



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Thaís da Silva Mussolin

Fator Integrante Inverso e suas Aplicações

São José do Rio Preto
2021

Thaís da Silva Mussolin

Fator Integrante Inverso e suas Aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2021

M989f	Mussolin, Thais da Silva Fator Integrante Inverso e suas Aplicações / Thais da Silva Mussolin. -- São José do Rio Preto, 2021 106 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: Claudio Gomes Pessoa 1. Fator Integrante Inverso. 2. Sistemas Diferenciais. 3. Ciclos Limites. 4. Teoria de Integrabilidade de Darboux. 5. Centro-Foco. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Thaís da Silva Mussolin

Fator Integrante Inverso e suas Aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
Orientador

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Durval José Tonon
UFG - Universidade Federal de Goiás

São José do Rio Preto
15 de março de 2021

*Dedico este trabalho à Deus, aos meus pais, Fabiana e Edson,
aos meus irmãos, Iago e Hugo, e ao meu orientador.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, o autor da vida, e à Ele dou honra e glória por me permitir chegar até aqui.

Em segundo, à toda minha família. Aos meus pais, Fabiana e Edson, que sempre me apoiaram e acreditaram que meu sonho poderia sim, se tornar realidade. Aos meus irmãos, em especial Iago, Hugo e Marcela, que continuamente dizem que a única coisa que sei é matemática. As minhas tias, tia Dinha e tia Nena, mulheres com um coração enorme que em toda a minha vida acadêmica se dispuseram a me ajudar. Ao Joaquim, por me mostrar um mundo novo.

Aos meus melhores amigos, Carlos Henrique, que torceu comigo em todos os momentos, à Isabela que orou por mim e ao Aldimir, por me fazer rir em todo tempo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa, pessoa de extrema competência, que acreditou na minha capacidade. Obrigado por todos os ensinamentos, paciência e dedicação. Sou eternamente grata.

Aos meus colegas de estudo, à Thaís, minha xará maravilhosa, ao Neto e ao Marcos.

Ao Lucas, mais conhecido como ciumento, grátfico e reconheço toda calma e bondade.

À banca examinadora, Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia e Prof. Dr. Durval José Tonon, pela disponibilidade.

À todos que, de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu concluísse este trabalho.

Por fim, e não menos importante, à CAPES, pelo apoio financeiro o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“[...] tudo o que pedirdes em oração, crendo que o recebestes,
será vosso.”*

Marcos 11-24, A Bíblia Sagrada

RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo do fator integrante inverso de sistemas diferenciais planares. O fator integrante inverso está principalmente relacionado à solução do problema de integrabilidade de campo de vetores planares, uma vez que a existência de um fator integrante inverso nos permite determinar uma integral primeira para o sistema. Entretanto, veremos várias outras aplicações relacionadas ao fator integrante inverso. De fato, o estudo do fator integrante inverso e suas propriedades é utilizado nos principais problemas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Cada capítulo apresenta a relação do fator integrante inverso com um problema clássico da teoria, tais como o Problema do Centro-Foco, bifurcação e posição relativa de ciclos limites. Apresentamos também uma breve generalização do conceito de fator integrante inverso para sistemas dinâmicos n -dimensionais.

Palavras-chave: Fator Integrante Inverso, Sistemas Diferenciais, Ciclos Limites, Teoria de Integrabilidade de Darboux, Centro-Foco.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of the inverse integrating factor of planar differential systems. The inverse integrating factor is mainly related to the solution of the integrability problem of planar vector fields, since the existence of an inverse integrating factor allows us to determine a first integral for the system. However, we will see several other applications related to the inverse integrating factor. In fact, the study of the inverse integrating factor and its properties is used in the main problems of the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. Each chapter presents the relation between the inverse integrating factor and a classic problem of the theory, such as the Center-Focus Problem, bifurcation and relative position of limit cycles. We also present a brief generalization of the concept of inverse integrating factor for n -dimensional dynamical systems.

Keywords: Inverse Integrating Factor, Differential Systems, Limit cycles, Darboux Theory of Integrability, Center-Focus.

Sumário

1	Introdução	17
2	Integrabilidade e Soluções Algébricas de Campos de Vetores Polinomi- ais	21
2.1	Introdução	21
2.2	Integral Primeira e Invariante	21
2.3	Fatores de Integração	23
2.4	Curvas Algébricas Invariantes	24
2.5	Fator Exponencial	25
2.6	O Método de Darboux	28
2.7	Algumas Aplicações da Teoria de Darboux	32
3	Fator Integrante Inverso	35
4	Sobre o Problema de Integrabilidade	39
5	Fator Integrante Inverso e o Problema do Centro-Foco	51
6	Aplicações do Fator Integrante Inverso no Estudo de Ciclo Limite	57
7	O Conjunto Zero do Fator Integrante Inverso	61
7.1	Pontos Críticos, Separatrizes e Conjuntos Limites	61
7.2	Integral Invariante e Fator Integrante Inverso	66
8	Bifurcação e o Fator Integrante Inverso	71
8.1	Bifurcação a partir de um Anel de Órbitas Periódicas	72
8.2	Bifurcação de Conjuntos ω -limite Monodrômicos	76
8.3	Bifurcação de Hopf Generalizada	81
8.4	O Problema do Centro Revisado	91
8.5	Perturbações Singulares	92
9	O Multiplicador inverso de Jacobi	95
10	Conclusão	99
	Referências	101
	Índice Remissivo	105

1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho é analisar as funções $V(x, y)$, não nulas, de classe $\mathcal{C}^1$, que satisfazem a equação diferencial parcial

$$P(x, y)\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) V(x, y), \quad (1.1)$$

onde P e Q são funções de classe C^r , $r \geq 1$, ou analíticas, definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Tais funções são denominadas de *fatores integrantes inversos*.

A principal propriedade relacionada aos fatores integrantes inversos, é o fato de que sua existência nos permite encontrar uma integral primeira para o campo de vetores $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. A existência de uma integral primeira determina o retrato de fase do campo de vetores X . Veremos, no entanto, que os fatores integrantes inversos possuem muitas outras propriedades que permitem o estudo de vários outros aspectos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Por exemplo, propriedades do fator integrante inverso podem ser aplicadas no estudo do Problema do Centro-Foco e na determinação do número de ciclos limites e sua localização no retrato de fase.

A primeira relação do fator integrante inverso com um outro objeto matemático (além de sua relação com as integrais primeiras, é claro!), a saber, o ciclo limite, é apresentada por Giacomini, Llibre e Viano em 1996. A partir daí, muitos artigos de pesquisa começaram a ser desenvolvidos para estudar as propriedades do fator integrante inverso.

O nome “fator integrante inverso” foi cunhado em 1998 por Chavarriga e Giné. Um ano antes, em 1997, os mesmos matemáticos juntamente com Giacominni haviam denominado a função V , que satisfaz (1.1), de “fator de divergência nulo”. Mas como vemos, nos dias atuais, o segundo nome foi o mais aceito na comunidade matemática. E a justificativa, é que se V satisfaz a equação (1.1), então $1/V$ é um fator integrante do campo de vetores X em $U \setminus V^{-1}\{0\}$, isto é, $X(1/V) = -(1/V)\text{div}X$. Daí segue a relação entre o fator integrante inverso e a existência de integrais primeiras, uma vez que a integral primeira pode ser obtida a partir de um fator integrante. É curioso observar que em geral o fator integrante inverso possui uma expressão mais simples do que o fator integrante, sem falar que as suas propriedades são muito mais abrangentes. Entretanto, verificar se um campo de vetores possui um fator integrante inverso pode ser uma tarefa muito difícil.

No Capítulo 1, introduzimos o conceito de integrabilidade e estudamos a existência de uma integral primeira para sistemas diferenciais polinomiais planares através da Teoria de Integrabilidade de Darboux. Essa teoria mostra que existe uma ligação entre o número de curvas algébricas invariantes e de fatores exponenciais de um campo de vetores X com sua integrabilidade.

O objeto principal do nosso estudo, o fator integrante inverso, é introduzido no Capítulo 2. Neste capítulo apresentamos algumas propriedades básicas que são úteis para os próximos capítulos.

A relação entre a integrabilidade de um campo de vetores e um fator integrante inverso é aprofundada no Capítulo 3. O principal resultado deste capítulo (Teorema 4.13) garante que um campo de vetores com uma integral primeira racional tem um fator integrante inverso polinomial se, e somente se, a integral primeira racional tem no máximo dois valores notáveis críticos. Provamos também que a existência de um fator integrante inverso racional produz uma integral primeira do tipo Darboux. Encerramos o capítulo com um resultado que fornece uma cota para o grau de um fator integrante inverso polinomial associado a um fator notável.

Um dos problemas mais antigo e importantes da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, consiste em determinar condições necessárias e suficientes para distinguir quando o retrato de fase na vizinhança de um ponto singular, cuja parte linear do campo de vetores neste ponto tem autovalores puramente imaginários, é um centro ou um foco. Este problema é denominado de Problema do Centro-Foco. No Capítulo 4 mostraremos como é possível resolver este problema em termos da existência de um fator integrante inverso. Todavia, como no caso do Teorema de Poincaré-Lyapunov, os resultados são teóricos, ou seja, na prática a solução envolve cálculos computacionais impossíveis de serem implementados, mesmo em máquinas extremamente potentes.

O principal problema da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, sem dúvida, trata-se de determinar o número e a posição dos ciclos limites de sistemas de equações diferenciais. Os ciclos limites são órbitas periódicas, isoladas no conjunto de todas as órbitas periódicas de um sistema diferencial. No Capítulo 5, a localização no retrato de fase de um ciclo limite para um campo de vetores X de classe C^1 com um fator integrante inverso V é determinada. Mais precisamente, mostraremos que se X tem um ciclo limite γ , então $\gamma \subset V^{-1}(0)$.

No Capítulo 6 estudamos o conjunto dos zeros do fator integrante inverso V de um campo de vetores X . Como visto no Capítulo 5, o conjunto $V^{-1}(0)$ pode fornecer informações cruciais para a determinação do retrato de fase de X . Por exemplo a existência e a posição relativa dos ciclos limites. Veremos que se $V^{-1}(0)$ consiste de um único ponto singular, então a estabilidade deste ponto pode ser determinada pelo sinal de V e do divergente de X na vizinhança do ponto. Veremos também, sob certas hipóteses, que V se anula ao longo dos pontos de sela, de pontos singulares com exatamente um autovalor nulo, ao longo das separatrizes destes tipos de pontos singulares e também ao longo de políciclos cujos pontos singulares são selas hiperbólicas e selas-nó com um único autovalor nulo.

O estudo da bifurcação de ciclos limites, a partir de pontos singulares monodrômicos e a partir de anéis de órbitas periódicas, e sua relação com a existência de um fator integrante inverso é explorado no Capítulo 7. Neste capítulo, também obtemos um resultado que envolve o fator integrante inverso e o estudo de uma generalização do Problema do Centro-Foco para pontos singulares monodrômicos simples, isto é, que não possuem direções características. Terminamos o Capítulo 7 com um resultado que relaciona o fator integrante inverso e o estudo do problema de perturbação singular.

Finalmente, no oitavo e último capítulo, encerramos o texto com o multiplicador inverso de Jacobi, o qual é uma generalização do fator integrante inverso para sistemas diferenciais n -dimensionais, para $n \geq 3$. Investigamos até que ponto algumas boas propriedades do conjunto de zeros do fator integrante inverso são preservadas no caso n -dimensional. Mostramos que, sob certas hipóteses, os ciclos limites, quando existem, estão contidos no conjunto dos zeros do multiplicador inverso de Jacobi. Além disso, o multiplicador de Jacobi também se anula sobre variedades invariantes estáveis e instáveis

de pontos singulares, desde que o divergente do campo no ponto singular seja diferente de zero e tenha sinal apropriado.

2 Integrabilidade e Soluções Algébricas de Campos de Vetores Polinomiais

Neste capítulo trabalhamos com campos vetoriais planares polinomiais. Mostraremos a relação entre o número de curvas algébricas invariantes do campo de vetores e a existência de uma integral primeira. A existência de uma integral primeira é muito importante, pois está determina completamente o retrato de fase do campo vetorial.

Os resultados deste capítulo podem ser consultados no Capítulo 8 do livro [1].

2.1 Introdução

Denotaremos por $\mathbb{F}$ o corpo real $\mathbb{R}$ ou o corpo complexo $\mathbb{C}$ e por $\mathbb{F}[x, y]$ o anel dos polinômios nas variáveis x e y com coeficientes em $\mathbb{R}$. Considere o sistema diferencial polinomial bidimensional (ou simplesmente o sistema polinomial)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.1)$$

onde x e y são as variáveis dependentes, t é a variável independente (o tempo) e $P, Q \in \mathbb{F}[x, y]$. Sendo $\deg P$ e $\deg Q$ o grau de P e Q , respectivamente, denotaremos por $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ o grau do sistema polinomial.

Se p é um ponto tal que $P(p) = Q(p) = 0$, então nós dizemos que p é um ponto singular do sistema polinomial.

2.2 Integral Primeira e Invariante

Considere o campo vetorial X associado ao sistema (2.1)

$$X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y},$$

ou simplesmente $X = (P, Q)$.

Segue do sistema (2.1) que

$$dt = \frac{dx}{P(x, y)} \quad \text{e} \quad dt = \frac{dy}{Q(x, y)},$$

isto é,

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \Leftrightarrow P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0.$$

Em outras palavras, ao sistema (2.1) associamos à equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0.$$

Definição 2.1. Seja X um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em U . Definimos a 1-forma diferencial associada ao campo vetorial como sendo $\omega = Qdx - Pdy$.

Observe que a equação diferencial ordinária $\omega = 0$ é exatamente a equação diferencial das órbitas do sistema (2.1).

Definição 2.2. O sistema polinomial (2.1) é integrável em um subconjunto aberto U de $\mathbb{F}^2$ se existe uma função analítica e não constante $H : U \rightarrow \mathbb{F}$, chamada integral primeira do sistema em U , que é constante ao longo das soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (2.1) contidas em U , isto é,

$$H(x(t), y(t)) = \text{constante},$$

para todos os valores de t tais que a solução $(x(t), y(t))$ está definida e contida em U .

Observação 2.3. Note que uma integral primeira H revela de forma implícita o retrato de fase de um campo vetorial polinomial bidimensional, pois as curvas soluções do sistema estão contidas nas curvas de nível de H . Além disso, a Definição 2.2 é equivalente a dizer que H é uma integral primeira do sistema (2.1) se, e somente se, $XH = H_x P(x, y) + H_y Q(x, y) = 0$ em U .

Definição 2.4. Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em $U \subset \mathbb{F}^2$. O sistema associado a este campo é Hamiltoniano se existir uma função $H(x, y)$ analítica, chamada de função Hamiltoniana, tal que

$$\dot{x} = P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Obviamente a função Hamiltoniana é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano. Note também, se $F : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ é uma função analítica não nula, então a composição $F(H)$ é uma integral primeira.

Definição 2.5. Seja $U \subset \mathbb{F}^2$ um conjunto aberto. Nós dizemos que uma função analítica $H(x, y, t) : U \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ é um invariante do campo vetorial polinomial X em U se $H(x, y, t) = \text{constante}$ para todos os valores de t para o qual a solução $(x(t), y(t))$ está definida e contida em U .

Vale observar que se um invariante H é independente de t então H é uma integral primeira.

2.3 Fatores de Integração

Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{F}^2$ e $R : U \rightarrow \mathbb{F}$ uma função analítica que não é identicamente nula em U .

Definição 2.6. A função R é dita um fator integrante ou um fator de integração do sistema polinomial (2.1) em U se uma das três condições equivalentes se verifica em U :

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}, \quad \text{div}(RP, RQ) = 0, \quad XR = -R\text{div}(P, Q).$$

Como de costume o *divergente* do campo vetorial X é definido por

$$\text{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

A integral primeira H associada ao fator de integração R é dada por

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x), \quad (2.2)$$

onde h é escolhido tal que $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$. Então,

$$RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad RQ = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Vale destacar que um fator de integração é tão importante quanto uma integral primeira, visto que se tivermos um fator integrante do sistema polinomial basta substituímos em (2.2) que teremos uma integral primeira. Não obstante, resolver a integral em (2.2) pode não ser tão simples, porém, o resultado abaixo diz que se encontrarmos dois fatores de integração para o sistema, a razão entre estas funções é uma integral primeira.

Proposição 2.7. Se o sistema polinomial (2.1) tem dois fatores de integração R_1 e R_2 em um subconjunto aberto U de $\mathbb{F}^2$, então no aberto $U \setminus \{R_2 = 0\}$ a função $\frac{R_1}{R_2}$ é uma integral primeira.

Demonstração: Temos que R_1 e R_2 são fatores de integração, então segue da definição que $XR_i = -R_i\text{div}(P, Q)$, para $i = 1, 2$. Daí basta mostrarmos que $X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 0$. Assim

$$\begin{aligned} X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) &= P\frac{\partial(R_1 \setminus R_2)}{\partial x} + Q\frac{\partial(R_1 \setminus R_2)}{\partial y} \\ &= P\frac{\frac{\partial R_1}{\partial x} \cdot R_2 - R_1 \cdot \frac{\partial R_2}{\partial x}}{R_2^2} + Q\frac{\frac{\partial R_1}{\partial y} \cdot R_2 - R_1 \cdot \frac{\partial R_2}{\partial y}}{R_2^2} \\ &= \frac{\left(P\frac{\partial R_1}{\partial x} + Q\frac{\partial R_1}{\partial y}\right)R_2 - R_1\left(P\frac{\partial R_2}{\partial x} + Q\frac{\partial R_2}{\partial y}\right)}{R_2^2} \\ &= \frac{(XR_1)R_2 - R_1(XR_2)}{R_2^2} = 0. \end{aligned}$$

■

2.4 Curvas Algébricas Invariantes

Definição 2.8. Seja $f \in \mathbb{F}[x, y]$ tal que $f \not\equiv 0$. A curva algébrica $f(x, y) = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema polinomial (2.1) se para algum polinômio $K \in \mathbb{F}[x, y]$ nós tivermos

$$Xf = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \quad (2.3)$$

O polinômio K é chamado de cofator da curva algébrica invariante.

Note que, se o sistema polinomial tem grau m então qualquer cofator tem no máximo grau $m - 1$. De fato, isto segue pela igualdade de polinômios na equação (2.3). Além disso, nos pontos da curva algébrica invariante $f = 0$ o gradiente de f é ortogonal ao campo vetorial $X = (P, Q)$. Ou seja, $f = 0$ é invariante pelo fluxo de X .

Dado um polinômio f denotamos por $\bar{f}$ o seu conjugado, onde a operação de conjugação significa apenas a conjugação dos coeficientes do polinômio. Embora esta não seja a operação usual de conjugação, ela é equivalente à conjugação usual se restringirmos às variáveis $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 2.9. Para um sistema polinomial real (2.1), $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K se, e somente se, $\bar{f} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $\bar{K}$.

Demonstração: Como P e Q são polinômios reais, então $\bar{P} = P$, $\bar{Q} = Q$ e

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf \Leftrightarrow \overline{P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y}} = \overline{Kf} \Leftrightarrow P \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + Q \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \bar{K} \bar{f}.$$

■

Lema 2.10. Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. Nós assumiremos que f e g são relativamente primos no anel $\mathbb{C}[x, y]$. Então, para um sistema polinomial (2.1), $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_{fg} se, e somente se, $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores K_f e K_g , respectivamente. Além disso, $K_{fg} = K_f + K_g$.

Demonstração: Primeiro assumimos que $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores K_f e K_g , respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} X(fg) &= P \frac{\partial(fg)}{\partial x} + Q \frac{\partial(fg)}{\partial y} = P \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right) + Q \left(\frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) g + f \left(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= (Xf)g + f(Xg) \\ &= fK_f g + gK_g f \\ &= fg(K_f + K_g). \end{aligned}$$

Portanto, $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema com cofator $K_{fg} = K_f + K_g$.

Reciprocamente se $X(fg) = K_{fg}fg$, como $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$, segue que

$$K_{fg}fg = (Xf)g + f(Xg).$$

Como f divide o lado esquerdo da última igualdade, f divide o lado direito. Agora, como f e g são relativamente primos, segue que f divide Xf . Portanto, $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_f = \frac{Xf}{f}$. Analogamente $g = 0$ é também uma curva algébrica invariante do sistema com cofator $K_g = \frac{Xg}{g}$. ■

Proposição 2.11. *Suponha $f \in \mathbb{C}[x, y]$ e seja $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ sua fatoração irredutível em $\mathbb{C}[x, y]$. Então, para o sistema polinomial (2.1), $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_f se, e somente se, f_i é uma curva algébrica invariante com cofator K_{f_i} , para cada $i = 1, \dots, r$. Além disso, $K_f = n_1 K_{f_1} + \dots + n_r K_{f_r}$.*

Demonstração: Pelo Lema anterior, sabemos que $f = 0$ é curva algébrica invariante se, e somente se, $f_i^{n_i}$ é curva algébrica invariante para cada $i = 1, \dots, r$ com cofator $K_{f_i^{n_i}}$. Além disso, $K_f = K_{f_1^{n_1}} + \dots + K_{f_r^{n_r}}$.

Assim, para provarmos a Proposição é suficiente mostrar que, para cada $i = 1, \dots, r$, $f_i^{n_i}$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_{f_i^{n_i}}$ se, e somente se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_{f_i} , e que $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$.

