Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

# Formalizando a Existência dos Números Reais

**Rafael Falco Pereira**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
**Prof. Dr. Jamil Viana Pereira**

**2014**

111 Pereira, Rafael Falco
X111x Formalizando a Existência dos Números Reais/ Rafael Falco Pereira- Rio Claro: [s.n.], 2014.
45 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Números Reais. 2. Cortes de Dedekind. 3. Sequências de Cauchy. 4. Corpo Ordenado Completo. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Rafael Falco Pereira

Formalizando a Existência dos Números Reais

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação - Mestrado em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Orientador

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
Departamento de Computação e Matemática
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento de Matemática
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

**Rio Claro, 13 de Outubro de 2014**

# Resumo

Este trabalho busca formalizar a existência do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo. Mostraremos a construção de $\mathbb{R}$ a partir dos cortes de Dedekind e apresentaremos as principais propriedades deste conjunto. Apontaremos também as ideias básicas da construção de $\mathbb{R}$ através das Sequências de Cauchy, proposta por Cantor, e outras formas equivalentes. E, por fim, exemplificaremos como este conceito poderá ser aplicado em sala de aula pelos professores da Educação Básica.

**Palavras-chave:** Números Reais, Cortes de Dedekind, Sequências de Cauchy, Corpo Ordenado Completo.

# Abstract

The aim of this work is to formalize the real numbers set existence as a complete ordered field. We will construct $\mathbb{R}$ using the Dedekind cuts and show the main properties of this set. Besides, we will point out the basic ideas of the Cantor's construction by Cauchy Sequences and another equivalent ways. The last part, consists of an example of how teachers can apply this concept in middle education classes.

**Keywords:** Real Numbers, Dedekind Cuts, Cauchy Sequences, Complete Ordered Field.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

Inúmeros foram os matemáticos do século XIX que buscaram demonstrar a existência do conjunto dos números reais, um corpo ordenado e completo que contém o conjunto dos números racionais, destacamos dentre eles, Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. No entanto, as teorias de Dedekind e Cantor estabeleceram-se e são as mais utilizadas, até hoje, para uma primeira abordagem rigorosa do tema.

Com o objetivo de demonstrar esta existência, isto é, construir um corpo ordenado completo, uma vez que "para uma apresentação dos conceitos principais de análise (tais como a convergência, continuidade, derivação e a integração) ser satisfatória, ela deve basear-se no conceito de número definido com exatidão" (RUDIN,1971, p. 1), este trabalho propõe a análise e discussão da construção de Dedekind, sua equivalência à outras formas e uma situação em que a utilização do conceito de números reais é necessária em sala de aula, na Educação Básica.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), é importante colocar o aluno diante de situações em que os números racionais sejam insuficientes para resolvê-las. Dessa forma, torna-se necessária a consideração de outros números, como os irracionais, identificando-os como um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados (1998, p. 83).

Nesse sentido, parte desta dissertação dedica-se a uma exposição detalhada sobre o assunto. As ideias de Dedekind serão apresentadas com o intuito de compreendermos o seu trabalho, principalmente no que concerne à completude dos números reais, diferenciando-o dos números racionais.

Apesar de ter sido Dedekind um dos maiores estudiosos dos números reais, a descoberta do número $\sqrt{2}$ foi feita anteriormente. De acordo com a obra "História da Matemática", de Carl Benjamin Boyer, por volta de 500 a.C., a Escola Pitagórica enuncia seu célebre teorema, que relaciona as medidas dos catetos de um triângulo retângulo com a medida da hipotenusa. Naquela época, o triângulo retângulo estudado era formado por dois lados consecutivos de um quadrado e sua diagonal. Buscando-se a medida da diagonal de um quadrado de lado uma unidade, surgiu o número $\sqrt{2}$. A própria Escola Pitagórica não aceitou esta concepção, já que contradizia a sua doutrina: como ele não era obtido por uma razão de dois números inteiros, ele não poderia ser um número racional.

A descoberta foi mantida em segredo durante muitos anos pelos gregos, demonstrando, assim, a fragilidade de suas crenças. Foi somente com Eudoxo de Cnido (c. 408 - 355 a.C.) que os números irracionais voltaram a ser estudados e, finalmente, em 1872, após vinte séculos do surgimento desses números, Dedekind dedicou-se ao seu estudo.

Segundo dados do MacTutor History of Mathematics archive , sediado na University of St Andrews na Escócia e redigidos por John J. O'Connor e Edmund F. Robertson, Julius Wilhelm Richard Dedekind, nascido em 6 de outubro de 1831, na Alemanha, começou a desenvolver seu gosto pela matemática aos 7 anos de idade, quando entrou para o colégio Martino-Catharineum.

Entre 1848 a 1850, estudou no colégio Carolinum, onde aprendeu Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e os fundamentos da Análise, pilares fundamentais da matemática. Em 1850, entra para a faculdade de Göttingen, aprende Teoria dos Números, participa de um curso ministrado por Gauss, recebe o título de doutor sob a orientação do próprio Gauss, em 1852 e em 1854, começa a lecionar Probabilidade e Geometria na própria faculdade. Com a morte de Gauss, passa a ser orientado por Dirichlet e aprofunda seus conhecimentos em teoria dos números, teoria potencial, integrais definidas e equações diferenciais parciais.

Em 1872, publica sua maior obra, Stetigkeit und Irrationale Zahlen, onde apresentou a ideia do corte de Dedekind. Ademais, definiu conjuntos infinitos e finitos e editou os trabalhos de Dirichlet, Gauss e Riemman.

Dedekind, além de ter criado teoremas e conceitos, contribuiu com o surgimento de um novo estilo da matemática, representando um marco para as novas gerações de estudiosos desta área. Vê-se, dessa forma, a relevância deste matemático e de sua obra, que continua contribuindo para o entendimento da completude do conjunto dos números reais e suas aplicações.

Como foi dito, este trabalho tem como principal objetivo a construção dos números reais como um corpo ordenado completo. Para atingí-lo, o primeiro capítulo, Noções Preliminares, introduz a terminologia da teoria de conjuntos e funções que será utilizada no restante do trabalho, bem como apresenta uma lista de objetos não definidos e proposições. Já no segundo capítulo, Construção Axiomática do Corpo $\mathbb{R}$, mostraremos a construção de $\mathbb{R}$ a partir dos cortes de Dedekind, apresentaremos as principais propriedades deste conjunto, apontaremos as ideias básicas da construção de $\mathbb{R}$ através das Sequências de Cauchy, proposta por Cantor, e outras formas equivalentes. Por fim, no capítulo Proposta Didática, mostraremos um exemplo de como parte deste estudo poderá ser aplicado em sala de aula pelos professores da Educação Básica.

# 1 Noções Preliminares

As definições apresentadas nesta seção encontram-se nas referências [1], [5] e [6] da bibliografia.

A noção de conjunto é aceita sem definição, ou seja, é uma noção primitiva e um conjunto é formado de objetos, intitulados elementos, que também é uma noção primitiva.

**Definição 1.1.** *Sejam $\mathbb{A}$ um conjunto e $x$ um elemento. Se $x$ é um elemento do conjunto $\mathbb{A}$ dizemos que $x \in \mathbb{A}$ (lê-se x pertence a $\mathbb{A}$). Caso contrário, diz-se que $x \notin \mathbb{A}$ (lê-se x não pertence a $\mathbb{A}$).*

Baseado nisto, um conjunto $\mathbb{A}$ fica determinado quando se dá uma regra que permita decidir se um elemento x pertence ou não a $\mathbb{A}$.

**Definição 1.2.** *O conjunto que não possui nenhum elemento é chamado conjunto vazio, representado pelo símbolo $\varnothing$ ou $\{\}$. Para mostrar que um conjunto $\mathbb{A}$ não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um elemento $x$ tal que $x \in \mathbb{A}$.*

**Definição 1.3.** *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ conjuntos. Se todo elemento de $\mathbb{A}$ também for um elemento de $\mathbb{B}$, então dizemos que $\mathbb{A}$ é um subconjunto de $\mathbb{B}$, que $\mathbb{A}$ está contido em $\mathbb{B}$ ou que $\mathbb{A}$ é parte de $\mathbb{B}$, e se escreve $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ (lê-se $\mathbb{A}$ está contido em $\mathbb{B}$) ou $\mathbb{B} \supset \mathbb{A}$ (lê-se $\mathbb{B}$ contém $\mathbb{A}$).*

*Se $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, dizemos que $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. Caso contrário, $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$.*

*Diz-se que $\mathbb{A}$ é subconjunto próprio de $\mathbb{B}$ quando se tem $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, com $\mathbb{A} \neq \varnothing$ e $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$.*

**Definição 1.4.** *Dados dois conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, chama-se intersecção de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $\mathbb{A}$ e a $\mathbb{B}$, isto é, $x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ se, e somente se, $x \in \mathbb{A}$ e $x \in \mathbb{B}$.*

*Chama-se união dos conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $\mathbb{A}$ ou a $\mathbb{B}$, isto é, $x \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ se, e somente se, $x \in \mathbb{A}$ ou $x \in \mathbb{B}$.*

**Definição 1.5.** *Dados dois conjuntos, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, não vazios, chama-se produto cartesiano de $\mathbb{A}$ por $\mathbb{B}$ o conjunto formado por todos os pares ordenados (x,y), com $x$ em $\mathbb{A}$ e $y$ em $\mathbb{B}$, sendo que (x,y) = (u,v) se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.*

*Costuma-se indicar o produto cartesiano de $\mathbb{A}$ por $\mathbb{B}$ com a notação $\mathbb{A}$x$\mathbb{B}$ (lê-se "$\mathbb{A}$ cartesiano $\mathbb{B}$"). Assim, temos:*

$$\mathbb{A}\text{x}\mathbb{B} = \{(x,y);\ x \in \mathbb{A}\ e\ y \in \mathbb{B}\}$$

**Definição 1.6.** *Chama-se relação binária de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$ todo subconjunto $R$ de $\mathbb{A}$x$\mathbb{B}$. Logo:*

$$R \text{ é relação de } \mathbb{A} \text{ em } \mathbb{B} \text{ se, e somente se, } R \subset \mathbb{A}\text{x}\mathbb{B}.$$

*Portanto, $R$ é um conjunto de pares ordenados $(a,b)$ pertencentes a $\mathbb{A}$x$\mathbb{B}$. Para indicar que $(a,b) \in R$, utilizaremos a notação $aRb$ (lê-se "a relaciona-se com b segundo R").*

**Definição 1.7.** *Quando $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ e $R$ é uma relação de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$, diz-se que $R$ é uma relação sobre $\mathbb{A}$ ou, ainda, $R$ é uma relação em $\mathbb{A}$.*

**Definição 1.8.** *Dizemos que $R$ é reflexiva quando todo elemento de $\mathbb{A}$ se relaciona consigo mesmo. Ou seja, quando, para todo $x \in \mathbb{A}$, vale $xRx$.*

**Definição 1.9.** *Dizemos que $R$ é simétrica se vale $yRx$ sempre que vale $xRy$. Ou seja, se $xRy$, então $yRx$.*

**Definição 1.10.** *Dizemos que $R$ é transitiva se vale $xRz$ sempre que vale $xRy$ e $yRz$. Ou seja, se $xRy$ e $yRz$, então $xRz$.*

**Definição 1.11.** *$R$ é anti-simétrica se $x = y$, sempre que $xRy$ e $yRx$. Ou seja, se $xRy$ e $yRx$, então $x = y$.*

**Definição 1.12.** *Uma relação $R$ sobre um conjunto $\mathbb{A}$, não vazio, é chamada relação de ordem parcial sobre $\mathbb{A}$ se, e somente se, $R$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Ou seja, $R$ deve cumprir respectivamente as seguintes propriedades:*

*(i)* *Se $x \in \mathbb{A}$, então $xRx$;*

*(ii)* *Se $x, y \in \mathbb{A}$, $xRy$ e $yRx$, então $x = y$;*

*(iii)* *Se $x, y, z \in \mathbb{A}$, $xRy$ e $yRz$, então $xRz$.*

**Definição 1.13.** *Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto sobre o qual se definiu uma certa relação de ordem parcial.*

**Definição 1.14.** *Seja $R$ uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{A}$. Os elementos $a, b \in \mathbb{A}$ se dizem comparáveis mediante $R$ se $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

**Definição 1.15.** *Se dois elementos quaisquer de $\mathbb{A}$ forem comparáveis mediante $R$, então $R$ será chamada relação de ordem total sobre $\mathbb{A}$. Nesse caso, o conjunto $\mathbb{A}$ é dito conjunto totalmente ordenado por $R$.*

**Definição 1.16.** *Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ possui três partes: um conjunto $\mathbb{A}$ chamado o domínio da função, um conjunto $\mathbb{B}$, chamado de contradomínio da função e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in \mathbb{A}$, um único elemento $f(x) \in \mathbb{B}$, chamado o valor que a função assume no ponto x.*

Utiza-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor f(x).

**Definição 1.17.** *Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ chama-se injetiva quando, dados x, y quaisquer em $\mathbb{A}$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em $\mathbb{A}$, implica $f(x) \neq f(y)$, em $\mathbb{B}$.*

*Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ chama-se sobrejetiva quando, para todo $y \in \mathbb{B}$ existe pelo menos um $x \in \mathbb{A}$, tal que $f(x) = y$.*

*Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ chama-se bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.*

De posse dos conceitos gerais e dos fatos básicos a respeito de conjuntos e funções, neste momento, é dado como objeto não-definido o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, cujos elementos podem ser rigorosamente definidos por $1 + 1 + \ldots + 1$. Neste conjunto estão definidas duas operações, a chamada adição (denotada por $+$, de modo que dados dois números x e y a adição destes escreve-se $x + y$) e a multiplicação (denotada por um ponto que é frequentemente omitido, de modo a escrevermos a multiplicação dos números x e y simplesmente como xy).

