



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Sorocaba

RAFAEL AUGUSTO YAMAMOTO

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DO RISCO X RENDIMENTO DE UM
PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO A PARTIR DO CÁLCULO DA
FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ**

Sorocaba - SP
2022

RAFAEL AUGUSTO YAMAMOTO

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DO RISCO X RENDIMENTO DE UM
PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO A PARTIR DO CÁLCULO DA
FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Sorocaba.

Orientador: Prof. Dr. Galdenoro Botura Junior

Sorocaba - SP
2022

Y19a

Yamamoto, Rafael Augusto

Análise computacional do risco x rendimento de um portfólio de investimento a partir do cálculo da fronteira de Markowitz / Rafael Augusto Yamamoto. -- Sorocaba, 2022

58 p. : tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de Controle e Automação) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba

Orientador: Galdenoro Botura Junior

1. Portfolio management. 2. Desenvolvimento de Software.
3. Investimentos Analise. 4. Risco (Economia). I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Ciência e Tecnologia
Câmpus de Sorocaba

ANÁLISE COMPUTACIONAL DO RISCO X RENDIMENTO DE UM PORTFÓLIO DE
INVESTIMENTO A PARTIR DO CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE DE
MARKOWITZ

RAFAEL AUGUSTO YAMAMOTO

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
BACHAREL EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Profº. Drº. Everson Martins
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. GALDENORO BOTURA JUNIOR
Orientador/UNESP - Campus de Sorocaba

Prof. Dr. STEVEN FREDERICK DURRANT
UNESP - Campus de Sorocaba

Prof. Dr. MARCIO ALEXANDRE MARQUES
UNESP - Campus de Sorocaba

Dezembro de 2022

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, que me ofereceu oportunidades e uma educação digna para que eu pudesse seguir e conquistar os meus sonhos.

Ao professor Galdenoro Botura Junior, por ter se interessado em meu projeto e me orientado com toda a sua atenção e auxílio nessa etapa da minha graduação.

A todos os meus amigos da faculdade, que me incentivaram na escolha do tema e me apoiaram ao longo deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho busca replicar os estudos do economista Harry Markowitz para o âmbito da programação, utilizando sua teoria que avalia a relação entre risco e retorno de investimentos. Durante os últimos 30 anos de mercado, a teoria foi validada efetivamente, além de ter sido uma das pioneiras na filosofia de diversificação da carteira de investimento para trazer o maior ganho em relação ao menor risco. Assim, este estudo visa tornar este assunto mais difundido na sociedade através do uso da programação. O programa em Python tem como objetivo extrair os dados históricos de cada empresa composta na carteira do usuário e fazer uma análise estatística com essas informações para, posteriormente, mostrar o risco que o investidor está tomando atrelado àquele rendimento. Além disso, também traz o portfólio mais eficiente respeitando o perfil de investidor. Esta avaliação de carteira de investimento contará com três grandes etapas: análise das ações, análise das carteiras e seleção de carteiras. Para a análise de ações, caberá ao investidor escolher os ativos que lhe atraem, pois nessa etapa estão envolvidos fundamentos de análise de empresas, fluxo de caixa e desempenhos esperados. A partir do momento em que o usuário escolher as empresas que irão compor a sua carteira de investimentos, o programa irá fazer a análise de cada ativo envolvendo projeções de retorno e risco atrelado a eles. Já na etapa final de seleção de carteiras, o programa irá identificar a melhor combinação possível utilizando os ativos escolhidos pelo usuário, comparando rentabilidade e risco, para que sejam geradas carteiras otimizadas para cada tipo de investidor (conservador, moderado e arrojado). Seis carteiras de investimento serão elaboradas no total, três possuindo apenas ações, enquanto as outras três contêm, além das ações, investimentos na Taxa Selic (LFT). Deste modo, cada tipo de investidor contará com duas possíveis opções. Ao considerar que o programa irá resolver apenas as duas últimas etapas para a construção de uma carteira de investimento, caberá ao usuário buscar informações sobre investimentos para que a carteira fique mais otimizada e personalizada de acordo com cada indivíduo. Apesar do produto ser uma ótima ferramenta para a decisão final, é sempre aconselhável buscar informações com uma pessoa de confiança e que tenha conhecimento no assunto para que o risco da carteira do usuário esteja em linha com o seu perfil de investidor. Assim, este trabalho busca difundir o conhecimento sobre investimento e estimular o ato de poupar por meio da programação, ajudando principalmente os ingressantes na bolsa de valores.

Palavras-chave: Fronteira Eficiente, Índice Sharpe, grau de correlação, Python, risco e rentabilidade.

ABSTRACT

The document is based on the studies of economist Harry Markowitz, winner of the 1990 Economic Sciences prize, to replicate it in the field of programming. During these 30 years in the market, Markowitz's theory was effectively validated, evaluating the relationship between risk and return on investments. In addition, it was one of the pioneers in the philosophy of diversifying the investment portfolio to bring the greatest gain in relation to the lowest risk. Thus, this study aims to make this subject more widespread in society through the use of programming. The Python program aims to extract the historical data of each company included in the user's portfolio and perform a statistical analysis with this information to later show the risk that the investor is taking linked to that yield. In addition, it also brings the most efficient portfolio respecting the investor profile. This investment portfolio evaluation will have three major steps: stock analysis, portfolio analysis and portfolio selection. For the analysis of stocks, it will be up to the investor to choose the assets that attract him, because at this stage the fundamentals of analysis of companies, cash flow and expected performances are involved. From the moment the user chooses the companies that will compose his investment portfolio, the program will analyze each asset involving projections of return and risk linked to them. In the final step of portfolio selection, the program will identify the best possible combination using the assets chosen by the user, comparing profitability and risk, so that optimized portfolios are generated for each type of investor (conservative, moderate and bold). Six investment portfolios will be elaborated in total, three having only shares, while the other three contain, in addition to shares, investments at the Selic Rate (LFT). In this way, each type of investor will have two possible options. Considering that the program will only solve the last two steps for the construction of an investment portfolio, it will be up to the user to seek information about investments so that the portfolio is more optimized and personalized according to each individual. Although the product is a great tool for the final decision, it is always advisable to seek information from a person you trust and who has knowledge of the subject so that the risk of the user's portfolio is in line with their investor profile. Thus, this work seeks to disseminate knowledge about investment and encourage the act of saving through programming, mainly helping those entering the stock exchange.

Keywords: Efficient Frontier, Sharpe Ratio, Correlation Degree, Python, Risk and Profitability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Consequências da diversificação na carteira de investimentos	19
Figura 2 - Curva característica da fronteira eficiente de Harry Markowitz	23
Figura 3 - Histograma característico de uma ação listada na bolsa de valores brasileira.....	32
Figura 4 - Fluxograma utilizado para a execução da lógica de programação	33
Figura 5 – Fragmento da programação referente a extração de dados das ações utilizadas	34
Figura 6 – Fragmento da programação referente a extração de dados da taxa Selic	34
Figura 7 – Fragmento da programação referente a extração de dados da carteira do usuário.....	35
Figura 8 – Fragmento da programação referente ao gráfico de variação histórica ...	35
Figura 9 – Fragmento da programação referente as equações de retorno	36
Figura 10 – Fragmento da programação referente as equações de risco.....	36
Figura 11 – Fragmento da programação referente as medidas estatísticas.....	36
Figura 12 – Fragmento da programação referente ao histograma e ao gráfico de linha.....	37
Figura 13 – Fragmento da programação referente a criação das carteiras aleatórias	38
Figura 14 – Fragmento da programação referente ao cálculo do índice Sharpe.....	39
Figura 15 – Fragmento da programação referente a seleção das carteiras mais otimizadas de acordo com Markowitz.....	39
Figura 16 - programação referente a adição da taxa Selic no portfólio do usuário ...	40
Figura 17 - programação referente a construção dos gráficos	40
Figura 18 - Layout em Word para formatar o relatório final	42
Figura 19 – Fragmento da programação referente a construção do relatório do usuário.....	43
Figura 20 - Histórico de rentabilidade da carteira de ações analisada entre 2019 e 2022	47
Figura 21 - Variação histórica diária da PETR3 de 2019 a 2022	51

Figura 22 - Variação histórica diária da EGIE3 de 2019 a 2022.....	51
Figura 23 - Variação histórica diária da VALE3 de 2019 a 2022	52
Figura 24 - Variação histórica diária da WEGE3 de 2019 a 2022	52
Figura 25 - Histograma da PETR3 com 15 agrupamentos distintos	53
Figura 26 - Histograma da EGIE3 com 15 agrupamentos distintos	54
Figura 27 - Histograma da VALE3 com 15 agrupamentos distintos	54
Figura 28 - Histograma da WEGE3 com 15 agrupamentos distintos.....	55
Figura 29 - Curva de Markowitz com as ações composta no portfólio de 2019 a 2022	61
Figura 30 – Curva de Markowitz com as ações composta no portfólio contendo investimento na taxa Selic de 2019 a 2022	61
Figura 31 – Curva de Markowitz com as melhores carteiras selecionada pelo programa.....	62
Figura 32 – Curva de Markowitz com as melhores carteiras selecionada pelo programa contendo investimento na taxa Selic	63
Figura 33 – Sobreposição das curvas gerada pelo programa com as carteiras composta somente por ações e com as carteiras composta por ações e taxa Selic.	64
Figura 34 – Relatório gerado pelo programa contendo todas as informações a respeito da carteira do usuário	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Intervalo de tempo utilizado para o cálculo de Markowitz	45
Tabela 02 - Histórico de preços das ações que estão no portfólio de 2019 a 2022 ..	45
Tabela 03 - Histórico da taxa Selic em um intervalo de 12 anos	46
Tabela 04 - Média da taxa Selic entre os anos de 2019 e 2022.....	46
Tabela 05 - Rentabilidade diária de cada ação e da Taxa Selic de 2019 a 2022	48
Tabela 06 - Variância dos ativos e da taxa Selic de 2019 a 2022	49
Tabela 07 - Volatilidade diária de cada ação e da Taxa Selic de 2019 a 2022	49
Tabela 08 - Coeficiente de assimetria de Pearson de cada ação de 2019 a 2022....	50
0 - Correlação entre os pares de ações que estão na carteira de investimento de 2019 a 2022	55
Tabela 10 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com maior índice Sharpe.....	56
Tabela 11 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com maior índice Sharpe	57
Tabela 12 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com maior retorno	58
Tabela 13 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com maior retorno.....	58
Tabela 14 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com o menor risco.....	59
Tabela 15 - Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com o menor risco	59
Tabela 16 - Risco e retorno da carteira com distribuição igualitária entre as ações composta no portfólio	60

LISTA DE ABREVIATURAS

BACEN	Banco Central do Brasil
COPOM	Comitê de Política Monetária
SELIC	Sistema de Especialização de Liquidação e Custódia

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Considerações Iniciais	14
1.2 Contexto e justificativa	15
1.3 Objetivos	16
2 CONCEITUAÇÃO	18
2.1 Risco de uma carteira	18
2.2 Retorno esperado e retorno efetivo de um ativo	19
2.3 Risk Free Rate	20
2.4 Volatilidade e desvio padrão	21
2.5 Sharpe ratio	22
2.6 Fronteiras eficientes de Markowitz	22
2.7 Python e bibliotecas Python	23
3 MATERIAIS E MÉTODOS	26
3.1 Materiais	26
3.2 Métodos	26
3.2.1 Desvio-padrão e variância para um ativo	26
3.2.2 Correlação	27
3.2.3 Desvio-padrão do portfólio completo	28
3.2.4 Cálculo do valor esperado	29
3.2.5 Índice Sharpe	30
3.2.6 Convertendo taxas	31
3.2.7 Estatística descritiva - coeficiente de assimetria de Pearson e amplitude	31
4 PROGRAMAÇÃO	33
4.1 Extração de dados	33
4.1.1 Ações	33
4.1.2 Taxa Selic	34
4.1.3 Carteira do usuário	34
4.2 Variação histórica	35

4.3 Cálculo do retorno esperado	35
4.4 Cálculo do risco	36
4.5 Medidas estatística	36
4.6 Variação Histórica	37
4.7 Geração de carteiras aleatórias	38
4.8 Cálculo do índice Sharpe	37
4.9 Otimização do portfólio	39
4.10 Carteira com Risk Free	40
4.11 Construção de gráficos	40
4.12 Construção do relatório	41
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	44
5.1 Tempo de testes	44
5.2 Preço histórico das ações	45
5.3 Taxa histórica da Selic	46
5.4 Média da taxa Selic	46
5.5 Volatilidade histórica das ações	46
5.6 Estatística	48
5.6.1 Retorno esperado	48
5.6.2 Variância	48
5.6.3 Desvio Padrão	49
5.6.4 Coeficiente de assimetria de Pearson	50
5.6.5 Variação histórica em gráfico de linhas	50
5.6.6 Histograma	53
5.6.7 Correlação	55
5.7 Carteiras Otimizadas	56
5.7.1 Carteira com maior Sharpe	56
5.7.2 Carteira com maior retorno	57
5.7.3 Carteira com menor risco	59
5.7.4 Carteira do Usuário	60
5.8 Gráfico de Markowitz	60
5.8.1 Gráfico de Markowitz com as melhores carteiras	62
5.8.2 Sobreposição das duas curvas de Markowitz	63

5.8.3 Relatório final do usuário.....	64
6 CONCLUSÃO	66
REFERÊNCIAS.....	68
ANEXO.....	69

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

O conceito de investir vem sendo praticado desde os primórdios, pois as decisões de risco e retorno de negociações, que caracterizam os investimentos, estiveram presentes mesmo nas sociedades mais primitivas. A ideia de realizar comércio de longas distâncias com interesse em um maior retorno data desde o período Neolítico Pré-cerâmico, onde os comerciantes empreendedores realizavam comércio de trigo e ovelhas com outros povos, baseando suas decisões no que é chamado atualmente de relação Risco/Retorno.

Esse marco histórico da economia trouxe o conceito e o método que é utilizado até hoje no mercado de capitais e que posteriormente foi consolidado com a teoria dos portfólios do economista Harry Markowitz.

Para entender a teoria é necessário tomar conhecimento do histórico acadêmico dele que não começou no ramo da economia. Desde pequeno ele gostava de física e astronomia, porém a sua primeira faculdade foi de Filosofia na sua cidade natal, onde completou um bacharelado e um mestrado. Ele deu continuidade nos seus estudos ingressando em um doutorado, onde pôde implementar os seus conhecimentos sobre matemática e ciências sociais adquiridas durante a sua graduação (FOERSTER, 2021).

Em 1950, Harry Markowitz estava fazendo o seu doutorado e durante a conversa com o seu orientador, Markowitz definiu sua tese sendo sobre a aplicação de técnicas matemáticas e estatísticas no mercado de ações. E foi esta decisão que o levou a caminho de ser laureado com o prêmio Nobel de economia. Depois de semanas de estudos e pesquisas, ele se deu de frente com um livro de um especialista em finanças alegando implicitamente que os riscos das ações não estavam correlacionados. Esta informação o fez desenvolver um novo pensamento, pois observou que o que importava em um portfólio não era o risco de uma ação analisada individualmente, mas sim uma avaliação que considerasse a correlação entre ações (LO, 2020).

Por exemplo, ao correlacionar uma empresa de transporte aéreo e uma petroleira é de se imaginar que ambas as ações não variem em sintonia. Quando o preço do petróleo sobe, é benéfico para a petroleira, mas maléfico para a empresa de transporte. Assim, Markowitz diz que a volatilidade geral do portfólio é menor do que a volatilidade de cada uma das ações, pois enquanto uma estaria se beneficiando a outra estaria tendo problemas (LO, 2020). Nesse mesmo dia, ele utilizou um portfólio de duas ações e colocou os dados de risco e retorno esperado das n carteiras em um gráfico. Após isso, ele julgou os diversos portfólios em eficientes e ineficientes. As combinações eficientes foram, mais tarde, chamadas de fronteira eficiente.

Esse teorema foi importantíssimo para a mudança das estratégias no mercado de investimento, pois até então muitos portfólios eram compostos por apenas uma ação que o investidor julgava ser a mais rentável ou um conjunto de ações que o investidor presumia que ela iria subir a curto prazo (FOERSTER, 2021).

Também, pode-se dizer que a teoria de Markowitz foi um dos primeiros estudos consolidados sobre o uso da estatística no ramo dos investimentos em ações. Portanto, esse trabalho tem o objetivo de fornecer informação sobre questões importantes de investimento no mercado de ações.

1.2 Contexto e justificativa

O mercado de capitais é uma das peças mais relevantes para o crescimento econômico do país, pois ele é o grande comunicador entre o agente deficitário e o agente superavitário, ou seja, ele intermedia o investimento de um indivíduo que possui dinheiro poupado e de um indivíduo ou empresa que necessita de recursos para investir e crescer a longo prazo. (Marx, 2016)

Ao mesmo tempo, em 2019 o número de CPFs que a B3 (bolsa de valores brasileira) atingiu foi de aproximadamente 1 milhão e 600 mil e esse número saltou para 5 milhões em meados de 2022 mostrando uma grande onda de investidores buscando informações sobre investimentos para poder sair da caderneta de poupança, onde ainda hoje é o principal investimento do brasileiro. Essa imigração em massa nos anos de 2019 e 2020 se deu principalmente pelas baixas taxas de juros

que os bancos estavam entregando em seus títulos de renda fixa e muitos desses investidores inexperientes começaram a abrir contas em corretoras para poder operar na bolsa de valores sem ao mesmo estudar sobre o assunto e sem ter o determinado conhecimento de risco daquele investimento.

Em meio a esse cenário, este documento apresenta o estudo do economista Harry Markowitz que ganhou o prêmio de Ciências Econômicas em 1990. O estudo deste cientista conseguiu ser validado durante esses 30 anos de mercado, pois ela estuda a relação do risco e da rentabilidade de uma determinada ação (MARKOWITZ, 1959). Além disso, ela foi uma das pioneiras na filosofia de diversificação da carteira de investimento para trazer o maior ganho em relação ao menor risco.

