figura 6.13 (3) e (5).

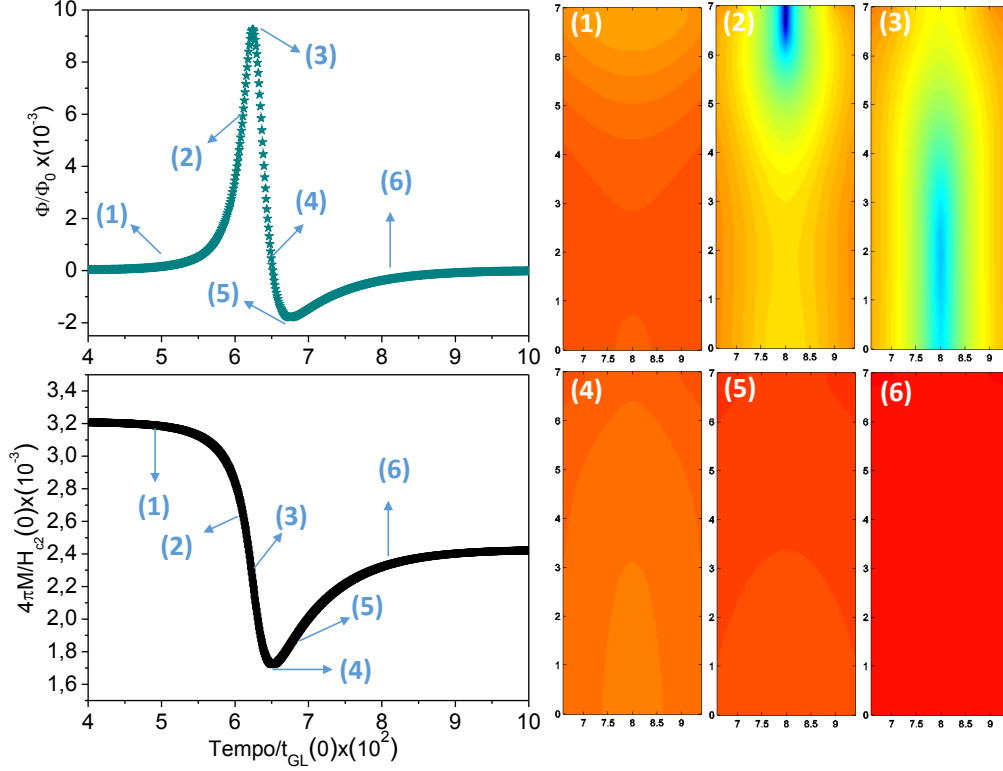


Figura 6.13: Comportamento da magnetização e da voltagem em função do tempo durante o processo de aniquilação em um supercondutor com *gap*. Os *snapshots* indicam a configuração de $\log |\psi|$ para diferentes instantes de tempo em que ocorrem as oscilações.

Para o supercondutor com *gap*, também fizemos um mapeamento detalhado dos fatores que influenciam nos mecanismos de dissipação durante a aniquilação de V-AV. Assim, analisamos para esses casos a influência de γ para uma amostra com $L = 26\xi(0)$, $w = 2\xi(0)$ e $T_0 = 0,93T_c$. Os valores escolhidos de γ asseguram que teremos um vórtice aprisionado quando valores negativos de H forem atingidos. Alterando o valor de γ , a região onde ocorrerá a aniquilação também se altera, bem como o tempo necessário para que isso ocorra. Assim, para $\gamma = 14$, o tempo para ocorrer a aniquilação é quase o dobro do $\gamma = 4$, como mostra a Figura 6.14. Por outro lado, a distância percorrida pelo vórtice torna-se maior com o aumento de γ . Os mecanismos de dissipação W_ψ e W_γ são sensíveis às mudanças no valor de γ , enquanto que W_A mantém seu valor praticamente constante. W_{total} decai conforme aumentamos o valor de γ , pois o aumento de W_γ é insuficiente

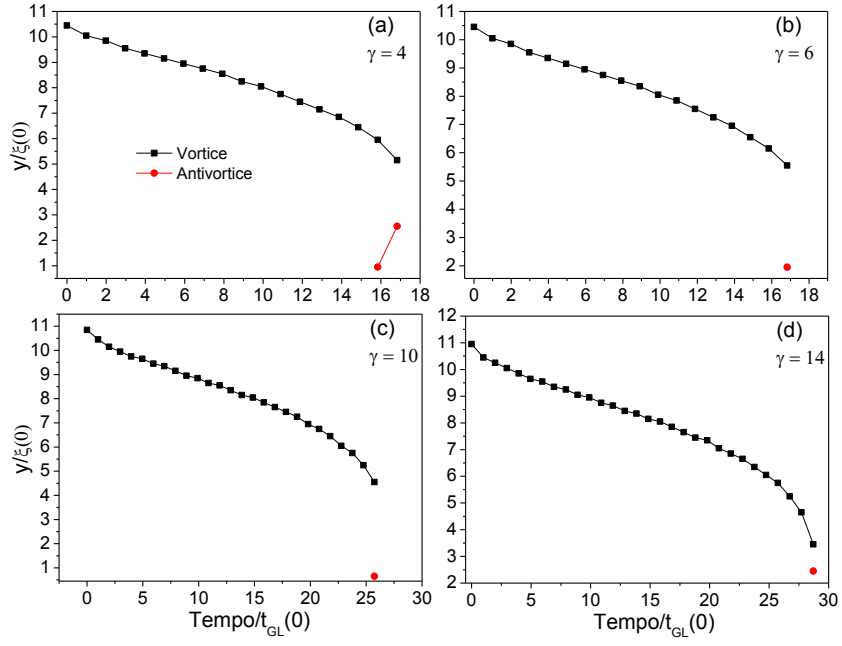


Figura 6.14: Trajetória do vórtice e antivórtice na dinâmica de aniquilação para diferentes valores de γ , para amostra $L = 26\xi(0)$, $w = 2\xi(0)$ em $T_0 = 0,93T_c$.

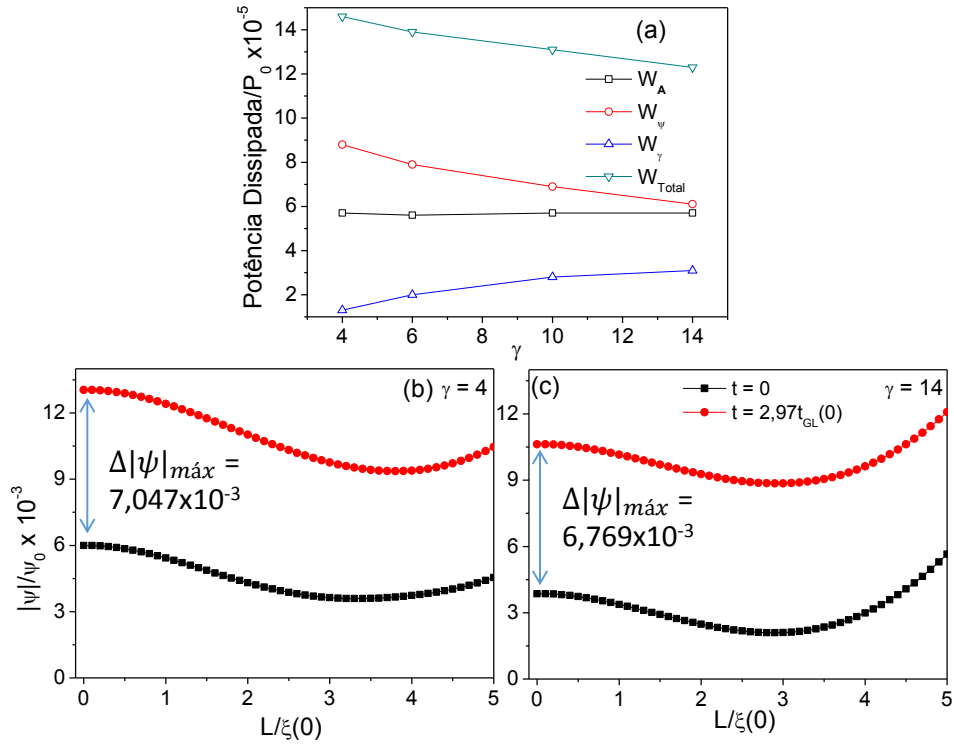


Figura 6.15: (a) Potência dissipada máxima por unidade de volume em um determinado instante de tempo, em função do γ . (b) e (c) Taxa de variação de $|\psi|$ no tempo para $\gamma = 4$ e $\gamma = 14$ respectivamente. O critério adotado neste caso é o mesmo da Figura 6.9.

para suprir o decréscimo de W_ψ (veja Figura 6.15 (a)). A variação no valor de γ altera o processo de relaxação no sistema, e como consequência, afeta diretamente W_ψ e W_γ . A Figura 6.15 (b) e (c) mostram a varredura do $|\psi|$ instantes após o processo de aniquilação para $\gamma = 4$ e $\gamma = 14$ respectivamente. Como W_ψ está ligado com os processos de relaxação do sistema, a taxa de variação da amplitude do parâmetro de ordem no tempo é maior para $\gamma = 4$ do que em $\gamma = 14$, o que ocasiona um decréscimo de W_ψ quando aumentamos o valor de γ . Todavia há um aumento no valor de W_γ . Apesar deste último também depender da relaxação do sistema, sua intensidade varia com γ^2 , portanto ocorre um crescimento com o aumento de γ .

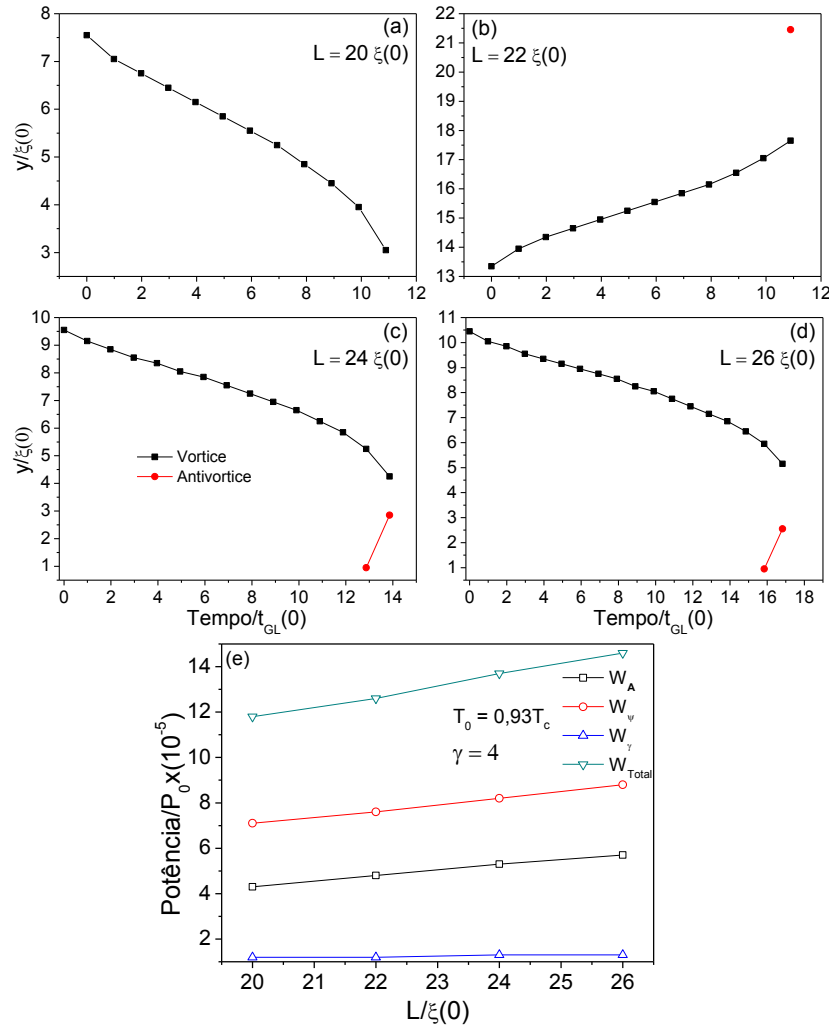


Figura 6.16: (a)-(d) Dinâmica de aniquilação V-AV para diferentes valores de L , para $\gamma = 4$, $w = 2\xi(0)$ em $T_0 = 0.93T_c$. (e) Potência dissipada máxima por unidade de volume em um determinado instante de tempo em função de L .

Fixando $\gamma = 4$, analisamos a dinâmica de aniquilação e o comportamento dos mecanismos de dissipação para diferentes valores de L . A Figura 6.16 (a)-(d) mostra as trajetórias do vórtice e do antivórtice para diferentes valores de L . Assim como no supercondutor

gapless, variando L , altera-se a região onde ocorrerá a aniquilação e, somente no caso apresentado na Figura 16 (a), tal processo ocorre fora do mar supercondutor. Para esse caso, os mecanismos de dissipação não sofrem alterações qualitativas. Da mesma forma, as oscilações da magnetização e voltagem sofrem somente alterações em suas amplitudes, independente da aniquilação ocorrer ou não no mar supercondutor. Da mesma forma que aconteceu para o caso de um supercondutor *gapless*, com o aumento de L as intensidades de $W_{\mathbf{A}}$ e W_{ψ} aumentam, e consequentemente W_{total} também aumenta. Por outro lado, W_{γ} mostrou-se pouco sensível a variação de L , mantendo-se praticamente constante, como mostra a Figura 6.16 (f). Assim, como mostramos na subseção anterior (veja a Figura 6.9), a taxa de variação da amplitude do parâmetro de ordem no tempo é maior conforme aumenta-se L (devido aos efeitos de confinamento menores). Entretanto, somente W_{ψ} é sensível a tais mudanças em um supercondutor com *gap*. Por outro lado, W_{γ} não tem variações apreciáveis neste sentido, tornando-se sensível apenas às mudanças de γ .

6.2.3 Discussão dos resultados

Nossas simulações em $T_0 = 0,8T_c$ nos garantem apenas os aspectos qualitativos da dinâmica V-AV e alguma estimativa quantitativa, pois não estão suficientemente próximas de T_c para os regimes *gap* e *gapless*. Por outro lado, para $T_0 = 0,93T_c$ o parâmetro de ordem GL coincide com o *gap* da teoria BCS, como mostra o trabalho A. V. Vagov et al [36], assim os resultados se tornam mais quantitativos. Além do mais, para o supercondutor com *gap*, a relação $1 - \tilde{T} < \sqrt{u}/\gamma$ deve ser satisfeita [37], o que está em concordância com nossas simulações. Neste capítulo estudamos a cinemática, dinâmica e cinética do processo de aniquilação de vórtice-antivórtice de Abrikosov em supercondutores do tipo *gapless* e *gap*. Qualitativamente, não há mudanças nos mecanismos de dissipação, dinâmica e oscilações da magnetização e voltagem para ambos os tipos de supercondutores. Em ambos os casos, $W_{\mathbf{A}}$ e W_{ψ} são sensíveis às variações de L , o que por sua vez, leva à mudanças no efeito de confinamento que altera a relaxação do sistema. Então, aumentando L , diminuimos os efeitos de confinamento e a relaxação de $|\psi|$, favorecendo um aumento em W_{ψ} . Por outro lado, $W_{\mathbf{A}}$ aumenta com o valor de L quando a aniquilação ocorre próxima da borda da amostra, caso contrário seu valor tem um leve declínio.

No caso do supercondutor com *gap*, as variações de γ somente afetam W_{ψ} e W_{γ} , onde este último mostrou-se sensível apenas a esse parâmetro. Com um aumento de γ em 250%, tivemos uma variação de $-30,68\%$ e $130,46\%$ para W_{ψ} e W_{γ} respectivamente. A diferença entre $W_{\mathbf{A}}$ e W_{ψ} é menor em um supercondutor com *gap* e, tal diferença diminui quando aumentamos o valor de γ , mantendo fixo o valor de L e w . Fixando $\gamma = 4$, na faixa de $1,54 < \frac{W_{\psi}}{W_{\mathbf{A}}} < 1,65$, onde podemos alterar os limites inferiores e superiores da faixa aumentando ou diminuindo o valor de γ , como também foi observado no movimento

de um vórtice (capítulo 5). Da mesma forma como ocorreu com o movimento de um vórtice no capítulo 5, W_{total} é maior em um supercondutor com *gap*, porém ΔT é maior no *gapless*. Isso é devido à condição de que $W_{total\ gap} < 2,0725W_{total\ gapless}$ (como discutimos no Capítulo 5) para todos os sistemas analisados. O tempo envolvido no processo de aniquilação é extremamente baixo, tanto para os supercondutores *gapless* quanto para os com *gap*, que são da ordem de pico segundos. Assim, o uso de técnicas experimentais como scaneamento Hall, microscópico de força magnética ou força de Lorentz tornam-se inviáveis para monitorar tal fenômeno, pois como mencionado na Ref. [12], tais técnica conseguem monitorar facilmente o processo de V-AV na ordem de micro segundos. Podemos obter maiores intervalos de tempo aumentando os parâmetros L e/ou γ , entretanto, deve-se garantir que a aniquilação ocorra no mar supercondutor. Uma alternativa é aumentar o tamanho do AD, pois à medida que o γ aumenta, tem-se que aumentar o valor de w para que o aprisionamento seja mais eficiente.