A necessidade da operação inversa da adição em $\mathbb{N}$ nos leva à introdução do número zero e dos números negativos. O conjunto dos inteiros é representado por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Com o passar do tempo, com a necessidade de definir a operação inversa do produto em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, surgem os números racionais ou frações, representados pelo símbolo $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, com a identificação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

isto é, as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes, o que significa que um mesmo elemento pode ser representado de diferentes formas. Dentre essas formas, a única representação tipo $\frac{p}{q}$ que satisfaz $mdc(p,q) = 1$ é chamada fração irredutível.

Então, a partir das definições de conjuntos e funções vistas até aqui, vamos aplicá-las para estudar as noções de conjuntos finitos, conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis.

Indicaremos pelo símbolo $I_n$ o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ dos números naturais desde 1 até n, isto é, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}.$$

**Definição 1.18.** *Um conjunto $\mathbb{X}$ chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção*

$$\varphi\text{: } I_n \to \mathbb{X},$$

*ou seja,* $\mathbb{X}$ *possui n elementos.*

**Definição 1.19.** *Um conjunto* $\mathbb{X}$ *chama-se infinito quando não é finito. Mais explicitamente,* $\mathbb{X}$ *é infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for* $n \in \mathbb{N}$*, não existe uma bijeção* $\varphi : I_n \to \mathbb{X}$*.*

**Definição 1.20.** *Um conjunto* $\mathbb{X}$ *diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção f:* $\mathbb{N} \to \mathbb{X}$*. No segundo caso,* $\mathbb{X}$ *diz-se infinito enumerável e, pondo-se* $x_1 = f(1)$*,* $x_2 = f(2)$*, ...,* $x_n = f(n)$*, ..., tem-se* $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$*. Cada bijeção f:* $\mathbb{N} \to \mathbb{X}$ *chama-se uma enumeração de* $\mathbb{X}$*.*

De agora em diante, objetiva-se caracterizar os números reais a partir das suas propriedades mais básicas. Tomando as noções preliminares apresentadas, mostraremos que é possível construir o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$. Para isso, tomaremos como ponto de partida o conjunto dos números racionais, visto como um corpo ordenado, enunciando suas principais características.

Sabe-se que o conjunto dos números racionais, munido das operações de adição "+"e multiplicação "·"dadas por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

possui estrutura de Corpo Numérico, ou seja, a terna $\{\mathbb{Q}, +, \cdot\}$ é um anel abeliano com unidade e o par $\{\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot\}$ um grupo, como veremos a seguir.

**Definição 1.21.** *Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio* $\mathbb{G}$ *e uma operação (x,y)* $\mapsto x * y$ *sobre* $\mathbb{G}$ *é chamado grupo se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:*

*(G1) Associatividade*

$(a * b) * c = a * (b * c)$*,* $\forall\ a, b, c \in \mathbb{G}$*;*

*(G2) Existência de elemento neutro*

*Existe um elemento e de* $\mathbb{G}$*, denominado elemento neutro tal que:*

$\forall\ a \in \mathbb{G}$*,* $a * e = e * a = a$*;*

*(G3) Existência de simétricos*

*Todo elemento de* $\mathbb{G}$ *é simetrizável em relação a* $*$*, ou seja:*

$\forall\ a \in \mathbb{G}$*,* $\exists\ a' \in \mathbb{G}$*, tal que* $a * a' = a' * a = e$*.*

**Definição 1.22.** *Define-se um grupo* $(\mathbb{G},*)$ *como abeliano ou comutativo se, e somente se,* $\mathbb{G}$ *for comutativo em relação a operação* $*$*, ou seja:*

*(G4) Comutatividade*

*Dados quaisquer elementos a, b* $\in \mathbb{G}$*, vale a comutatividade:*

$a * b = b * a, \forall\ a, b \in \mathbb{G}$

A partir destas definições, se considerarmos o conjunto dos números racionais e a operação usual de adição, denotada por +, então o par ($\mathbb{Q}$,+) é um grupo, pois satisfaz todas as propriedades da Definição 1.21. Pelo fato de também satisfazer a Definição 1.22, trata-se de um grupo comutativo ou abeliano, como segue:

**Proposição 1.23.** *($\mathbb{Q}$,+) é um grupo abeliano.*

*Demonstração.* Sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$ com r = $\frac{a}{b}$, s = $\frac{c}{d}$ e t = $\frac{e}{f}$.

**(Verificação de G1)** A operação soma (+) é associativa:

$$\begin{aligned}(r+s)+t &= (\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f} \\ &= \frac{(adf+bcf)+bde}{bdf} = \frac{adf+(bcf+bde)}{bdf} \\ &= \frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}) \\ &= r+(s+t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

**(Verificação de G2)** Existe em $\mathbb{Q}$ um elemento neutro da adição, isto é, um elemento $0_Q = 0$ tal que r + $0_Q$ = r, $\forall$ r $\in \mathbb{Q}$:

$$r + 0_Q = \frac{a}{b} + 0 = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} = r. \tag{1.2}$$

**(Verificação de G3)** Todo elemento de $\mathbb{Q}$ tem simétrico aditivo, isto é, dado r $\in \mathbb{Q}$, existe $r^{'} \in \mathbb{Q}$, tal que r + $r^{'}$ = $0_Q$. Seja $r^{'} = \frac{-a}{b}$:

$$r + r^{'} = \frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \frac{ab+(-ab)}{bb} = \frac{0}{bb} = 0 = 0_Q. \tag{1.3}$$

A soma r + (-s) será indicada com a notação r - s e chamada a diferença entre r e s. A operação (r, s) $\mapsto$ r - s chama-se subtração.

**(Verificação de G4)** A operação soma (+) é comutativa:

$$\begin{aligned} r+s &= \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \\ &= \frac{bc+da}{db} = \frac{c}{d}+\frac{a}{b} \\ &= s+r. \end{aligned} \tag{1.4}$$

□

**Definição 1.24.** *Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio* $\mathbb{A}$ *e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição (x,y)* $\mapsto x + y$ *e uma multiplicação (x,y)* $\mapsto x \cdot y$ *é chamado anel se:*

*(i)* $(\mathbb{A}, +)$ *é um grupo abeliano;*

*(ii) O conjunto* $\mathbb{A}$*, em relação a multiplicação satisfaz aos seguintes axiomas:*

*(M1) Associatividade*

*se* $a, b, c \in \mathbb{A}$*, então* $a(bc) = (ab)c$*;*

*(M2) A multiplicação é distributiva em relação à adição*

*se* $a, b, c \in \mathbb{A}$*, então* $a(b + c) = ab + ac$ *e* $(a + b)c = ac + bc$*.*

**Definição 1.25.** *Seja* $\mathbb{A}$ *um anel. Se a multiplicação de* $\mathbb{A}$ *goza da propriedade comutativa, isto é:*

*(M3) Comutatividade*

*se* $a, b \in \mathbb{A}$*, então* $ab = ba$*,*

*neste caso se diz que* $\mathbb{A}$ *é um anel comutativo ou abeliano.*

**Definição 1.26.** *Seja* $\mathbb{A}$ *um anel. Se* $\mathbb{A}$ *conta com elemento neutro para a multiplicação, isto é:*

*(M4) Existência de elemento neutro*

*Existe um elemento* $1_A \in A$*,* $1_A \neq 0_A$*, tal que* $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$*, qualquer que seja* $a \in \mathbb{A}$*,*

*então se diz que* $1_A$ *é a unidade de* $\mathbb{A}$ *e que* $\mathbb{A}$ *é um anel com unidade.*

**Definição 1.27.** *Um anel cuja multiplicação é comutativa e que possui unidade chama-se anel comutativo com unidade.*

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, possui estrutura de Anel, pois satisfaz todas as propriedades da Definição 1.24. Pelo fato de também satisfazer a Definição 1.27, trata-se de um Anel Comutativo com Unidade, como segue:

**Proposição 1.28.** *(*$\mathbb{Q}$*, +, ·) é um Anel Comutativo com Unidade.*

*Demonstração.* Sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$ com r $= \frac{a}{b}$, s $= \frac{c}{d}$ e t $= \frac{e}{f}$.

(i) $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo abeliano;

(ii) Em relação a multiplicação, o conjunto $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

**(Verificação de M1)** a operação $(\cdot)$ é associativa:

$$\begin{aligned}(r\cdot s)\cdot t &= (\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d})\cdot\frac{e}{f} = (\frac{ac}{bd})\cdot\frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}\\ &= \frac{a}{b}\cdot(\frac{ce}{df}) = \frac{a}{b}\cdot(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}) = r\cdot(s\cdot t).\end{aligned} \tag{1.5}$$

**(Verificação de M2)** a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\begin{aligned}r\cdot(s+t) &= \frac{a}{b}\cdot(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}) = \frac{a}{b}\cdot(\frac{cf+de}{df}) = \frac{a\cdot(cf+de)}{b\cdot(df)}\\ &= \frac{acf+ade}{bdf} = \frac{fac+dae}{dbf} = \frac{b}{b}\cdot\frac{fac+dae}{dbf} = \frac{b\cdot(fac+dae)}{b\cdot(dbf)}\\ &= \frac{bfac+bdae}{bdbf} = \frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f} = r\cdot s+r\cdot t.\end{aligned} \tag{1.6}$$

**(Verificação de M3)** a operação $(\cdot)$ é comutativa:

$$r\cdot s = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b} = s\cdot r. \tag{1.7}$$

**(Verificação de M4)** existe em $\mathbb{Q}$ um elemento neutro da multiplicação, isto é, um elemento $1_Q = 1$ tal que r $\cdot 1_Q$ = r, $\forall$ r $\in \mathbb{Q}$:

$$r\cdot 1_Q = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a\cdot 1}{b\cdot 1} = \frac{a}{b} = r. \tag{1.8}$$

□

**Definição 1.29.** *Um anel ($\mathbb{K}$, +, $\cdot$) comutativo com unidade recebe o nome de corpo se todo elemento não nulo de $\mathbb{K}$ admite simétrico multiplicativo, ou seja:*

$$\forall\ a\in\mathbb{K},\ a\neq 0 \Rightarrow \exists\ b\in\mathbb{K};\ a\cdot b = 1_A.$$

**Proposição 1.30.** *($\mathbb{Q}$, +, $\cdot$) é um corpo.*

*Demonstração.* De fato, no corpo algébrico $\mathbb{Q}$, é sempre possível dividir um elemento qualquer b por outro elemento a $\neq$ 0, já que a equação ax = b sempre tem solução x = b$\cdot a^{-1}$, onde $a^{-1} = \frac{1}{a}$ representa o simétrico multiplicativo de a, também chamado inverso de a. Podemos também escrever $\frac{b}{a}$ em vez de b$\cdot a^{-1}$. A operação (a, b) $\mapsto \frac{b}{a}$ chama-se divisão e o resultado $\frac{b}{a}$ é o quociente de b por a.

Além disso, no corpo $\mathbb{Q}$ não se pode dividir por zero, porque a equação 0 $\cdot$ x = b é impossível, se b $\neq$ 0 (pois 0 $\cdot$ x = 0; $\forall$ x $\in \mathbb{Q}$). □

Portanto, até aqui pudemos verificar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo. Mostraremos a seguir as propriedades decorrentes deste fato.

Para isto, utilizaremos as seguintes identificações. Sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$, r = $\frac{a}{b}$, s = $\frac{c}{d}$ e t = $\frac{e}{f}$.

**Propriedade 1.31.** O elemento neutro da adição é único.

*Demonstração.* Sejam 0 e $0^{'}$ dois elementos neutros da adição.

Então, se 0 é elemento neutro da adição, segue que $0^{'} = 0^{'} + 0 \overset{G4}{=} 0 + 0^{'}$. Logo, se $0^{'}$ também é elemento neutro da adição, $0 + 0^{'} = 0$.

Portanto, $0^{'} = 0$ e o elemento neutro da adição é único. □

**Propriedade 1.32.** O elemento neutro da multiplicação é único.

*Demonstração.* Sejam 1 e $1^{'}$ dois elementos neutros da multiplicação.

Então, se 1 é elemento neutro da multiplicação, segue que $1^{'} = 1^{'} \cdot 1 \overset{M3}{=} 1 \cdot 1^{'}$. Logo, se $1^{'}$ também é elemento neutro da multiplicação, $1 \cdot 1^{'} = 1$.

Portanto, $1^{'} = 1$ e o elemento neutro da multiplicação é único. □

**Propriedade 1.33.** Cada número racional possui um único elemento simétrico aditivo, também chamado oposto.

*Demonstração.* Sejam $\frac{-a}{b}$ e $\frac{-a^{'}}{b^{'}}$ opostos de um número racional $\frac{a}{b}$.

Temos que $\frac{-a}{b} \overset{G2}{=} 0 + (\frac{-a}{b}) \overset{G3}{=} (\frac{a}{b} + (\frac{-a^{'}}{b^{'}})) + (\frac{-a}{b}) \overset{G4}{=} (\frac{-a^{'}}{b^{'}} + \frac{a}{b}) + (\frac{-a}{b}) \overset{G1}{=} \frac{-a^{'}}{b^{'}} + (\frac{a}{b} + (\frac{-a}{b})) \overset{G3}{=} \frac{-a^{'}}{b^{'}} + 0 \overset{G2}{=} \frac{-a^{'}}{b^{'}}$.