Ao unir esta metodologia amplamente difundida e validada com a programação, cria-se a possibilidade de difundir conhecimento para que até os mais leigos possam utilizá-lo. Com essa informação, a chance desses novos investidores entenderem ao menos sobre o risco que eles correrão já iria diminuir drasticamente os prejuízos de uma pessoa recém inserida na bolsa de valores.

Com isso, o programa em Python respeitará a escolha dos ativos do investidor e irá apontar duas carteiras eficientes para cada perfil de investidor (conservador, moderado e arrojado). Este estudo não tem o intuito de recomendar uma compra ou venda de algum ativo para o investidor, mas sim apontar o nível de risco que a carteira daquele usuário tem.

1.3 Objetivos

O trabalho tem por objetivo a replicação da teoria de Markowitz para um software, fazendo a correlação dos ativos no portfólio e traçando o retorno esperado para cada um. Com estes dois indicadores, é possível ponderar sobre as carteiras, que são otimizadas de acordo com cada perfil de investidor. Além de apresentar as mais otimizadas, o programa também mostrará outras infinitas carteiras com os mesmos ativos para que o investidor possa observar a curva de Markowitz. No final, o investidor terá um relatório totalmente personalizado sobre a sua carteira de investimentos e onde ela atualmente está no gráfico mencionado anteriormente.

Portanto, ao utilizar a programação em Python para trazer uma metodologia com cálculos e equações do ramo da economia este produto pode ser utilizado para os novos investidores na bolsa de valores.

Além disso, o software também mostrará mais três carteiras para cada tipo de investidor com os mesmos ativos que o usuário mencionou no começo do programa. A diferença é que nessas três outras carteiras, o software poderá também investir em renda fixa livre de risco, ou seja, na taxa Selic. Desta forma, o software conseguirá diminuir a exposição ao risco e trazer um retorno mais condizente com a volatilidade que ele quis se expor. Também será gerado um gráfico rentabilidade X risco da carteira otimizada com alocação em taxa Selic.

O programa também deverá ter números que variem de acordo com o tempo pois as ações e até mesmo o índice de risk free não são constantes. No Brasil a taxa Selic muda a cada 45 dias. Diante disso é necessário ter um programa que extraia os dados da internet através de uma API para que a Taxa Selic utilizada no cálculo do programa seja a mais compatível com a data que o usuário está utilizando o código.

Por fim, todos os resultados relativos à rentabilidade serão apresentados em um período de investimento de no mínimo três anos para que pequenas volatilidades não sistemáticas, causadas por especulações, não retorne um resultado com uma conclusão errônea.

2 CONCEITUAÇÃO

Para uma melhor compreensão do mercado de ações, que é essencial para entender a teoria de Markowitz, definiremos "ação" como uma parcela do capital social de uma empresa aberta. Ao comprar uma ação, o investidor torna-se sócio daquela empresa, estando refém a grandes oscilações que existem em razão de crescimentos não lineares que empresas possuem. Em contrapartida, um dos principais benefícios de se tornar um acionista de uma determinada empresa é que o indivíduo pode se beneficiar dos resultados obtidos e consequentemente na valorização do preço do papel daquela companhia. Além disso, todas as empresas listadas na bolsa de valores têm por obrigação dividir pelo menos 25% dos seus lucros obtidos com os acionistas. Desta forma o mercado acionário possui pontos positivos e negativos que devem ser ponderados durante a construção de uma carteira de investimentos.

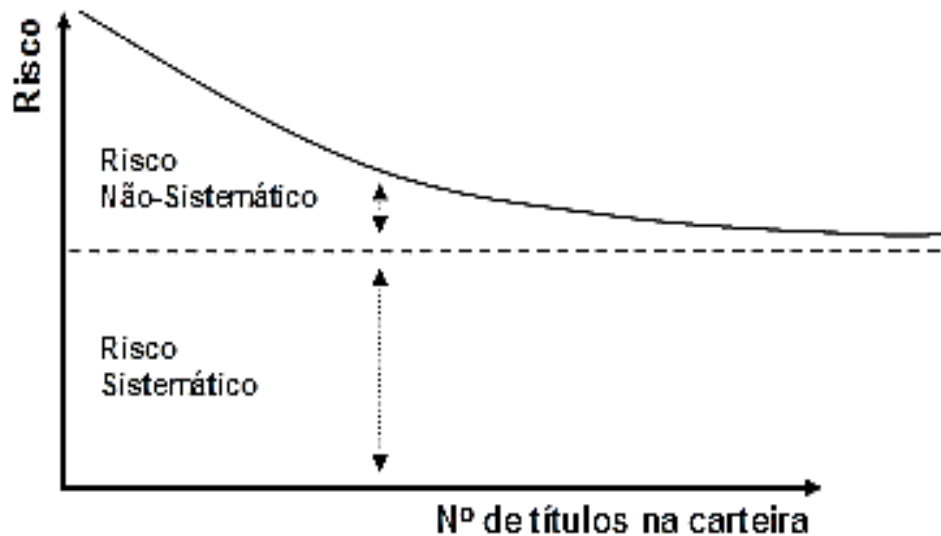
2.1 Risco de uma carteira

O termo risco remete a uma série de combinação e probabilidade de um cenário futuro ocorrer ou não. Esse evento pode ser de natureza aleatória ou dependente de uma grande locomoção de uma atitude humana e ele pode ter impactos tanto negativos como positivos. O risco de uma carteira traz consigo o conceito de probabilidade e impacto que aquele determinado investimento pode ter. Portanto, apesar da definição de risco ser muito abrangente, em economia define-se como probabilidade daquele determinado futuro ocorrer.

O primeiro trabalho sobre a teoria do portfólio de Markowitz mostrou que o nível de risco de uma ação é diferente do risco quando ela é incluída na carteira. Esse estudo comprovou que diversificando a carteira de investimentos é possível diminuir o risco daquele portfólio, mas não a zero (MARKOWITZ, 2020). A teoria do portfólio diz que ao chegar em um determinado número de ativos, a redução do risco deixa de existir mantendo um certo nível de risco. Esse risco que não é possível diminuir é chamado de risco sistemático ou risco sistêmico onde todos os ativos são impactados de maneira positiva ou negativa. Portanto, deve-se levar em conta que até mesmo as carteiras mais otimizadas terão o seu grau de risco maior que zero (LO, 2020).

Na figura 1 observa-se que ao aumentar o número de títulos, a porcentagem do risco diminui cada vez menos e o investidor não será afetado de maneira tão acentuada se ocorrer um risco não sistemático, ou seja, uma empresa apresentar alguma informação que prejudicará os seus balanços ou até mesmo apresentar prejuízos.

Figura 1 – Consequências da diversificação na carteira de investimentos



Fonte: Proeducacional, 2012

2.2 Retorno esperado e retorno efetivo de um ativo

O "retorno esperado" é definido como a expectativa presumida de ganho de capital de um ativo, realizada por meio de conceitos matemáticos e estatísticos. O retorno esperado é calculado com base no preço histórico da ação levando em conta as probabilidades de o preço da ação cair ou subir. Por se tratar de um modelo matemático que mede a expectativa futura do mercado sobre aquela companhia vale ressaltar que a sua incerteza está associada a ele.

Diferentemente do retorno esperado que contém um grau de incerteza no resultado, o retorno efetivo é um valor absoluto que não poderá ser mudado, pois o retorno efetivo retrata a rentabilidade passada de um determinado ativo. Para determinar o portfólio eficiente de Markowitz será necessário determinar o retorno esperado a partir do retorno efetivo.

2.3 Risk Free Rate

O risk free rate é a taxa livre de risco que é muito usada no mercado financeiro para confrontar os mais diversos tipos de investimentos. Essa taxa representa a rentabilidade do investimento que possui o menor risco no mercado, ou seja, no Brasil pode-se dizer que o Risk Free é a taxa Selic.

A taxa Selic é considerada a taxa básica de juros da economia brasileira e ela é a principal ferramenta do governo para controlar a política monetária do país. O Banco Central (BACEN) utiliza essa taxa para controlar a inflação imposta pelo Conselho Monetário Nacional (CMN). Apesar de contraintuitivo, a taxa Selic também é utilizada para controlar e até mesmo interromper o crescimento do país, pois teoricamente quanto maior o crescimento do país maior será o consumo da população e consequentemente maior será a inflação no período. Quando o BACEN quer diminuir a inflação ele aumenta a taxa básica de juros para dificultar os empréstimos e deixar mais atraente os investimentos e, assim, naturalmente o mercado tende a esfriar diminuindo a inflação. Do outro lado, quando o BACEN quer aquecer a economia e aumentar o crescimento econômico do país ele diminui a taxa Selic para deixar mais atraente os empréstimos e financiamentos.

É importante enfatizar que apesar do nome Risk Free remeter a um investimento sem risco, a taxa Selic possui o risco-país que significa a capacidade do Brasil conseguir pagar as suas dívidas e ter riqueza suficiente para poder fazer ou não investimentos no país. Esse risco país é muito utilizado em países emergentes que ainda não possuem um comércio tão consolidado.

Pelo fato de a taxa Selic possuir o menor risco do mercado fica implícito que ela tem um retorno baixo. Desta forma, utiliza-se ponto de referência para apontar se um investimento com aquele determinado risco e retorno tem a sua justificativa plausível. Por exemplo, supondo que a taxa Selic esteja a 10% ao ano, isso quer dizer que qualquer investimento nacional que tenha um retorno abaixo de 10% pode ser considerado ruim pois a taxa Selic possui o menor risco do mercado brasileiro.

Portanto, para o modelo a taxa Selic será utilizada como parâmetro base de risco e retorno para o modelo conseguir ponderar os ativos que possuem os maiores retornos atrelados aos menores riscos.

2.4 Volatilidade e Desvio Padrão

Por definição, volatilidade representa a forma de medir a variação de um ativo, em outras palavras, quanto maior for a volatilidade maior será a probabilidade de ter grandes retornos ou grandes prejuízos. No mundo da economia, a palavra volatilidade é sempre mencionada referindo-se a bolsa de valores, pois é nela que ocorre as maiores altas e quedas do mercado. Portanto, a volatilidade irá compor o cálculo do risco da carteira para que posteriormente o próprio programa julgue se aquela volatilidade tem justificativa quando atrelada a aquele determinado retorno esperado. Deve-se levar em conta que essa medição usará o histórico de preços das ações para projetar um grau de volatilidade médio daquele ativo.

Na metodologia de Markowitz, ao retirar a raiz quadrada da volatilidade encontra-se o desvio padrão que é o valor numérico do risco do portfólio. Desta forma, tanto a volatilidade quanto o desvio padrão fazem parte da medição do risco de um ativo.

2.5 Sharpe Ratio

O Sharpe Ratio ou Índice Sharpe é utilizado para aferir a rentabilidade de um fundo de investimento e julgar se o gestor daquele fundo está ou não tendo um bom desempenho. Criado pelo estatístico William Sharpe, esse índice proporciona avaliar o retorno e a volatilidade de uma determinada carteira de investimentos através de uma equação matemática que contém o retorno do portfólio, o risk free e o risco (LO, 2020). Portanto, o valor numérico relacionado ao índice Sharpe mostra o prêmio oferecido da carteira de investimento para cada percentual a mais de risco assumido (desvio padrão).

Apesar de não fazer parte da modelagem de Markowitz, esse índice se encaixa perfeitamente com o estudo, pois William Sharpe também acreditava que para avaliar um investimento era necessário saber a rentabilidade e o risco que ela contém. O índice Sharpe também utiliza dados do passado para poder traçar o que pode acontecer no futuro. Então, o valor numérico do índice não representa um resultado

irá se concretizar, pois como mencionado anteriormente uma rentabilidade passada não é pode ser considerada uma garantia de rentabilidade futura.

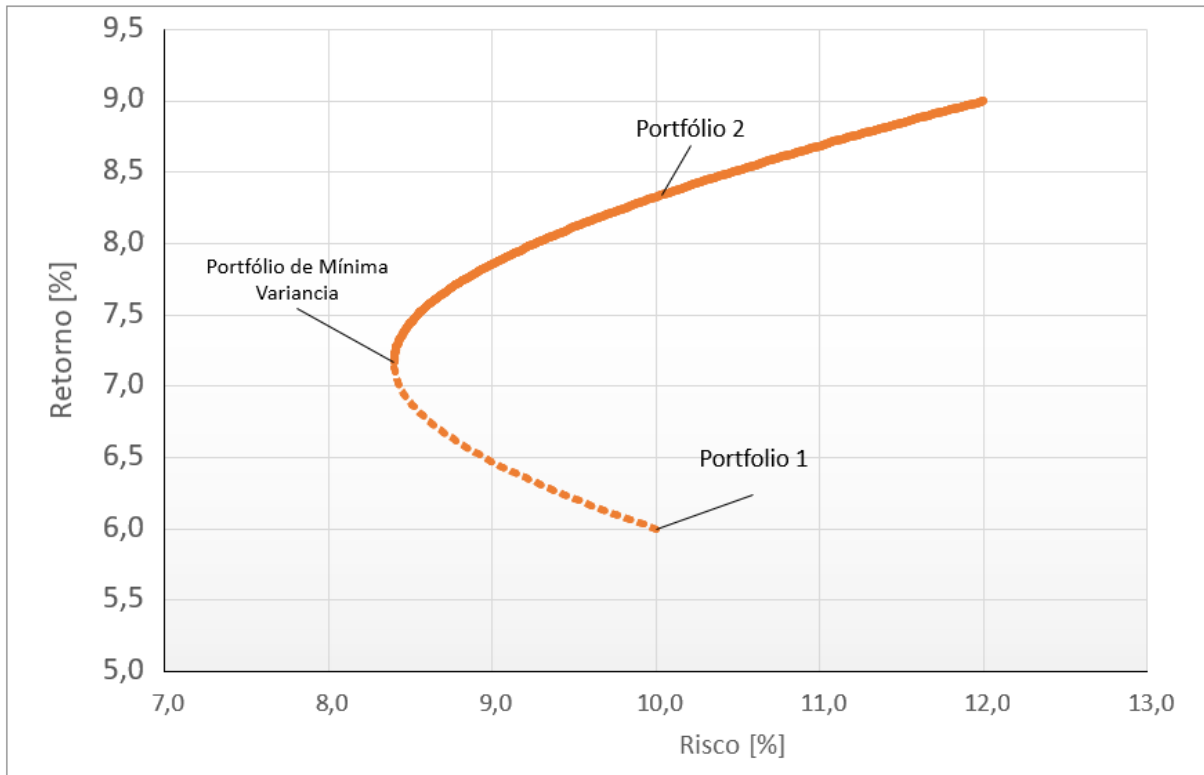
Portanto, esse índice não assegura qual é o melhor investimento, mas ele auxilia a entender uma expectativa sobre aquele ativo.

2.6 Fronteiras Eficientes de Markowitz

Com os conceitos já mencionados anteriormente fica mais compreensível explicar sobre o gráfico da fronteira eficiente já que ele possui o retorno esperado no eixo Y e o desvio padrão no eixo X. Considerando que a economia não é uma ciência exata, deve-se ressaltar que a parte mais subjetiva do modelo de Markowitz é o retorno esperado, pois o valor calculado não representa com exatidão o futuro daquele determinado ativo. Ao plotar as infinitas combinações de peso dos ativos em um portfólio fica notável no gráfico as carteiras mais otimizadas. O aspecto do gráfico sempre será em formato de bullet (bala) como nomeado por Markowitz.

Na figura 2 observa-se com exatidão a fronteira eficiente de Markowitz. Note que as carteiras mais otimizadas sempre serão partidas do ponto que possui o menor risco com o maior retorno e acompanhando toda a lateral superior do formato de bala.

Figura 2 – Curva característica da fronteira eficiente de Harry Markowitz, também conhecida como “Curva de Markowitz”



Fonte: CLUBE DE FINANÇAS, 2020

Como pode ser observado na figura 2, ambos os portfólios contêm as mesmas ações e o mesmo valor numérico de risco, porém com retornos muito distintos. Isso se deve ao peso de cada produto no portfólio do investidor. Assim, fica notório que a fronteira eficiente visa obter os maiores retornos apenas mudando o peso dos ativos que compõem a carteira.

2.7 Python e bibliotecas Python

Inúmeras linguagens de programação, para as mais diversas finalidades, podem ser encontradas dentro do universo de linguagens disponibilizadas no mercado. O Python está dentre as mais utilizadas pois, sendo de alto nível, é de fácil acesso e entendimento devido aos inúmeros termos em inglês que facilitam na construção do código. O Python é utilizado principalmente em machine learning, mercado financeiro, data Science, desenvolvimento web, automação etc.

Outra vantagem do Python é a de possuir um elevado número de bibliotecas que contam com funções e módulos bases já feitos por outros desenvolvedores, ajudando assim o programador durante o seu trabalho.

O Python é uma das poucas linguagens que o mercado financeiro utiliza pelo simples fato dela possuir algumas bibliotecas que auxiliam na extração de dados de econômicos de empresas, por exemplo cotação histórica, patrimônio líquido, volatilidade etc. Além disso, a forma como os dados são tratados no Python é muito intuitivo tornando uma ferramenta que se encaixaria perfeitamente para a construção do modelo de Markowitz.

Biblioteca Pandas e Numpy

As bibliotecas Pandas e Numpy trabalham lado a lado e são fundamentais para análise de dados, pois contam com uma base enorme. Essas bibliotecas fornecem ferramentas que são fáceis de usar e que servem para estruturar dados de alta performance. Essas bibliotecas também são úteis para a visualização de dados já que são capazes de trazer as informações em tabelas e com funções estatísticas básicas já inseridas, como soma e média.

