

Rodrigo Arena Ribeiro

Permanência em Sistemas Biológicos



1910001146



Permanência em Sistemas Biológicos

Rodrigo Arena Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Dissertação a ser apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática.

Fevereiro - 2003
São José do Rio Preto - SP



T. 1.146/03

517.938
R484p

10103040

Permanência em Sistemas Biológicos

Rodrigo Arena Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Ribeiro, Rodrigo Arena.

Permanência em sistemas biológicos / Rodrigo Arena Ribeiro – São
José do Rio Preto : [s.n.], 2003
31 f. ; 30 cm.

Orientador: Adalberto Spezamiglio

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Invariantes. 3. Sistemas
dinâmicos permanentes. 4. Sistemas dinâmicos - Conjunto limite. 5.
Sistemas dinâmicos - Conjunto absorvente. I. Spezamiglio, Adalberto.
II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.987.5



“ O homem realiza-se na mesma medida
em que se compromete no cumprimento
do sentido da sua vida .”

Viktor Frankl



Agradecimentos

Ao término deste trabalho, agradeço a todos que contribuíram para sua realização:

A Deus por tudo.

À minha mãe, que não mediu esforços para que eu vencesse mais uma etapa.

Ao meu pai Zé Ribeiro (in memorian), pela vida.

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio, pela paciência e dedicação durante a valiosa orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP-S.J.R.Preto, pela formação.

À Camila, pelo seu amor e compreensão nesses dois anos em que estive distante.

Às minhas colegas do curso de Pós-graduação: Andréia, Flávia, TatiB e TatiMi, pelos agradáveis momentos de convívio.

Às minhas amigas Patrícia e Rita, por dividirem comigo não só os momentos alegres, como também as dificuldades e tristezas durante o período que concluímos.

Ao Márcio, pela ajuda dispensada neste trabalho.

Aos meus familiares e amigos que, direta ou indiretamente, me apoiaram na conquista deste objetivo.

Aos meus amigos Eduardo, João e Neimar, pelos ótimos momentos que tivemos nesse período e principalmente pela amizade.

À CAPES pelo auxílio financeiro.



Resumo

Neste trabalho estudamos o conceito de permanência e sua aplicação em sistemas biológicos. A técnica consiste em utilizar as chamadas funções médias de Liapunov e a localização do conjunto ω -limite da fronteira do cone invariante $\mathbb{R}_+^m$ do sistema.

Aplicações são dadas em um problema de convivência entre espécies e no modelo clássico de Lotka-Volterra.

Palavras chaves: Conjunto ω -limite; Conjunto Absorvente; Funções Médias de Liapunov; Invariância; Permanência.

Abstract

In this work we study the concept of permanence and its application in biological systems. The approach consists in the use of the so called average Liapunov functions and the location of the ω -limit set of the boundary of the invariant cone $\mathbb{R}_+^m$ for the system.

Applications are given in a problem of interaction among species and in the classical Lotka-Volterra model.

Keywords: ω -limit Set; Absorbing Set; Average Liapunov Functions; Invariance; Permanence.

Conteúdo

Introdução	vi
1 Preliminares	1
1.1 Conjuntos Básicos	1
1.2 Propriedades Básicas dos Conjuntos Limites	3
2 Permanência	7
2.1 Conjuntos Absorventes	7
2.2 Funções Médias de Liapunov e Permanência	10
3 Aplicações	19
3.1 Uma Condição Suficiente para Permanência	20
3.2 Sistemas de Lotka-Volterra	25
Bibliografia	31

Introdução

Preliminares

O objetivo deste trabalho é estudar o conceito de permanência e como os resultados obtidos podem ser aplicados em modelos guiados por um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo $\dot{u}_i = u_i f_i(u)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), que aparecem em problemas de competição entre espécies, por exemplo, o do tipo Lotka-Volterra.

O trabalho consta de três capítulos.

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados necessários dos sistemas dinâmicos. Vemos as propriedades básicas dos conjuntos limites e definimos alguns conjuntos que são usados no decorrer do trabalho.

No capítulo 2 apresentamos a definição de permanência e verificamos como dissipatividade e compacidade produzem um conjunto compacto que absorve órbitas. O teorema central do trabalho é apresentado aqui.

No último capítulo mostramos algumas aplicações da técnica estudada, que consiste em enfraquecer condições das chamadas funções médias de Liapunov, e na localização dos conjuntos ω -limites da fronteira do cone invariante $\mathbb{R}_+^m$.



Capítulo 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo notações, definições e resultados que serão usados no decorrer do trabalho.

1.1 Conjuntos Básicos

1.1.1 Definição: *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Vamos considerar X com a topologia dada pela distância euclidiana d . Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente se para cada real b , o conjunto $\{x \in X : f(x) > b\}$ é aberto em X .*

Um exemplo elementar de função semicontínua inferiormente é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$



Sejam $Y \subset \mathbb{R}^m$, d a distância euclidiana e $\mathbb{D}_+ = \mathbb{Z}_+$ ou $\mathbb{R}_+$.

Os pontos em Y serão denotados por $u, v, \dots$ e subconjuntos de Y por $U, V, \dots$

Para ϵ -vizinhanças de U usaremos : $B(U, \epsilon) = \{v \in Y : \exists u \in U, d(v, u) < \epsilon\}$ e $\overline{B(U, \epsilon)} = \{v \in Y : \exists u \in U, d(v, u) \leq \epsilon\}$

1.1.2 Definição: A terna $(Y, \pi, \mathbb{D}_+)$ é um **sistema dinâmico** se $\pi : Y \times \mathbb{D}_+ \rightarrow Y$ satisfaz para todo $u \in Y$, $s, t \in \mathbb{D}_+$:

- i) $\pi(u, 0) = u$;
- ii) $\pi(\pi(u, t), s) = \pi(u, t + s)$;
- iii) π é contínua.

Exemplo: o sistema dinâmico associado a uma equação diferencial ordinária autônoma $\dot{x} = f(x)$, onde $\pi(u, t) := x(t, u)$ é a solução $x(t)$ da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ que em $t = 0$ vale u .

Se $\mathbb{D}_+ = \mathbb{R}_+$ o sistema é dito **contínuo**, se $\mathbb{D}_+ = \mathbb{Z}_+$, é dito **discreto**. Denotaremos, por conveniência, $\pi(u, t) = u \cdot t$.

Para subconjuntos $U \subset Y$ e $I \subset \mathbb{D}_+$, $\bigcup_{u \in U} u \cdot t := U \cdot t$ e $U \cdot I := \bigcup_{t \in I} \bigcup_{u \in U} u \cdot t$.

Um ponto u é um **ponto de equilíbrio** se $u = u \cdot t$, $t \in \mathbb{D}_+$, e é **ponto periódico** se $\exists T > 0$ tal que $u \cdot t = u \cdot (t + T)$, para $t \in \mathbb{D}_+$.

Num sistema dinâmico $(Y, \pi, \mathbb{D}_+)$ consideraremos os seguintes subconjuntos:

1.1.3 Definição: O conjunto $\gamma^+(u) = \{v : v = u \cdot t, t \in \mathbb{D}_+\}$ é a **órbita por u** e $\gamma^+(U)$ é definido como $\bigcup_{u \in U} \gamma^+(u)$.

1.1.4 Definição: Um conjunto $U \subset Y$ é **positivamente invariante** se $\gamma^+(U) \subset U$, e **invariante** se $U \cdot t = U, \forall t \in \mathbb{D}_+$.

Vamos introduzir alguma terminologia para estudar o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos e dar alguns resultados de condições dissipativas.

1.1.5 Definição: Um conjunto $U \subset Y$ é **atrator para** $V \subset Y$ se $\lim_{t \rightarrow \infty} d(v \cdot t, U) = 0, \forall v \in V$.