Portanto, $\frac{-a}{b} = \frac{-a^{'}}{b^{'}}$ e cada número racional possui um único simétrico aditivo. □

**Propriedade 1.34.** Cada número racional diferente de zero possui um único elemento simétrico multiplicativo, também chamado inverso.

*Demonstração.* Sejam $\frac{b}{a}$ e $\frac{b^{'}}{a^{'}}$ dois elementos inversos de um número racional $\frac{a}{b} \neq 0$.

Temos que $\frac{b^{'}}{a^{'}} \overset{M4}{=} \frac{b^{'}}{a^{'}} \cdot 1 \overset{Def.1.29}{=} \frac{b^{'}}{a^{'}} \cdot (\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}) \overset{M1}{=} (\frac{b^{'}}{a^{'}} \cdot \frac{a}{b}) \cdot \frac{b}{a} \overset{M3}{=} (\frac{a}{b} \cdot \frac{b^{'}}{a^{'}}) \cdot \frac{b}{a} \overset{Def.1.29}{=} 1 \cdot \frac{b}{a} \overset{M4}{=} \frac{b}{a}$.

Portanto, $\frac{b}{a} = \frac{b^{'}}{a^{'}}$ e cada número racional diferente de zero possui um único simétrico multiplicativo. □

**Propriedade 1.35.** Qualquer que seja r $\in \mathbb{Q}$, -(-r) = r.

*Demonstração.* Já vimos que o oposto de $\frac{a}{b}$ é $\frac{-a}{b}$, portanto, $(\frac{-a}{b}) + \frac{a}{b} = 0$. Por outro lado, sabemos que o oposto de $(\frac{-a}{b})$ é $(\frac{-(-a)}{b})$, logo $(\frac{-a}{b}) + (\frac{-(-a)}{b})$ também é igual a 0. Sendo assim, como o elemento simétrico é único, $\frac{a}{b} = (\frac{-(-a)}{b})$. □

**Propriedade 1.36.** Qualquer que seja r $\in \mathbb{Q}$ - { 0 }, $\frac{1}{r^{-1}} = r$.

*Demonstração.* Já vimos que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$, portanto, $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$. Por outro lado, sabemos que o inverso de $\frac{b}{a}$ é $\frac{1}{\frac{b}{a}}$, logo $\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{b}{a}}$ também é igual a 1. Sendo assim, como o elemento inverso é único, $\frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$. □

**Propriedade 1.37.** Qualquer que seja r $\in \mathbb{Q}$, r $\cdot$ 0 = 0 $\cdot$ r = 0.

*Demonstração.* Temos que $0 \overset{G3}{=} \frac{a}{b}$ - $\frac{a}{b} \overset{M2}{=} \frac{a}{b}\cdot$ (1 - 1) $\overset{G3}{=} \frac{a}{b}\cdot$ 0.

Isto mostra que $\frac{a}{b}\cdot$ 0 = 0. De acordo com a comutatividade, segue-se que 0 $\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\cdot$ 0 = 0. □

**Propriedade 1.38.** Qualquer que seja r $\in \mathbb{Q}$, (-1)$\cdot$r = -r = r$\cdot$(-1).

*Demonstração.* De acordo com a Propriedade 1.37, $\frac{a}{b}$ + (-1)$\cdot\frac{a}{b}$ = 0 e como $\frac{a}{b}$ + $(\frac{-a}{b})$ também é igual a 0, da Propriedade 1.33 segue que (-1)$\cdot\frac{a}{b} = (\frac{-a}{b})$.

Pela comutatividade, segue que (-1) $\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\cdot$ (-1) = $(\frac{-a}{b})$. □

**Propriedade 1.39.** Quaisquer que sejam r, s $\in \mathbb{Q}$, -(r $\cdot$ s) = (-r) $\cdot$ s = r $\cdot$ (-s).

*Demonstração.* Para a primeira igualdade, temos que -$(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \overset{Prop.1.38}{=}$ (-1) $\cdot$ $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \overset{M1}{=}$ $((-1) \cdot\frac{a}{b}) \cdot\frac{c}{d} \overset{Prop.1.38}{=} (\frac{-a}{b}) \cdot\frac{c}{d}$.

Para a segunda igualdade, temos que -$(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \overset{Prop.1.38}{=}$ (-1) $\cdot$ $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \overset{M3}{=}$ (-1) $\cdot$ $(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b})$ $\overset{M1}{=}$ $((-1) \cdot\frac{c}{d}) \cdot\frac{a}{b} \overset{Prop.1.38}{=} (\frac{-c}{d}) \cdot\frac{a}{b} \overset{M3}{=} \frac{a}{b}\cdot (\frac{-c}{d})$. □

**Propriedade 1.40.** Quaisquer que sejam r, s $\in \mathbb{Q}$, (-r) $\cdot$ (-s) = r $\cdot$ s.

*Demonstração.* Temos que $(\frac{-a}{b}) \cdot (\frac{-c}{d}) \overset{Prop.1.39}{=}$ -$(\frac{a}{b}\cdot (\frac{-c}{d})) \overset{Prop.1.39}{=}$ -(-$(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d})) \overset{Prop.1.35}{=}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. □

**Propriedade 1.41.** Quaisquer que sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$, se r + t = s + t, então r = s e se r $\cdot$ t = s $\cdot$ t e t $\neq$ 0, então r = s.

*Demonstração.* Temos que $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Rightarrow (\frac{a}{b} + \frac{e}{f})$ - $\frac{e}{f} = (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ - $\frac{e}{f} \overset{G1}{\Rightarrow} \frac{a}{b}$ + $(\frac{e}{f}$ - $\frac{e}{f}) = \frac{c}{d}$ + $(\frac{e}{f}$ - $\frac{e}{f}) \overset{G3}{\Rightarrow} \frac{a}{b} + 0 = \frac{c}{d} + 0 \overset{G2}{\Rightarrow} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Se $\frac{e}{f} \neq 0$, então existe $(\frac{e}{f})^{-1} = \frac{f}{e}$. Logo $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \Rightarrow (\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}) \cdot\frac{f}{e} = (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) \cdot\frac{f}{e} \overset{M1}{\Rightarrow}$ $\frac{a}{b}\cdot (\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{e}) = \frac{c}{d}\cdot (\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{e}) \overset{Def.1.29}{=} \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{c}{d}\cdot 1 \overset{M4}{\Rightarrow} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. □

**Propriedade 1.42.** Quaisquer que sejam r, s $\in \mathbb{Q}$, r $\cdot$ s = 0 se, e somente se, r = 0 ou s = 0.

*Demonstração.* ($\Leftarrow$) Se $\frac{a}{b} = 0$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0 \cdot\frac{c}{d} = 0$ pela Propriedade 1.37. Se $\frac{c}{d} = 0$, então $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot 0 = 0$ pela Propriedade 1.37. Assim, se $\frac{a}{b} = 0$ ou $\frac{c}{d} = 0$, então $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = 0$.

($\Rightarrow$) Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tais que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = 0$. Se $\frac{a}{b} \neq 0$, então existe $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ e, portanto, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0 \overset{M3}{\Rightarrow} \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = 0 \Rightarrow \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 0 \cdot\frac{b}{a} \overset{Def.1.29}{\Rightarrow} \frac{c}{d}\cdot 1 = 0 \overset{M4}{=} \frac{c}{d} = 0$. □

**Propriedade 1.43.** Quaisquer que sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$, r $\cdot$ t = s $\cdot$ t se, e somente se, r = s ou t = 0.

*Demonstração.* ($\Leftarrow$) Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ pela Propriedade 1.41. Se $\frac{e}{f} = 0$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot 0 = 0$ e $\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot 0 = 0$ pela Propriedade 1.37 Logo, $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = 0 = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$. ($\Rightarrow$) Se $\frac{e}{f} \neq 0$, então pela Propriedade 1.41, se $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e, assim, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{e}{f} = 0$. □

A partir de agora, se considerarmos em $\mathbb{Q}$ um subconjunto $\mathbb{Q}^+$, denominado conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{Q}$, será possível mostrar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ munido com as operações usuais de adição e multiplicação é exemplo de um corpo ordenado.

**Definição 1.44.** *Um corpo ($\mathbb{K}$, +, ·) é ordenado se nele está contido um subconjunto próprio $\mathbb{P} \subset \mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, que satisfaz as seguintes condições:*

*($P_1$) Dados x, y $\in \mathbb{P}$, tem-se: x + y $\in \mathbb{P}$ e x · y $\in \mathbb{P}$, ou seja, $\mathbb{P}$ é fechado em relação a adição e a multiplicação;*

*($P_2$) Dados x $\in \mathbb{K}$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou x = 0 ou x $\in \mathbb{P}$ ou -x $\in \mathbb{P}$, sendo que 0 é o elemento neutro da adição.*

**Proposição 1.45.** *($\mathbb{Q}$, +, ·) é um corpo ordenado.*

*Demonstração.* Considere o subconjunto dos números racionais positivos denotado por $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b}; \text{ a, b} \in \mathbb{N}\}$. Para provar que ($\mathbb{Q}$, +, ·) é um corpo ordenado deve-se verificar as propriedades dadas na Definição 1.44. Para isso considere dois elementos quaisquer r, s $\in \mathbb{Q}^+$, ou seja, r = $\frac{a}{b}$ e s = $\frac{c}{d}$ com a, b, c e d $\in \mathbb{N}$.

($P_1$) Tem-se que r + s = $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$. Como (a · d + c · b), b · d $\in \mathbb{N}$ então r + s $\in \mathbb{Q}^+$. Já para o produto r · s temos que r · s = $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Como a · c, b · d $\in \mathbb{N}$ então r · s $\in \mathbb{Q}^+$. Logo $\mathbb{Q}^+$ é fechado com relação a adição e a multiplicação.

($P_2$) Sejam $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, segue-se que a, b $\in \mathbb{Z}$, com b $\neq 0$. Então, tem-se três possibilidades: a · b = 0, a · b > 0 ou a · b < 0. No primeiro caso, a = 0. Logo, $\frac{a}{b} = 0$, visto que b $\neq 0$. Já o segundo caso torna $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ e no terceiro caso, -$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$.

□

**Definição 1.46.** *Sejam a e b elementos de um corpo ordenado ($\mathbb{K}$, +, ·) e $\mathbb{P} \subset \mathbb{K}$ é um subconjunto que satisfaz as propriedades da Definição 1.44. Diz-se que a "é menor*

*do que"b e denota-se por $a < b$ quando, b - a $\in \mathbb{P}$. Diz-se que a "é maior do que"b e denota-se por $a > b$, quando a - b $\in \mathbb{P}$.*

*De acordo com a Definição 1.15, as relações $a < b$ e $a > b$ são as relações de ordem em ($\mathbb{K}$, +, ·).*

Portanto, até aqui pudemos verificar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo ordenado. Mostraremos a seguir as propriedades decorrentes deste fato.

Para isto, utilizaremos as seguintes identificações. Sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$, r = $\frac{a}{b}$, s = $\frac{c}{d}$ e t = $\frac{e}{f}$.

**Propriedade 1.47.** Quaisquer que sejam r, s, t $\in \mathbb{Q}$, r $\leq$ s se, e somente se, r + t $\leq$ s + t

*Demonstração.* Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq 0 \\
&\overset{G2}{\Leftrightarrow} \frac{c}{d} + 0 - \frac{a}{b} \geq 0 \\
&\overset{G3}{\Leftrightarrow} \frac{c}{d} + (\frac{e}{f} - \frac{e}{f}) - \frac{a}{b} \geq 0 \\
&\overset{G1}{\Leftrightarrow} (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) - (\frac{e}{f} + \frac{a}{b}) \geq 0 \\
&\overset{G4}{\Leftrightarrow} (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) - (\frac{a}{b} + \frac{e}{f}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

□

**Propriedade 1.48.** Quaisquer que sejam r, s $\in \mathbb{Q}$, qualquer que seja t $\geq$ 0, r $\leq$ s se, e somente se, r · t $\leq$ s · t

*Demonstração.* Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{e}{f} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{e}{f} \geq 0 \\
&\overset{P2}{\Leftrightarrow} (\frac{c}{d} - \frac{a}{b}) \cdot \frac{e}{f} \geq 0 \\
&\overset{M2}{\Leftrightarrow} \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

□

**Propriedade 1.49.** Quaisquer que sejam r, s $\in \mathbb{Q}$, qualquer que seja t $\leq$ 0, se r < s então r · t > s · t

*Demonstração.* Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{e}{f} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{e}{f} \leq 0 \\
&\overset{P2}{\Leftrightarrow} \quad (\frac{c}{d} - \frac{a}{b}) \cdot \frac{-e}{f} > 0 \\
&\overset{M2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{c}{d} \cdot \frac{-e}{f} + (\frac{-a}{b}) \cdot \frac{-e}{f} > 0 \\
&\overset{Prop.1.38}{\Leftrightarrow} \quad -(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) + (\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}) > 0 \\
&\overset{G4}{\Leftrightarrow} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} - \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

□

**Propriedade 1.50.** Se r > 0 e s > 0, então rs > 0

*Demonstração.* Suponhamos b > 0 e d > 0. Então, $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ a > 0 e $\frac{c}{d} > 0 \Leftrightarrow$ c > 0. Sendo assim, ac > 0, logo $\frac{ac}{bd} > 0$.