Além disso, as bibliotecas podem atribuir os dados em caráter unidimensional ou bidimensional. No primeiro, a visualização é feita através de uma lista de valores com apenas duas colunas, index e os próprios dados. Já no segundo, a visualização é feita utilizando tabelas podendo possuir infinitas linhas e colunas. Ambas as atribuições suportam todos os tipos de dados.

No caso de uma aplicação para o mercado financeiro, elas são muito utilizadas para mostrar em tabelas a cotação histórica de um determinado ativo que posteriormente esses dados podem ser plotados para gerar o preço da ação em função do tempo.

Dataframe

O Dataframe, incluso na biblioteca Pandas e Numpy, é um recurso semelhante a uma matriz onde o usuário pode nomear as linhas e as colunas de tal forma que fique mais fácil manipular os dados do que em listas. Além disso, o Dataframe já

possui funções básicas para trazer ao programador informações estatísticas sobre a tabela. Também, esta ferramenta permite capturar os dados de um Excel ou até mesmo salvar uma tabela no formato de Excel.

Biblioteca Pandas Datareader

O Pandas Datareader é uma biblioteca voltada para economia, pois a sua maior aplicação é extrair os dados do mercado financeiro. Com essa ferramenta o usuário é capaz de extrair todas as informações financeiras sobre empresas que estão listadas em bolsa. Pelo fato de a biblioteca ser capaz de puxar os dados da internet ela permite que o usuário escolha a fonte da informação. O Yahoo Finance é um desses lugares e a vantagem é que ele possui uma base de dados extensa e gratuita.

Biblioteca Matplotlib

O Matplotlib é a biblioteca mais famosa para a visualização de dados em forma de gráficos. Deve-se atentar que a Matplotlib é uma extensão da biblioteca Pandas e Numpy. Para usá-la é necessário ter as duas bibliotecas instaladas e inseridas no programa. Desta forma, o Matplotlib possui funções para construir gráficos de pizza, barras, linha e histograma utilizando um conjunto de dados de caráter unidimensional ou bidimensional.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Materiais

Os softwares utilizados foram o pacote Office para a entrada e saída de dados, pois ele é um dos programas mais utilizados e o usuário não ficaria com dúvidas para preencher os campos. O Excel possui uma boa conexão com o Python uma vez que ele consegue extrair ou exportar os dados. Portanto para a interface do programa será utilizado o Excel e para a saída do programa será utilizado o Word que posteriormente pode ser salvo em PDF.

Na parte da programação foi necessário escolher uma IDE para executar o programa em Python e poder ver a saída dele. Nesse quesito foi utilizado a IDE do Jupyter Notebook, pois ela permite unir facilmente código e comentários para que o programa fique organizado e todos possam entender a lógica utilizada. Além disso, o Jupyter Notebook permite compilar código de maneira fragmentada para que durante a construção do código não seja necessário sempre executar o programa completo.

Por fim, com os softwares e IDE devidamente escolhidos, instalou-as no computador que será utilizado para executar o código.

3.2 Métodos

Dado os valores de desvio-padrão da carteira e o retorno esperado da carteira, Markowitz (1952), distingue as carteiras em eficientes e não eficientes. Assim, para Markowitz (1952), ao comparar duas carteiras com o mesmo retorno, mas com variâncias distintas, o investidor sempre optará por uma carteira com a menor variância. Futuramente, essa conclusão foi nomeada como teoria da Média-Variância que pode ser também encontrada como fronteira eficiente.

3.2.1 Desvio-padrão e variância para um ativo

Desvio padrão é uma das medidas mais utilizadas no mercado financeiro e ela é representada pela sigla σ (sigma). Essa medida mostra estatisticamente o grau de dispersão de uma amostra de valores em relação a sua média. O cálculo utilizado para medir o desvio padrão das ações é dada na equação 2:

$$var = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{var} \quad (2)$$

onde:

$\bar{X}$: Média aritmética dos preços das ações

$X_i - \bar{X}$: Desvio de cada preço em relação à média aritmética da amostra

n : Número de elementos da amostra

Um fator importante quanto ao resultado é que ele não mostra se a somatória da variação no decorrer do tempo foi positiva ou negativa e para isso, utilizou-se outras medidas para analisar esse parâmetro.

3.2.2 Correlação

O coeficiente de correlação de Pearson (r) pode ser entendido como o grau de relacionamento entre duas variáveis, ou seja, essa medida estatística busca mensurar a intensidade da relação entre elas. Esse valor pode variar em um intervalo de -1 a 1, sendo -1 para uma correlação perfeitamente negativa e +1 para uma correlação perfeitamente positiva. Em outras palavras, se ambas as ações apresentarem variações diretamente proporcionais a correlação será positiva sendo $r=1$ para uma relação de igualdade. Porém, caso ambas as variações apresentarem variações inversamente proporcionais, a correlação será negativa sendo $r=-1$ para uma relação de igualdade oposta.

Ao utilizar a medida de correlação, principalmente negativa, o investidor é capaz de diminuir a volatilidade total da sua carteira, pois na medida que uma ação da sua carteira está caindo sempre terá uma outra ação de correlação negativa subindo. Assim, o investidor evitaria fortes oscilações na sua carteira (CUTHBERTSON, 2020).

A equação 3 representa a equação direta sem ter obtido o desvio padrão.

$$(y - \bar{y}) = r(x - \bar{x}) \quad (3)$$

onde:

$\bar{x}$: Média aritmética dos preços da ação x

x: Preço da ação x

$\bar{y}$: Média aritmética dos preços da ação y

y: Preço da ação y

r: índice de correlação

A equação (3) mostra que as variáveis reduzidas não possuem dimensão e por conta disso o coeficiente de correlação não possui unidade de medida. Além disso, vale ressaltar que quando o coeficiente de correlação for igual a zero não implica em ausência de relação entre as duas variáveis, pois a relação entre elas pode ser de maneira parabólica, por exemplo, para cada ponto em X haverá um ponto em Y que representa o quadrado de X.

3.2.3 Desvio-padrão do portfólio completo

Deve-se atentar que o risco individual de cada ativo não representa o risco numérico do portfólio. Isso é causado devido a diferença do valor numérico da correlação entre o retorno dos ativos como descrito na equação (3). Portanto, o cálculo geral do risco da carteira contendo n ativos é dada pela equação 4.

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \text{Corr}_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \quad (4)$$

Onde:

W_i : Representa a proporção ação i em relação ao capital total

W_j : Representa a proporção ação j em relação ao capital total

Corr: matriz correlação

σ_i : desvio padrão da ação i

σ_j : desvio padrão da ação j

Ao introduzir o coeficiente de correlação na equação, Markowitz percebeu que ao unir ativos correlacionados negativamente ou com um grau de correlação muito distinto, o investidor consegue diminuir o grau de volatilidade da carteira (LO, 2020). Isso é causado pois ativos com grau de correlação positivo, o preço dos ativos tende a subir e a cair de maneira proporcional ao número de correlação. Ao juntar dois ativos correlacionados negativamente, uma ação tende a subir e a outra a cair de tal forma que a volatilidade geral da carteira seja menor, pois na medida que uma ação está caindo, a ação correlacionada negativamente está subindo.

Essa medida estatística traz para o investidor o risco em valor numérico do capital investido. Assim, unindo o retorno esperado e o desvio padrão pode-se mensurar o nível de retorno que aquela determinada carteira tem atrelada ao risco apenas utilizando medidas estatísticas utilizando a base de dados histórica de preços da ação.

3.2.4 Cálculo do valor esperado

De acordo com a teoria do portfólio, a composição ótima dos ativos tem como objetivo principal maximizar o grau de satisfação do investidor utilizando a relação risco e retorno com base no perfil do indivíduo.

Como dito anteriormente, o retorno esperado utiliza dados do passado para projetar um futuro incerto. Assim, dependendo do grau de otimismo e pessimismo em relação a economia esse valor muda positivamente ou negativamente. Para um cálculo mais genérico que não envolva subjetividade utilizou-se a média aritmética histórica das volatilidades das ações que estão no portfólio do investidor.

Portanto, o retorno esperado é definido pela somatória dos produtos do peso da ação no portfólio com o retorno de cada ação em relação ao seu grau de importância no total da carteira. O resultado da operação é apresentado em porcentagem.

$$R_j = \overline{vol} \quad (5)$$

$$E(R_p) = \overline{Rp} = \sum_{j=1}^n R_j \times W_j \quad (6)$$

Onde:

Rj: Retorno esperado do ativo j

vol: Média aritmética histórica

Rp: Retorno esperado ponderado

n: Número de ativos

Wj: Representa a proporção do capital total investido na ação

3.2.5 Índice Sharpe

O índice Sharpe possui uma peculiaridade de apresentar o Risk Free em seu cálculo de risco. Com base nisso, utilizou-se a Taxa Selic média imposta pelo Banco Central para calcular o índice Sharpe da carteira.

O índice Sharpe é dado pela diferença do retorno esperado com a taxa Selic dividida pelo desvio padrão.

$$IS = \frac{R_{port} - R_f}{\sigma_{R_j}} \quad (7)$$

Onde:

Rport: Retorno esperado do portfólio

Rf: Retorno da taxa Selic

Rj: Desvio padrão do Portfólio

O resultado indica um valor numérico ponderando o retorno esperado com o risco que o portfólio possui. Assim, o resultado pode se encaixar em três grandes grupos: IS menor que zero, IS igual a zero e IS maior que zero.

No primeiro, encontra-se as piores carteiras onde o retorno esperado é menor que o ativo livre de risco e, desta forma, não fazendo sentido a alocação naquele portfólio já que se o investidor colocar 100% do capital dele na taxa Selic ele estará exposto ao menor risco do mercado e ainda terá um resultado maior que a carteira.

Para IS igual a zero pode-se visualizar as carteiras que apresentam o retorno esperado exatamente igual ao retorno do ativo livre de risco e, desta forma, não fazendo sentido a alocação naquele portfólio.

Já para IS maior que zero se apresenta as carteiras que possuem algum grau de retorno acima do ativo livre de risco. Portanto, quanto maior for o IS maior será a taxa de retorno atrelada àquele risco.

3.2.6 Convertendo taxas

Ao comparar a taxa Selic e a renda variável deve-se atentar a unidade de medida da rentabilidade, pois a taxa Selic é dada em porcentagem ao ano e o retorno da renda variável é apresentado ao dia. Além disso, a taxa Selic é apresentada em dias consecutivos, ou seja, a taxa Selic rende todos os dias do ano; porém a renda variável só possui rentabilidade nos dias úteis.

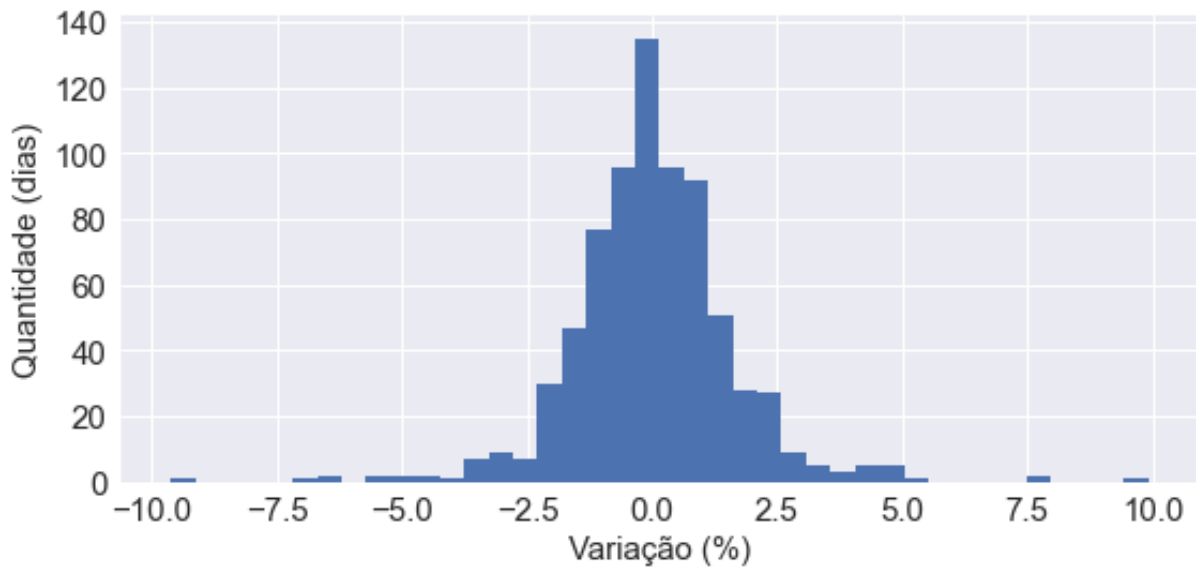
$$taxa_{aodia} = (1 + taxa_{ao\ ano})^{1/252} \times 100 \quad (8)$$

3.2.7 Estatística Descritiva - coeficiente de assimetria de Pearson e amplitude

O termo assimetria implica no arranjo e posicionamento relativo de um ponto ou objeto qualquer. Assim, o conceito de simetria se dá quando a amostra possui uma correspondência exata no lado oposto a linha de referência.

Na estatística, a distribuição é considerada simétrica quando todos os pares de elementos são equidistantes de um dado centro de referência. Da mesma forma, a assimetria é caracterizada quando as duas metades da distribuição não são iguais. Utilizando o conceito de assimetria é capaz de retirar informações referente a média, mediana e moda da amostra estudada. A figura 3 representa um gráfico de assimetria de um determinado ativo.

Figura 3 – Histograma característico de uma ação listada na bolsa de valores brasileira



Fonte: Autoria própria (2022)

Portanto, o gráfico de assimetria ilustra a volatilidade esperada de um ativo. Também traz informações relacionadas se a ação possui um grau de assimetria positivo ou negativo, em outras palavras, se a ação teve mais variações diárias positivas ou negativas naquele determinado intervalo. Além disso, ao observar o maior número de amostras em um determinado intervalo de variação, o investidor pode esperar volatilidades diárias muito parecida com aquelas.

$$As = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma} \quad (9)$$

Onde:

$\bar{X}$: média

Mo : Moda

σ : Desvio Padrão

A amplitude foi utilizada para auxiliar na interpretação dos resultados utilizou-se a amplitude para medir as diferenças entre os máximos e mínimos de uma ação.

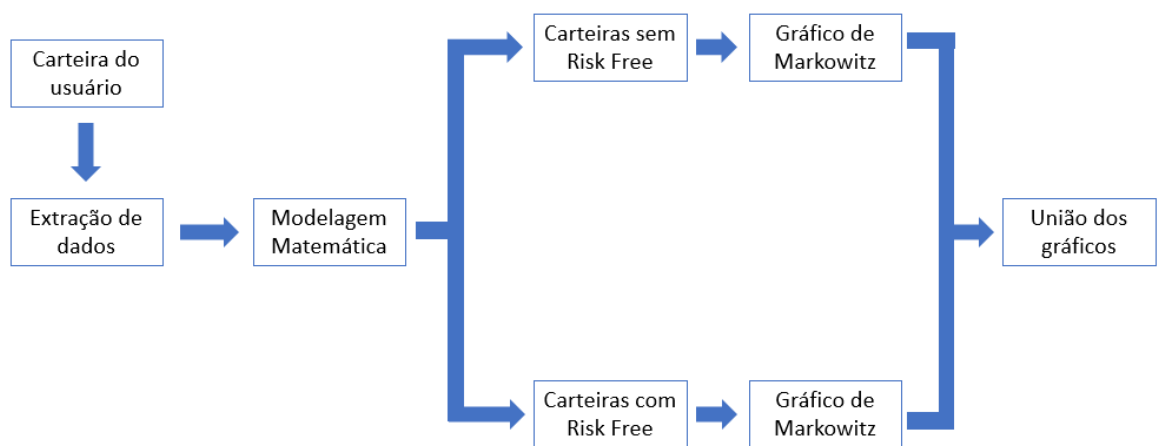
$$amplitude = X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n} \quad (10)$$

Portanto é de se esperar que a ação que conter a menor amplitude terá a menor volatilidade e, conseqüentemente, estará com uma alocação maior para carteiras com estratégias de baixo risco.

4 PROGRAMAÇÃO

A construção do programa foi dividida em pequenas etapas para que pudesse visualizar o resultado em cada parte. Os processos descritos abaixo estão sendo exibidos de forma esquemática na figura 4.

Figura 4 – Fluxograma utilizado para a execução da lógica de programação



Fonte: Autoria própria (2022)

4.1 Extração de dados

A primeira parte da elaboração do programa consiste em identificar os dados necessários, importá-los e posteriormente tratá-los de uma maneira simples e completa, de modo a otimizar o programa. Portanto, ao apontar três tipos de extrações em fontes distintas foi necessário utilizar ferramentas que atendessem aquela determinada extração.

4.1.1 Ações

Para a extração de dados de todas as ações contidas na carteira do usuário foi necessária uma biblioteca chamada "Pandas Datareader". Nela, o programador é

capaz de extrair dados de uma empresa listada na bolsa de valores brasileira e americana. Por padrão, a função extrai os dados de preço de abertura, fechamento e média desde o IPO (Oferta pública inicial), ou seja, a função tem como saída todos os preços da ação daquela companhia desde que ela abriu o seu capital (WEIMING, 2019). A saída do programa já está no modelo de tabela que posteriormente será tratada. A figura 5 mostra como foi utilizado a biblioteca "Pandas Datareader" para utilizar os dados histórico das ações.

