

ANTONIO ANGEL ORTEGA JUSDADO
JAVIER FERRER JIMENEZ

ESTUDO DE PLACAS ELÁSTICAS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

GUARATINGUETÁ
2012

**ANTONIO ANGEL ORTEGA JUSDADO
JAVIER FERRER JIMENEZ**

**ESTUDO DE PLACAS ELÁSTICAS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Yzumi Taguti

GUARATINGUETÁ
2012

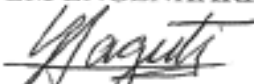
J961m	Jusdado, Antonio Angel Ortega Método dos elementos do contorno / Antonio Angel Ortega Jusdado, Javier Ferrer Jimenez – Guaratinguetá : [s.n], 2012. 53 f. : il. Bibliografia : f. 53 Trabalho de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012. Orientador: Prof. Dr. Yzumi Taguti 1. Métodos de elementos de contorno I. Jimenez, Javier Ferrer II. Título CDU 519.6
-------	--

**ESTUDO DE PLACAS ELÁSTICAS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

ANTONIO ANGEL ORTEGA JUSDADO
JAVIER FERRER JIMENEZ

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM ENGENHARIA CIVIL"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL


Prof. Dr. YZUMI TAGUTI
Coordenador do curso

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. YZUMI TAGUTI
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. ENOS ARNEIRO NOGUEIRA DA SILVA
UNESP-FEG


Prof. Dr. WELLINGTON CYRO DE ALMEIDA
LEITE
Chefe/ Civil/ UNESP-FEG

DEDICATÓRIA

De modo especial, à nossa família que sempre nos ajudaram e incentivaram para levar a cabo este intercâmbio.

AGRADECIMIENTOS

Em primeiro lugar, à nossa família, que sempre nos apoiaram durante este intercâmbio;

Ao nosso orientador, *Prof. Dr. Yzumi Taguti*, que sempre nos ajudou e foi paciente conosco e com a fronteira da língua. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria muito mais difícil.

Ao nossos pais e irmãos, *Antonio, Teresa, Cristina e Jose Luis, Villar, Beatriz*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos.

À nossos colegas da república *Seupossemia*, que nos acolheram nestes 5 meses e nos ajudou com o português.

À *Regina Célia Ferreira da Silva Souza*, a pessoa que mais temos que agradecer pelo sucesso de nosso intercâmbio, estando sempre disposta a ajudar-nos com alegria e dedicação.

RESUMO

ORTEGA JUSDAO, A.A./ FERRER JIMENEZ, J. **Estudo de placas elásticas pelo método dos elementos de contorno**. 2012. 53.f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Este trabalho tem como objetivo principal oferecer uma ferramenta alternativa para a resolução de placas finas, presentes em edifícios, em relação aos métodos de cálculo fornecidos em curso de graduação, cálculo por meio de tabelas com poucas condições de contorno. Utilizou-se o *Método dos Elementos de Contorno* que discretiza o contorno da placa em partes finitas, para aproximação dos resultados obtidos em valores realísticos. Neste trabalho utilizou-se o programa **Placas2**, em Linguagem *Fortran*, baseado no *Método dos elementos de contorno* para a resolução de placas finas com várias condições de contorno geométrica e de cargas.

PALAVRAS-CHAVE: Método, carga, contorno, solicitações, placa, esforços.

RESUMEN

ORTEGA JUSDAO, A.A./ FERRER JIMENEZ, J. **Estudo de placas elásticas pelo método dos elementos de contorno**. 2012. 53.f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Este trabajo tiene como objetivo principal ofrecer una herramienta alternativa para la resolución de placas finas, presentes en edificios, relacionadas con los métodos de cálculo adquiridos durante la universidad, calculo a través de tablas con pocas condiciones de contorno. El método utilizado es el *Método de los elementos de contorno* que discretiza la placa en partes finitas, aproximando los resultados obtenidos a valores reales. En este trabajo se ha utilizado el programa de ordenador *Placas2.for* (TAGUTI, Y. 2010) basado en el *Método de los elementos de contorno* para la resolución de las placas finas con varias condiciones de contorno geométricas y de cargas.

PALABRAS CLAVE: Método, carga, contorno, solicitaciones, placa, esfuerzos.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA1- Placa fina	14
FIGURA2- Deformação da placa	15
FIGURA3- Flecha y deformação plano médio	16
FIGURA4- Giro segundo a perpendicular	16
FIGURA5- Tensões normais y tangenciais	18
FIGURA6- Equilíbrio do elemento diferencial	20
FIGURA7- Contorno engastado	23
FIGURA8- Contorno apoiado	24
FIGURA9- Borde livre	25
FIGURA10- Movimento vertical impedido	27
FIGURA11- Representação do domínio, pontos de carregamento "q" e pontos de deslocamentos "p"	28
FIGURA12- Força cortante equivalente num círculo de raio r devido à uma carga unitária aplicada no ponto q	30
FIGURA13- Esquema da simplificação	35
FIGURA14- Esquema do discretização	36
FIGURA15- Esquema modelo discreto	36
FIGURA16- Tipos de elementos para as variáveis (ex. w) e elemento linear para a geometria	37
FIGURA17- Descrição geométrica do elemento linear	39
FIGURA18- Elemento linear contínuo	41
FIGURA19- Exemplos de descontinuidades geométricas	42

FIGURA20- Canto i da placa com seus nós anteriores e posteriores, necessários para o cálculo das contribuições da reação de canto na matriz H	46
FIGURA21- Placa apoiada em três de seus lados e engastada em o outro	49
FIGURA22- Placas que formam parte de um prédio	51
FIGURA23- Placa poligonal de cinco lados	53
FIGURA24- Placas com carga distribuída e pontual	54
FIGURA25- Placa circular e placa quadrada	55

SUMARIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA	13
1.2 OBJETIVOS	13
1.3 JUSTIFICATIVA	13
1.4 METODOLOGIA	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1 TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DAS PLACAS	14
2.1.1 CAMPO DE DESLOCAMENTO	16
2.1.2 CAMPO DE DEFORMAÇÕES	17
2.1.3 CAMPO DE TENSOES	17
2.1.4 ESFORÇOS NO PLANO MEDIO	19
2.1.5 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA	20
2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO	23
2.2.1 CONTORNO ENGASTADO	23
2.2.2 CONTORNO APOIADO	24
2.2.3 BORDA LIVRE	25
2.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE PLACAS DE PRIMEIRA ORDEM	28
2.4 TEOREMA DE BETTI	31
3. APLICAÇÃO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	35
3.1 SIMPLIFICAÇÃO DE UM PROBLEMA REAL	35
3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	35
3.3 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA	36
3.4 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS	39
3.5 ELEMENTO LINEAR CONTÍNUO	41
3.6 TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	44
4. APLICAÇÕES PRÁTICAS	50
4.1 Exemplo 1	50
4.2 Exemplo 2	52
4.3 Exemplo 3	54
4.4 Exemplo 4	55
4.5 Exemplo 5	56
5. CONCLUSÕES	57
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

1. INTRODUÇÃO

A solução de problemas em engenharia passa por diversas etapas de simplificação. Entre elas está a proposição do modelo matemático aproximado, utilizando-se equações diferenciais. A escolha do método de solução destas equações diferenciais é a simplificação numérica através da discretização do problema.

O método dos elementos de contorno é um dos métodos aproximados utilizados em ciência e em engenharia. Ele é aplicado na solução de equações diferenciais, onde estas são transformadas em equações algébricas, após a discretização, aplicadas ao contorno do problema. Esta discretização do contorno é feita por elementos que podem ser constantes, lineares, quadráticos ou cúbicos.

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma equação diferencial. Por esta razão saber reconhecer uma equação diferencial dentro de um problema específico é muito importante, para a busca de sua solução. Da mesma forma, saber classificar uma equação diferencial é o primeiro passo na busca de sua solução, pois apesar de não existir um método único para se resolver todas as equações diferenciais, a classificação delas ajuda a escolher o método mais adequando de solução.

O Método dos elementos de contorno (MEC), é um método auxiliar para resolver problemas de placas. Não dá a solução exata, mas ajuda de maneira notável à obtenção de uma solução muito aproximada à real. Além disso este trabalho foi realizado com base o *Formulação para o estudo de placas elásticas pelo método dos elementos de contorno utilizando-se apenas a equação de "w"*. Estes fundamentos estão localizados no capítulos dois.

Os exemplos encontra-se localizados no capítulo quatro deste trabalho. Por ultimo, são expostas a discussão e as conclusões do trabalho.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Atualmente no Brasil, os problemas de placas resolvem-se mediante tabelas e programas comerciais de computador, os quais são encontrados no mercado e têm um custo muito elevado. As empresas, devido seu poder aquisitivo, são capazes de financiar estes programas.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho foi estudar a nova técnica para resolver placas finas e elásticas, esta forma de resolvê-las não é vista durante a graduação, pelo que nos contribui uma nova maneira de solucionar estes problemas.

1.3 JUSTIFICATIVA

Qualquer usuário utilizando o *Método dos elementos de contorno* é capaz de achar as solicitações de uma placa sem a necessidade de dispor destes programas. Daí a importância deste método e seu consequente estudo.

1.4 METODOLOGIA

Foram utilizados artigos reitados da internet, e para auxilio, foram utilizados livros, tudo isso indicado na referencia bibliográfica. Tudo isto serviu para explicar os *Método dos elementos de contorno* que se encontram no capítulo três

Foi utilizado o programa de computador *Placas2.for* (TAGUTI, Y. 2010).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DAS PLACAS

A placa é, em princípio, uma estrutura tridimensional e, como tal, deve ser estudada. No entanto, o seu comportamento pode ser representado por um modelo bidimensional, pois se pode considerar que a variação das variáveis significativas ao longo da espessura é uma função conhecida dos valores que as mesmas possuem no seu plano médio da placa. Nestas condições seria suficiente analisar o plano médio para encontrar uma solução tensão deformação compatível e equilibrada.

Uma estrutura bidimensional delgada é definida como uma estrutura plana em que uma das dimensões (espessura) é muito menor do que as outras duas. A superfície plana equidistante das duas faces maiores é chamada de plano médio da estrutura.

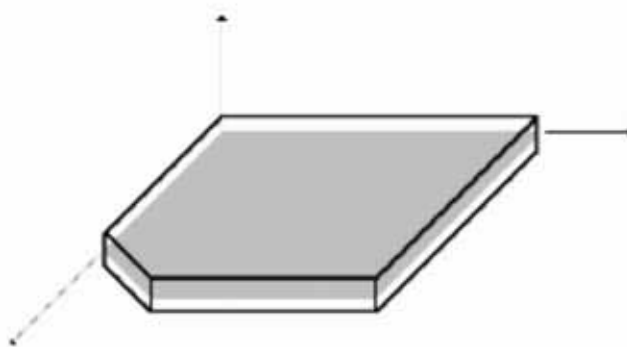


Figura 1. Placa fina (Fonte:UFRGS)

Define-se essa estrutura como chapa quando o carregamento aplicado está contido no seu plano médio, e como placa quando as forças externas agem apenas na direção normal a esse plano.