A demonstração para b < 0 e d < 0 é análoga. □

**Propriedade 1.51.** Se r > 0 e s < 0, então rs < 0

*Demonstração.* Suponhamos b > 0 e d > 0. Então, $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ a > 0 e $\frac{c}{d} < 0 \Leftrightarrow$ c < 0. Sendo assim, ac < 0, logo $\frac{ac}{bd} < 0$.

A demonstração para b < 0 e d < 0 é análoga. □

**Propriedade 1.52.** Se r < 0 e s < 0, então rs > 0

*Demonstração.* Suponhamos b > 0 e d> 0. Então, $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow$ a < 0 e $\frac{c}{d} < 0 \Leftrightarrow$ c < 0. Sendo assim, ac > 0, logo $\frac{ac}{bd} > 0$.

A demonstração para b < 0 e d < 0 é análoga. □

**Propriedade 1.53.** Se r > 0, então $r^{-1} > 0$

*Demonstração.* Suponhamos b > 0. Então, $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow$ a > 0. Sendo assim, $\frac{b}{a} > 0$, isto é, $r^{-1} > 0$.

A demonstração para b < 0 é análoga. □

**Propriedade 1.54.** Se r < s, então r < $\frac{r+s}{2}$ < s

*Demonstração.* Se r < s, temos que, 2r < r + s e r + s < 2s, daí, 2r < r + s < 2s e assim,

$$2 \cdot \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 2 \cdot \frac{c}{s} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d},$$

isto é, r < $\frac{r+s}{2}$ < s. □

Podemos ainda estabelecer uma propriedade adicional do corpo $\mathbb{Q}$, denominada propriedade arquimediana.

**Definição 1.55.** *Seja ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) um corpo ordenado e $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$. $\mathbb{A}$ é limitado superiormente se existe um $c \in \mathbb{K}$ tal que $x \leqslant c$, para todo $x \in \mathbb{A}$, nesse caso $c$ é denominado cota superior de $\mathbb{A}$. Se existir, a menor das cotas superiores de um conjunto $\mathbb{A}$ limitado superiormente é denominada supremo do conjunto $\mathbb{A}$, denotado por sup($\mathbb{A}$).*

**Definição 1.56.** *Seja ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) um corpo ordenado e $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$. $\mathbb{A}$ é limitado inferiormente se existe um $c \in \mathbb{K}$ tal que $x \geqslant c$, para todo $x \in \mathbb{A}$, nesse caso $c$ é denominado cota inferior do conjunto $\mathbb{A}$. Se existir, a maior das cotas inferiores de um conjunto $\mathbb{A}$ limitado inferiormente é denominada ínfimo do conjunto $\mathbb{A}$, denotado por inf($\mathbb{A}$).*

**Definição 1.57.** *Seja ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) um corpo ordenado e $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$. Quando $\mathbb{A}$ for limitado superiormente e inferiormente, diz-se que $\mathbb{A}$ é um conjunto limitado.*

**Teorema 1.58.** *Seja ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) um corpo ordenado infinito, tal que $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{N}$ Tem-se que as afirmações abaixo são equivalentes:*

*1) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{K}$.*

*2) Para quaisquer $a$, $b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n \cdot a$.*

*3) Para qualquer $a \in \mathbb{K}$, com $a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

*Demonstração.* (1) $\Rightarrow$ (2): como $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ não é limitado superiormente e $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado infinito, dados a, b $\in \mathbb{K}$, com a $> 0$, existem $a^{-1} \in \mathbb{K}$ e n $\in \mathbb{N}$ tais que:

$$a^{-1} \cdot \text{ a} = 1 \text{ e b} \cdot a^{-1} < \text{n} \Rightarrow \text{b} \cdot a^{-1} \cdot \text{ a} < \text{n} \cdot \text{a} \Rightarrow \text{b} < \text{n} \cdot \text{a}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): de (2) tem-se que dado um 1, a $\in \mathbb{K}$, com a $> 0$, existe um n $\in \mathbb{N}$ tal que 1 $<$ a $\cdot$ n. E ainda, como $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado infinito, existe $n^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $n^{-1} >$ 0 e n $\cdot n^{-1} = 1$. Então:

$$1 < \text{a} \cdot \text{n} \Rightarrow 1 \cdot n^{-1} < \text{a} \cdot \text{n} \cdot n^{-1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \text{a}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): de (3) tem-se que dado qualquer b $\in \mathbb{K}$, com b $> 0$, existe um n $\in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$. E ainda, como $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado infinito, segue-se que $\frac{1}{n} \cdot$ n $= 1$ e $\frac{1}{b} \cdot$ b $= 1$. Então:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \text{ n} \cdot \text{ b} < \frac{1}{b} \cdot \text{ n} \cdot \text{ b} \Rightarrow \text{b} < \text{n} \Rightarrow \text{n} > \text{b}.$$

Logo, nenhum elemento de $\mathbb{K}$ pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Então, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

**Definição 1.59.** *Se um corpo ordenado ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) satisfazer uma das propriedades do Teorema 1.58, diz-se que ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$) é um corpo Arquimediano.*

**Proposição 1.60.** *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano.*

*Demonstração.* De fato, para qualquer r = $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e r = $\frac{a}{b} > 0$, com a, b $\in \mathbb{N}$, existe n = b + 1 $\in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{b+1} < \frac{a}{b}$. Logo, decorre-se do item (3) Teorema 1.58 e da Definição 1.59 que $\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano. □

**Definição 1.61.** *Um corpo $\mathbb{K}$ é dito completo se todo o subconjunto não vazio $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$, que é limitado superiormente, possui supremo em K.*

**Definição 1.62.** *Seja ($\mathbb{K}$, +, ·) um corpo ordenado completo. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{K}$ é denso em $\mathbb{K}$ quando dados $a, b \in \mathbb{K}$ com $a < b$ existe $r \in A$ tal que $a < r < b$. Neste caso, escrevemos $\overline{A} = \mathbb{K}$.*

Podemos aqui perguntar se todo subconjunto limitado de números racionais possui supremo em $\mathbb{Q}$.

A resposta a esta pergunta é negativa. Existem subconjuntos limitados de números racionais cujo supremo não é um número racional, o que mostra que os números racionais são insuficientes em alguns casos. Por exemplo, não existe um racional p tal que $p^2 = 2$, como mostraremos a seguir.

**Lema 1.63.** *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $n^2$ é par, então n é par.*

*Demonstração.* Faremos por contrapositiva. Então, suponha n $\in \mathbb{Z}$ arbitrário e suponha n ímpar, isto é, n = 2k + 1, para algum k $\in \mathbb{Z}$. Então:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned} \tag{1.12}$$

ou seja, $n^2$ é ímpar.

Portanto, se $n^2$ é par, então n é par. □

**Proposição 1.64.** *Não existe um número racional p tal que $p^2 = 2$.*

*Demonstração.* Suponhamos que existe p $\in \mathbb{Q}$ tal que $p^2 = 2$. Então podemos escrever p = $\frac{m}{n}$, sendo que os inteiros m e n não são ambos pares, isto é, $\frac{m}{n}$ é irredutível.

Temos,

$$p^2 = (\frac{m}{n})^2 = 2$$

ou,

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

ou, ainda, $m^2 = 2n^2$.

Concluímos que $m^2$ é par e, consequentemente, de acordo com o Lema 1.63, m é par. Podemos escrever, então, m = 2r, onde r é um inteiro.

Elevando ao quadrado, temos,

$$m^2 = 4r^2$$

ou,

$$2n^2 = 4r^2, \text{ já que } m^2 = 2n^2.$$

Simplificando, vem

$$n^2 = 2r^2,$$

de onde concluímos que $n^2$ é par e, consequentemente, n é par.

Chegamos, dessa forma, a uma contradição, pois m e n não são ambos pares. □

**Proposição 1.65.** *Sejam*

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tais que } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$
$$\mathbb{Y} = \{y \in \mathbb{Q} \text{ tais que } y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$$

*Não existe sup* $\mathbb{X}$ *em* $\mathbb{Q}$ *e não existe inf* $\mathbb{Y}$ *em* $\mathbb{Q}$.

*Demonstração.* Vamos fazer esta demonstração em etapas.

$1^a$ **etapa** O conjunto $\mathbb{X}$ não possui elemento máximo.

Seja x um elemento qualquer de $\mathbb{X}$. Vamos mostrar que existe em $\mathbb{X}$ um outro elemento maior que x. Consideremos o número racional:

$$\frac{2 - x^2}{2x + 1}.$$

Como x $\in \mathbb{X}$ , 2 - $x^2 > 0$ e x > 0. Portanto 2x + 1 > 0 e, dessa forma, $\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$.

Tomamos um número r $\in \mathbb{Q}$ tal que r < 1 e $0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$. A existência desse número racional r é garantida pelo Teorema 1.58.

Provemos que x + r $\in \mathbb{X}$.

Temos, (x + r) > 0. Além disso,

$$0 < r < 1 \Rightarrow r^2 < r; \tag{1.13}$$

$$0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1} \Rightarrow r(2x + 1) < 2 - x^2. \tag{1.14}$$

Segue de 1.13 e 1.14 que:

$$\begin{aligned}(x+r)^2 &= x^2+2rx+r^2 < x^2+2rx+r \\ &= x^2+r(2x+1) < x^2+2-x^2=2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Portanto, $(x+r)^2 < 2$ e, dessa forma, x + r $\in \mathbb{X}$.
Concluímos que $\mathbb{X}$ não possui elemento máximo.

$2^a$ **etapa** O conjunto $\mathbb{Y}$ não possui elemento mínimo.

Seja y $\in \mathbb{Y}$. Vamos mostrar que existe em $\mathbb{Y}$ outro elemento menor que y. Consideremos o número racional

$$\frac{y^2-2}{2y}.$$

Como y $\in \mathbb{Y}$, $y^2 > 2$ e y $> 0$. Portanto, $y^2$ - 2 $> 0$ e 2y $> 0$ e, assim, $\frac{y^2-2}{2y} > 0$.
Tomamos um número r $\in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < \text{r} < \frac{y^2-2}{2y}.$$

Temos que 2ry $< y^2$ - 2 ou -2ry $> 2$ - $y^2$.
Utilizando esse resultado, vem:

$$\begin{aligned}(y-r)^2 &= y^2-2ry+r^2 \\ &> y^2-2ry \\ &> y^2+2-y^2 \\ &= 2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Logo, $(y-r)^2 > 2$.
Para concluirmos que (y - r) $\in \mathbb{Y}$, falta verificarmos, ainda, se (y - r) $> 0$.
Como $0 < \text{r} < \frac{y^2-2}{2y}$, temos que

$$\text{r} < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}.$$

Como y $> 0$, segue que $\text{r} < \frac{y}{2} <$ y e, portanto, (y - r) $> 0$.
Concluímos que (y - r) $\in \mathbb{Y}$ e, dessa forma, $\mathbb{Y}$ não possui elemento mínimo.

$3^a$ **etapa** Se x $\in \mathbb{X}$ e y $\in \mathbb{Y}$, então x $<$ y.

Sejam x $\in \mathbb{X}$ e y $\in \mathbb{Y}$. Temos,

$$\begin{cases} x > 0 \quad \text{e} \quad 0 < x^2 < 2, \\ y > 0 \qquad \text{e} \quad y^2 > 2. \end{cases}$$

Portanto, $0 < x^2 < 2 < y^2$ ou $0 < x^2 < y^2$. Como x $> 0$ e y $> 0$, segue que x $<$ y.
De fato, se x $\geq$ y, então $x^2 \geq$ xy e yx $\geq y^2$, logo $x^2 \geq y^2$, absurdo.

$4^a$ **etapa** sup $\mathbb{X} \notin \mathbb{Q}$

Vamos utilizar os resultados obtidos nas três etapas anteriores.
Suponhamos que existe b = sup $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Q}$. Então:

(i) b $> 0$, pois 1 não é cota superior.

(ii) b não satisfaz $b^2 < 2$.
De fato, como $\mathbb{X}$ não tem elemento máximo, como provamos na $1^a$ etapa, b $\notin \mathbb{X}$.

(iii) b não satisfaz $b^2 > 2$.
De fato, vamos supor que $b^2 > 2$. Temos então que b $\in \mathbb{Y}$. Utilizando a $2^a$ etapa, segue que existe a $\in \mathbb{Y}$ tal que a $<$ b ($\mathbb{Y}$ não tem elemento mínimo).
Pelo resultado obtido na $3^a$ etapa, concluímos que para todo x $\in \mathbb{X}$, x $<$ a $<$ b.
Portanto, b não é a menor cota superior de $\mathbb{X}$, ou seja, b não é o supremo de $\mathbb{X}$, o que é uma contradição.
De (ii) e (iii) temos que:
Se existir b = sup $\mathbb{X}$, então $b^2 = 2$.
Sabemos que não existe b $\in \mathbb{Q}$ tal que $b^2 = 2$.
Logo, não existe sup $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Q}$. □

Verifica-se, portanto, que existem conjuntos limitados superiormente de números racionais que não possuem supremo em $\mathbb{Q}$, isto é, $\mathbb{Q}$ não é completo.

A existência de um corpo ordenado completo pode ser verificada por meio da expansão dos números racionais para os números reais, podendo ser feita de várias maneiras, como por exemplo, construindo os números reais através do processo de cortes de Dedekind, como veremos no próximo capítulo, ou das sequências de Cauchy.