Figura 5 – Fragmento da programação referente a extração de dados das ações utilizadas

```
#importando os dados
df=data.DataReader(carreira_tratada, data_source='yahoo', start=inicio_STR, end=hj_STR)
precos=df['Adj Close']
precos
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.1.2 Taxa Selic

A taxa Selic mais atualizada pode ser retirada através do site oficial do Banco Central do Brasil (BACEN) por meio de uma API. Para que o Python possa interpretar a API é necessário utilizar a biblioteca Pandas. No próprio site do BACEN possui uma aba de navegação onde mostra todos os indicadores econômicos brasileiro que podem ser importados para uso público. A figura 6 mostra como foi utilizada esta API.

Figura 6 – Fragmento da programação referente a extração de dados da taxa Selic

```
#calculando a media da taxa selic nos dias em questão
url = 'http://api.bcb.gov.br/dados/serie/bcdata.sgs.432/dados?formato=json'
taxa_selic = pd.read_json(url)
taxa_selic['data']=pd.to_datetime(taxa_selic['data'], dayfirst=True)
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.1.3 Carteira do Usuário

Para o programa extrair os dados do usuário, este deve inserir sua carteira de investimentos em formato Excel, e com uma função contida na biblioteca Pandas, os dados são transformados em um Data Frame totalmente editável dentro do Python. A forma como foi retirado e tratado esses dados podem ser visualizados na figura 7.

Figura 7 – Fragmento da programação referente a extração de dados da carteira do usuário

```
carteira=pd.read_excel('CarteiraCliente.xlsx')
carteira_tratada = []
for i in range(len(carteira)):
    ticker_SA = carteira['ticker da empresa (ex: ABCD3)'].loc[i]
    ticker_SA = ticker_SA + '.SA'
    carteira_tratada.append(ticker_SA)
carteira_tratada
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.2 Variação histórica

Antes mesmo de qualquer análise estatística é necessário extrair as cotações das ações. Para isso utilizou-se a biblioteca Pandas Data Reader para retirar os dados contidos no Yahoo Finance (WEIMING, 2019). Há outros sites que o programador pode utilizar para extrair esses dados, porém alguns deles são pagos e a programação seria um pouco mais parecida com a extração de dados da taxa Selic, pois iria utilizar APIs para a execução do código. A partir da tabela extraída foi possível calcular a volatilidade diária em relação ao dia anterior como mostra a figura 8. Esse dado será muito utilizado na parte estatística.

Figura 8 – Fragmento da programação referente ao gráfico de variação histórica

```
precos_porcentagem=(precos/precos.iloc[0])
precos_porcentagem.plot(figsize=(21,9))
plt.title('variação das ações da carteira do usuário', fontsize=20)
plt.xlabel('Período', fontsize=15)
plt.ylabel('Variação em Porcentagem', fontsize=15)
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.3 Cálculo do Retorno Esperado

Para o cálculo do retorno esperado da carteira do usuário foi utilizado a função `mean()` que retorna a média aritmética da tabela mencionada. Posteriormente o valor do retorno esperado de cada ação será multiplicado pelo peso que o ativo tem na carteira, como mostrado na equação (6). Pelo fato de o programa fazer esse processo inúmeras vezes foi necessário construir uma função para otimizar o programa como mostra a figura 9.

Figura 9 – Fragmento da programação referente as equações de retorno

```
def port_ret(pesos):
    returns = np.dot(pesos, e_r)
    return returns
def port_ret_RF(pesos_RF):
    returns_RF = np.dot(pesos_RF, e_r_RF)
    return returns_RF
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.4 Cálculo do Risco

A programação do cálculo de risco foi feita utilizando a raiz quadrada da variância para encontrar o desvio padrão (risco) da ação, como mostra a equação (4). A figura 10 representa a equação 4 na programação.

Figura 10 – Fragmento da programação referente as equações de risco

```
def port_vol(pesos):
    var=matriz_cov.mul(pesos, axis=0).mul(pesos,axis=1).sum().sum()
    dp=np.sqrt(var)
    return dp
def port_vol_RF(pesos_RF):
    var_RF=matriz_cov_RF.mul(pesos_RF, axis=0).mul(pesos_RF,axis=1).sum().sum()
    dp_RF=np.sqrt(var_RF)
    return dp_RF
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.5 Medidas estatística

Para o cálculo estatístico foi necessário utilizar o Data Frame que continha todas as ações na carteira do usuário e as suas respectivas variações diárias. Ao utilizar as equações e as funções que estão contidas na biblioteca Pandas é possível encontrar as medidas estatísticas mencionada nos itens 4.2 e 4.7.1. A figura 11 mostra o cálculo das medidas estatísticas em código.8

Figura 11 – Fragmento da programação referente as medidas estatísticas

```
#variância
var=retornos.var()
print('Variância')
print(var)
#volatilidade/desvio padrao
vol=var**0.5
print('Volatilidade/desvio padrão')
```

```

print(vol)
print()
#matriz de covariancia
matriz_cov=retornos.cov()
print('matriz cov')
print(matriz_cov)
#correlacao
matriz_corr=retornos.corr(method='pearson')
print('matriz correlacao')
print(matriz_corr)

```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.6 Variação histórica

Para identificar a variação histórica de cada ação utilizou-se dois gráficos: o histograma e o de linhas. Para a construção do primeiro usou-se a própria função contida no “*Matplotlib*” para plotar os dados em agrupamentos de 10 amostras. Já no gráfico de linha tomou-se as devidas cautelas para colocar todos os gráficos com as mesmas unidades de média e intervalos, tanto no eixo X quanto nos eixos Y. Isso será de suma importância para poder concluir de maneira visual quais são os ativos menos e mais voláteis. A figura 12 mostra a construção desses gráficos em programação.

Figura 12 – Fragmento da programação referente ao histograma e ao gráfico de linha

```

#Plotando os histogramas dos retornos
import matplotlib.pyplot as plt
retornos.hist(bins=15, figsize=(9,4))

#variação histórica (gráfico de linha)
def grafico_variacao(df, coluna):
    df[coluna].plot(figsize=(10,len(retornos.columns)*5))
    plt.title(f'variação histórica da {coluna}')
    plt.xlabel('Período (dias)', fontsize=15)
    plt.ylabel('Variação (%)', fontsize=15)
    plt.ylim(-35,35)
    plt.tight_layout()
count=0
for coluna in retornos.columns:
    count=count+1
    plt.subplot(len(retornos.columns), 1, count)
    grafico_variacao(retornos, coluna)

```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.7 Geração de carteiras aleatórias

Para que o programa não ficasse tão sobrecarregado e ao mesmo tempo entregasse uma boa quantidade de amostras utilizou-se um valor de 15000 carteiras geradas aleatoriamente e respeitando os ativos indicados pelo usuário. Para isso utilizou-se a função. `random()` que retorna um número aleatório em um intervalo de valores mencionado anteriormente. A figura 13 representa a geração das 15000 carteiras aleatórias feita pelo programa.

Figura 13 – Fragmento da programação referente a criação das carteiras aleatórias

```
nop=15000
portfolio=pd.DataFrame()
carteira_pesos=pd.DataFrame()
#adicionando os respectivos tickers da carteira do cliente no dataframe portfolio
for i in range (len(retornos.columns)):
    carteira_pesos.insert(loc=i, column=retornos.columns[i], value=retornos.columns[i])
#criando 15000 portfolios (nop)
for portfolios in range(nop):
    #gerando carteiras aleatorias e colocando a somatoria dos pesos em 100%
    pesos=np.random.random(noa)
    pesos=pesos/np.sum(pesos)
    p_pesos.append(pesos)
    #adicionando os pesos dos ativos daquela determinada carteira
    carteira_pesos.loc[len(carteira_pesos)]=pesos
    #gerando carteiras aleatorias e colocando os retornos (retorno esperado*peso)
    p_ret.append(port_ret(pesos))
    retorno=port_ret(pesos)
    #gerando carteiras aleatorias e colocando o a volatilidade/ desvpad
    risco=port_vol(pesos)
    p_vol.append(port_vol(pesos))
    #gerando carteiras aleatorias e calculando o indice sharpe
    sharp_ratio=(retorno-rf)/risco
    sharp.append(sharp_ratio)
carteira_pesos
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.8 Cálculo do índice Sharpe

Para o cálculo do Índice Sharpe de cada carteira utilizou-se a extração de dados descrita na 5.1, o cálculo do retorno esperado descrito na 5.3 e o cálculo do risco descrito na 5.4. Esse indicador foi calculado para as n carteiras geradas

aleatoriamente. A figura 14 mostra o cálculo do índice Sharpe, descrito na equação (7).

Figura 14 – Fragmento da programação referente ao cálculo do índice Sharpe

```
sharp_ratio=(retorno-rf)/risco
sharp.append(sharp_ratio)
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.9 Otimização do portfólio

Para encontrar as melhores carteiras comparou uma a uma e caso a carteira que estava sendo verificada fosse superior a encontrada anteriormente ela iria armazenar os dados. Quanto à carteira mais otimizada, escolheu-se a com melhor resultado no indicador índice Sharpe.

A carteira com o menor risco também foi obtida, sendo aquela com a menor volatilidade possível diante dos outros 15000 portfólios. Para encontrá-la, utiliza-se o indicador de menor desvio padrão, e ela é própria para usuários com perfis mais conservadores.

A figura 15 mostra o filtro do programa para capturar as carteiras mais otimizadas, as mais rentáveis e as mais menos voláteis.

Figura 15 – Fragmento da programação referente a seleção das carteiras mais otimizadas de acordo com Markowitz

```
for i in range(len(carreira_final)):
    #adquirindo a carteira mais rentavel e com a menor volatilidade
    if carreira_final['Sharpe'][i]>maior_sharp:
        maior_sharp=carreira_final['Sharpe'][i]
        index_maior_sharp=i
    #adquirindo a carteira menos volátil
    if carreira_final['Risco'][i]<risco:
        risco=carreira_final['Risco'][i]
        index_menor_risco=i
    #adquirindo a carteira mais rentavel independente do risco e da volatilidade
    if carreira_final['Retorno'][i]>maior_retorno:
        maior_retorno=carreira_final['Retorno'][i]
        index_maior_retorno=i
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.10 Carteira com Risk Free

A tabela da taxa Selic foi aplicada para calcular a rentabilidade média nos últimos anos e, após encontrá-la, uma nova coluna de renda fixa foi anexada com os valores referentes à rentabilidade diária média desta taxa, ou seja, do Risk Free.

Com a tabela de variação referente aos ativos que o cliente escolheu e com a taxa Selic inclusa nela, o programa calculou mais 15000 portfólios aleatórios utilizando o mesmo procedimento descrito no item 5.7. A figura 16 representa a adição da coluna de risk free no portfólio do usuário.

Figura 16 - programação referente a adição da taxa Selic no portfólio do usuário

```
retornos=precos.pct_change()
retornos=retornos.dropna()
#adicionando a coluna risk free na tabela precos
retornos_RF = retornos
retornos_RF['Risk Free'] = rf
retornos_RF
```

Fonte: Autoria própria (2022)

4.11 Construção de Gráficos

Para construir a curva de Markowitz foi necessário ter os retornos esperados e os riscos de todas as carteiras geradas aleatoriamente. Além disso, o indicador de índice Sharpe também está inserido em formato de gráfico de calor.

O usuário pode interpretar se a carteira dele está de acordo com o perfil de investidor e se a carteira atual está com a rentabilidade esperada atrelado ao risco. A figura 17 mostra a construção do gráfico em programação.

Figura 17 - programação referente a construção dos gráficos do cliente

```
#grafico com as melhores carteiras
fig = plt.figure()
plt.title('Curva de Markowitz com as melhores carteiras', fontsize=15)
#n carteiras
plt.scatter(carreira_final['Risco'], carreira_final['Retorno']*100, 5, c=sharp, cmap='coolwarm')
#ponto no grafico onde se encontra a carteira com o melhor indice sharp
plt.scatter(carreira_final['Risco'].loc[index_maior_sharp],
carreira_final['Retorno'].loc[index_maior_sharp]*100, 75, color='green', label='Maior Sharp')
#ponto no grafico onde se encontra a carteira com o melhor retorno
```

```
plt.scatter(carreira_final['Risco'].loc[index_maior_retorno],
carreira_final['Retorno'].loc[index_maior_retorno]*100,75, color='purple', label='Maior Retorno')
#ponto no grafico onde se encontra a carteira com o menor risco
plt.scatter(carreira_final['Risco'].loc[index_menor_risco],
carreira_final['Retorno'].loc[index_menor_risco]*100,75, color='yellow', label='Menor Risco')
#carteira do cliente
plt.scatter(carreira_cliente_risco, carteira_cliente_retorno*100, 75, color='black', label='Carteira Atual')

#renomeando eixos
plt.xlabel('Risco (%)')
plt.ylabel('Retorno (%)')
plt.legend()
#ajuste de tamanho
fig.set_size_inches(7, 4, forward=True)
plt.tight_layout()
#salvando a curva em .png
plt.savefig('curva.png')
```

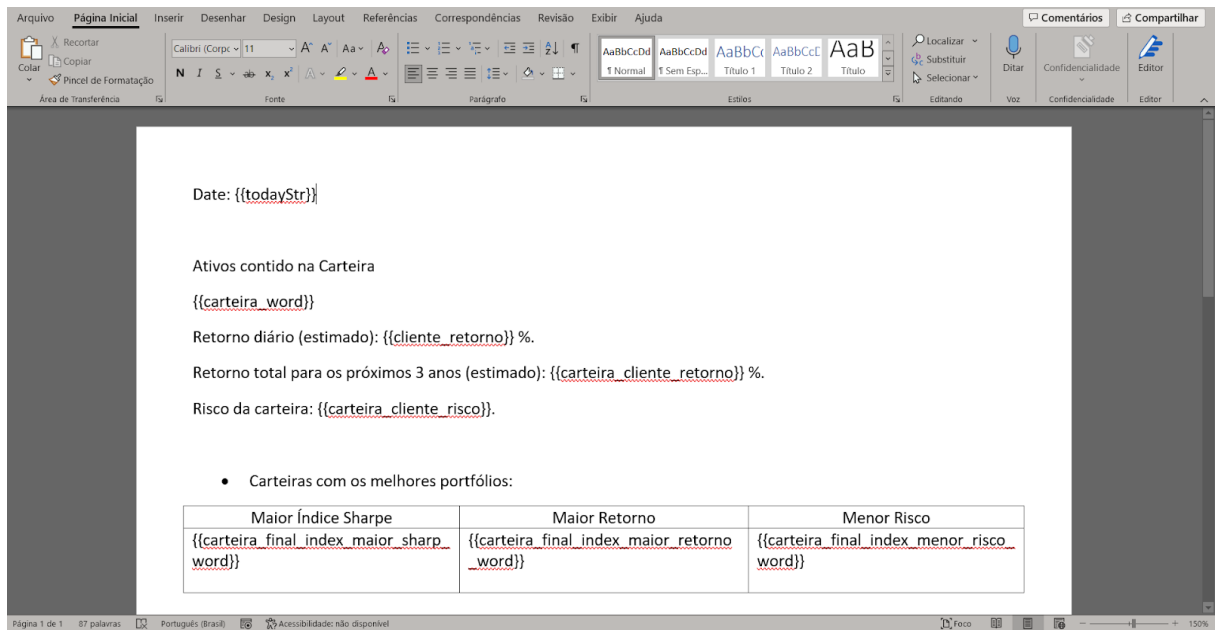
Fonte: Autoria própria (2022)

4.12 Construção do Relatório

Os resultados foram obtidos por meio do Word do pacote Office, e são automaticamente atualizados a cada vez que o programa é rodado. Então, quando o usuário quer identificar o portfólio mais otimizado para um determinado conjunto de ações, não precisará editar os dados manualmente.

Montar o design em um Word secundário foi necessário para este fim, sendo que este gera os dados no relatório final da carteira. A figura 18 mostra o input que o programa fará no Word.

Figura 18 - Layout em Word para formatar o relatório final



Fonte: Autoria própria (2022)

Como pode-se notar, os dados inseridos estão entre duas chaves e, dentro delas, há o nome da variável que retorna o seu valor no documento final. Além de montar o design do relatório do usuário utilizou-se a biblioteca Docxtpl para organizar e indexar os dados nos devidos lugares. A figura 19 mostra o input que o programa fará no Word.

Figura 19 – Fragmento da programação referente a construção do relatório do usuário