Assumiremos então que $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_{f_i^{n_i}}$. Então

$$K_{f_i^{n_i}} f_i^{n_i} = X(f_i^{n_i}) = P \frac{\partial f_i^{n_i}}{\partial x} + Q \frac{\partial f_i^{n_i}}{\partial y} = n_i f_i^{n_i-1} P \frac{\partial f_i}{\partial x} + n_i f_i^{n_i-1} Q \frac{\partial f_i}{\partial y} = n_i f_i^{n_i-1} X(f_i).$$

Logo,

$$X(f_i) = \frac{1}{n_i} K_{f_i^{n_i}} f_i.$$

Definindo $K_{f_i} = \frac{K_{f_i^{n_i}}}{n_i}$, nós obtemos $f_i = 0$ uma curva algébrica invariante com cofator K_{f_i} tal que $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$. A recíproca segue de forma semelhante. ■

2.5 Fator Exponencial

Veremos adiante que as curvas algébricas invariantes desempenham um papel importante na obtenção de uma integral primeira do sistema polinomial (2.1). Existe também um outro objeto, que desempenha o mesmo papel, chamado de fator exponencial. Antes de introduzirmos a definição formal, explicaremos como esse objeto surge naturalmente. Sejam $h_\varepsilon = h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2) = 0$ curvas algébricas invariantes com cofatores K_{h_ε} para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, com ε_0 suficientemente pequeno. Como $X(h_\varepsilon) = K_{h_\varepsilon} h_\varepsilon$, se expandirmos o cofator K_{h_ε} como uma série de potência em ε , nós obtemos $K_{h_\varepsilon} = K_h + \varepsilon K + O(\varepsilon^2)$, onde K é um polinômio de grau no máximo $m - 1$. Assim, na vizinhança de pontos onde h

não se anula, temos

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right) &= \frac{\partial(h_\varepsilon/h)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial(h_\varepsilon/h)}{\partial y} \dot{y} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{h^2} \dot{x} + \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}\right)}{h^2} \dot{y} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y} \dot{y}\right)}{h^2} h - \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y}\right)}{h^2} h_\varepsilon \\
&= \frac{X(h_\varepsilon) \cdot h - X(h) \cdot h_\varepsilon}{h^2} \\
&= \frac{(K_{h_\varepsilon} h_\varepsilon) \cdot h - (K_h h) \cdot h_\varepsilon}{h^2} \\
&= \frac{(K_h + \varepsilon K + O(\varepsilon^2))(h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))h - (h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))K_h h}{h^2} \\
&= \frac{\varepsilon K \varepsilon g h + \varepsilon K O(\varepsilon^2) h + \varepsilon K h^2 + O(\varepsilon^2) h^2 + O(\varepsilon^2) \varepsilon g h + (O(\varepsilon^2))^2 h}{h^2} \\
&= \frac{\varepsilon K h^2 + O(\varepsilon^2)}{h^2} \\
&= \varepsilon K + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
X\left(\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) &= \frac{\partial((h_\varepsilon/h)^{\frac{1}{\varepsilon}})}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial((h_\varepsilon/h)^{\frac{1}{\varepsilon}})}{\partial y} \dot{y} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{h^2} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1} \dot{x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}\right)}{h^2} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1} \dot{y} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{-1} \left[\frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{h^2} \dot{x} + \frac{\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y} h - h_\varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}\right)}{h^2} \dot{y} \right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{-1} X\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)}{h}\right)^{-1} (\varepsilon K + O(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} (1 + O(\varepsilon)) (\varepsilon K + O(\varepsilon^2)) \\
&= \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(K + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} + O(\varepsilon) K + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon}\right) \\
&= \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} (K + O(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Note então que a função

$$\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

tem cofator $(K + O(\varepsilon))$. Assim, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que

$$\left(\frac{h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow \exp\left(\frac{g}{h}\right).$$

Logo, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na igualdade

$$X\left(\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) = (K + O(\varepsilon))\left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

segue que

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right).$$

Portanto, a função $\exp(g/h)$ satisfaz à mesma equação de curvas algébricas invariantes, com um cofator de grau menor ou igual a $m - 1$. Assim sendo, temos a seguinte definição:

Definição 2.12. Sejam $h, g \in \mathbb{F}[x, y]$, com h e g relativamente primos no anel $\mathbb{F}[x, y]$ ou $h \equiv 1$. A função $\exp(g/h)$ é chamado de fator exponencial do sistema polinomial (2.1) se existe um polinômio $K \in \mathbb{F}[x, y]$, de grau menor ou igual a $m - 1$, tal que

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right).$$

Como antes, nós dizemos que K é o cofator do fator exponencial $\exp(g/h)$.

Proposição 2.13. Para um sistema polinomial real (2.1) a função exponencial $\exp(g/h)$ é um fator exponencial com cofator K se, e somente se, a função exponencial $\exp(\bar{g}/\bar{h})$ é um fator exponencial com cofator $\bar{K}$.

Demonstração: Como P e Q são polinômios reais,

$$\begin{aligned} \overline{P \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) + Q \frac{\partial}{\partial y} \left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right)} &= \overline{K \exp\left(\frac{g}{h}\right)} \Leftrightarrow \\ P \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left(\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right)\right) + Q \frac{\partial}{\partial y} \left(\exp\left(\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right)\right) &= \bar{K} \exp\left(\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right) \Leftrightarrow X\left(\exp\left(\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right)\right) = \bar{K} \exp\left(\frac{\bar{g}}{\bar{h}}\right).$$

■

Proposição 2.14. Se $F = \exp(g/h)$ é um fator exponencial para o sistema polinomial (2.1), então $h = 0$ é uma curva algébrica invariante, e g satisfaz à equação

$$Xg = gK_h + hK_F,$$

onde K_h e K_F são cofatores de h e F , respectivamente.

Demonstração: Seja $F = \exp(g/h)$ um fator exponencial com cofator K_F . Então

$$K_F \exp\left(\frac{g}{h}\right) = X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = \exp\left(\frac{g}{h}\right) X\left(\frac{g}{h}\right) = \exp\left(\frac{g}{h}\right) \frac{(Xg)h - g(Xh)}{h^2},$$

ou equivalentemente,

$$(Xg)h - g(Xh) = h^2 K_F.$$

Como g, h são relativamente primos e h divide o lado direito da equação acima, temos que h divide Xh . Daí, tomando $K_h = Xh/h$, temos $Xh = K_h h$, ou seja, $h = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_h . Assim,

$$Xg - gK_h = hK_F,$$

isto é, $Xg = gK_h + hK_F$. ■

2.6 O Método de Darboux

Nesta seção provaremos o principal resultado da Teoria de Darboux (veja o Teorema 8.7, página 219, do livro [1]). Porém, antes de enunciar o teorema, necessitamos das seguintes definições.

Sejam $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ o espaço vetorial dos polinômios nas variáveis x, y com coeficientes em $\mathbb{F}$ de grau menor ou igual a $m-1$ e $S(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j$, ou seja, $S \in \mathbb{F}_{m-1}[x, y]$.

Note que $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ tem dimensão $m(m+1)/2$, pois S tem $m(m+1)/2$ coeficientes em $\mathbb{F}$. Podemos identificar o espaço vetorial $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ com o espaço vetorial $\mathbb{F}^{m(m+1)/2}$ através do isomorfismo

$$S \longrightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1}).$$

Definição 2.15. Nós dizemos que r pontos $(x_k, y_k) \in \mathbb{F}^2$, $k = 1, \dots, r$ são independentes com respeito a $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ se a intercessão dos r hiperplanos

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x_k^i y_k^j = 0, \quad k = 1, \dots, r,$$

em $\mathbb{F}^{m(m+1)/2}$ é um subespaço linear de dimensão $[m(m+1)/2] - r$.

Pelo Teorema de Bézout, o número máximo de pontos singulares isolados do sistema (2.1) é m^2 e o número máximo de pontos singulares independentes do sistema é $m(m+1)/2$. Temos que $m(m+1)/2 < m^2$ para $m \geq 2$.

Definição 2.16. Um ponto singular p_0 de um campo vetorial X é chamado forte se $\text{div}X(p_0) \neq 0$. E quando $\text{div}X(p_0) = 0$ é chamado fraco.

Teorema 2.17. (Teorema de Integrabilidade de Darboux para Sistemas Polinomiais) Suponha que o sistema diferencial (2.1) de grau m admite p curvas algébricas invariantes irreduzíveis $f_i = 0$ com cofatores K_i , para $i = 1, \dots, p$, q fatores exponenciais $\exp(g_j/h_j)$ com cofatores L_j , para $j = 1, \dots, q$, e r pontos singulares independentes $(x_k, y_k) \in \mathbb{F}^2$ tais que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$, para $i = 1, \dots, p$ e para $k = 1, \dots, r$.

- (i) Então existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$, nem todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$ se, e somente se, a função

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \cdots \left(\exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q} \quad (2.4)$$

é uma integral primeira do sistema (2.1).

- (ii) Se $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 1$, então existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$.
- (iii) Se $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 2$, então o sistema (2.1) tem uma integral primeira racional, e conseqüentemente todas as trajetórias do sistema estão contidas nas curvas algébricas invariantes.
- (iv) Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\text{div}(P, Q)$ se, e somente se, a função (2.4) é um fator integrante do sistema (2.1).
- (v) Se $p + q + r = m(m+1)/2$ e os r pontos singulares independentes são fracos, então a função (2.4) é uma integral primeira se $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$, ou um fator de integração se $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\text{div}(P, Q)$, sob a condição que $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$ não são todos nulos.
- (vi) Se existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -s$, para algum $s \in \mathbb{F} - \{0\}$, então a função

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \cdots \left(\exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q} \exp(st)$$

é um invariante do sistema (2.1).

Demonstração: Para facilitar escreveremos $F_j = \exp(g_j/h_j)$. Temos p curvas algébricas invariantes $f_i = 0$ com cofatores K_i , e q fatores exponenciais F_j com cofatores L_j . Isto é, os f_i s satisfazem $X f_i = K_i f_i$, e os F_j s satisfazendo $X F_j = L_j F_j$.

- (i) Primeiro assumiremos que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$. Daí, para provarmos que a função (2.4) é uma integral primeira basta mostrarmos que $X(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} X(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) &= X(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p})(F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) + (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p})X(F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) \\ &= \left(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \sum_{i=1}^p \lambda_i K_i \right) (F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) \\ &\quad + (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) \left(F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q} \sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) \\ &= (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

A recíproca é verdadeira, pois se a função (2.4) é uma integral primeira do sistema (2.1), então

$$X(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) = (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) = 0.$$

Agora, se $(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q}) = 0$, teríamos uma contradição com a definição de integral primeira. Logo, $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$.

(ii) Como os cofatores K_i e L_j são polinômios de grau $m-1$, então $K_i, L_j \in \mathbb{F}_{m-1}[x, y]$. Note que a dimensão de $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ é $m(m-1)/2$.

Temos que (x_k, y_k) é um ponto singular do sistema (2.1), então $P(x_k, y_k) = Q(x_k, y_k) = 0$. Como $Xf_i = P(\partial f_i/\partial x) + Q(\partial f_i/\partial y) = K_i f_i$, aplicando no ponto singular (x_k, y_k) , segue que $K_i(x_k, y_k) f_i(x_k, y_k) = 0$. Assumimos por hipótese $f_i(x_k, y_k) \neq 0$, então concluímos que $K_i(x_k, y_k) = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$. Da mesma forma, $XF_j = P(\partial F_j/\partial x) + Q(\partial F_j/\partial y) = L_j F_j$ e como $F_j = \exp(g_j/h_j)$ não se anula, segue que $L_j(x_k, y_k) = 0$ para todo $j = 1, \dots, q$. Consequentemente, como os r pontos singulares são independentes, todos os polinômios K_i e L_j pertencem a um subespaço linear S de $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$ de dimensão $[m(m+1)/2] - r$. Portanto temos $p+q$ polinômios K_i e L_j com $p+q > [m(m+1)/2] - r$. Assim, podemos concluir então que os $p+q$ polinômios devem ser linearmente dependentes em S . Então existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$.

(iii) Como para os r pontos singulares independentes temos $r \leq m(m+1)/2$, segue que $p+q \geq 2$. Sob as condições do item (iii) aplicamos o item (ii) para dois subconjuntos de $p+q-1 > 0$ funções que definem curvas algébricas invariantes ou fatores exponenciais. Assim, temos duas combinações linearmente dependentes entre os cofatores correspondentes que podemos escrever da seguinte forma

$$M_1 + \alpha_3 M_3 + \cdots + \alpha_{p+q-1} M_{p+q-1} = 0, \quad M_2 + \beta_3 M_3 + \cdots + \beta_{p+q-1} M_{p+q-1} = 0,$$

onde M_l são os cofatores K_i e L_j , e α_l e β_l são números complexos. Pelo item (i), as funções

$$G_1 G_3^{\alpha_3} \cdots G_{p+q-1}^{\alpha_{p+q-1}}, \quad G_2 G_3^{\beta_3} \cdots G_{p+q-1}^{\beta_{p+q-1}},$$

são integrais primeira do sistema (2.1), onde G_l é o polinômio que define uma curva algébrica invariante ou um fator exponencial tendo cofator M_l para $l = 1, \dots, p+q-1$. Então aplicando o logaritmo nas duas integrais primeira acima, obtemos que

$$H_1 = \log(G_1) + \alpha_3 \log(G_3) + \cdots + \alpha_{p+q-1} \log(G_{p+q-1}),$$

$$H_2 = \log(G_2) + \beta_3 \log(G_3) + \cdots + \beta_{p+q-1} \log(G_{p+q-1}),$$

são integrais primeira do sistema (2.1) em seus domínios de definição. Cada uma fornece um fator integrante R_i tal que

$$P = R_i \frac{\partial H_i}{\partial y}, \quad Q = -R_i \frac{\partial H_i}{\partial x}.$$

Portanto, obtemos outra integral primeira da forma

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\partial H_2}{\partial x} / \frac{\partial H_1}{\partial x}.$$

Como as funções G_l são polinômios ou exponenciais de um quociente de polinômios, segue que as funções $\partial H_i / \partial x$ são racionais, para $i = 1, 2$. Então, da última igualdade, obtemos que o quociente dos dois fatores de integração R_1/R_2 é uma função racional. Daí, o item (iii) segue da Proposição 2.7.

(iv) Para provarmos que a função (2.4) é um fator integrante, basta verificarmos se $XR = -R\text{div}(P, Q)$, onde $R = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}$. Assim, se tivermos como hipótese $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\text{div}(P, Q)$, então

$$\begin{aligned} X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) &= f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) \\ &= - (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) (\text{div}(P, Q)). \end{aligned}$$

Logo, a função (2.4) é um fator integrante.

Para provarmos a recíproca, temos

$$X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) = - (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) (\text{div}(P, Q)). \quad (2.5)$$

Por outro lado,

$$X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) = (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right). \quad (2.6)$$

Logo, por (2.5) e (2.6) segue o resultado.

(v) Seja $K = \text{div}(P, Q)$. Claramente $K \in \mathbb{F}_{m-1}[x, y]$. Assumindo que os r pontos singulares são fracos, então $K(x_k, y_k) = 0$, para $k = 1, \dots, r$. Daí, K pertence ao subespaço linear S mencionado na demonstração do item (ii).

Por outro lado, como a $\dim S = [m(m+1)/2] - r = p+q \geq 0$ e temos $p+q+1$ polinômios $K_1, \dots, K_p, L_1, \dots, L_q, K$ em S , segue que estes polinômios são linearmente dependentes em S . Portanto, existem $\lambda_i, \mu_j, \alpha \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i \right) + \left(\sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) + \alpha K = 0.$$

Se $\alpha = 0$, então como na prova do item (i) obtemos que (2.4) é uma integral primeira do sistema (2.1).

Agora, assumindo que $\alpha \neq 0$, dividindo a igualdade acima por α (se necessário), podemos assumir $\alpha = 1$. Daí

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i \right) + \left(\sum_{j=1}^q \mu_j L_j \right) = -K.$$

Portanto, do item (iv) chegamos ao que queríamos.

(vi) Queremos mostrar que a função $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}$ é um invariante.

Temos que

$$X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}) = (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j + s \right) = 0,$$

onde a última igualdade segue da hipótese. ■

A expressão (2.4) é chamada de *função Darboxiana* ou *integral primeira de Darboux* no caso de ser uma integral primeira de um sistema.

Observe que se a hipótese de (ii) for satisfeita, por (i), garantimos a existência de uma integral primeira. E, no item (iv), ao conseguirmos um fator integrante, basta substituímos em (2.2) e teremos uma integral primeira para o sistema.

2.7 Algumas Aplicações da Teoria de Darboux

Nesta seção, aplicaremos a teoria de integrabilidade de Darboux discutida nas seções anteriores para estudar alguns exemplos de sistemas quadráticos no plano.

Exemplo 2.18. Se $a \neq 0$ o sistema quadrático

$$\dot{x} = -y(ay + b) - (x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x(ay + b)$$

tem as curvas algébricas invariantes $f_1(x, y) = ay + b = 0$ com cofator $K_1(x, y) = ax$, e $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ com cofator $K_2(x, y) = -2x$. De fato,

$$\begin{aligned} Xf_1 &= \dot{x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f_1}{\partial y} = ax(ay + b) = ax(f_1); \\ Xf_2 &= \dot{x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x(-y(ay + b) - (x^2 + y^2 - 1)) + 2y(x(ay + b)) \\ &= 2x(-ay^2 - by - x^2 - y^2 + 1) + 2y(axy + bx) \\ &= -2ay^2x - 2bxy - 2x^3 - 2xy^2 + 2x + 2axy^2 + 2bxy \\ &= -2x^3 - 2xy^2 + 2x \\ &= -2x(x + y^2 + x^2) \\ &= -2xf_2. \end{aligned}$$

Note que $2K_1 + aK_2 = 2(ax) + a(-2x) = 0$.

Logo, pelo item (i) do Teorema de Darboux, temos que

$$H(x, y) = (ay + b)^2(x^2 + y^2 - 1)^a$$

é uma integral primeira para o sistema inicial.

Exemplo 2.19. Se $abc \neq 0$ então o sistema real quadrático

$$\dot{x} = x(ax + c), \quad \dot{y} = y(2ax + by + c)$$

tem exatamente 5 curvas algébricas invariantes de grau 1: $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = ax + c$, $f_3(x, y) = y$, $f_4(x, y) = ax + by$ e $f_5(x, y) = ax + by + c$, com os respectivos cofatores $K_1(x, y) = ax + c$, $K_2(x, y) = ax$, $K_3(x, y) = 2ax + by + c$, $K_4(x, y) = ax + by + c$ e $K_5(x, y) = ax + by$.

Então, pelo item (ii) do Teorema de Darboux temos $p = 5 > 4 = [2(2 + 1/2)] + 1$, logo, existem $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, 5$ tais que $\sum_{i=1}^5 \lambda_i K_i = 0$, e, do item (i), segue que $H = f_1^{\lambda_1} \dots f_5^{\lambda_5}$ é uma integral primeira do sistema dado.

Note que se tomarmos $\lambda_1 = \lambda_5 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_4 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, então

$$\lambda_1(ax + c) + \lambda_2(ax) + \lambda_3(2ax + by + c) + \lambda_4(ax + by + c) + \lambda_5(ax + by) = 0.$$

Portanto uma integral primeira do sistema é dada por

$$H(x, y) = f_1^{-1} \cdot f_2 \cdot f_3^0 \cdot f_4 \cdot f_5^{-1} = \frac{(ax + c)(ax + by)}{x(ax + by + c)}.$$

Exemplo 2.20. Considere o sistema quadrático

$$\dot{x} = -y - b(x^2 + y^2) = P, \quad \dot{y} = x = Q.$$

Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ uma curva algébrica invariante com cofator $K(x, y) = -2bx$. De fato,

$$Xf = 2x(-y - b(x^2 + y^2)) + 2yx = -2bx(x^2 + y^2) \Rightarrow K = -2bx.$$

Observe que

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -2bx = K \Rightarrow -\operatorname{div}(P, Q) = -K,$$

ou seja, existe $\lambda = -1$ tal que $-\operatorname{div}(P, Q) = -K$.

Segue do item (iv) do Teorema de Darboux que a função

$$R(x, y) = f^\lambda = \frac{1}{f(x, y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

é um fator de integração do sistema inicial.

Por fim, para obter uma integral primeira para o sistema, basta substituirmos $R = \frac{1}{f(x, y)}$ em (2.2), isto é,

$$H(x, y) = e^{2by}(x^2 + y^2)$$

é uma integral primeira do sistema.

A seguir temos um resultado, apresentado em [2], que melhora o Teorema de Darboux quando o sistema possui um centro, pois apresenta uma cota menor para número de curvas algébricas invariantes e fatores exponenciais. Com tudo, o estudo para saber se um sistema possui um centro é bem complexo.

Teorema 2.21. *Considere um sistema polinomial (2.1) de grau m , com um centro na origem e uma parte linear arbitrária. Suponha que este sistema admite $m(m+1)/2 - [(m+1)/2]$ curvas algébricas invariantes ou fatores exponenciais. Então este sistema tem um fator integrante de Darboux.*

Demonstração: Sejam $q = m(m+1)/2 - [(m+1)/2]$ e $f_i = 0$ as soluções algébricas ou os fatores exponenciais, para $i = 1, \dots, q$, e denotamos por M_i seus cofatores.

Os cofatores M_i , para $i = 1, \dots, q$, e o divergente do campo são $q+1$ polinômios de grau menor ou igual a $m-1$. O número de monômios que aparecem nestes polinômios é no máximo $m(m+1)/2$.

Assim, sempre é possível encontrar uma combinação linear destes $q+1$ polinômios tal que

$$k_0 \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^q k_i M_i = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots + a_{2l} r^{2(l-1)}, \quad (2.7)$$

onde, $r^2 = x^2 + y^2$, $l = (m+1)/2$ e os coeficientes k_i não são todos nulos, pois o conjunto $\{\operatorname{div}(P, Q), M_1, \dots, M_q, 1, r^2, \dots, r^{2(l-1)}\}$ é L.D. e o conjunto $\{1, r^2, \dots, r^{2(l-1)}\}$ é L.I..

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma órbita arbitrária do centro, não contida nas curvas $f_i = 0$, para $i = 1, \dots, q$, das equações $Df_i = M_i f_i$, obtemos:

$$\int_{\gamma} \frac{\dot{f}_i}{f_i} = \int_{\gamma} M_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, q, \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0.$$

De fato,

$$\int_{\gamma} \frac{\dot{f}_i}{f_i} = \int_a^b \frac{\dot{f}_i(\gamma(t))}{f_i(\gamma(t))} dt = \ln(f_i(\gamma(b))) - \ln(f_i(\gamma(a))) = 0,$$

pois como γ é fechada, isto é, $\gamma(b) = \gamma(a)$. Além disso, a integral do divergente do campo é zero porque temos um centro. Se está integral não fosse zero a primeira derivada da aplicação de Poincaré seria diferente de 1 e logo γ seria um ciclo limite, mas isto não pode ocorrer pois γ é uma órbita da vizinhança do centro.

Então, integrando ambos os lados da equação (2.7) ao longo de γ , obtemos

$$0 = a_0 T + a_2 \int_{\gamma} r^2 + a_4 \int_{\gamma} r^4 + \dots + a_{2l} \int_{\gamma} r^{2l},$$

onde T é o período da órbita fechada γ . Para γ próxima da origem, as integrais acima são diferentes de zero e isto implica que $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = a_{2l} = 0$. Novamente por (2.7) segue que

$$k_0 \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^q k_i M_i = 0.$$

Portanto, a parte (iv) do Teorema de Darboux garante que existe um fator de integração da forma (2.4). ■

3 Fator Integrante Inverso

Neste e nos próximos capítulos abordamos diversos resultados a respeito do fator integrante inverso, que podem ser encontrados em [3], relacionando-o com alguns conceitos matemáticos.

Definição 3.1. Dizemos que uma função $V : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um fator integrante inverso do sistema (2.1), se é de classe $\mathcal{C}^1$, não é localmente nula e satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$P(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) V(x, y). \quad (3.1)$$

Para simplificar a notação, escrevemos a equação (3.1) simplesmente como $XV = V \operatorname{div} X$.

Segue diretamente da definição acima que o conjunto dos zeros de V , $V^{-1}(0) = \{(x, y) | V(x, y) = 0\}$, é composto de trajetórias de X pois, nos pontos em que V se anula, tem-se X ortogonal ao gradiente de V .

Observação 3.2. O nome “fator integrante inverso” decorre do fato que se V satisfaz à equação (3.1), então $1/V$ é um fator integrante para X em $U \setminus V^{-1}\{0\}$. De fato,

$$\begin{aligned} X \left(\frac{1}{V} \right) &= P \frac{\partial(1/V)}{\partial x} + Q \frac{\partial(1/V)}{\partial y} \\ &= \frac{P \left(-\frac{\partial(V)}{\partial x} \right) + Q \left(-\frac{\partial(V)}{\partial y} \right)}{V^2} \\ &= -\frac{XV}{V^2} = -\frac{V \operatorname{div}(P, Q)}{V^2} = -\frac{1}{V} \operatorname{div}(X). \end{aligned}$$

A existência de um fator integrante inverso garante a existência de um fator integrante, e, por (2.2), obtemos uma integral primeira para o campo. A observação abaixo garante que a volta também é válida.