Apesar da construção de $\mathbb{R}$ através das sequências de Cauchy, devida a G. Cantor, ser completamente diferente do processo de cortes de Dedekind, na Seção 2.3 mostraremos que as várias maneiras de como caracterizar o que distingue os racionais dos reais são todas equivalentes num corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$ e também exibiremos um resultado que mostra que todos os corpos ordenados completos são isomorfos.

# 2 Construção do Corpo $\mathbb{R}$

## 2.1 Cortes de Dedekind

Como visto anteriormente, o conjunto dos números racionais possui certas lacunas. Nesta seção, objetiva-se construir um corpo ordenado completo, contendo o conjunto dos números racionais. Para tal, utilizaremos a teoria do corte no conjunto dos números racionais proposta em 1872 pelo matemático alemão chamado Julius Wilhelm Richard Dedekind.

Antes, porém, iniciaremos apresentando a Propriedade do Supremo que será o nosso objetivo nesta construção.

**Propriedade 2.1.** Existe um corpo ordenado $\mathbb{K}$, tal que todo subconjunto $\mathbb{A}$ de $\mathbb{K}$ limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{K}$.

Esta propriedade garante a completeza do corpo dos reais e tem consequências muito importantes, em um sentido que será esclarecido oportunamente. Além disso, veremos que tal corpo é determinado de maneira única.

Passemos as definições, que podem ser consultadas na referência [12] da bibliografia.

**Definição 2.2.** *Diz-se que um conjunto $\alpha$ de números racionais é um corte se:*

*(i)* *$\alpha$ contém pelo menos um racional, mas não todos os racionais;*

*(ii)* *se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, e $q < p$, então $q \in \alpha$;*

*(iii)* *em $\alpha$ não existe racional máximo.*

Importante ressaltar que utilizaremos p, q, r, ... para representar os racionais, já os cortes serão representados por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ....

**Exemplo 2.3.** O conjunto $\alpha = \{p \in \mathbb{Q};\ p < 1\}$ é um corte:

(i) $\alpha \neq \varnothing$, pois $0 \in \alpha$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$, pois $1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \notin \alpha$;

(ii) Seja $r \in \alpha$ e $s < r$, assim, $s < r < 1$, logo $s < 1$, isto é, $s \in \alpha$;

(iii) Suponhamos que exista um racional m que seja máximo em $\alpha$. Sendo assim, r $\leq$ m para todo r $\in \alpha$. Sabemos que m $< 1$, portanto, pela Proposição 1.54, m $< (\frac{m+1}{2}) < 1$, absurdo. Logo, $\alpha$ não possui máximo.

Portanto, $\alpha$ é um corte.

**Teorema 2.4.** *Sejam p, q* $\in \mathbb{Q}$. *Se p* $\in \alpha$ *e q* $\notin \alpha$, *então p* $< q$.

*Demonstração.* Se p $\in \alpha$ e q $\leqslant$ p, conclui-se de (ii) que q $\in \alpha$. □

Em razão deste teorema, os racionais que não estão em $\alpha$ são chamados cotas superiores de $\alpha$.

Como visto na Proposição 1.65, subconjuntos limitados superiormente em $\mathbb{Q}$ nem sempre tem cota superior mínima. Entretanto, ela existe para alguns desses subconjuntos, que nesta seção chamamos de cortes racionais.

**Teorema 2.5.** *Seja r um número racional e* $\alpha$ *o conjunto constituído de todos os racionais p tais que p* $< r$. *Então* $\alpha$ *é um corte e r é a menor cota superior deste conjunto, isto é o supremo de* $\alpha$.

*Demonstração.* De imediato verificamos que $\alpha$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.2. Quanto a (iii), basta observar que qualquer que seja p $\in \alpha$

$$p < \frac{p+r}{2} < r, \tag{2.1}$$

e, portanto, $\frac{p+r}{2} \in \alpha$.

Segue de (2.1) que r $\notin \alpha$, pois caso contrário, se p = r teríamos r $<$ r, absurdo.

Assim, r é cota superior de $\alpha$. Além disso, segue de (2.1) que nenhum p $<$ r pode ser cota superior.

Portanto, r é a menor cota superior. □

**Definição 2.6.** *O corte definido no Teorema 2.4 é um corte que chamamos de racional. Quando queremos indicar que um corte* $\alpha$ *é um corte racional cujo supremo é r, escrevemos* $\alpha = r^*$. *Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*

**Definição 2.7.** *Seja o conjunto* $\mathbb{Q}^* = \{r^*;\ r \in \mathbb{Q}\}$. *Os elementos de* $\mathbb{Q}^*$ *são os cortes racionais.*

**Definição 2.8.** *Sejam* $\alpha$, $\beta$ *cortes. Escrevemos* $\alpha = \beta$ *se de p* $\in \alpha$ *resulta p* $\in \beta$ *e de q* $\in \beta$ *resulta q* $\in \alpha$, *isto é, se os dois conjuntos são idênticos. Em caso contrário, escrevemos* $\alpha \neq \beta$.

Com isso, introduziremos agora uma relação de ordem no conjunto dos cortes.

**Definição 2.9.** *Sejam $\alpha$ e $\beta$ cortes. Escrevemos $\alpha < \beta$ (ou $\beta > \alpha$) se existe um racional $p$ tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.*

$$\alpha \leq \beta \text{ significa } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha < \beta.$$
$$\alpha \geqslant \beta \text{ significa } \beta \leqslant \alpha.$$

*Se define também $0^*$ como o conjunto de todos os números racionais negativos. E, imediatamente, verificamos que $0^*$ é um corte.*

*Se $\alpha > 0^*$, dizemos que $\alpha$ é positivo; se $\alpha \geqslant 0^*$, dizemos que $\alpha$ não é negativo. Analogamente, se $\alpha < 0^*$, $\alpha$ é negativo, e não é positivo se $\alpha \leqslant 0^*$.*

**Teorema 2.10.** *Sejam $\alpha, \beta$ cortes. Então $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.*

*Demonstração.* As Definições 2.8 e 2.9 mostram claramente que, se $\alpha = \beta$, nenhuma das outras duas relações é válida. Para mostrar que $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ se excluem mutuamente, suponhamos que ambas as relações sejam válidas. Como $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que

$$\text{p} \in \beta, \text{ p} \notin \alpha.$$

Como $\beta < \alpha$, existe um racional q tal que

$$\text{q} \in \alpha, \text{ q} \notin \beta,$$

Pelo Teorema 2.1, de $\text{p} \in \beta$ e $\text{q} \notin \beta$ resulta $\text{p} < \text{q}$, enquanto de $\text{q} \in \alpha$ e $\text{p} \notin \alpha$ resulta $\text{q} < \text{p}$. Isto é uma contradição, pois $\text{p} < \text{q}$ e $\text{q} < \text{p}$ é impossível para racionais. Até aqui provamos que, no máximo, uma das três relações é válida. Suponhamos, agora, $\alpha \neq \beta$. Então os dois conjuntos não são idênticos, isto é, ou existe um racional p em $\alpha$ mas não em $\beta$ e, neste caso, $\beta < \alpha$ ou existe um racional q em $\beta$, mas não em $\alpha$, e, portanto, $\alpha < \beta$. □

**Teorema 2.11.** *Sejam $\alpha, \beta, \gamma$ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*

*Demonstração.* Como $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que

$$\text{p} \in \beta, \text{ p} \notin \alpha.$$

Como $\beta < \gamma$, existe um racional q tal que

$$\text{q} \in \gamma, \text{ q} \notin \beta.$$

Ora, se $\text{p} \in \beta$ e $\text{q} \notin \beta$ então $\text{p} < \text{q}$; donde, concluímos, por ser $\text{p} \notin \alpha$, que $\text{q} \notin \alpha$. Temos, pois,

$$\text{q} \in \gamma, \text{ q} \notin \alpha,$$

o que significa que $\alpha < \gamma$. □

Com base nos teoremas vistos acima, de acordo com as Definições 1.12, 1.14 e 1.15, fica evidente que o conjunto dos cortes possui uma relação de ordem.

Passemos, agora, à definição de uma aritmética no conjunto dos cortes.

**Teorema 2.12.** *Sejam $\alpha, \beta$ cortes . Seja $\gamma$ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então $\gamma$ é um corte.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $\gamma$ satisfaz as três condições da Definição 2.2.

(i) É claro que $\gamma$ não é vazio. Consideremos s $\notin \alpha$, t $\notin \beta$, sendo s e t racionais. Portanto s + t > p + q, para todo p $\in \alpha$ e todo q $\in \beta$, de modo que s + t $\notin \gamma$. Por conseguinte, $\gamma$ não contém todos os racionais.

(ii) Suponhamos r $\in \gamma$, s < r, sendo s racional. Logo r = p + q, com p $\in \alpha$ e q $\in \beta$. Seja t, racional, tal que s = t + q. Conclui-se que t < p; donde, t $\in \alpha$ e, consequentemente, s $\in \gamma$.

(iii) Suponhamos r $\in \gamma$. Logo r = p + q, com p $\in \alpha$ e q $\in \beta$. Existe um racional s > p tal que s $\in \alpha$. Portanto s + q $\in \gamma$ e s + q > r, de modo que r não é o maior racional em $\gamma$.

□

**Definição 2.13.** *Designamos por $\alpha + \beta$ e chamamos soma de $\alpha$ e $\beta$ o corte $\gamma$ do Teorema 2.12.*

**Teorema 2.14.** *Sejam $\alpha, \beta, \gamma$ cortes. Então,*

*(a)* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

*(b)* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

*(c)* $\alpha + 0^* = \alpha$.

*Demonstração.* Na definição de $\alpha + \beta$, consideramos o conjunto de todos os racionais da forma p + q (p $\in \alpha$, q $\in \beta$). Na definição de $\beta + \alpha$, consideramos q + p, em vez de p + q. Pela lei comutativa da adição de racionais, $\alpha + \beta$ e $\beta + \alpha$ são cortes idênticos, o que prova (a).

Analogamente, da lei associativa da adição de racionais resulta (b).

Para demonstrar (c), seja r $\in \alpha + 0^*$. Logo r = p + q com p $\in \alpha$ e q $\in 0^*$ (isto é, q < 0). Portanto p + q < p, de modo que p + q $\in \alpha$ e r $\in \alpha$.

A seguir, suponhamos r $\in \alpha$. Consideremos s > r, s racional tal que s $\in \alpha$. Seja q = r - s. Logo q < 0, q $\in 0^*$ e r = s + q, de modo que r $\in \alpha + 0^*$.

Assim, os cortes $\alpha + 0^*$ e $\alpha$ são idênticos. □

**Teorema 2.15.** *Seja $\alpha$ um corte e r > 0 um racional dado. Existem racionais p, q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é o supremo de $\alpha$ e q - p = r.*

*Demonstração.* Consideremos um racional s $\in \alpha$. Para n = 0, 1, 2, ... seja $s_n$ = s + nr. Então existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$. Se $s_{m+1}$ não for o supremo de $\alpha$, consideremos p = $s_m$, q = $s_{m+1}$.

Se $s_{m+1}$ for o supremo de $\alpha$, consideremos

$$\mathrm{p} = s_m + \frac{r}{2},\ \mathrm{q} = s_{m+1} + \frac{r}{2}.$$

□

**Teorema 2.16.** *Seja $\alpha$ um corte. Existe um único corte $\beta$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

*Demonstração.* Mostremos primeiro a unicidade. Se $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$, conclui-se do Teorema 2.14 que

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1.$$

Para demonstrar a existência do corte, seja $\beta$ o conjunto de todos os racionais p tais que -p é cota superior de $\alpha$, mas não o supremo. Temos que verificar se este conjunto $\beta$ satisfaz as três condições da Definição 2.2.

(i) $\beta \neq \varnothing$, pois p $\in \beta$ e $\beta \neq \mathbb{Q}$, pois -p $\in \mathbb{Q}$ e -p $\notin \beta$;

(ii) Se p $\in \beta$ e q $<$ p (q racional), então - p $\notin \alpha$ e -q $>$ -p, de modo que -q é cota superior de $\alpha$, mas não o supremo. Portanto q $\in \beta$.

(iii) Se p $\in \beta$, -p é cota superior de $\alpha$, mas não supremo, de modo que existe um racional q tal que -q $<$ -p e -q $\notin \alpha$. Seja

$$\mathrm{r} = \frac{p+q}{2}.$$

Logo -q $<$ -r $<$ -p, de modo que -r é cota superior de $\alpha$, mas não o supremo. Portanto, encontramos um racional r $>$ p tal que r $\in \beta$.