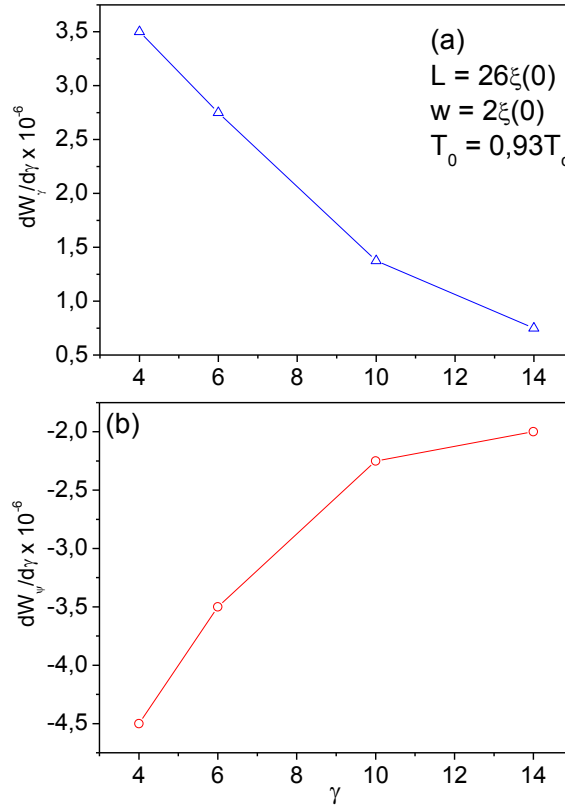


Figura 6.17: (a) e (b) taxa de variação de W_γ e W_ψ em relação ao γ respectivamente, mostrando uma tendência de saturação quando γ atinge valores na ordem de dezenas.

Por outro lado, utilizando a técnica de mapeamento térmico [38], é possível saber onde o processo de aniquilação ocorreu, devido à variação de temperatura envolvida no processo. Assim, W_ψ tem um papel importante, pois para todos os casos analisados (*gapless* e *gap*) é o principal mecanismo de dissipação, logo é o que tem maior contribuição para W_{total} . Neste caso, como demonstramos anteriormente, valores baixos de γ e o aumento

do tamanho (L) são requeridos para maximizar W_{total} e, consequentemente, obter uma maior variação de temperatura. Um meio alternativo para se conseguir um maior ΔT é utilizar um substrato com uma baixa eficiência de transferência de calor onde, experimentalmente, é estimado como sendo uma ordem de grandeza menor do que o valor utilizado ($\eta = 2 \times 10^{-4}$) (veja Ref. [39]).

Do ponto de vista experimental, os valores de γ para diversos tipos de metais ou ligas metálicas são da ordem de $10^2 - 10^3$ [37], o que exige centros de aprisionamento mais robusto e grandes valores de L . Mostramos também que W_ψ diminui e W_γ aumenta com o aumento de γ , contudo seria necessário analisar o comportamento de sua taxa de variação para fazermos projeções levando em conta maiores valores de γ . Assim, a Figura 6.17 mostra que ambos os mecanismos de dissipação apontam uma tendência de saturação para valores de algumas dezenas de γ . Como W_A mostrou-se praticamente constante em relação às variações de γ , comparando a Figura 6.17 com a Figura 6.15 e utilizando como base essas projeções, teremos uma contribuição mais igualitária entre os três mecanismos de dissipação no valor de W_{total} . Todavia, seu valor seria bem menor do que no caso de baixos γ , pois a variação de W_γ não supre a queda W_ψ . Portanto, seria inviável mensurar ΔT nessas circunstâncias. Por outro lado, em amostras de Nb e em ligas de Pb contendo pequenas concentrações de Bi pode-se obter valores intermediários de algumas dezenas de γ , devido ao baixo valor de τ_E que tais materiais apresentam [40, 41], todavia deve-se garantir que essas amostras estejam no limite sujo, o que nem sempre ocorre. Entretanto, é mais viável utilizar um supercondutor *gapless* no caso de um mapeamento térmico durante o processo de aniquilação de V-AV, pois este apresentou um maior ΔT do que o supercondutor com *gap*. Assim, ligas metálicas com altas concentrações de impurezas paramagnéticas tornam-se candidatas em potencial.

Bibliografia

- [1] M. R. Beasley, J. E. Mooij and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett. **42** 1165 (1979).
- [2] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx and V. V. Moshchalkov, Nature **408** 833 (2000).
- [3] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx and V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. Lett **86** 1323 (2001).
- [4] A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur and P. P. Vysheslavitsev, Phys. Rev. B **65** 140503 (2002).
- [5] V. R. Misko, V. M. Fomin, J. T. Devreese, and V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. Lett. **90** 147003 (2003).
- [6] T. Mertelj and V.V. Kabanov, Phys. Rev. B**67** 134527 (2003).
- [7] L. F. Zhang, L. Covaci, M. V. Milosëvić, G. R. Berdiyrov and F. M. Peeters, Phys.Rev. Lett **109** 107001 (2012).
- [8] M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **68**, 024509 (2003).
- [9] M. V. Milosëvić, S. V. Yampolskii, and F.M. Peeters, Phys. Rev. B **66** 024515 (2002).
- [10] D. J. Priour, Jr. and H. A. Fertig, Phys. Rev. Lett. **93** 057003 (2004).
- [11] M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Phys.Rev. Lett **93** 267006 (2004).
- [12] M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett **94**, 227001 (2005).
- [13] M. Lange, M. J. Van Bael, A. V. Silhanek, and V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. Lett **72**, 052507 (2005).
- [14] M. V. Milosëvić, G. R. Berdiyrov and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett **95**, 147004 (2005).
- [15] M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Physica C **437**, 208 (2006).
- [16] C. Carballeira et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 237003 (2005).

- [17] J. S. Neal, M. V. Milosëvić, S. J. Bending , A. Potenza, San Emeterio L. and C. H. Marrows, Phys. Rev. Lett. **99** 127001 (2007).
- [18] M. V. Milosëvić, G. R. Berdiyorov and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **75**, 052502 (2007).
- [19] M. Iavarone, A. Scarfato, F. Bobba, M. Longobardi, G. Karapetrov, V. Novosad, V. Yefremenko, F. Giubileo, and A. M. Cucolo, Phys. Rev. B **84**, 024506 (2011).
- [20] F. Bobba, C. Di Giorgio, A. Scarfato, M. Longobardi, M. Iavarone, S. A. Moore, G. Karapetrov, V. Novosad, V. Yefremenko, and A. M. Cucolo, Phys. Rev. B **89**, 214502 (2014).
- [21] D. A. Frota, A. Chaves, W. P. Ferreira, G. A. Farias, and M. V. Milosëvić, J. of Apply. Phys **119**, 093912 (2016).
- [22] R. Geurts, M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett **97**, 137002 (2006).
- [23] R. Geurts, M. V. Milosëvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **79**, 174508 (2009).
- [24] R. Geurts, M. V. Milosëvić, J. Albino Aguiar and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **87**, 024501 (2013).
- [25] Lin Wen, Guo-Qiao Zha and Shi-Ping Zhou, Euro. Phys. Lett **102**, 27004 (2013).
- [26] V. N. Gladilin, J. Tempere, J. T. Devreese, W. Gillijns, and V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. B **80**, 054503 (2009).
- [27] C. L. S. Lima and C. C. de Souza Silva, Phys. Rev. B **80**, 054514 (2009).
- [28] A. V. Kapra, V. R. Misko, D. Y. Vodolazov, and F. M. Peeters, Supercond. Sci. Technol. **24**, 024014 (2011).
- [29] A. V. Silhanek, V.N. Gladilin, J. Van de Vondel, B. Raes, G. W. Ataklti, W. Gillijns, J. Tempere, J. T. Devreese, and V. V. Moshchalkov, Supercond. Sci. Technol. **24**, 024007 (2011).
- [30] D. Y. Vodolazov and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **76** 014521 (2007).
- [31] G. R. Berdiyorov, A. D. Hernandez-Nieves, M. V. Milosëvić, F. M. Peeters and D. Dominguez, Phys. Rev. B, **85** 092502 (2012).
- [32] E. Sardella, P. N. Lisboa-Filho, C. C. Souza, L. R. E. Cabral, W. A. Ortiz, Phys. Rev. B **80**, 012506 (2009).
- [33] J. Barba-Ortega · E. Sardella · J. Albino Aguiar, J. Supercond. Nov. Magn **24**, 97 (2010).

- [34] Guo-Qiao Zha, F. M. Peeters and Shi-Ping Zhou, Euro. Phys. Lett **108**, 57001 (2014).
- [35] L. R. E. Cabral, Belisa R. C. H. T. de Aquino, Clécio C. de Souza Silva, M. V. Milosěvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **93** 014515 (2016).
- [36] A. V. Vagov, A. A. Shanenko, M. V. Milosěvić, V. M. Axt and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **85** 014502 (2012).
- [37] R. Tidecks and T. Werner, J. of low. temp. phys. **65** 151 (1986).
- [38] D. Halbertal et al, Nature, **539**, 407 (2016).
- [39] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. B **71**, 184502 (2005).
- [40] S. B. Kaplan, C. C. Chi and D. N. Langenberg, Phys. Rev. B **14** 4854 (1976).
- [41] B. Damaschke and R. Tidecks, J. of low. temp. phys. **79** 117 (1990).

Capítulo 7

Dinâmica de vórtice e antivórtice Cinemáticos

7.1 Introdução

A partir do fim da década de 1960, foram observadas transições resistivas em nanofios ou (*whiskers*) e em filmes supercondutores quasi unidimensionais. Essas transições ocorrem através de duas maneiras, ou via flutuações térmicas, que acontecem quando $\Delta T < 10^{-4}$, ou por meio de uma formação espontânea onde $J > J_c$ em um determinado local da amostra. Um fenômeno semelhante foi descoberto cerca de duas décadas mais tarde em fitas e filmes supercondutores bi dimensionais. A natureza de ambos os casos é bem parecida e está relacionada com oscilações no parâmetro de ordem. O estudo da energia livre do estado supercondutor, equações GL, TDGL e GTDGL foram amplamente utilizadas ao longo das décadas para descrever o comportamento desses fenômenos, bem como obter valores críticos que estão envolvidos nesses processos. Experimentalmente, é possível mapeá-los através de medidas elétricas em nanofios, micro pontes, filmes finos e, mais recentemente, em materiais nanoestruturados.

7.1.1 A “Phase Slip Center”

Um dos trabalhos pioneiros em flutuações térmicas foi publicado em 1967 por R. D. Parks e R. P. Groff utilizando micro-pontes supercondutoras feitas de Sn [1]. Tais flutuações causam uma dependência anômala da temperatura na corrente crítica J_c por conta das flutuações do parâmetro de ordem nas proximidades de T_c . Para embasar os dados experimentais, foi elaborado um modelo para calcular a resistência baseado na variação da energia livre quando o supercondutor é submetido a uma densidade de corrente externa J . Para um valor de $J \neq 0$ obteve-se um resultado qualitativo com o experimento. Porém, no caso de $J = 0$, foi obtida uma boa concordância. J. S. Langer e V. Ambegaokar elaboraram uma teoria fenomenológica baseada nas equações GL. Eles estruturaram uma

equação para a resistividade no caso de $J \rightarrow 0$ [2]. Na Ref. [3], verificou-se a transição para o estado resistivo através de medidas da voltagem em função da temperatura para diversos valores de corrente em cristais de “whiskers”. Ao comparar tais resultados com o trabalho desenvolvido por Langer e Ambegaokar no ano anterior, obteve-se uma grande concordância para o caso de $J \rightarrow 0$.

D. E. McCumber e B. I. Halpern deram continuidade ao trabalho de Langer e Ambegaokar utilizando as equações TDGL. Ao invés de considerarem o tempo de relaxação dos elétrons normais da Ref.[2] eles determinaram a escala de tempo característica das flutuações térmicas em casos com e sem corrente de transporte [4]. Em 1970, J. E. Lukens, R. J. Warburton e W. W. Webb [5] fizeram medidas elétricas em “whiskers” utilizando um amplificador de voltagem supercondutor (onde se tem a resolução de fento volts) para caracterizar a transição resistiva via flutuação térmica. Para $J = 0$ ou baixos valores de J , os dados experimentais concordaram com os cálculos propostos por Langer e Ambegaokar. Eles também mostraram a importância da escala de tempo das flutuações proposta por McCumber e Halpern. Apesar da grande diferença encontrada experimentalmente, esta é ainda muito mais próxima e coerente do que o tempo dos elétrons normais considerado anteriormente por Langer e Ambegaokar. Os cálculos da resistência em função da temperatura de McCumber e Halpern concordam com os dados experimentais para valores baixos de resistência.

As equações TDGL foram utilizadas em conjunto com a teoria de Hartree Fock para descrever o comportamento da transição resistiva em função da temperatura em supercondutores unidimensionais para diferentes valores de J , tanto no limite limpo quanto no sujo, ou seja, baixas e altas concentrações de impurezas [6]. Para $J = 0$, tal teoria concorda com o formalismo de McCumber e Halpern para uma resistividade intrínseca em temperaturas muito próximas a T_c . Por outro lado, em $J \neq 0$ ambas as teorias mostram instabilidade no comportamento da resistência em função da temperatura na região próxima de T_c . Tal efeito é pronunciado para correntes menores quanto maiores forem as concentrações de impurezas na amostra.

Há diversos fenômenos para casos com formação espontânea do estado resistivo, ou seja, em regimes $J_c < J < J_{c2}$, sendo J_c é a densidade de corrente crítica para que a amostra entre no estado resistivo e J_{c2} é a densidade de corrente para que delimita a região estado resistivo/normal. Em 1969, G. E. Churilov, V. M. Dmitriev e A. P. Beskorsyi foram os pioneiros ao observar um comportamento oscilatório na voltagem em função da corrente elétrica no estado resistivo de um supercondutor muito fino conectado a um circuito ressonante [7]. Também verificaram que quanto mais intensa for a corrente elétrica (a partir do estado resistivo) maior será o valor da frequência. Os valores obtidos estão na faixa de MHz. Outra observação realizada foi quando a corrente de transporte ultrapassa um valor

crítico, no qual o comportamento da corrente em função do campo elétrico possui uma característica não linear em filmes supercondutores. Assim, tal comportamento não está de acordo com a Lei de Ohm, onde que, para metais, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ [8]. Quatro anos mais tarde, um trabalho semelhante ao da Ref. [7] foi publicado, e no qual foi verificado o mesmo comportamento oscilatório da voltagem em função da corrente elétrica. Os autores esboçaram algumas ideias teóricas para descrever qualitativamente os dados experimentais, assim assumiram que tal comportamento ocorre devido a uma fase dinâmica, i.e., temos uma alternância entre regiões normais e supercondutoras quando $J < J_{c2}$ [9].

Resolvendo numericamente as equações TDGL em uma dimensão, T. J. Rieger, D. J. Scalapino e J. F. Mercereau analisaram a estrutura dinâmica do que chamaram uma “phase slip”, através do comportamento oscilatório da corrente supercondutora quando $J > J_c$ nas vizinhanças dessa fase, chamadas de *weak link* [10]. Para caso onde $J \gg J_c$, as oscilações apresentam uma forma senoidal e aparece um excesso de corrente ($\approx \frac{1}{2}J_c$) que é atribuída ao processo de dissipação envolvendo a *phase slip*. Dependendo do tamanho do *weak link* são necessárias *phase slip* de 2π em mais uma região, pois é mais energeticamente favorável do que uma de 4π . Assim, definiram a *phase slip* como sendo um tipo de ruído na região do *weak link*.