Observação 3.3. Seja H uma integral primeira do campo X . Então, temos

$$P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0 \Leftrightarrow Q \frac{\partial H}{\partial y} = -P \frac{\partial H}{\partial x} \Leftrightarrow -\frac{P}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{Q}{\frac{\partial H}{\partial x}}.$$

Defina

$$V = -\frac{P}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{Q}{\frac{\partial H}{\partial x}}. \quad (3.2)$$

A função V é um fator integrante inverso do sistema (2.1). Para mostrar isso, basta derivar $V = -\frac{P}{\partial H/\partial y}$ com relação a x e $V = \frac{Q}{\partial H/\partial x}$ com relação a y , ou seja

$$\begin{aligned} XV &= P \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-P}{\partial H/\partial y} \right) + Q \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q}{\partial H/\partial x} \right) \\ &= P \frac{\left(-\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + P \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right)}{(\partial H/\partial y)^2} + Q \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - Q \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \right)}{(\partial H/\partial x)^2} \\ &= -\frac{P}{\partial H/\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{Q}{\partial H/\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{P^2}{(\partial H/\partial y)^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{Q^2}{(\partial H/\partial x)^2} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Mas, sabemos que H é analítica, em particular H é $\mathcal{C}^2$, então Schwarz garante que $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$. Assim,

$$\frac{P^2}{(\partial H/\partial y)^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{Q^2}{(\partial H/\partial x)^2} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = V^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - V^2 \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0.$$

Logo, concluímos que

$$XV = -\frac{P}{\partial H/\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{Q}{\partial H/\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = V \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} = V(\operatorname{div} X),$$

como queríamos.

Além disso, temos que a existência de uma integral primeira também implica em fator integrante

$$R = \frac{1}{V} = \frac{\partial H/\partial y}{P} = -\frac{\partial H/\partial x}{Q}.$$

Definição 3.4. A 1-forma $\omega = Qdx - Pdy$ é dita exata se $\omega = dH$, para alguma aplicação $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, e, é dita fechada se $d\omega = 0$, isto é, $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y \equiv 0$.

Considerando V um fator integrante inverso, a 1-forma $\omega/V = (Qdx - Pdy)/V$ é fechada em $U \setminus V^{-1}(0)$. De fato,

$$\frac{\partial(P/V)}{\partial x} + \frac{\partial(Q/V)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x}V - P\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}V - Q\frac{\partial V}{\partial y}}{V^2} = \frac{(\operatorname{div} X)V - XV}{V^2} = 0.$$

E mais, ω/V é exata, pois $\frac{\omega}{V} = dH$, onde

$$H(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q(x, y)dx - P(x, y)dy}{V(x, y)}, \quad (3.3)$$

com $V(x_0, y_0) \neq 0$, é obtida integrando ambos os lados da equação $\omega/V = dH$.

Proposição 3.5. Se o sistema polinomial (2.1) tem um fator integrante inverso V e uma integral primeira H no aberto $U \subset \mathbb{F}^2$, então VH é outro fator integrante inverso no aberto U .

Demonstração: Da hipótese temos

$$XV = (\operatorname{div} X)V \quad \text{e} \quad XH = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0.$$

A partir daí, calculando

$$\begin{aligned} X(VH) &= P \frac{\partial(VH)}{\partial x} + Q \frac{\partial(VH)}{\partial y} = P \left(\frac{\partial V}{\partial x} H + V \frac{\partial H}{\partial x} \right) + Q \left(\frac{\partial V}{\partial y} H + V \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &= H \left(P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} \right) + V \left(P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &= VH \operatorname{div} X, \end{aligned}$$

segue o resultado. ■

Definição 3.6. Uma função $H(x, y)$ é chamada de função homogênea de grau p se $H(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p H(x, y)$ para todo (x, y) no domínio de definição de $H(x, y)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $p \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.7. O sistema (2.1) é um sistema homogêneo se P e Q forem funções homogêneas de mesmo grau.

Teorema 3.8. (Teorema da Função Homogênea de Euler) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um aberto U , uma função homogênea de grau k e de classe C^1 , então a seguinte igualdade é válida*

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

Demonstração: Como f é homogênea de grau k tem-se $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$, onde t é um parâmetro real. Derivando ambos os lados com respeito a variável t , temos que

$$\frac{d}{dt} [f(tx, ty)] = \frac{d}{dt} [t^k f(x, y)] \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y = kt^{k-1} f(x, y).$$

Tomando $t = 1$ na expressão acima, temos a igualdade dada no enunciado do teorema. ■

Note que o teorema acima também é valido para funções homogênea de n variáveis.

Proposição 3.9. *Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial homogêneo. Então o sistema homogêneo associado a este campo tem um fator integrante inverso da forma*

$$V = yP - xQ.$$

Demonstração: Suponha que o sistema associado ao campo X tenha grau m , então o Teorema da função homogênea de Euler garante que

$$\begin{aligned} x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} &= mP \Leftrightarrow y \frac{\partial P}{\partial y} = mP - x \frac{\partial P}{\partial x}; \\ x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} &= mQ \Leftrightarrow x \frac{\partial Q}{\partial x} = mQ - y \frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned}$$

Assim, calculando XV , temos

$$\begin{aligned}
 X(yP - xQ) &= P \left(y \frac{\partial P}{\partial x} - Q - x \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + Q \left(P + y \frac{\partial P}{\partial y} - x \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \\
 &= yP \frac{\partial P}{\partial x} - xP \frac{\partial Q}{\partial x} + yQ \frac{\partial P}{\partial y} - xQ \frac{\partial Q}{\partial y} \\
 &= yP \frac{\partial P}{\partial x} - P \left(mQ - y \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + Q \left(mP - x \frac{\partial P}{\partial x} \right) - xQ \frac{\partial Q}{\partial y} \\
 &= yP \frac{\partial P}{\partial x} + yP \frac{\partial Q}{\partial y} - xQ \frac{\partial P}{\partial x} - xQ \frac{\partial Q}{\partial y} \\
 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (yP - xQ) \\
 &= \text{div}(P, Q)V,
 \end{aligned}$$

isto é, $XV = V(\text{div}X)$ e segue o resultado. ■

O resultado abaixo (veja [4]) mostra que se considerarmos o espaço vetorial dos campos vetoriais, o conjunto formado pelos campos vetoriais que tem um fator integrante inverso em comum é um subespaço vetorial.

Proposição 3.10. *Sejam $X_i = P_i(x, y)\partial_x + Q_i(x, y)\partial_y$, $i = 1, 2$, dois campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^1$ definidos no subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $V(x, y)$ é um fator integrante inverso de ambos os campos definido em U . Então $V(x, y)$ é também um fator integrante inverso do campo vetorial $X_1 + \lambda X_2$, para um parâmetro real arbitrário λ .*

Demonstração: Temos da hipótese que

$$X_1V = P_1 \frac{\partial V}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} \right) V = \text{div}(P_1, Q_1)V,$$

$$X_2V = P_2 \frac{\partial V}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) V = \text{div}(P_2, Q_2)V.$$

Note que o campo $X_1 + \lambda X_2 = (P_1 + \lambda P_2, Q_1 + \lambda Q_2)$. Daí,

$$\begin{aligned}
 (X_1 + \lambda X_2)V &= (P_1 + \lambda P_2) \frac{\partial V}{\partial x} + (Q_1 + \lambda Q_2) \frac{\partial V}{\partial y} \\
 &= P_1 \frac{\partial V}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda P_2 \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda Q_2 \frac{\partial V}{\partial y} \\
 &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \lambda \frac{\partial P_2}{\partial x} + \lambda \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) V \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} (P_1 + \lambda P_2) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_1 + \lambda Q_2) \right] V \\
 &= \text{div}(X_1 + \lambda X_2)V.
 \end{aligned}$$
■

4 Sobre o Problema de Integrabilidade

A seguir abordamos algumas relações entre a integrabilidade do sistema (2.1) e a existência de um fator integrante inverso. O principal resultado deste capítulo (Teorema 4.13) garante que um sistema tem um fator integrante inverso polinomial se, e somente se, uma integral primeira racional tem no máximo dois valores notáveis críticos. Provamos também que a existência de um fator integrante inverso racional produz uma integral primeira de Darboux. Encerramos o capítulo com um resultado que fornece uma cota para o grau de um fator integrante inverso associado a um fator notável.

A demonstração do seguinte resultado não é apresentada pois está fora do escopo do trabalho. Com tudo, está enunciado e provado em [5]. Vamos denotar por $\mathbb{C}(x, y)$ o quociente dos polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$.

Lema 4.1. *Se ω é uma 1-forma diferencial racional fechada sobre $\mathbb{C}(x, y)$ então existem polinômios $f_i, h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ e constantes $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$, tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{g}{h}\right).$$

Usaremos o Lema acima para a prova do seguinte resultado (encontrado em [6]):

Teorema 4.2. *Se o sistema (2.1) tem um fator integrante inverso racional, então o sistema tem uma integral primeira de Darboux.*

Demonstração: Sabemos que X e X/V , com V sendo um fator integrante inverso, são topologicamente equivalentes. Usando esse fato, associado ao sistema (2.1) temos a 1-forma $\omega = A(x, y)dx - B(x, y)dy$, com $A = Q/V$ e $B = -P/V$, ambos em $\mathbb{C}(x, y)$.

Já vimos que ω é fechada e racional. Logo, as condições do Lema acima estão satisfeitas e daí, segue que

$$\omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{g}{h}\right),$$

com $f_i, h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ e $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$. Integrando ambos os lados, obtemos

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \log(f_i) + \frac{g}{h},$$

e, como $\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = A = \frac{Q}{V}$ e $\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = B = \frac{-P}{V}$, segue que $\bar{H}$ é uma integral primeira do sistema. Agora, aplicando exponencial, temos que $H = \exp(\bar{H})$ é uma outra integral primeira do sistema. Portanto, H é uma integral primeira de Darboux da forma

$$H = \exp\left(\frac{g}{h}\right) \prod_{i=1}^m f_i^{\lambda_i}.$$

■

Definição 4.3. Uma função $f : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$, não constante, é uma solução particular do sistema (2.1) se satisfaz

$$X(f)|_{f=0} = \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{f=0} = 0.$$

Um dos principais resultados em [7] é o seguinte.

Teorema 4.4. *Considere o sistema diferencial polinomial planar*

$$\dot{x} = P_n(x, y) + xA_{d-1}(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y) + yA_{d-1}(x, y), \quad (4.1)$$

onde P_n, Q_n são polinômios reais homogêneos de grau n , $A_{d-1}(x, y)$ é um polinômio homogêneo real de grau $d - 1$ e $d > n \geq 1$. Considere também o sistema diferencial polinomial homogêneo associado:

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y). \quad (4.2)$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

(a) Se $H(x, y)$ é uma integral primeira homogênea de grau p do sistema (4.2), então $H(x, y)$ é uma solução particular do sistema (4.1).

(b) A função homogênea $V_{n+1} := xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$ é um fator integrante inverso do sistema (4.2).

(c) A função homogênea $V_{n+1} := xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$ é uma solução particular do sistema (4.1).

(d) Se $H(x, y)$ é uma integral primeira homogênea de grau p do sistema (4.2), então a função

$$(xQ_n(x, y) - yP_n(x, y))H(x, y)^{\frac{d-n}{p}}$$

é um fator integrante de Darboux do sistema (4.1).

Demonstração: Para simplificar a notação, vamos considerar $A = A_{d-1}$, $V = V_{n+1}$, $X = (P_n, Q_n)$ e $X_1 = (P_n + xA, Q_n + yA)$, onde X e X_1 são os campos de grau n e d associados aos sistemas (4.2) e (4.1), respectivamente.

(a) Como H é uma integral primeira do sistema (4.2), segue que

$$\begin{aligned} X_1(H) &= \frac{\partial H}{\partial x}(P_n + xA) + \frac{\partial H}{\partial y}(Q_n + yA) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}P_n + \frac{\partial H}{\partial y}Q_n \right) + \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} \right) A \\ &= \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} \right) A. \end{aligned}$$

Como H é homogênea de grau p , pelo Teorema da Função Homogênea de Euler para funções homogêneas, temos que

$$x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} = pH(x, y).$$

Portanto, $X_1(H) = pAH(x, y)$, e isso conclui que H é uma solução particular de (4.1).

(b) A demonstração deste item segue da Proposição 3.9.

(c) Analogamente ao item (a), calculamos

$$\begin{aligned} X_1(V) &= \frac{\partial V}{\partial x}(P_n + xA) + \frac{\partial V}{\partial y}(Q_n + yA) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}P_n + \frac{\partial V}{\partial y}Q_n \right) + \left(x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} \right) A \\ &= (\operatorname{div} X)V + (n+1)AV \\ &= (\operatorname{div} X + (n+1)A)V, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue do item (b) e do Teorema da Função Homogênea de Euler (pois V é homogênea de grau $n+1$).

(d) O divergente do campo X_1 é dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X_1) &= \operatorname{div}(P_n + xA, Q_n + yA) \\ &= \operatorname{div}(P_n, Q_n) + \operatorname{div}(xA, yA) \\ &= \operatorname{div}(X) + 2A + \left(x \frac{\partial A}{\partial x} + y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \\ &= \operatorname{div}(X) + 2A + (d-1)A \\ &= \operatorname{div}(X) + (d+1)A. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue novamente do Teorema da Função Homogênea de Euler.

Vimos que H e V são soluções particulares do sistema (4.1) com cofatores associados $K_1(x, y) = pA$ e $K_2 = \operatorname{div}(X) + (n+1)A$, respectivamente. Então podemos encontrar constantes $\lambda_1 = -(n+1)/p$ e $\lambda_2 = 1$, tais que

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i K_i(x, y) - \operatorname{div} X_1 \equiv 0.$$

De fato,

$$\lambda_1 K_1(x, y) + \lambda_2 K_2(x, y) - \operatorname{div} X_1 = -\frac{(n+1)}{p} pA + \operatorname{div}(X_1) + (n+1)A - \operatorname{div}(X_1) = 0.$$

Portanto, a demonstração da parte (iv) do Teorema de Darboux garante que a função

$$(xQ_n(x, y) - yP_n(x, y))H(x, y)^{\frac{-(n+1)}{p}}$$

é um fator integrante do sistema (4.1). ■

Definição 4.5. Seja H uma integral primeira polinomial de grau n do sistema polinomial (2.1). Nós dizemos que o grau de H é minimal entre todos os graus das integrais primeiras polinomiais de (2.1), se qualquer outra integral primeira tem grau maior ou igual a n .

Definição 4.6. Assuma $H = f/g$ uma integral primeira racional. Dizemos que H tem grau n se $n = \max\{\deg f, \deg g\}$. Mais ainda, dizemos que o grau de H é minimal entre todos os graus das integrais primeiras racionais do sistema (2.1) se qualquer outra primeira integral tem grau maior ou igual a n .

Definição 4.7. Seja $H = f/g$ uma integral primeira racional do sistema polinomial (2.1). Dizemos que $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é um valor notável de H se $f + cg$ é um polinômio redutível em $\mathbb{C}[x, y]$ (quando $c = \infty$ significa que $f + cg$ denota apenas g).

Definição 4.8. Suponha que $c \in \mathbb{C}$ é um valor notável de uma integral primeira racional $H = f/g$ e que $\prod_{i=1}^r u_i^{\alpha_i}$ é a fatoração do polinômio $f + cg$ por fatores irredutíveis em $\mathbb{C}[x, y]$. Se algum dos α_i for maior que 1, então dizemos que c é um valor notável crítico de H e que $u_i = 0$ é uma curva algébrica invariante notável crítica de (2.1) com expoente $\alpha_i > 1$. Mais ainda, o polinômio $R = \prod u_i^{\alpha_i - 1}$ definido como o produto de todas as curvas algébricas invariantes notáveis elevado ao seus respectivos expoentes menos um, é chamado de fator notável.

Uma integral primeira de Darboux é dita *generalizada* se tem a forma

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{h_1}{g_1^{n_1}} \right) \right)^{\mu_1} \cdots \left(\exp \left(\frac{h_q}{g_q^{n_q}} \right) \right)^{\mu_q}, \quad (4.3)$$

onde $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$, os polinômios f_i e g_j são irredutíveis e os polinômios g_j e h_j são coprimos em $\mathbb{C}[x, y]$.

Teorema 4.9. *Assuma que para o sistema (2.1) a integral primeira (4.3) é racional e minimal. Então H tem um número finito de valores notáveis.*

Para a prova deste resultado precisaremos da definição de curva extática e de duas proposições enunciadas abaixo. Denotaremos por $\mathbb{C}_n[x, y]$ o conjunto formado por todos os polinômios de grau menor ou igual a n .

Definição 4.10. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ uma base do $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$, de grau no máximo n , denotado por $\mathbb{C}_n[x, y]$ (consequentemente $l = (n+1)(n+2)/2$). Se X é um campo vetorial em $\mathbb{C}^2$, a n -ésima curva extática de X , $E_{(n, B)}(X) = 0$, é dada pela equação

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.4)$$

onde, $X^0(v_i) = v_i$ e $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$. Note que a definição de curva extática não depende da base.

Proposição 4.11. *Seja X um campo vetorial em $\mathbb{C}^2$. Então $E_n(X) \equiv 0$ e $E_{n-1}(X) \not\equiv 0$ se, e somente se, X admite uma integral primeira racional de grau n .*

A demonstração da proposição acima será omitida, pois foge do propósito desta dissertação. Mas pode ser encontrada na página 85 do artigo [8].

Proposição 4.12. *Toda curva algébrica invariante f de grau n do campo vetorial X é um fator de $E_n(X)$ (isto é, $f \mid E_n(X)$).*

Demonstração: Considere $f = 0$ uma curva algébrica invariante de grau n e $B = \{f, v_2, \dots, v_l\}$ uma base de $\mathbb{C}_n[x, y]$. Note que $Xf = K_1f$, onde K_1 é o cofator de f . E $X^2f = K_2f$, onde $K_2 = X(K_1) + K_1^2$. Continuando com este raciocínio, se $X^i f = K_i f$, então $X^{i+1} f = X(X^i f) = K_{i+1}f$, onde $K_{i+1} = X(K_i) + K_i K_1$. Assim,

$$\begin{aligned} E_n(X) &= \det \begin{pmatrix} f & v_2 & \cdots & v_l \\ X(f) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(f) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} f & v_2 & \cdots & v_l \\ fK_1 & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ fK_{l-1} & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \\ &= f \det \begin{pmatrix} 1 & v_2 & \cdots & v_l \\ K_1 & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{l-1} & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, $f \mid E_n(X)$. ■

Prova do Teorema 4.9: Devemos provar que existe um número finito de valores $c \in \mathbb{C}$ tal que $f + cg$ é redutível em $\mathbb{C}[x, y]$.

Suponha que H tem grau n . Considere u um fator de um polinômio redutível da forma $f + cg$, então o grau de u é menor que n . Como o grau de H é o menor grau entre todos os graus das integrais primeiras racionais, pela Proposição 4.11 a curva extática $E_k(X) \not\equiv 0$ para $k = 1, \dots, n-1$. Da definição de curva extática, $E_k(X)$, $k = 1, \dots, n-1$, são polinômios. Da Proposição 4.12, qualquer curva algébrica invariante u a qual é um fator de um polinômio redutível $f + cg$ deve ser um divisor de $E_k(X)$ para algum $k = 1, \dots, n-1$. Isto implica que o número de fatores de todos os polinômios redutíveis $f + cg$ é finito, caso contrário $E_k(X) \equiv 0$ para algum $k = 1, \dots, n-1$. Consequentemente, o número de valores notáveis de H é finito. ■

Seja f um polinômio. Denotamos por $\tilde{f}$ a parte homogênea de f de maior grau. Se H é uma função da forma (4.3) definimos $\tilde{H} = \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p} \tilde{F}_1^{\mu_1} \dots \tilde{F}_q^{\mu_q}$, onde $\tilde{F}_j = \exp(\tilde{f}_j/\tilde{g}_j)$.

Na demonstração do próximo resultado necessitaremos do Teorema dos Zeros de Hilbert. A seguir iremos enunciá-lo. A sua prova pode ser encontrada na página 21 de [9].

Teorema 4.13. (Teorema dos Zeros de Hilbert) *Seja K um corpo algebricamente fechado. Considere o anel de polinômios $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ e seja I um ideal neste anel. A variedade afim $V(I)$ definida por este ideal é o conjunto formado por todos os pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ em K^n tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in I$. Se p é um polinômio em $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ que se anula na variedade $V(I)$, isto é, $p(x) = 0$ para todo $x \in V(I)$, então existe um número natural r tal que $p^r \in I$.*

Abaixo segue o principal resultado de [10].

Teorema 4.14. *Suponha que um campo vetorial $X = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$ de grau m com P e Q coprimos, tem uma integral primeira H de Darboux generalizada. Então valem as afirmações abaixo:*

(a) O fator integrante inverso $V_{\log H}$ associado a uma integral primeira $\log H$ é uma função racional, e pode ser escrito na forma $V_{\log H} = \prod_{i=1}^m u_i^{k_i}(x, y)$ com $u_i \in \mathbb{C}[x, y]$ irredutível e $k_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Mais ainda, se X não tem uma integral primeira racional, então $V_{\log H}$ é um fator integrante inverso racional único de X .

(b) Assumimos que H é uma integral primeira polinomial. Se $\deg H > m + 1$ então existe um fator integrante polinomial. Se $\deg H = m + 1$ então existe um fator integrante inverso polinomial.

(c) Suponha que $H = f/g$ é uma integral primeira racional minimal de X e que X não tem integral primeira polinomial. Podemos assumir que f e g são irredutíveis. Então

(c.1) a função racional

$$V_{f/g} = \frac{g^2}{\prod_i u_i^{\alpha_i - 1}},$$

é um fator integrante inverso, onde $R = \prod_i u_i^{\alpha_i - 1}$ é o fator notável; e

(c.2) X tem um fator integrante inverso polinomial se, e somente se, H tem no máximo dois valores notáveis críticos.

(d) Assumiremos para a integral primeira (4.3) que as funções f_i (respectivamente para as funções g_j) são diferentes para $i = 1, \dots, p$ (respectivamente $j = 1, \dots, q$) e que as únicas curvas algébricas invariantes do sistema (2.1) são $f_i = 0$ e $g_j = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$ e para todo $j = 1, \dots, q$. Então

(d.1) o fator integrante inverso $V_{\log H}$ associado à integral primeira $\log H$ é o polinômio

$$V_{\log H} = \prod_{i=1}^p f_i \prod_{j=1}^q g_j^{n_j+1}.$$

(d.2) se $\tilde{H} = \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p} \tilde{F}_1^{\mu_1} \dots \tilde{F}_q^{\mu_q}$ (a função associada a (4.3)) é multivalorada e as funções $F_j = \exp(h_j/g_j)$ são fatores exponenciais de X para $j = 1, \dots, q$, então $V_{\log H} = \prod_{i=1}^p f_i \prod_{j=1}^q g_j^{n_j+1}$ é um polinômio de grau $m + 1$.