1.1.6 Definição: O sistema dinâmico $(Y, \pi, \mathbb{D}_+)$ é **dissipativo** se existir um conjunto limitado atrator para Y .

1.1.7 Definição: Um conjunto U é **absorvente para** V se é positivamente invariante e $\gamma^+(v) \cap U \neq \emptyset, \forall v \in V$.

1.2 Propriedades Básicas dos Conjuntos Limites

Num sistema dinâmico $(Y, \pi, \mathbb{D}_+)$, os conjuntos ω -limite assumem um papel de grande importância, como teremos a oportunidade de comprovar.

1.2.1 Definição: O conjunto ω -limite de $u \in Y$, $\omega(u)$, é definido como:

$$\omega(u) = \{v \in Y : \exists(t_n), t_n \rightarrow \infty, u \cdot t_n \rightarrow v\}$$

Para um subconjunto $U \subset Y$, $\omega(U) = \bigcup_{u \in U} \omega(u)$.



1.2.2 Lema: Suponhamos que a órbita $\gamma^+(u)$ seja limitada. Então:

i) $\omega(u)$ é não vazio;

ii) $\omega(u)$ é compacto;

iii) $\omega(u)$ é invariante;

iv) $\omega(u)$ é o menor conjunto fechado que $u \cdot t$ se aproxima quando $t \rightarrow \infty$ no sentido que $d(u \cdot t, \omega(u)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$;

v) Se $\mathbb{D}_+ = \mathbb{R}_+$ então $\omega(u)$ é conexo;

vi) Se U é fechado e positivamente invariante então $\omega(U) \subset U$.

Demonstração: i) Como $\gamma^+(u)$ é limitada, para toda $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow \infty$, $u \cdot t_n$ é limitada, logo existe uma subsequência t_{n_j} tal que $\lim_{n_j \rightarrow \infty} u \cdot t_{n_j} = v$. Logo $v \in \omega(u)$ e então $\omega(u) \neq \emptyset$.

ii) Como $\gamma^+(u)$ é limitada então $\omega(u)$ também é. Provaremos que $\omega(u)$ é fechado, ou seja, $\overline{\omega(u)} = \omega(u)$.

Como $\omega(u) \subset \overline{\omega(u)}$ veremos que $\overline{\omega(u)} \subset \omega(u)$.

Se $v \in \overline{\omega(u)}$ então existe uma sequência $v_n \in \omega(u)$ tal que $v_n \rightarrow v$ quando $n \rightarrow \infty$; como $v_n \in \omega(u)$ existe $t_j^n \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t_j^n \rightarrow v_n$ quando $j \rightarrow \infty$.

Tomando a sequência diagonal $(u \cdot t_j^j)$ temos que $u \cdot t_j^j \rightarrow v$, ou seja, $v \in \omega(u)$ e $\overline{\omega(u)} \subset \omega(u)$. Portanto $\omega(u)$ é fechado.

iii) Provaremos que $\omega(u) \cdot t = \omega(u)$, $t \in \mathbb{D}_+$.

Mostraremos primeiramente que $\omega(u) \cdot t \subset \omega(u)$. Fixemos $t \in \mathbb{D}_+$. Seja $z \in \omega(u) \cdot t$, ou seja, $z = v \cdot t$ com $v \in \omega(u)$. Como $v \in \omega(u)$, $\exists t_n \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t_n \rightarrow v$ quando $t_n \rightarrow \infty$.

Pela continuidade da π temos:

$\pi(\pi(u, t_n), t) \rightarrow \pi(v, t)$, ou seja, $\pi(u, t_n + t) \rightarrow \pi(v, t) = v \cdot t = z \in \omega(u)$.

Logo $\omega(u) \cdot t \subset \omega(u)$.

Mostraremos agora a outra inclusão.

Se $v \in \omega(u)$, então $\exists t_n \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t_n \rightarrow v$.

Para $t_n \geq t$, $(\pi(u, t_n - t))$ é limitada.

Logo existe subsequência (t_{n_j}) tal que $\pi(u, t_{n_j} - t) \rightarrow z \in \omega(u)$, e pela continuidade da π , $\pi(\pi(u, t_{n_j} - t), t) \rightarrow \pi(z, t)$, ou seja, $\pi(u, t_{n_j}) \rightarrow \pi(z, t) = z \cdot t = v$.

Daí, $v \in \omega(u) \cdot t$ e $\omega(u) \subset \omega(u) \cdot t$, $t \in \mathbb{D}_+$.

Portanto $\omega(u)$ é invariante.

iv) Seja F um fechado tal que $d(u \cdot t, F) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e suponhamos que exista $y \in \omega(u)$ com $y \notin F$.

Como F é fechado, $\delta := d(y, F) > 0$. Se $U = B(F, \frac{\delta}{2})$, então existe $t_0 \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t \in U$, $\forall t \geq t_0$. Por outro lado, como $y \in \omega(u)$, existe uma sequência $(u \cdot t_n)$ tal que $u \cdot t_n \in U$ e $u \cdot t_n \rightarrow y$, $n \rightarrow \infty$, o que dá uma contradição.

Suponhamos agora que $d(u \cdot t, \omega(u)) \not\rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Logo existe um $\epsilon_0 > 0$: $\forall t_0 \in \mathbb{D}_+$, $\exists t \geq t_0$ de modo que $d(u \cdot t, \omega(u)) \geq \epsilon_0$. Portanto $\exists t_k \in \mathbb{D}_+$ com $d(u \cdot t_k, \omega(u)) \geq \epsilon_0$, $\forall k \in \mathbb{D}_+ \cap \mathbb{Z}$.

Por outro lado, $(u \cdot t_k)$ é limitada, daí $\exists (t_{k_j})$ com $u \cdot t_{k_j} \rightarrow y \in \omega(u)$ quando $j \rightarrow \infty$, o que contradiz a afirmação anterior.

Logo, $d(u \cdot t, \omega(u)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

v) Vamos supor que $\omega(u)$ seja desconexo.

Logo $\omega(u) = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_i compactos não vazios, $i = 1, 2$.

Então existem abertos V, W com $\Omega_1 \subset V$, $\Omega_2 \subset W$ e $V \cap W = \emptyset$.

Seja U aberto tal que $\Omega_1 \subset U \subsetneq V$.

Sejam $u_1 \in \Omega_1$ e $u_2 \in \Omega_2$. Logo, existe uma sequência (t_n) tal que $u \cdot t_n \rightarrow u_1$ e existe uma sequência (s_n) tal que $u \cdot s_n \rightarrow u_2$.

Daí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $u \cdot t_n \in U$ e $u \cdot s_n \in W$. Entre os termos das sequências (t_n) e (s_n) , para n suficientemente grande, é possível obter uma sequência (τ_n) tal que $u \cdot \tau_n \in V \setminus U$. Como $(u \cdot \tau_n)$ é limitada, existe uma subsequência (τ_{n_j}) tal que $u \cdot \tau_{n_j} \rightarrow v \in V \setminus U$, uma contradição, já que $v \in \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Portanto $\omega(u)$ é conexo.

vi) Se $v \in \omega(U)$ então $v \in \bigcup_{u \in U} \omega(u)$, logo v pertence a algum $\omega(u)$, $u \in U$.

Daí $\exists (t_n)$ com $t_n \rightarrow \infty$ tal que $u \cdot t_n \rightarrow v$.

Como $u \cdot t_n \in \gamma^+(u)$ e U é positivamente invariante, $u \cdot t_n \in U$ e por U ser fechado por hipótese, $u \cdot t_n \rightarrow v \in U$.

Portanto $\omega(U) \subset U$.

Capítulo 2

Permanência

2.1 Conjuntos Absorventes

Mostramos neste capítulo condições que garantem a existência de conjuntos absorventes para um sistema dinâmico. O próximo teorema nos mostrará como dissipatividade e compacidade produzem um conjunto compacto que absorve órbitas.