Em 1972, J. Meyer e G. V. Minnigerode fizeram diversas medidas elétricas em filmes finos e fios de Sn no estado supercondutor. Os autores verificaram uma descontinuidade na curva da voltagem em função da temperatura e da corrente elétrica (chamada de curva I-V) e frisaram que essa característica não estava relacionada com os contatos metálicos, efeitos térmicos ou com um regime de flux flow [11]. W.J. Skocpol, M.R. Beasley e M. Tinkham, propuseram um modelo fenomenológico para interpretar resultados experimentais que obtiveram em medidas elétricas envolvendo micro-pontes e “whiskers” supercondutoras, bem como compará-lo com os da Ref. [11]. Tal trabalho, publicado em 1974, é um dos pioneiros a mostrar que a descontinuidade observada em uma curva I-V resulta de um processo de *phase slip* em uma região de tamanho $\xi(T)$, onde surge uma voltagem através de tal região que é regida por um comprimento de difusão. Assim, devido a essas características, o evento é chamado de *phase slip center* (PSC) [12]. Em uma micro ponte ideal, o primeiro PSC deverá aparecer na metade da amostra, entretanto normalmente ocorrem onde a corrente crítica (I_c) é mínima devido à inhomogeneidades na amostra. Os demais PSCs ocorrerão em regiões onde $I_s = I_c$, onde I_s é a corrente supercondutora. Por outro lado, na presença de fatores externos, como micro pontes supercondutoras iluminadas com laser, podem causar alterações no estado resistivo e em I_c como mostra a Ref. [13]. Quando maior a potencia do laser, menor será o valor de I_c . Skocpol, Beasley e Tinkham, obtiveram a contribuição da resistência diferencial de cada PSC, dada por:

$$\frac{dV}{dI} = 2\rho\Lambda/A, \quad (7.1)$$

onde $\rho \approx \rho_n$, Λ é o comprimento de difusão das quasi-partículas e A é seção transversal

do fio. O fluxo de correntes normais (que são dissipativas) é delimitada por Λ ao invés de $\xi(T)$. Em seu modelo, o trio definiu o comprimento de difusão como: $L_n = 2\Lambda$. Onde temos que:

$$\Lambda = \sqrt{D\tau_E} = \sqrt{\frac{1}{3}v_F l \tau_E}, \quad (7.2)$$

sendo $D = \frac{1}{3}v_F l$ o coeficiente de difusão, v_F a velocidade de Fermi, l o livre caminho médio e τ_E é o tempo de colisão inelástico elétron-fônon. Os *whiskers* apresentaram um L_n maior que o das micro-pontes devido ao seu maior valor de l [12]. O surgimento dos PSCs resultam no aparecimento de dissipação térmica e, conseqüentemente, um aumento local de temperatura. Com isso, causam mudanças na curva I-V descrevendo o seu comportamento em boa concordância com o verificado experimentalmente. Além do mais, os autores enfatizam que o uso das equações TDGL não conseguem explicar totalmente os PSCs. A. Schmid e G. Schon [14] propuseram uma correção no comprimento de difusão do PSC, com o modificação de τ_E para um tempo de relaxação τ_Q , onde este último depende da temperatura. Assim, $\Lambda_Q = (D\tau_Q)^{1/2}$ caracteriza o decaimento assintótico do PSC. Em 1977, G. J. Dolan e L. D. Jackel fizeram um aparato experimental em fitas finas supercondutoras de Sn e In para testar as ideias propostas por W. J. Skocpol, M. R. Beasley e M. Tinkham. Medidas de voltagem realizadas perto da região do PSC mostraram que sua variação espacial ocorre exponencialmente com um comprimento de difusão igual ao das quasi-partículas, ou seja, Λ [15]. Neste mesmo ano, um estudo observou a influência de um campo magnético externo e paralelo à corrente aplicada tanto no comportamento da curva I-V, quanto no tempo de relaxação em casos envolvendo PSCs. A curva V-I não sofre mudanças qualitativas e analisando a resistência diferencial, é possível mapear o comportamento do tempo de relaxação em função do campo magnético [16].

B. I. Ivlev e N. B. Kopnin estudaram o PSC para situação estática e dinâmica utilizando a teoria TDGL [17]. Alguns autores consideraram o PSC como um fenômeno estático no qual o parâmetro de ordem é sempre nulo para todos os tempos. Todavia, os respectivos autores mostraram que a formação do PSC não é possível em tais condições. Por outro lado, no caso dinâmico, o parâmetro de ordem é nulo somente em certos instantes de tempo no PSC, que poderia estar relacionado com o comportamento oscilatório registrado na Ref.[7], pois, com a oscilação de ψ tem-se um processo não estacionário no comportamento da voltagem em função da corrente. Comparando as equações TDGL e GTDGL para o caso envolvendo o PSC, encontraram uma alta similaridade, pois para ambos os casos $l_E \gg \xi$, sendo l_E o comprimento de profundidade do campo elétrico. Entretanto, no caso de supercondutores *gapless* (descritos via TDGL) isso é possível somente em um intervalo muito estreito de corrente. Por outro lado, utilizando a GTDGL foram calculados o comportamento da corrente elétrica para 3 intervalos diferentes de tempo de espalhamento

inelástico elétron-fônon (τ_E), que é o parâmetro que conecta tal teoria com o material supercondutor (veja mais detalhes no Capítulo 2).

Em 1984, B. I. Ivlev e N. B. Kopnin publicaram um *review* [18] com dezenas de trabalhos envolvendo o estudo de PSC, que ficou definido como uma oscilação periódica do parâmetro de ordem que varia de zero até um valor máximo. Assim, quando $\psi = 0$, tem-se um *phase slip* de 2π em um determinado ponto. Tal fenômeno ocorre em fios supercondutores unidimensionais ($w \ll \xi$), sendo w é a espessura do fio ou em micro-pontes.

Quatro anos mais tarde, S. M. Goiberg, N. B. Kopnin e M. N. Tribelsky resolveram numericamente a equação GTDGL para estudar a dinâmica quando há diversos PSCs, ou, em outras palavras, uma “corrente” de PSCs [19]. Mostraram o processo de criação de novos PSC variando a densidade de corrente elétrica em passos de $J \rightarrow J + \delta J$ e destruição dos PSCs quando $J \rightarrow J - \delta J$. Para tal, utilizaram como ponto de partida um valor de corrente próximo ao da transição do sistema para o estado normal. Para ambas as situações, foram calculadas a variação de ψ no tempo. Além do mais, cada PSC possui sua própria frequência de oscilação (apesar da diferença entre cada PSC ser bem pequena) o que nos leva a uma situação de batimentos no sistema que, por sua vez, afeta o comportamento oscilatório da voltagem. Os autores utilizaram a energia dissipada mínima como critério para determinar o estado mais provável do sistema. Outro estudo envolvendo a presença de várias PSCs foi desenvolvido por W. J. Yeh, Y. D. Dai e Y. H. Kao [20]. O trio mostrou que podem ocorrer interações de troca das quasi-partículas entre as PSCs, quando estas estão separadas a distâncias menores que o comprimento de coerência. Como consequência, temos alteração do comportamento característico da curva I-V. Influência de fatores externos como a presença de um campo magnético alternado, também modificam o comportamento da curva I-V em uma situação onde temos diversos PSCs na amostra. Na faixa de frequências de micro-ondas, a curva I-V é moldada de duas maneiras: (I) ocorre geração de uma descontinuidade constante na voltagem e (II) uma mudança no número PSCs [21]. Nestas condições, a frequência angular do campo magnético externo é dada por:

$$\omega = 2enU/\hbar, \quad (7.3)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ e U é o valor no salto da voltagem. Assim, para essas frequências temos uma sincronia do campo magnético com os PSCs. Para o caso de m PSCs, o salto na voltagem será $U_m = mU$, ou ainda temos que:

$$U_m = \frac{m}{n} \hbar \omega / 2e \quad (7.4)$$

Com o advento da nanotecnologia a partir do final do século XX, os PSC foram estudados experimentalmente em nanofios supercondutores e amparados teoricamente através de simulações computacionais utilizando as equações GTDGL. Em 2003, D. Vodolazov et al publicaram um trabalho onde realizaram medidas elétricas em nanofios de Pb e Sn. É

reportado o surgimento de PSC para temperaturas bem menores que T_c para ambos os materiais [22]. Uma característica interessante e que foi pela primeira vez verificada, é o “comportamento em S ” da curva I-V, isso ocorre quando aplica-se uma voltagem, e mede a corrente elétrica (veja Figura 2 do artigo). A simulação numérica envolvendo a equação GTDGL mostra que na ausência de flutuações térmicas, as PSCs ocorrem para $J > J_{c1}$ e que a configuração em S é devida ao parâmetro $\gamma \gg 1$. A diminuição da corrente a partir de um certo valor de voltagem acontece quando o sistema não consegue retornar ao regime de quasi-equilíbrio, que é obtido quando temos a intersecção das curvas quando aplica-se uma corrente (I-drive) ou voltagem (V-drive), que por sua vez leva, a um regime de *phase slip* periódico. No ano seguinte, S. Michotte et al publicaram um trabalho teórico-experimental para determinar as condições que podem ocorrer PSC em nanofios supercondutores quando há ou uma corrente ou uma voltagem aplicada [23]. A equação GTDGL foi resolvida numericamente para os casos de corrente e voltagem aplicada. No primeiro caso, aumentando γ , maior será o valor da corrente normal e da voltagem para um certo valor de J . Para um certo comprimento L do nanofio, maior será o valor de J_{c1} com o aumento do γ , por outro lado, aumenta-se o comprimento de decaimento das correntes normais, fazendo J_{c1} depender de L para nanofios extensos. Verificou-se também que na presença de um campo magnético externo, os valores de J_{c1} e J_{c2} diminuem. Quando temos uma voltagem aplicada, observa-se o mesmo comportamento na forma de S na curva da corrente em função da voltagem aplicada para vários L . Foram verificados diversos comportamentos como mostrados na Ref. [16], todavia foi observado adicionalmente, a curva em formato de S para $T \rightarrow T_c$ para longos fios. Os resultados obtidos teoricamente foram amparados com medidas elétricas envolvendo quatro nanofios de Pb com diferentes L .

Em certas condições, podemos ter uma transição entre estruturas *quasi-PSCs* (conhecidas como PSSs) e rede de Abrikosov em fios supercondutores mesoscópicos. A Ref. [24] investigou como a presença de um campo magnético externo pode interferir na estabilidade de uma PSS em nanofios de $NbSe_2$. Foram observadas descontinuidades na curva I-V que seguem o modelo da Ref. [12]. Todavia, tal fenômeno é devido aos PSS, pois a espessura de um nanofio de $NbSe_2$ é muito grosso para ser de fato um supercondutor unidimensional. Assim, os PSSs podem ser fluxo de vórtices de Abrikosov ou cinemáticos (falaremos mais sobre esses entes na próxima subseção). Dependendo do valor de H , podemos ter transição altamente dissipativa envolvendo *phase slip* ou movimento de vórtices. Em 2008, A. K. Elmurodov et al publicaram um trabalho onde estudaram PSC em um nanofio supercondutor de NbN tanto teórico quando experimentalmente [25]. O comportamento das PSCs na amostra foram mapeadas através de eletrodos colocados em diversos seguimentos do nanofio, onde cada região apresentou um comportamento característico na curva V-I. Do ponto de vista teórico, os autores consideraram os efeitos de

difusão térmica envolvidos no processo, assim acoplaram a equação de difusão térmica na GTDGL. O comportamento da curva V-I teve uma boa concordância com o resultado experimental e as regiões de PSC foram mapeadas através de uma varredura do $|\psi|$ ao longo do fio. Os efeitos térmicos afetam fortemente o processo de uma histerese na curva V-I, como a intensidade de suas descontinuidades e número de saltos, cuja modulação irá depender da eficiência do substrato, i.e., sua taxa de remoção de calor. Além do mais, os PSCs tem sua estrutura modificada devido aos efeitos térmicos, abrangendo uma região maior com a variação de temperatura.

7.1.2 Phase Slip Line

Um dos trabalhos experimentais pioneiros no estudo envolvendo *phase slip line* (PSL) foi abordado por V. G. Volotskaya et al em 1981 [26]. Eles verificaram um comportamento da curva I-V análogo ao dos PSCs em filmes supercondutores com largura maior que λ_{eff} . Cinco anos mais tarde, S. V. Lempitskiĭ analisou teoricamente tal fenômeno utilizando as equações GTDGL, onde obteve uma expressão para estimar o tamanho da PSL e o valor da descontinuidade na voltagem [27]. Em 1991, A. Weber e L. Kramer publicaram um trabalho envolvendo o estado dissipativo utilizando as equações GTDGL em filmes supercondutores com uma corrente de transporte [28]. Para tal fim, resolveram numericamente a equação GTDGL, e propuseram uma versão alternativa da mesma, na qual se tem somente uma derivada temporal no parâmetro de ordem, ou seja, a derivada temporal envolvendo a densidade de super elétrons foi desprezada (veja Capítulo 2). Foram encontrados dois tipos de soluções que envolvem o estado resistivo. O primeiro caso, corresponde ao surgimento de uma PSL, que é uma oscilação do parâmetro de ordem em uma linha perpendicular à direção da corrente aplicada. Tal estrutura é análoga ao PSC em supercondutores unidimensionais, portanto, possui o mesmo comportamento da voltagem em função da corrente. No segundo caso, surgem pares de vórtice e antivórtice (V-AV) que são nucleados espontaneamente e se movem na mesma direção (perpendicular à corrente) e em sentidos opostos. Assim, o par acaba por se aniquilar e, após a aniquilação, um novo par de V-AV é criado, caracterizando um processo cíclico. Vale ressaltar que a natureza desses pares de V-AV são diferentes dos estudados no Capítulo 6, pois aqueles são de origem magnética e, neste caso, tem-se ausência de qualquer fonte de campo magnético (incluindo o auto campo gerado pela corrente de transporte), pois $w \ll \lambda$, sendo w a largura do filme. A Figura 7.1 ilustra os dois tipos de soluções para os estados resistivos discutidos no texto. Os parâmetros γ da equação GTDGL, w e a corrente aplicada estão relacionados com o surgimento ou a transição pares de V-AV em PSL. Assim, para um dado valor de γ e w , a partir de um certo valor de corrente, temos a transição do regime de pares de V-AV para uma PSL, que é caracterizado com um salto na voltagem [28].

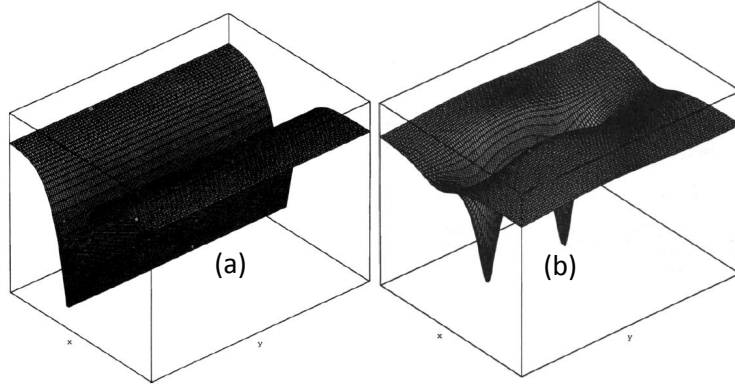


Figura 7.1: Configurações do $|\psi|$ para o estado resistivo obtidos por Weber e Kramer na solução das equações GTDGL [28]. (a) $|\psi|$ é depreciado ao longo de uma linha perpendicular a corrente, oscilando periodicamente no tempo, caracterizando uma PSL. (b) Dinâmica do V-AV ao longo do eixo perpendicular a corrente aplicada.