Demonstração: (a) Defina $\bar{H} = \log(H)$, então

$$\begin{aligned} \bar{H} = \log(H) &= \log \left(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{h_1}{g_1^{n_1}} \right) \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp \left(\frac{h_q}{g_q^{n_q}} \right) \right)^{\mu_q} \right) \\ &= \log(f_1^{\lambda_1}) + \dots + \log(f_p^{\lambda_p}) + \mu_1 \left(\frac{h_1}{g_1^{n_1}} \right) + \dots + \mu_q \left(\frac{h_q}{g_q^{n_q}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \log(f_i) + \sum_{j=1}^q \mu_j \left(\frac{h_j}{g_j^{n_j}} \right). \end{aligned}$$

Sabemos que a partir de uma integral primeira podemos definir um fator integrante inverso da seguinte forma $V_{\bar{H}} = -\frac{P}{\partial \bar{H} / \partial y} = \frac{Q}{\partial \bar{H} / \partial x}$. Sendo assim, basta calcularmos

$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \bar{H}}{\partial y}$. Calculando, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^q \mu_j \left(\frac{\frac{\partial h_j}{\partial x} g_j^{n_j} - h_j \frac{\partial (g_j^{n_j})}{\partial x}}{(g_j^{n_j})^2} \right) \\
&= \frac{1}{f_1 \dots f_p g_1^{n_1+1} \dots g_q^{n_q+1}} S^x, \\
\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^q \mu_j \left(\frac{\frac{\partial h_j}{\partial y} g_j^{n_j} - h_j \frac{\partial (g_j^{n_j})}{\partial y}}{(g_j^{n_j})^2} \right) \\
&= \frac{1}{f_1 \dots f_p g_1^{n_1+1} \dots g_q^{n_q+1}} S^y,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
S^x &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p f_j \right) \left(\prod_{l=1}^q g_l^{n_l+1} \right) \frac{\partial f_i}{\partial x} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \mu_k \left(\prod_{j=1}^p f_j \right) \left(\prod_{l=1, l \neq k}^q g_l^{n_l+1} \right) \left(g_k \frac{\partial h_k}{\partial x} - n_k h_k \frac{\partial g_k}{\partial x} \right), \\
S^y &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p f_j \right) \left(\prod_{l=1}^q g_l^{n_l+1} \right) \frac{\partial f_i}{\partial y} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \mu_k \left(\prod_{j=1}^p f_j \right) \left(\prod_{l=1, l \neq k}^q g_l^{n_l+1} \right) \left(g_k \frac{\partial h_k}{\partial y} - n_k h_k \frac{\partial g_k}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Como $\bar{H}$ é uma integral primeira nós temos

$$X\bar{H} = P \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + Q \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \equiv 0.$$

Substituindo $\bar{H}_x$ e $\bar{H}_y$ na igualdade acima obtemos

$$PS^x + QS^y = 0 \Leftrightarrow PS^x = -QS^y \Leftrightarrow \frac{S^x}{Q} = -\frac{S^y}{P}.$$

Como S^x , S^y , P e Q são polinômios, e P e Q são relativamente primos, seja

$$K = -\frac{S^y}{P} = \frac{S^x}{Q}. \quad (4.5)$$

Daí,

$$S^x = KQ, \quad S^y = -KP. \quad (4.6)$$

Logo,

$$V_{\bar{H}} = \frac{f_1 \dots f_p g_1^{n_1+1} \dots g_q^{n_q+1}}{K} \quad (4.7)$$

é um fator integrante inverso racional e pode ser escrito como no enunciado do Teorema.

Agora, assumamos que o sistema (2.1) não tem integral primeira racional. Então, pela Proposição 2.7, segue que $V_{\tilde{H}}$ é o único fator integrante inverso do sistema.

(b) Tome H uma integral primeira do campo X e suponha que o grau de H seja n . Assim, temos

$$P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0 \Leftrightarrow P \frac{\partial H}{\partial x} = -Q \frac{\partial H}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{P}{Q} = -\frac{\partial H / \partial y}{\partial H / \partial x}.$$

Daí, como P e Q são relativamente primos e

$$\max\{\deg P, \deg Q\} = m; \quad \max\left\{\deg \frac{\partial H}{\partial x}, \deg \frac{\partial H}{\partial y}\right\} = n - 1,$$

então

$$n - 1 \geq m \Rightarrow n \geq m + 1 \Rightarrow \deg H \geq m + 1$$

e existe um polinômio, denotado por $R(x, y)$, de grau $n - 1 - m$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = PR, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -QR.$$

Se $\deg H > m + 1$, então R é um fator integrante polinomial. Quando $\deg H = m + 1$, então R é um fator integrante inverso.

(c.1) Sabemos que $V_{f/g} = -\frac{P}{\partial H / \partial y} = \frac{Q}{\partial H / \partial x}$ é um fator integrante inverso. Como

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{f_y g - f g_y}{g^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f_x g - f g_x}{g^2},$$

então

$$V_{f/g} = -\frac{P}{f_y g - f g_y} g^2 = \frac{Q}{f_x g - f g_x} g^2.$$

O objetivo então é mostrar as igualdades

$$-\frac{P}{f_y g - f g_y} = \frac{Q}{f_x g - f g_x} = \frac{1}{\prod_i u_i^{\alpha_i - 1}}.$$

O fator integrante inverso racional $V_{f/g}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{P}{V_{f/g}} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\left(\frac{f}{g}\right)_y = -\left(\frac{f}{g} + c\right)_y = -\frac{(f_y + c g_y)g - (f + c g)g_y}{g^2}, \\ \dot{y} &= \frac{Q}{V_{f/g}} = \frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{f}{g}\right)_x = \left(\frac{f}{g} + c\right)_x = \frac{(f_x + c g_x)g - (f + c g)g_x}{g^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

para todo $c \in \mathbb{C}$.

Seja $u_i = 0$ uma curva algébrica invariante notável crítica com expoente α_i tal que $u_i^{\alpha_i} | (f + c_j g)$, onde c_j é um valor notável crítico de H . De (4.8) com $c = c_j$, obtemos

$$\frac{g^2}{u_i^{\alpha_i - 1}} \left| \frac{V_{f/g}}{P} \right| \quad \text{e} \quad \frac{g^2}{u_i^{\alpha_i - 1}} \left| \frac{V_{f/g}}{Q} \right|.$$

Aqui a notação $\frac{a}{b} \Big| \frac{c}{d}$ entre duas funções racionais denota $a|c$ e $b|d$. Note que $u_i^{\alpha_i-1}$ divide $f + c_j g$ e suas derivadas parciais de primeira ordem. Como P e Q são coprimos, então

$$\frac{g^2}{u_i^{\alpha_i-1}} \Big| V_{f/g}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, de (4.8) temos n um fator irredutível do numerador e d um fator irredutível do denominador da função racional $V_{f/g}$ satisfazendo

$$n|g, \quad d|((f_y + cg_y)g - (f + cg)g_y), \quad d|((f_x + cg_x)g - (f + cg)g_x), \quad (4.10)$$

para todo $c \in \mathbb{C}$. Como g é irredutível, obtemos

$$n = g. \quad (4.11)$$

Sabemos que $1/V_{f/g}$ é um fator integrante, ou seja, $1/V_{f/g} = 0$ é formado por curvas algébricas invariantes do sistema (2.1). Então, $d = 0$ é uma curva algébrica invariante. Portanto, como $H = f/g$ é uma integral primeira, obtemos que $d | (f + cg)$ para algum $c \in \mathbb{C}$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $d | (f + cg)$ e $f + cg$ é irredutível. Então, por (4.10) segue que $d | g$. Isto é uma contradição com o fato de que $d | (f + cg)$, e f e g são irredutíveis e coprimos.

Caso 2: $d | (f + cg)$ e $f + cg$ é redutível. Assim, c é um valor notável de H . Então por (4.10) e do fato de g ser irredutível, segue que $d | (f_y + cg_y)$ e $d | (f_x + cg_x)$. Consequentemente, c é um valor notável crítico de H . Por isso,

$$d = 0 \text{ é uma curva algébrica invariante notável crítica de } H. \quad (4.12)$$

Logo, por (4.9), (4.11) e (4.12), chegamos à igualdade

$$V_{f/g} = \frac{g^2}{\prod_i u_i^{\alpha_i-1}} = \frac{g^2}{R},$$

onde $R = \prod_i u_i^{\alpha_i-1}$ é o fator notável.

(c.2) Primeiro, suponha que $H = f/g$ tem no máximo dois valores notáveis críticos. Se não existe valor notável crítico, então $V = g^2/R = g^2$ é um fator integrante inverso polinomial e acabamos.

Para o caso em que H possui um único valor notável crítico, considere c_1 este valor notável crítico. Daí

$$V = \frac{g^2}{R} \frac{f + c_1 g}{g}$$

é um polinômio e é um fator integrante inverso, pois é o produto de um fator integrante inverso por uma integral primeira (veja a Proposição 3.5).

A prova para o caso que H possui exatamente dois valores notáveis críticos segue de maneira similar, uma vez que o produto de duas integrais primeiras é uma integral primeira. De fato, se H_1 e H_2 são duas integrais primeiras, temos $X(H_1) = X(H_2) = 0$ e assim

$$X(H_1 H_2) = X(H_1) H_2 + H_1 X(H_2) = 0.$$

Portanto,

$$V = \frac{g^2}{R} \frac{f + c_1 g}{g} \frac{f + c_2 g}{g}$$

é um polinômio, com c_1 e c_2 sendo os dois valores notáveis críticos.

Vamos agora assumir que o sistema (2.1) tem um fator integrante inverso polinomial V_1 . Como $V = g^2/R$ também é um fator integrante inverso racional do sistema (2.1), da Proposição 2.7 nós temos que $V_1/V = V_1R/g^2$ é uma integral primeira racional, que por suposições não é polinomial.

Como $f = 0$ é uma curva algébrica invariante irreduzível e V_1R/g^2 é uma integral primeira, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert segue que $V_1R + c_1g^2 = \omega f$ para um conveniente polinômio ω e $c_1 \in \mathbb{C}$. Claramente, $\omega f/g^2 = V_1R/g^2 + c_1$ é uma integral primeira. E, como f/g é uma integral primeira, então ω/g também é uma integral primeira.

Novamente, como $f = 0$ é uma curva algébrica invariante irreduzível e ω/g é uma integral primeira, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert segue que $\omega + c_2g = \lambda f$, com λ sendo um polinômio e $c_2 \in \mathbb{C}$. Daí, como $\lambda f/g = \omega/g + c_2$ e f/g são integrais primeiras, segue que λ é uma integral primeira ou é uma constante. Mas por hipótese não existe integral primeira polinomial, então λ é uma constante.

Podemos escrever $\omega = \lambda f - c_2g$ e como $V_1R + c_1g^2 = \omega f$, segue que $V_1R + c_1g^2 = (\lambda f - c_2g)f$, ou equivalentemente $V_1R = \lambda f^2 - c_2gf - c_1g^2 = \lambda(f + d_1g)(f + d_2g)$, para $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ convenientes. Portanto, nós temos o seguinte polinômio

$$V_1 = \lambda \frac{g^2}{R} \frac{f + d_1g}{g} \frac{f + d_2g}{g}.$$

Logo, $H = f/g$ tem no máximo dois valores notáveis críticos.

(d.1) Seja $V_{\bar{H}}$ o fator integrante inverso dado pelo item (a) do Teorema. Assim $R = 1/V_{\bar{H}}$ é um fator integrante e a curva $\{R = 1/V_{\bar{H}} = 0\}$ é formada por trajetórias do sistema (2.1) (pois $XR = -R\text{div}X$). Note que o polinômio K dado por (4.5) é uma curva algébrica invariante. Agora, como as únicas curvas algébricas invariantes irreduzíveis do campo de vetores são $f_i = 0$ e $g_k = 0$, segue da Proposição 2.11 e de (4.7) que $K = f_1^{\alpha_1} \dots f_p^{\alpha_p} g_1^{\beta_1} \dots g_q^{\beta_q}$, onde os α_i 's e os β_k 's são inteiros não negativos com $i = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, q$.

Para todo $i = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, q$, temos $\alpha_i = \beta_k = 0$. De fato, Suponha que $\alpha_i > 0$ para algum $i = 1, \dots, p$, ou $\beta_k > 0$ para algum $k = 1, \dots, q$. Considere a equação (4.6). Se $\alpha_i > 0$, temos que f_i divide os polinômios S^x e S^y , ou se $\beta_k > 0$, temos que g_k divide os polinômios S^x e S^y . Das expressões S^x e S^y e do fato de f_i ser irreduzível, f_i deve dividir $\partial f_i/\partial x$ e $\partial f_i/\partial y$ se $\alpha_i > 0$. Similarmente, por g_k ser irreduzível, g_k deve dividir $\partial g_k/\partial x$ e $\partial g_k/\partial y$ se $\beta_k > 0$, onde usamos que g_k e h_k são coprimos. Mas isto é impossível para um polinômio. Então, $\alpha_i = \beta_k = 0$, para $i = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, q$. Assim, concluímos que $K \equiv 1$. Portanto, por (4.7), $V_{\bar{H}} = f_1 \dots f_p g_1^{n_1+1} \dots g_q^{n_q+1}$.

(d.2) Por (d.1) nós obtemos $V_{\bar{H}} = f_1 \dots f_p g_1^{n_1+1} \dots g_q^{n_q+1}$, isto é, $V_{\bar{H}}$ é polinomial. Assuma por contradição que $\deg(V_{\bar{H}}) = n \neq m + 1$.

Vamos escrever

$$\begin{aligned} V_{\bar{H}} &= V_0 + V_1 + \dots + V_n, \\ P &= P_0 + P_1 + \dots + P_m, \\ Q &= Q_0 + Q_1 + \dots + Q_m, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde V_i , P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau i e j respectivamente, para $i = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, m$. Sabemos que $V_{\bar{H}}$ satisfaz a equação

$$P \frac{\partial V_{\bar{H}}}{\partial x} + Q \frac{\partial V_{\bar{H}}}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V_{\bar{H}}.$$

Substituindo (4.13) na equação acima, obtemos

$$\sum_{j=0}^m P_j \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^n V_i + \sum_{j=0}^m Q_j \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=0}^n V_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^m P_j + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=0}^m Q_j \right) \sum_{i=0}^n V_i,$$

ou seja,

$$P_m \frac{\partial V_n}{\partial x} + Q_m \frac{\partial V_n}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial Q_m}{\partial y} \right) V_n.$$

Logo, V_n é um fator integrante inverso do sistema diferencial polinomial homogêneo

$$\dot{x} = P_m, \quad \dot{y} = Q_m.$$

Seja X_m o campo vetorial associado a este sistema. A Proposição 3.9 nos diz que qualquer sistema diferencial polinomial homogêneo tem um fator integrante inverso da forma

$$\bar{V} = yP_m - xQ_m.$$

Assim, como ambas funções, V_n e $\bar{V}$, são fatores integrantes inversos, a Proposição 2.7 garante que $V_n/\bar{V}$ é uma integral primeira racional do sistema associado ao campo vetorial X_m .

Sabemos que as curvas $f_i = 0$ são curvas algébricas invariantes do sistema (2.1) para $i = 1, \dots, p$. E, por hipótese, as funções $F_j = \exp(h_j/g_j^{n_j})$ são fatores exponenciais para $j = 1, \dots, q$. Denotando então K_{f_i} e K_{F_j} os cofatores de $f_i = 0$ e $F_j = \exp(h_j/g_j^{n_j})$ respectivamente, nós temos que $Xf_i = K_{f_i}f_i$ e $XF_j = K_{F_j}F_j$, onde $X = (P, Q)$. Como H é uma integral primeira de X , vale que

$$X(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) = (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i K_{f_i} + \sum_{j=1}^q \mu_j K_{F_j} \right) \equiv 0,$$

consequentemente, pelo Teorema de Darboux

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_{f_i} + \sum_{j=1}^q \mu_j K_{F_j} \equiv 0. \quad (4.14)$$

Denote por $\tilde{f}$ a parte homogênea de maior grau de um polinômio f . A função $\tilde{H} = \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p} \tilde{F}_1^{\mu_1} \dots \tilde{F}_q^{\mu_q}$, onde $\tilde{F}_j = \exp(\tilde{h}_j/\tilde{g}_j)$, é uma integral primeira do sistema diferencial polinomial homogêneo associado ao campo $X_m = (P_m, Q_m)$. De fato, como $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante para o sistema (2.1) com cofator K_{f_i} , segue que $\tilde{f}_i = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema associado ao campo X_m com cofator $\tilde{K}_{\tilde{f}_i}$. Da mesma forma, como F_j é um fator exponencial para o sistema (2.1) com cofator K_{F_j} , segue que $\tilde{F}_j$ é um fator exponencial do sistema associado ao campo X_m com cofator $\tilde{K}_{\tilde{F}_j}$. Então, por (4.14)

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \tilde{K}_{\tilde{f}_i} + \sum_{j=1}^q \mu_j \tilde{K}_{\tilde{F}_j} \equiv 0.$$

Logo, $\tilde{H}$ é uma integral primeira pois

$$X(\tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p} \tilde{F}_1^{\mu_1} \dots \tilde{F}_q^{\mu_q}) = (\tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p} \tilde{F}_1^{\mu_1} \dots \tilde{F}_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \tilde{K}_{\tilde{f}_i} + \sum_{j=1}^q \mu_j \tilde{K}_{\tilde{F}_j} \right) \equiv 0.$$

Dessa forma, concluímos que o sistema homogêneo associado ao campo X_m tem simultaneamente duas integrais primeiras, uma sendo racional $V_n/\bar{V}$ e uma da forma de Darboux $\tilde{H}$, o que é uma contradição, pois por hipótese $\tilde{H}$ é multivalorada. Para evitar esta contradição devemos ter $n = m + 1$ e $V_n/\bar{V}$ constante, isto é, $V_m/\bar{V}$ não é uma integral primeira. Portanto, o grau de $V_{\bar{H}}$ é $m + 1$. ■

Concluímos este capítulo com um resultado (ver [11]) que fornece uma cota do grau de um fator integrante inverso associado a um fator notável. Esta cota segue de uma relação entre o grau do sistema com uma integral primeira polinomial minimal, o grau do fator integrante inverso e o número de valores notáveis críticos.

Observação 4.15. Sejam H uma integral primeira polinomial minimal de X e c um valor notável crítico, ou seja, $H + c = \prod u_j^{\alpha_j}$. Como $H_x = (H + c)_x$ e $H_y = (H + c)_y$, temos que as funções $u_i^{\alpha_i-1}$ ($\alpha_i > 1$) são divisores de H_x e H_y , $\forall i$. Agora se R é um fator integrante, então $RP = -(H + c)_y$, $RQ = (H + c)_x$ e R é um polinômio. Logo, como P e Q são coprimos, segue que $u_i^{\alpha_i-1} \mid R$. Portanto $R = \prod u_i^{\alpha_i-1}$ é o fator notável. Além disso, se H tem $k > 0$ valores notáveis críticos, como $H_x = RQ$ e $H_y = -RP$, então $\deg H = \deg R + m + 1 > m + 1$ e $\deg R \geq k$.

Teorema 4.16. Sejam X um campo vetorial polinomial de grau m e H uma integral primeira polinomial minimal de X . Considere o fator notável R e o fator integrante inverso polinomial $V_R = \prod (H + c_i)/R$, onde c_i são todos os valores notáveis críticos. Seja k o número de valores notáveis críticos. Então

- (a) $k(k + m) \leq \deg V_R = k \deg H - \deg R \leq k(\deg H - 1) \leq \deg R(\deg R + m)$.
- (b) $\deg V_R < \deg H$ se, e somente se, $k = 1$. Além disso, neste caso $\deg V_R = m + 1$.

Demonstração: Temos da expressão $\bar{H} = \prod_{i=1}^k (H + c_i) = RV_R$ que $k \deg H = \deg R + \deg V_R$.

(a) Usando a observação, temos que

$$\deg V_R = k \deg H - \deg R \leq k(\deg H - 1) \leq \deg R(\deg R + m),$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \deg V_R &= k \deg H - \deg R \\ &= k(\deg R + m + 1) - \deg R \\ &= \deg R(k - 1) + k(1 + m) \\ &\geq k(k + m), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem de $\deg R \geq k$. E isto prova (a).

(b) Considerando que $\deg V_R < \deg H$, então da equação $k \deg H = \deg R + \deg V_R$, obtemos

$$0 < k = \frac{\deg R + \deg V_R}{\deg H} = \frac{\deg R + \deg V_R}{\deg R + m + 1} = \frac{\deg R}{\deg R + m + 1} + \frac{\deg V_R}{\deg H} < 2.$$

Como $k \in \mathbb{N}$, concluímos $k = 1$. Além disso $\deg V_R = m + 1$.

Agora, se $k = 1$, então

$$\deg V_R = \deg H - \deg R = \deg H - (\deg H - m - 1) = m + 1 < \deg H.$$

■

5 Fator Integrante Inverso e o Problema do Centro-Foco

Uns dos problemas clássicos na teoria qualitativa dos sistemas diferenciais analíticos no plano é o *Problema do Centro-Foco*. Este problema visa distinguir quando o retrato de fase na vizinhança de um ponto singular monodrômico é um centro ou um foco. Neste capítulo encontramos uma maneira alternativa para resolver o Problema do Centro-Foco através do fator integrante inverso.

Definição 5.1. Seja p um ponto singular de um sistema diferencial. Dizemos que p é um centro se existe uma vizinhança W de p tal que todas as órbitas em $W \setminus \{p\}$ são periódicas.

Definição 5.2. Seja p um ponto singular de um sistema diferencial. Dizemos que p é um foco se existe uma vizinhança W de p tal que todas as órbitas de $W \setminus \{p\}$ tendem a p espiralando para tempo positivo ou negativo.

A próxima Proposição nos diz que se o sistema (2.1) tem um ponto singular do tipo foco, então não existe uma integral primeira definida na vizinhança do foco.

Proposição 5.3. *Considere um sistema diferencial planar com um ponto singular na origem. Se o sistema é integrável em uma vizinhança da origem, então a origem não é um foco.*

Demonstração: Suponha por contradição que existe um sistema integrável com um foco na origem. Então, em uma vizinhança W da origem, todas as órbitas $\gamma_x(t)$ por pontos $x \in W$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_x(t) = 0.$$

Sem perda de generalidade, assuma que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_x(t) = 0$.

Seja $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma integral primeira do sistema, onde U é uma vizinhança da origem. Por definição, H não é constante em U , e, em particular, H não é constante em $U \cap W$. Por continuidade, para qualquer $x \in U \cap W$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(\gamma_x(t)) = H(0).$$

Por definição, $H(\gamma_x)$ é constante, e o limite acima implica que $H(\gamma_x) \equiv H(0)$. Então, $H(x) = H(\gamma_x(0)) = H(0)$. Como x é arbitrário em $U \cap W$, então $H \equiv H(0)$ em $U \cap W$, o que é uma contradição. Logo, o sistema não admite foco na origem.

Analogamente prova-se o caso em que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_x(t) = 0$. ■

Podemos generalizar este resultado para um foco qualquer. A prova segue análoga, basta considerar uma translação para a origem.

Suponha que o sistema (2.1) tem um ponto singular *monodrômico*, isto é, um foco ou um centro. Através de uma translação, uma mudança de variáveis linear e uma reparametrização da variável independente, o sistema pode ser reescrito em uma das seguintes formas

$$\dot{x} = -y + f(x, y); \quad \dot{y} = x + g(x, y), \quad (5.1)$$

$$\dot{x} = y + f(x, y); \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (5.2)$$

$$\dot{x} = f(x, y); \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (5.3)$$

onde $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são polinômios sem termos constantes ou lineares. Os respectivos sistemas são chamados de *sistema tipo linear*, *nilpotente* e *degenerado*. E se a origem for um centro para os sistemas acima, o centro é chamado de *centro tipo linear*, *centro nilpotente* e *centro degenerado*, respectivamente.