```
doc = DocxTemplate("layout.docx")
data = {
    "todayStr": hj_STR,
    "carteira_word": carteira_word,
    "cliente_retorno": (f'{cliente_retorno:.4f}'),
    "carteira_cliente_retorno": (f'{carteira_cliente_retorno_word:.2f}'),
    "carteira_cliente_risco": (f'{carteira_cliente_risco:.2f}'),
    #carteiras sem Taxa Selic
    "carteira_final_index_maior_sharp_word": carteira_final_index_maior_sharp,
    "carteira_final_index_maior_retorno_word": carteira_final_index_maior_retorno,
    "carteira_final_index_menor_risco_word": carteira_fianl_index_menor_risco,
    "curva_word": InlineImage(doc, "curva.png"),
    #carteiras contendo a Taxa selic
    "Taxa_selic": (f'{media_taxa_selic:.2f}'),
    "carteira_final_index_maior_sharp_word_RF": carteira_final_index_maior_sharp_RF,
    "carteira_final_index_maior_retorno_word_RF": carteira_final_index_maior_retorno_RF,
    "carteira_final_index_menor_risco_word_RF": carteira_fianl_index_menor_risco_RF,
    "curva_word_RF": InlineImage(doc, "curva_RF.png"),
}
doc.render(data)
doc.save("RELATORIO FINAL.docx")
```

Fonte: Autoria própria (2022)

O programa ao finalizar por completo, gerará o arquivo “RELATORIO FINAL.DOCX”, contendo todas as informações referente ao portfólio trabalhado.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Montou-se uma carteira com poucos ativos e de diferentes setores para mostrar a programação do software. As ações escolhidas foram: PETR3, VALE3, EGIE3 e WEGE3.

A Petrobrás, listada na bolsa com o ticker PETR3 e PETR4, é uma empresa estatal e de economia mista, ou seja, o seu maior acionista é o governo do Brasil. Ela atua principalmente na extração, produção e comercialização de petróleo. A PETR3 está na carteira pois ela é a segunda maior empresa listada na bolsa de valores e em um setor que representa uma porcentagem expressiva do PIB brasileiro.

Já a Vale (VALE3) é uma empresa privada que atua principalmente na mineração e siderurgia. Atualmente a Vale é a maior empresa da bolsa de valores e uma das maiores empresas de mineração do mundo. A VALE3 está na carteira pois ela está em um setor onde o Brasil é um dos maiores produtores mundiais.

Diferentemente das já mencionadas, a Engie Brasil atua na energia, segmento crucial para a economia do país. Ela é a maior empresa privada geradora de energia elétrica brasileira, então, por atuar neste setor perene ela está presente na carteira.

A Weg (WEGE3) é uma empresa privada multinacional brasileira atuando no setor industrial com automação de processos, maquinários e equipamentos elétricos.

5.1 Tempo de testes

O tempo utilizado para os testes foi um dos maiores desafios, pois além de precisar um intervalo relativamente grande para ter uma quantidade de amostras razoável, deveria também não ser grande a ponto de o programa capturar dados tão antigos que representasse a empresa de uma forma tão diferente como ela é atualmente. Por exemplo, se o programa utilizar os dados da Petrobrás desde os anos 2000 é possível que os cálculos possam apresentar incoerências, pois desde os anos 2000 a empresa sofreu por grandes crises mundiais, guerras e escândalos de corrupção que interferem diretamente no preço da ação.

Portanto, o período que melhor satisfaz os critérios acima foi um período de 3 anos a partir da data atual em que o programa está rodando. Assim, o programa irá utilizar a amostra dos anos de meados de 2019, 2020 e 2021 e da primeira metade de 2022, como mostra a tabela 01.

Tabela 01 – Intervalo de tempo utilizado para o cálculo de Markowitz

Início	20/07/2019
Fim	20/07/2022

Fonte: Autoria própria (2022)

5.2 Preço histórico das ações

Utilizou-se o intervalo de tempo de 2019 a 2022 para o programa capturar a volatilidade dessas ações e fazer os cálculos necessários para chegar no resultado desejado. Vale ressaltar que este intervalo de tempo possui grandes crises mundiais causada pela pandemia do Coronavírus e da guerra territorial entre Rússia e Ucrânia.

Para entender a volatilidade histórica das ações selecionadas utilizou o conceito de retorno diário para plotar os dados. A tabela 02 mostra a variação das quatro ações selecionadas no período de julho de 2019 até julho de 2022.

Tabela 02 – Histórico de preços das ações que estão no portfólio de 2019 a 2022

Data	PETR3.SA [R\$]	EGIE3.SA [R\$]	VALE3.SA [R\$]	WEGE3.SA [R\$]
22/07/2019	14,31	37,17	38,17	10,83
23/07/2019	14,38	36,81	37,67	10,82
24/07/2019	14,26	37,09	36,86	11,02
25/07/2019	14,01	36,91	36,74	10,92
...	...	...	...	...
19/07/2022	23,3	40,43	65,49	26,78
20/07/2022	23,5	40,52	64,07	25,82
21/07/2022	23,24	40,5	65,19	25,16
22/07/2022	23,49	40,88	65,8	25,67

Fonte: Autoria própria (2022)

O programa utilizou uma base de 746 dias úteis, correspondendo desde julho de 2019 até julho de 2022.

5.3 Taxa histórica da Selic

O intervalo de tempo utilizado para trazer a taxa Selic média foi de 12 anos, pois o Comitê de Política Monetária se reúne a cada 45 dias para definir a nova taxa SELIC, o que corresponde a somente 9 valores anuais. Assim, uma forma de aumentar a quantidade de dados para serem analisados foi aumentar o número de anos. Desta forma, um período maior de anos seria benéfico, pois englobaria mais variações na taxa SELIC e as situações vividas pelo país em diferentes momentos econômicos. A tabela 03 mostra a variação da taxa Selic nos 12 últimos anos.

Tabela 03 – Histórico da taxa Selic em um intervalo de 12 anos

Data	Valor (%)
01/01/2010	8,75
02/01/2010	8,75
03/01/2010	8,75
04/01/2010	8,75
...	...
04/12/2022	13,75
05/12/2022	13,75
06/12/2022	13,75
07/12/2022	13,75

Fonte: Autoria própria (2022)

5.4 Média da taxa Selic

Utilizando a tabela 03 calculou-se a média aritmética da taxa Selic ao longo do tempo, e a converteu para uma taxa diária, como descrita na equação (8). A tabela 04 mostra a média aritmética da taxa Selic nos 12 últimos anos.

Tabela 04 - Média da taxa Selic entre os anos de 2019 e 2022

Média Aritmética da Taxa Selic ao ano [%]	9,07770
Média Aritmética da Taxa Selic ao dia [%]	0,00034

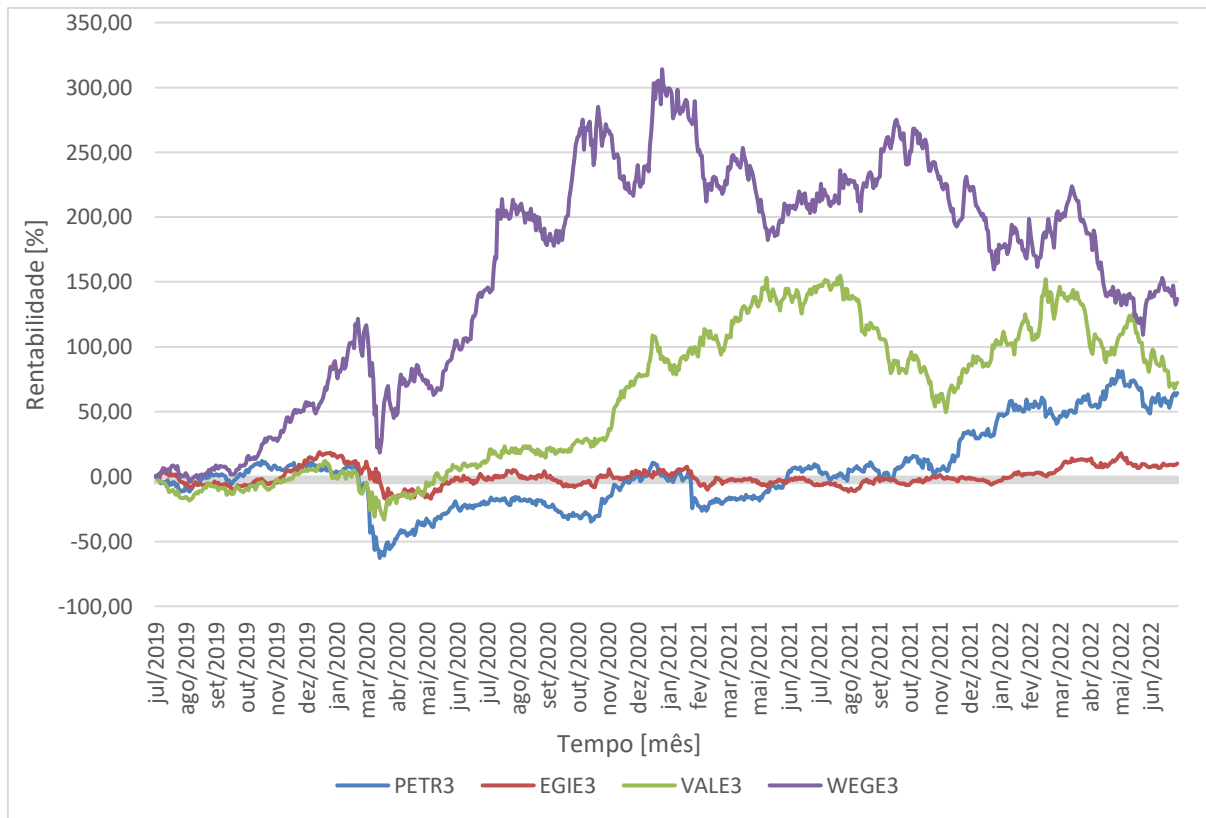
Fonte: Autoria própria (2022)

5.5 Volatilidade histórica das ações

A figura 20 representa a variação histórica das ações selecionadas para a análise. Deve-se atentar que a variação no eixo y está em porcentagem sendo

números acima de 1 um retorno positivo e números abaixo de 1 como retornos negativos.

Figura 20 – Histórico de rentabilidade da carteira de ações analisada entre 2019 e 2022



Fonte: Autoria própria (2022)

De acordo com a figura 20, a ação que teve o maior retorno neste intervalo foi a WEGE3 apresentando uma rentabilidade próxima de 1.5 vezes o capital investido. Por outro lado, a ação EGIE3 permaneceu praticamente linear durante esses três anos, com apenas uma rentabilidade próxima a 10% durante o período. Além disso, pode-se observar que em março de 2020 todas as ações tiveram uma queda acentuada apresentado pelo risco sistêmico do começo da epidemia do coronavírus. Também, deve-se notar que no primeiro semestre de 2022 estava ocorrendo a guerra na Ucrânia que poderia tomar proporções cada vez maiores. Nesse cenário, pode-se observar uma acentuada queda em todas as ações, com exceção a Petrobrás que foi fortemente beneficiada com o aumento do preço do barril de petróleo.

5.6 Estatística

Para se realizar a análise estatística, o programa irá montar duas curvas de Markowitz, uma com apenas as ações selecionadas pelo usuário e a outra adicionando o risk free, ou taxa Selic, na carteira. Assim, para alguns estudos estatísticos mostrados abaixo serão apresentados dois resultados referente aos dois portfólios.

5.6.1 Retorno esperado

O retorno esperado corresponde a média aritmética dos retornos das ações que compõem a carteira. Assim, a tabela 05 representa uma rentabilidade diária média das ações em porcentagem.

Tabela 05 – Rentabilidade diária de cada ação e da Taxa Selic de 2019 a 2022

	valor esperado [%]
PETR4	0,0012
EGIE3	0,0002
VALE3	0,0011
WEGE3	0,0015
Risk Free (Taxa Selic)	0,0003

Fonte: Autoria própria (2022)

Identifica-se na tabela 05 que a ação WEGE3 possui o maior retorno esperado diário de 0,15%, em relação às outras, sendo que o menor retorno esperado é da EGIE3 com 0,02%. Outro ponto importante é o Risk Free com 0,03%, utilizado em todo o cálculo, representado pela taxa Selic.

5.6.2 Variância

A medida de dispersão, Variância, irá mostrar a variação que cada ação teve em relação a sua média aritmética, como mostrado na equação (1). A tabela 06 mostra a variância dos ativos do usuário e da taxa Selic.

Tabela 06 – Variância dos ativos e da taxa Selic de 2019 a 2022

	Variância
PETR4	0,00100
EGIE3	0,00027
VALE3	0,00072
WEGE3	0,00076
Risk Free (taxa Selic)	0,00000

Fonte: Autoria própria (2022)

A tabela 06 permite concluir que a Petrobrás teve a maior variância, ou seja, ela é a ação mais volátil da carteira apresentando grandes variações dia a dia. Quanto a menor variação diária no período amostral dentre as opções, temos a Engie, apesar desta empresa possuir o menor retorno esperado. Também deve-se notar que a Risk Free, ou taxa Selic, se manteve com variância igual a zero, pois foi utilizada a média histórica da taxa Selic igual a 9,07% a.a. como descrito no item 6.4.

5.6.3 Desvio Padrão

Como o desvio padrão é calculado pela raiz quadrada da variância (número da equação) obteve-se os seguintes resultados representado na tabela 07:

Tabela 07 – Volatilidade diária de cada ação e da Taxa Selic de 2019 a 2022

	Volatilidade diária [%]
PETR4	3,16
EGIE3	1,64
VALE3	2,68
WEGE3	2,75
Risk Free (taxa Selic)	0,00

Fonte: Autoria própria (2022)

Analisando a tabela 07 nota-se que novamente a Petrobrás é a ação com maior volatilidade e a Engie é a que possui a menor volatilidade. Com o resultado da variância e do desvio padrão, pode-se perceber que a Engie não sofre grandes variações diárias, pois muito se deve pelo setor em que ela atua. A energia elétrica é

uma área muito estratégica e fundamental para a economia de qualquer país, então com esta indispensabilidade é de se esperar que ela não sofra tanto nas grandes crises em comparação com empresas de outros setores (MARKOWITZ, 2013). Além disso, a Petrobrás possui grandes oscilações por conta de ser uma estatal e, com isso, acontecimentos políticos podem impactar fortemente o preço de suas ações.