Esta tipologia é tão prevalente na prática de construção que o seu estudo é plenamente justificado. Pode-se encontrar exemplos de aplicação em pisos de construção, alguns tipos de fundação, pontes, tanques retangulares, laje, piso, etc ..

As tensões e deformações de uma placa pode ser obtidas por degeneração da teoria da elasticidade tridimensional assumindo que a variação das quantidades envolvidas no processo, através da espessura, é uma função conhecida dos valores obtidos no plano médio da mesma.

Para gerar a teoria clássica de placa sob estas condições é necessário estabelecer as seguintes hipóteses:

- O material da placa é elástico, homogéneo, e isotrópico.
- Espessura da placa constante e pequena face às outras dimensões.
- Todos os pontos situados numa linha perpendicular ao plano médio da placa não deformada permanecem após a deformação sobre uma linha (Hipoótese de Navier) normal ao plano mediano deformado. Suposição de normalidade.
- A tensão normal ao plano médio da placa é desprezível.
- Linearidade física. Isto significa que as deformações serão imediatas, reversíveis, e que as relações entre tensões e deformações (equações constitutivas) serão expressas por equações lineares (Lei de Hooke).
- Linearidade geométrica. Isto é consequência de a ordem de grandeza das rotações ter sido limitada a 10^{-3} , e significa, em outras palavras, que as equações de equilíbrio serão escritas na geometria indeformada da placa, que as relações deformação-deslocamento serão lineares, e ainda que as curvaturas serão consideradas linearizadas.
- Não há cargas externas paralelas ao plano médio da placa atuando no mesmo.
- O plano médio da placa não se deforma, permanecendo neutro durante a flexão.

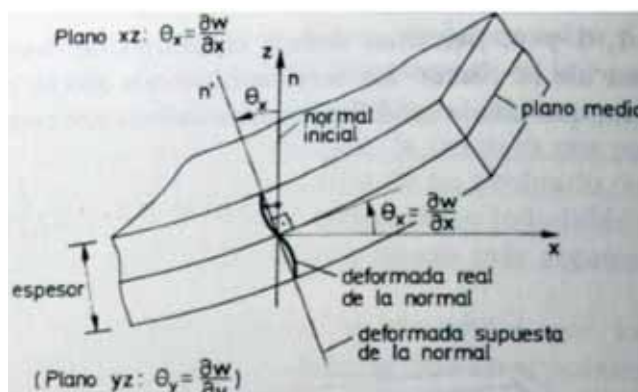


Figura 2. Deformação da placa (Fonte: Losas delgadas de Kirchhoff)

2.1.1 CAMPO DE DESLOCAMENTO

Com base nos pressupostos acima, o campo de deslocamento pode ser expresso em termos de um único parâmetro do plano médio, deslocamento transversal $w(x, y)$, como se segue:

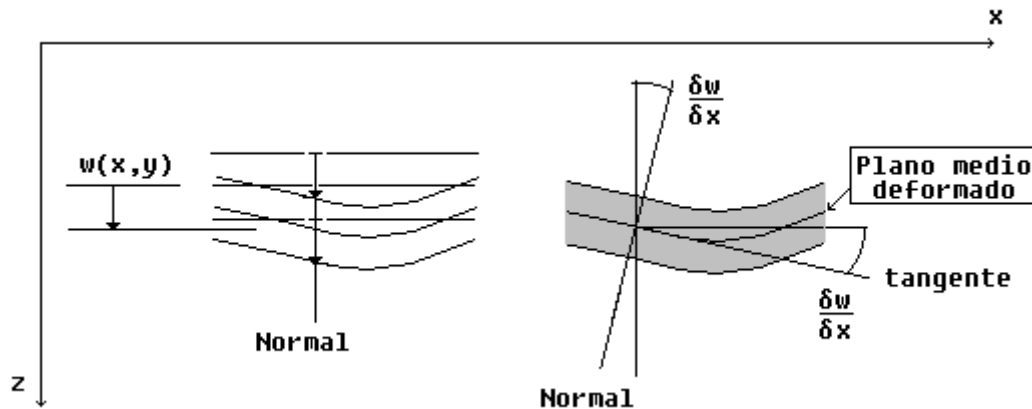


Figura 3. Flecha y deformação plano médio (Fonte:UFRGS)

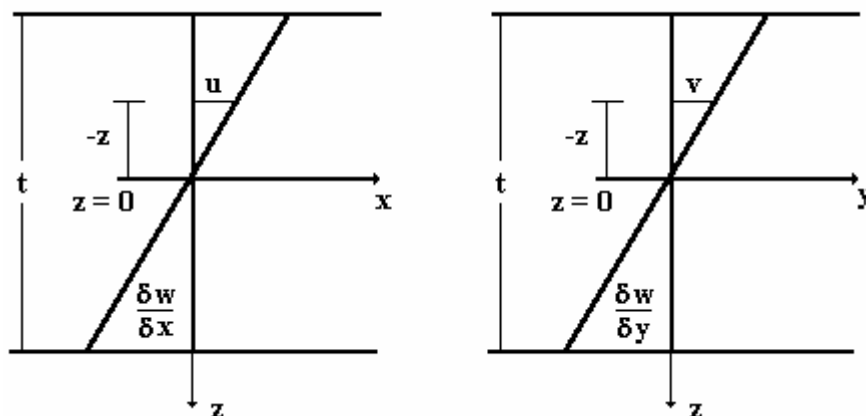


Figura 4. Giro segundo a perpendicular (Fonte:UFRGS)

$$u(xyz) = -z \frac{\partial w(xy)}{\partial x} \quad v(xyz) = -z \frac{\partial w(xy)}{\partial y} \quad w(xyz) = w(xy) \quad (2.0)$$

Admite-se que as rotações são pequenas e, portanto, a rotação é produzida pela perpendicular. O sinal negativo aparece quando se considera o eixo z na direção para baixo positivos e gira no sentido dos ponteiros do relógio.

2.1.2 CAMPO DE DEFORMAÇÕES

Portanto o campo de deformação, de acordo com as expressões e as hipóteses apresentadas acima é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(xyz)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(xyz)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial u(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial v(xyz)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial u(xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial w(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial v(xyz)}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ 0 \\ -2z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Este campo de tensão também depende apenas do deslocamento transversal $w(x, y)$ que caracteriza o plano médio da placa, e como pode ser visto os cisalhamentos em planos perpendiculares ao plano médio são nulos (correspondente à hipótese de partida que não consideram a deformação de cisalhamento e, por conseguinte, só é válido para a análise de placas finas), e outros componentes variam linearmente ao longo da espessura.

2.1.3 CAMPO DE TENSOES

O campo de tensão de acordo com as relações acima, é dada por

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

Novamente tensões normais e tangenciais não nulas variam linearmente ao longo da espessura. As tensões de corte no plano normal ao plano mediano são zero. Isto significa que não é considerado no processo o efeito da força de cisalhamento agindo verticalmente nos planos $Q_x(xz)$ e $Q_y(yz)$, o que não implica que estes são nulos.

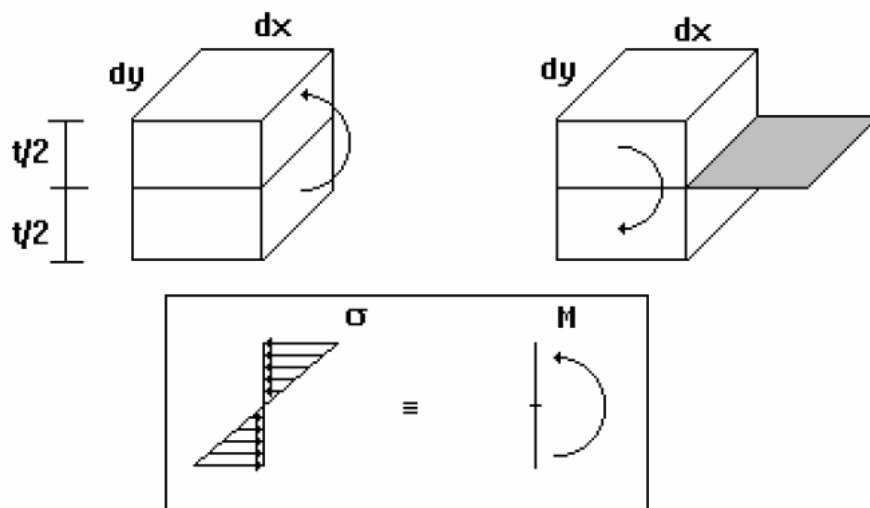


Figura 5. Tensiones normales y tangenciales

O estado de tensão descrevem tensões normais e tensões de cisalhamento que atuam nas seções transversais da placa. Assim obtêm-se um momento fletor devido às tensões normais e um momento torsor devido às tensões de cisalhamento. Não estão seguindo este esquema o cisalhamento transversal (direção z), uma vez que as tensões de cisalhamento transversal são zero, mas eles existem e não precisam ser nulo.

2.1.4 ESFORÇOS NO PLANO MEDIO

Os momentos internos de torção e flexão são obtidos por meio da integração ao longo da espessura da placa e são uma função da variável $w(x, y)$ dos pontos do plano médio da mesma.

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) \quad (2.5)$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) \quad (2.6)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right) \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.7)$$

O coeficiente D é clássico em placas e é denominado módulo de rigidez da placa, caracterizada do ponto de vista da resistência e tem um significado físico semelhante ao IE de rigidez da viga.

Para expressar as esforços cortantes Q_x e Q_y em termos da variável $w(x, y)$ é necessário estabelecer as equações de equilíbrio transversal porquanto a formulação anteriormente levantada em deslocamentos não permite explicitá-los.

2.1.5 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA

O equilíbrio do elemento diferencial da placa da figura (dx, dy, t), com a carga externa normal ao plano médio $q = q(x, y)$ por unidade de área. O equilíbrio tem de ser satisfeito em termos de forças transversais e momentos e, portanto, o comprimento deve ser incorporado afetando cada esforço inicial.