Pelo Teorema de Poincaré-Liapunov o sistema (5.1) tem um centro na origem se, e somente se, existe uma integral primeira analítica da forma $H(x, y) = x^2 + y^2 + F(x, y)$ definida em uma vizinhança da origem, onde a expansão de Taylor de F começa com termos de ordem superior a 2. Uma alternativa para este teorema é apresentada abaixo.

Teorema 5.4. *O sistema (5.1) tem um centro na origem se, e somente se, existe um fator integrante inverso $V(x, y) = 1 + G(x, y)$ não nulo definido em uma vizinhança da origem, onde G é um polinômio sem termos constantes.*

Demonstração: Do Teorema de Poincaré-Liapunov, basta mostramos que $H(x, y) = x^2 + y^2 + F(x, y)$, onde a expansão de Taylor de F começa com termos de ordem superior a 2, é uma integral primeira de (5.1) definida em uma vizinhança da origem se, e somente se, existe um fator integrante inverso não nulo $V(x, y) = 1 + G(x, y)$, definido em uma vizinhança da origem, onde G é um polinômio sem termos constantes.

Considerando que $H(x, y) = x^2 + y^2 + F(x, y)$ é uma integral primeira do sistema (5.1), temos

$$\begin{aligned} XH &= (-y + f)(2x + F_x) + (x + g)(2y + F_y) = 0 \\ \Rightarrow (x + g)(2y + F_y) &= (y - f)(2x + F_x) \\ \Rightarrow x + g &= \frac{(y - f)(2x + F_x)}{2y + F_y}. \end{aligned}$$

Como $x + g$ é um polinômio, o lado direito da igualdade também é. Note que nunca teremos $(2y + F_y) \mid (2x + F_x)$, pois F começa com termos de ordem ≥ 3 . Logo, $(2y + F_y) \mid (y - f)$. Da definição de divisibilidade, concluímos que o fator integrante inverso

$$V(x, y) = \frac{y - f(x, y)}{2y + F_y(x, y)} = \frac{x + g(x, y)}{2x + F_x(x, y)}$$

da forma (3.2) é um polinômio.

Suponha por contradição que V não possui termos constantes. Como

$$V = \frac{x + g}{2x + F_x} \Rightarrow V(2x + F_x) = x + g$$

e $F_x \equiv 0$ ou F_x começa com termos de ordem 2, então $V(2x + F_x)$ não possui termos lineares, o que contradiz o outro lado da igualdade. Assim, $V(x, y) = c + G(x, y)$, com c constante. Se necessário, multiplique V por c^{-1} e obteremos V como dado no enunciado.

Agora, suponha que $V = 1 + G(x, y)$ é um fator integrante inverso, isto é,

$$XV = (f - y)\frac{\partial V}{\partial x} + (x + g)\frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)V = (\operatorname{div} X)V,$$

onde X é o campo associado ao sistema (5.1). A partir dessa equação diferencial parcial, chegamos na seguinte igualdade

$$\frac{(f - y)V_x}{V} + \frac{(x + g)V_y}{V} = f_x + g_y.$$

Como f e g são polinômios, então o lado esquerdo da igualdade acima também é um polinômio. Temos que $V \nmid V_x$. De fato, suponha que $V \mid V_x$, então $\deg V \leq \deg V_x$. Mas, sabemos que $\deg V > \deg V_x$, gerando assim uma contradição. Analogamente, $V \nmid V_y$. Podemos concluir então que $V \mid (f - y)$ e $V \mid (x + g)$. Daí, existem $a, b \in \mathbb{F}[x, y]$ satisfazendo

$$(f - y) = aV \quad \text{e} \quad (x + g) = bV. \quad (5.4)$$

Já vimos que a integral primeira associada ao fator integrante inverso é da forma (3.3). O objetivo então é mostrar que $H(x, y) = x^2 + y^2 + F(x, y)$. Primeiro, usando (5.4), segue que

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \int \frac{Q(x, y)}{V(x, y)} dx - \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy \\ &= \int \frac{x + g(x, y)}{V(x, y)} dx + \int \frac{y - f(x, y)}{V(x, y)} dy \\ &= \int b(x, y) dx - \int a(x, y) dy, \end{aligned}$$

ou seja, $\bar{H}(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$.

Afirmção: Os polinômios $a(x, y)$ e $b(x, y)$ podem ser escritos da seguinte forma

$$a(x, y) = -y + A(x, y), \quad b(x, y) = x + B(x, y),$$

onde A e B começam com termos de ordem ≥ 2 . De fato, escrevendo $b(x, y) = k_0 + k_1x + k_2y + \dots$ (onde $\dots$ indicam termos de ordem maior ou igual a 2), por (5.4)

$$x + g = bV = (k_0 + k_1x + k_2y + \dots)(1 + G) = k_0 + k_1x + k_2y + \dots.$$

Pela igualdade de polinômios, tem-se $k_0 = k_2 = 0$ e $k_1 = 1$. Ou seja, $b = x + B$. Da mesma forma, mostra-se que $a(x, y) = -y + A(x, y)$. Assim, a afirmação está provada e substituindo a e b em $\bar{H}$ temos

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \int b(x, y) dx - \int a(x, y) dy \\ &= \int (x + B(x, y)) dx - \int (-y + A(x, y)) dy \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \bar{F}(x, y), \end{aligned}$$

onde $\bar{F}(x, y) = \int B dx - \int A dy$. Daí, obtemos $H = 2\bar{H}$ como no Teorema de Poincaré-Liapunov. ■

Definição 5.5. Centros isócronos são centros tais que toda órbita periódica na vizinhança do centro tem o mesmo período.

Várias famílias com centros isócronos são listadas na literatura e expressões explícitas de fatores integrantes inversos são dadas em cada caso. A seguir enunciaremos sem prova, apenas para ilustrar o texto, dois teoremas que classificam os centros isócronos de sistemas quadráticos e de uma classe de sistemas cúbicos, contudo a prova deles pode ser encontrada em [12, 13], respectivamente.

Teorema 5.6. *A origem é um centro isócrono de um sistema quadrático da forma (5.1) se, e somente se, depois de uma mudança de coordenadas afim e de uma reparametrização da variável independente, o sistema pode ser escrito em uma das quatro formas normais abaixo. Para cada forma normal listada, incluímos o fator integrante inverso correspondente $V(x, y)$.*

$$(S1) \quad \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = x(1 + 2y), \text{ com } V(x, y) = (1 + 2y)^2.$$

$$(S2) \quad \dot{x} = -y + x^2, \quad \dot{y} = x(1 + y), \text{ com } V(x, y) = (1 + y)^3.$$

$$(S3) \quad \dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2, \quad \dot{y} = x\left(1 - \frac{16}{3}y\right), \text{ com } V(x, y) = (3 - 16y)(9 - 24y + 32x^2).$$

$$(S4) \quad \dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2, \quad \dot{y} = x\left(1 + \frac{8}{3}y\right), \text{ com } V(x, y) = (3 + 8y)(9 + 96y - 256x^2 + 128y^2).$$

Teorema 5.7. *Considere o sistema (5.1) onde f e g são polinômios homogêneos de grau 3. Neste caso, a origem é um centro isócrono se, e somente se, depois de uma mudança de coordenadas afim e de uma reparametrização da variável independente, o sistema pode ser escrito em uma das quatro formas normais abaixo. Para cada forma normal listada, incluímos o fator integrante inverso correspondente $V(x, y)$.*

$$(S1*) \quad \dot{x} = -y + x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = x + 3x^2y - y^3, \text{ com } V(x, y) = (x^2 + y^2)^3.$$

$$(S2*) \quad \dot{x} = -y + x^3 - xy^2, \quad \dot{y} = x + x^2y - y^3, \text{ com } V(x, y) = (1 + 2xy)^2.$$

$$(S3*) \quad \dot{x} = -y + 3x^2y, \quad \dot{y} = x - 2x^3 + 9xy^2, \text{ com } V(x, y) = (1 - 3x^2)^4.$$

$$(S4*) \quad \dot{x} = -y - 3x^2y, \quad \dot{y} = x + 2x^3 - 9xy^2, \text{ com } V(x, y) = (1 + 3x^2)^4.$$

Definição 5.8. Dado um campo de vetores analítico X_0 no plano com um centro em $p_0 \in \mathbb{R}^2$, dizemos que este centro é limite de um centro do tipo linear se existe uma família a 1-parâmetro de campos de vetores analíticos X_ε no plano com $\varepsilon \geq 0$, definidos em uma vizinhança de $p_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ e tendo um centro não degenerado em p_ε , para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

O próximo resultado pode ser encontrado em [14].

Teorema 5.9. *Se o sistema (5.3) tem um fator integrante inverso analítico com $V(0, 0) \neq 0$, então o centro degenerado na origem é limite de um centro do tipo linear.*

Demonstração: Por hipótese, sabemos que o sistema (5.3) tem uma integral primeira da forma (3.3) dada por $H = \int g(x, y)/V(x, y)dx - \int f(x, y)/V(x, y)dy$. Mais ainda, o sistema $\dot{x} = f(x, y)/V(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)/V(x, y)$, é um sistema Hamiltoniano e o sistema perturbado

$$\dot{x} = -\varepsilon y + \frac{f(x, y)}{V(x, y)}, \quad \dot{y} = \varepsilon x + \frac{g(x, y)}{V(x, y)} \quad (5.5)$$

também é um sistema Hamiltoniano, onde $\bar{H} = \varepsilon(x^2/2 + y^2/2) + H(x, y)$ é a função Hamiltoniana. Consequentemente o sistema (5.5) tem um centro do tipo linear na origem

para $\varepsilon \neq 0$, pois possui uma integral primeira analítica definida na origem. Daí, o sistema

$$\dot{x} = -\varepsilon yV(x, y) + f(x, y), \quad \dot{y} = \varepsilon xV(x, y) + g(x, y), \quad (5.6)$$

tem um centro do tipo linear na origem para $\varepsilon \neq 0$. Além disso, o sistema inicial (5.3) com um centro é obtido a partir do sistema (5.6) fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

6 Aplicações do Fator Integrante Inverso no Estudo de Ciclo Limite

Um dos problemas fundamentais da teoria qualitativa para sistemas da forma (2.1) é a determinação do número de ciclos limites e sua localização no retrato de fase. Neste capítulo veremos como a existência de um fator integrante inverso pode auxiliar no estudo deste problema.

Neste capítulo, consideraremos sistemas da forma (2.1) onde P e Q são funções de classe $\mathcal{C}^1$.

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados no Capítulo 7 de [1].

Definição 6.1. Se o sistema (2.1) possui uma solução $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, com φ e ψ funções periódicas não constantes, então $\gamma = \{(x, y) : x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ é chamada de órbita periódica do sistema (2.1).

Teorema 6.2. (Teorema de Bendixson) *Assuma que o divergente do sistema (2.1), com $P, Q \in \mathcal{C}^1$, tem sinal constante em uma região simplesmente conexa U e $\text{div}(P, Q) \neq 0$ em qualquer subconjunto de U . Então o sistema (2.1) não possui nenhuma órbita periódica inteiramente contida em U .*

Demonstração: Seja Γ uma trajetória fechada do sistema (2.1). Suponha que Γ e seu interior S estão inteiramente contidos em U . Pelo Teorema de Green temos que

$$\int_{\Gamma} Pdy - Qdx = \int \int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy. \quad (6.1)$$

Mas $Pdy - Qdx = 0$ ao longo de Γ , pois Γ é uma órbita. Daí, o lado esquerdo de (6.1) é zero, o integrando do lado direito tem sinal constante e não é identicamente nulo em S . Mas isto é uma contradição, pois neste caso a integral dupla não pode ser zero. ■

Definição 6.3. Uma órbita periódica γ de um campo vetorial X chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança W de γ tal que γ é a única órbita fechada de X em W .

Proposição 6.4. *Considere o sistema (2.1), com $P, Q \in \mathcal{C}^1$, definido em um subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y \equiv 0$, isto é, a 1-forma*

$$Pdy - Qdx$$

é fechada, então o sistema (2.1) não tem ciclo limite em U .

Demonstração: A ideia é mostrar que se U possui uma órbita fechada, então esta órbita não pode ser isolada. Suponha que U contém uma órbita fechada Γ e tome como seção transversal Σ , à Γ , um pedaço da órbita do campo vetorial $P\partial/\partial y - Q\partial/\partial x$ ortogonal a X . Considere agora um segmento aberto $\Sigma_0 \subset \Sigma$ contendo $\Sigma \cap \Gamma$, no qual uma aplicação de Poincaré $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ está definida. Tome $p \in \Sigma_0 \setminus \Gamma$ um ponto qualquer, tal que $q = \Pi(p)$. Denote por $A \subset U$ o anel formado por $\Gamma \cup \gamma_{pq} \cup \Sigma_{pq}$, onde γ_{pq} é uma parte da órbita de X que une p a q , e Σ_{pq} é o arco de órbita do campo ortogonal a X em Σ entre p e q . Sem perda de generalidade, podemos supor que Γ está orientada no sentido anti-horário. Assim, orientamos a fronteira, ∂A , de A de maneira compatível a aplicar o Teorema de Green. Portanto, como o divergente de X é identicamente nulo, segue que

$$\int_{\partial A} Pdy - Qdx = \int \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{\partial A} Pdy - Qdx = - \int_{\Gamma} Pdy - Qdx + \int_{\gamma_{pq}} Pdy - Qdx + \int_{\Sigma_{pq}} Pdy - Qdx = 0,$$

onde $\gamma_{pq}^\perp = \Sigma_{pq}$ é uma órbita de $X^\perp = (-Q, P)$. Note que

$$\int_{\Gamma} Pdy - Qdx = \int_{\gamma_{pq}^\perp} Pdy - Qdx = 0$$

pois Γ e $\gamma_{pq}^\perp$ são soluções do campo X . Denotando $\gamma_{pq}^\perp(a) = p$ e $\gamma_{pq}^\perp(b) = q$ temos que

$$0 = \int_{\partial A} Pdy - Qdx = \int_{\gamma_{pq}^\perp} Pdy - Qdx = \int_a^b (P^2 + Q^2) dt.$$

Mas, a ultima integral só é zero quando $a = b$, isto é, quando $p = q$. Consequentemente, todas as órbitas em U suficientemente próximas à Γ devem ser fechadas, o que conclui a prova da Proposição. ■

Observação 6.5. Seja $X = (P, Q)$ de classe $\mathcal{C}^1$ um campo vetorial definido em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Se X é Hamiltoniano, o divergente é zero. De fato

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0.$$

A recíproca vale se considerarmos alguma região simplesmente conexa W de U . Com a condição $\operatorname{div} X = 0$, basta tomar $H = \int Pdy + h(x)$, onde h é tal que $\frac{\partial H}{\partial x} = -Q$. Daí, teremos H a função Hamiltoniana definida em W .

Se um campo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tem um fator integrante inverso $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $U \setminus V^{-1}(0)$ é um aberto simplesmente conexo, então qualquer ciclo limite γ de X está contido em $V^{-1}(0)$. De fato, como $\operatorname{div}(X/V) \equiv 0$, pela observação acima o campo X/V é Hamiltoniano em $U \setminus V^{-1}(0)$ e portanto preserva a área. Logo, X/V não tem ciclos limites. Por outro lado, como os retratos de fase de X e X/V são topologicamente equivalentes (a menos da orientação das órbitas) segue que $\gamma \subseteq V^{-1}(0)$. Agora, se $U \setminus V^{-1}(0)$ não é simplesmente conexo, então $\gamma \subseteq V^{-1}(0)$ ou γ está contido em uma componente de $U \setminus V^{-1}(0)$ que não é simplesmente conexa. O teorema a seguir elimina esta segunda opção.

Teorema 6.6. *Seja X um campo vetorial planar de classe $\mathcal{C}^1$ definido em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Considere $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ um fator integrante inverso de X . Se γ é um ciclo limite de X então $\gamma \subseteq V^{-1}(0) = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}$.*

Demonstração: A menos da orientação das órbitas, os campos de vetores X e X/V possuem o mesmo retrato de fase em $U \setminus V^{-1}(0)$. Daí, usaremos o campo vetorial X/V definido em $U \setminus V^{-1}(0)$ para provar o resultado. Pela definição de V , o campo X/V tem divergente nulo. Logo, a Proposição 6.4 garante que X/V não tem ciclos limites em $U \setminus V^{-1}(0)$. Portanto, se X tem um ciclo limite γ , então $\gamma \subseteq V^{-1}(0)$. ■

Nas condições do Teorema acima, se $V^{-1}(0)$ possui uma única trajetória do campo, a igualdade $\gamma = V^{-1}(0)$ acontece. Além disso, se existe um fator integrante inverso de Darboux da forma $V = \exp(R)$, com R racional, então o campo não pode ter ciclo limite.

Observação 6.7. Sejam X um campo vetorial planar de classe $\mathcal{C}^1$ definido em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ e $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ um fator integrante de X , então X não possui ciclos limites. De fato, como X e RX são topologicamente equivalentes (a menos da orientação das órbitas) e $\text{div}(RX) \equiv 0$, segue da Proposição 6.4 que RX não possui ciclo limite em U . Em particular, X não tem ciclos limites.

Exemplo 6.8. O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y + \lambda m_1 x^3 + (m_2 - m_1 + m_1 m_2)x^2 y + \lambda m_1 m_2 x y^2 + m_2 y^3, \\ \dot{y} &= x + \lambda y - x^3 + \lambda m_1 x^2 y + (m_1 m_2 - m_1 - 1)xy^2 + \lambda m_1 m_2 y^3,\end{aligned}$$

onde λ , m_1 e m_2 são parâmetros reais arbitrários, tem o seguinte fator integrante inverso

$$V(x, y) = (x^2 + y^2)(1 + m_1 x^2 + m_1 m_2 y^2).$$

Pelo Teorema 6.6 (como V está definido em todo $\mathbb{R}^2$), se o sistema tem um ciclo limite, então ele é algébrico e é dado pela equação

$$(1 + m_1 x^2 + m_1 m_2 y^2) = 0.$$

Observe que para $m_1 < 0$ e $m_2 > 0$ a curva acima é uma elipse, e se ela não tem pontos singulares, então o sistema tem um ciclo limite.

7 O Conjunto Zero do Fator Integrante Inverso

Estudamos o conjunto $V^{-1}(0)$, onde V é um fator integrante inverso. Sob diferentes hipóteses, veremos alguns conjuntos e alguns pontos em que V se anula e concluiremos o capítulo generalizando alguns resultados utilizando o conceito de integral invariante.

7.1 Pontos Críticos, Separatrizes e Conjuntos Limites

Veremos a relação entre os zeros isolados de um fator integrante inverso V e os pontos singulares de um sistema diferencial polinomial. Mostraremos como a existência de um fator integrante inverso em uma vizinhança de um ponto singular não degenerado fornece informações úteis sobre a dinâmica local do sistema. Por fim, provaremos que V se anula em todas as curvas separatrizes de um ponto de sela.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [15] e [16].

Definição 7.1. Sejam X um campo vetorial planar de classe $\mathcal{C}^1$ e p um ponto singular. Dizemos que p é um ponto singular não degenerado de X se $\det(DX(p)) \neq 0$.

Teorema 7.2. *Seja p_0 um ponto singular não degenerado de um campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1(U)$ (U é um aberto de $\mathbb{R}^2$) e considere V um fator integrante inverso definido em uma vizinhança de p_0 , satisfazendo $V(p_0) \neq 0$. Se $\det(DX(p_0)) > 0$ então p_0 é um centro. Caso contrário, quando $\det(DX(p_0)) < 0$, p_0 é um ponto de sela.*

Demonstração: Por hipótese, V é um fator integrante inverso, então $1/V$ é um fator integrante para o sistema em uma vizinhança U_0 de p_0 e existe uma função I definida em U_0 (uma integral primeira $\mathcal{C}^2$) tal que

$$\nabla I(p_0) = \frac{1}{V(p_0)}(-Q(p_0), P(p_0)).$$

Como p_0 é um ponto singular, da igualdade acima tem-se $\nabla I(p_0) = 0$. Mais ainda,

$$D^2I = \frac{1}{V^2} \begin{pmatrix} -(Q_x V - QV_x) & -(Q_y V - QV_y) \\ P_x V - PV_x & P_y V - PV_y \end{pmatrix},$$

e

$$\det(D^2I(p_0)) = \begin{vmatrix} -Q_x(p_0) & -Q_y(p_0) \\ P_x(p_0) & P_y(p_0) \end{vmatrix} = \det(DX(p_0)).$$

Da equação acima, segue que p_0 é um extremo local de I se $\det(D^2I(p_0)) > 0$ e é um ponto de sela de I se $\det(D^2I(p_0)) < 0$. Agora, como $\det(D^2I(p_0)) = \det(DX(p_0))$, ao analisar as curvas de nível de I numa vizinhança de p_0 , temos que p_0 é um ponto singular do tipo sela se $\det(DX(p_0)) < 0$. E, se $\det(DX(p_0)) > 0$, as curvas de nível de I são curvas fechadas em torno de p_0 , e portanto temos que p_0 é um centro. ■

Definição 7.3. Seja x_0 um ponto singular do campo de vetores $X = (P, Q)$ associado ao sistema (2.1). O ponto x_0 é estável se pra toda vizinhança U de x_0 existe outra vizinhança $U_1 \subset U$, com $x_0 \in U_1$, tal que para toda órbita $\varphi(t)$ de X , com $\varphi(0) \in U_1$, $\varphi(t) \in U$, para todo $t \geq 0$. Se além disso $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$, diminuindo U_1 se necessário, então x_0 é assintoticamente estável.

Um ponto singular do sistema (2.1) diz-se instável quando não for estável.

Definição 7.4. Seja p_0 um ponto singular de (2.1). Uma função de Liapounov para p_0 é uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto U , $p_0 \in U$, satisfazendo as seguintes condições:

- (a) $V(p_0) = 0$ e $V(x) > 0$, $\forall x \neq p_0$;
- (b) $\dot{V} \leq 0$ em U .

A função de Liapounov V diz-se estrita quando

- (c) $\dot{V} < 0$ em $U - \{p_0\}$.

Teorema 7.5. *Seja p_0 um ponto singular de (2.1). Se existe uma função de Liapounov para p_0 , então p_0 é estável. Se a função for estrita, p_0 é assintoticamente estável.*

Demonstração: Sejam $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapounov para p_0 e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - p_0| \leq \delta\} \subset U$. Como B é compacto, existe $m = \min\{V(x); |x - p_0| = \delta\} > 0$ (pois o único ponto que anula V é o ponto singular p_0). Sabemos que V é diferenciável, em particular V é contínua. Segue então da continuidade de V que existe um aberto $U_1 \subset B$, com $p_0 \in U_1$, tal que $V(x) < m$ para todo $x \in U_1$. Como $\dot{V} \leq 0$, ou seja, V é não crescente ao longo das órbitas de (2.1), segue que $\varphi_x(t)$ permanece no interior de B para todo $t \geq 0$ e $x \in U_1$, onde $\varphi_x(t)$ denota a solução do sistema (2.1) com a condição inicial $\varphi_x(0) = x$. Portanto, p_0 é estável.