Tendo provado que $\beta$ é um corte, temos agora que verificar se $\alpha + \beta = 0^*$.
Suponhamos p $\in \alpha + \beta$. Logo p = q + r, com q $\in \alpha$ e r $\in \beta$. Portanto, -r $\notin \alpha$, -r $>$ q, q + r $< 0$ e p $\in 0^*$.
Suponhamos p $\in 0^*$. Portanto, p $< 0$. Pelo Teorema 2.15, podemos determinar racionais q $\in \alpha$, r $\notin \alpha$ (e tal que r não seja o supremo de $\alpha$), de modo que r - q = -p. Como -r $\in \beta$, temos

$$\mathrm{p} = \mathrm{q} - \mathrm{r} = \mathrm{q} + (-\mathrm{r}) \in \alpha + \beta,$$

o que completa a demonstração. □

**Definição 2.17.** *Designamos por $-\alpha$ o corte $\beta$ do Teorema 2.16.*

**Teorema 2.18.** *Quaisquer que sejam os cortes $\alpha, \beta, \gamma$, com $\beta < \gamma$ temos $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$. Em particular, (para $\beta = 0^*$) temos $\alpha + \gamma > 0^*$, se $\alpha > 0^*$ e $\gamma > 0^*$.*

*Demonstração.* Pelas Definições 2.9 e 2.13, $\alpha + \beta \leqslant \alpha + \gamma$. Se

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma,$$

então,

$$\beta = 0^* + \beta = (\text{-}\alpha) + (\alpha + \beta) = (\text{-}\alpha) + (\alpha + \gamma) = 0^* + \gamma = \gamma,$$

pelo Teorema 2.14. □

**Teorema 2.19.** *Sejam $\alpha, \beta$ cortes. Existe um único corte $\gamma$ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.*

*Demonstração.* O fato de existir no máximo um $\gamma$ nas condições enunciadas decorre de $\gamma_1 \neq \gamma_2$ importar em $\alpha + \gamma_1 \neq \alpha + \gamma_2$ (Teorema 2.18).

Seja $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Pelo Teorema 2.14, temos

$$\alpha + \gamma = \alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0^* + \beta = \beta.$$

□

**Definição 2.20.** *Designamos por $\beta - \alpha$ o corte $\gamma$ do Teorema 2.19. Isto é, escrevemos $\beta - \alpha$, em vez de $\beta + (-\alpha)$.*

Como visto na seção anterior, nota-se através dos Teoremas 2.12, 2.14 e 2.19 que o conjunto dos cortes é um grupo comutativo em relação à adição.

A partir de agora, vamos definir a multiplicação no conjunto dos cortes e mostrar que se obtém um corpo. Mas, já que as demonstrações dos teoremas que enunciaremos são análogas àquelas que dizem respeito à adição e à subtração, vamos trata-las rapidamente, sem as demonstrações.

**Teorema 2.21.** *Sejam $\alpha, \beta$ cortes tais que $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$. Seja $\gamma$ o conjunto de todos os racionais negativos e de todos s racionais r tais que $r = pq$, em que $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$, $q \geq 0$. Então $\gamma$ é um corte.*

**Definição 2.22.** *Designamos por $\alpha\beta$ e chamamos produto de $\alpha$ e $\beta$ o corte $\gamma$ do Teorema 2.21.*

**Definição 2.23.** *A cada corte $\alpha$ associamos um corte $|\alpha|$, que chamamos valor absoluto de $\alpha$, definido por:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & se \quad \alpha \geq 0^*, \\ -\alpha, & se \quad \alpha < 0^*. \end{cases}$$

Vamos, agora, completar a definição de multiplicação.

**Definição 2.24.** *Sejam $\alpha, \beta$ cortes. Definimos*

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|) & se \quad \alpha < 0^*, \beta \geq 0^*, \\ -(|\alpha||\beta|) & se \quad \alpha \geq 0^*, \beta < 0^*, \\ |\alpha||\beta| & se \quad \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

**Teorema 2.25.** *Quaisquer que sejam os cortes $\alpha, \beta, \gamma$ temos:*

*(a)* $\alpha\beta = \beta\alpha$;

*(b)* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

*(c)* $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

*(d)* $\alpha 0^* = 0^*$;

*(e)* $\alpha\beta = 0^*$ *somente se* $\alpha = 0^* ou \beta = 0^*$;

*(f)* $\alpha 1^* = \alpha$;

*(g) Se* $0^* < \alpha < \beta e \gamma > 0^*$, *então* $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

**Teorema 2.26.** *Se* $\alpha \neq 0^*$, *para cada corte* $\beta$ *existe um único corte* $\gamma$ *(que designamos por* $\beta$ / $\alpha$*) tal que* $\alpha\gamma = \beta$.

Com isto, demonstramos que o conjunto dos cortes é um corpo ordenado. Finalizaremos esta seção com três teoremas sobre cortes racionais. A cada r $\in \mathbb{Q}$ associamos o conjunto $r^*$ que contém todos os p $\in \mathbb{Q}$ tais que p $<$ r. É evidente que cada $r^*$ é um corte.

**Teorema 2.27.** *Quaisquer que sejam os racionais p e q, temos:*

*(a)* $p^* + q^* = (p + q)^*$;

*(b)* $p^* q^* = (pq)^*$;

*(c)* $p^* < q^*$ *se, e somente se,* $p < q$.

*Demonstração.* Se r $\in p^* + q^*$, temos r = s + t, com s $<$ p, t $<$ q, de modo que r $<$ p + q. Portanto r $\in (p + q)^*$.

Se r $\in (p + q)^*$, então r $<$ p + q. Sejam

$$\text{h} = \text{p} + \text{q} - \text{r}, \ \text{s} = \text{p} - \frac{h}{2}, \ \text{t} = \text{q} - \frac{h}{2}.$$

Logo s $\in p^*$, t $\in q^*$ e r = s + t, de modo que r $\in p^* + q^*$, o que prova (a). A demonstração de (b) é análoga.

Se p $<$ q, então p $\in q^*$, mas p $\notin p^*$, de modo que $p^* < q^*$.

Se $p^* < q^*$, existe um racional r tal que r $\in q^*$, r $\notin p^*$. Portanto

$$\text{p} \leq \text{r} < \text{q},$$

de modo que p $<$ q. □

**Teorema 2.28.** *Se* $\alpha, \beta$ *são cortes e* $\alpha < \beta$, *existe um corte racional* $r^*$ *tal que* $\alpha < r^* < \beta$.

*Demonstração.* Se $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que p $\in \beta$, p $\notin \alpha$. Considerando o item (iii) da Definição 2.2, podemos escolher r > p de modo que r $\in \beta$.
Como r $\in \beta$ e r $\notin r^*$, temos $r^* < \beta$.
Como p $\in r^*$ e p $\notin \alpha$, temos $\alpha < r^*$. □

**Teorema 2.29.** *Qualquer que seja o corte $\alpha$, $p \in \alpha$ se, e somente se, $p^* < \alpha$.*

*Demonstração.* Qualquer que seja o racional p, p $\notin p^*$. Portanto $p^* < \alpha$, se p $\in \alpha$. Reciprocamente, se $p^* < \alpha$, existe um racional q tal que q $\in \alpha$ e q $\notin p^*$. Assim, q $\geq$ p, donde concluímos, por ser q $\in \alpha$, que p $\in \alpha$. □

Ao longo desta seção consideramos alguns subconjuntos do conjunto dos números racionais, que chamamos de cortes, e demonstramos que as operações da adição e da multiplicação, bem como a relação de ordem obtida através das operações dos números racionais são válidas para eles. Com isso, conclui-se que o conjunto de todos os cortes tornou-se um corpo ordenado.

Seja o conjunto $\mathcal{D} = \{\alpha;\ \alpha$ é um corte$\}$ munido das operações + e $\cdot$. Como acabamos de verificar, a terna $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado, vamos enunciar e demonstrar o teorema que diferirá o conjunto dos números racionais do conjunto dos números reais. Esse teorema é conhecido como Teorema de Dedekind.

**Teorema 2.30** (Dedekind)**.** *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ subconjuntos de $\mathcal{D}$ tais que:*

*(a)* $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathcal{D}$;

*(b)* $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing$;

*(c) nem $\mathbb{A}$ nem $\mathbb{B}$ é vazio;*

*(d) se $\alpha \in \mathbb{A}$ e $\beta \in \mathbb{B}$, temos $\alpha < \beta$.*

*Então, existe um, e somente um, corte $\gamma$, tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$, e $\gamma \leq \beta$, para todo $\beta \in \mathbb{B}$.*

*Demonstração.* Inicialmente provemos a unicidade. Suponhamos que existam dois cortes distintos $\gamma_1$ e $\gamma_2$, com $\gamma_1 < \gamma_2$ (ou $\gamma_2 < \gamma_1$, sem perda de generalidade) nas condições do enunciado. Consideremos $\gamma_3$ tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, que existe, como foi provado no Teorema 2.28. Temos que $\gamma_2 \leq \beta$, para todo $\beta \in \mathbb{B}$, dessa forma, se $\gamma_3 \in \mathbb{B}$, teríamos $\gamma_2 \leq \gamma_3$, o que não pode acontecer, pois $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, portanto, como $\mathcal{D} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, temos que $\gamma_3 \in \mathbb{A}$. Analogamente, de $\gamma_1 \leq \gamma_3$, obtemos $\gamma_3 \in \mathbb{B}$. Resulta então $\gamma_3 \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, uma contradição. Portanto não podemos ter $\gamma_1$ e $\gamma_2$ distintos nas condições do enunciado.

Provemos agora a existência. Seja $\gamma = \{$ r $\in \mathbb{Q}$ | r $\in \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{A}\}$. Devemos mostrar que $\gamma$ é um corte.

(i) Como $\mathbb{A} \neq \varnothing$, obviamente $\gamma \neq \varnothing$. Para mostrar que $\gamma \neq \mathbb{Q}$, tomemos $\beta \in \mathbb{B}$. Seja s $\in \beta$ um racional. Como $\alpha < \beta$, para todo $\alpha \in \mathbb{A}$, então, s $\notin \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{A}$, de onde resulta s $\notin \gamma$;

(ii) Seja r $\in \gamma$ e s $<$ r. Temos que r $\in \alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{A}$ e, como s $<$ r, então s $\in \alpha$, de onde segue que s $\in \gamma$;

(iii) Seja r $\in \gamma$, então r $\in \alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{A}$ e, como $\alpha$ é um corte, existe s $>$ r em $\alpha$, logo s $\in \gamma$;

Dessa forma, $\gamma$ é um corte e temos que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$, pois, pela definição de $\gamma$, sabemos que $\alpha \subset \gamma$, para todo $\alpha \in \mathbb{A}$.

Falta mostrar apenas que $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathbb{B}$. Suponhamos que exista $\beta \in \mathbb{B}$ com $\beta < \gamma$. Com isso, existe um racional r $\in \gamma$, tal que r $\notin \beta$. Como r $\in \gamma$, então r pertence a algum $\alpha \in \mathbb{A}$ e, não sendo elemento de $\beta$, obtemos $\beta < \alpha$, contradizendo a última hipótese do teorema. Logo, $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathbb{B}$. □

Como vimos ao longo desta seção, assim como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, o conjunto $\mathcal{D}$ possui uma estrutura de corpo ordenado. Já vimos que $\mathcal{D}$ é fechado em relação à soma e ao produto, sendo a soma, com seu neutro 0, e o produto, com sua unidade 1, associativos e comutativos, e o produto distributivo perante a soma. Vimos também que em $\mathcal{D}$ temos uma ordem total, compatível com as operações de soma e produto.

Além disso, acabamos de demonstrar que certos subconjuntos disjuntos de $\mathcal{D}$ possuem elemento separador, o que não ocorre em $\mathbb{Q}$, aonde existem conjuntos separados por um elemento não racional, como visto na Proposição 1.65. Agora, utilizaremos este fato para provar que o corpo ordenado $\mathcal{D}$ é completo.

**Corolário 2.31.** *$\mathcal{D}$ satisfaz a Definição 1.61 e portanto é o corpo citado na Propriedade 2.1.*

*Demonstração.* Sejam $C \subset \mathcal{D}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente e $S$ o conjunto das cotas superiores de $C$. Os conjuntos $\mathbb{B} = S$ e $\mathbb{A} = \mathbb{B}^c$, satisfazem as hipóteses do Teorema de Dedekind e o elemento $\gamma$ obtido no teorema é o supremo de $C$.

□

**Corolário 2.32.** *Como $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathcal{D}$, todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}^*$ admite supremo em $\mathcal{D}$.*

**Definição 2.33.** *Uma aplicação injetiva f: $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}$ que é um isomorfismo de $\mathbb{M}$ sobre uma imagem f($\mathbb{M}$) chama-se uma imersão.*

**Observação 2.34.** Examinando os cortes racionais, a substituição dos números racionais r pelos cortes $r^*$ correspondentes preservam somas, produtos e ordem (Teorema 2.27). Assim, é possível mostrar que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é isomorfo a $\mathbb{Q}^*$, via o isomorfismo $r \mapsto r^*$. Desta forma, existe uma imersão $\varphi$ de $\mathbb{Q}$ em $\mathcal{D}$.

**Assim, podemos postular a existência de um corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, que contém $\mathbb{Q}$**

Em $\mathbb{R}$, todo subconjunto limitado superiormente admite supremo. Dado um corte $\alpha$, temos que $\alpha \subset \mathbb{R}$ e é limitado superiormente, e portanto, existe $\sup \alpha$ em $\mathbb{R}$. Na verdade, podemos caracterizar completamente os elementos de $\mathbb{R}$, escrevendo-o da forma $\mathbb{R} = \{\sup \alpha; \alpha \in \mathcal{D}\}$.

De fato, no conjunto $\{\sup \alpha; \alpha \in \mathcal{D}\}$ podemos definir duas operações $+$ e $\cdot$, e uma relação de ordem $<$ (por simplicidade utilizamos a mesma notação das operações definidas em $\mathcal{D}$), induzidas das operações definidas em $\mathcal{D}$ da seguinte forma:

$$\sup \alpha + \sup \beta = \sup(\alpha + \beta);$$

$$\sup \alpha \cdot \sup \beta = \sup(\alpha \cdot \beta);$$

$$\sup \alpha < \sup \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Com tais operações, temos um isomorfismo $\alpha \mapsto \sup \alpha$, que nos permite verificar que $\{\sup \alpha; \alpha \in \mathcal{D}\}$ é também um corpo ordenado completo que contém $\mathbb{Q}$ (dado $r \in \mathbb{Q}$ temos $r^* \in \mathcal{D}$, $r = \sup r^*$ e portanto $r \in \{\sup \alpha; \alpha \in \mathcal{D}\}$).