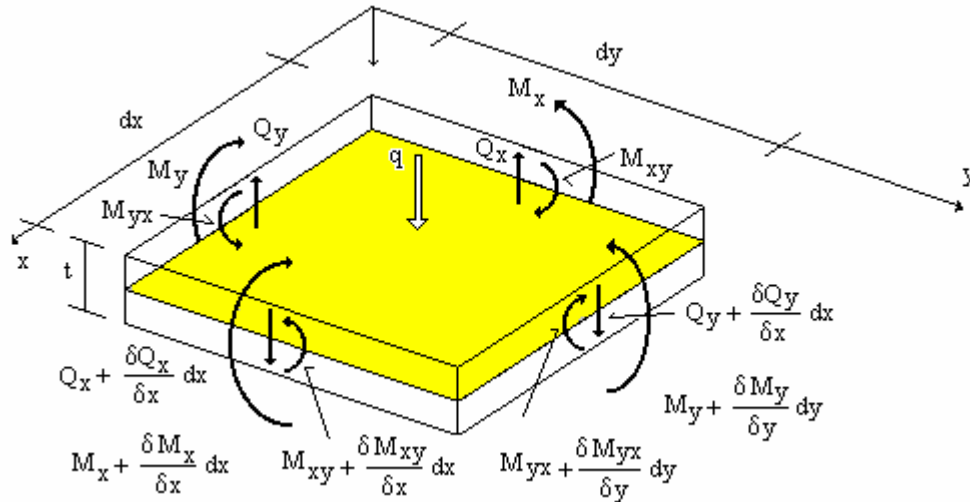


Figura 6. Equilíbrio do elemento diferencial (Fonte:UFRGS)

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad (2.8)$$

Equilíbrio de momentos em torno de $x = 0$.

$$\sum M_x = 0 \quad (2.9)$$

$$\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dy - Q_y dx dy = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (2.11)$$

Equilíbrio de momentos em torno de $y = 0$.

$$\sum M_y = 0 \quad (2.12)$$

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - M_{yx} dx - Q_x dy dx = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.14)$$

Equilíbrio das forças verticais.

$$\sum F_z = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad (2.16)$$

Substituindo expressões Q_x e Q_y nesta última equação fornece:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.17)$$

E substituindo os momentos por suas expressões em termos da variável do plano médio $w(x, y)$ obtém-se a equação diferencial que regula o comportamento do placa:

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (2.18)$$

Portanto resolvida a equação diferencial e obtido a expressão de $w(x, y)$ é fácil saber o campo de deslocamentos, deformações, tensões e esforços em qualquer ponto da placa. Os esforços cortantes são dadas por:

$$Q_y = \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} = -D \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) = -D \frac{\delta}{\delta y} (\Delta w) \quad (2.19)$$

$$Q_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{yx}}{\delta y} = -D \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) = -D \frac{\delta}{\delta x} (\Delta w) \quad (2.20)$$

2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Ao resolver a equação diferencial da placa é necessário impor certas condições nas bordas. Isto é evidente tanto do ponto de vista físico e matemático como a resposta de uma placa, ou a solução da equação diferencial que representa, é diferente de acordo com o contorno suportado, apoiado, engastado ou livre.

2.2.1 CONTORNO ENGASTADO

Se a borda $x = a$ é engastada incorporado, o deslocamento transversal $w(x,y)$ e a rotação $\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$ são zero. Portanto, as seguintes condições devem ser satisfeitas pela função $w(x,y)$:

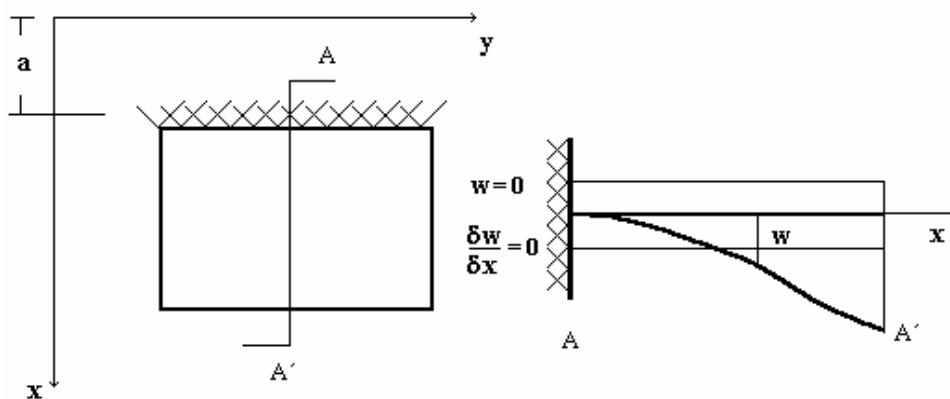


Figura 7. Contorno engastado (Fonte UFRGS)

$$[w(x,y)]_{x=a} = 0 \qquad \left[\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 \qquad (2.21)$$

2.2.2 CONTORNO APOIADO

Se esta aresta $x = a$ é simplesmente apoiada, a variável $w(x, y)$ é igual a zero ao longo da borda. Como na borda da placa pode rodar livremente o momento M_x é zero. Matematicamente borda simplesmente apoiada introduz as seguintes condições para $w(x, y)$:

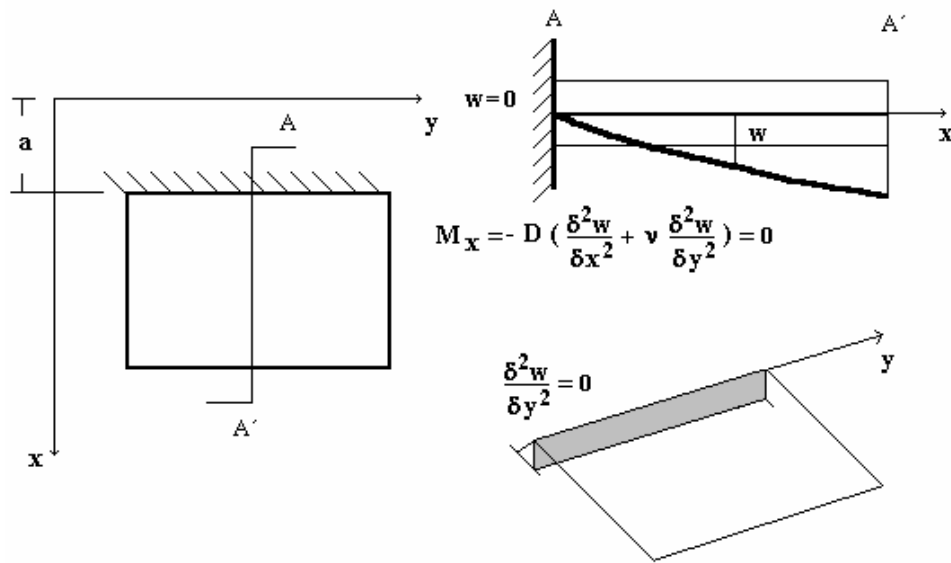


Figura 8. Contorno apoiado (Fonte:UFGRS)

$$[w(x, y)]_{x=a} = 0 \quad [M_x]_{x=a} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (2.22)$$

Se esta aresta $x = a$ for continuamente apoiada, a curvatura ao longo do eixo Y ao longo da linha $x = a$ é zero:

$$\left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (2.23)$$

2.2.3 BORDA LIVRE

Se a borda $x = a$ é livre os momentos de flexão e de torção e o esforço cortante são zero.

$$[M_x]_{x=a} = 0 \quad [M_{xy}]_{x=a} = 0 \quad [Q_x]_{x=a} = 0 \quad (2.24)$$

Em princípio, uma borda livre incorpora três condições que devem satisfazer a equação diferencial que representa o comportamento da placa de estudo. No entanto Kirchhoff provou que estas três condições são excessivas e são suficientes para determinar corretamente $w(x, y)$. Kirchhoff mostrou que as condições de binário e de cisalhamento podem ser substituídas por uma única condição.

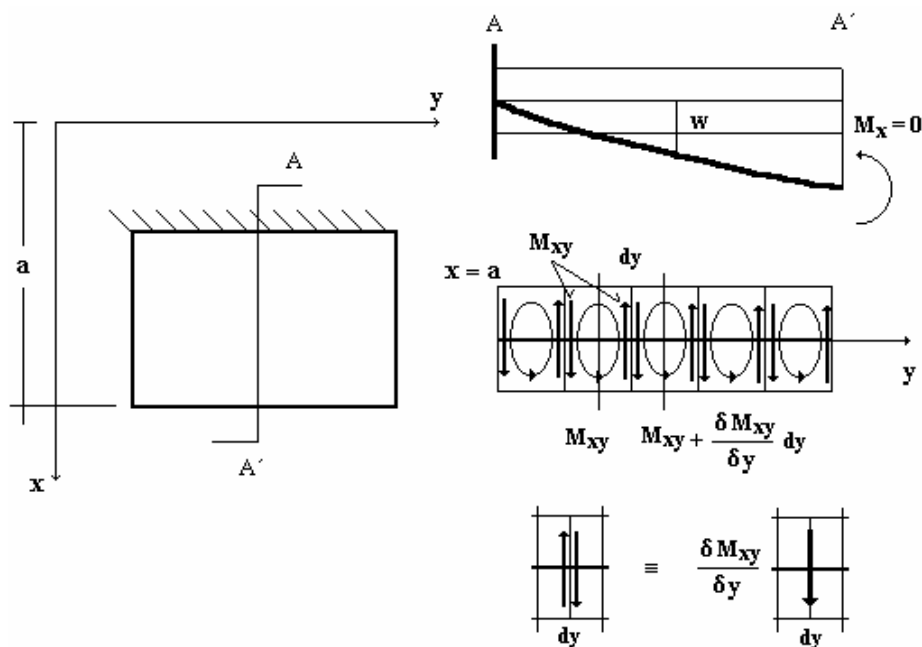


Figura 9. Borda livre (Fonte:UFRGS)

As forças que atuam sobre a placa não varia se o torçor $M_{xy} dy$ agindo sobre um componente diferencial comprimento da aresta do dy $x = a$, é substituída por duas forças verticais de valor M_{xy} e braço dy . Isto é, a distribuição dos torques M_{xy} na borda livre $x=a$ é estaticamente equivalente a uma distribuição de força de cisalhamento Q'_x :

$$Q_x = \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{x=a} \quad (2.25)$$

Por conseguinte, a condição do torque articular e M_{xy} cisalhamento Q_x em uma borda livre $x = a$ pode ser escrito como:

$$[V_x]_{x=a} = [Q_x + Q_x]_{x=a} = \left[Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{x=a} = 0 \quad (2.26)$$

condição é expressa em termos da flecha $w(x,y)$ toma a forma

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - n) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (2.27)$$

Se o bordo livre é definida por $y = b$ condições acima referidas são como se segue:

$$Q_y = \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right]_{y=b} \quad (2.28)$$

$$[V_y]_{y=a} = [Q_y + Q_y]_{y=a} = \left[Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right]_{y=b} = 0 \quad (2.29)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - n) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b} = 0 \quad (2.30)$$

Este fricção leva a qualquer borda livre ou não, esta condição deve ser satisfeita conjunta de torção e cisalhamento de modo que ambos esforços são estaticamente equivalente a uma força vertical V_x ou V_y dada por:

$$V_x = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - n) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad V_y = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - n) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad (2.31)$$

Se a borda estudou tem impedido o movimento vertical destas expressões mudadas de sinal, uma vez determinada a flecha $w(x, y)$ com base nas limitações do tipo de suporte considerado possível obter as reações no elevador.