5.6.4 Coeficiente de assimetria de Pearson

Ao utilizar a equação 9 montou-se uma tabela 08 contendo o coeficiente de Pearson de cada uma das ações.

Tabela 08 – Coeficiente de assimetria de Pearson de cada ação de 2019 a 2022

	Assimetria
PETR4	-1,38
EGIE3	0,13
VALE3	0,72
WEGE3	-0,28

Fonte: Autoria própria (2022)

Pela tabela 08 pode-se perceber que a Engie tem um valor muito próximo a zero, ou seja, possui a sua moda muito próxima à sua média. Então a variação diária dela não é tão expressiva quanto as outras.

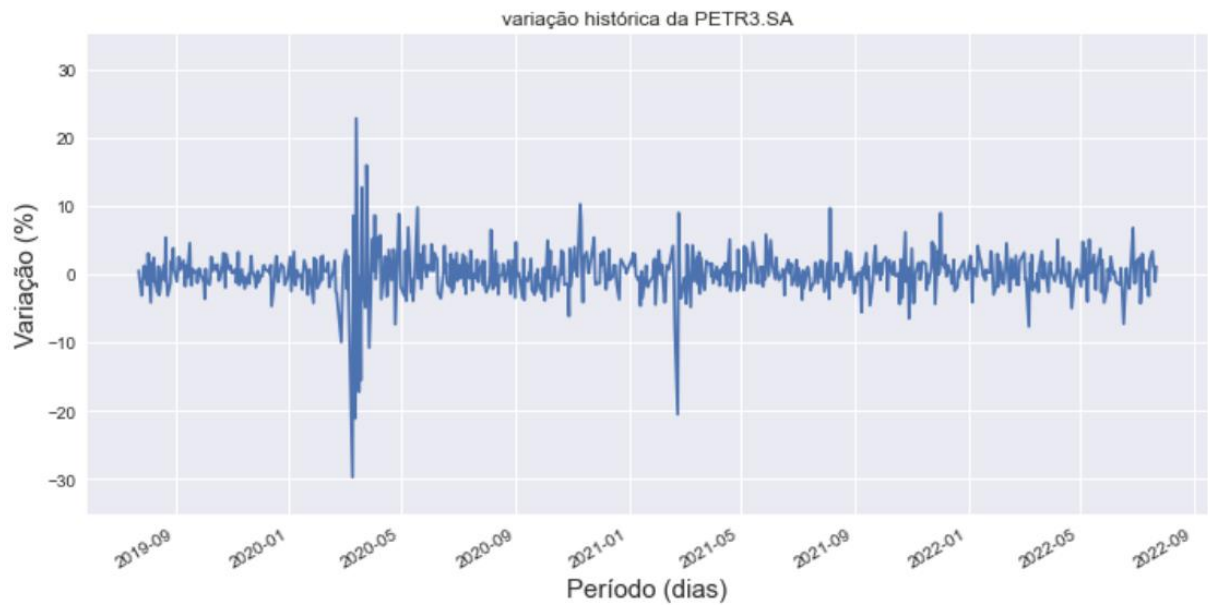
Em Petrobrás e Vale observa-se que elas possuem os maiores valores numéricos em módulo. Isso indica que a moda está muito distante da média aritmética delas, ou seja, essas ações são as que mais apresentam variação diária.

Já em relação a Petrobrás e a WEG nota-se que o coeficiente de assimetria de Pearson é negativo indicando que a variação diária que mais foi apresentada nesse período está acima da média aritmética. Assim, pode-se dizer ambas as ações são positivas em relação a sua moda.

5.6.5 Variação histórica em gráfico de linhas

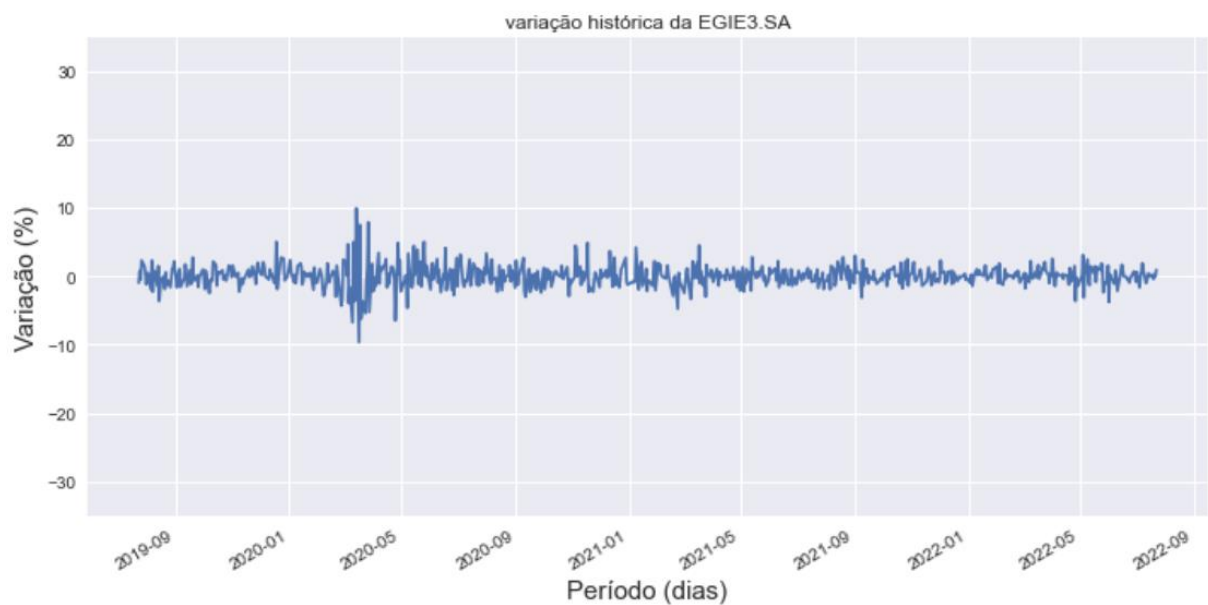
Ao plotar os dados pode-se perceber o nível de variação diária de cada uma das ações que está compondo a carteira. As figuras 21 a 24 representam essa volatilidade em relação ao tempo.

Figura 21 – Variação histórica diária da PETR3 de 2019 a 2022



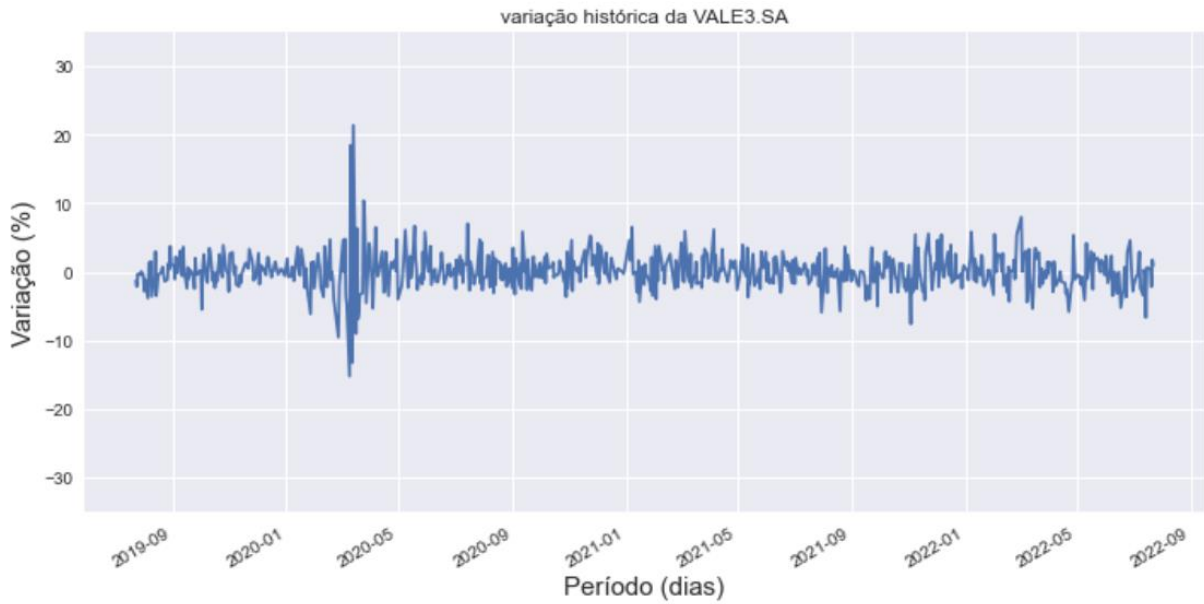
Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 22 – Variação histórica diária da EGIE3 de 2019 a 2022



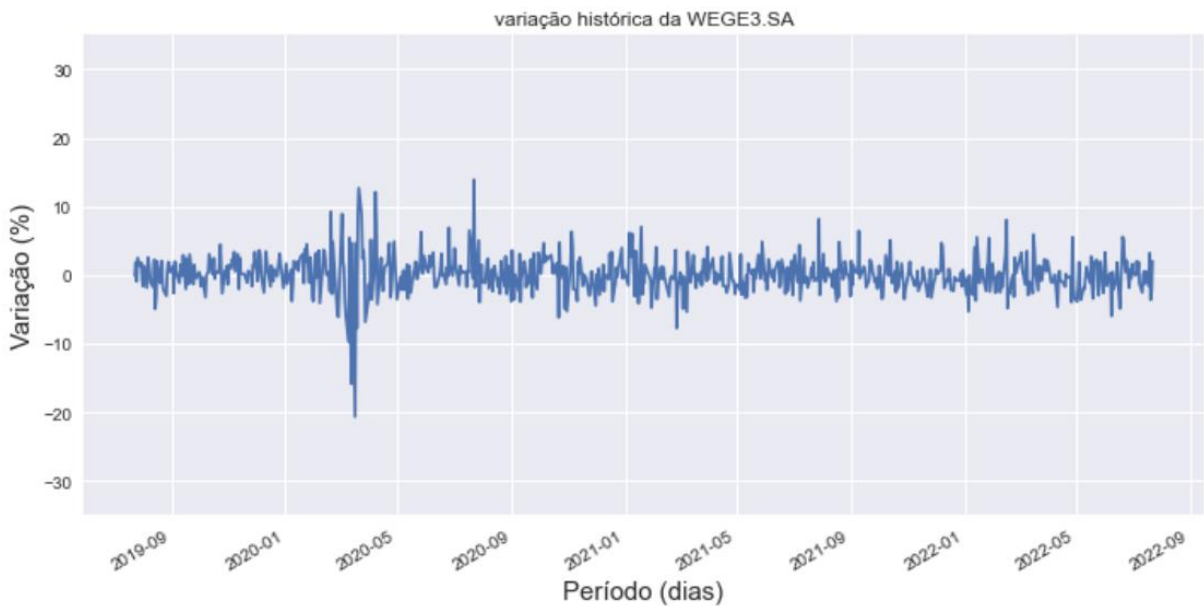
Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 23 – Variação histórica diária da VALE3 de 2019 a 2022



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 24 – Variação histórica diária da WEGE3 de 2019 a 2022



Fonte: Autoria própria (2022)

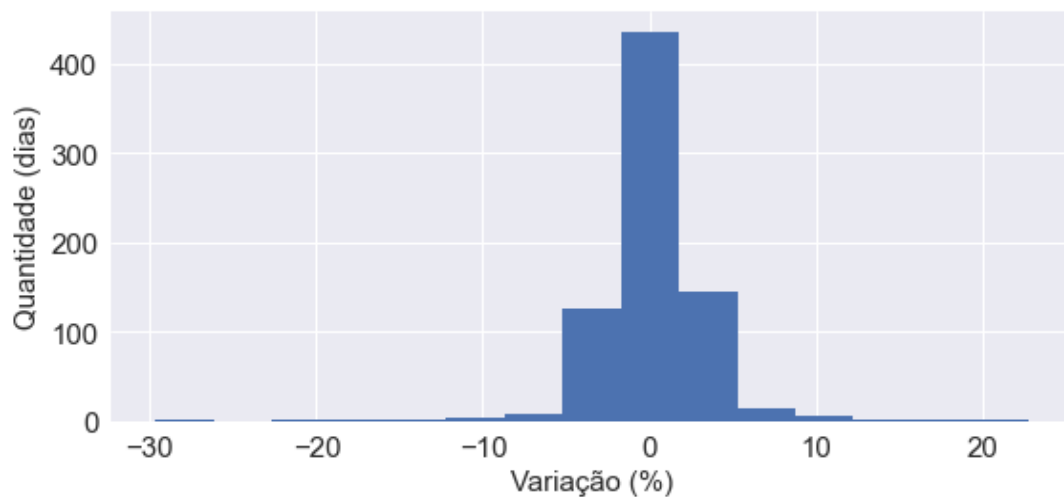
De acordo com a equação de amplitude (10) nota-se que nas figuras 21 a 24 há uma amplitude maior no começo de 2020 justificado pelo início da pandemia, sendo a Petrobrás a mais volátil contendo variações entre -30% até +20% em um único dia.

Do outro lado, a Engie representou uma volatilidade mais consistente e mais previsível variando apenas -10% a +10% em períodos de grande medo na economia.

5.6.6 Histograma

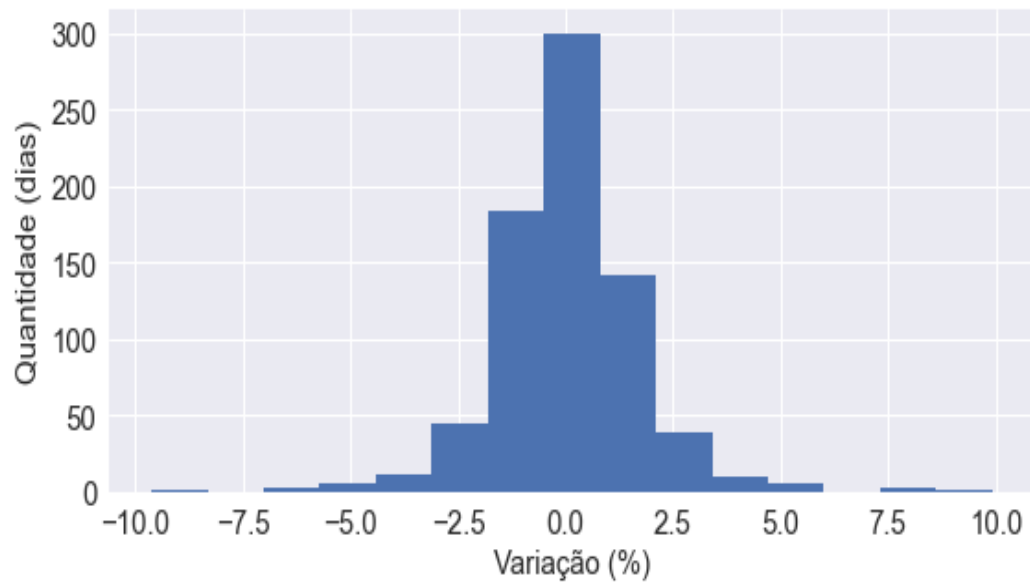
O histograma é a representação gráfica da distribuição de frequência. Nele são agrupadas as medidas em uma escala horizontal e as frequências na escala vertical. Os dados para a construção dos histogramas das figuras 25 a 28 foram utilizados 15 agrupamentos distintos englobando toda a variação histórica de cada ação.

figura 25 – Histograma da PETR3 com frequência em dias e variação diária em porcentagem



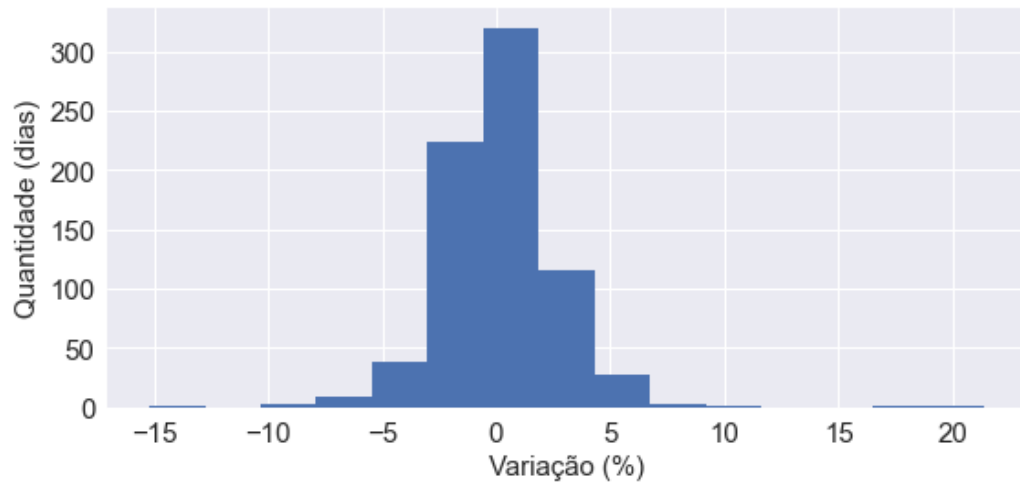
Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 26 – Histograma da EGIE3 com frequência em dias e variação diária em porcentagem



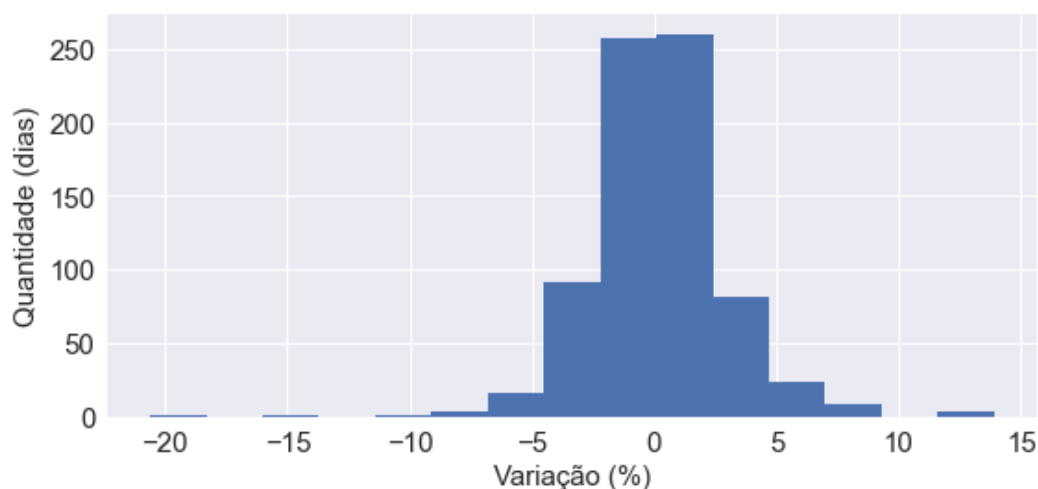
Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 27 – Histograma da VALE3 com frequência em dias e variação diária em porcentagem



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 28 – Histograma da WEGE3 com frequência em dias e variação diária em porcentagem



Fonte: Autoria própria (2022)

As figuras 25 a 28 mostram que todas as ações obtiveram mais dias com variações positivas do que negativas (modas positivas). Portanto, ao analisar a longo prazo pode-se perceber que as quatro ações irão ter, quantitativamente, mais retornos positivos do que negativos.

5.6.7 Correlação

A tabela 09 retrata a matriz correlação entre as ações da carteira:

Tabela 09 – Correlação entre os pares de ações que estão na carteira de investimento de 2019 a 2022

	PETR4	EGIE3	VALE3	WEGE3
PETR4	1,0000	0,2489	0,3239	0,1782
EGIE3	0,2489	1,0000	0,0149	0,3004
VALE3	0,3239	0,0149	1,0000	0,1364
WEGE3	0,1782	0,3004	0,1364	1,0000

Fonte: Autoria própria (2022)

Como pode ser observado na tabela 09, a VALE3 e a PETR3 possuem as maiores correlações, logo a variação diária delas possuem um comportamento muito semelhante. Do outro lado, a VALE3 e a WEGE3 possuem correlações muito baixa significando que elas não a variação entre elas não possui nenhuma conexão.

5.7 Carteiras Otimizadas

Para as carteiras otimizadas foram selecionados 2 portfólios para cada tipo de investidor: conservador, moderado e arrojado. A primeira carteira contém apenas as ações que foram selecionadas previamente, ou seja, 100% da carteira está alocada em renda variável como descrito na teoria de Markowitz. A segunda carteira será composta por ações selecionadas e com o ativo livre de risco, ou seja, o alocou parte do capital na taxa Selic para diminuir o risco da carteira.

Todas as carteiras apresentam o peso alocado em cada ativo e juntamente com o retorno esperado, risco incluso e o índice Sharpe.

Deve-se ressaltar que as rentabilidades estão em porcentagem com o cálculo de retorno esperado para um período de 3 anos já que o intervalo utilizado foi de 2019 a 2022.

5.7.1 Carteira com maior Sharpe

A carteira com o maior índice Sharpe representa a melhor dentre aquelas que tiveram o maior retorno atrelado a um determinado nível de risco. A tabela 10 representa a carteira com alocação 100% em renda variável enquanto a tabela 11 representa uma alocação mais ponderada contendo a Taxa Selic na carteira.

Tabela 10 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com maior índice Sharpe

	Carteira com maior Sharpe [%]
PETR4	1,96
EGIE3	1,32
VALE3	28,12
WEGE3	68,59
Retorno	179,17
Risco	2,27
Sharpe	4,55

Fonte: Autoria própria (2022)

Tabela 11 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com maior índice Sharpe

	Carteira com maior Sharpe [%]
PETR4	4,38
EGIE3	0,09
VALE3	15,13
WEGE3	37,70
Taxa Selic	42,70
Retorno	100,29
Risco	1,29
Sharpe	4,53

Fonte: Autoria própria (2022)

Apesar de ambas as carteiras apresentarem praticamente o mesmo índice Sharpe, o risco e o retorno delas são totalmente distintos. A carteira que não contém a Taxa Selic apresenta um retorno de 179% enquanto a segunda um retorno de 100%, porém o risco que ambas se expõem justifica o retorno da primeira ser maior que a segunda. Também, deve-se notar que a alocação na taxa Selic está em 42%, muito justificável pelo alto retorno que a taxa Selic vem oferecendo nos últimos 12 anos. Além disso, a ação que teve a maior alocação em ambas as carteiras foi a WEGE3, pois das 4 ações ela possui a maior rentabilidade média e a volatilidade dela não é tão alta.

5.7.2 Carteira com maior retorno

Para Markowitz, a carteira com o maior retorno não representa uma grande conclusão, pois a tendência é de o programa alocar 100% da carteira na ação que teve a maior rentabilidade histórica, ou seja, na empresa Weg (LO, 2020). As tabelas 12 e 13 representam as carteiras selecionadas pelo programa.

Tabela 12 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com maior retorno

	Carteira com maior Retorno [%]
PETR4	11,19
EGIE3	1,13
VALE3	1,51
WEGE3	86,15
Retorno	198,61
Risco	2,55
Sharpe	4,40

Fonte: Autoria própria (2022)

Tabela 13 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com maior retorno

	Carteira com maior Retorno [%]
PETR4	9,25
EGIE3	1,04
VALE3	2,32
WEGE3	80,70
Taxa Selic	6,67
Retorno	179,72
Risco	2,38
Sharpe	4,35

Fonte: Autoria própria (2022)

Ambas as Carteiras das tabelas 12 e 13 contêm a ação WEGE3 alocada em mais de 80% mostrando que apesar da metodologia de amostras aleatórias, o programa teve bom desempenho. Outro aspecto curioso é que apesar da tendência da alocação de 100% na WEGE3, o índice Sharpe de ambas as carteiras acima está muito próximo das duas carteiras mostradas nas tabelas 10 e 11. Porém, é nítido que as carteiras das tabelas 10 e 11 são muito superiores às mostradas neste tópico, pois elas estão totalmente expostas ao risco não sistemático da empresa Weg e do setor industrial em que ela está. Assim, em um cenário pessimista, caso a Weg comece a apresentar sinais de prejuízo e até mesmo falência, a carteira inteira do usuário estará exposta a isso e poderá ter grandes perdas.

5.7.3 Carteira com menor risco

A carteira com o menor risco está sendo representada por aquela que possui a menor volatilidade, ou seja, a ação que apresentar variações históricas pequenas serão as mais beneficiadas neste quesito.

Da mesma forma que o item 5.7.2, a carteira contendo a taxa Selic tenderá a 100%, pois como dito anteriormente ela representa o investimento com o menor risco no mercado. Assim, mais uma vez, o programa apresentou números superiores a 80% nessa alocação.

Tabela 14 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com o menor risco

	Carteira com menor risco [%]
PETR4	1,63
EGIE3	73,68
VALE3	13,56
WEGE3	11,11
Retorno	47,28
Risco	1,55
Sharpe	1,12

Fonte: Autoria própria (2022)

Tabela 15 – Risco e retorno da carteira selecionada pelo programa com investimento na taxa Selic e com o menor risco

	Carteira com menor risco [%]
PETR4	5,45
EGIE3	11,21
VALE3	0,97
WEGE3	2,10
Taxa Selic	80,24
Retorno	35,84
Risco	0,34
Sharpe	1,92

Fonte: Autoria própria (2022)

De acordo com a tabela 14, a carteira com alocação 100% nos ativos escolhidos teve um bom resultado, pois ela rejeitou a PETR4 que possuía grandes variações e deu muita atenção para a EGIE3 que teve a menor volatilidade dentre as quatro ações. Apesar do retorno de 47%, seu risco foi o menor possível, mesmo assim

alto em comparação a carteiras que podiam alocar parte do seu capital na taxa Selic observado na tabela 15. Portanto, pode-se concluir que para montar uma carteira para um investidor que se preocupa com perdas e grandes volatilidades, é indispensável que no portfólio deste indivíduo contenha o ativo livre de risco (Taxa Selic).

5.7.4 Carteira do usuário

A tabela 16 mostra uma carteira que apresenta uma distribuição igualitária entre os quatro ativos. O risco e o retorno do usuário não foram tão ruins, mas podendo nitidamente ser otimizados para o usuário ter um portfólio com maior retorno atrelado a um menor risco.

Tabela 16 – Risco e retorno da carteira com distribuição igualitária entre as ações composta no portfólio

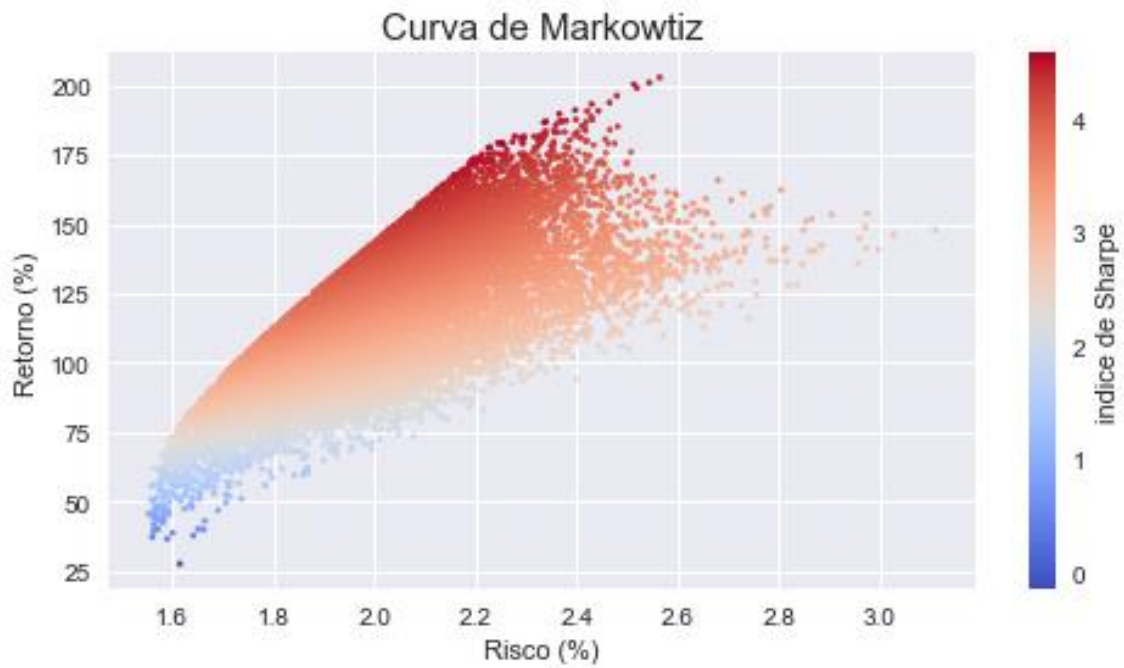