**Definição 2.35.** *Devido à observação anterior, podemos definir* $\mathbb{R} = \{\sup \alpha; \alpha \in \mathcal{D}\}$.

No fechamento desta seção, apresentamos um resultado importante que garante que, a menos de isomorfismo, existe um único corpo ordenado e completo.

**Teorema 2.36.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Então existe um isomorfismo $\varphi$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ que preserva a relação de ordem entre os corpos, ou seja, uma bijeção que satisfaz as propriedades seguintes:*

*(i) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*

*(ii) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.*

*(iii) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, então $\varphi(x) < \varphi(y)$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5].

## 2.2 Os Números Reais e suas Propriedades

Na seção seguinte, veremos consequências importantes da Propriedade do Supremo. Por enquanto, mostraremos que uma das consequências fundamentais desta propriedade é que, assim como o conjunto dos números racionais, o corpo dos reais também é arquimediano.

**Proposição 2.37.** $\mathbb{R}$ *é arquimediano.*

*Demonstração.* Dado x $\in \mathbb{R}$ existe n $\in \mathbb{N}$ tal que x < n. De fato, suponhamos que n < x para todo n $\in \mathbb{N}$ então $\mathbb{N}$ é um conjunto limitado e portanto possui supremo. Seja c = sup $\mathbb{N}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que c - 1 < $n_0$ e daí temos que c < $n_0$ + 1 o qual contradiz o fato de c ser uma cota superior de $\mathbb{N}$. □

**Proposição 2.38.** $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*, isto é, se a, b* $\in \mathbb{R}$*, a < b então existe c* $\in \mathbb{Q}$ *tal que a < c < b.*

*Demonstração.* Por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, existe n $\in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{b-a}$ < n e portanto an + 1 < bn. Por outro lado, existe m $\in \mathbb{Z}$ tal que m - 1 ≤ an < m, portanto an < n ≤ an + 1 < bn de onde segue que a < $\frac{m}{n}$ < b. □

A propriedade abaixo, às vezes chamada "Princípio dos Intervalos Encaixados", é utilizado por alguns autores na definição dos números reais.

**Propriedade 2.39.** Seja $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$. A intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real x tal que x $\in I_n$, para todo n $\in \mathbb{N}$. Mais precisamente, teremos $\cap I_n$ = [a, b], sendo a = sup $a_n$ e b = inf $b_n$. Em particular quando temos $a = b$, a intesecção será um único ponto.

*Demonstração.* Para n $\in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Chamemos de $\mathbb{A}$ o conjunto dos $a_n$ e $\mathbb{B}$ o conjunto dos $b_n$. $\mathbb{A}$ é limitado: $a_1$ é uma cota inferior e cada $b_n$ é uma cota superior de $\mathbb{A}$. Por motivo semelhante, $\mathbb{B}$ é também limitado. Sejam a = sup $\mathbb{A}$ e b = inf $\mathbb{B}$. Como cada $b_n$ é cota superior de $\mathbb{A}$, temos a ≤ $b_n$ para cada n. Assim, a é cota inferior de $\mathbb{B}$ e, portanto, a ≤ b. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a \leq b \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos que a e b pertencem a todos os $I_n$, donde [a, b] $\subset I_n$ para cada n. Logo [a, b] $\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
Mais ainda, nenhum x < a pode pertencer a todos os intervalos $I_n$. Com efeito, sendo x < a = sup $\mathbb{A}$, existe algum $a_n \in \mathbb{A}$ tal que x < $a_n$, ou seja, x $\notin I_n$. Do mesmo modo, y > b ⇒ y > $b_m$ para algum m, donde y $\notin I_m$. Concluímos então que $\cap I_n$ = [a, b]. □

Utilizaremos o Princípio dos Intervalos Encaixados para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável.

**Teorema 2.40.** *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais não é enumerável.*

*Demonstração.* Dados um intervalo limitado, fechado I = [a, b], com a < b, e um número real $x_0 \in$ I, existe um intervalo fechado, limitado, J = [c, d], com c < d, tal que $x_0 \notin$ J e J $\subset$ I. Isto pode ser verificado facilmente. Utilizaremos este fato repetidamente para mostrar que, dado qualquer subconjunto enumerável X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, podemos encontrar um número real x $\notin$ X. Com efeito, sejam $I_1$ um intervalo limitado fechado e não degenerado, tal que $x_1 \notin I_1$, $I_2$ um intervalo do mesmo tipo com $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$ e assim indutivamente: supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ limitados fechados e não-degenerados, com $x_1 \notin I_1$ (1 $\leq$ i $\leq$ n), podemos obter $I_{n+1} \subset I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Isto nos fornece uma sequência decrescente $I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos limitados e fechados. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, existe um número real x que pertence a todos os $I_n$. Como $x_n \notin I_n$, segue-se que x não é nenhum dos $x_n$, e portanto nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais. □

No capítulo 1 vimos que no corpo $\mathbb{Q}$ não existe solução da equação $x^2 = 2$. Evidentemente, nossa preocupação agora é ver se $\mathbb{R}$ não continua tendo as lacunas de $\mathbb{Q}$, isto é, se existe solução real para a equação $x^2$ = b.

**Teorema 2.41.** *Seja $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, existe uma única solução real positiva da equação $x^2 = b$. Esta solução será denotada por $\sqrt{b}$.*

*Demonstração.* **Unicidade**: Suponha duas soluções positivas $x_1$ e $x_2$ de $x^2$ = b então $x_1^2$ - $x_2^2$ = 0, isto é, ($x_1$ - $x_2$)($x_1$ + $x_2$) = 0, como $x_1 + x_2 > 0$ necessariamente $x_1$ - $x_2$ = 0, logo $x_1 = x_2$.

**Existência**: Sejam os conjuntos $\mathbb{A}$ = {x $\in \mathbb{R}^+$: $x^2$ > b} e $\mathbb{B}$ = {x $\in \mathbb{R}^+$: $x^2$ < b}, consideremos a = inf $\mathbb{A} \in \mathbb{R}$ e mostremos $a^2$ = b. Por absurdo, suponhamos $a^2 \neq$ b. Então ou a $\in \mathbb{A}$ ou a $\in \mathbb{B}$. Se a $\in \mathbb{A}$ pode-se mostrar que para n suficientemente grande $\frac{a-1}{n} \in \mathbb{A}$ o que contradiz o fato de a ser o ínfimo de $\mathbb{A}$, por outro lado se a $\in \mathbb{B}$ é possível mostrar que $\frac{a+1}{n} \in \mathbb{B}$ o que contradiz o fato de a ser a maior das cotas inferiores de $\mathbb{A}$. Portanto $a^2$ = b. □

Dado b $\in \mathbb{R}$ e m ímpar $\in \mathbb{N}$, de forma similar pode-se provar que existe uma única solução real positiva da equação $x^m$ = b e esta solução será denotada por $\sqrt[m]{b}$ ou por $b^{\frac{1}{m}}$.

Observação: Observe que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pois não existe r $\in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$, portanto $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ é chamado de conjunto dos números irracionais.

## 2.3 Outras Formas de Construção

### 2.3.1 Cantor e as Sequências de Cauchy

Na primeira parte desta seção, também objetiva-se dar a ideia da construção de um corpo ordenado completo, contendo o conjunto dos números racionais. Para tal,

utilizaremos o conceito das Sequências de Cauchy, proposta em 1872 por G. Cantor, uma vez que esta ideia, assim como a dos Cortes de Dedekind, é, desde a sua publicação até hoje, uma das mais utilizadas para tal fim.

Aqui apresentaremos apenas as ideias básicas dessa construção e posteriormente será demonstrada a sua equivalência com outras formas de construção. Recomendamos o Capítulo 4 de [1], em que há muita informação, inclusive histórica, a respeito dessa construção de $\mathbb{R}$.

Passemos as definições.

**Definição 2.42.** *Seja $(x_n)$ uma sequência de números racionais. Ela se chama uma sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

Então, para cumprirmos o objetivo desta seção, tomaremos as sequências de Cauchy e sequências convergentes dentro de $\mathbb{Q}$, já que, como nosso objetivo é construir um corpo ordenado completo, contendo o conjunto dos números racionais, não podemos utilizar números reais daqui em diante.

Dadas as sequências $(x_n)$ e $(y_n)$ de Cauchy em $\mathbb{Q}$, dizemos que $(x_n)$ e $(y_n)$ são equivalentes, e escrevemos $(x_n) \sim (y_n)$, se $\lim (x_n - y_n) = 0$. Assim, verificamos que define uma relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que, portanto, divide esse conjunto de todas as sequência de Cauchy de $\mathbb{Q}$ em classes de equivalência. Denotamos por

$$[x_n] = \{(y_n)\colon\ (x_n) \backsim (y_n)\}$$

a classe de equivalência da sequência de Cauchy $(x_n)$ de $\mathbb{Q}$ e definimos

$$\mathbb{R} = \{[x_n]\colon\ (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy de } \mathbb{Q}\}.$$

Assim, identificamos uma cópia de $\mathbb{Q}$, que é a coleção das classes definidas pelas sequências constantes de racionais, dentro de $\mathbb{R}$. Por exemplo, o racional $0 \in \mathbb{Q}$ é identificado com a classe $[0] \in \mathbb{R}$ da sequência constante definida por $x_n = 0$, para n $\in \mathbb{N}$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de classes e certamente ainda não é um corpo ordenado em que vale a Propriedade do Supremo. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação, a ordem e a validade da propriedade do supremo. Além disso, precisamos cuidar para que essas operações e a ordem resultem exatamente nas operações e ordem usuais de $\mathbb{Q}$ quando tratarmos dos elementos de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Devido as propriedades algébricas das sequências convergentes, dados dois elementos $[x_n]$ e $[y_n]$ de $\mathbb{R}$, definimos

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n] \text{ e } [x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n]$$

e com isso, podemos afirmar que $\mathbb{R}$ é um corpo.

Como a classe de cada subsequência de uma sequência de Cauchy coincide com a classe da própria sequência, isso significa que para toda classe $[x_n] \neq [0]$ existe algum $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que, para algum representante $(y_n)$ dessa classe, $y_n > \varepsilon$, para cada n $\in \mathbb{N}$ ou então $y_n < -\varepsilon$, para cada n $\in \mathbb{N}$. No primeiro caso, definimos $[x_n] > 0$ e, no segundo, $[x_n] < [0]$. Agora devemos mostrar que essa relação independe da sequência escolhida e que satisfaz as propriedades de um corpo ordenado.

Finalmente, de posse da estrutura de corpo ordenado $\mathbb{R}$, podemos mostrar que vale a propriedade fundamental. No caso dessa construção é mais conveniente mostrar que $\mathbb{R}$ é arquimediano e que toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge. Como veremos na próxima seção, qualquer corpo ordenado que satisfaça essas duas propriedades, necessariamente satisfaz a Propriedade Fundamental do Supremo. Portanto, $\mathbb{R}$ será um corpo ordenado completo.

### 2.3.2 Equivalências da Propriedade do Supremo

Como mencionamos no início deste capítulo, a Propriedade do Supremo tem consequências muito importantes. A partir de agora, nosso objetivo é mostrar algumas delas. As consequências do Teorema 2.30 garantem que o conjunto dos números reais é completo.

No entanto, a partir da Propriedade do Supremo e das propriedades e resultados já mostrados, a completeza do corpo dos números reais pode ser formulada de outras maneiras, utilizando algumas equivalências que veremos a seguir.

De agora em diante, procuraremos desenvolver as ideias básicas para chegar a tais equivalências e provar que todos os corpos obtidos nelas serão iguais, pelo menos do ponto de vista algébrico, via isomorfismo, de modo que existe, formalmente, "apenas um" corpo como o conjunto dos reais. Veremos que as propriedades seguintes são equivalente, em corpos ordenados arquimediano. Nenhuma delas vale em $\mathbb{Q}$, mas qualquer uma delas implica na completude e pode, portanto, servir como propriedade fundamental dos números reais.

**Proposição 2.43.** *Em $\mathbb{R}$, a Propriedade do Supremo implica que toda sequência monótona e limitada é convergente.*

*Demonstração.* Para fixar as ideias, seja $(x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots)$ uma sequência não-decrescente limitada. Tomemos a = sup$\{x_n$: n = 1, 2,...$\}$. Afirmamos que a = lim $x_n$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon$ >0, como a - $\varepsilon <$ a, o número a - $\varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos $x_n$. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a - $\varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é não-decrescente, n $> n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, a - $\varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq$ a para todo n, pela Propriedade do Supremo, vemos que n $> n_0 \Rightarrow$ a - $\varepsilon < x_n <$ a + $\varepsilon$, ou seja, lim $x_n$ = a. A demonstração para sequências não crescentes e limitadas é análoga. □

**Lema 2.44.** *Toda sequência possui alguma subsequência monótona.*

*Demonstração.* Dada uma sequência $(x_n)$ qualquer, escrevemos

$$X_k = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots\},$$

para cada k $\in \mathbb{N}$. Por exemplo, $X_1$ é a própria imagem da sequência.