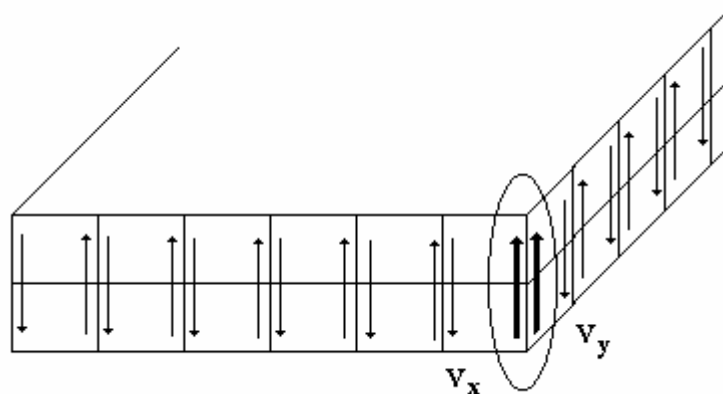


Figura 10. Movimento vertical impedido (Fonte:UFRGS)

Nos cantos, como mostrado na figura há duas forças concentradas no mesmo sentido valores V_x e V_y da M_{xy} (devido a sinal diferente M_{yx}), de modo que, se a placa é suportada na reação ocorre bordas:

$$R = 2M_{xy} = -21 - nD \partial^2 w \partial x \partial y \quad (2.32)$$

Ou seja, a placa submetida a uma carga vertical levanta-se nos cantos e, na prática, é necessário executar o correspondente suporte de ancoragem a esse efeito. Se nas condições de apoio, o torque for zero na borda este efeito não aparece.

2.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE PLACAS DE PRIMEIRA ORDEM

Solução fundamental é definida como a resposta a um ponto genérico “p”, dentro de um domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto “q” no mesmo domínio.

No caso de placas, a solução básica é o deslocamento transversal w^* em um ponto de coordenadas $[x(p), y(p)]$ denominado ponto de deslocamento. Isto é devido à ação de uma força unitária aplicada em um ponto “q” de coordenadas $[x(q), y(q)]$ chamado ponto de carregamento.

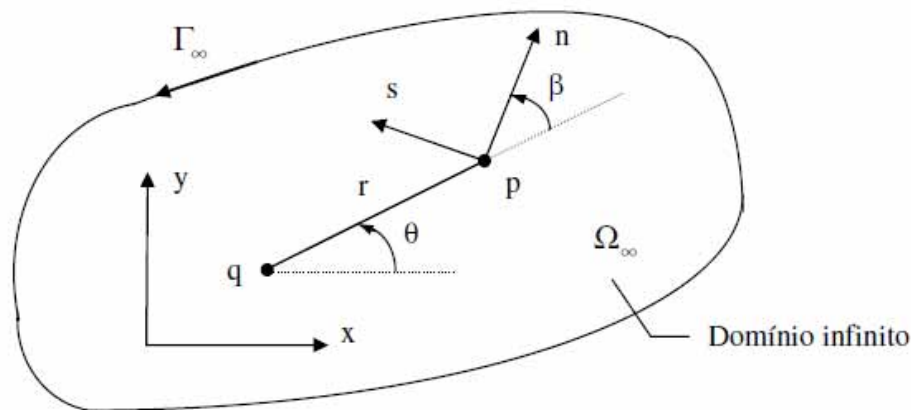


Figura 11. Representação do domínio, pontos de carregamento "q" e pontos de deslocamentos "p" (Fonte: IMEC Notas da aula)

A solução fundamental w^* , é obtida a partir da seguinte equação:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q, p)}{D} \quad (2.33)$$

Sendo $\delta(q, p)$ a distribuição delta de Dirac, que tem as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0 \quad \text{se } p \neq q \quad (2.34)$$

$$\delta(q, p) = \infty \quad \text{se } p = q \quad (2.35)$$

$$\int_{\Omega} \Phi(p) \delta(q, p) d\Omega = \Phi(q) \quad (2.36)$$

A integral da função delta de Dirac em todo o domínio é uma força unitária aplicada no ponto “q”, e corresponde a totalidade do carregamento transversal aplicado à placa.

A solução fundamental w^* é obtida a partir da equação diferencial $\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q,p)}{D}$ aplicada a todos os pontos do domínio, exceto ao ponto do carregamento “q”:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q,p)}{D} \quad (2.37)$$

E depois de diversas operações com as seguintes equações polares:

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta \quad (2.38)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}$$

A solução fundamental pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad (2.39)$$

Cuja solução é conhecida e tendo a seguinte forma:

$$w^* = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + E \quad (2.40)$$

As constantes A e B são obtidas considerando-se a simetria em relação ao ponto "q" e a condição de equilíbrio das forças verticais atuante em um círculo de raio "r" , cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária, e resultam em:

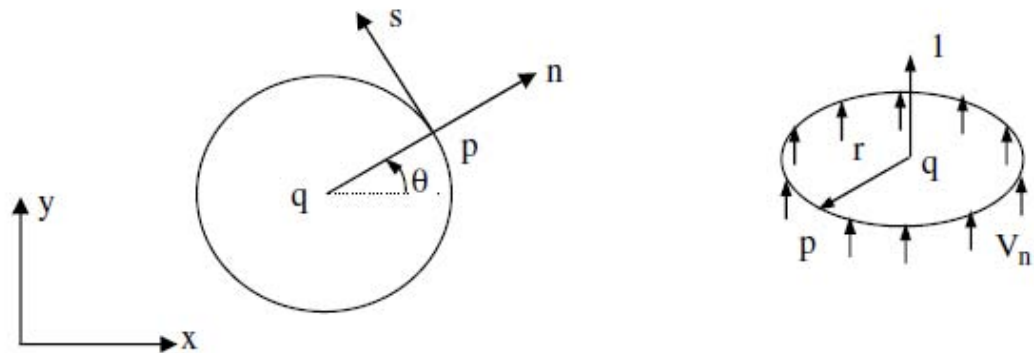


Figura 12: Força cortante equivalente num círculo de raio r devido à uma carga unitária aplicada no ponto q. (Fonte: IMEC Notas da aula)

$$A = 0$$

$$B = \frac{1}{8\pi D} \quad (2.41)$$

$$V_n = -\frac{1}{2\pi r}$$

As constantes C e E, no caso da placa fundamental, podem assumir quaisquer valores. STERN(1979) e Bezine(1978) adotam valores nulos, mas, DANSON(1979) adota (que serão usadas neste trabalho):

$$C = -116\pi D \quad (2.42)$$

$$E = 0 \quad (2.43)$$

Depois de considerar essas constantes, a solução fundamental é:

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.45)$$

2.4 TEOREMA DE BETTI

As duas soluções real e fictícia (fundamental) são relacionadas pelo Teorema de Betti.

Por um lado, a solução real é $\nabla^4 w = \frac{g}{D}$, onde g é a carga.

Por outro, a solução fictícia $\nabla^4 w^* = \frac{\delta(q,p)}{D}$ na qual $\delta(q,p)$ é a carga que é chamada delta de Dirac. Como no caso fictício tem a carga, pode-se encontrar a solução que é determinada pela equação $w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right)$.

Para utilizar o método de elementos de contorno é necessário conhecer a solução fundamental.

Depois de ter definido as duas soluções pode ser utilizado o Teorema de Betti. Este teorema relaciona as duas soluções (reais e fictícios) referidos no volume integral.

$$\int_v \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (2.46)$$

Onde σ_{ij}^* é a tensão fictícia, que é conhecido, pois se conhece w^* e pode se obter pelo uso da equação real $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y)$.

ϵ_{ij}^* é a deformação fictícia, que é também conhecida a partir da seguinte equação $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Agora são apenas os termos ϵ_{ij} e σ_{ij} , que são incógnitas, porque eles são reais. Após a substituição das expressões de σ_{ij}^* , ϵ_{ij}^* , ϵ_{ij} e σ_{ij} a única incógnita da equação integral resultante do teorema de Betti será a função $w(x,y)$.

Porém, em muitos casos não há solução analítica da função $w(x,y)$. Desta forma, surgiram os métodos numéricos, particularmente o Método dos Elementos de Contorno que adota uma aproximação da função $w(x,y)$, transformando a equação integral em equação algébrica.

Note-se que cada ponto tem duas incógnitas como uma função, que são: “w” e $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Antes de usar o MEC, temos de transformar a integral de volume em uma integral de contorno, deixando a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 w(q) + \int_{\Gamma} \left\{ V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right\} d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} \\
 = \int_{\Gamma} \left\{ V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right\} d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g
 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Esta equação é uma função de "q", que são os pontos do interior da placa, e o que nos interessa são os pontos de contorno deve-se usar a equação:

$$\begin{aligned}
w(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) \\
+ \int_{\Gamma_c} \left\{ V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma_c(P) \\
+ \sum_{i=1}^{N_c=1} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) + R_{c\lambda-}^*(Q, P)w_{c\lambda-}(P) + R_{c\lambda+}^*(Q, P)w_{c\lambda+}(P) \\
= \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ V_n(Q, P)w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma(P) \\
+ \int_{\Gamma_c} \left\{ V_n(Q, P)w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma_c(P) \\
+ \sum_{i=1}^{N_c=1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + R_{c\lambda-}(P)w_{c\lambda-}^*(Q, P) \\
+ R_{c\lambda+}(P)w_{c\lambda+}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q, p)d\Omega(p) \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Portanto, após manipulações algébricas chega-se à equação:

$$\begin{aligned}
K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) \\
= \int_{\Gamma} \left\{ V_n(Q, P)w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma(P) \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(P)w^*(Q, P)d\Omega(P) \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Que é a expressão final para pontos do contorno.

Onde:

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (2.50)$$

Para o caso particular de pontos no contorno com uma única tangente:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (2.51)$$

Para a derivada rotacional que estão diretamente no contorno é usado a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) \\ & + \int_{\Gamma_c} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) \\ & + \sum_{i=1}^{N_{ci}-1} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) + \frac{\partial R_{c\alpha}}{\partial m}(Q, P) w_{c\lambda-}(P) \\ & + \frac{\partial R_{c\lambda+}^*}{\partial m}(Q, P) w_{c\lambda+}(P) \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(Q, P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ V_n(Q, P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma_c(P) \\ & + \sum_{i=1}^{N_{ci}-1} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + R_{c\lambda-}(P) \frac{\partial w_{c\lambda-}^*}{\partial m}(Q, P) \\ & + R_{c\lambda+}(P) \frac{\partial w_{c\lambda+}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q, P) d\Omega(P) \end{aligned} \quad (2.52)$$

3. APLICAÇÃO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 SIMPLIFICAÇÃO DE UM PROBLEMA REAL

Na tentativa de se descrever quantitativamente um problema (fenômeno) físico, ou seja, de se obter uma expressão matemática que corresponda ao fenômeno em questão, inicialmente o problema físico real é substituído por um problema equivalente, mais simples.