Um lema técnico será dado antes.

2.1.1 Lema: *Seja $N \subset Y$ um aberto com $\overline{N}$ compacto. Seja $V \subset Y$ com $\overline{N} \subset V \subset Y$, vamos assumir que V é positivamente invariante e que $\gamma^+(v) \cap N \neq \emptyset$ para todo $v \in V$. Então:*

- i) $\gamma^+(\overline{N})$ é um subconjunto compacto, positivamente invariante e absorvente para V .
- ii) Se $K \subset V$ é compacto, então $\gamma^+(K)$ está contido num subconjunto compacto de V e ainda, $\exists t(K) \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t \in \gamma^+(\overline{N})$ para $u \in K$ e $t \geq t(K)$.



Demonstração: Seja $A \subset V$ compacto. Desde que $\gamma^+(u)$ intercepta N para cada $u \in A$, dado $u \in A$, $\exists T(u) \in (0, \infty)$ tal que $u \cdot T(u) \in N$. Como N é aberto existe uma vizinhança aberta $V(u)$ de u em A tal que $V(u) \cdot T(u) \subset N$. Agora, $\bigcup_{u \in A} V(u)$ é uma cobertura aberta de A , e como A é compacto, existe uma subcobertura finita $V(u_1), V(u_2), \dots, V(u_n)$ de A , tal que,

$$A \subset V(u_1) \cup \dots \cup V(u_n).$$

Temos que $\overline{V(u_i)} \cdot [0, T(u_i)] = \pi(\overline{V(u_i)}, [0, T(u_i)])$ é compacto, como imagem de um compacto por uma aplicação contínua.

Então

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i=1}^n \overline{V(u_i)} \cdot [0, T(u_i)]$$

é compacto, como união finita de compactos.

i) Provaremos que $\gamma^+(\overline{N}) = \Gamma(\overline{N})$, Γ definido acima.

Observemos que quando $A = \overline{N}$, pode ocorrer que $u \cdot t \in N$ quando $u \in \overline{N}$, para todo $t > 0$. Neste caso $T(u) > 0$ pode ser tomado arbitrariamente.

No entanto, pode ocorrer que $\exists \tilde{t} > 0$ tal que $u \cdot \tilde{t} \notin N$. Neste caso, necessariamente, teremos $T(u) > \tilde{t}$, já que a órbita tem que voltar a N , por hipótese.

Assim, se $x = u \cdot t \in \gamma^+(\overline{N})$ com $u \in \overline{N}$ e $t \in \mathbb{D}_+$, existe $u_{i_0} \in \overline{N}$ tal que $u \in V(u_{i_0})$, vizinhança dada na definição de Γ . Logo, $x \in V(u_{i_0}) \cdot t$.

Da observação acima, podemos supor que $T(u_{i_0}) > t$, e portanto $x \in \overline{V(u_{i_0})} \cdot [0, T(u_{i_0})] \subset \Gamma(\overline{N})$.

Portanto $\gamma^+(\overline{N}) \subset \Gamma(\overline{N})$, e como a outra inclusão é óbvia, temos que $\gamma^+(\overline{N}) = \Gamma(\overline{N})$, que é compacto, positivamente invariante e absorvente para V .

ii) Sejam $A = K$, $t(K) = \max_{1 \leq i \leq n} T(u_i)$, onde $T(u_i)$ é obtido como acima para $A = K$, $i = 1, \dots, n$. Seja $u \in K$. Logo, se $t \geq t(K)$ então $u \cdot t \in N \subset \overline{N}$ que é compacto.

Para $0 \leq t \leq t(K)$, $u \cdot t \in \bigcup_{i=1}^n \overline{V(u_i)} \cdot [0, t(K)]$ que também é compacto, mostrando que $\gamma^+(u)$ está contido num subconjunto compacto de V .

2.1.2 Teorema: *Suponhamos que exista um conjunto compacto K atrator para Y . Então existe um conjunto compacto X absorvente para Y .*

Demonstração: Fixemos $\epsilon > 0$ dado. Sejam $N = B(K, \epsilon)$ e $V = Y$.

Dado $u \in Y$, $\lim_{t \rightarrow \infty} d(u \cdot t, K) = 0$.

Logo $\exists T(u) > 0$ tal que $d(u \cdot t, K) < \epsilon$ para $t \geq T(u)$, o que implica que $u \cdot t \in B(K, \epsilon)$, para $t \geq T(u)$.

Pelo Lema anterior $\gamma^+(\overline{B(K, \epsilon)}) \subset Y$ é compacto absorvente para Y .

2.2 Funções Médias de Liapunov e Permanência

Suponhamos que $Y = Y_0 \cup \partial Y_0$ onde Y_0 é aberto e que Y_0 e ∂Y_0 são positivamente invariantes.

2.2.1 Definição: *Um sistema dinâmico em Y é permanente se existe um conjunto limitado U atrator para Y_0 com $\inf_{u \in U} d(u, \partial Y_0) > 0$.*

Dissipatividade será exigida em todos os casos a serem tratados. Junto com a compacidade poderemos mostrar que existe um conjunto compacto X absorvente para Y . Restringiremos o sistema original a X . Neste caso, $S = \partial Y_0 \cap X$ será um subconjunto compacto de X com interior vazio, S e $X \setminus S$ serão positivamente invariantes. Como um exemplo, em $\dot{x}_i = x_i f_i(x)$, $Y = \mathbb{R}_+^m$, ∂Y_0 é a união das faces $x_i = 0$. O conjunto X é uma vizinhança compacta da origem e S a sua interseção com ∂Y_0 .

2.2.2 Definição: *Dada uma vizinhança U de S , uma função média de Liapunov em U é definida como:*

$$V \in C(U, \mathbb{R}_+); \quad V^{-1}(0) = S \quad e \quad V(u \cdot t) > V(u), \quad t > 0, \quad u \in U \setminus S.$$

A idéia é aplicar funções médias de Liapunov para obter permanência, já que V é crescente sobre órbitas e só se anula em S , ou seja, as órbitas estão a uma distância positiva da fronteira S .

Em geral, mesmo nos casos mais simples, é muito difícil achar tal função V . Logo, a tática é enfraquecer as condições sobre V para obter permanência. Isso será feito no próximo teorema, e para tanto definiremos alguns conjuntos e passaremos a trabalhar com eles.

Seja X_0 um conjunto limitado absorvente para $(Y, \pi, \mathbb{D}_+)$ e consideremos o sistema $(X_0, \pi, \mathbb{D}_+)$.

Notação: Sejam $\mathbb{D}_+^1 := \mathbb{D}_+ \cap [1, \infty)$, $X_1 := \pi(X_0, \mathbb{D}_+^1)$, $\overline{X_1} := X$, $S_0 := \partial X_0$, $S_1 := \pi(S_0, \mathbb{D}_+^1)$ e $\overline{S_1} := S$, com a topologia induzida de X_0 .

O lema a seguir nos dá algumas propriedades desses conjuntos.

2.2.3 Lema: *Sejam S_0 , $X_0 \setminus S_0$ positivamente invariantes, X_0 fechado e S_0 com interior vazio. Então:*

- i) X_1 , S_1 , e $X_1 \setminus S_1$ são positivamente invariantes;
- ii) X , S , $X \setminus S$ são positivamente invariantes e $\pi(X, \mathbb{D}_+^1) \subset X$;
- iii) $X_1 \setminus S_1$ é denso em X .

Demonstração: i) Vamos mostrar que X_1 é positivamente invariante, ou seja, $\gamma^+(X_1) \subset X_1$.

Por definição, $X_1 := \pi(X_0, \mathbb{D}_+^1)$. Se $u \in X_1$ então $u = x_0 \cdot t$, para algum $t \in \mathbb{D}_+^1$ e $x_0 \in X_0$.