Agora, vamos considerar V estrita, ou seja, $\dot{V} < 0$ em $U - \{p_0\}$. Sejam $x \in U_1$ e (t_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in B$. Para mostrarmos que x_0 é assintoticamente estável, basta provarmos que $y = p_0$. Então, vamos supor por contradição que $y \neq p_0$. Como $\varphi_x(t_n) \rightarrow y$, segue da continuidade de V que $V(\varphi_x(t_n)) \rightarrow V(y)$. E, já que $V \circ \varphi_x$ é decrescente, temos $V(\varphi_x(t)) > V(y)$, $\forall t \geq 0$. Por outro lado, $V(\varphi_y(1)) < V(\varphi_y(0)) = V(y)$ e para todo z suficientemente próximo de y , $V(\varphi_z(1)) < V(y)$. Daí, para n suficientemente grande, $V(\varphi_{\varphi_x(t_n)}(1)) < V(y)$, ou seja, $V(\varphi_x(t_n + 1)) < V(y)$ (está última desigualdade segue da propriedade do fluxo). Absurdo, pois para n suficientemente grande $V(\varphi_x(t_n + 1)) > V(y)$. Portanto, $y = p_0$ e como B é compacto, segue que p_0 é assintoticamente estável. ■

O próximo teorema está interessado com a estabilidade dos zeros isolados de um fator integrante inverso.

Teorema 7.6. *Seja p_0 um zero isolado de um fator integrante inverso não negativo V de um campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$, definido em uma vizinhança U de p_0 . Então p_0 é um ponto singular estável de X se $\operatorname{div} X|_U \leq 0$. Mais ainda, p_0 é assintoticamente estável se $\operatorname{div} X|_U < 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema acima, basta mostrar que V é uma função de Liapounov quando $\operatorname{div}(X) \leq 0$ e uma função de Liapounov estrita quando $\operatorname{div}(X) < 0$. Por hipótese, temos $V(p_0) = 0$, $V > 0$ em $U \setminus \{p_0\}$ e $\operatorname{div}(P, Q) \leq 0$. Como V é um fator integrante inverso, $\dot{V} = V \operatorname{div}(P, Q)$. Portanto, V é uma função de Liapounov se $\operatorname{div}(P, Q) \leq 0$ e é uma função de Liapounov se $\operatorname{div}(P, Q) < 0$. ■

Definição 7.7. Sejam X um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ e $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto $p = \varphi(0, p)$, definida no seu intervalo máximo $I_p = (a_p, b_p)$. Se $b_p = \infty$, defini-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se $a_p = -\infty$ define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados, respectivamente, de conjunto ω -limite e conjunto α -limite de p .

Proposição 7.8. *Sejam V um fator integrante inverso de um campo de vetores $X = (P, Q)$, definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ e $p_0 \in U$, então*

$$V(\varphi(t, p_0)) = V(p_0) \exp \left(\int_0^t \operatorname{div}(P, Q) \circ \varphi(\tau, p_0) d\tau \right),$$

onde $\varphi(t, p_0)$ é a solução do sistema associado ao campo de vetores X tal que $\varphi(0, p_0) = p_0$.

Demonstração: A demonstração segue do fato que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[V(\varphi(t, p_0))] &= P(\varphi(t, p_0)) \frac{\partial V}{\partial x} + Q(\varphi(t, p_0)) \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= V(\varphi(t, p_0)) [\operatorname{div}(P, Q) \circ \varphi(t, p_0)], \end{aligned}$$

pois V é um fator integrante inverso. ■

Teorema 7.9. *Seja p_0 um ponto de sela hiperbólico de um campo vetorial X , de classe $\mathcal{C}^1$, e V um fator integrante inverso definido em uma vizinhança U de p_0 . Então V se anula nas quatro separatrizes da sela, desde que uma das seguintes condições aconteça: (a) p_0 é forte; (b) p_0 é fraco e $V(p_0) = 0$.*

Demonstração: A prova do Teorema é alcançada fazendo duas mudanças de variáveis no sistema associado ao campo de vetores $X = (P, Q)$. Primeiro fazemos uma mudança de variáveis afim (isto é, transladamos o ponto p_0 para a origem e transformamos a parte linear do campo em sua forma de Jordan) para transformar o sistema associado a X na forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = \alpha x + \varphi(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y) = -\beta y + \psi(x, y), \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e φ, ψ são funções $\mathcal{C}^1$ satisfazendo $\varphi(0, 0) = 0 = \psi(0, 0)$, $\nabla\varphi(0, 0) = 0 = \nabla\psi(0, 0)$. Note que a mudança de variáveis realizada não altera as hipóteses do teorema, ou seja, o campo de vetores associado ao sistema (7.1) possui um fator integrante inverso, que também denotaremos por V , em uma vizinhança U da origem. Fazemos agora uma segunda mudança de variáveis, mas desta vez será uma mudança local e não linear. Pelo Teorema da Variedade Estável (ver página 107 do livro [17]), as curvas separatrizes do sistema (7.1) admitem uma expressão cartesiana $\xi(x, y) = 0$, $\eta(x, y) = 0$, onde ξ, η é um par de funções $\mathcal{C}^1$ expressadas por

$$\begin{cases} \xi(x, y) = x + f(x, y), \\ \eta(x, y) = y + g(x, y), \end{cases} \quad (7.2)$$

com $f, g \in \mathcal{C}^1$ satisfazendo $f(0, 0) = 0 = g(0, 0)$ e $\nabla f(0, 0) = 0 = \nabla g(0, 0)$. Como

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 + f_x & f_y \\ g_x & 1 + g_y \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(0, 0) = 1 \neq 0,$$

a transformação dada por

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (7.3)$$

é uma mudança de variáveis $\mathcal{C}^1$, em uma vizinhança da origem, (cujo efeito geométrico é retificar localmente as separatrizes) com inversa dada por

$$\begin{cases} x = \xi + F(\xi, \eta), \\ y = \eta + G(\xi, \eta), \end{cases} \quad (7.4)$$

onde F, G são funções $\mathcal{C}^1$ satisfazendo $F(0, 0) = 0 = G(0, 0)$ e $\nabla F(0, 0) = 0 = \nabla G(0, 0)$.

Note que $W(\xi, \eta) = V(\xi + F(\xi, \eta), \eta + G(\xi, \eta)) = V(x, y)$ é solução da equação

$$\left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left(P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial \eta} = W \operatorname{div}(P, Q). \quad (7.5)$$

De fato, nas variáveis (ξ, η) o campo de vetores associado ao sistema (7.1) é obtido derivando os dois lados de (7.3), ou seja, $X(\xi, \eta) = \left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y}, P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$. Daí, como $XV = V \operatorname{div} X$, segue que

$$\begin{aligned} & \left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left(P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial \eta} = \\ & P \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + Q \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \\ & P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = W \operatorname{div}(P, Q). \end{aligned}$$

Temos que $W(\xi, 0) = 0$, para ξ perto o suficiente de 0. De fato, como $\eta = 0$ é composto por órbitas do sistema (7.1), então

$$\left(P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \Big|_{\eta=0} = \frac{d\eta}{dt} \equiv 0.$$

Assim, fazendo $\eta = 0$ em (7.5)

$$\left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \Big|_{\eta=0} \frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi, 0) = W(\xi, 0) \operatorname{div}(P, Q) \Big|_{\eta=0}. \quad (7.6)$$

Agora, de (7.1), (7.2) e (7.4) temos

$$\begin{aligned} \left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \Big|_{\eta=0} &= \left[(\alpha x + \varphi(x, y)) \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right. \\ &\quad \left. + (-\beta y + \psi(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \Big|_{\eta=0} \\ &= (\alpha(\xi + F(\xi, 0)) + \varphi(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0))) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0)) \right) \\ &\quad + (-\beta G(\xi, 0) + \psi(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0))) \\ &\quad \times \frac{\partial f}{\partial y}(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0)) \\ &= \alpha \xi + p(\xi), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P, Q) \Big|_{\eta=0} &= \left(\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \beta + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= \alpha - \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial y}(\xi + F(\xi, 0), G(\xi, 0)) \\ &= \alpha - \beta + q(\xi), \end{aligned}$$

onde p e q são funções contínuas tais que $p(0) = 0 = q(0)$. Finalmente, substituindo $\left(P \frac{\partial \xi}{\partial x} + Q \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \Big|_{\eta=0} = \alpha \xi + p(\xi)$ e $\operatorname{div}(P, Q) \Big|_{\eta=0} = \alpha - \beta + q(\xi)$ em (7.6), obtemos

$$(\alpha \xi + p(\xi)) \frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi, 0) = (\alpha - \beta + q(\xi)) W(\xi, 0).$$

Colocando de uma forma ligeiramente diferente, $w(\xi) = W(\xi, 0)$ é uma solução $\mathcal{C}^1$ da equação diferencial ordinária

$$(\alpha \xi + p(\xi)) w'(\xi) = (\alpha - \beta + q(\xi)) w(\xi). \quad (7.7)$$

Por outro lado, quando a condição (a) acontece a origem é um ponto de sela forte do sistema (7.1) e portanto $\alpha \neq \beta$. Neste caso, a solução trivial $\omega \equiv 0$ é a única solução $\mathcal{C}^1$

da equação (7.7) com condição inicial $\omega(0) = 0$. Quando a condição (b) é satisfeita p_0 é um ponto de sela fraco do sistema (7.1), então $\alpha = \beta$ e a equação (7.7) se torna

$$(\alpha\xi + p(\xi))w'(\xi) = q(\xi)w(\xi). \quad (7.8)$$

Mostraremos que $w \equiv 0$ é a única solução $\mathcal{C}^1$ da equação (7.8) com a condição inicial $\omega(0) = 0$. Como $p(0) = 0$ e $p \in \mathcal{C}^1$, para ξ suficientemente pequeno, podemos escrever $p(\xi) = \xi\tilde{p}(\xi)$ e portanto a equação (7.8) pode ser escrita como

$$\xi w'(\xi) = g(\xi)w(\xi), \quad (7.9)$$

onde $g(\xi)$ é uma função contínua satisfazendo $g(0) = 0$. Da continuidade de $g(\xi)$ existe uma vizinhança U_0 do 0 tal que $|g(\xi)| \leq 1/2$ para $\xi \in U_0$. Como $w(\xi)$ é uma função $\mathcal{C}^1$ e $w(0) = 0$, o Teorema do Valor Médio nos permite escrever $|w(\xi)| \leq M|\xi|$, onde $M = \max\{|w'(\xi)| : \xi \in U_0\}$. Substituindo essa desigualdade em (7.9) obtemos $|w'(\xi)| \leq M/2$ com $\xi \in U_0$. Tomando o máximo em ambos os lados dessa desigualdade, temos $M = \max |w'(\xi)| \leq M/2$. Concluimos que $M = 0$ e então $w'(\xi) = 0$ em U_0 . Como $w(0) = 0$, concluimos que $w = 0$ é a única solução $\mathcal{C}^1$ da equação (7.8) com esta condição inicial. Isto prova a afirmação de que $W(\xi, 0) \equiv 0$ em uma vizinhança da origem. De maneira análoga podemos mostrar que $W(0, \eta) \equiv 0$ em tal vizinhança. Isto completa a prova do teorema, uma vez que $V(x, y) = W(\xi, \eta)$ e que $\xi(x, y) = 0$ e $\eta(x, y) = 0$ são as equações cartesianas das curvas separatrizes. ■

Corolário 7.10. *Seja V um fator integrante inverso definido em uma região contendo uma conexão Γ entre as selas hiperbólicas p_i para $i = 1, \dots, n$. Se V se anula em um certo ponto singular p_k , então $V|_{\Gamma} \equiv 0$.*

Demonstração: Se $V(p_k) = 0$ para algum $k = 1, \dots, n$, o teorema acima garante que V se anula nas separatrizes de p_k e portanto, se anula também nos pontos limites destas separatrizes. Concluimos então que V se anula em outro ponto singular p_j e o corolário segue da conexão entre as selas. ■

7.2 Integral Invariante e Fator Integrante Inverso

Nesta seção apresentamos algumas generalizações e extensões dos resultados apresentados na seção anterior. Um ingrediente chave na prova de nossos resultados é o conceito de integral invariante, introduzido por Poincaré para dimensão arbitrária, e sua relação com o fator integrante inverso.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [18].

Seja $\varphi(t, (x_0, y_0))$ a solução de um sistema diferencial associado a um campo de vetores X de classe $\mathcal{C}^1$ definida em um aberto U tal que $\varphi(0, (x_0, y_0)) = (x_0, y_0) \in U$. Denote por $\varphi(t, D)$ a imagem do domínio $D \subset U$ sob a ação do fluxo gerado pelas órbitas de X .

Definição 7.11. *Seja $\mu : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável não nula definida no aberto U . A integral*

$$\int_{\varphi(t, D)} \mu(x, y) dx dy$$

é uma integral invariante do campo de vetores X se para qualquer conjunto mensurável $D \subset U$ a integral independe de t .

Lema 7.12. *Sejam U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\mu : U \setminus V^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe $\mathcal{C}^1$ dada por $\mu = 1/V$. Então V é um fator integrante inverso de um campo de vetores X de classe $\mathcal{C}^1$ em U se, e somente se, a integral*

$$\int_{\varphi(t, D)} \mu(x, y) dx dy,$$

é uma integral invariante de X em $U \setminus V^{-1}(0)$, onde D é qualquer conjunto mensurável contido em U .

Demonstração: Dado qualquer conjunto mensurável $D \subset U \setminus V^{-1}(0)$, defina

$$I(t, D) := \int_{\varphi(t, D)} \mu(x, y) dx dy.$$

Nós afirmamos que a derivada de I com respeito a t existe e é dada em $t = 0$ pela expressão

$$\dot{I}(0, D) = \int_D [X(\mu) + \mu(\operatorname{div} X)]_{(x,y)=(x_0,y_0)} dx_0 dy_0. \quad (7.10)$$

Para provar esta afirmação, consideramos o fluxo

$$\varphi(t, (x_0, y_0)) := (\varphi_1(t, (x_0, y_0)), \varphi_2(t, (x_0, y_0)))$$

e fazemos a mudança de variáveis $x = \varphi_1(t, (x_0, y_0))$, $y = \varphi_2(t, (x_0, y_0))$. Daí, pelo Teorema de Mudança de Variáveis na Integral, a fórmula $I(t, D)$ torna-se

$$I(t, D) = \int_D \mu(\varphi_1(t, (x_0, y_0)), \varphi_2(t, (x_0, y_0))) J(t, (x_0, y_0)) dx_0 dy_0, \quad (7.11)$$

onde $J(t, (x_0, y_0)) = \partial(x, y)/\partial(x_0, y_0)$ é o determinante do Jacobiano. Pela fórmula de Liouville (ver página 56 do livro [16]) segue que

$$J(t, (x_0, y_0)) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} X \circ \varphi(s, (x_0, y_0)) ds \right).$$

Como X , μ e φ são de classe $\mathcal{C}^1$ e o domínio de integração independe de t , segue que o integrando de (7.11) é diferenciável. Daí, $I(t, D)$ é diferenciável com respeito a t e calculando $\dot{I}(t, D)$, temos

$$\dot{I}(t, D) = \int_D \frac{d}{dt} [\mu(\varphi_1, \varphi_2) J] dx_0 dy_0. \quad (7.12)$$

Aplicando a regra da cadeia e usando o fato que $\dot{\varphi}_1(t, (x_0, y_0)) = P(\varphi_1, \varphi_2)$ e $\dot{\varphi}_2(t, (x_0, y_0)) = Q(\varphi_1, \varphi_2)$, onde $X = (P, Q)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mu J] &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}(\varphi_1, \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y}(\varphi_1, \varphi_2) \dot{\varphi}_2 \right) J + \mu \operatorname{div} X(\varphi_1, \varphi_2) J \\ &= J \left[\frac{\partial \mu}{\partial x}(\varphi_1, \varphi_2) P(\varphi_1, \varphi_2) + \frac{\partial \mu}{\partial y}(\varphi_1, \varphi_2) Q(\varphi_1, \varphi_2) + \mu \operatorname{div} X(\varphi_1, \varphi_2) \right]. \end{aligned}$$

Inserindo a igualdade acima em (7.12) e avaliando em $t = 0$, usando que $\varphi_1(0, (x_0, y_0)) = x_0$, $\varphi_2(0, (x_0, y_0)) = y_0$ e $J(0, (x_0, y_0)) = 1$, temos

$$\dot{I}(t, D) = \int_D \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} P + \frac{\partial \mu}{\partial y} Q + \mu \operatorname{div} X \right]_{(x,y)=(x_0,y_0)} dx_0 dy_0,$$

o que resulta em (7.10), como queríamos.

A prova do lema segue da equação (7.10). De fato, primeiro assumiremos que V é um fator integrante inverso. Para que I seja independente de t , é necessário que a derivada de I com relação a t seja identicamente nula. Como $\mu = 1/V$ é um fator integrante e vale $X(\mu) = -\mu(\operatorname{div} X)$, $\forall (x, y) \in U \setminus V^{-1}(0)$, então $\dot{I}(t, D) \equiv 0$, $\forall D \subset U \setminus V^{-1}(0)$ mensurável. Logo, concluímos que $I(t, D)$ é uma integral invariante do campo vetorial X .

Agora, assumiremos que $I(t, D)$ é uma integral invariante do campo de vetores X , ou seja, $\dot{I}(t, D) \equiv 0$, $\forall D \subset U$ mensurável. Isto implica que o integrando $X(\mu) + \mu(\operatorname{div} X) = 0$, ou seja, $\mu = 1/V$ é um fator integrante. Logo,

$$-\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial x} P - \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial y} Q = -\frac{1}{V} (\operatorname{div} X),$$

e portanto

$$\frac{\partial V}{\partial x} P + \frac{\partial V}{\partial y} Q = V (\operatorname{div} X),$$

isto é, V é um fator integrante inverso. ■

Seja p um ponto singular de X e suponha que existe uma curva fechada simples C , ou seja C não possui auto interseção, com as seguintes propriedades:

- (i) $C \cup \operatorname{Int}(C) \subset U$, onde $\operatorname{Int}(C)$ denota o interior de C ;
- (ii) $C \cup \operatorname{Int}(C)$ contém precisamente um ponto singular de X , o ponto singular p , com $p \in \operatorname{Int}(C)$;
- (iii) Existe um ponto $q \in C$ tal que a curva integral $\varphi(t, q)$ permanece em $C \cup \operatorname{Int}(C)$ para todo $t \geq 0$ (respectivamente, para todo $t \leq 0$), e tende para p quando $t \rightarrow \infty$ (respectivamente, $t \rightarrow -\infty$).

Então $C \cup \operatorname{Int}(C)$ decompõe-se em um número finito de setores do tipo elíptico, hiperbólico ou parabólico.

Teorema 7.13. *Seja p um ponto singular de um campo de vetores X de classe C^1 , tendo um setor elíptico ou parabólico. Se V é um fator integrante inverso definido em uma vizinhança de p , então $V(p) = 0$.*

Demonstração: Seja Ω um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^2$. Vamos denotar por $A(\Omega)$ a área deste conjunto e por $\bar{A}(\Omega)$ o seu fecho topológico.

Considere $\tilde{U}$ a vizinhança de p onde V está definido. Escolha qualquer ponto $q \in \tilde{U}$ no interior de um setor não hiperbólico de p , e inverta o fluxo se necessário, de modo que $\{p\}$ seja o conjunto ω -limite de q . Se $V(q) = 0$ então $V(p) = 0$. De fato, pela Proposição 7.8,

$$V(\varphi(t, q)) = V(q) \exp \int_0^t \operatorname{div} X \circ \varphi(s, q) ds, \quad (7.13)$$

e concluímos que $V(\varphi(t, q)) = 0$, para todo $t \geq 0$. Daí, como $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$ (pois $\omega(q) = \{p\}$), segue da continuidade de V que $V(\varphi(t, q)) \rightarrow V(p)$. Logo, $V(p) = 0$.

Se $V(q) \neq 0$, considere $D \subset \tilde{U}$ qualquer disco fechado centrado em q totalmente contido no interior do setor que contém q e tal que V não se anula em D . Multiplique V por -1 se necessário de modo que V seja positivo em D . Novamente pela igualdade (7.13) temos que V não se anula na saturação de D sob o fluxo φ , então a integral $I(D) = \int_{\varphi(t, D)} \mu dx dy$ está bem definida em D . E, porque D está em um conjunto que não é hiperbólico, p é o conjunto ω -limite de todo ponto em D , então a área $A(\varphi(t, D)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Para qualquer $t \geq 0$ fixo, pelo Teorema do Valor Médio para integrais existe um ponto $p_t \in \varphi(t, D)$ tal que

$$I(D) = \mu(p_t)A(\varphi(t, D)).$$

A medida que t aumenta, $A(\varphi(t, D)) \rightarrow 0$, mas $I(D)$ é fixo, portanto $\mu(p_t) \rightarrow \infty$, que por sua vez implica que $V(p_t) \rightarrow 0$. Como $p_t \rightarrow p$, pela continuidade de V , $V(p) = 0$. ■

O Teorema 7.9 não é válido, em geral, para pontos singulares não hiperbólicos. Mas ele generaliza para pontos singulares de sela ou sela-nó com exatamente um autovalor diferente de zero, como mostra o próximo resultado.

Teorema 7.14. *Suponha que p_0 é um ponto singular isolado de um campo vetorial X de classe C^1 , e que V é um fator integrante inverso de X definido em uma vizinhança de p_0 . Se a parte linear $DX(p_0)$ tem exatamente um autovalor zero, então V se anula ao longo de qualquer separatriz de X em p_0 .*

Demonstração: A hipótese de que existe exatamente um autovalor não nulo implica que p_0 é um nó, uma sela, ou uma sela-nó, e que $\text{div} X(p_0) \neq 0$, de modo que é automático que $V(p_0) = 0$. Temos que V se anula ao longo de uma separatriz estável (no caso de uma sela-nó) ou separatrizes (no caso de uma sela).

Por uma mudança de coordenadas afim o sistema é

$$\dot{x} = x + \phi(x, y), \quad \dot{y} = \psi(x, y),$$

onde ϕ e ψ são termos de ordem maior ou igual a 2. Para mostrar que V se anula basta repetir a prova do Teorema 7.9 para o caso hiperbólico, simplesmente substituindo β pelo número 0. ■

Um gráfico $\Gamma = [\cup_{i=1}^k \{\varphi_i(t)\}] \cup [\cup_{i=1}^n \{p_i\}]$ é um conjunto invariante pelo fluxo de um campo de vetores formado por k pontos singulares $p_1, \dots, p_k$, $p_{k+1} = p_1$ e k órbitas regulares orientadas $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$, conectando-os de forma que $\varphi_i(t)$ é uma órbita instável de p_i e uma órbita estável de p_{i+1} . Um gráfico pode ou não ter associado uma aplicação retorno de Poincaré. Caso tenha uma, é chamado de *policiclo*.

Terminamos esta seção com um corolário dos Teoremas 7.9 e 7.14.