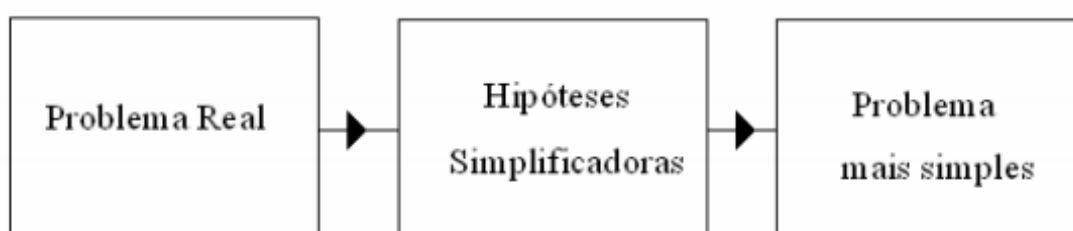


Figura 13. Esquema da simplificação

Neste novo problema são selecionados os parâmetros considerados fundamentais e que podem ser descritos matematicamente através de um sistema de equações diferenciais válida em todo o domínio do problema. A esse sistema são impostas condições de contorno e/ou condições iniciais apropriadas.

3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma equação diferencial. Por esta razão saber reconhecer uma equação diferencial dentro de um problema específico é muito importante, para a busca de sua solução. Da mesma forma, saber classificar uma equação diferencial é o primeiro passo na busca de sua solução, pois apesar de não existir um método único para se resolver todas as equações diferenciais, a classificação delas ajuda a escolher o método mais adequado de solução.

3.3 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, que possui infinitos graus de liberdade, uma vez que as variáveis se distribuem continuamente em todo o domínio do problema. Com exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar soluções analíticas para o problema. Recorre-se, então, aos modelos discretos (ou numéricos), obtidos dos modelos contínuos através de hipóteses simplificadoras: As variáveis que constituem infinitos graus de liberdade, são expressos em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são incógnitas dos modelos discretos dos sistemas equivalentes e são determinados a partir da solução de um sistema de equações algébricas.



Figura 14. Esquema do discretização

Resumidamente, quando o modelo contínuo é substituído por um modelo discreto, o problema matemático da solução de um sistema de equações diferenciais é substituído pelo problema da solução de um sistema de equações algébricas.



Figura 15. Esquema modelo discreto

Portanto, só nos resta agora estudar as equações diferenciais para se poder aplicar os métodos aproximados na solução de problemas físicos reais. A cada elemento de contorno, G_j , associam-se um ou mais pontos denominados "nós" ou "pontos nodais" e os valores das variáveis a eles associados são denominados "valores nodais".

Ao longo de cada elemento as variáveis do problema (deslocamentos e esforços) são aproximadas por funções polinomiais (constante, lineares e quadrática) em funções dos quais é definido o número de pontos nodais, 1,2 e 3 , respectivamente.

Neste trabalho, serão utilizadas apenas funções lineares para aproximar a geometria e as variáveis do problema. Na figura adota-se a seguinte convenção: nó geométrico (extremidade do elemento) "nó" ou "ponto" nodal onde são colocados as variáveis do problema (incógnitas ou valores conhecidos).

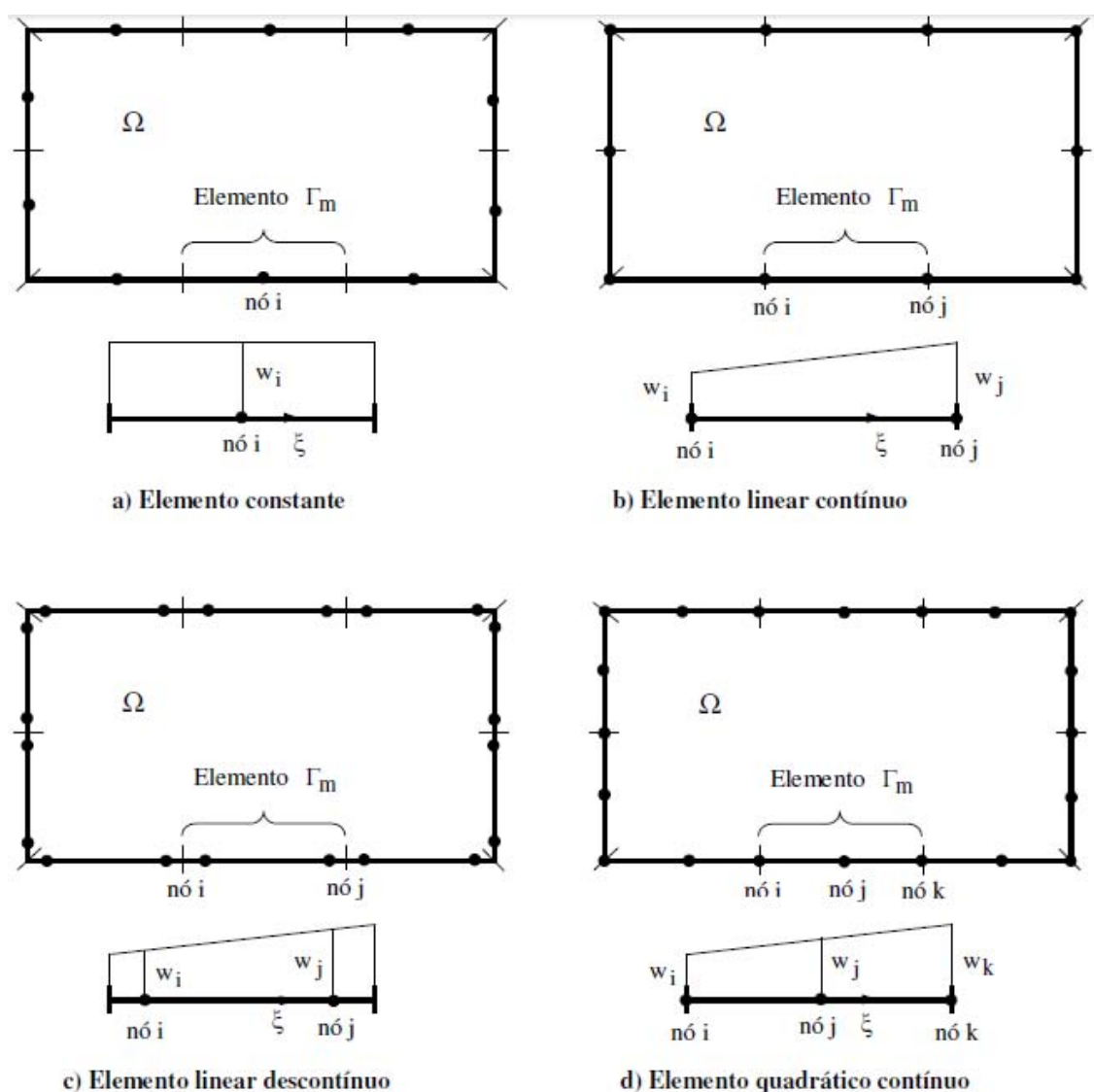


Figura 16. Tipos de elementos para as variáveis (ex. w) e elemento linear para a geometria . (Fonte IMEC Notas da aula)

O Contorno em todos os casos da Figura 16. foi aproximado por segmento de retas, enquanto que as variáveis, como exemplificado para o deslocamento transversal "wi" da placa, foram aproximados em cada elemento por uma função constante, linear e quadrática. A geometria do elemento é aproximada por um polinômio do primeiro grau. Portanto as coordenadas de um ponto P do elemento é dada em função das coordenadas nodais (extremos dos elementos). Com o propósito de facilitar os cálculos das integrações numéricas, expressa-se as coordenadas de cada ponto "P" de um elemento "j", em função das coordenadas locais homogêneas e em termos de matrizes.

$$\underline{x}(P) = \underline{\psi}^T(P) \underline{X}^N \quad (3.0)$$

Onde:

$$\underline{x}(P) = \begin{Bmatrix} X_1(P) \\ X_2(P) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\underline{\psi}^T(P) = \begin{Bmatrix} \underline{\varphi}^T(P) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\varphi}^T(P) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\underline{X}^N = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

O índice N é utilizado para indicar valores nodais X_i^N é coordenada nodal do nó "N" na direção "i".

O vetor da função interpoladora é dado por:

$$\underline{\varphi}(P) = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) \\ \phi_2(P) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Onde:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

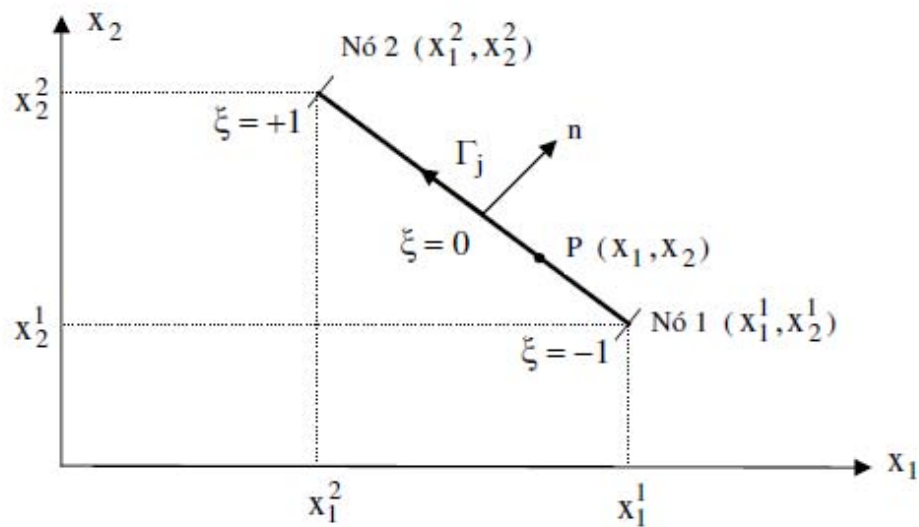


Figura 17. Descrição geométrica do elemento linear. (Fonte IMEC Notas da aula)

3.4 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS

De maneira análoga a geometria, pode-se expressar as variáveis $u(P)$ e $p(P)$ (deslocamentos e esforços) sobre cada elemento, através de funções aproximadas ϕ e valores nodais $\underline{U}^N$ e $\underline{P}^N$.

$$\underline{u}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{U}^N \quad (3.5)$$

$$\underline{p}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{P}^N \quad (3.6)$$

ou escrita explicitamente:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Assim, para um elemento qualquer “j”, os deslocamentos e esforços nos pontos nodais serão:

$$\begin{aligned} u_1(P) &= w(P) & U_1^1 &= w^1 & U_1^2 &= w^2 \\ u_2(P) &= \frac{\partial w}{\partial x}(P) & U_2^1 &= \frac{\partial w^1}{\partial n} & U_2^2 &= \frac{\partial w^2}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$p_1(P) = V_n(P) \quad P_1^1 = V_n^1 \quad P_1^2 = V_n^2$$

$$p_2(P) = M_n(P) \quad P_2^1 = M_n^1 \quad P_2^2 = M_n^2$$

3.5 ELEMENTO LINEAR CONTÍNUO

Um elemento é linear contínuo quando suas variáveis assumem em seus nós valores únicos, ou seja, não há angulosidades ou vinculações diferentes do contorno ou carregamentos diferentes entre elementos vizinhos (Figura 4.2b). Embora, teoricamente, pode-se definir elementos descontínuos mesmo entre elementos onde não ocorram as irregularidades acima.