	Carteira com distribuição igualitária [%]
PETR4	25,00
EGIE3	25,00
VALE3	25,00
WEGE3	25,00
Retorno	111,26
Risco	1,91

Fonte: Autoria própria (2022)

5.8 Gráfico de Markowitz

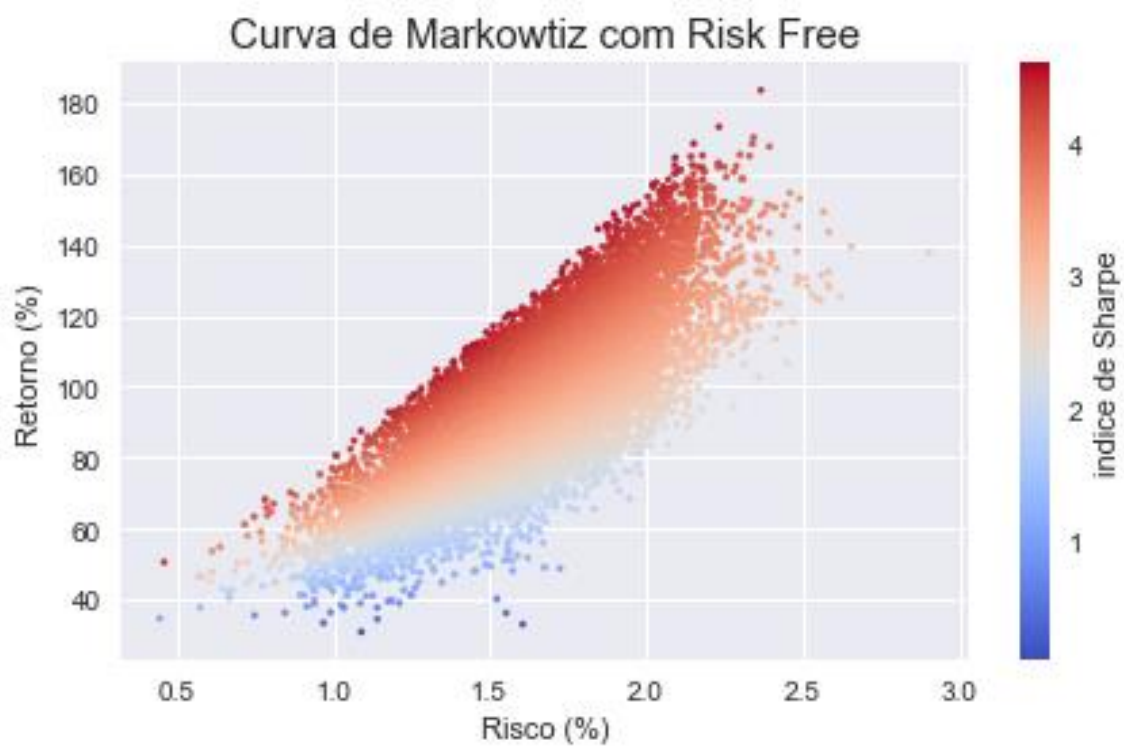
Por meio do gráfico de Markowitz, é possível notar a dominância entre as carteiras mostrada na figura 02 onde o portfólio 02 é superior ao portfólio 01 pois eles possuem o mesmo risco, porém com rentabilidades diferentes. Desta forma, a curva de Markowitz gerada teve um bom resultado em relação a sua aparência, representada nas figuras 29 e 30. Em ambos os gráficos pode-se perceber a fronteira eficiente está localizada nos pontos que possuem o melhor retorno atrelado a um determinado nível de risco.

figura 29 – Curva de Markowitz com as ações composta no portfólio de 2019 a 2022



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 30 – Curva de Markowitz com as ações composta no portfólio contendo investimento na taxa Selic de 2019 a 2022



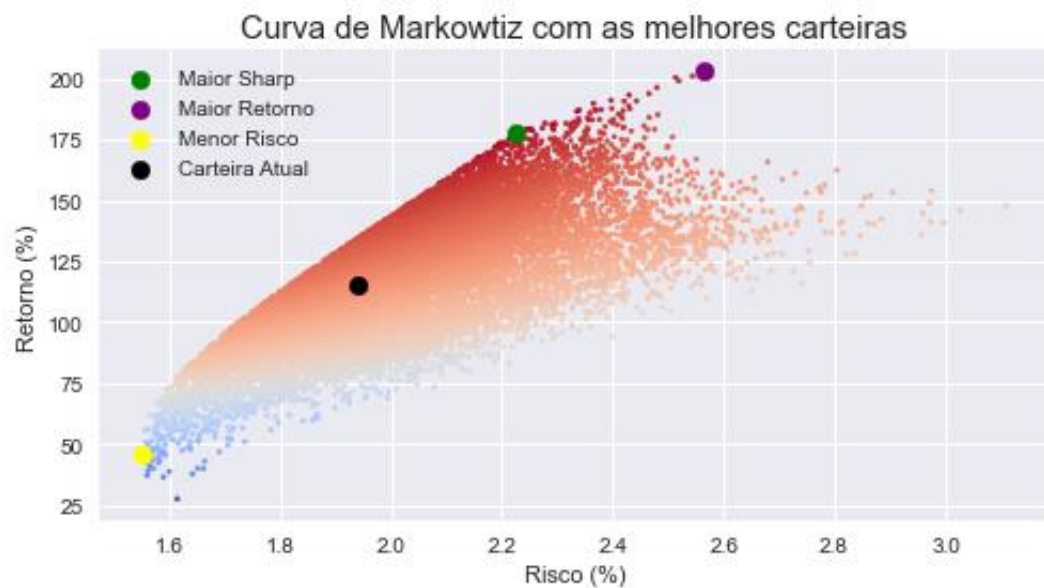
Fonte: Autoria própria (2022)

Outro ponto importante a se comentar é no eixo x das figuras 29 e 30, pois enquanto a curva das carteiras sem o Risk Free possui riscos entre 1,6% e 3,0%, o gráfico com carteiras alocando parte do seu capital em Risk Free apresenta riscos entre 0,5% e 2,5% mostrando mais uma vez que essa alocação foi crucial para diminuir o risco e, conseqüentemente, a volatilidade da carteira. Essa comparação será mais detalhada nos tópicos seguintes.

5.8.1 Gráfico de Markowitz com as melhores carteiras

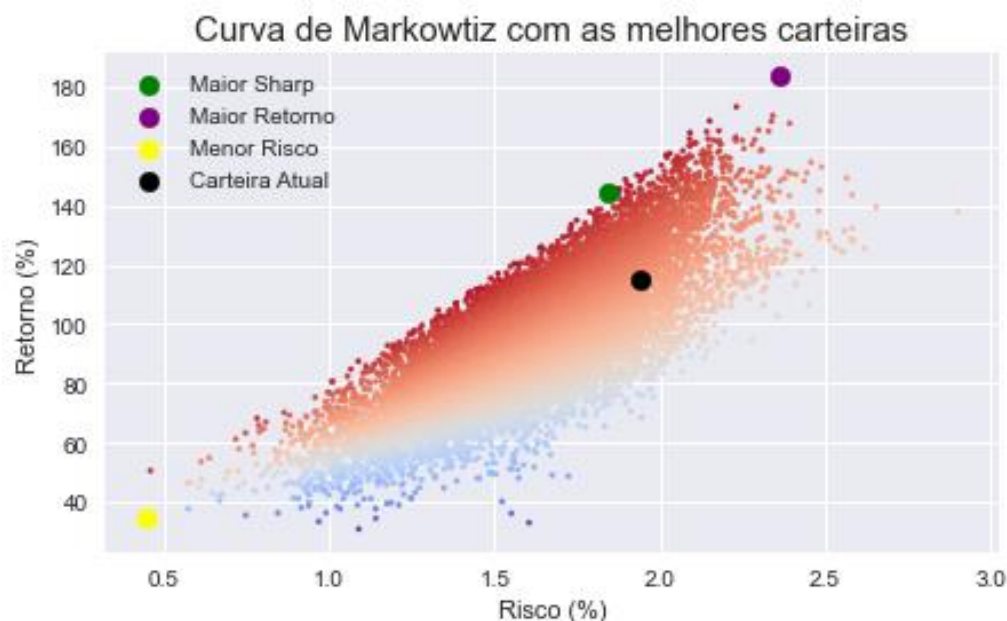
Ao adicionar as carteiras comentadas nos tópicos 6.7.1, 6.7.2, 6.7.3 pode-se perceber que as três carteiras estão localizadas na fronteira eficiente. Assim, pode-se concluir que as carteiras selecionadas são aquelas que possuem a maior rentabilidade para aquele determinado nível de risco. As figuras 31 e 32 mostram a curva de Markowitz e a localização das carteiras selecionadas pelo programa.

Figura 31 – Curva de Markowitz com as melhores carteiras selecionada pelo programa



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 32 – Curva de Markowitz com as melhores carteiras selecionada pelo programa contendo investimento na taxa Selic



Fonte: Autoria própria (2022)

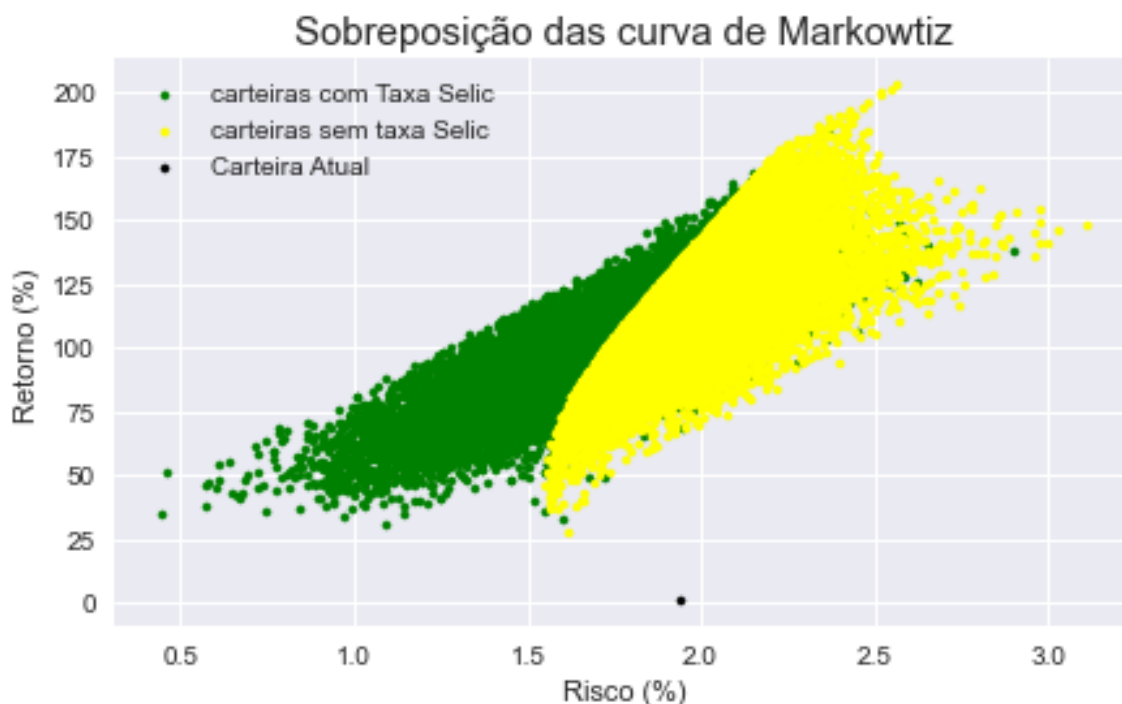
Ao analisar as figuras 31 e 32 percebe-se que a carteira atual do cliente possui um retorno não eficiente, porque essa carteira ainda pode ser otimizada para que o usuário consiga um maior retorno atrelado ao risco que ele já está exposto.

Dividir o capital de forma igualitária para todos os ativos da carteira não é uma estratégia otimizada, mas também não é a pior das possíveis opções. Assim, ao utilizar uma técnica já consolidada no atual mercado financeiro, o investidor pode basear-se nesta teoria publicada e validada desde 1950 para maximizar os seus lucros.

5.8.2 Sobreposição das duas curvas de Markowitz

Sobrepondo as duas curvas de Markowitz, com alocação em risk free e sem alocação, obtém-se a figura 33.

Figura 33 – Sobreposição das curvas gerada pelo programa com as carteiras composta somente por ações e com as carteiras composta por ações e taxa Selic



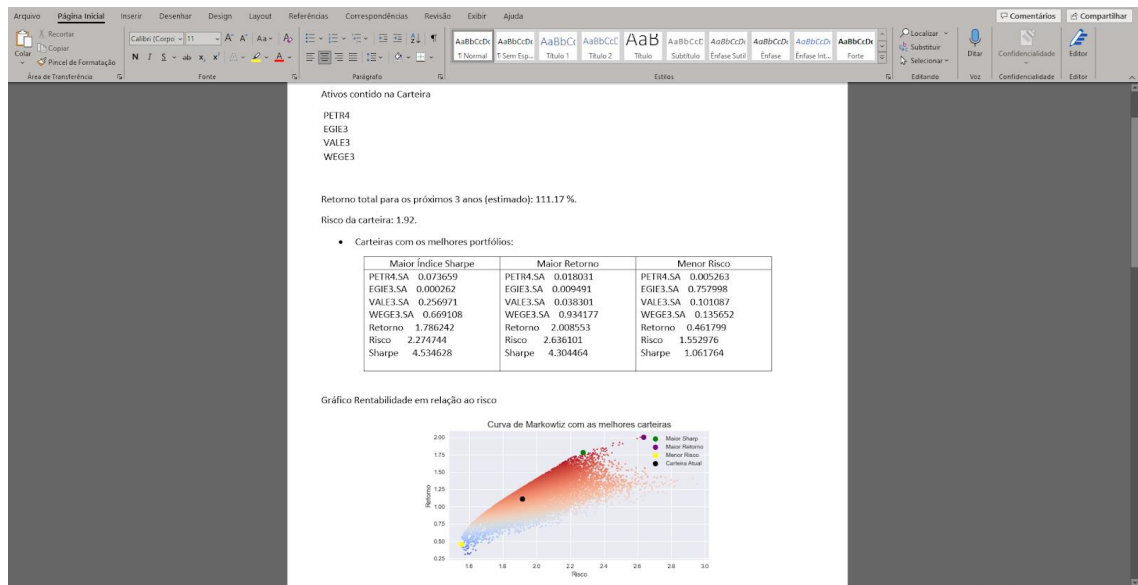
Fonte: Autoria própria (2022)

No primeiro momento, nota-se que as carteiras com alocação apenas em renda variável (amarelo) possuem retornos superiores em comparação às carteiras com alocação em risk free (verde). Porém, isto se aplica apenas para aquelas que obtiveram os maiores retornos, pois as amarelas com risco entre 1,5 e 2,1 perdem em rentabilidade para todas as otimizadas que tiveram parte de seu capital alocado no ativo livre de risco. Com isso, conclui-se que apesar do baixo retorno da taxa Selic ela possui o menor risco do mercado. Assim, o usuário estaria diminuindo a volatilidade total da carteira ao alocar parte do capital da carteira nesse investimento. Pode-se dizer, então, que uma carteira otimizada contém a Taxa Selic no seu portfólio

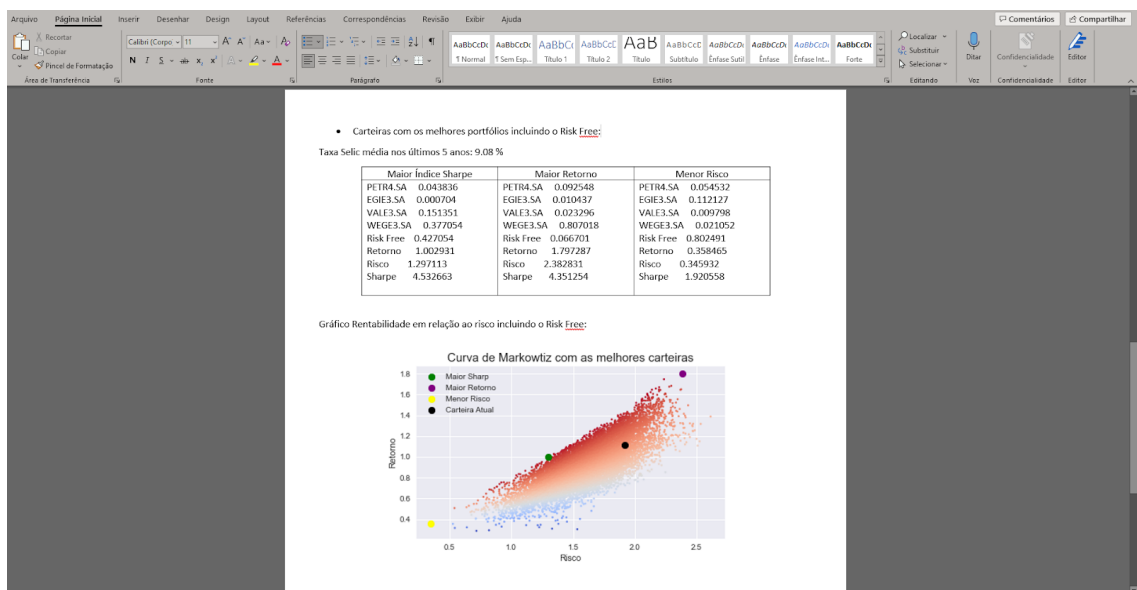
5.8.3 Relatório final do usuário

Como dito anteriormente, todos os resultados foram apresentados em um relatório como saída definitiva do programa para o usuário. A figura 34 apresenta o relatório que o programa criou de maneira automática.

Figura 34 – Relatório gerado pelo programa contendo todas as informações a respeito da carteira do usuário: (a) portfólios de ações, (b) portfólios de ações com ativos livre de risco



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria (2022)

6 CONCLUSÃO

A sobreposição das curvas de Markowitz mostrou que apesar da teoria ser aplicada até os dias atuais ela ainda pode ser mais otimizada utilizando investimentos de baixíssimo risco no mercado. A diversificação do investimento em risk free, ou seja, na taxa Selic mostrou que em tempos de alta volatilidade na bolsa ocasionada pelas crises de saúde pública globais (Coronavírus) e pelas guerras territoriais entre países (Rússia e Ucrânia) a carteira teve um retorno muito superior ao comparar com as carteiras tradicionais de Markwitz. Em outras palavras, uma construção de uma carteira mesclada com ações e renda fixa livre de risco possibilita uma maior rentabilidade em comparação a uma carteira com 100% em ações em seu portfólio. Na figura 33 pode-se observar que a rentabilidade de uma carteira mesclada obteve retornos superiores e em alguns casos acima de 30% em um intervalo de 3 anos investido.

Por meio do software, foi possível obter carteiras extremamente otimizadas utilizando dois grandes filtros: o de Markowitz, que as distingue em portfólios eficientes e não eficientes, e pelo número do índice Sharpe, que julga se o portfólio montado tem coerência ao comparar com a rentabilidade do ativo livre de risco.

Os resultados obtidos foram altamente consistentes com o teorema de Markowitz (1952). A EGIE3 possui um retorno diário de 0.02% ao dia, ou seja, cinco vezes menor que as outras três ações em carteira (PETR4, VALE3, WEGE3), mas ela possui uma volatilidade de 1,6%, a menor da carteira. Isso fez com que o software alocasse uma porcentagem relevante nas carteiras mais conservadoras.

Além disso, Markowitz também afirma que não tinha sentido em montar a carteira mais rentável, pois bastava apenas alocar todo o capital na ação que teve o maior retorno histórico nos últimos anos. Isso também o programa foi capaz de identificar, pois nas carteiras mais rentáveis tiveram alocações acima de 80% em uma determinada ação (MARKOWITZ, 2013).

É importante ressaltar sobre as limitações deste estudo, dado que a análise se dedica apenas ao aspecto financeiro histórico das ações. A empresa aberta pode muitas vezes não apresentar o retorno esperado, pois este cálculo foi utilizado com a

subjetividade de que a variação média do passado será a variação média nos próximos anos.

Desta forma, pode-se dizer que o software teve resultados consistentes para utilizar como um dos critérios na hora de montar um portfólio. Além disso, esse estudo teve como objetivo o compartilhamento de importantes conceitos e métricas que podem ser tomadas no momento de construir o seu portfólio de investimentos. Cabe lembrar que o intuito do projeto não é de maneira alguma recomendar alguma ação ou setores estratégicos para a alocação no investimento pessoal, pois apenas dedicados a essa função e contendo certificados específicos podem recomendar ações para os investidores. Assim, o que o programa indica na alocação dos investimentos é apenas baseado em dados históricos e estatísticos.

Ainda deve-se destacar alguns pontos que podem ser melhorados e até mesmo implementados, já que software se baseia apenas em estudos estatísticos não contabilizando uma análise detalhada sobre o balanço patrimonial da empresa. Para isso, seria preciso utilizar conceitos mais avançados de Machine Learning que possa metrificar o crescimento de uma empresa em diversos cenários econômicos.

Portanto, dado o que foi apresentado acima, esse estudo sugere a aplicação da teoria dos portfólios de Markowitz na bolsa de valores acompanhando sempre da taxa livre de risco. Além disso, para estudos futuros com uma análise mais ampla sugere-se que incorpore empresas não brasileiras para averiguar o grau de correlação entre elas. Pois o risco sistemático será mais diversificado. Para isso, algumas alterações no programa podem ser necessárias para poder inserir ações listadas em outras bolsas.

REFERÊNCIAS

MARX, Howard. **The Most Important Thing: Uncommon Sense for the Thoughtful Investor**. First Edition: Edipro, 2016

CUTHBERTSON, NITZSCH. **Quantitative Financial Economics**. Second Edition: John Wiley & Sons, 2005.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**. First Edition: Yale University Press (2013)

MARKOWITZ, Harry. **Risk-Return Analysis** Volume 3. First Edition: McGraw Hill (2020)

LO, ANDREW. **In pursuit of the perfect portfolio** First Edition: (2022)

WEIMING, James Ma. **Mastering Python for finance**. Second Edition: Packt Publishing (2019)

HIEDA, AKiori; ODA, André. **Um estudo sobre a utilização de dados históricos no modelo de Markowitz aplicado à bolsa de valores de São Paulo**. 11 º Artigo – Universidade de São Paulo, São Paulo,

Foerster, Stephen R. **In Pursuit of the Perfect Portfolio: The Stories, Voices, and Key Insights of the Pioneers Who Shaped the Way We Invest**. Second Edition. Princeton University Press, 17/08/2021.

Markowitz, Harry M. **Risk-Return Analysis: The Theory and Practice of Rational Investing (Volume One)**: 1. McGraw-Hill, 17/09/2013.

Cardoso, Marcio. **Teoria de Portfólio de Markowitz em momentos de crise** – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2010.

Carvalho, Gabriel; Claus Renato P; Mendonça Fabrício M; Simão Fúlvio R. **Teoria do Portfólio aplicada na diversificação da produção de café**. DESENVOLVE: Revista de Gestão do Unilasalle, Canoas, 2019.

TAXA SELIC. bcb.gov. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>>. Acesso em: 03/06/2022

Kawano, erik. **FRONTEIRA EFICIENTE DE MARKOWITZ**. Clubedefinancas, 2020. Disponível em: <<http://clubedefinancas.com.br/materias/fronteira-eficiente/>>. Acesso em: 04/06/2022

ANEXO

Extratos da Programação Desenvolvida

#uso de dataframe