Dois anos depois, A. Andronov et al utilizaram uma versão modificada da GTDGL para investigar a formação de PSL em uma micro-ponte homogênea e com defeito [29]. Para a micro ponte homogênea verificaram que o estado resistivo ocorre quando o valor da corrente é suficiente para quebrar os pares de Cooper, resultando em uma PSL (se a largura da ponte for estreita) ou em pares de V-AV (se a largura da ponte for mais larga). Para o caso da micro ponte com defeito, tem-se a formação de pares de V-AV anisotrópicos que levam a amostra para o estado resistivo. Neste trabalho, os pares de V-AV foram denominados pela primeira vez pelos autores de (anti)vórtices cinemáticos para diferenciar dos fluxoides (ou vórtices) de Abrikosov que são quasipartículas. Assim, definiram que o vórtice cinemático com velocidade infinita, forma o PSL e que quanto mais uniforme for a distribuição das correntes na ponte, o vórtice se moverá mais rapidamente.

A presença oscilações eletromagnéticas como campos magnéticos externos alternados e correntes de transporte alternadas afetam o comportamento das propriedades elétricas de filmes supercondutores quando estão no estado resistivo devido a PSL. A estrutura da curva V-I, quando há uma corrente AC, tem o aspecto de um regime de flux flow na presença de campo magnético externo alternado. A resistência dinâmica no estado resistivo em ambos os casos depende de $l_E(f)$, onde f é a frequência de oscilação [30]. Melhorias na corrente crítica foram obtidas para baixos valores de potência do campo alternado, e estão relacionadas com um aumento de ψ , devido ao aumento na barreira superficial, como foi previsto teoricamente por V. M. Dmitriev e E. V. Khristenko em 1978 [31].

Em 2003, A. G. Sivakov et al realizaram um experimento pioneiro onde mostraram o comportamento Josephson das PSLs provendo uma evidência dos vórtices cinemáticos [32]. Utilizando uma fita supercondutora de Sn com uma corrente de transporte em um aparato S/N/S (onde N é uma região normal e S supercondutora), verificaram desconti-

nuidades na curva I-V. Cada descontinuidade correspondia a uma PSL (ver Figura 1 do artigo). As PSLs foram observadas utilizando a técnica de escaneamento de microscopia laser em baixas temperaturas, onde verificou-se que as PSLs se formam de maneira perpendicular à corrente aplicada, tal como previsto anteriormente em soluções numéricas das equações GTDGL. As descontinuidades que surgem na voltagem, seguem a relação Josephson $V = nf\phi_0$, sendo n e f um número inteiro e a frequência (da ordem em micro-ondas) respectivamente. A velocidade dos vórtices cinemáticos (v_{kv}) foi estimada utilizando a seguinte relação $v_{kv} \simeq df \approx 10^5 m/s$, sendo d a largura da fita.

Por volta da segunda metade da década de 2000, simulações numéricas via equações GTDGL mostraram que a influência de fontes magnéticas (como campo magnético externo ou dots magnéticos), contatos metálicos e da largura dos filmes supercondutores modificam o comportamento do estado resistivo. Quando se tem uma fita ou filme supercondutor com uma corrente de transporte (J_{Tr}) e na presença campo magnético externo, a densidade de corrente (J_s) aumenta de um lado e diminui do outro lado da fita ou filme. Isso é devido à soma vetorial das densidades de corrente transporte e de blindagem, as quais dependem do sentido de J_{Tr} e H . Como efeito, temos alterações nos valores de J_{c1} e J_{c2} , onde J_{c1} aumenta somente para baixos valores de H , devido a efeitos não lineares no momento do condensado. J_{c2} decresce para qualquer valor de campo H , se o filme tiver um grande valor de w [33]. Dependendo dos valores de J_{Tr} e H , podemos ter um estado resistivo devido a um regime de PSL ou *flux flow*.

As dimensões da amostra praticamente não influenciam no valor da corrente para que ocorra o primeiro PSL para um dado valor de γ , por outro lado, elas determinarão a quantidade de PSLs presentes, como mostra a Ref. [34]. Na presença de um campo magnético externo, também apresentam duas formas de estado resistivo, i.e., são devidos as PSLs ou *flux flow*. Se o campo externo foi baixo, temos um aumento no valor de J_{c2} devido à distribuição não uniforme da densidade de corrente para diferentes tamanhos do contato metálico. Por outro lado, se o tamanho dos contatos forem o mesmo da lateral da amostra, não haverá aumento em J_{c2} devido a uniformidade na corrente de transporte por toda a amostra.

G. R. Berdiyorov, M. V. Milosëvić e F. M. Peeters fizeram um mapeamento do estado resistivo quando na presença de pares de vórtices e antivórtices cinemáticos ($V - AV_{Kv}$), bem como analisaram a influência dos contatos metálicos e H na dinâmica de tais pares [35]. O tamanho dos contatos metálicos influenciam o valor de J_{c1} , onde quanto menor seu tamanho, menor será o valor de J_{c1} . Os autores dividiram o estado resistivo em duas regiões, as quais são caracterizadas pela dinâmica dos pares de $V - AV_{Kv}$. Se eles surgem no centro da amostra e se movimentam em sentidos opostos temos o estado “resistivo I”. Por outro lado, se os pares entram pelas bordas da amostra e se aniquilam no centro temos o estado “resistivo II”. Diferentemente do mostrado na Ref. [28], onde os pares sempre

entram pelas bordas e se aniquilam no centro. Quando há um H não nulo, porém baixo o suficiente para que não entrem vórtices de Abrikosov, ocorrem modificações na dinâmica dos pares devido às interações de (J_{Tr}) e (J_{Sh}) (como descrevemos nos parágrafos anteriores). Como efeito, há modificações na região de criação dos pares para o caso do regime “resistivo I”, ou seja, um atraso na nucleação do antivórtice e alteração no ponto de aniquilação no regime “resistivo II”. Outro feito são as alterações nas velocidades médias dos vórtices, onde o valor máximo sempre ocorre em $H = 0$.

Dots magnéticos no supercondutor afetam o comportamento da PSL. Essas mudanças dependerão da localização, intensidade e quantidade de dots magnéticos no supercondutor. A PSL ocorre na localização do dot magnético independentemente deste estar ou não no centro da amostra. Conforme aumenta-se a intensidade da corrente elétrica, aparecem outras PSLs na amostra, contudo sua distribuição na amostra vai da localização dot magnético [36]. Assim temos uma quebra de simetria na formação dos PSLs devida à assimetria do fluxo de corrente em virtude da localização do dot. Com isso temos um comportamento multi harmônico na voltagem em função do tempo. Por outro lado, analisando somente a primeira PSL, temos para $M \neq 0$ a curva da voltagem em função do tempo apresenta certas “perturbações” em relação quando $M = 0$. Para casos onde há diversos dots magnéticos, J_{c1} diminui com o número de dots, porém J_{c2} não depende de tal fator. Com 6 dots magnéticos, há o surgimento de V-AV de Abrikosov, devido à grande intensidade do momento magnético. Observa-se que com a formação de V-AV de Abrikosov, tem-se uma queda no pico da voltagem em função do tempo, pois estes são mais lentos que os V-AV cinemáticos, todavia o processo dinâmico procede de forma similar.

Em um supercondutor em formato de loop (ver Figura 7.2), com uma corrente aplicada e campo magnético externo, ocorrem alterações no comportamento oscilatório da voltagem durante o movimento de vórtice cinemático [37]. No comportamento da voltagem em função do tempo ($V \times \Delta t$) para o caso de $H > 0$, nota-se uma mudança na oscilação em relação a $H = 0$ (ver inset da Figura 2). Para esse caso, surge somente o vórtice cinemático (lembrando $H \neq 0$ afeta a dinâmica dos vórtices cinemáticos, como discutimos anteriormente) o qual, no processo de entrada e saída da amostra é aprisionado temporariamente (indicado nos intervalos 1-6 e (a)), levando a uma perturbação no comportamento oscilatório de $V \times \Delta t$ (região em cinza no gráfico (a)). Por sua vez, tal processo de aprisionamento ocasiona um decréscimo na taxa de variação da voltagem em relação ao tempo (mostrado no gráfico (b)).

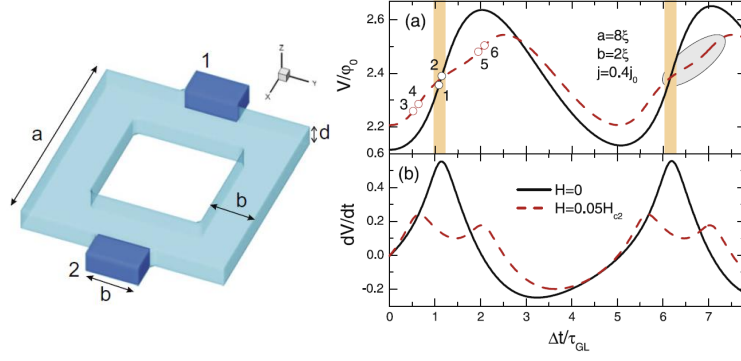


Figura 7.2: Loop supercondutor quadrado de tamanho lateral a simulado pelos autores da Ref. [37], sendo b e d o tamanho dos contatos metálicos e a espessura da amostra, respectivamente. (a) Comportamento da voltagem em função do tempo para o caso de $H = 0$ e $H > 0$. (b) derivada da voltagem em relação ao tempo obtida em (a).

7.2 Resultados

Como vimos, diversas propriedades do estado resistivo devido à processos de PSC ou PSL foram estudados extensivamente nas últimas décadas. Contudo, ainda temos uma carência de estudos no tocante a difusão térmica que surge em tais processos. Assim, em nossa proposta, apresentamos de uma maneira mais detalhada a natureza e propriedades dos mecanismos de dissipação que advém do estado resistivo envolvendo pares de V-AV cinemáticos utilizando o teorema da energia livre (ver Capítulo 2). Como consequência do processo dissipativo, temos a difusão térmica, no qual analisamos a contribuição de cada mecanismo de dissipação e a influência do substrato para o aumento local de temperatura. Por fim, veremos quais propriedades do estado resistivo são sensíveis a essa variação de temperatura.

7.2.1 Mecanismos de dissipação e difusão térmica envolvendo V-AV cinemáticos

Estudamos a cinética que envolve o processo de aniquilação de pares de V-AV cinemáticos. Fizemos simulações numéricas com amostras de tamanho fixo $L_x = 36\xi(0)$ e $L_y = 24\xi(0)$, onde partimos do estado supercondutor e aplicamos corrente a passos de $\Delta J = 10^{-3}J_0$ até o estado normal ser atingido. Os contatos metálicos foram fixados com o tamanho de $w = 6\xi(0)$, a taxa de remoção de calor para o substrato $\eta = 2 \times 10^{-4}$ e utilizamos a malha numérica na resolução de $\Delta x = \Delta y = 0,3\xi(0)$ em todas as simulações (veja o esquema apresentado na Figura 7.3). Consideramos a ausência de qualquer fonte de campo magnético, assim, $\mathbf{A} = 0$ para todos os tempos e posições no conjunto de equações propostas no Capítulo 3.

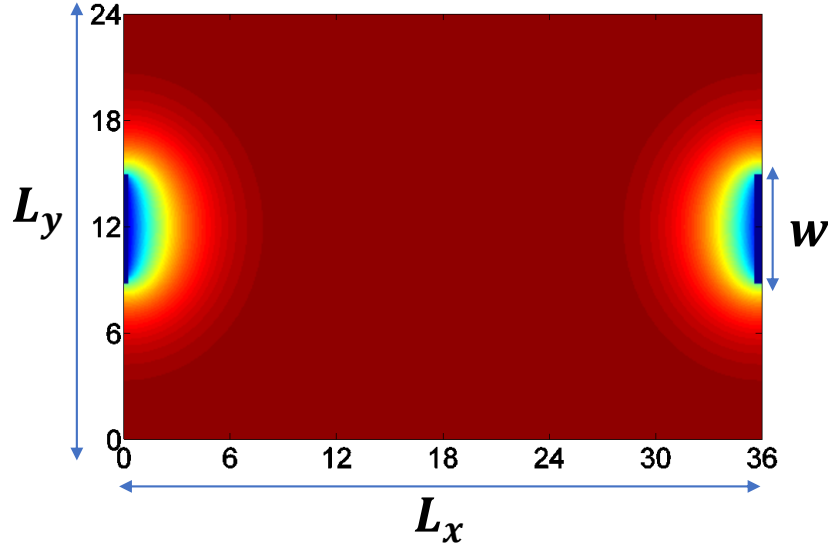


Figura 7.3: Esquema da amostra simulada em $J = 0$. Regiões em vermelho/azul escuro temos que $|\psi|$ é máximo/nulo, a cor azul escuro indica os contatos metálicos. O gradiente de $|\psi|$ nas proximidades do contato metálico é devido a condição de contorno supercondutor/metal.

Quando $J > J_{c1}$, o sistema entra no estado resistivo devido a um processo dinâmico composto por um par de V-AV cinemático. É neste cenário que fizemos um mapeamento do comportamento dos mecanismos de dissipação para alguns valores de γ e T_0 , para um intervalo de correntes próximas, porém maiores que J_{c1} , como mostra a Figura 7.4. Em todos os casos analisados, W_ψ e W_γ decrescem com o aumento de J , enquanto que W_Φ aumenta. Apesar de nos casos das Figuras 7.4 (c), (d) e (e) ter uma competição entre W_ψ e W_Φ , podemos dizer que para valores de corrente mais afastados de J_{c1} , W_Φ tende a superar W_ψ , pois sua intensidade cresce com o aumento da corrente. Como W_γ apresenta um valor bem menor que os outros dois mecanismos de dissipação, o comportamento de W_{Total} em função da corrente irá depender da relação entre as intensidades de W_Φ/W_ψ . Fixando nos valores de $J = 0,035J_0$ e $J = 0,036J_0$ nas Figuras 4 (d), (e) e (g), nota-se que apesar das diferenças apresentadas em γ e T_0 para cada caso, W_Φ tem mudanças bem sutis em relação a tais variações, tendo alterações em sua intensidade na ordem de 10^{-6} para cada um dos casos. Isso mostra que é fortemente dependente do valor de J , assim γ e T_0 exercem baixíssima influencia no valor de W_Φ . Por outro lado, W_ψ e W_γ são sensíveis as mudanças de γ e T_0 para um determinado valor de J . A Figura 7.5 mostra a variação dos mecanismos de dissipação para maiores valores de J para os casos da Figuras 7.4 (c) e (e). Assim, para valores de J mais afastados de J_{c1} , o comportamento da curva de W_{Total} segue o mesmo de W_Φ , pois este se tornou o mecanismos de dissipação proeminente. Quando isso acontece, temos que o valor de W_{Total} volta a aumentar em função de J . Depois de passar por um valor de mínimo, W_ψ tem uma leve aumento a partir de um certo valor de J (observe na Figura 7.5), mantendo-se quase constante ou tendo um leve oscilação.