Assim, aos valores nodais U^N e P^N estão situados no nó correspondente a extremidade do elemento, a aproximação das variáveis pode ser feita por funções ϕ isto é:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

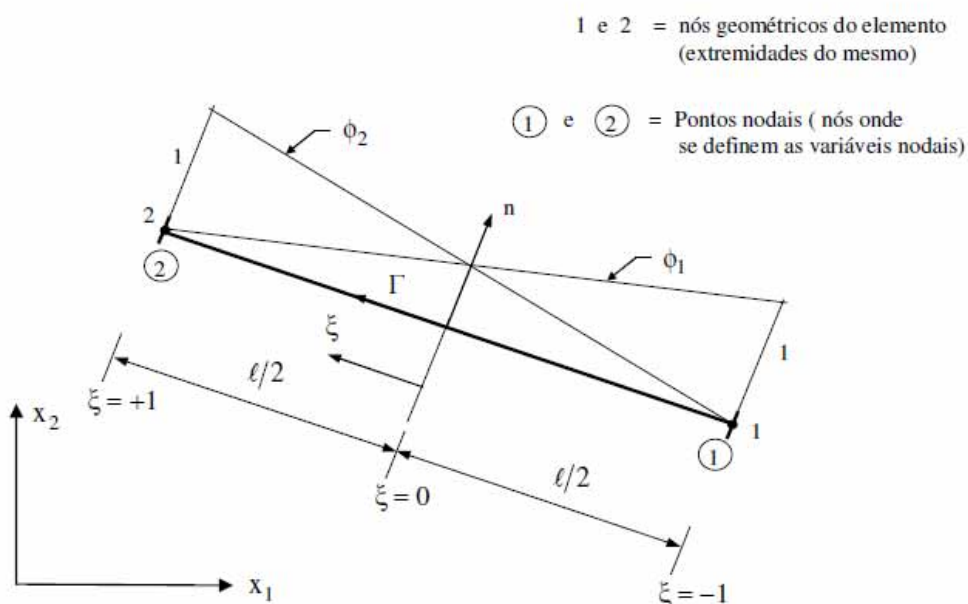


Figura 18. Elemento linear contínuo (Fonte: IMEC Notas da aula)

A presença de angulosidade e vinculações diferentes no contorno de uma placa ou até mesmo de descontinuidades de carregamento torna necessária a descontinuidade de variáveis nos casos práticos, podendo-se assim, definir outros tipos de elementos que permitam expressar tal descontinuidade.

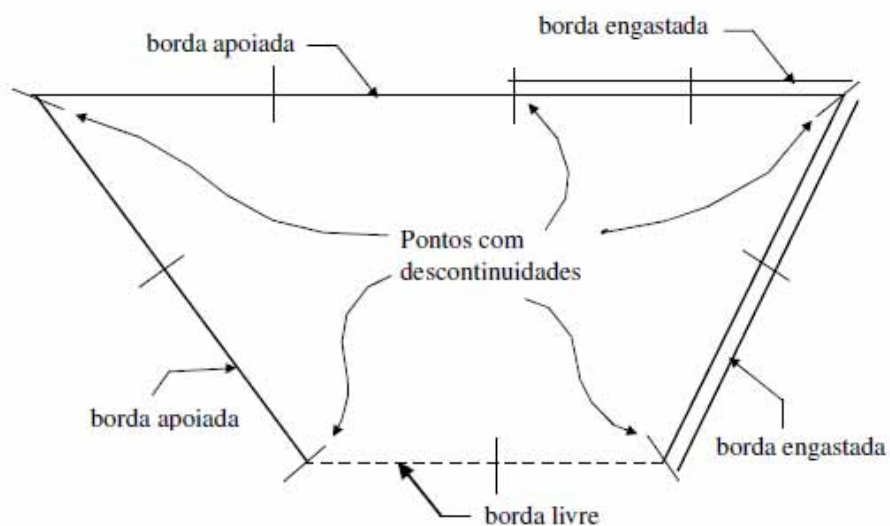


Figura 19. Exemplos de descontinuidades geométricas. (Fonte: IMEC Notas da aula)

3.6 TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A equação integral do deslocamento $w(Q)$, de um ponto “Q” qualquer do contorno, pode ser escrita de forma genérica como:

$$C(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q, P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1} p_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} u_{ci}^* P_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega(p) \quad (3.10)$$

onde os esforços e os deslocamentos são expressos através de variáveis generalizadas. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} C(Q) &= \frac{\beta_c}{2\pi} \\ u(Q) &= w(Q) \\ \underline{u}(P) &= \left\{ \begin{matrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{matrix} \right\} \\ \underline{p}(P) &= \left\{ \begin{matrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{matrix} \right\} \\ \underline{p}^*(Q, P) &= \{V_n^*(Q, P) \quad -M_n^*(Q, P)\} \\ \underline{u}^*(Q, P) &= \left\{ w^*(Q, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} \\ P_{ci}^*(Q, P) &= R_{ci}^*(Q, P) \\ u_{ci}^*(Q, P) &= w_{ci}^*(Q, P) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considerando-se o contorno da placa discretizado por “Ne” elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações fica:

$$\begin{aligned}
C(Q)u(Q) + \sum_{i=1}^{Ne} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \underline{U}_j^N \\
+ \sum_{i=1}^{Ne} p_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) \\
= \sum_{i=1}^{Ne} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) P_j^N \\
+ \sum_{i=1}^{Ne} u_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

As integrais de contorno da equação (3.12) tem funções conhecidas, portanto, elas podem ser calculadas. Por facilidade, definem-se abaixo as integrais sobre um elemento genérico.

$$\underline{h}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\theta}^T(P) d\Gamma_j(P) \tag{3.13}$$

$$\underline{g}^*(Q) = \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma_j(P) \tag{3.14}$$

Após a soma das influencias $\underline{h}^j(Q)$ e $\underline{g}^j(Q)$ de todos os elementos (Ne) nos nós do contorno, a equação algébrica fica:

$$C(Q)u(Q) + \underline{\hat{H}}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q) \tag{3.15}$$

O deslocamento $u(Q)$ pode ser escrito em função dos deslocamentos U do elemento ao qual pertence o ponto Q .

Portanto:

$$C(Q)u(Q) = C(Q)w(Q) = \underline{C}(Q)\underline{U} \tag{3.16}$$

ou seja, considerando-se todos N_n nós, tem-se:

$$\underline{C}(Q)\underline{U} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{C}(Q) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(Q)} \\ w^{(N_n)} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Então, (3.15) fica:

$$\underline{\tilde{H}}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q) \quad (3.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} U^T &= \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad \dots \quad w^{N_n} \quad \frac{\partial w^{N_n}}{\partial n} \right\} \\ P^T &= \{ V_n^1 \quad M_n^1 \quad \dots \quad V_n^{N_n} \quad M_n^{N_n} \} \\ W_c^T &= \{ w_{c1} \quad w_{c2} \quad \dots \quad w_{cN_c} \} \\ R_c^T &= \{ R_{c1} \quad R_{c2} \quad \dots \quad R_{cN_c} \} \end{aligned}$$

onde:

$\underline{\tilde{H}}(Q)$ e $\underline{G}(Q)$ são as matrizes de influência, que dependem da geometria do elemento e são formadas pelos coeficientes dos deslocamentos e das forças do contorno;

$\underline{\tilde{H}}(Q)$ e $\underline{G}(Q)$ são as matrizes de influência formadas pelos coeficientes dos deslocamentos e reações dos cantos da placa, respectivamente;

$T(Q)$ é o valor resultante da integração da região $\emptyset$

Os termos correspondentes a $\underline{W}_c$ e $\underline{R}_c$ da equação (3.17), podem ser tratados da seguinte forma:

O coeficiente de w_c , de cada canto da placa, é dividido em duas partes, obtendo-se assim a contribuição dos nós anterior e posterior a este canto (Figura 20). As parcelas assim obtidas são adicionadas coeficientes correspondentes da matriz $\underline{\tilde{H}}$

A reação R_c é escrita em função das rotações dos nós vizinhos ao canto, usando-se para isto a sua definição $R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^-$, e escrevendo-se as derivadas em termos de diferenças.

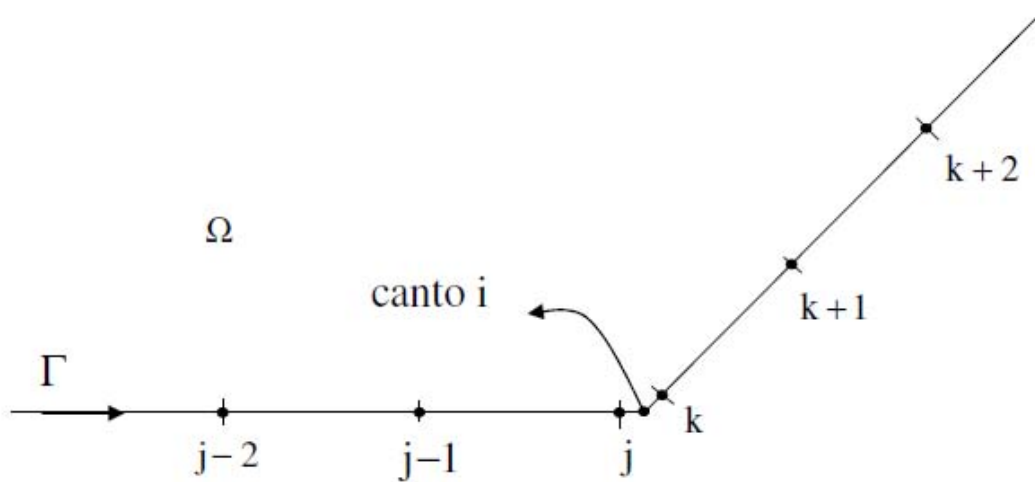


Figura 20. Canto i da placa com seus nós anteriores e posteriores, necessários para o cálculo das contribuições da reação de canto na matriz H.

Assim, a equação (3.18) pode ser escrita como:

$$\underline{H}(Q)\underline{U} = \underline{G}(Q)\underline{P} + T(Q) \quad (3.19)$$

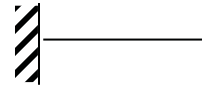
Note-se que a expressão (3.19) corresponde a uma linha, ou seja, é a equação do deslocamento $w(Q)$, apenas do ponto Q , após a discretização do contorno, da aproximação das variáveis e da consideração de (3.17).