Para $s \in \mathbb{D}_+$, $u \cdot s = \pi(u, s) = \pi(\pi(x_0, t), s) = \pi(x_0, t + s) \in X_1$, já que $t + s \in \mathbb{D}_+^1$.

Portanto X_1 é positivamente invariante. Analogamente, S_1 é positivamente invariante.

Provaremos agora que $X_1 \setminus S_1$ é positivamente invariante.

Se $u \in X_1 \setminus S_1$ então $u \in X_1$, logo $u = x_0 \cdot t$ para algum $t \in \mathbb{D}_+^1$, $x_0 \in X_0$ e ainda $u \notin S_1$, ou seja, $u \neq s_0 \cdot t$, $\forall t \in \mathbb{D}_+^1$ e $\forall s_0 \in S_0$.

Afirmamos que $x_0 \in X_0 \setminus S_0$. De fato, se $x_0 \in S_0$ então $u = x_0 \cdot t \in S_1$. Absurdo pois $u \notin S_1$.

Para $s \in \mathbb{D}_+$, $u \cdot s \in X_1$ pois X_1 é positivamente invariante.

Vamos supor que $u \cdot s \in S_1$. Então, $u \cdot s = s_0 \cdot t'$, $s_0 \in S_0$ e $t' \in \mathbb{D}_+^1$. Como S_0 é positivamente invariante então $u \cdot s \in S_0$. Mas $u \cdot s = \pi(x_0, t + s) \in X_0 \setminus S_0$ pois $x_0 \in X_0 \setminus S_0$, que é positivamente invariante. Isto produz uma contradição e então $u \cdot s \notin S_1$. Portanto $u \cdot s \in X_1 \setminus S_1$ e daí $X_1 \setminus S_1$ é positivamente invariante.

ii) Para provar que X e S são positivamente invariantes vamos mostrar que fecho de conjunto positivamente invariante é positivamente invariante.

Seja $u \in X = \overline{X_1}$. Se $u \in X_1$ então $u \cdot s \in X_1 \subset \overline{X_1}$, $\forall s \in \mathbb{D}_+$.

Se $u \in \overline{X_1} \setminus X_1$, $\exists u_n \in X_1$ tal que $u_n \rightarrow u$. Da continuidade da π temos que: $\pi(u_n, s) \rightarrow \pi(u, s)$, $\forall s \in \mathbb{D}_+$. Como $\pi(u_n, s) \in X_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s \in \mathbb{D}_+$, $\pi(u, s) = u \cdot s \in \overline{X_1}$. Portanto X é positivamente invariante. Analogamente, S é positivamente invariante.

Vamos provar que $X \setminus S$ é positivamente invariante.

Primeiramente vamos observar que se $u \cdot t \in S_0$ para algum $t > 0$, então $u \in S_0$ senão contraria o fato de $X_0 \setminus S_0$ ser positivamente invariante.

Mostraremos que $S_1 = X_1 \cap S_0$. Provaremos primeiro que $(X_1 \cap S_0) \subset S_1$.

Seja $v \in (X_1 \cap S_0)$. Logo $\exists u \in X_0$ e $\exists t \in \mathbb{D}_+^1$ tais que $v = u \cdot t$, e $v \in S_0$, ou seja, pela observação, $u \in S_0$. Portanto $v \in S_1$ e então $(X_1 \cap S_0) \subset S_1$.

A outra inclusão é clara pois se $u \in S_1$, $u = s_0 \cdot t$, $s_0 \in S_0$, $t \in \mathbb{D}_+^1$. Como S_0 é positivamente invariante, $u = s_0 \cdot t \in S_0$. Temos que $s_0 \in S_0 \subset X_0$, logo $u \in X_1$.

Assim $S_1 \subset (X_1 \cap S_0)$ e então $S_1 = (X_1 \cap S_0)$

Como S_0 é fechado, $S = \overline{S_1} = \overline{X_1 \cap S_0} = \overline{X_1} \cap \overline{S_0} = X \cap S_0$.

Para completar a demonstração, suponhamos que $u \in X \setminus S$ mas $u \cdot s \in S$ para algum $s \in \mathbb{D}_+$. Pela observação feita acima, $u \in S_0$. Logo $u \in X \cap S_0 = S$ produzindo uma contradição. Portanto $X \setminus S$ é positivamente invariante.

Falta mostrar que $\pi(X, \mathbb{D}_+^1) \subset X$.

Seja $v \in \pi(X, \mathbb{D}_+^1)$. Então, $v = u \cdot t$, $u \in X = \overline{X_1}$ e $t \in \mathbb{D}_+^1$.

Se $u \in X_1$ o resultado é óbvio.

Se $u \in \overline{X_1} \setminus X_1$, então $\exists u_n \in X_1$ com $u_n \rightarrow u$. Logo, $u_n \cdot t \rightarrow u \cdot t$, mostrando que $u \cdot t = v \in \overline{X_1} = X$.

iii) Mostraremos que $X_1 \setminus S_1$ é denso em X , ou seja, $\overline{X_1 \setminus S_1} = X$

Como S_0 tem interior vazio, $S_1 = \pi(S_0, \mathbb{D}_+^1) \subset S_0$ também tem. Logo, $X_1 \setminus S_1$ é denso em X_1 , portanto em $\overline{X_1} = X$.

A seguir veremos o teorema central do trabalho, em que obtemos uma condição suficiente para permanência.

2.2.4 Teorema: *Sejam S_0 , $X_0 \setminus S_0$ subconjuntos positivamente invariantes do sistema dinâmico $(X_0, \pi, \mathbb{D}_+)$, suponhamos que X_0 seja fechado, S_0 tenha interior vazio e que X_1 seja limitado.*

Seja $P : X_1 \setminus S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, estritamente positiva e limitada.

Definimos :

$$\alpha(t, u) = \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P(v \cdot t)}{P(v)}, \quad u \in \overline{X_1}, \quad t \in \mathbb{D}_+,$$

e suponhamos que

$$\sup_{t>0} \alpha(t, u) > \begin{cases} 1, u \in \omega(S) \\ 0, u \in S \end{cases} \quad (1)$$

Então existe um conjunto compacto M absorvente para $X_0 \setminus S_0$ com $d(M, S) > 0$.

Demonstração: É suficiente restringir a análise ao subconjunto compacto $X = \overline{X_1}$ de X_0 e provar que M é absorvente para $X \setminus S$.

Observemos que $\alpha(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente. De fato, definimos $A = \{u \in \overline{X_1} : \alpha(t, u) > b\}$, onde $b \in \mathbb{R}$ e provaremos que A é aberto, para cada $t \in \mathbb{D}_+$ fixado.

Seja $u_0 \in A$. Logo $\alpha(t, u_0) > b$. Dado $\epsilon = \alpha(t, u_0) - b > 0$, $\forall v_n \rightarrow u_0$, $\exists n_0 : \frac{P(v_n \cdot t)}{P(v_n)} > \alpha(t, u_0) - \frac{\epsilon}{2}$, $n \geq n_0$.

Portanto $\exists \delta > 0$ tal que para $v \in \overline{X_1}$, $|v - u_0| < \delta \Rightarrow \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} > \alpha(t, u_0) - \frac{\epsilon}{2} > b$, provando que A é aberto. De fato, vamos supor por absurdo que para $\forall \delta > 0$, $\exists v \in \overline{X_1}$ tal que $|v - u_0| < \delta$ e $\frac{P(v \cdot t)}{P(v)} \leq \alpha(t, u_0) - \frac{\epsilon}{2}$.

Fazendo $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists v_n \in \overline{X_1}$ tal que $|v_n - u_0| < \frac{1}{n}$ e $\frac{P(v_n \cdot t)}{P(v_n)} \leq \alpha(t, u_0) - \frac{\epsilon}{2}$, o que produz uma contradição. Portanto A é aberto e $\alpha(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente.