Corolário 7.15. *Sejam Γ um policiclo (ou um gráfico que não precisa ser um conjunto limite) de um campo de vetores X de classe C^1 definido em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ e V um fator integrante inverso de X definido em alguma vizinhança de Γ . Assuma que os pontos singulares de X que pertencem a Γ são selas hiperbólicas $p_1, \dots, p_n$ ou selas e selas-nó $q_1, \dots, q_m$ com exatamente um autovalor nulo. Se as separatrizes de Γ são tais que sempre se conectam p_k com p_j e $V(p_k) = 0$ ou p_k com q_j ou q_k com q_j então $\Gamma \subseteq V^{-1}(0)$.*

8 Bifurcação e o Fator Integrante Inverso

O fator integrante inverso tem se mostrado muito útil em muitos problemas de bifurcações. Neste capítulo trabalhamos com sistemas da forma (2.1), onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções analíticas em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Considere a família paramétrica de sistemas diferenciais da forma

$$\dot{x} = \mathbf{P}(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \mathbf{Q}(x, y, \varepsilon), \quad (8.1)$$

onde $\mathbf{P}(x, y, \varepsilon)$ e $\mathbf{Q}(x, y, \varepsilon)$ são funções analíticas em $(x, y) \in U$ e para ε próximo da origem, com $\mathbf{P}(x, y, 0) = P(x, y)$ e $\mathbf{Q}(x, y, 0) = Q(x, y)$. O parâmetro ε é chamado de *parâmetro de bifurcação* e supomos que está definido em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^k$, com $k \in \mathbb{N}$; em muitos casos consideramos que ε é um parâmetro unidimensional real ($k = 1$). Para pequenos valores de $|\varepsilon|$, dizemos que a família de sistemas (8.1) é uma perturbação do sistema (2.1). Quando ε assume valores próximos da origem $0 < |\varepsilon| < 1$, o comportamento qualitativo do sistema (8.1) pode mudar em relação ao do sistema (2.1). Neste caso, dizemos que ocorreu uma bifurcação. A teoria da bifurcação visa caracterizar sob quais condições do sistema (2.1) e suas perturbações, essas bifurcações eventualmente acontecem e quais são suas propriedades. Por exemplo, considere um ponto singular p do sistema (2.1) e denote por λ e μ os autovalores da parte linear do sistema ao redor de p . Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda \cdot \mu < 0$, então dizemos que p é um *ponto de sela hiperbólico* e um clássico resultado afirma que qualquer perturbação do sistema em uma vizinhança de um ponto de sela tem o mesmo comportamento qualitativo, ou seja, temos um ponto singular de sela que tende para p , quando ε tende a zero. Chamamos de *hiperbólico* o objeto que mantém sua natureza qualitativa mesmo sob uma perturbação. Em contraste, se p é um ponto singular do tipo centro, ou seja, tem uma vizinhança preenchida com órbitas periódicas, então uma perturbação do sistema geralmente quebra essas órbitas e o ponto pode ser transformado, por exemplo, em um ponto único do tipo foco, ou seja, cercado por órbitas que espiralam em sua direção (quando o foco é atrator) ou em direção contrária (quando o foco instável). Nesse caso, dizemos que p é um *ponto de bifurcação*. Quando a família considerada (8.1) mostra todos os possíveis comportamentos qualitativos que podem ocorrer ao perturbar um objeto do sistema (2.1), dizemos que é um *desdobramento*. O número mínimo de parâmetros necessários para ter um desdobramento são chamados de *codimensão*.

Definição 8.1. Dada uma família de sistemas da forma (8.1), um conjunto periódico limite é um subconjunto compacto e não vazio Γ de pontos tal que existe uma sequência $(\varepsilon_n)_n$ tendendo para ε^* quando $n \rightarrow \infty$ e para todo ε_n , o sistema (8.1) correspondente,

tem um ciclo limite γ_{ε_n} que tende para Γ , no sentido de distância Hausdorff, quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 8.2. Dado um conjunto periódico limite da família (8.1), definimos sua ciclicidade como o número máximo de ciclos limites que podem ser bifurcados a partir de Γ nesta família.

Os fatores integrantes inversos simplificam o estudo de sistemas particulares e permite o entendimento de várias bifurcações. No Exemplo 6.8 do Capítulo 5, V determina todas as bifurcações dentro da família. Veremos adiante como os fatores integrantes inversos atuam no processo de bifurcação de ciclos limites a partir de conjuntos periódicos limites.

8.1 Bifurcação a partir de um Anel de Órbitas Periódicas

Ao considerarmos um sistema Hamiltoniano com um centro na origem e uma perturbação sobre este sistema, no objetivo de encontrar um fator integrante inverso da forma $\mathbf{V}(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(x, y)$ para o sistema perturbado, encontramos uma expressão específica para V_0 , no caso, V_0 é a integral de Poincaré-Melnikov.

Definição 8.3. Consideramos o sistema diferencial planar da forma (2.1) com um ponto singular do tipo centro. O conjunto de órbitas periódicas em torno deste ponto é chamado de anel de órbitas periódicas.

Uma perturbação do sistema (2.1) geralmente elimina essas órbitas periódicas, mas algumas delas podem persistir como ciclos limites para o sistema perturbado. Neste caso, dizemos que estes ciclos limites bifurcam do anel de órbitas periódicas.

Consideraremos um sistema diferencial planar Hamiltoniano com um centro na origem:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

onde $H(x, y)$ é a função Hamiltoniana analítica definida em uma vizinhança da origem. Denotaremos por Υ o anel de órbitas periódicas de centro na origem. Vamos considerar uma perturbação analítica do sistema Hamiltoniano anterior:

$$\dot{x} = \mathbf{P}(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \mathbf{Q}(x, y, \varepsilon),$$

onde,

$$\mathbf{P}(x, y, \varepsilon) := \frac{\partial H}{\partial y} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x, y), \quad \mathbf{Q}(x, y, \varepsilon) := -\frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(x, y),$$

com ε sendo um parâmetro real suficientemente pequeno e $f_k(x, y)$, $g_k(x, y)$ são funções analíticas em $\Upsilon \cup \{(0, 0)\}$. Buscaremos uma solução analítica

$$\mathbf{V}(x, y, \varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(x, y), \tag{8.2}$$

da equação diferencial parcial

$$\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} \right) \mathbf{V}. \tag{8.3}$$

Substituindo a expansão em série de $\mathbf{V}(x, y, \varepsilon)$ na equação diferencial parcial acima, obtemos uma sucessão de equações diferenciais lineares para as funções $V_k(x, y)$ que podem ser resolvidas recursivamente. Ao analisarmos um caso particular em que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{P}(x, y, \varepsilon) = H_y(x, y) + \varepsilon f_1(x, y) + \varepsilon^2 f_2(x, y) + \varepsilon^3 f_3(x, y), \\ \dot{y} &= \mathbf{Q}(x, y, \varepsilon) = -H_x(x, y) + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y) + \varepsilon^3 g_3(x, y),\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{V}(x, y, \varepsilon) = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + \varepsilon^2 V_2(x, y) + \varepsilon^3 V_3(x, y),$$

usando que $H_{xy} = H_{yx}$ (pois H é analítica), onde H_x denota a derivada de H com relação a x e H_y denota a derivada de H com relação a y , de

$$\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} \right) \mathbf{V} = 0.$$

obtemos

$$\begin{aligned}& \left(-V_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} - V_3 \frac{\partial g_3}{\partial y} + f_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} + g_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \right) \varepsilon^6 + \left(-V_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} - V_2 \frac{\partial g_3}{\partial y} - V_3 \frac{\partial f_2}{\partial x} - V_3 \frac{\partial g_2}{\partial y} \right. \\& + f_3 \frac{\partial V_2}{\partial x} + g_3 \frac{\partial V_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + g_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} \left. \right) \varepsilon^5 + \left(-V_1 \frac{\partial f_3}{\partial x} - V_1 \frac{\partial g_3}{\partial y} - V_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - V_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} \right. \\& - V_3 \frac{\partial f_1}{\partial x} - V_3 \frac{\partial g_1}{\partial y} + f_3 \frac{\partial V_1}{\partial x} + g_3 \frac{\partial V_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + g_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + f_1 \frac{\partial V_3}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_3}{\partial y} \left. \right) \varepsilon^4 \\& + \left(-H_x \frac{\partial V_3}{\partial y} + H_y \frac{\partial V_3}{\partial x} - V_0 \frac{\partial f_3}{\partial x} - V_0 \frac{\partial g_3}{\partial y} - V_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - V_1 \frac{\partial g_2}{\partial y} - V_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} - V_2 \frac{\partial g_1}{\partial y} \right. \\& + f_3 \frac{\partial V_0}{\partial x} + g_3 \frac{\partial V_0}{\partial y} + f_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + g_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_2}{\partial y} \left. \right) \varepsilon^3 + \left(-H_x \frac{\partial V_2}{\partial y} + H_y \frac{\partial V_2}{\partial x} \right. \\& - V_0 \frac{\partial f_2}{\partial x} - V_0 \frac{\partial g_2}{\partial y} - V_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - V_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial V_0}{\partial x} + g_2 \frac{\partial V_0}{\partial y} + f_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \left. \right) \varepsilon^2 \\& + \left(-H_x \frac{\partial V_1}{\partial y} + H_y \frac{\partial V_1}{\partial x} - V_0 \frac{\partial f_1}{\partial x} - V_0 \frac{\partial g_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial V_0}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \varepsilon - H_x \frac{\partial V_0}{\partial y} + H_y \frac{\partial V_0}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Substituindo $\varepsilon = 0$ na equação acima, temos

$$-H_x \frac{\partial V_0}{\partial y} + H_y \frac{\partial V_0}{\partial x} = 0. \quad (8.4)$$

Em outras palavras, a equação de ordem 0 em ε implica que V_0 é uma integral primeira do sistema não perturbado. E mais, neste caso, como o sistema é Hamiltoniano, V_0 também é um fator integrante inverso. A solução geral da equação diferencial parcial (8.4) é uma função analítica arbitrária de H , então $V_0 = V_0(H(x, y)) = V_0(H)$ é uma função do Hamiltoniano $H(x, y)$. Observando as equações de ordem 1, 2 e 3 em ε , podemos ver que a equação de ordem k em ε tem a seguinte forma

$$\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial V_k}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial y} = \sum_{j=0}^{k-1} V_j \left(\frac{\partial f_{k-j}}{\partial x} + \frac{\partial g_{k-j}}{\partial y} \right) - \sum_{j=0}^{k-1} \left(f_{k-j} \frac{\partial V_j}{\partial x} + g_{k-j} \frac{\partial V_j}{\partial y} \right). \quad (8.5)$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [19].

Teorema 8.4. *Suponha que a função $\mathbf{V}$ dada por (8.2) seja periódica quando avaliada nas órbitas periódicas não perturbadas. Então $V_0(h)$ tem a seguinte forma*

$$V_0(h) = \lambda \int_{\{H=h\}} g_1(x, y)dx - f_1(x, y)dy,$$

onde λ é uma constante real não nula e $\{H = h\}$ denota a órbita periódica de Υ contido no conjunto de nível h do Hamiltoniano $H(x, y)$.

Demonstração: Primeiro, tome $k = 1$ em (8.5). Daí,

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial V_1}{\partial y} = V_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) - \left(f_1 \frac{\partial V_0}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right).$$

Uma solução particular para esta equação é obtida resolvendo

$$\frac{dx}{\partial H / \partial y} = \frac{dy}{-\partial H / \partial x} = \frac{dV_1}{V_0(\partial f_1 / \partial x + \partial g_1 / \partial y) - (f_1(\partial V_0 / \partial x) + g_1(\partial V_0 / \partial y))}.$$

A equação diferencial definida pela primeira igualdade da equação acima dada por

$$-\frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\partial H}{\partial y} dy$$

tem solução constante $H(x, y) = h = \text{constante}$. Assim, $V_0 = V_0(h)$.

Como $\mathbf{V}$ é periódica quando avaliada nas órbitas periódicas não perturbadas, temos que V_1 também é. Considere a órbita $(x(t, h), y(t, h))$ de período T do sistema não perturbado. Então V_1 avaliada nesta órbita é periódica e satisfaz a seguinte equação diferencial parcial com respeito a variável t :

$$\frac{dV_1}{dt} = V_0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) - \left(f_1 \frac{\partial V_0}{\partial x} + g_1 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right).$$

Como $V_0(x, y) = V_0(H(x, y))$, segue que $\frac{\partial V_0}{\partial x} = V_0'(H) \frac{\partial H}{\partial x} = -V_0'(H) \dot{y}$ e $\frac{\partial V_0}{\partial y} = V_0'(H) \frac{\partial H}{\partial y} = V_0'(H) \dot{x}$. Daí

$$\frac{dV_1}{dt} = V_0(h) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) - V_0'(h)(g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}).$$

Assim a solução particular da equação (8.5), para $k = 1$, calculada em uma órbita não perturbada pode ser escrita como

$$V_1(x(t, h), y(t, h)) = V_0(h) \int_0^t \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dt - V_0'(h) \int_0^t (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt. \quad (8.6)$$

Como $V_1(x(T, h), y(T, h)) = V_1(x(0, h), y(0, h))$, então $V_1(x(T, h), y(T, h)) - V_1(x(0, h), y(0, h)) = 0$. Logo, de (8.6), obtemos

$$V_0(h) \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dt = V_0'(h) \int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt. \quad (8.7)$$

Afirmação: Sejam $(x(t, h), y(t, h))$ uma órbita T -periódica para o centro do sistema não perturbado e $\varphi(x, y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$, então

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dh} \int_0^T \varphi(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial y}{\partial t} dt &= \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t, h), y(t, h)) dt, \\ \frac{d}{dh} \int_0^T \varphi(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial x}{\partial t} dt &= \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t, h), y(t, h)) dt. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Prova: Para a prova da primeira igualdade, defina

$$I(h) = \frac{d}{dh} \int_0^{T(h)} \varphi(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, h) dt,$$

isto é,

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_0^{T(h)} \frac{d}{dh} \left(\varphi(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, h) \right) dt \\ &\quad + \varphi(x(T(h), h), y(T(h), h)) \frac{\partial y}{\partial t}(T(h), h) \frac{dT(h)}{dh}. \end{aligned}$$

Na órbita fechada $(x(t, h), y(t, h))$ sempre existe um ponto tal que $\partial y / \partial t = 0$. Escolhemos a condição inicial de forma que

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0, h) = \frac{\partial y}{\partial t}(T(h), h) = 0.$$

Logo, obtemos

$$I(h) = \int_0^T A(x, y, h, t) dt,$$

onde

$$A(x, y, h, t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \varphi \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial h}.$$

Usando as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

temos que

$$\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} - 1 = -\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} - 1 = \frac{dy}{dt} \frac{\partial x}{\partial h}.$$

Substituindo esta última igualdade em $A(x, y, h, t)$, chegamos que

$$\begin{aligned} A(x, y, h, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial t} + \varphi \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial h} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} - 1 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial t} + \varphi \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial h} \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial t} + \varphi \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial h} \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial y}{\partial h} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I(h) = \int_0^T A(x, y, h, t) dt = - \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt + \left[\varphi \frac{\partial y}{\partial h} \right]_0^T = - \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt,$$

como queríamos.

A prova da segunda igualdade segue de maneira análoga. Isto completa a prova da Afirmação.

Substituindo f_1 e g_1 no lugar de φ na equação (8.8)

$$\int_0^T \frac{\partial f_1}{\partial x}(x(t, h), y(t, h))dt = -\frac{d}{dh} \int_0^T f_1(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial y}{\partial t} dt,$$

$$\int_0^T \frac{\partial g_1}{\partial y}(x(t, h), y(t, h))dt = \frac{d}{dh} \int_0^T g_1(x(t, h), y(t, h)) \frac{\partial x}{\partial t} dt.$$

Assim,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dt = \frac{d}{dh} \int_0^T \left(g_1 \frac{\partial x}{\partial t} - f_1 \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt.$$

Substituindo a igualdade acima na equação (8.7) obtemos que

$$V_0(h) \frac{d}{dh} \int_0^T \left(g_1 \frac{\partial x}{\partial t} - f_1 \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt = V_0'(h) \int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt,$$

ou equivalentemente

$$V_0(h) \frac{d}{dh} \int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt = V_0'(h) \int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt.$$

Se $\int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt \neq 0$, então a partir desta equação diferencial linear de primeira ordem, onde a função desconhecida é $V_0(h)$, obtemos

$$V_0(h) = \lambda \int_0^T g_1(x, y) dx - f_1(x, y) dy,$$

onde λ é uma constante real. E isto conclui a demonstração. ■

A integral $\int_0^T (g_1 \dot{x} - f_1 \dot{y}) dt$ é denominada integral de Poincaré-Melnikov, veja [20].

8.2 Bifurcação de Conjuntos ω -limite Monodrômicos

Dado um sistema diferencial real planar da forma (2.1), definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, com um fator integrante inverso definido em uma vizinhança de uma órbita regular $\phi(t)$, este fator integrante inverso define uma equação diferencial ordinária para a aplicação de transição ao longo da órbita, veja a equação (8.12). Tomando duas seções transversais Σ_1 e Σ_2 à $\phi(t)$, definimos a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Isto é, em Σ_1 , considere a órbita de (2.1) por este ponto e seguimos esta órbita até que ela intercepte Σ_2 . A seguir faremos um estudo desta aplicação e de suas propriedades relacionadas ao fator integrante inverso.

Seja $(\varphi(s), \psi(s)) \in U$ com $s \in I \subset \mathbb{R}$ uma parametrização da órbita regular $\phi(t)$ entre os pontos de Σ_1 e Σ_2 ; em outras palavras, $(\varphi(s), \psi(s))$ é solução de (2.1). Dado um ponto (x, y) em uma vizinhança suficientemente pequena da órbita $(\varphi(s), \psi(s))$, podemos sempre encontrar uma mudança de coordenadas (s, n) , denominada de *coordenadas curvilíneas* (ver [21]), que satisfaz a seguinte mudança de variável:

$$x(s, n) = \varphi(s) - n\psi'(s), \quad y(s, n) = \psi(s) + n\varphi'(s).$$

Geometricamente esta mudança significa que, ao tomarmos o ponto $(\varphi(s), \psi(s))$, o vetor tangente a este ponto é $(\varphi'(s), \psi'(s))$ e o vetor normal é dado por $(-\psi'(s), \varphi'(s))$. Daí, $(\varphi(s), \psi(s)) + n(-\psi'(s), \varphi'(s))$ é a equação vetorial da reta passando pelo ponto $(\varphi(s), \psi(s))$ na direção do vetor normal $(-\psi'(s), \varphi'(s))$. Vale observar que ambas funções, φ e ψ , são analíticas pois estamos supondo que o sistema (2.1) é analítico, e portanto, $x = x(s, n)$ e $y = y(s, n)$ também são analíticas. Observamos que a variável n mede a distância perpendicular a $\phi(t)$ do ponto $(\varphi(s), \psi(s))$ e quando $n = 0$ temos a parametrização regular $(x(s, 0), y(s, 0)) = (\varphi(s), \psi(s))$ da órbita $\phi(t)$.

Vejamos como reescrever o sistema (2.1) nas novas coordenadas (s, n) . Temos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{dn}{dt} = P(x(s, n), y(s, n)), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{dn}{dt} = Q(x(s, n), y(s, n)).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Delta(s, n) = \begin{vmatrix} \varphi'(s) & -\psi'(s) \\ \psi'(s) & \varphi'(s) \end{vmatrix} = (\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 \neq 0,$$

$s \in I$, pois se $(\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 = 0$, então $\varphi'(s) = \psi'(s) = 0$. O que é um absurdo visto que, por hipótese, $\phi(t)$ é uma órbita regular. Assim, resolvendo o sistema acima pela Regra de Cramer, chegamos facilmente em

$$\frac{ds}{dt} = \frac{P(x, y)y_n - Q(x, y)x_n}{\Delta(s, n)}, \quad \frac{dn}{dt} = \frac{Q(x, y)x_s - P(x, y)y_s}{\Delta(s, n)},$$

onde x_s e y_s são as derivadas parciais com relação a s e x_n e y_n são as derivadas parciais com relação a n . Definindo

$$S(s, n) := \frac{P(x, y)y_n - Q(x, y)x_n}{\Delta(s, n)} \quad \text{e} \quad N(s, n) := \frac{Q(x, y)x_s - P(x, y)y_s}{\Delta(s, n)},$$

note que $N(s, 0) \equiv 0$ já que $n = 0$ é uma órbita e $S(s, 0) \neq 0$, $s \in I$. De fato, primeiro vamos analisar o numerador da função N em $n = 0$

$$\begin{aligned}Q(x, y)x_s - P(x, y)y_s &= Q(x(s, 0), y(s, 0))\frac{\partial x}{\partial s}(s, 0) - P(x(s, 0), y(s, 0))\frac{\partial y}{\partial s}(s, 0) \\ &= Q(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) - P(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) \\ &= Q(\varphi(s), \psi(s))P(\varphi(s), \psi(s)) - P(\varphi(s), \psi(s))Q(\varphi(s), \psi(s)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por fim, analisando o numerador de S em $n = 0$, temos

$$\begin{aligned}P(x, y)y_n - Q(x, y)x_n &= P(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) + Q(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) \\ &= P^2(\varphi(s), \psi(s)) + Q^2(\varphi(s), \psi(s)) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Resumindo, realizamos a mudança para as coordenadas curvilíneas $(x, y) \mapsto (s, n)$ em uma vizinhança da órbita regular $n = 0$ com $s \in I = [0, L]$. Ao considerarmos esta mudança, o sistema (2.1) pode ser visto como

$$\dot{s} = S(s, n), \quad \dot{n} = N(s, n).$$

Portanto, e a fim de estudar o comportamento das órbitas em uma vizinhança de $n = 0$, podemos escrever o sistema (2.1) como a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dn}{ds} = \frac{Q(x, y)x_s - P(x, y)y_s}{P(x, y)y_n - Q(x, y)x_n} := F(s, n). \quad (8.9)$$

Como $N(s, 0) \equiv 0$, temos $F(s, 0) = 0$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a seção transversal Σ_1 corresponde a $\Sigma_1 := \{s = 0\}$ e Σ_2 a $\Sigma_2 := \{s = L\}$, para um certo número real $L > 0$.

Denotamos por $\Psi(s, n_0)$ a solução da equação (8.9) com a condição inicial $\Psi(0, n_0) = n_0$. Nessas coordenadas, a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ entre estas duas seções transversais é dada por $\pi(n_0) = \Psi(L, n_0)$.

Nós assumimos a existência de um fator integrante inverso $V(x, y)$ em uma vizinhança da órbita regular considerada $\phi(t)$ do sistema analítico (2.1). A mudança de coordenadas curvilíneas dada, nos dá um fator integrante inverso para a equação (8.9), denotado por $\tilde{V}(s, n)$ e que satisfaz

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} F(s, n) = \frac{\partial F}{\partial n} \tilde{V}(s, n). \quad (8.10)$$

A relação entre $V(x, y)$ e $\tilde{V}(s, n)$ é

$$\tilde{V}(s, n) = \frac{V(x(s, n), y(s, n))}{J(s, n)S(s, n)}, \quad (8.11)$$

onde $J(s, n)$ é a função determinante dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)} &= \begin{vmatrix} \varphi'(s) - n\psi''(s) & -\psi'(s) \\ \psi'(s) + n\varphi''(s) & \varphi'(s) \end{vmatrix} \\ &= (\varphi'(s))^2 - n\psi''(s)\varphi'(s) + (\psi'(s))^2 + n\varphi''(s)\psi'(s) \\ &= (\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 + O(n). \end{aligned}$$

Em $n = 0$, $J(s, 0) = (\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 \neq 0$, $\forall s \in I$, como já explicado acima.

Definição 8.5. Seja $V(x, y)$ um fator integrante inverso analítico do sistema analítico da forma (2.1) e $\phi(t)$ uma órbita regular do sistema parametrizada por $(\varphi(s), \psi(s)) \in U$, com $s \in I \subset \mathbb{R}$. Considere a mudança local de coordenadas curvilíneas $x(s, n) = \varphi(s) - n\psi'(s)$, $y(s, n) = \psi(s) + n\varphi'(s)$ definida em uma vizinhança da órbita regular $n = 0$ e a fórmula de Taylor de V na variável n em torno de $n = 0$:

$$V(x(s, n), y(s, n)) = n^m v(s) + O(n^{m+1}),$$

onde m é um inteiro ≥ 0 e a função $v(s)$ não é identicamente nula. Dizemos que V tem multiplicidade nula m em $\phi(t)$.