Analogamente, pode-se obter uma expressão semelhante à (3.19) para a derivada direcional do mesmo ponto $Q, \frac{\partial w}{\partial m}(Q)$.

Com a discretização do contorno da placa, quatro variáveis são associadas a cada nó, $w(P), \frac{\partial w}{\partial n}(P), V_n(P)$ e $M_n(P)$, das quais duas são conhecidas, dadas pelas condições de contorno da placa. Nos casos de vinculações clássicas, tem-se:

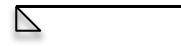
-Borda engastada

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$



-Borda simplesmente apoiada

$$w = M_n = 0$$



-Borda livre

$$V_n = M_n = 0$$



Portanto, impondo-se as condições de contorno a todos os “Nn” nós da equação (3.19), tem-se “2Nn” incógnitas, o que torna necessário a utilização de duas equações para cada nó, para definir um sistema de equações lineares.

$$\underline{HU} = \underline{GP} + \underline{T} \quad (3.20)$$

No caso da equação (3.18), os termos w_c e R_c associados aos cantos, podem ser considerados como variáveis, sendo que um dos quais é possível conhecer-se nos casos clássicos de vinculação. Assim, tem-se “2Nn” incógnitas nos nós e “Nc” incógnitas nos cantos, tornando-se necessário utilizar duas equações para cada nó e uma para cada canto para a definição do sistema. O sistema de equações lineares assim definido fica:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{H}_c \\ \underline{H} & \underline{H}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{W}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{H}_c \\ \underline{G} & \underline{G}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{T} \\ \underline{T}_c \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

onde $\underline{H}_c$ e $\underline{G}_c$ são as submatrizes formadas pelos coeficientes correspondentes a w_c e R_c respectivamente, e têm $2(Nn) \times (Nc)$ elementos $\underline{H}, \underline{G}, \underline{H}_c, \underline{G}_c$; são submatrizes

semelhantes a $\underline{H}, \underline{G}, \underline{H}_c$ e $\underline{G}_c$, respectivamente, provenientes das equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos da placa, o subvetor $\underline{T}_c$ é também semelhante a $\underline{T}$.

As submatrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$ têm $(Nc) \times 2(Nn)$ elementos e as submatrizes $\underline{H}_c$ e $\underline{G}_c$ são quadradas de ordem (Nc) .

O sistema de equações lineares (3.21) pode ser resolvido levando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, e todos as parcelas conhecidas para o segundo membro, obtendo-se:

$$\underline{A}X = \underline{B} \quad (3.22)$$

onde:

$\underline{A}$ é a matriz formada pelos elementos das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$, correspondentes aos valores de $\underline{U}$ e $\underline{P}$ desconhecidos.

$\underline{B}$ é o vetor obtido a partir da soma do vetor $\underline{T}$ com o vetor formado pelo produto dos elementos das matrizes H e G pelos correspondentes valores de $\underline{U}$ e $\underline{P}$ conhecidos.

4. APLICAÇÕES PRÁTICAS

4.1 Exemplo 1: Placa retangular apoiada em uma das bordas com carga distribuída uniformemente.

Compara-se os resultados obtidos pela realização de a placa com vinte e com quarenta elementos.

A placa e retangular de dimensões 500cm x 600cm, espessura $h=18\text{cm}$, e simplesmente apoiada em três cantos e engastada em o outro. E submetida a um carregamento distribuído em toda a placa de $g=0,000625 \text{ kN/cm}^2$ (Figura 20). Considera-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E = 1800,0 \text{ kN / cm}^2$.

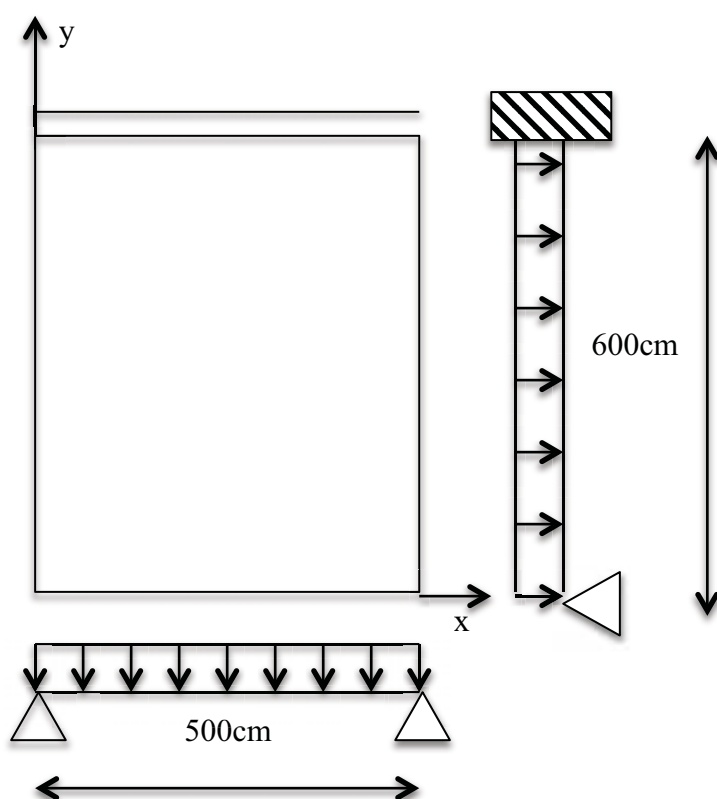


Figura 21. Placa apoiada em três de seus lados e engastada em o outro.

A placa foi discretizada em 20 e 40 elementos. A continuação mostra-se as duas tabelas para a comparação dos resultados obtidos. Além disso em ambos exemplos o número de nós internos é de 9.

Exemplo 1. Placa quadrada de 500cm x 600cm. h=18cm; g=0,000625 kN/cm ² ; v=0.30; E=2.560,0kN/cm ²						
Placas 2	Numero de elementos	$W_{\max}=W_{33}$ (cm)	M_X [kN cm]	M_Y [kN cm]	$V_{\max}$ [kN]	R_c [kN]
	20	0.1729×10^{-2}	-7.5755	-7.0791	0.939×10^{-1}	0.3259×10^{-1}
	40	0.1732×10^{-2}	-7.5872	-7.0974	0.966×10^{-1}	0.2752×10^{-1}

Este exemplo mostra que à medida que a discretização é maior a aproximação vai ser mais acertada.

4.2 Exemplo 2: Placa quadrada pertencente a um prédio. Mostra-se dois exemplos.

Compara-se os resultados obtidos pela realização de as duas placas com quarenta elementos e a realização de as mesmas placas de maneira analítica utilizando o livro “RÖSCH”.

Uma das placas tem três bordas engastadas e um de eles livre. Por outro lado, a outra placa tem todos as bordas engastados. As dimensões de as placas são 400cm x 600cm. A carga e distribuída com valor de $g=0,000625 \text{ kN/cm}^2$. Considera-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,17$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E = 1800,0 \text{ kN / cm}^2$.

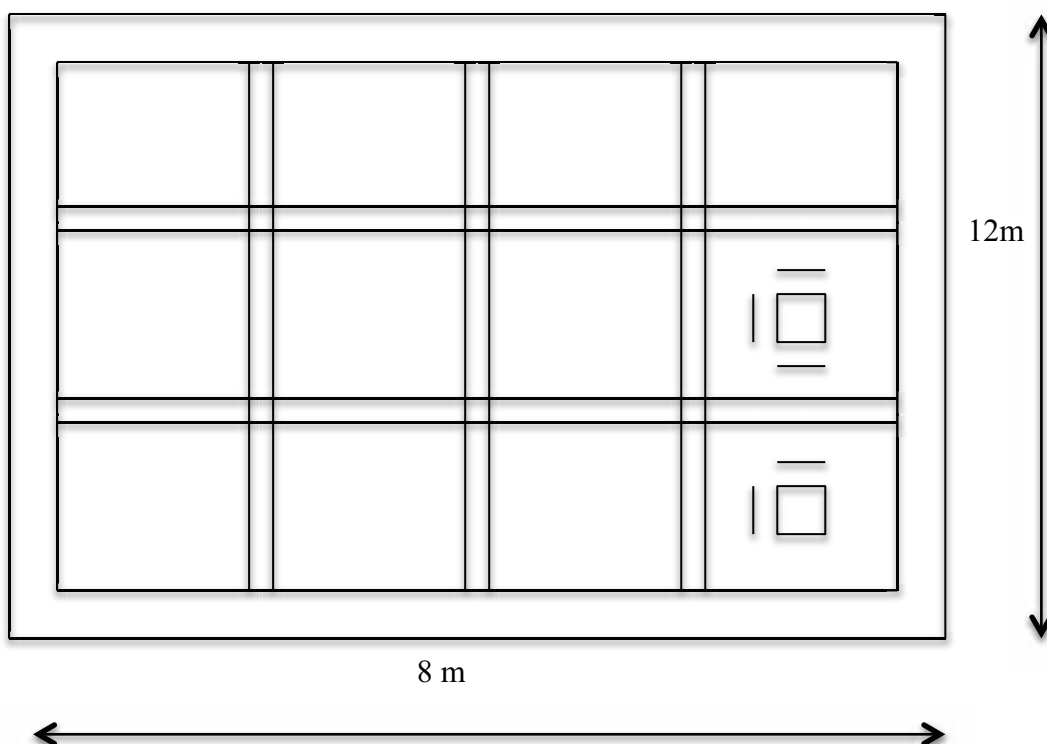


Figura 22. Placas que formam parte de um prédio.

Exemplo 2. Placas quadradas de 200cm x 400cm. h=15cm; g=0,000625 kN/cm ² ; v=0.17; E=1800,0kN/cm ²						
Placas 2	Numero de elementos	$W_{\max}=W_{45}$ (cm)	M_X [kN cm]	M_Y [kN cm]	$V_{\max}$ [KN]	R_c [kN]
Placa com três bordas engastados e uma livre	40	-0.8621×10^{-4}	-1.3761	-0.4699	0.7894	0.7529
Tabela de ROSCH		-	-1.3750	-0.4750	-	-
Placa com duas bordas engastados e dois livre	40	-0.8993×10^{-4}	-1.4290	-0.4314	0.8924×10^{-1}	0.7588
Tabela de ROSCH		-	-1.4250	-0.4250	-	-

Neste segundo exemplo comparámos o resultado obtido pelo MEC com o obtido por tabelas vendo que a diferença é muito pequena. Portanto ratifica-se que este método tem uma fiabilidade muito alta.

4.3 Exemplo 3: Placa própria desenhada por nos com 5 lados.

Os resultados serão de a realização da placa com 38 elementos. A placa será mostrada na figura seguinte, tendera uma carga distribuída no domino do valor $g=0.000625\text{kN/cm}^2$. Considera-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E = 1800,0 \text{ kN / cm}^2$.