```
import pandas as pd
import numpy as np
from numpy import array
#importar base de dados de cotação
from pandas_datareader import data
#biblioteca de graficos
from pylab import plt
plt.style.use('seaborn')
import matplotlib.pyplot as plt
#biblioteca de matematica
import math
#biblioteca de tempo
import datetime
from datetime import timedelta, date, time
#biblioteca estatistica
import scipy.stats as scs
```

#extraíndo a carteira do usuário

```
carteira=pd.read_excel('CarteiraCliente.xlsx')
carteira_tratada = []
for i in range(len(carteira)):
    ticker_SA = carteira['ticker da empresa (ex: ABCD3)'].loc[i]
    ticker_SA = ticker_SA + '.SA'
    carteira_tratada.append(ticker_SA)
carteira_tratada
```

#datas

```
yyyy=date.today().year
mm=date.today().month
dd=date.today().day
hj_STR=str(yyyy)+'-'+str(mm)+'-'+str(dd)
inicio_STR=str(yyyy-3)+'-'+str(mm)+'-'+str(dd)
inicio = datetime.datetime(yyyy-3,mm,dd)
hj= datetime.datetime(yyyy,mm,dd)
print('inicio:')
print(inicio_STR)
print('fim:')
print(hj_STR)
```

#carteira sem renda fixa

```
def port_ret(pesos):
    returns = np.dot(pesos, e_r)
    return returns
def port_vol(pesos):
    var=matriz_cov.mul(pesos, axis=0).mul(pesos,axis=1).sum().sum()
    dp=np.sqrt(var)
```

```

    return dp
#carteira com uma porcentagem aleatoria em renda fixa
def port_ret_RF(pesos_RF):
    returns_RF = np.dot(pesos_RF, e_r_RF)
    return returns_RF
def port_vol_RF(pesos_RF):
    var_RF=matriz_cov_RF.mul(pesos_RF, axis=0).mul(pesos_RF,axis=1).sum().sum()
    dp_RF=np.sqrt(var_RF)
    return dp_RF

```

#calculando a media da taxa selic nos dias em questao

```

url = 'http://api.bcb.gov.br/dados/serie/bcdata.sgs.432/dados?formato=json'
taxa_selic = pd.read_json(url)
taxa_selic['data']=pd.to_datetime(taxa_selic['data'], dayfirst=True)

#importando os dados
df=data.DataReader(carreira_tratada, data_source='yahoo', start=inicio_STR, end=hj_STR)
precos=df['Adj Close']
precos

```

#taxa livre de risco a.a. para a.d.

```

rf = ((media_taxa_selic*0.01)+1)**(1/252)-1 #risk free convertida ao dia
print('media da taxa selic (a.d.)')
print(rf)

```

```

retornos=precos.pct_change()
retornos=retornos.dropna()
#adicionando a coluna renda fixa MEDIA na tabela precos
retornos_RF = retornos
retornos_RF['Risk Free'] = rf
retornos_RF

```

#gerando as n carteiras aleatorias

```

p_ret_RF=[]
p_vol_RF=[]
p_pesos_RF=[]
sharp_RF=[]
noa_RF= len(retornos_RF.columns)
carteira_pesos_RF=pd.DataFrame()
for i in range (len(retornos_RF.columns)):
    carteira_pesos_RF.insert(loc=i, column=retornos_RF.columns[i], value=retornos_RF.columns[i])
for portfolios in range(nop):
    #gerando carteiras aleatorias e colocando a somatoria dos pesos em 100% (COM RF)
    pesos_RF=np.random.random(noa+1)
    pesos_RF=pesos_RF/np.sum(pesos_RF)
    p_pesos_RF.append(pesos_RF)
    #adicionando os pesos dos ativos daquela determinada carteira (com RF)
    carteira_pesos_RF.loc[len(carteira_pesos_RF)]=pesos_RF
    #gerando carteiras aleatorias e colocando os retornos (retorno esperado*peso) (com RF)
    p_ret_RF.append(port_ret_RF(pesos_RF))
    retorno_RF=port_ret_RF(pesos_RF)
    #gerando carteiras aleatorias e colocando o a volatilidade/ desvpad (com RF)
    risco_RF=port_vol_RF(pesos_RF)
    p_vol_RF.append(port_vol_RF(pesos_RF))
    #gerando carteiras aleatorias e calculando o indice sharpe (com RF)

```

```

    sharp_ratio_RF=(retorno_RF-rf)/risco_RF
    sharp_RF.append(sharp_ratio_RF)
carteira_pesos_RF

```

#montando uma tabela com o retorno, risco e indice sharpe das n carteiras (COM RF)

```

p_ret_RF=np.array(p_ret_RF)
p_vol_RF=np.array(p_vol_RF)
sharp_RF=np.array(sharp_RF)
portfolio_RF=pd.DataFrame(data={'Retorno': p_ret_RF, 'Risco':p_vol_RF, 'Sharp':sharp_RF})

```

#anualizando a tabela portfolio para rentabilidade a.a e tambem risco em porcentagem.

```

retorno_anualizado_RF=[]
risco_porcentagem_RF=[]
for i in range(len(portfolio_RF)):
    #anualizar (1+TAXA)^tempo-1
    #(0.1175+1)**(1/252)-1
    ret_anualizado_RF = ((1+portfolio_RF['Retorno'].loc[i])**len(retornos_RF))-1
    retorno_anualizado_RF.append(ret_anualizado_RF)
    ret_anualizado_RF = portfolio_RF['Risco'].loc[i]*100
    risco_porcentagem_RF.append(ret_anualizado_RF)
retorno_anualizado_RF=np.array(retorno_anualizado_RF)
risco_porcentagem_RF=np.array(risco_porcentagem_RF)
#colocando o indice sharpe em porcentagem
sharp_RF=sharp_RF*100
portfolio_anualizado_RF={'Retorno': retorno_anualizado_RF, 'Risco':risco_porcentagem_RF, 'Sharpe': sharp_RF}
portfolio_anualizado_RF=pd.DataFrame(portfolio_anualizado_RF)

```

#grafico

```

plt.figure(figsize=(7,4))
plt.scatter(portfolio_anualizado_RF['Risco'], portfolio_anualizado_RF['Retorno']*100, s=5, c=sharp_RF, cmap='coolwarm')
plt.title('Curva de Markowitz com Risk Free', fontsize=15)
plt.xlabel('Risco (%)')
plt.ylabel('Retorno (%)')
plt.legend()
plt.colorbar(label='indice de Sharpe')

```