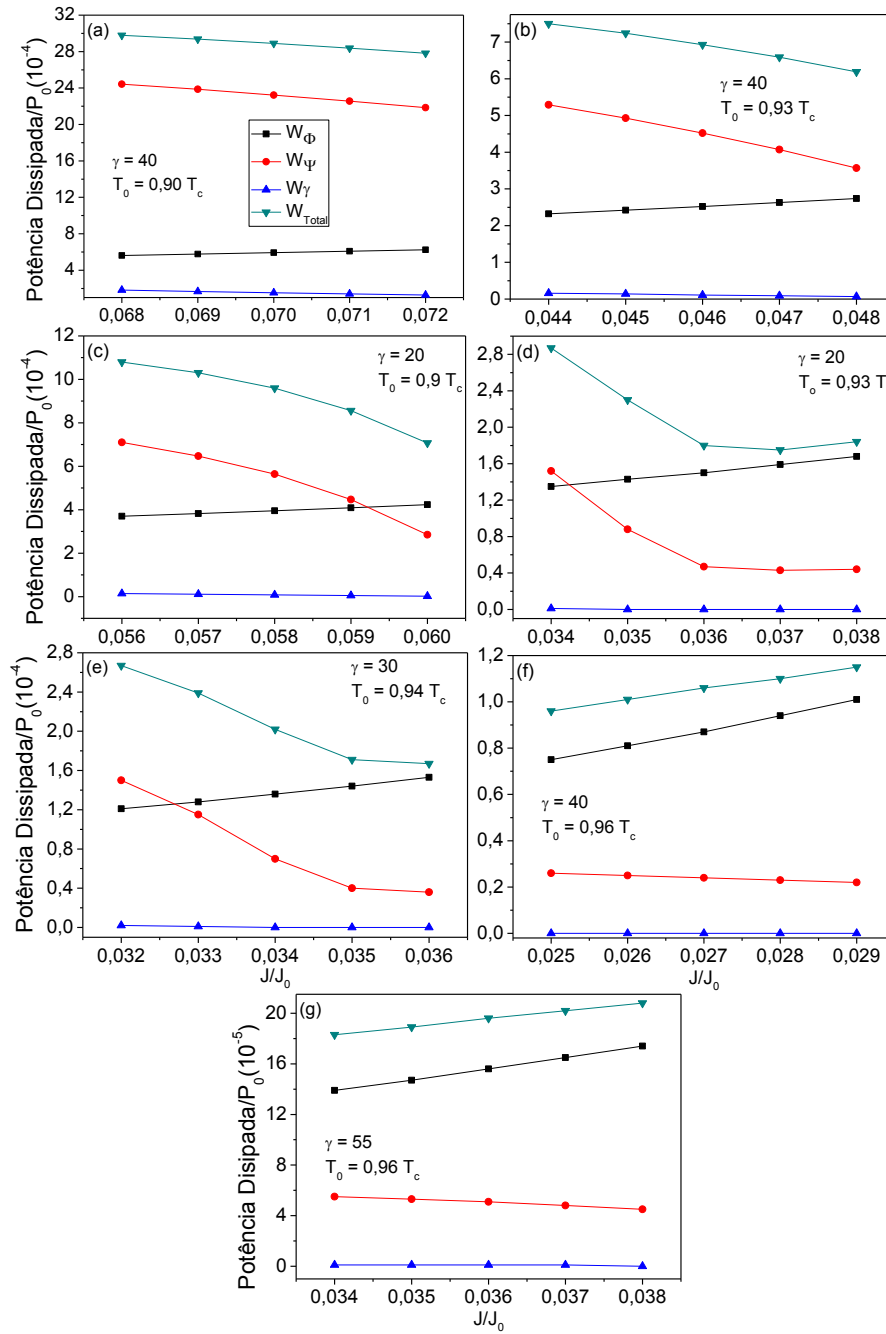


Figura 7.4: Potência dissipada máxima por unidade de volume em um determinado instante de tempo para os diferentes mecanismos de dissipação e W_{Total} durante a dinâmica de V-AV cinemáticos em função da densidade de corrente aplicada, para diversos valores de γ e T_0 , no regime de $J_{c1} < J < J_{c2}$. A forma que os gráficos estão dispostos ((a)-(g)), seguem uma ordem crescente de aproximação quantitativa dos valores de γ e T_0 que são verificados experimentalmente (na parte “Discussão do resultados” abordaremos com maiores detalhes).

Tal comportamento indica um regime de instabilidade na amostra, onde que, para valores um pouco maiores de corrente (não mostrados nos gráficos), a supercondutividade

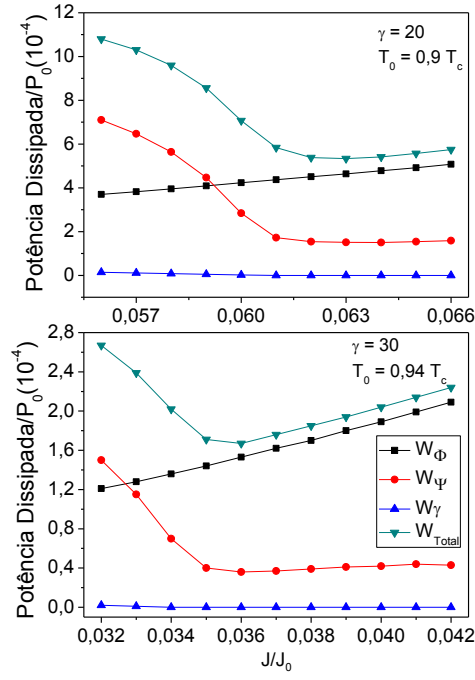


Figura 7.5: Mecanismos de dissipação apresentados na Figura 7.4 (c) e (e) para um intervalo maiores de valores de J .

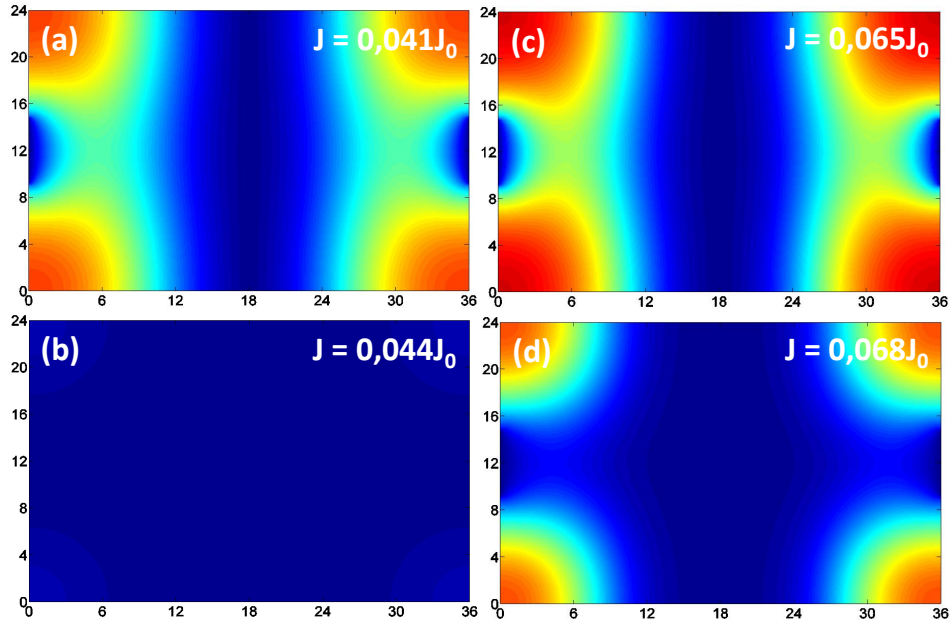


Figura 7.6: Distribuição do $|\psi|$ sendo as regiões vermelho escuro/azul escura onde $|\psi|$ é máximo/nulo, para a região onde W_ψ apresenta uma tendência de quase-saturação mostrados na Figura 5, indicando assim uma região de transição do estado resistivo/normal. (a) e (b) para a amostra $\gamma = 30$ e $T_0 = 0,94T_c$. (c) e (d) para amostra $\gamma = 20$ e $T_0 = 0,9T_c$.

é destruída em quase toda a amostra, como mostra a Figura 7.6. Quando no estado resistivo, a dinâmica de V-AV se procede com a formação de um par de V-AV no centro

da amostra e, logo em seguida, eles se repelem na mesma direção e em sentidos opostos, saindo pelas bordas da amostras. Entretanto, a partir de um certo valor de J , a dinâmica de V-AV muda de comportamento, com o vórtice e o antivórtice sendo formado nas bordas, interagindo-se atrativamente e se aniquilando no centro da amostra. Os valores de J que delimitam os dois tipos de dinâmica são indicados com os algarismos romanos (I) e (II) respectivamente na Figura 7.7. Comparando com os mecanismos de dissipação, notamos que quando há um processo de aniquilação dos V-AV cinemáticos, i.e., no regime (II), $W_\Phi > W_\psi$.

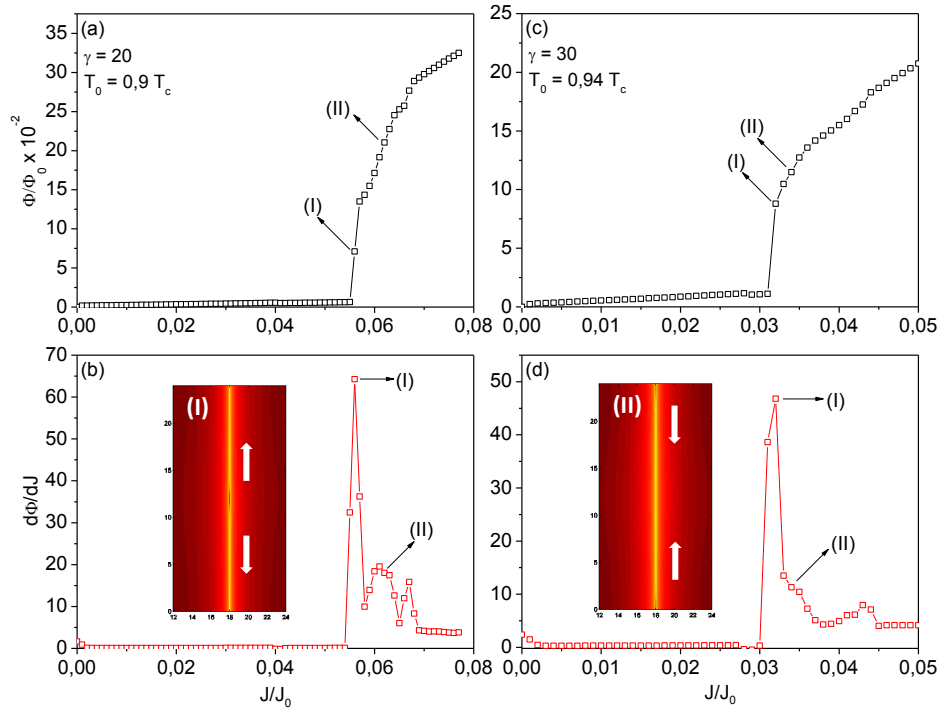


Figura 7.7: Comportamento da voltagem em função da corrente (a) e (c) e a resistência diferencial (b) e (d) para os casos da Figura 7.5. Os *snapshots* de $\log|\psi|$, mostram como ocorrerá a dinâmica V-AV para as situações indicadas em (I) e (II).

Analisando o comportamento dos mecanismos de dissipação em relação à posição do vórtice e do antivórtice no tempo para os estados (I) e (II), temos que $\langle W_\Phi \rangle$, $\langle W_\psi \rangle$ e $\langle W_{Total} \rangle$ aumentam conforme a evolução da dinâmica V-AV evoluiu no tempo para ambos os estados, enquanto que $\langle W_\gamma \rangle$ decresce (veja Figuras 7.8 e 7.9, para os estados I e II respectivamente). Os *snapshots* mostram os valores máximos para os mecanismos de dissipação (exceto $\langle W_\gamma \rangle$, pois apresenta um valor extremamente baixo), W_{Total} e para a variação de temperatura envolvida no processo ($\Delta T = T - T_0$) em um instante de tempo onde a dissipação é máxima (ver as indicações em * nas Figuras 7.8 e 7.9). As alterações na dinâmica de V-AV não modificam o instante de tempo no qual W_Φ e W_ψ atingem sua intensidade máxima local, que ocorrem no final de cada ciclo da dinâmica V-AV e sempre na mesma região da amostra.

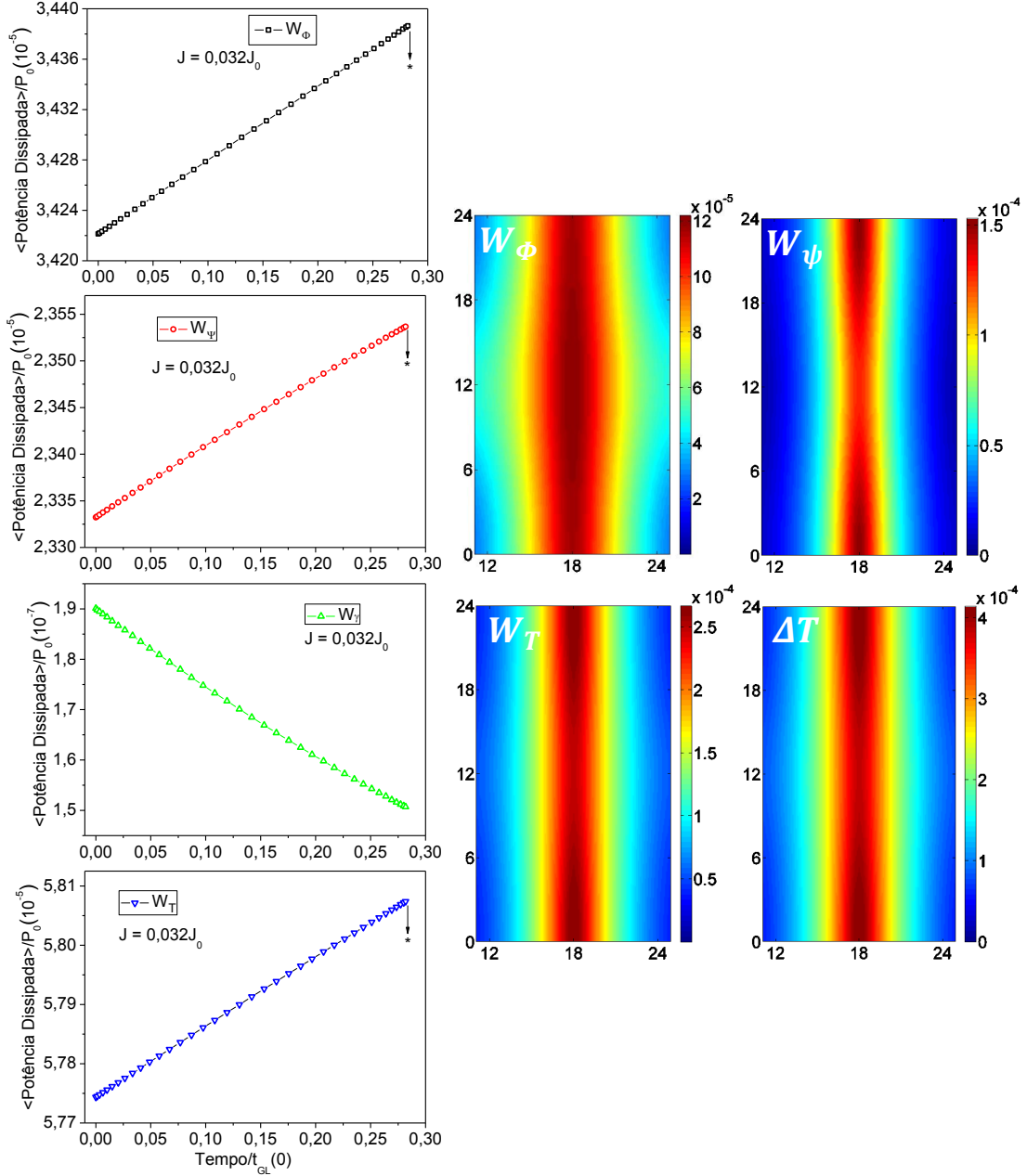


Figura 7.8: Potência dissipada média por unidade de volume em função do tempo, durante o movimento de V-AV cinemáticos para o estado (I) da amostra $\gamma = 30$ e $T_0 = 0,94T_c$. Os *snapshots* indicam a energia dissipada máxima por unidade de volume na região da dinâmica V-AV em um determinado instante de tempo e a variação de temperatura envolvida no processo.

A intensidade de W_Φ depende do valor da densidade de corrente dos elétrons normais (J_n), que durante o estado resistivo concentram-se, majoritariamente, na região por onde a dinâmica de V-AV ocorre. Entretanto, os nossos contatos metálicos são menores de que L_y , ocasionando uma distribuição não homogênea da corrente de transporte. Nesse cenário, temos um fluxo de corrente mais intenso no centro da amostra, levando a termos uma maior concentração de J_n , que conseqüentemente, W_Φ é mais intenso em tal

região, como mostra a Figura 7.10 (a). Como W_ψ está relacionado aos processos de relaxação do sistema, observamos que as alterações na amplitude do parâmetro de ordem dependem da posição do vórtice e do antivórtice na amostra (veja Figura 7.10 (b) e (c)). A taxa de variação do $|\psi|$ durante um ciclo da dinâmica V-AV, é maior nas extremidades do que no centro da amostra, o que leva o valor de W_ψ ser mais intenso em tais regiões.