Para $t, t^* > 0$ e $u \in X$,

$$\begin{aligned} \alpha(t + t^*, u) &= \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P(v \cdot (t + t^*))}{P(v \cdot t)} \cdot \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} \\ &\geq \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P(v \cdot (t + t^*))}{P(v \cdot t)} \cdot \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} \\ &= \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P((v \cdot t) \cdot t^*)}{P(v \cdot t)} \cdot \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X_1 \setminus S_1}} \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} \\ &= \alpha(t^*, u \cdot t) \cdot \alpha(t, u). \end{aligned} \quad (2)$$

Vamos mostrar por indução que, para $t_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, e $u \in X$,

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^n t_i, u\right) \geq \alpha(t_0, u) \cdot \prod_{j=1}^n \alpha\left(t_j, u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i\right). \quad (3)$$

Para $n = 1$ está provado acima.

Consideremos a hipótese de indução ($n = k$):

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^k t_i, u\right) \geq \alpha(t_0, u) \cdot \prod_{j=1}^k \alpha\left(t_j, u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i\right).$$

Para $n = k + 1$ temos:

$$\begin{aligned} \alpha\left(\sum_{i=0}^{k+1} t_i, u\right) &= \alpha\left(\sum_{i=0}^k t_i + t_{k+1}, u\right) \\ &\geq \alpha\left(\sum_{i=0}^k t_i, u\right) \cdot \alpha\left(t_{k+1}, u \cdot \sum_{i=0}^k t_i\right) \\ &\geq \left[\alpha(t_0, u) \cdot \prod_{j=1}^k \alpha\left(t_j, u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i\right)\right] \cdot \alpha\left(t_{k+1}, u \cdot \sum_{i=0}^k t_i\right) \\ &= \alpha(t_0, u) \cdot \prod_{j=1}^{k+1} \alpha\left(t_j, u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i\right). \end{aligned}$$

Para demonstrar o teorema, o primeiro passo é provar que a primeira parte de (1) vale para todo $u \in S$ e preliminarmente afirmamos que dados $u \in S$ e $T > 0$, $\exists t_0 \geq T$ tal que $\alpha(t_0, u) > 0$. Se não, para algum $u \in S$, $\tau := \inf\{t_0 : \alpha(t, u) = 0, t \geq t_0\}$ é finito pois, negando a afirmação acima, temos que $\exists u \in S, \exists T > 0$ tais que $\forall t \geq T, \alpha(t, u) = 0$. Então, $T \in \{t_0 : \alpha(t, u) = 0, t \geq t_0\}$, e portanto $\tau \leq T$ que é finito. Combinado com a segunda parte de (1), temos que $\tau \in (0, \infty)$. De fato, vamos supor que $\tau = 0$, ou seja, $0 = \inf\{t_0 : \alpha(t, u) = 0, t \geq t_0\}$. Então, $\forall \epsilon > 0, \exists t' < \epsilon$ tal que $\alpha(t, u) = 0, t \geq t' > 0$. Daí, $\alpha(t, u) = 0, \forall t > 0$. Senão, $\exists \tilde{t} > 0$ tal que $\alpha(\tilde{t}, u) > 0$. Tomando $\epsilon = \tilde{t}, \exists t' < \tilde{t} : \alpha(t, u) = 0, \forall t \geq t'$. Portanto $\alpha(\tilde{t}, u) = 0$, uma contradição.

Assim, $0 < \tau < \infty$ e existe uma sequência não decrescente (t_n) com $t_n \rightarrow \tau$ tal que $\alpha(t_n, u) > 0$; a possibilidade de $t_n = \tau$ para todo n é permitida.

Por (1) $\exists t > 0$ tal que $\alpha(t, u \cdot \tau) > 0$ e pela semicontinuidade inferior de $\alpha(t, \cdot)$ existe uma vizinhança U de $u \cdot \tau$ tal que $\alpha(t, v) > 0$ para $v \in U$. Agora, existe um n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $u \cdot t_n \in U$ pela continuidade da π e $t_n > \tau - t$. Mas por (2), $\alpha(t_n + t, u) \geq \alpha(t_n, u) \cdot \alpha(t, u \cdot t_n) > 0$. Desde que $t_n + t > \tau$ para $n \geq n_0$, temos que isso contraria a definição de τ .

Portanto está estabelecida a afirmação.

Tomemos $u \in S$ e definamos os conjuntos $U(h, t) = \{v \in \overline{X_1}, \alpha(t, v) > 1 + h\}$, $(h, t > 0)$. Pela semicontinuidade inferior de $\alpha(t, \cdot)$, cada $U(h, t)$ é aberto e por (1) a união desses abertos forma uma cobertura aberta de $\omega(u)$, ou seja, $\omega(u) \subset \bigcup_{t, h > 0} U(h, t)$.

De fato, sejam $v \in \omega(u)$, $\sup_{t > 0} \alpha(t, v) > 1$ e $h > 0$ tal que $1 < h < \sup_{t > 0} \alpha(t, v)$. Daí $\exists \bar{t} > 0$ tal que $\alpha(\bar{t}, v) > h = 1 + \bar{h}$, $\bar{h} > 0$. Logo $v \in U(\bar{h}, \bar{t})$ e $\omega(u) \subset \bigcup_{t, h > 0} U(h, t)$.

Como $\omega(u)$ é compacto, admite uma subcobertura finita. Segue que existem um conjunto finito $F \subset (0, \infty)$ e $\bar{h} > 0$ tais que $\omega(u) \subset \bigcup_{t \in F} U(\bar{h}, t) := W$.

Como $u \cdot t$ se aproxima de $\omega(u)$ quando $t \rightarrow \infty$ no sentido que $d(u \cdot t, \omega(u)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e utilizando a afirmação provada anteriormente, existe um $t_0 \in \mathbb{D}_+$ tal que $u \cdot t \in W$ para $t \geq t_0$ e $\eta := \alpha(t_0, u) > 0$.

Escolhamos n tal que $(1 + \bar{h})^n \cdot \eta > 1$. (4)

Seja (t_i) uma sequência infinita com $t_i \in F$ definida da seguinte maneira:

$t_1 \in F$ e $u \cdot t_0 \in U(\bar{h}, t_1)$;

$t_2 \in F$ e $u \cdot (t_0 + t_1) \in U(\bar{h}, t_2)$; (pode ocorrer $t_2 = t_1$)

•

•

•

$t_i \in F$ e $u \cdot \sum_{j=0}^{i-1} t_j \in U(\bar{h}, t_i)$;

•

•

Daí, por (3), (4) e da definição da sequência (t_i) temos:

$$\alpha(t_0 + \dots + t_n, u) = \alpha\left(\sum_{i=0}^n t_i, u\right) \geq \alpha(t_0, u) \cdot \prod_{j=1}^n \alpha\left(t_j, u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i\right) \geq \eta \cdot (1 + \bar{h})^n > 1,$$

pois $u \cdot \sum_{i=0}^{j-1} t_i \in U(\bar{h}, t_j)$. Assim, encontramos $\tilde{t} > 0$ tal que $\alpha(\tilde{t}, u) > 1$, e como afirmado, $\sup_{t>0} \alpha(t, u) > 1$, $u \in S$.

Desde que S é compacto, podemos concluir pela repetição do argumento de cobertura visto acima que existem um conjunto finito $G \subset (0, \infty)$ e um $h^* > 0$ tais que $S \subset \bigcup_{t \in G} U(h^*, t) := W_1$. Desde que W_1 é aberto, existe uma vizinhança fechada V de S com $V \subset W_1$, ou seja, $\exists \epsilon > 0$ tal que $V = \{x \in X : d(x, S) \leq \epsilon\} \subset W_1$. Usando o Lema 2.1.1 fazendo $N = X \setminus V$, vamos mostrar que $M = \gamma^+(\bar{N})$ é o conjunto absorvente requerido. Temos que $X \setminus V \subset X$ é aberto, $\overline{X \setminus V}$ é compacto e $X \setminus S$ é um subconjunto positivamente invariante de X tal que $\overline{X \setminus V} \subset X \setminus S$.