Pode ocorrer, como ocorre com sequências decrescentes, que para cada k $\in \mathbb{N}$, o conjunto $X_k$ possua maior elemento. Nesse caso, escolhemos o maior elemento $x_m$ da sequência toda e definimos $k_1 =$ m. Em seguida, escolhemos o maior elemento $x_m$ de $X_{k_1+1}$; definindo $k_2 =$ m, temos $k_2 > k_1$ e $x_{k_2} \leq x_{k_1}$, já que $X_{k_1+1} \subseteq X_1$. Continuando, nesse caso obtemos uma sequência crescente $(k_n)$ de naturais tal que $(x_{k_n})$ é uma subsequência não crescente de $(x_n)$.

Caso contrário, existe algum k $\in \mathbb{N}$ tal que $X_k$ não tem maior elemento, como ocorre com sequências crescentes. Daí decorre que, para cada m $\geq$ k, também $X_m$ não tem maior elemento. Então definimos $k_1 =$ k e, como $X_k$ não tem maior elemento, podemos escolher m $> k_2$ tal que $x_m > x_{k_2}$. Continuando, nesse caso obtemos uma sequência crescente $(k_n)$ de naturais tal que $(x_{k_n})$ é uma subsequência crescente de $(x_n)$.

Como não há mais casos, concluímos que $(x_n)$ possui alguma subsequência monótona. □

**Proposição 2.45.** *Em $\mathbb{R}$, o fato de toda sequência monótona e limitada ser convergente implica que toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência limitada. Pelo Lema 2.44, existe uma subsequência de $(x_n)$ que é monótona e limitada. Então a Propriedade 2.43 garante que essa subsequência é convergente. □

**Lema 2.46.** *Se uma sequência de Cauchy possuir alguma subsequência convergente, então a própria sequência converge.*

*Demonstração.* Sejam $(x_n)$ uma sequência de Cauchy com uma subsequência $(x_{k_n})$ convergente, digamos lim $x_{k_n} =$ c. Dado $\epsilon > 0$, temos $\frac{\epsilon}{2} > 0$ e, portanto, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{k_n}$ - c$| < \frac{\epsilon}{2}$, para cada n $\geq N_1$. Como $(x_n)$ é de Cauchy, podemos encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_q| < \frac{\epsilon}{2}$, para quaisquer m, q $\geq N_2$. Denotemos N = max $\{N_1, N_2\}$. Como $(k_n)$ é crescente em $\mathbb{N}$, temos $k_n \geq$ N. Então, para qualquer n $\in \mathbb{N}$, com n $\geq \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} | x_n - c | &= | x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - c | \\ &\leq | x_n - x_{k_n} | + | x_{k_n} - c | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $\epsilon$ é arbitrário, resulta que lim $x_n =$ c. □

**Proposição 2.47.** *Em $\mathbb{R}$, o fato de toda sequência limitada admitir subsequência convergente implica que toda sequência de Cauchy é convergente.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy. Pela Definição 2.42, $(x_n)$ é limitada e, portanto, pelo Teorema 2.45, $(x_n)$ possui alguma subsequência convergente. Pelo lema 2.46, a sequência $(x_n)$ converge. □

**Proposição 2.48.** *Em $\mathbb{R}$, o fato de toda sequência de Cauchy ser convergente implica que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo.*

*Demonstração.* Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente e tomemos uma cota superior $s_1$. Se $s_1$ é a menor cota superior, não há o que fazer. Caso contrário, existe $s_2 < s_1$. Se $s_2$ for a menor cota superior de $A$, não há o que fazer. Caso contrário, podemos repetir este argumento uma quantidade enumerável de vezes e construir uma sequência de cotas superiores

$$... < s_n < s_{n-1} < ... < s_2 < s_1.$$

Em particular, dado $a \in A$,

$$a < ... < s_n < s_{n-1} < ... < s_2 < s_1 = b.$$

Tomando os subintervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$, todos os elementos da sequência, a partir de um certo índice, devem estar contidos em apenas um destes dois conjuntos. Tomando tal conjunto e repetindo o argumento com intervalos de comprimento $\frac{b-a}{4}$. Procedendo desta forma, dado $k \in \mathbb{N}$, existe um índice $n_k$ tal que todos os elementos da sequência, a partir de tal índice estarão contidos em um intervalo de comprimento $\frac{b-a}{2^k}$. Assim, a sequência $\{s_n\}$ é de Cauchy e portanto é convergente. O limite de tal sequência é o supremo de $A$.

□

Quando introduzimos o corpo dos números reais assumimos a Propriedade do Supremo: todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente tem um supremo.

Por fim, o teorema a seguir, que na verdade é um corolário das Proposições 2.43, 2.45, 2.47 e 2.48, resume algumas formas equivalentes de se descrever a propriedade "especial" satisfeita pelo conjunto dos números reais.

**Teorema 2.49.** *Em $\mathbb{R}$, são equivalentes:*

*i) Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

*ii) Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

*iii) Toda sequência limitada tem alguma subsequência convergente.*

*iv) Toda sequência de Cauchy é convergente.*

Há ainda várias outras maneiras de caracterizar o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo. Em [10] está demonstrado dez afirmações a partir de suas equivalências com a Propriedade do Supremo, como segue.

**Teorema 2.50.** *Dizendo respeito a um corpo ordenado $\mathbb{K}$, são equivalentes as seguintes afirmações.*

*(K1) Toda cobertura de um intervalo fechado em $\mathbb{K}$ por intervalos abertos tem subcobertura finita.*

*(K2) Seja $\mathbb{F}$ um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{K}$. Toda cobertura de $\mathbb{F}$ por abertos admite uma subcobertura finita.*

*(K3) Todo subconjunto limitado e infinito de $\mathbb{K}$ possui ponto de acumulação.*

*(K4) Toda sequência limitada de $\mathbb{K}$ possui subsequência convergente.*

*(K5) i) $\mathbb{K}$ é sequencialmente completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.*
*ii) $\mathbb{K}$ é arquimediano.*

*(K6) Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

*(K7) i) Toda sequência de intervalos encaixantes em $\mathbb{K}$ tem intersecção não vazia.*
*ii) $\mathbb{K}$ é arquimediano.*

*(K8) $\mathbb{K}$ é Conexo.*

*(K9) Todo subconjunto fechado e limitado não vazio de $\mathbb{K}$ possui máximo e mínimo.*

*(K10) Todo subconjunto de $\mathbb{K}$ não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

Enfim, tudo o que foi apresentado neste trabalho traduz a nossa intenção de oferecer uma alternativa ao estudo dos números reais como uma simples extensão dos números racionais, pois, todas as propriedades dos reais mostradas são consequências diretas do fato deste conjunto ser um corpo ordenado e completo.

Nesse sentido, basta olharmos para os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ para concluir que dois corpos ordenados quaisquer não tem motivo para serem considerados iguais, ao contrário, dois corpos ordenados completos quaisquer sempre podem ser considerados iguais, ou seja, do ponto de vista algébrico, isomorfos. Assim, como queríamos mostrar ao longo deste trabalho, podemos finalmente concluir que existe um conjunto, conhecido como o conjunto dos números reais, que é o único corpo ordenado completo.

O professor da educação básica encontra dificuldades em construir situações concretas e cotidianas que justifiquem a necessidade de expandir o estudo do conjunto dos números racionais para o estudo dos números reais. Para tentar minimizar essas dificuldades, pode-se recorrer a História, já que os gregos já enfrentavam problemas geométricos que envolviam medidas incomensuráveis desde 500 a.C.

Portanto, na próxima seção apresentaremos uma proposta didática com o intuito de contribuir com estratégias pedagógicas de ensino referente a esse tema, que levem os alunos para o amadurecimento matemático, apesar de não ser aconselhado aplicar em sua totalidade no ensino básico os conceitos aqui discutidos.

# 3 Proposta Didática

## 3.1 Os Intervalos de Números Reais

Ao longo deste trabalho, estudamos a construção do conjunto dos números reais através dos cortes de Dedekind e de abordagens distintas e já mostramos a equivalência destas construções.

Neste capítulo, queremos fornecer subsídios para que os professores da Educação Básica superem o desafio de ensinar os números reais aos seus alunos, identificando as falhas e as deficiências relacionadas aos números reais que eles levam desde as primeiras séries do ensino fundamental.

Para isso, a nossa proposta se dividirá em algumas etapas: sondagem, problematização, sistematização do conhecimento e aplicação.

Na primeira delas, por meio de algumas questões, será possível diagnosticar quais os conhecimentos prévios do estudante, isto é, que representações, hipóteses e noções o aluno tem do conjunto dos números reais.

Passemos as questões.

(1) Sempre representamos a reta numérica como uma linha contínua. Você acredita que todos os números possam ser representados numa reta como esta? O que você entende desta representação?

(2) Tente agora localizar os números 1, -2, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{3}$ e $\sqrt{2}$, sem utilizar a calculadora. Descreva como o identificou.

Estas questões tem por objetivo identificar o conhecimento que o aluno tem sobre a continuidade geométrica, que pode ser explicada através do Teorema de Dedekind, pois, como vimos, este teorema demonstra que todo corte tem elemento separador. Além disso, pretende-se verificar se o aluno é capaz de relacionar um número aos seu respectivo ponto na reta numérica, o que pode ser útil para mostrar a ele as lacunas que existem em $\mathbb{Q}$ e a necessidade de se preencher estas lacunas na reta numérica através dos números irracionais.

A partir daí, partimos para a segunda etapa, a da problematização. Este é o momento em que o professor desperta a curiosidade do aluno, desafia-o, faz querer saber mais sobre o conteúdo.

Nosso propósito será que o estudante reconheça números irracionais a partir de construções geométricas. Então, deve-se solicitar ao aluno que, utilizando régua, esquadro e compasso, faça o desenho a seguir, cuja construção deverá ser acompanhada e orientada pelo professor.

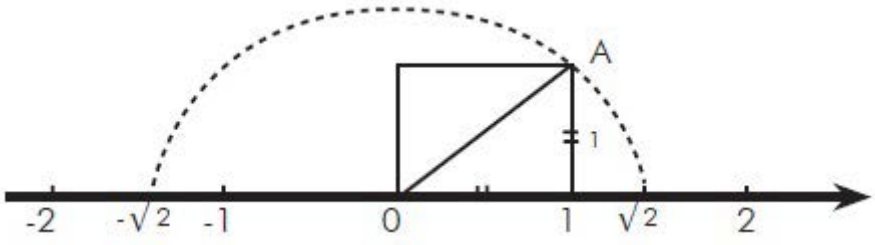


Figura 3.1: Construção Geométrica de $\sqrt{2}$

Sobre a reta numerada, desenhar o quadrado de lado 1 e traçar a diagonal OA. Utilizando a relação de Pitágoras, calcular a medida dessa diagonal ($\sqrt{2}$). Com a ponta seca do compasso, rebater a diagonal para a direita e para a esquerda do zero, localizando-se $\sqrt{2}$ entre 1 e 2 e -$\sqrt{2}$ entre -1 e -2. Dessa forma, geometricamente, o aluno verificará que $\sqrt{2}$ está localizado entre 1 e 1,5, que é um segmento de reta que corresponde ao conjunto dos números reais maiores que 1 e menores do que 1,5, isto é, no intervalo entre 1 e 1,5.

Assim, pode-se dar início a terceira etapa, a da sistematização do conhecimento, que será o momento em que o professor "amarará" com o aluno o que ele traz, construindo o conceito novo.

O professor, através da construção realizada na segunda etapa, pode explorar os intervalos numéricos, formalizando suas linguagens e representações, comparando-os a subconjuntos de números naturais e números inteiros, que são conjuntos discretos, ou seja, entre dois números consecutivos, não há outro número do mesmo conjunto.

Ademais, deve solicitar ao aluno que relate os passos da construção, indicando onde se localiza $\sqrt{2}$ e seu simétrico -$\sqrt{2}$.

Por fim, na última etapa, a da aplicação, o professor deve fazer a generalização, de tal modo que o aluno consiga aplicar os conceitos estudados no seu cotidiano. Pode, inclusive, introduzir um número irracional importante: o número $\pi$ (pi) e a história da matemática pode ser uma importante ferramenta pedagógica.

# Referências


[1] ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura.** Editora Edigard Blucher LTDA, São Paulo, 2001.

[2] BOYER, C. B. **História da Matemática.** Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

[4] COHEN, L. W. **The Structure of the Real Number System,** Van Nostrand Reinhold Comp., 1963.

[5] DOERING, C. I. **Introdução a Análise Matemática na Reta.** Universidade do Rio Grande do Sul - URGS. Disponível em http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/NE-1.02.pdf.

[6] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. Atual Editora LTDA, São Paulo, 1982.

[7] LIMA, E. L. **Curso de Análise,** volume 1, $11^a$ edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2006.

[8] LIMA, E. L. **Análise Real,** volume 1, $2^a$ edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, Rio de Janeiro, 1993.

[9] LIMA, E. L. **A matemática do Ensino Médio,** volume 1. Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, $9^a$ edição, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[10] MONTRESOR, C. L. **O Corpo dos Números Reais é Cmpleto: Em que sentido?** In: Boletim de Iniciação Científica em Matemática - BICMat. Vol IV. Rio Claro: IGCE, Departamento de Matemática - UNESP, 2007.

[11] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Julius Wilhelm Richard Dedekind.** The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em <http://www-

history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind.html>. Acesso em 30 jul. 2014.

[12] RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.

[13] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis.** McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, New York, 1953.