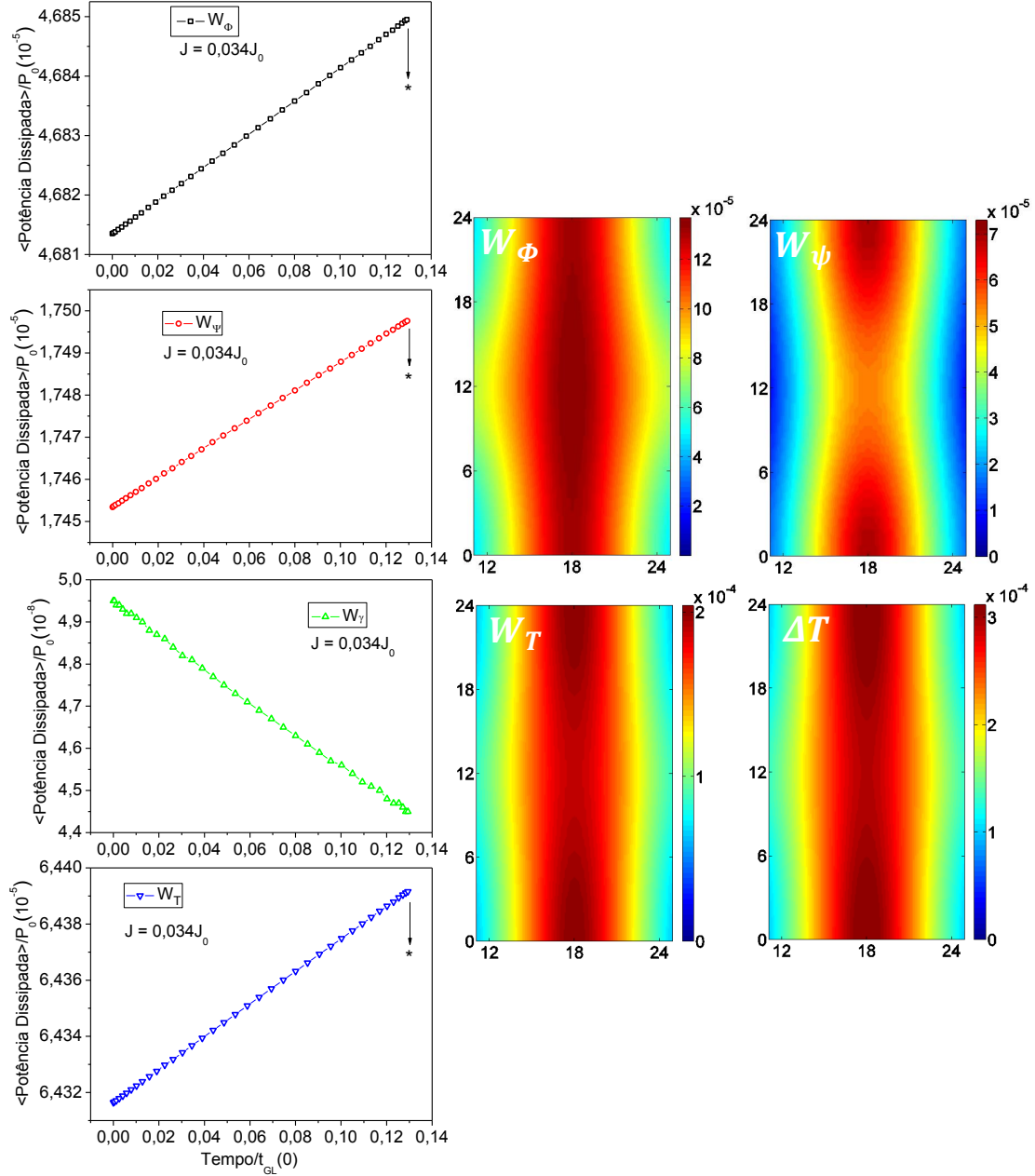


Figura 7.9: Potência dissipada média por unidade de volume em função do tempo, durante o movimento de V-AV cinemáticos para o estado (II) da amostra $\gamma = 30$ e $T_0 = 0,94T_c$. Os *snapshots* indicam a energia dissipada máxima por unidade de volume na região da dinâmica V-AV em um determinado instante de tempo e a variação de temperatura envolvida no processo.

Quando aumenta-se a corrente de transporte, percebemos uma queda no valor máximo de $|\psi|$ bem como no período em que ocorre a dinâmica V-AV. Comparando a taxa de variação do $|\psi|$ durante tal período para os casos abordados nas Figuras 7.10 (b) e (c), notamos que seu valor decresce conforme aumenta-se o valor de J , acarretando no decréscimo da intensidade máxima de W_ψ , o que está de acordo com as análises apresentadas na Figura 7.4.

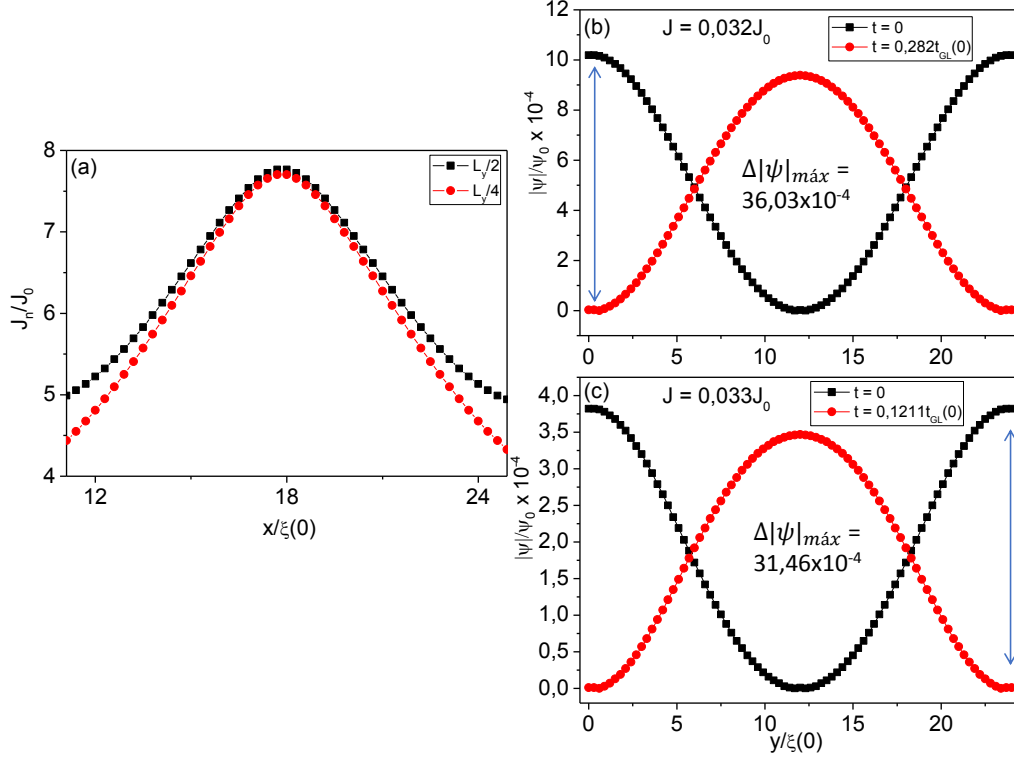


Figura 7.10: (a) Varredura de J_n em função de x para dois valores diferentes de y , para a amostra com $\gamma = 30$ e $T_0 = 0,94T_c$ em $J = 0,032J_0$. (b) e (c) Variação da amplitude do parâmetro de ordem em y em $x = 18\xi(0)$, durante um ciclo da dinâmica de V-AV cinemáticos, para a amostra com $\gamma = 30$ e $T_0 = 0,94T_c$.

7.2.2 Influência do substrato no estado resistivo

Como que o processo de V-AV cinemáticos é dinâmico, temos que, uma vez no estado resistivo, a temperatura não retorna a aquela de banho térmico. Assim, analisamos como os efeitos térmicos podem afetar a cinemática dos pares V-AV, a energia dissipada e a oscilação do potencial. Dessa forma, a eficiência do substrato em remover calor é um fator chave para ver o quanto a variação de temperatura afeta as grandezas físicas do estado resistivo. Para tal fim, utilizamos os valores $\eta = 2 \times 10^{-4}$ e $\eta = 2 \times 10^{-5}$ os quais correspondem, respectivamente, a um substrato de eficiência média e baixa, de acordo com a Ref.[38]. A Figura 7.11 mostra os *snapshots* de W_{Total} e ΔT para ambos os valores

de η . Observamos que, apesar da diferença de uma ordem de grandeza entre os dois valores de η , a variação máxima de temperatura não seguiu a mesma proporção. Isso ocorreu devido a um decréscimo significativo em W_ψ , pois foi o aquele que sofreu maior variação com o aumento de temperatura dentre os mecanismos de dissipação. Por outro lado, em termos percentuais, W_γ foi o que apresentou maior variação. W_Φ teve apenas um leve decréscimo, ficando praticamente constante, o que reforça mais uma vez que é apenas sensível as mudanças de J . Os mecanismos de dissipação para $\eta = 2 \times 10^{-4}$ na Figura 7.11 são os mesmos da Figura 7.4 (a). No caso $\eta = 2 \times 10^{-5}$ não estão mostrados aqui, pois focamos em comparar o comportamento de W_{Total} e ΔT .

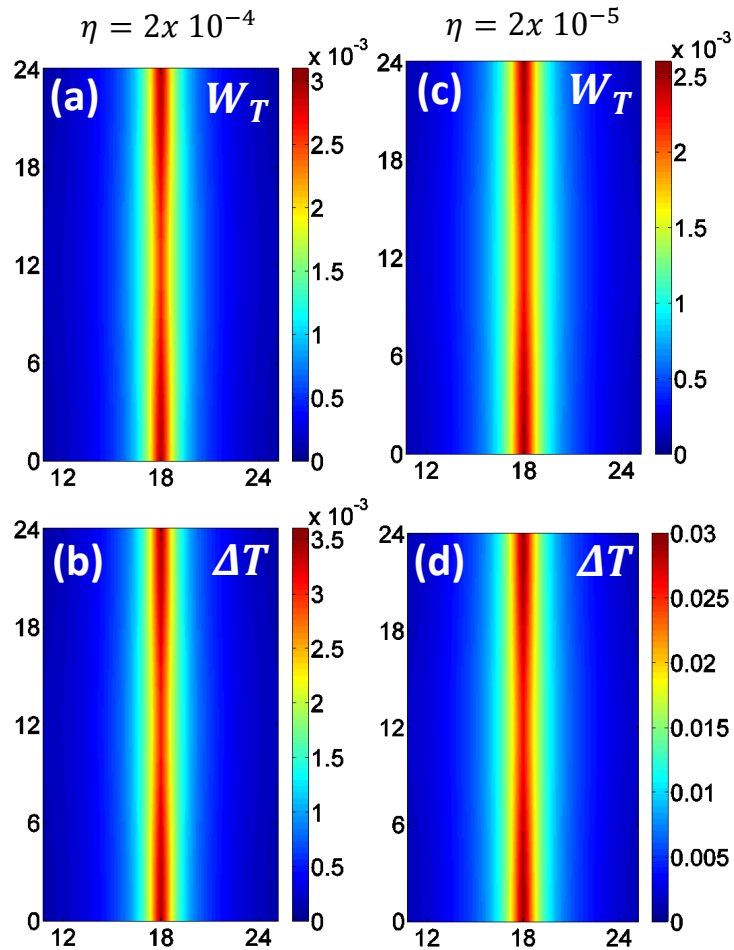


Figura 7.11: Potência total dissipada máxima em um determinado instante de tempo e a variação de temperatura envolvida no processo, em $J = 0,068J_0$ para a amostra com $\gamma = 40$ e $T_0 = 0,9T_c$. (a) e (b) W_{Total} e ΔT com $\eta = 2 \times 10^{-4}$; (c) e (d) W_{Total} e ΔT com $\eta = 2 \times 10^{-5}$.

A dinâmica de aniquilação não teve mudanças apreciáveis para tal variação de temperatura, assim, a posição e velocidade do vórtice não apresentaram mudanças, como é mostrado na Figura 7.12 (a) e (b). Quando comparamos o comportamento de $\Phi(t)$ (ver Figura 7.12 (c)), houve um aumento na frequência e uma diminuição na amplitude de

oscilação do potencial com o aumento de temperatura, que é devido a um aumento na degradação do $|\psi|$ (ver Figura 7.13) na região no qual ocorre a dinâmica V-AV. Com isso, temos um aumento no comprimento de distribuição das quasipartículas, que como efeito, afeta os valores da frequência e da amplitude de $\Phi(t)$. O controle de η é desejável quando pretende-se estabilizar o sinal das oscilações do potencial com uma determinada frequência e amplitude para possíveis aplicações em nanodispositivos supercondutores.

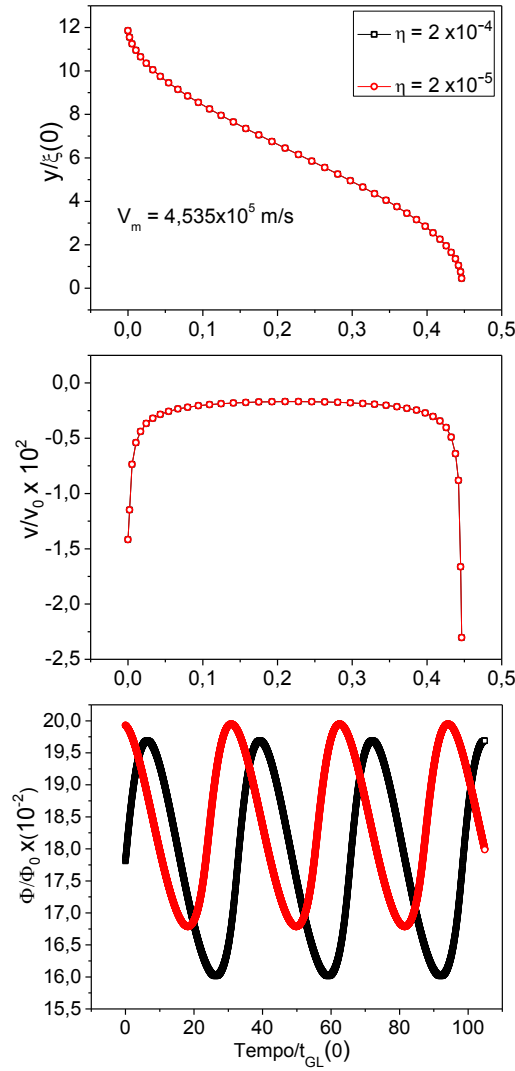


Figura 7.12: Influência de η na dinâmica do vórtice cinemático e na oscilação da voltagem, em $J = 0,068J_0$ para a amostra com $\gamma = 40$ e $T_0 = 0,9T_c$. (a) e (b) Evolução no tempo da posição e velocidade instantânea do vórtice cinemático respectivamente; (c) Oscilação da voltagem em função do tempo.

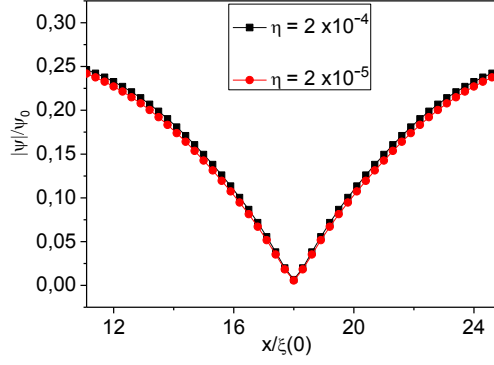


Figura 7.13: Varredura do $|\psi|$ ao longo do eixo x passando pelo centro da amostra (fixando $y = 12\xi(0)$) na região da dinâmica de V-AV para as situações ilustradas na Figura 7.11.

7.2.3 Discussão dos resultados

Apresentamos na Figura 7.4 comportamento dos mecanismos de dissipação durante uma dinâmica de V-AV cinemáticos em função de J , no regime $J_{c1} < J \ll J_{c2}$ para diversos valores de γ e T_0 . Notamos que há cerca de 3 tipos de relação entre os principais mecanismos de dissipação W_Φ e W_ψ , pois W_γ tem uma contribuição extremamente baixa no cálculo de W_{Total} . Com base na Figura 7.4, vamos definir três regimes, $W_\psi > W_\Phi$ (Figura 7.4 (a) e (b)), transição com W_Φ superando W_ψ (Figura 7.4 (c), (d) e (e)) e $W_\Phi > W_\psi$ (Figura 7.4 (f) e (g)). Estritamente falando, as equações GTDGL são válidas no regime $1 - \tilde{T} < \frac{u^{1/2}}{\gamma}$, assim, as análises da Figura 7.4 (a) e (b) estão restritas apenas a um tratamento qualitativo acerca dos mecanismos de dissipação e ΔT . Como demonstramos, W_Φ é praticamente sensível apenas às mudanças em J , enquanto que W_ψ depende de γ , T_0 e J . Por outro lado, no regime $J \gg J_{c1}$, W_Φ torna-se o mecanismo de dissipação predominante, regendo o comportamento da curva de W_{Total} .