Resta mostrar que dado $u \in X \setminus S$, $\exists t \geq 0$ tal que $u \cdot t \in (X \setminus V)$.

De fato, se a afirmação é falsa, $u \cdot t \in V$ para algum $u \in X \setminus S$ e $\forall t \geq 0$.

Como anteriormente, podemos definir uma sequência infinita (t_i) com $t_i \in G$ da seguinte maneira:

$$t_0 \in G \text{ e } u \in U(h^*, t_0);$$

$$t_1 \in G \text{ e } u \cdot t_0 \in U(h^*, t_0 + t_1);$$

$$t_2 \in G \text{ e } u \cdot t_1 \in U(h^*, t_0 + t_1 + t_2);$$

•
•
•

Como anteriormente, usando (3), mostra-se que

$$\alpha(t_0 + \dots + t_n, u) \geq (1 + h^*)^{n+1}, \text{ ou seja,}$$

$$\liminf_{v \rightarrow u} \frac{P(v \cdot (t_0 + \dots + t_n))}{P(v)} \geq (1 + h^*)^{n+1}.$$

Da definição de α , podemos encontrar uma sequência (v_k) , com $v_k \in X_1 \setminus S_1$, $v_k \rightarrow u$, tal que

$$P(v_k \cdot (t_0 + \dots + t_n)) \geq (1 + h^*)^{n+1} \cdot P(v_k),$$

para $k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$P(u \cdot (t_0 + \dots + t_n)) \geq (1 + h^*)^{n+1} \cdot P(u), \forall n \in \mathbb{N}$$

levando a uma contradição, já que P é limitada.

Assim, as condições do Lema 2.1.1 estão satisfeitas e $\gamma^+(\overline{X \setminus V})$ é o conjunto compacto absorvente requerido.

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo veremos algumas aplicações da técnica da função média de Liapunov. O método depende da localização dos conjuntos ω -limite da fronteira. O modelo de equações diferenciais ordinárias tratado a seguir é essencialmente do tipo competição entre espécies. Nosso objetivo é mostrar como os resultados do capítulo anterior sobre permanência podem ser transferidos para o contexto de modelos guiados por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Uma explicação para um problema ecológico será dado como uma ilustração.



3.1 Uma Condição Suficiente para Permanência

Consideremos o sistema:

$$\dot{u}_i = u_i f_i(u) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

e seja $g_i(u) = u_i f_i(u)$.

Suponhamos que $f_i \in C^\infty$ o que assegura existência e unicidade de soluções em $\mathbb{R}_+^m$. Assumimos também que dissipatividade é assegurada, logo do Teorema 2.1.2 existe um conjunto compacto X absorvente para $\mathbb{R}_+^m$. Seja $S = X \cap \partial\mathbb{R}_+^m$; S e $X \setminus S$ são positivamente invariantes.

3.1.1 Definição: *Seja $P \in C^1(X \setminus S, \mathbb{R}_+)$, definimos $\dot{P} \in C^0(X \setminus S, \mathbb{R})$ por $\dot{P}(u) := \langle \nabla P(u), g(u) \rangle$, com produto interno usual e $\nabla P(u) = \left(\frac{\partial P(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial P(u)}{\partial u_m} \right)$.*

Temos que $\frac{dP(u \cdot t)}{dt} = \dot{P}(u \cdot t)$ é a derivada de P ao longo da órbita $\gamma^+(u)$. Seja

$$\psi(u) = \frac{\dot{P}(u)}{P(u)} = \frac{\langle \nabla P(u), g(u) \rangle}{P(u)}. \quad (2)$$

Nos exemplos, P será nula em S , o que significa que pode não existir uma extensão contínua de ψ a X . No entanto, se ψ é limitada inferiormente podemos definir uma extensão semicontínua inferiormente, ainda denotada por ψ , por:

$$\psi(u) = \liminf_{v \rightarrow u} \psi(v), \quad v \in X \setminus S, \quad u \in X. \quad (3)$$

Uma consequência imediata é a seguinte:



Para $v \in X \setminus S$,

$$\begin{aligned} \exp \left[\int_0^t \psi(v \cdot s) ds \right] &= \exp \left[\int_0^t \frac{\dot{P}(v \cdot s)}{P(v \cdot s)} ds \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t \frac{d}{ds} \log P(v \cdot s) ds \right] \\ &= \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} = \alpha(t, v). \end{aligned} \quad (4)$$

Vamos agora dar uma formulação mais prática para o Teorema 2.2.4.

3.1.2 Teorema: *Assumimos que $P \in C^1(X \setminus S, \mathbb{R}_+)$ e que ψ definida por (2) seja limitada inferiormente. Consideremos a extensão de ψ a X . Então, para todo $u \in S$, $\psi(u \cdot t)$ é localmente Lebesgue integrável para $t \geq 0$ e o sistema $\dot{u}_i = u_i f_i(u)$ é permanente se*

$$\sup_{t > 0} \int_0^t \psi(u \cdot s) ds > 0, \quad u \in \omega(S).$$

Demonstração: A primeira parte da tese segue do fato de que composta de função contínua com semicontínua inferiormente é semicontínua inferiormente, portanto mensurável. Afirmamos que

$$\liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \int_0^t \psi(v \cdot s) ds \geq \int_0^t \psi(u \cdot s) ds$$

De fato, definindo $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\beta(v) = \int_0^t \psi(v \cdot s) ds, \quad v \in X \setminus S \quad \text{e} \quad \beta(u) = \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \int_0^t \psi(v \cdot s) ds, \quad u \in S,$$

segue da definição de limite inferior, dado qualquer $u \in S$ existe uma seqüência (v_n) em $X \setminus S$ tendendo a u tal que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(v_n) = \beta(u). \quad (5)$$

Daí, pela continuidade da π , $v_n \cdot t \rightarrow u \cdot t$ quando $n \rightarrow \infty$, e usando a função semicontínua inferiormente temos por (3) que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n \cdot t) \geq \liminf_{\substack{z \rightarrow u \cdot t \\ z \in X \setminus S}} \psi(z) = \psi(u \cdot t). \quad (6)$$

Consideremos a seqüência (f_n) de funções contínuas onde $f_n(t) = \psi(v_n \cdot t)$. Elas são limitadas inferiormente e aplicando o conhecido Lema de Fatou, após acrescentar uma constante se necessário, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(v_n) \geq \int_0^t \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n \cdot s) ds. \quad (7)$$

Segue de (5), (6) e (7) que :

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \int_0^t \psi(v \cdot s) ds &= \beta(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(v_n) \geq \int_0^t \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(v_n \cdot s) ds \\ &\geq \int_0^t \liminf_{\substack{z \rightarrow u \cdot s \\ z \in X \setminus S}} \psi(z) ds \\ &= \int_0^t \psi(u \cdot s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Portanto a afirmação está estabelecida.

Agora, como ψ é limitada inferiormente, segue de (4) e da afirmação anterior que, para $u \in S$,

$$\begin{aligned}
\alpha(t, u) &= \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \frac{P(v \cdot t)}{P(v)} = \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \exp \left\{ \int_0^t \psi(v \cdot s) ds \right\} \\
&= \exp \left\{ \liminf_{\substack{v \rightarrow u \\ v \in X \setminus S}} \int_0^t \psi(v \cdot s) ds \right\} \\
&\geq \exp \left\{ \int_0^t \psi(u \cdot s) ds \right\} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\sup_{t>0} \alpha(t, u) > 0$ para $u \in S$, o que satisfaz a segunda condição do Teorema 2.2.4.