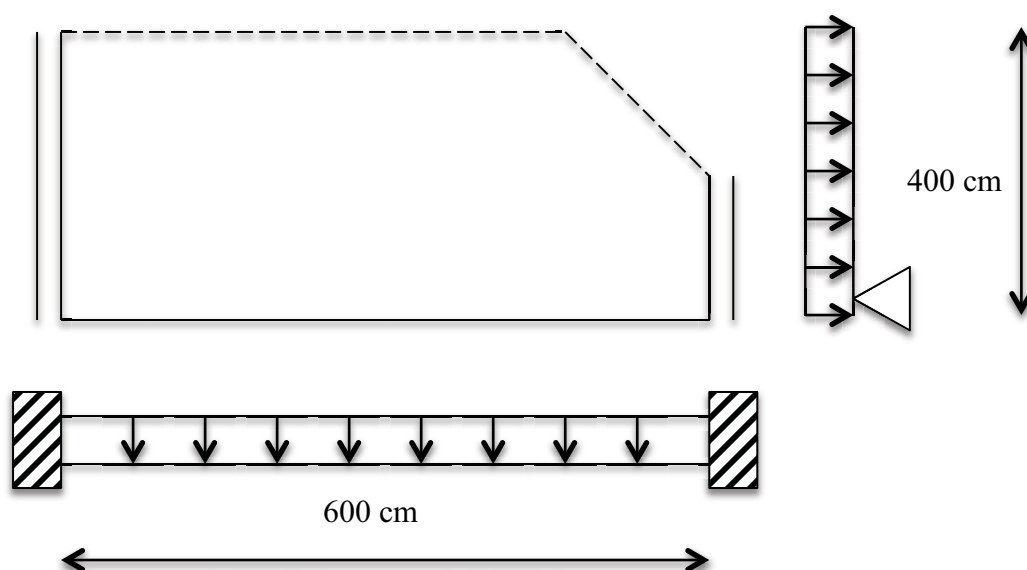


Figura 23. Placa poligonal de cinco lados.

A discretização da placa é a seguinte: 38 elementos no contorno, 43 nós no contorno e 8 pontos internos. A continuação mostra-se uma tabela com os resultados obtidos.

Exemplo 3. Placa 5 lados de 400cm x 600cm						
$h=18\text{cm}; g=0,000625 \text{ kN/cm}^2; \nu=0.30; E=1800,0\text{kN/cm}^2$						
Placas 2	Numero de elementos	$W_{\max}=W_{28}$ (cm)	M_X [kN cm]	M_Y [kN cm]	$V_{\max}$ [kN]	R_c [kN]
	38	0.495537×10^{-2}	-5.7066	3.7415	0.32286	0.38935×10^{-1}

4.4 Exemplo 4: Placa com carga distribuída e placa com carga concentrada.

Compara-se os resultados obtidos de uma placa com carga distribuída no domínio e além disso a mesma placa mas com a carga concentrada no meio.

As duas placas tem todas as bordas apoiadas, a carga distribuída tem um valor de $g=0.000625\text{kN/cm}^2$ e a pontual um valor de $G=37.5\text{kN/cm}^2$. Considera-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E = 1800,0\text{ kN/cm}^2$.

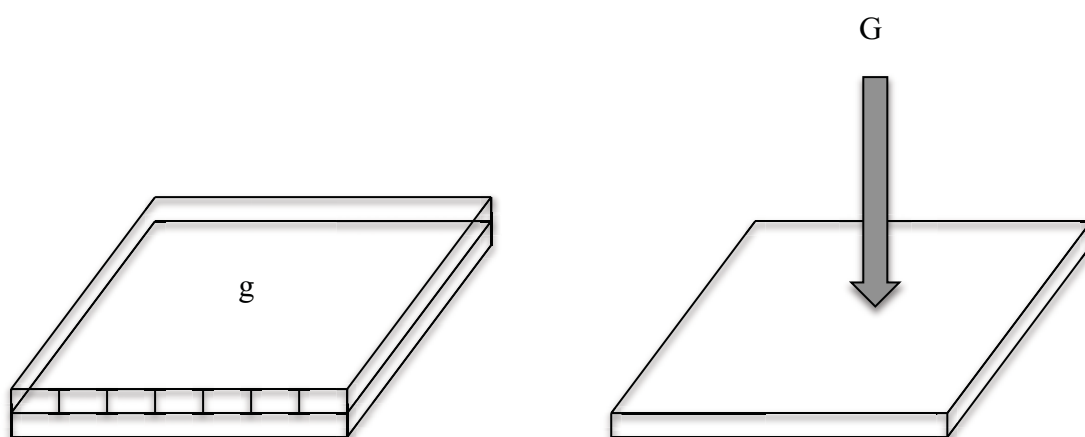


Figura 24. Placas com carga distribuída e pontual.

Exemplo 4. Placas quadradas de 400cm x 600cm.						
$h=15\text{cm}; g=0,000625\text{ kN/cm}^2; G=37.5\text{kN/cm}^2; \nu=0.3; E=1800,0\text{kN/cm}^2$						
Placas 2	Numero de elementos	$W_{\max}=W_{45}$ (cm)	M_x [kN cm]	M_y [kN cm]	$V_{\max}$ [kN]	R_c [kN]
Placa com carga distribuída	40	-0.3965×10^{-2}	-9.7884	-7.8215	0.1441	-0.1286×10^2
Placa com carga como concentrada	40	-0.9133×10^{-2}	-95.1328	-92.3328	0.2047	-0.1788×10^2

4.5 Exemplo 5 : Placa circular e placa quadrada.

Compara-se os resultados obtidos de uma placa circular com uma placa quadrada das mesmas dimensões.

A placa quadrada tem todos os bordas apoiados e o contorno da placa circular também é tudo apoiado. Ambas placas tem uma carga distribuída com valor de $g=0.000625\text{kN/cm}^2$. Considera-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E = 1800,0\text{ kN / cm}^2$.

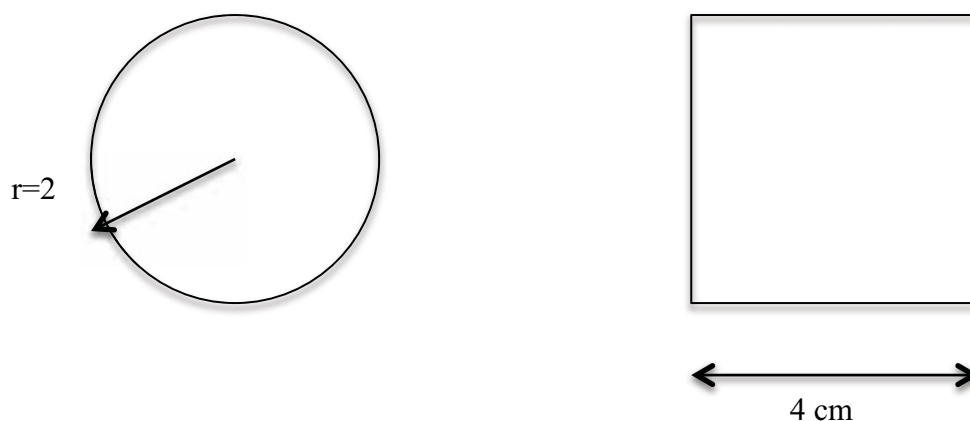


Figura 25. Placa circular e placa quadrada.

Exemplo 5. Placas circular e cuadrada.						
$h=15\text{cm}; g=0,000625\text{ kN/cm}^2; \nu=0.3; E=1800,0\text{kN/cm}^2$						
Placas 2	Numero de elementos	$W_{\max}=W_{45}$ (cm)	M_x [kN cm]	M_y [kN cm]	$V_{\max}$ [kN]	R_c [kN]
Placa quadrada	40	-0.1167×10^{-2}	-4.7862	-4.7862	0.1053	-6.9733
Placa circular	40	-0.2993×10^{-2}	-7.5896	-6.9431	0.9849	-3.3020

Um exemplo tão singelo como uma placa quadrada e uma placa circular com a mesma carga mostra uma diferença bastante ampla, ainda que a priori pudesse parecer que não é assim.

5. CONCLUSÕES

Com o estudo da Teoria de Placas e do Método dos elementos do contorno, verifica-se que as estruturas se comportam, de uma maneira simples. Sendo um método de grande confiabilidade já que com a discretização de aproximadamente quarenta elementos o resultado obtido é muito próximo ao obtido por tabelas. Além disso, com este método é possível calcular placas com várias condições de contorno, cujas soluções não existam tabelados ou a solução analítica seria muito complexa e não estariam disponíveis em livros, tabelas e programas do computador.

Normalmente as placas resolvem-se com tabelas e com programas específicos de computador, mas usando estas técnicas o usuário não é consciente do comportamento físico das placas e ademais existem tipos de placas que não é possível resolver.

No entanto com o método dos elementos de contorno, o usuário conhece o comportamento da placa e é capaz de resolver qualquer tipo delas.

Nas aplicações práticas apresentadas no capítulo quatro observa-se que usando as tabelas os resultados obtidos não são muito confiáveis em comparação com os obtidos pelo *MEC*.

Se conclui neste trabalho que o *Método dos elementos do contorno* tem uma grande aplicação e utilidade na Engenharia estrutural. Teve uma grande importância a realização deste projeto pois este método não é estudado em no curso de engenharia na Espanha.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CALDERÓN, E. T. **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundações elástica pelo Método dos Elementos de Contorno**. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1991. (Dissertação de Mestrado).

GALLEGO SEVILLA, R. & RUS CARLBORG, G. & MARTINEZ CASTRO, A.E. **Placas delgadas mediante métodos clásicos**. Universidad de Granada. Disponível em: http://www.ugr.es/~grus/docencia/aeii/download/prontuario_placas.pdf Visualizado em 10/10/2012.

KIRCHHOFF, g. *Über das Gleichgewicht und Die Bewegung Einer Elastischen Scheibe*. **J. Math.**, v.40, 1850, p.51-58.

NAVARRO, C. **Placas y laminas**. Universidad Carlos III de Madrid. Disponível em: http://ocw.uc3m.es/mecanica-de-medios-continuos-y-teoria-de-estructuras/elasticidad-resistencia-de-materialesii/material-de-clase-1/CAPITULO_9.pdf Visualizado em 15/10/2012.

RÜSCH, E.H.. **Fahrbahnplatten von Strassenbrüchen**. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1960.

TAGUTI, Y. **Formulação para o estudo de placas elásticas pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando-se apenas a equação de “w”**. Notas de aulas do Curso Introdução ao Método dos Elementos de Contorno, FEG-UNESP, 2010.

TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. Auckland, McGraw-Hill Book Company, 1981. 580p.

VIDAL PESSOLANI, R.B. **Introdução aos Método dos elementos de contorno**. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.slideshare.net/raulbernardo/1-introduo-ao-mtodo-dos-elementos-de-contorno> Visualizado em 25/10/2012.