Também observamos mudanças na dinâmica de V-AV que caracteriza os estados (I) e (II) (veja Figura 7.7), tal como anteriormente observadas por G. R. Berdiyorov, M. V. Milosević e F. M. Peeters [35]. Essas mudanças não afetam nem o instante de tempo nem a região na amostra onde W_Φ e W_ψ tem seu valor máximo local, para cada ciclo de formação do par V-AV cinemáticos. No estado resistivo, aumentando-se J aumenta-se também o fluxo de J_n na amostra, o que, por sua vez, aumenta o valor de W_Φ , independentemente de γ e T_0 . Como discutimos anteriormente, tal mecanismo sofre baixíssima influência de tais parâmetros. No entanto, o valor máximo de W_ψ sempre decresce com o aumento de J . Isso se deve ao decréscimo na variação da amplitude do parâmetro de ordem ($|\psi|$) durante a dinâmica V-AV (veja Figuras 10(b) e (c)), para um dado valor de γ e T_0 . Vale ressaltar que na presença de correntes de transporte, temos que resolver a equação de Φ (veja Capítulo 3), assim, diferentemente da estrutura de W_ψ apresentados nos capítulos 5 e 6 (onde $\Phi = 0$), no estudo de vórtice e antivórtice cinemáticos W_ψ tem uma dependência

com Φ . Entretanto, como mostramos na Figura 7.10 (b) e (c), a relaxação do $|\psi|$ rege o comportamento de W_ψ , tanto para os vórtices de Abrikosov quanto para os cinemáticos.

Para podermos comparar os resultados das simulações com aqueles experimentais, parâmetros como τ_E , T_c e a relação $l/\xi(0)$ são requeridos. Para uma comparação quantitativa com as equações GTDGL, além da condição $1 - \tilde{T} < \frac{u^{1/2}}{\gamma}$ ser requerida, a amostra deve estar no limite sujo $l \ll \xi(0)$. R. Tidecks and T. Werner mostraram que os valores de γ são da ordem de $10^2 - 10^3$ para diversos tipos de metais e ligas metálicas [39]. As liga de In-Pb e o Pb apresentam-se favoráveis para se compararmos com nossos resultados, pois apresentam $\gamma \approx 100$ [39, 40], logo, é requerido $\tilde{T} < 0,976$. Nossa simulação mais próxima quantitativamente dessa condição é exposta na Figura 4 (g), que mostra W_Φ como principal mecanismo de dissipação, porém W_ψ tem uma contribuição considerável no cálculo de W_{Total} . Por outro lado, quanto maior o valor de γ , maior é o custo computacional, ou seja, o tempo necessário para se realizar as simulações. Outros materiais, como a liga Pb-Bi e o Nb possuem baixo valor de τ_E ($\approx 10^{-12}$ s) [41, 42], fazendo com que γ seja na ordem de algumas dezenas, o qual podemos trabalhar com uma faixa de temperatura um pouco mais afastada de T_c , em contrapartida, nem sempre estes materiais satisfazem o critério $l \ll \xi(0)$.

A verificação da influência do substrato na dinâmica do par de V-AV, bem como nas oscilações do potencial, enquadra-se em um tratamento qualitativo de como ΔT altera essas grandezas físicas, pois utilizamos como base a amostra com os valores de $\gamma = 40$ e $T_0 = 0,9T_c$. Esses valores não seguem estritamente os critérios da GTDGL, contudo foi a amostra que obtivemos maior ΔT . Verificamos que o processo de difusão não altera de maneira qualitativa a dinâmica do sistema, tal como também verificado anteriormente por A. K. Elmurodov et al [25]. Diversos autores ao fazerem uma histerese da curva $V \times I$, notaram que os efeitos térmicos alteram de maneira significativa tanto o comportamento da mesma [25, 16, 43, 44] como também da curva $R \times T$. Assim, é necessário considerar as correções devidas à difusão térmica para uma análise mais fiel com o experimento. Em nosso caso, verificamos que os efeitos térmicos não alteram (em nossa escala de ΔT) grandezas como a posição e a velocidade instantânea do vórtice no tempo, todavia as oscilações do potencial sofrem um aumento na frequência e diminuição na amplitude é devido a um aumento de Λ_Q (que depende de ΔT), que é o comprimento de distribuição das quasipartículas na região da dinâmica do par de V-AV (ou *phase slip*, veja discussão na sessão 7.1) causada pela variação de temperatura. Tal estudo pode ser utilizado para auxiliar a obter a velocidade de vórtices via ressonância estroboscópica [45].

Com o auxílio da técnica de mapeamento térmico [46], é possível registrar o movimento periódico dos V-AV cinemáticos através das variações na distribuição espacial e intensidade ΔT (veja a Figura 7.14). Onde, o ΔT máximo ocorrerá no final do ciclo,

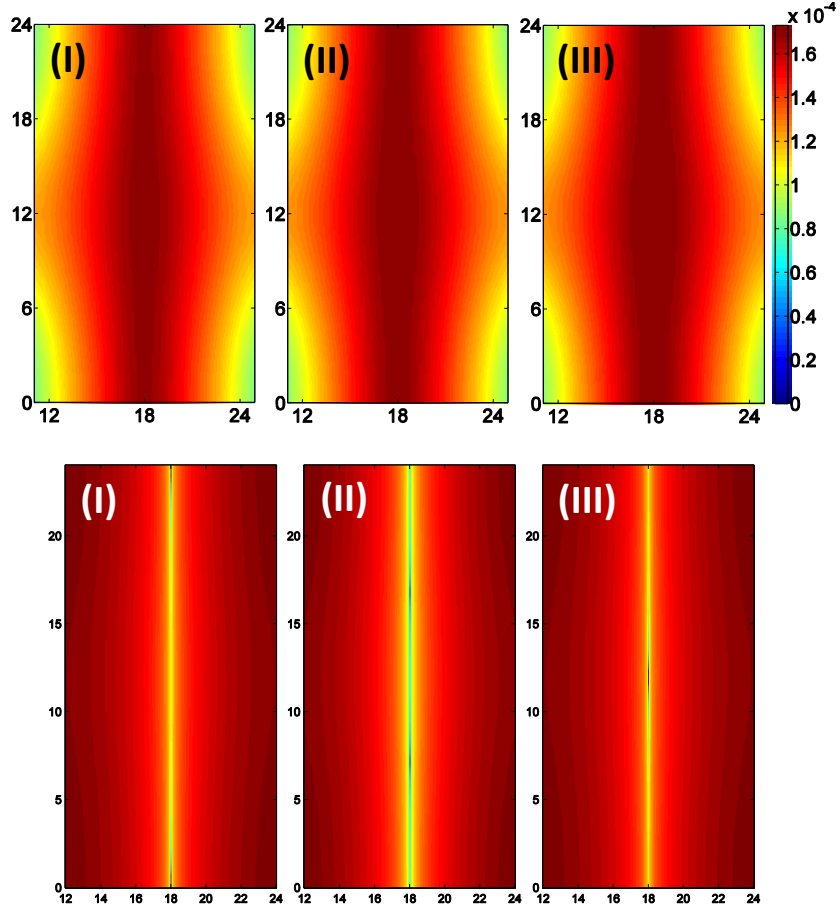


Figura 7.14: Mudanças na distribuição espacial e de intensidade de ΔT durante o movimento dos V-AV cinemáticos para a amostra $\gamma = 55$ e $T_0 = 0,96T_c$ em $J = 0,038J_0$. Os *snapshots* de $\log |\psi|$ mostram as posições do par V-AV para cada variação em ΔT .

como mencionamos anteriormente. Perceba, no início da dinâmica (Figura 7.14 (I)) há uma região mais estreita onde ΔT possui maiores intensidades, a qual vai se alargando e aumentando um pouco a intensidade até atingir os valores máximos no final da dinâmica (Figura 7.14 (III)).

Bibliografia

- [1] R. D. Parks and R. P. Groff, Phys. Rev. Letters **18**, 342 (1967).
- [2] J. S. Langer and V. Ambegaokar, Phys. Rev. **164**, 498 (1967).
- [3] W. W. Webb e R. J. Warburton, Phys. Rev. Letters **20**, 461 (1968).
- [4] D. E. McCumber and B. I. Halpern, Phys. Rev. B **1** 1054 (1970).
- [5] J. E. Lukens, R. J. Warburton and W. W. Webb Phys. Rev. Letters **25**, 1180 (1970).
- [6] J. R. Tucker and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **3**, 3769 (1971).
- [7] G. E. Churilov, V. M. Dmitriev, and A. P. Beskorsyi, JETP Lett. **10**, 146 (1969).
- [8] L. P. Gor'kov, JETP Lett **11**, 32 (1970).
- [9] V. I. Galaiko, V. M. Dmitriev and G. E. Churilov JETP Lett. **18**, 213 (1973).
- [10] T. J. Rieger, D. J. Scalapino, and J. F. Mercereau, Phys. Rev. B **6**, 1734 (1972).
- [11] J. Meyer and G. V. Minnigerode, Phys. Lett. A **38**, 529 (1972).
- [12] W.J. Skocpol, M.R. Beasley, M. Tinkham, J. Low Temp. Phys. **16**, 145 (1974).
- [13] L. N. Smith, J. Low Temp. Phys. **38**, 553 (1980).
- [14] A. Schmid and G. Schon, J. Low Temp. Phys. **20**, 207 (1975).
- [15] G. J. Dolan and L. D. Jackel, Phys. Rev. Lett. **39**, 1628 (1977).
- [16] A .M. Kadin, W. J. Skocpol, M. Tinkham, J. Low Temp. Phys. **33** 481 (1978).
- [17] B. I. Ivlev and N. B. Kopnin Sov. Phys. JETP **51**, 986 (1980).
- [18] B. I. Ivlev and N. B. Kopnin, Sov. Phys. Usp. **27**, 206 (1984).
- [19] S. M. Goiberg, N. B. Kopnin and M. N. Tribelsky, Sov. Phys. JETP **94** 289 (1988).
- [20] W. J. Yeh, Y. D. Dai and Y. H. Kao, J. Low Temp. Phys. **52**, 247 (1983).

- [21] V. I. Kuznetsov and V. A. Tulin, Sov. Phys. JETP **86**, 745 (1998).
- [22] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, L. Piraux, S. Matefi-Tempfli and S. Michotte, Phys. Rev. Lett. **91**, 157001 (2003).
- [23] S. Michotte, S. Matefi-Tempfli, L. Piraux, D. Y. Vodolazov, and F.M. Peeters, Phys. Rev. B **69**, 094512 (2004).
- [24] A. Falk, M. M. Deshmukh, A. L. Prieto, J. J. Urban, A. Jonas, and H. Park, Phys. Rev. B **75**, 020501 (2007).
- [25] A. K. Elmurodov, F. M. Peeters, D. Y. Vodolazov, S. Michotte, S. Adam, F. de Menten de Horne, L. Piraux, D. Lucot, and D. Mailly, Phys. Rev. B **78**, 214519 (2008).
- [26] V. G. Volotskaya, I. M. Dmitrenko, L. E. Musienko, and A. G. Sivakov Sov. J. Low Temp. Phys. **7**, 188 (1981).
- [27] S. V. Lempitskiĭ, Sov. Phys. JETP **63**, 462 (1986).
- [28] A. Weber, L. Kramer, J. Low Temp. Phys. **84**, 289 (1991).
- [29] A. Andronov, I. Gordion, V. Kurin, I. Nefedov, and I. Shereshevsky, Physica C **213**, 193 (1993).
- [30] A. B. Agafonov, I.V. Zolochevkii, E.V. Khristenko, and V.M. Dmitriev, Low Temp. Phys. **27**, 686 (2001).
- [31] V. M. Dmitriev and E. V. Khristenko, Sov. J. Low Temp. Phys. **4**, 821 (1978).
- [32] A. G. Sivakov et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 267001 (2003).
- [33] D. Y. Vodolazov, B. J. Baelus, and F. M. Peeters, Physica C **404**, 400 (2004).
- [34] G. R. Berdiyrov, A. K. Elmudorov, F.M. Peeters, D.Y. Vodolazov, Phys. Rev. B **79**, 174506 (2009).
- [35] G. R. Berdiyrov, M. V. Milosēvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **79**, 184506 (2009).
- [36] G. R. Berdiyrov, M. V. Milosēvić and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **80** 214509 (2009).
- [37] G. R. Berdiyrov, M. V. Milosēvić and F. M. Peeters, Physica C **470**, 946 (2010).
- [38] D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. B **71**, 184502 (2005).

- [39] R. Tidecks and T. Werner, J. of Low. Temp. Phys. **65** 151 (1986).
- [40] L. Kramer and R. Rangel, J. of Low. Temp. Phys. **57** 391 (1984).
- [41] B. Damaschke and R. Tidecks, J. of Low. Temp. Phys. **79** 117 (1990).
- [42] S. B. Kaplan, C. C. Chi and D. N. Langenberg, Phys. Rev. B **14** 4854 (1976).
- [43] M. Tinkham, J. U. Free, C. N. Lau and N. Markovic, Phys. Rev.B **68**, 134515 (2003).
- [44] M. Stuivinga, T. M. Kiapwijk, J. E. Mooij and A. Bezuijnt, J. of Low. Temp. Phys. **53**, 673 (1983).
- [45] Ž. L. Jelić, M. V. Milosević and A. V. Silhanek, Scientific Reports **6**, 35687 (2016).
- [46] D. Halbertal et al, Nature, **539**, 407 (2016).

Conclusões

O gradiente térmico é responsável por interações não usuais entre os vórtices. Assim o estado de multi-vórtices e vórtice gigante é diferente daqueles que ocorrem em amostras sob condição de temperatura homogênea. O comportamento anômalo na $M(H)$ ocorre somente quando temos uma variação muito grande de temperaturas (de $0,1T_c$ a $0,9T_c$, no nosso caso) e baixos κ , pois os vórtices ficam alojados na região “quente”, fazendo com que a distribuição de $\mathbf{J}_s$ não seja afetada nas regiões mais “frias”.

Para os estudos envolvendo estados resistivos, as conclusões são as que seguem. Durante o processo de nucleação de vórtices para uma determinada amostra, a resposta de Mxt apresenta pouca sensibilidade às variações de u . Por outro lado, Vxt e os mecanismos de dissipação apresentam fortes mudanças quantitativas. Assim, para um supercondutor *gapless*, $u = 12$ é requerido em tais estudos. Na região de transição meso-macroscópico, os efeitos de confinamento são pouco influentes, com isso, verificamos uma tendência de saturação no comportamento dos mecanismos de dissipação.

Durante a dinâmica de expulsão de um vórtice e o processo de aniquilação V-AV de Abrikosov, a curva Vxt apresentou uma mudança no sinal para ambos os casos e o instante de tempo no qual ocorre tal mudança é o mesmo do valor de pico na curva Mxt . Esses comportamentos foram verificados para supercondutores *gapless* e com *gap*. Para ambas as dinâmicas e tipos de supercondutores, W_ψ é o principal mecanismo de dissipação. Contudo, quando resolvemos o teorema generalizado da energia livre, i.e., para um supercondutor com *gap*, obtivemos um novo mecanismo de dissipação associado à processos de relaxação, o qual denominamos por W_γ . Assim, de uma maneira geral, a contribuição total dos mecanismos de dissipação devido à relaxação é proeminente em tais sistemas. Por outro lado, W_A contribui consideravelmente para a potência total dissipada. Analisando individualmente a sensibilidade dos mecanismos de dissipação em relação às variações de diversos parâmetros, como a velocidade (v), tamanho lateral (L), densidade de corrente (J) e o fator (γ). Para o caso do movimento de um vórtice, temos que: $W_A(v)$; $W_\psi(v, \gamma)$ e $W_\gamma(\gamma)$. Já no processo de aniquilação V-AV de Abrikosov, encontramos $W_A(L)$; $W_\psi(L, \gamma)$ e $W_\gamma(\gamma)$. Com relação à difusão térmica, ΔT apresentou um maior valor em um supercondutor *gapless* do que com *gap*, para os casos onde temos o movimento de um vórtice

quanto para aqueles processos de aniquilação V-AV de Abrikosov.