Para estabelecer a primeira condição, usaremos a hipótese $\sup_{t>0} \int_0^t \psi(u \cdot s) ds > 0$, $u \in \omega(S)$, somada às condições (4) e (8).

Segue que, $\sup_{t>0} \int_0^t \psi(u \cdot s) ds = \sup_{t>0} \log \alpha(t, u) > 0$.

Daí, $\sup_{t>0} \alpha(t, u) = \sup_{t>0} \exp \left[\int_0^t \psi(u \cdot s) ds \right] = \exp \left[\sup_{t>0} \int_0^t \psi(u \cdot s) ds \right] > \exp(0) = 1$, o que implica que $\sup_{t>0} \alpha(t, u) > 1$, $u \in \omega(S)$, e o teorema está demonstrado.

Vamos aplicar este resultado a um problema de convivência de três espécies em ecologia. Consideremos o sistema $\dot{u}_i = u_i f_i(u)$ para $i = 1, 2, 3$ e suponhamos que:

i) $\exists K$ tal que $f_i(u) < 0$ se $u_i \geq K$ onde $u = (u_1, u_2, u_3)$.

ii) Existem $k_1, k_2, k_3 \in (0, \infty)$ tais que $(u_1 - k_1)f_1(u_1, 0, 0) < 0$ ($u_1 \geq 0, u_1 \neq k_1$), e similarmente a inequação vale para k_2 e k_3 . Os pontos $K_1 = (k_1, 0, 0)$, $K_2 = (0, k_2, 0)$ e $K_3 = (0, 0, k_3)$ são pontos de equilíbrio e os k_i 's são as capacidades de cada espécie.

iii) $\beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{31} < 0$ e $\beta_{21}, \beta_{32}, \beta_{13} > 0$, onde $\beta_{ij} = f_j(K_i)$.

iv) Não existem pontos de equilíbrio no interior das faces.

A condição (i) implica dissipatividade. As inequações dadas na condição (ii) asseguram que os pontos K_1 , K_2 e K_3 são atratores nos eixos. A condição (iii) é técnica e (iv) garante que não existem órbitas periódicas nas faces. Assim, considerando todas as condições, temos que $\omega(S) = \{0, K_1, K_2, K_3\}$.

Vamos tomar a função $P(u) = u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}$, $u \in \mathbb{R}_+^3$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\dot{P}(u)}{P(u)} \\ &= \frac{\langle \nabla P(u), g(u) \rangle}{P(u)} \\ &= \frac{\left\langle \left(\frac{\partial P(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial P(u)}{\partial u_2}, \frac{\partial P(u)}{\partial u_3} \right), (u_1 f_1(u), u_2 f_2(u), u_3 f_3(u)) \right\rangle}{u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}} \\ &= \frac{\langle (\alpha_1 u_1^{\alpha_1-1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}, \alpha_2 u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2-1} \cdot u_3^{\alpha_3}, \alpha_3 u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3-1}), (u_1 f_1(u), u_2 f_2(u), u_3 f_3(u)) \rangle}{u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}} \\ &= \frac{\alpha_1 f_1(u) u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3} + \alpha_2 f_2(u) u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3} + \alpha_3 f_3(u) u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}}{u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot u_3^{\alpha_3}} \\ &= \alpha_1 f_1(u) + \alpha_2 f_2(u) + \alpha_3 f_3(u) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i(u). \end{aligned}$$

Do Teorema 3.1.2 é suficiente, para garantir permanência, que exista um α_i não-negativo tal que $\psi(u) > 0$ para $u \in \omega(S)$ e isto acontecerá se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- I) Para $u = 0$, $\psi(0) > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i(0) > 0$;
- II) Para $u = K_1$, $\psi(K_1) = \alpha_1 f_1(K_1) + \alpha_2 f_2(K_1) + \alpha_3 f_3(K_1) = \alpha_2 f_2(K_1) + \alpha_3 f_3(K_1) > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \beta_{12} + \alpha_3 \beta_{13} > 0$.
- III) Para $u = K_2$, $\psi(K_2) = \alpha_1 f_1(K_2) + \alpha_2 f_2(K_2) + \alpha_3 f_3(K_2) = \alpha_1 f_1(K_2) + \alpha_3 f_3(K_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_{21} + \alpha_3 \beta_{23} > 0$.
- IV) Para $u = K_3$, $\psi(K_3) = \alpha_1 f_1(K_3) + \alpha_2 f_2(K_3) + \alpha_3 f_3(K_3) = \alpha_1 f_1(K_3) + \alpha_2 f_2(K_3) > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_{31} + \alpha_2 \beta_{32} > 0$.

Portanto, se existam α_1 , α_2 e α_3 não negativos tais que as desigualdades

$$\alpha_1 f_1(0) + \alpha_2 f_2(0) + \alpha_3 f_3(0) > 0,$$

$$\alpha_2 \beta_{12} + \alpha_3 \beta_{13} > 0,$$

$$\alpha_1 \beta_{21} + \alpha_3 \beta_{23} > 0,$$

$$\alpha_1 \beta_{31} + \alpha_2 \beta_{32} > 0,$$

estão satisfeitas, utilizando o Teorema 3.1.2 concluímos que o sistema é permanente.

3.2 Sistemas de Lotka-Volterra

Vimos que a aplicação da técnica descrita requer o conhecimento do conjunto ω -limite da fronteira de S . No entanto, para equações diferenciais em dimensões tão baixas como três, localizar o conjunto ω -limite pode ser um problema desgastante e para dimensões maiores que três, poderá ser extremamente difícil. Este é o obstáculo principal para o estudo de permanência em sistemas biológicos de dimensões altas. No entanto, um bom progresso obtemos com uma importante classe de sistemas, do

tipo Lotka-Volterra. A chave da análise é uma observação simples de Volterra: as órbitas possuem uma certa propriedade média como veremos no próximo lema.

3.2.1 Definição: *Um sistema de Lotka-Volterra é um sistema da forma*

$$\dot{u}_i = u_i \left[a_i - \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \right], \quad i = 1, \dots, m,$$

onde a_i e b_{ij} são constantes.

Lembramos que o valor médio de $u_i(t)$ no intervalo $[0, t]$ é dado por

$$\overline{u}_i(t) = t^{-1} \int_0^t u_i(s) ds.$$

Tomemos a função $P(u) = \prod_{i=1}^m u_i^{\alpha_i}$, $u \in \mathbb{R}_+^m$.

Do Teorema 3.1.2, permanência é assegurada se existir uma escolha de α_i 's > 0 tais que

$$\sup_{t>0} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \left[a_i - \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(s) \right] \right) ds > 0, \quad u \in \omega(S).$$

Em termos de valores médios a inequação acima fica da seguinte maneira:

$$\sup_{t>0} \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[a_i - \sum_{j=1}^m b_{ij} \overline{u}_j(t) \right] > 0. \quad (\star)$$

Consideremos o subsistema k -dimensional de Volterra, $1 \leq k \leq m$, k fixado.

$$\dot{u}_i = u_i \left[a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j \right] \quad (i = 1, \dots, k). \quad (\star\star)$$

Variando k e reordenando adequadamente os índices, temos o sistema original restrito aos eixos coordenados, aos planos e hiperplanos que compõem a fronteira de $\mathbb{R}_+^m$, quando $k < m$. Vamos assumir que existe precisamente um equilíbrio

$$u^* \in \text{int } \mathbb{R}_+^k.$$

3.2.2 Lema: Para algum $u = u(0) \in \mathbb{R}_+^k$ suponha que existam $A, B \in (0, \infty)$ e $t_u \in \mathbb{D}_+$ tal que :

$$A \leq u_i(t) \leq B \quad (i = 1, \dots, k \text{ e } t \geq t_u).$$

$$\text{Então} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(t) = u^*.$$

Demonstração: Dividindo cada equação de $(\star\star)$ pelo u_i correspondente, integrando em $[0, t]$ e dividindo por t , teremos : $\frac{\dot{u}_i}{u_i} = a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{u}_i(s)}{u_i(s)} ds = \int_0^t \left(a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j(s) \right) ds \Rightarrow t^{-1} \log \left(\frac{u_i(t)}{u_i(0)} \right) = a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} \bar{u}_j(t).$

Como $u_i(t)$ é limitada (para $t \geq t_u$, $A \leq u_i(t) \leq B$), temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{u_i(t)}{u_i(0)} \right)}{t} = 0, \text{ de onde segue que}$$

$$a_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k b_{ij} \bar{u}_j(t) = \sum_{j=1}^k b_{ij} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_j(t) \right),$$

para $i = 1, 2, \dots, k$. Pondo $v_i^* := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_i(t)$, vemos que $a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} v_j^* = 0$,
 $i = 1, 2, \dots, k$.

Como o sistema tem um único ponto crítico u^* no interior da face $\mathbb{R}_+^k$, esse ponto crítico é exatamente o ponto $u^* = (v_1^*, \dots, v_k^*)$.

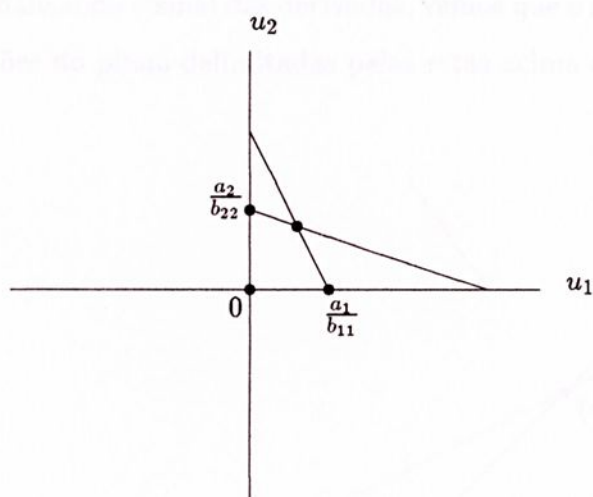
Observação: Se as condições do lema estão satisfeitas, tomando $t \rightarrow \infty$ em $(\star)$, então é suficiente para permanência que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left[a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} u_j^* \right] > 0.$$

Como exemplo, examinemos o caso bidimensional

$$\dot{u}_i = u_i \left[a_i - \sum_{j=1}^2 b_{ij} u_j \right],$$

para $i = 1, 2$. Uma situação possível dentro das hipóteses consideradas é a que apresenta quatro pontos críticos indicados na figura abaixo:



Da última observação é suficiente para garantir permanência que:

$$\alpha_1(a_1 - b_{11}u_1^* - b_{12}u_2^*) + \alpha_2(a_2 - b_{21}u_1^* - b_{22}u_2^*) > 0.$$

Como neste caso $u_1^* = \frac{a_1}{b_{11}}$ e $u_2^* = \frac{a_2}{b_{22}}$, é suficiente que $b_{12} < 0$ e $b_{21} < 0$.

Vamos aplicar este resultado em um exemplo ecológico.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{u}_1 = u_1(1 - u_1 + u_2)$$

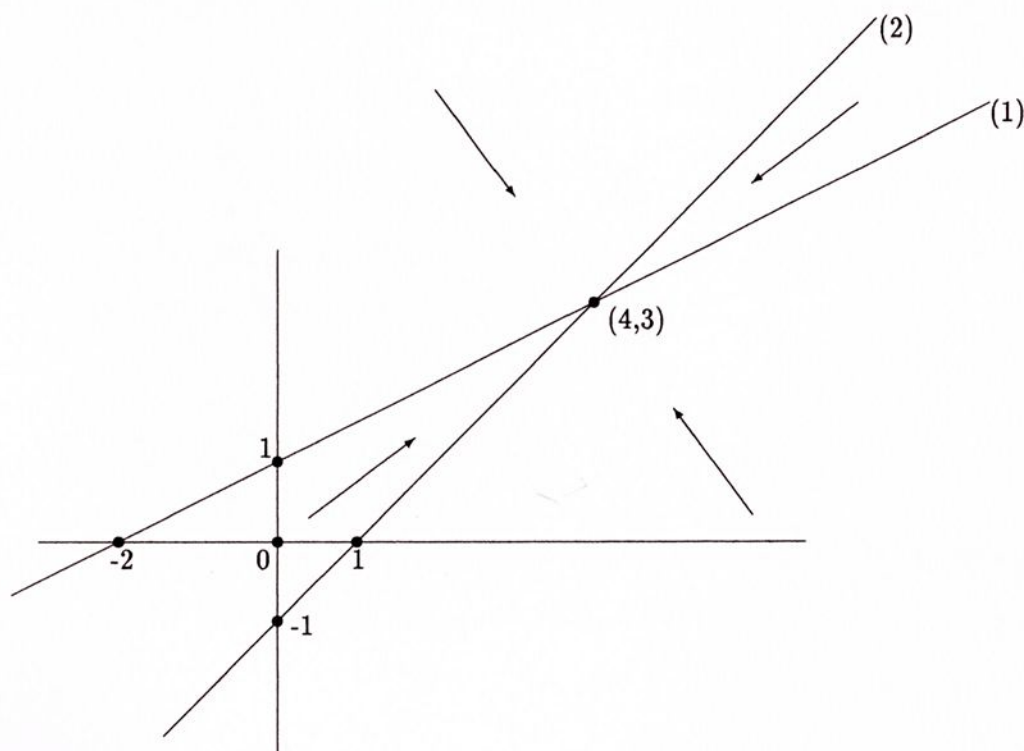
$$\dot{u}_2 = u_2(2 + u_1 - 2u_2).$$

Essas equações descrevem a interação entre duas espécies, u_1 e u_2 , na qual, em ambos os casos, a relação entre a mesma espécie ou relação intraespecífica é desarmônica enquanto que a relação entre espécies distintas ou relação interespecífica é harmônica.

Os pontos críticos são: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(4,3)$.

Consideremos as retas: $2 + u_1 - 2u_2 = 0$ (1) e $1 - u_1 + u_2 = 0$ (2).

Analisando o sinal das derivadas, vemos que o sentido das órbitas em cada uma das regiões do plano delimitadas pelas retas acima é o indicado na figura abaixo.



Isto sugere que o ponto de equilíbrio populacional $(4,3)$ é assintoticamente estável, e o sistema é portanto permanente. Isto significa que as espécies u_1 e u_2 se aproximam deste ponto e então não serão extintas. Esta é a idéia de permanência. Aplicando o resultado obtido acima temos que, para este exemplo, $b_{12} = -1$ e $b_{21} = -1$, ou seja, o sistema é de fato, permanente.



Bibliografia

- [1] Aliprantis, C.D.; Burkinshaw, O.; *Principles of Real Analysis* , North Holland, N. Y., 1981.
- [2] Dugundji, J; *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1974.
- [3] Haberman, R; *Mathematical Models*, Classics in Applied Mathematics, v. 21, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [4] Hutson, V.; A Theorem on Average Liapunov Functions, *Monatshefte für Mathematik*, Springer-Verlag, Berlim, v.98, p.267-275, 1984.
- [5] Hutson, V.; Schmitt, K.; Permanence and the Dynamics of Biological Systems, *Mathematical Biosciences*, v.111, p.1-71, 1992.
- [6] Jansen W.; A Permanence Theorem for Replicator and Lotka-Volterra Systems, *Journal of Mathematical Biology*, v.25, p.411-422, 1987.