No estado resistivo devido à dinâmica de V-AV cinemáticos, W_Φ é o principal mecanismo de dissipação. Por outro lado, W_ψ tem uma contribuição considerável no regime $J_{c1} < J \ll J_{c2}$, porém muito pequena para $J \gg J_{c1}$. W_γ é extremamente baixo para qualquer valor de $J > J_{c1}$, portanto pode ser negligenciado. Notamos que os mecanismos de dissipação são sensíveis a variações de parâmetros tais que: $W_\Phi(J)$; $W_\psi(J, \gamma)$ e $W_\gamma(\gamma)$. Verificamos que a difusão térmica altera quantitativamente o comportamento da voltagem. Assim, a eficiência na taxa de remoção de calor do substrato contribui para controlar a frequência e a amplitude da oscilação da voltagem.

Genericamente, temos que os gradientes térmicos nos possibilitaram a observação comportamento não usual no estado de vórtices e da magnetização em supercondutores mesoscópicos. Nos estudos envolvendo o estado resistivo, o comportamento de Mxt e Vxt nos fornece uma assinatura da dinâmica de vórtice ou V-AV. Já nos processos de difusão térmica, obtivemos uma faixa de variação de temperatura (utilizando um substrato com taxa de remoção de calor intermediária) entre $\Delta T = 10^{-3} - 10^{-4}T_c$. Isso possibilita o uso da técnica de imageamento térmico em nanoescala tal como aquela apresentada por D. Halbertal e colaboradores, para mapear as dinâmicas de vórtices ou V-AV de Abrikosov e V-AV cinemáticos em supercondutores mesoscópicos. Portanto, temos que a equação GTDGL acoplada com a equação de difusão térmica em conjunto com o teorema generalizado da energia livre, nos fornece uma base teórica sólida e uma ferramenta poderosa para descrever processos de difusão térmica em supercondutores mesoscópicos.

Apêndice A

Demonstração da equação 2.42

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \nabla \psi^* + \frac{\partial \nabla \psi^*}{\partial t} \nabla \psi \right) \\ & + \frac{i e \hbar}{2mc} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \psi^* \nabla \psi + \mathbf{A} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \nabla \psi + \mathbf{A} \psi^* \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \right) \\ & - \frac{i e \hbar}{2mc} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \psi \nabla \psi^* + \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla \psi^* + \mathbf{A} \psi \frac{\partial \nabla \psi^*}{\partial t} \right) \\ & + \frac{2e^2}{mc^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} \right) |\psi|^2 + \frac{e^2}{mc} A^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Apêndice B

Demonstração da equação 2.48

Temos que a densidade de corrente supercondutora é dado por:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{ie\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2}{mc}\mathbf{A}|\psi|^2 \quad (\text{B.1})$$

Fazendo o divergente de $\mathbf{J}_s$, temos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{ie\hbar}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) - \frac{2e^2}{mc}\mathbf{A} \cdot (\psi^*\nabla\psi + \psi\nabla\psi^*) \quad (\text{B.2})$$

onde utilizamos a regra do produto. Podemos escrever $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$ utilizando a equação GTDGL. Primeiramente vamos multiplicar a equação GTDGL por ψ^* , assim temos:

$$\begin{aligned} & C \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi |\psi|^2 + 2 \frac{t_E^2}{\hbar^2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} |\psi|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4m} \psi^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + a|\psi|^2 - b|\psi|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Fazendo o complexo conjugado da equação (B.3), obtemos:

$$\begin{aligned} & C \left(\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{2ie}{\hbar} \Phi |\psi|^2 + 2 \frac{t_E^2}{\hbar^2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} |\psi|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4m} \psi \left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi^* + a|\psi|^2 - b|\psi|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Subtraindo a equação (B.4) da equação (B.3), temos que:

$$\begin{aligned} & C \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{4ie}{\hbar} \Phi |\psi|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4m} \psi^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + \frac{1}{4m} \psi \left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi^* \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Podemos reescrever o lado direito da equação (B.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& C \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{4ie}{\hbar} \Phi |\psi|^2 \right) \\
&= -\frac{1}{4m} \psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi - C.C
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Resolvendo o operador do primeiro termo do lado direito da equação (B.6), temos que:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4m} \left[\psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \left(-i\hbar \nabla \psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right) \right] \\
& -\frac{1}{4m} \left[-\hbar^2 \psi^* \nabla^2 \psi + \frac{4ei\hbar}{c} \mathbf{A} \cdot (\psi^* \nabla \psi) + \frac{4e^2}{c^2} A^2 |\psi|^2 \right]
\end{aligned} \tag{B.7}$$

onde utilizarmos o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Fazendo o C.C da equação (B.7) e substituindo em (B.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
& C \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{4ie}{\hbar} \Phi |\psi|^2 \right) \\
&= \frac{\hbar^2}{4m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) - \frac{ei\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot (\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (B.8) por $\frac{-2ie}{\hbar}$ e comparando com a equação (B.2), finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
& C \left(\frac{-2ie}{\hbar} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] + \frac{8ie^2}{\hbar^2} \Phi |\psi|^2 \right) \\
&= \frac{-i\hbar e}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) - \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A} \cdot (\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) = \nabla \cdot \mathbf{J}_s
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Apêndice C

Demonstração das equações 2.49 e 2.50

Substituindo a equação (2.48) na (2.47), temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} = & -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\
 & + 2\Re \left[-C \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-2ie}{\hbar} \Phi + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi^* \right] \\
 & - C \left(\frac{-2ie}{\hbar} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] + \frac{8ie^2}{\hbar^2} \Phi |\psi|^2 \right) \Phi \\
 & + 2\Re \left[\frac{\hbar}{4m} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie\mathbf{A}}{c} \right) \psi^* \right\} \right] + \nabla(\mathbf{J}_s \Phi).
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Primeiramente, vamos manipular os termos da segunda e terceira linha da equação (C.1), reescrevendo-os de forma isolada temos:

$$\begin{aligned}
 & 2\Re \left[-C \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-2ie}{\hbar} \Phi + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi^* \right] \\
 & - C \left(\frac{-2ie\Phi}{\hbar} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] + \frac{8ie^2}{\hbar^2} \Phi^2 |\psi|^2 \right).
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Fazendo $2\Re(z) = z + z^*$, na equação (C.2), obtemos em um primeiro momento:

$$\begin{aligned}
 & 2\Re \left[-C \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-2ie}{\hbar} \Phi + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right) \psi^* \right] \\
 = & -C \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{2e\iota\Phi}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2e\iota\Phi}{\hbar} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right],
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Identificando $\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2$ e organizando os termos em comum, o lado direito da equação (C.3), fica:

$$\begin{aligned} 2\Re \left[-C \frac{\partial\psi}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{-2ie}{\hbar} \Phi + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right) \psi^* \right] \\ = -C \left[2 \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right|^2 + \frac{2ei\Phi}{\hbar} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right) \right], \end{aligned} \quad (C.4)$$

Utilizando a regra do produto podemos escrever o termo $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right) = \frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}$. Substituindo a equação (C.4) em (C.2), temos que:

$$\begin{aligned} -C \left[2 \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right|^2 + \frac{2ei\Phi}{\hbar} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* \right) + 2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{2ie\Phi}{\hbar} \left(-\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right) + \frac{8ie^2}{\hbar^2} \Phi^2 |\psi|^2 \right], \end{aligned} \quad (C.5)$$

Reorganizando os termos da equação (C.5), podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -C \left[2 \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right|^2 + \frac{4ei\Phi}{\hbar} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* \right) + \frac{8ie^2}{\hbar^2} \Phi^2 |\psi|^2 \right] \\ -C \left[2 \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (C.6)$$

ou ainda

$$-2C \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2ei\Phi}{\hbar} \psi \right|^2 + \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (C.7)$$

A equação (C.7) corresponde as manipulações algébricas dos termos da segunda e da terceira linha da equação (C.1). Assim, obtemos a equação (2.49), que é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\ -2C \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \psi \right|^2 + \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\ +2\Re \left[\frac{\hbar}{4m} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial t} \left(\hbar \nabla + \frac{2ie\mathbf{A}}{c} \right) \psi^* \right\} \right] + \nabla(\mathbf{J}_s \Phi). \end{aligned} \quad (C.8)$$

Para obter a equação (2.50), temos que resolver o termo da última linha da equação (C.8). Começaremos por $\nabla(\mathbf{J}_s\Phi)$, utilizando a expressão de $\mathbf{J}_s$, temos que:

$$\nabla(\mathbf{J}_s\Phi) = -\nabla\left[\frac{\imath e\hbar\Phi}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2\Phi}{mc}\mathbf{A}|\psi|^2\right], \quad (\text{C.9})$$

Para juntar a expressão com a parte real do termo entre colchetes, vamos fazer $\Re$ da equação (C.9)

$$\Re\left[\nabla \cdot \left\{ \frac{\imath e\hbar\Phi}{m}(\psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2\Phi}{mc}\mathbf{A}|\psi|^2 \right\}\right], \quad (\text{C.10})$$

note, não houve modificação no segundo termo da equação C.9, pois é composto somente por variáveis reais. Podemos reescrever a equação C.10 da seguinte forma:

$$\Re\left[\nabla \cdot \left\{ \frac{\imath e\Phi\psi}{m}\left(\hbar\nabla + \frac{2\imath e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^* \right\}\right]. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo (C.11) em (C.8), a parte $\Re$ da equação fica expressa como:

$$\Re\left[\nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\imath e\Phi\psi}{m}\right)\left(\hbar\nabla + \frac{2\imath e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^* \right\}\right], \quad (\text{C.12})$$

ou ainda

$$\Re\left[\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\imath e\Phi}{m}\right)\psi\left(\hbar\nabla + \frac{2\imath e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^* \right\}\right]. \quad (\text{C.13})$$

Juntando com os demais termos da equação (C.8), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\ &\quad - 2C \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2\imath e}{\hbar}\Phi\psi \right|^2 + \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &\quad \Re\left[\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\imath e\Phi}{m}\right)\psi\left(\hbar\nabla + \frac{2\imath e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^* \right\}\right], \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Podemos alternar $\Re$ com o operador ∇ que não alteramos a estrutura final da equação, assim podemos reescreve-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{sn}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{J}_s}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s \cdot \nabla \Phi \\ &\quad - 2C \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{2\imath e}{\hbar}\Phi\psi \right|^2 + \frac{t_e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &\quad \nabla \cdot \left[\Re\left\{ \frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\imath e\Phi}{m}\right)\psi\left(\hbar\nabla + \frac{2\imath e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^* \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

que é a equação (2.50), como queríamos demonstrar.

Apêndice D

Lei de Wiedemann-Franz para o estado resistivo

No estado normal temos que a capacidade calorífica dos metais a volume constante é dado por:

$$C_v(T) = \gamma T + AT^3. \quad (\text{D.1})$$

Que é válido para o regime $T < T_\Theta$, onde T_Θ é a temperatura de Debye. Sendo γT e AT^3 a contribuição dos elétrons e dos fônons da rede respectivamente. O coeficiente A é uma constante independente da temperatura e γ é obtido através da expansão de Sommerfeld para as propriedades térmicas do gás de elétrons livres. Para supercondutores de baixa temperatura crítica (Low T_{cs}), a contribuição dos elétrons é bastante significativa e as vezes até dominante para C_v [1], como por exemplo no caso do alumínio. Assim, vamos considerar somente o termo eletrônico na equação (D.1), fazendo essas considerações temos que:

$$C_v(T) = \gamma T. \quad (\text{D.2})$$

Para o estado resistivo, temos o regime $T_o < T < T_c$, sendo T_o a temperatura de banho térmico. Contudo, vamos fazer a seguinte aproximação, $T = T_c$, assim a equação (D.2) fica:

$$C_v(T_c) = \gamma T_c. \quad (\text{D.3})$$

A condutividade elétrica no estado resistivo (σ_r) é menor que a do estado normal (σ_n), no entanto vamos fazer outra aproximação, então temos que:

$$\sigma_r \simeq \sigma_n. \quad (\text{D.4})$$

Em metais σ_n é obtido através do modelo de Drude ou via equação de transporte de Boltzmann [2], que é dada por:

$$\sigma_n = \frac{ne^2}{m}\tau = 3\frac{ne^2D}{mv_F^2}, \quad (\text{D.5})$$

sendo n a densidade de elétrons e $D = \frac{1}{3}v_F l$, onde $l = v_F \tau$. D é o coeficiente de difusão, v_F a velocidade de Fermi, l caminho livre médio e τ o tempo livre médio. Como $D = K_o/C_v$, a equação (D.5) fica:

$$\sigma_n = 3\frac{ne^2K_o}{mv_F^2C_v}. \quad (\text{D.6})$$

Sendo K_o a condutividade térmica. Agora, vamos substituir a equação (D.3) na (D.6) explicitando o valor de $\gamma = \frac{\pi^2}{3}k_B g(E_F)$

$$\sigma_n = 9\frac{ne^2K_o}{mv_F^2\pi^2k_B g(E_F)T_c}, \quad (\text{D.7})$$

onde $g(E_F) = \frac{m}{\hbar^2\pi^2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_F}$ é a densidade de estados no nível de Fermi. Sendo a energia e a velocidade de Fermi dadas respectivamente por $E_F = \frac{\hbar^2k_F^2}{2m}$ e $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$, podemos reescrever a equação (D.7) da seguinte forma:

$$\sigma_n = 9\frac{ne^2K_o}{k_F^3k_B^2T_c}. \quad (\text{D.8})$$

A densidade de elétrons que pode ser acomodada por spin dentro da esfera de Fermi é delimitado pelo raio de Fermi k_F , assim temos que:

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (\text{D.9})$$

Substituindo (D.9) em (D.8) e resolvendo para $\frac{K_o}{\sigma_n}$, finalmente obtemos:

$$\frac{K_o}{\sigma_n} = \frac{k_B^2\pi^2}{3e^2}T_c. \quad (\text{D.10})$$

A equação (D.10) é uma aproximação da lei de Wiedemann-Franz para o estado resistivo, onde como mostramos no Capítulo 2, é utilizada para obter C_{eff} e K_{eff} da equação de difusão térmica.

Bibliografia

- [1] C. P. Poole Jr, H. A. Farach, R. J. Creswick, R. Prozorov. *Superconductivity*. Elsevier, Amsterdam, 2^a edição, 2007. 670p.
- [2] I. S. Oliveira, J. L. B. Vitor. *Introdução à física do estado sólido*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2^a edição, 2011. 507p.

Apêndice E

Publicações e apresentações em eventos científicos

Artigos publicados

E.C.S. Duarte, A. Presotto, D. Okimoto, E. Sardella and R. Zadorosny, “*Influence of thermal gradient in vortex states of mesoscopic superconductors*”. Journal of Physics: Conference Series **568**, 022011 (2014).

R. Zadorosny, E.C.S. Duarte, E. Sardella, W.A. Ortiz, “*Vortex-antivortex annihilation in mesoscopic superconductors with a central pinning center*”. Physica C **503**, 94 (2014).

E.C.S. Duarte, E. Sardella, W.A. Ortiz and R. Zadorosny, “*Dynamics and heat diffusion of Abrikosov’s vortex-antivortex pairs during an annihilation process*”. J. Phys.: Condens. Matter **29**, 405605 (2017).

Congressos, encontros e workshops

Internacionais

27th International Conference on Low Temperature Physics - Institute of Physics of Buenos Aires - Buenos Aires/Argentina.

16th International Workshop on Vortex Matter in Superconductors - International Institute of Physics, UFRN - Natal/RN - Brazil.

Nacionais

XII Encontro da SBPMat - Sociedade brasileira de Pesquisa em Materiais - Campos do Jordão/SP.

21º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais - Cuiabá/MT.
XXXVIII Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada - Sociedade Brasileira de Física - Foz do Iguaçu/PR.

III Encontro de Pesquisadores em Ciência e Engenharia de Materiais “Síntese, Caracterização e Aplicações” - Ilha Solteira/SP.

XIV Encontro da SBPMat - Sociedade brasileira de Pesquisa em Materiais - Rio de Janeiro/RJ.

Workshop “Pós Graduação em Materiais na UNESP - Evolução e Tendências” - Bauru/SP.

Encontro de Física 2016 - Sociedade Brasileira de Física - Natal/RN.

XL - Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada - Sociedade Brasileira de Física - Búzios/RJ.