Todos os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [22].

Lema 8.6. A função $v(s)$ que aparece na definição acima é diferente de zero para qualquer $s \in I$.

Demonstração: Temos de (8.11) a relação entre V e $\tilde{V}$. Como V é dado por $V(x(s, n), y(s, n)) = n^m v(s) + O(n^{m+1})$, próximo de $n = 0$, segue que $\tilde{V}(s, n)$, próximo de $n = 0$, tem a seguinte forma

$$\tilde{V}(s, n) = \frac{n^m v(s) + O(n^{m+1})}{J(s, 0)S(s, 0)} = \frac{n^m v(s)}{J(s, 0)S(s, 0)} + O(n^{m+1}).$$

Tomando $\tilde{v}(s) = j(s)v(s)$, com $j(s) = \frac{1}{J(s, 0)S(s, 0)} \neq 0, \forall s \in I$, temos

$$\tilde{V}(s, n) = n^m \tilde{v}(s) + O(n^{m+1}).$$

A ideia é mostrar que $\tilde{v}(s) \neq 0, \forall s \in I$, pois como $j(s) \neq 0$, teremos $v(s) \neq 0, \forall s \in I$. Podemos assumir que $0 \in I$ e temos $\tilde{V}$ satisfazendo a equação (8.10). A equação (8.10) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d}{ds} (\tilde{V}(s, \Psi(s, n_0))) = \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, \Psi(\sigma, n_0)) \tilde{V}(s, \Psi(s, n_0)),$$

onde $n_0 = \Psi(0, n_0)$. Resolvendo a equação acima temos

$$\tilde{V}(s, \Psi(s, n_0)) = \tilde{V}(0, \Psi(0, n_0)) \exp \left\{ \int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, \Psi(\sigma, n_0)) d\sigma \right\}.$$

Desenvolvemos essa identidade em torno de $n_0 = 0$, segue que

$$n_0^m \tilde{v}(s) + O(n_0^{m+1}) = n_0^m \tilde{v}(0) \exp \left\{ \int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, 0) d\sigma \right\} + O(n_0^{m+1}).$$

Então,

$$\tilde{v}(s) = \tilde{v}(0) \exp \left\{ \int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, 0) d\sigma \right\}.$$

Note que $\tilde{v}(s) \not\equiv 0$, então podemos assumir que $\tilde{v}(0) \neq 0$. Portanto $\tilde{v}(s) \neq 0, \forall s \in I$. ■

Teorema 8.7. *Considere uma órbita regular $\phi(t)$ do sistema analítico da forma (2.1) que tem um fator integrante inverso $V(x, y)$ de classe C^1 definido em uma vizinhança de ϕ . Considere também a aplicação de Poincaré associada a órbita regular entre duas seções transversais $\pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Realizamos a mudança para coordenadas curvilíneas e consideramos a equação diferencial ordinária (8.9) com o fator integrante inverso $\tilde{V}(s, n)$ que é obtido a partir de $V(x, y)$. Nessas coordenadas, as seções transversais podem ser tomadas de modo que $\Sigma_1 := \{s = 0\}$ e $\Sigma_2 := \{s = L\}$ para um certo valor real $L > 0$. Parametrizando Σ_1 pelo valor real da coordenada n a seguinte identidade*

$$\tilde{V}(L, \pi(n)) = \tilde{V}(0, n) \pi'(n) \quad (8.12)$$

é verdadeira.

Demonstração: Como Ψ é a solução da equação (8.9), então $\Psi(s, n_0)$ satisfaz

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, n_0) = F(s, \psi(s, n_0)) \quad \text{com} \quad \Psi(0, n_0) = n_0.$$

Diferenciando estas duas igualdades com respeito a n_0 :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(s, n_0) \right) = \frac{\partial F}{\partial n}(s, \Psi(s, n_0)) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(s, n_0) \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(0, n_0) = 1.$$

Consequentemente,

$$\int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, \Psi(\sigma, n_0)) d\sigma = \int_0^s \frac{\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(\sigma, n_0) \right)}{\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(\sigma, n_0)} d\sigma = \log \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(\sigma, n_0) \right) \Big|_0^s$$

Como $\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(0, n_0) = 1$, chegamos que

$$\int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, \Psi(\sigma, n_0)) d\sigma = \log \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(s, n_0) \right).$$

Novamente, usando o fato de que $\tilde{V}(s, n)$ satisfaz (8.10) e como na demonstração do lema anterior, segue que

$$\tilde{V}(s, \Psi(s, n_0)) = \tilde{V}(0, \Psi(0, n_0)) \exp \left\{ \int_0^s \frac{\partial F}{\partial n}(\sigma, \Psi(\sigma, n_0)) d\sigma \right\}.$$

Logo,

$$\tilde{V}(s, \Psi(s, n_0)) = \tilde{V}(0, \Psi(0, n_0)) \frac{\partial \Psi}{\partial n_0}(s, n_0).$$

Lembrando que quando $s = L$, a aplicação de Poincaré é definida em n_0 como $\pi(n_0) = \Psi(L, n_0)$. Portanto, chegamos a igualdade (8.12) desejada. ■

Proposição 8.8. *Considere a seguinte fórmula de Taylor da aplicação de Poincaré analítica $\pi(n)$ associada a órbita periódica γ , em torno de $n = 0$:*

$$\pi(n) = \begin{cases} e^{\beta_1 n} + O(n^2) & \text{com } \beta_1 \neq 0, \text{ ou} \\ n + \beta_k n^k + O(n^{k+1}) & \text{com } \beta_k \neq 0, k > 1, \text{ ou} \\ n & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere $m \geq 0$ a multiplicidade nula de um fator integrante inverso V em γ .

(a) Se $m = 0$, então $\beta_k = 0, \forall k \geq 1$.

(b) Se $m \geq 1$, então m é o menor subíndice de modo que $\beta_m \neq 0$ ou $\beta_k = 0, \forall k \geq 1$.

Demonstração: A série de Taylor da função $\tilde{V}(s, n_0)$ em uma vizinhança de $n_0 = 0$ é da forma

$$\tilde{V}(s, n_0) = \sum_{i \geq 0} \tilde{v}_i(s) n_0^i.$$

Como a função V não é localmente nula, temos que existe um inteiro m , com $m \geq 0$ tal que m é o menor índice com $\tilde{v}_m(s) \neq 0, \forall s \in I$ (Lema 8.6). Da definição, este valor m é a multiplicidade nula de V na órbita regular considerada.

Nas coordenadas curvilíneas, V é periódica de período L em s e daí temos que $\tilde{V}$ também é L -periódica. Então podemos escrever

$$\tilde{V}(0, n) = \sum_{i \geq 0} v_i n^i$$

e

$$\tilde{V}(L, \pi(n)) = \sum_{i \geq 0} v_i \pi(n)^i$$

Se $\beta_1 \neq 0$, segue da igualdade (8.12) que $\tilde{V}(L, 0) = e^{\beta_1} \tilde{V}(0, 0)$, implicando assim que $v_0 = 0$, e, portanto, a multiplicidade nula de $V(x, y)$ na órbita regular é pelo menos 1. Desenvolvendo a identidade (8.12) em potências de n , os termos de ordem mais baixa em ambos os membros da igualdade correspondem a n^m . A equação para seus coeficientes é: $v_m e^{m\beta_1} = v_m e^{\beta_1}$. Como $\beta_1 \neq 0$, chegamos que $m = 1$.

Considere $k > 1$ o menor subíndice tal que $\beta_k \neq 0$. Temos que $\pi(n) = n + \beta_k n^k + O(n^{k+1})$. Subtraindo $\tilde{V}(0, n)$ de ambos os membros de (8.12), obtemos a seguinte relação:

$$\sum_{i \geq 1} v_i (\pi(n)^i - n^i) = \left(v_0 + \sum_{i \geq 1} v_i n^i \right) (k\beta_k n^{k-1} + O(n^k)).$$

O lado esquerdo da igualdade acima tem ordem de pelo menos n^k , o que implica $v_0 = 0$, para ter a mesma ordem em ambos os membros. Portanto $m > 0$. Temos que os termos de ordem mais baixa em ambos os lados desta igualdade correspondem a n^{m+k-1} e a equação de seus coeficientes são: $m\beta_k v_m = k\beta_k v_m$, o que implica em $k = m$. ■

Definição 8.9. Seja π a aplicação de Poincaré definida na vizinhança de um ciclo limite γ . Dizemos que um ciclo limite γ é um ciclo limite de multiplicidade 1 se $\pi'(0) \neq 1$, e, γ é dito um ciclo limite de multiplicidade m , $m \geq 2$, se $\pi(n_0) = n_0 + \beta_m n_0^m + O(n_0^{m+1})$, com $\beta_m \neq 0$.

Teorema 8.10. *Seja γ uma órbita periódica do sistema analítico da forma (2.1) e considere V um fator integrante inverso definido em uma vizinhança de γ .*

(a) *Se γ é um ciclo limite de multiplicidade m , então V tem multiplicidade nula m em γ .*

(b) *Se V tem multiplicidade m em γ , então γ é um ciclo limite de multiplicidade m ou pertence a um contínuo de órbitas periódicas.*

Demonstração: A prova é consequência da proposição anterior. De fato:

(a) Se γ tem multiplicidade m então $\pi(n_0) = e^{\beta_1} n_0 + \beta_m n_0^m + O(n_0^{m+1})$, com $m \geq 2$ e $\beta_1 \neq 0$, se $m = 1$, ou $\beta_m \neq 0$. Então pelo item (b) da Proposição 8.8, segue que $m \geq 1$ é a multiplicidade nula de V em γ .

(b) Se V tem multiplicidade nula m em γ , então $m = 0$ ou $m \geq 1$. Se $m = 0$, pelo item (a) da proposição anterior, $\pi(n) = n$ e assim concluímos que γ pertence a um contínuo de órbitas periódicas. Se $m = 1$, segue da prova da Proposição 8.8 que $\pi(n) = e^{\beta_1} n + O(n^2)$ com $\beta_1 \neq 0$. Agora se $m > 1$, novamente da prova da Proposição 8.8, $\pi(n) = \beta_m n^m + O(n^{m+1})$ com $\beta_m \neq 0$. Ou seja, γ tem multiplicidade m . ■

8.3 Bifurcação de Hopf Generalizada

Nesta seção estudamos a ciclicidade de um ponto singular monodrômico através do fator integrante inverso.

Considere o sistema diferencial planar (2.1) e suponha que este sistema é analítico na vizinhança de um ponto singular monodrômico isolado p_0 o qual assumimos ser a origem.

Ao sistema (2.1) associamos o campo de vetores $X_0 = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$. Vamos considerar uma perturbação do sistema (2.1) da forma:

$$\dot{x} = P(x, y) + \bar{P}(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = Q(x, y) + \bar{Q}(x, y, \varepsilon) \quad (8.13)$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ é o parâmetro de perturbação, $0 < \|\varepsilon\| \ll 1$, e as funções $\bar{P}(x, y, \varepsilon)$ e $\bar{Q}(x, y, \varepsilon)$ são analíticas para $(x, y) \in U$ e em uma vizinhança de $\varepsilon = 0$, com $\bar{P}(x, y, 0) = \bar{Q}(x, y, 0) \equiv 0$. Ao sistema perturbado (8.13) associamos o campo de vetores $X_\varepsilon = (P(x, y) + \bar{P}(x, y, \varepsilon))\partial_x + (Q(x, y) + \bar{Q}(x, y, \varepsilon))\partial_y$.

Definição 8.11. Dizemos que um ciclo limite γ_ε do sistema (8.13) bifurca da origem se ele tende para a origem (na distância de Hausdorff) quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Estamos interessados em dar uma cota superior realizável para o número de ciclos limites que podem bifurcar da origem do campo de vetores X_0 sob qualquer perturbação analítica com um número finito p de parâmetros. A palavra realizável significa que existe um sistema da forma (8.13) com exatamente este número de ciclos limites bifurcados da origem.

Definição 8.12. Esta cota superior realizável é chamada de ciclicidade da origem $0 \in \mathbb{R}^2$ do campo de vetores X_0 e denotamos por $\text{Cycl}(X_\varepsilon, 0)$.

Podemos classificar o ponto monodrômico na origem em três classes: não degenerado ($DX_0(0)$ tem um par de autovalores puramente imaginários), degenerado ($DX_0(0)$ é a matriz identicamente nula) e nilpotente ($DX_0(0)$ é uma matriz nilpotente). Nesses três casos, considere a mudança de coordenadas polares na vizinhança $C = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 : |r| < \delta\}$, para um certo valor suficientemente pequeno de $\delta > 0$. Esta mudança de coordenadas polares é um difeomorfismo em $U \setminus \{(0, 0)\}$ e transforma a origem das coordenadas no círculo de equação $r = 0$. Então o sistema associado ao campo de vetores X_0 é equivalente a uma equação diferencial sobre o cilindro C da forma:

$$\frac{dr}{d\theta} = G(r, \theta). \quad (8.14)$$

Considere um fator integrante inverso $V(r, \theta)$ da equação (8.14), isto é, uma função $V : C \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(C)$, não localmente nula, que satisfaz a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta)G(r, \theta) = \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta)V(r, \theta),$$

onde V está definida no cilindro C e é periódica de período T em θ , onde T é o menor período positivo da variável θ . Isto é, nós consideramos o círculo $S^1 = \mathbb{R}/[0, T]$. Vamos supor que a função V é de classe $\mathcal{C}^\infty$, em uma vizinhança de $r = 0$, e a sua expansão de Taylor em torno de $r = 0$ é dada por:

$$V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1}),$$

onde $v_m(\theta)$ não é identicamente nulo para $\theta \in S^1$ e m é um número inteiro com $m \geq 0$. Definimos m como sendo a *multiplicidade nula* de $V(r, \theta)$ em $r = 0$.

Considere o sistema

$$\dot{x} = p_d(x, y) + P_{d+1}(x, y), \quad \dot{y} = q_d(x, y) + Q_{d+1}(x, y), \quad (8.15)$$

onde $d \geq 1$ é um número ímpar, $p_d(x, y)$ e $q_d(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau d e $P_{d+1}(x, y), Q_{d+1}(x, y) \in O(\|(x, y)\|^{d+1})$. Assumimos que $p_d^2(x, y) + q_d^2(x, y) \not\equiv 0$.

Definição 8.13. Uma direção característica para a origem do sistema (8.15) é um polinômio de grau 1 em $\mathbb{R}[x, y]$ que divide o polinômio homogêneo $xq_d(x, y) - yp_d(x, y)$.

Se não há direções características, então a origem é um ponto singular monodrômico do sistema (8.15), ou seja, é um centro ou um foco (veja o artigo [23] para maiores detalhes).

Definição 8.14. Em relação ao sistema (8.15), uma perturbação por um campo de vetores analítico, denotado por $(\bar{P}(x, y, \varepsilon), \bar{Q}(x, y, \varepsilon))$, é dito ter sub grau s se $\bar{P}(x, y, \varepsilon), \bar{Q}(x, y, \varepsilon) \in O(\|(x, y)\|^s)$. Neste caso denotamos por

$$X_\varepsilon^{[s]} = \left(P(x, y) + \bar{P}(x, y, \varepsilon) \right) \partial_x + \left(Q(x, y) + \bar{Q}(x, y, \varepsilon) \right) \partial_y,$$

o campo vetorial associado a tal perturbação.

A seguir, enunciamos o principal resultado desta seção, que pode ser encontrado em [24].

Teorema 8.15. *Assuma que a origem do sistema (8.15) é um ponto singular monodrômico sem direções características. Considere as coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e seja $V(r, \theta)$ um fator integrante inverso correspondente da equação (8.14) o qual tem uma expansão de Laurent em uma vizinhança de $r = 0$ da forma $V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1})$, com $v_m(\theta) \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$.*

- (a) *Se $m \leq 0$ ou m é par, então a origem do sistema (8.15) é um centro.*
- (b) *Se a origem do sistema (8.15) é um foco, então $m \geq 1$, m é um número ímpar e a ciclicidade $\text{Cycl}(X_\varepsilon, 0)$ da origem do sistema (8.15) satisfaz $\text{Cycl}(X_\varepsilon, 0) \geq (m + d)/2 - 1$. Neste caso m é a multiplicidade nula de $V(r, \theta)$ em $r = 0$.*
 - (b1) *Se, além disso, o foco é não degenerado ($d = 1$), então $\text{Cycl}(X_\varepsilon, 0) = (m - 1)/2$.*
 - (b2) *Se for considerados apenas perturbações cujo sub grau são maior ou igual a d , então o número máximo de ciclos limite que bifurcam de a origem é $(m - 1)/2$, isto é, $\text{Cycl}(X_\varepsilon^{[d]}, 0) = (m - 1)/2$.*

A Prova do Teorema 8.15 segue de alguns resultados enunciados e provados abaixo (ver [24]). O seguinte lema estabelece a primeira etapa da prova.

Lema 8.16. *Considere o sistema (8.15) com $d \geq 1$ um inteiro ímpar e assumo que não existe direção característica. Então através de uma mudança de coordenadas polares o sistema (8.15) é equivalente a uma equação diferencial ordinária definida sobre o cilindro $C = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 : |r| < \delta\}$.*

Demonstração: Fazendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, temos

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = p_d(r \cos \theta, r \sin \theta) + P_{d+1}(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = q_d(r \cos \theta, r \sin \theta) + Q_{d+1}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \cos \theta \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} \theta \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{dy}{dt} - \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{dt} \right),\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= (p_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + P_{d+1}(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta))r \cos \theta \\ &\quad + (q_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + Q_{d+1}(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta))r \operatorname{sen} \theta \\ &= r^d (p_d(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \cos \theta + q_d(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + O(r)), \\ \frac{d\theta}{dt} &= [\cos \theta (q_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + Q_{d+1}(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)) \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta (p_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + P_{d+1}(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta))] / r \\ &= r^{d-1} (q_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \cos \theta - p_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + O(r)).\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}R(r, \theta) &= R_d(\theta) + O(r) = p_d(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \cos \theta + q_d(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + O(r), \\ F(r, \theta) &= F_d(\theta) + O(r) = q_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \cos \theta - p_d(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + O(r),\end{aligned}$$

em coordenadas polares, o sistema (8.15) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^d R(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= r^{d-1} F(r, \theta).\end{aligned}\tag{8.16}$$

A hipótese de que não existe direção característica é equivalente em dizer que $F_d(\theta) \neq 0$, $\theta \in [0, T)$. De fato, se existisse um θ^* tal que $F(\theta^*) = 0$, então a reta $\{(r \cos \theta^*, r \operatorname{sen} \theta^*) : r \in \mathbb{R}\}$ seria uma solução da equação $xq_d(x, y) - yp_d(x, y) = 0$. Portanto o sistema (8.15) é equivalente a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rR(r, \theta)}{F(r, \theta)},\tag{8.17}$$

definida no cilindro C . ■

O próximo Lema garante que o Problema do Centro-Foco para a origem do sistema (8.15) é equivalente a determinar quando o círculo $r = 0$ está contido em um anel de órbitas periódicas da equação diferencial (8.17).

Lema 8.17. *Considere o sistema (8.15) com $d \geq 1$ um inteiro ímpar e assumamos que não existe direção característica. O círculo $r = 0$ é um ciclo limite da equação (8.17) se, e somente se, a origem do sistema (8.15) é um foco.*

Demonstração: A origem do sistema (8.15) é transformada na órbita periódica $r = 0$ da equação (8.17) pela mudança de coordenadas polares. Esta transformação é uma correspondência bijetora entre qualquer ponto de uma vizinhança da origem, menos a origem, e o cilindro $C = \{(r, \theta) : 0 < r < \delta, \theta \in S^1\}$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Portanto qualquer órbita espiralando em direção a origem do sistema (8.15), para $t \rightarrow \pm\infty$, é transformada em uma órbita espiralando em direção ao círculo $r = 0$ da equação (8.17), para $t \rightarrow \pm\infty$. ■

Lema 8.18. *Seja $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo de vetores de classe C^1 . Fazendo a mudança de coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ no sistema diferencial associado a X , o sistema resultante*

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \Xi(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta),\end{aligned}$$

é invariante sob a mudança de variáveis $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$.

Demonstração: Observe que os monômios $r \cos \theta$ e $r \sin \theta$ são invariantes pela mudança de variáveis $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$. Como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{r \cos \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r}, \\ \dot{\theta} &= \frac{r \cos \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r^2},\end{aligned}$$

segue o resultado. ■

Lema 8.19. *Assuma que a origem do sistema (8.15) é um foco sem direção característica e considere a equação correspondente (8.17), cuja a aplicação de Poincaré é dada por $\Pi(r_0) = r_0 + c_m r_0^m + O(r_0^{m+1})$, onde $c_m \neq 0$. Então m é ímpar.*

Demonstração: Pelo Lema 8.17, temos que a origem do sistema (8.15) é um foco se, e somente se, o círculo $r = 0$ é um ciclo limite de (8.17). Assuma que o círculo $r = 0$ é um ciclo limite com multiplicidade m e considere a aplicação de Poincaré $\Pi(r_0)$. O Lema 8.18 garante que a equação (8.17) tem a simetria discreta $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$, pois ela é obtida a partir do sistema em coordenadas cartesianas (8.15). Esta simetria implica que $r = 0$ é um ciclo limite estável ou instável, pois a derivada $\frac{dr}{d\theta}$ tem sinais opostos nos pontos (r, θ) e $(-r, \theta + \pi)$. Portanto, m tem que ser ímpar. ■

Lema 8.20. *Seja $V(r, \theta)$ é um fator integrante inverso de classe C^∞ da equação diferencial (8.14) com multiplicidade nula m em $r = 0$, isto é, $V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1})$ em uma vizinhança de $r = 0$ com $v_m(\theta) \not\equiv 0$, então $v_m(\theta)$ satisfaz $v_m(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, T)$.*

Demonstração: Por hipótese $G(0, \theta) \equiv 0$ e definimos a função $G_1(\theta)$ que satisfaz

$$G(r, \theta) = G_1(\theta)r + O(r^2).$$

Note que $G_1(\theta)$ pode ser identicamente nulo. Temos que $V(r, \theta)$ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta)G(r, \theta) = \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta)V(r, \theta).$$

Substituindo $V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1})$ e $G(r, \theta) = G_1(\theta)r + O(r^2)$ na equação acima e igualando os coeficientes de ordem r^m na identidade anterior, obtemos a equação diferencial $v'_m(\theta) = (1 - m)G_1(\theta)v_m(\theta)$. Como $v_m(\theta)$ não é identicamente nulo, considere $\theta_0 \in [0, T)$ tal que $v_m(\theta_0) \neq 0$. Daí,

$$v_m(\theta) = v_m(\theta_0) \exp \left\{ (1-m) \int_{\theta_0}^{\theta} G_1(\sigma) d\sigma \right\}.$$

Portanto, concluímos que $v_m(\theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, T]$ ■

Corolário 8.21. *Seja $V(r, \theta)$ é um fator integrante inverso de classe C^∞ da equação diferencial (8.14) com multiplicidade nula m sobre o ciclo limite $r = 0$. Então, $r = 0$ é um ciclo limite de multiplicidade m .*

Demonstração: Uma vez que $V(r, \theta)$ é assumido como uma função no cilindro C , $V(r, \theta)$ é periódica em θ com período T . Assim, $V(r_0, T) = V(r_0, 0)$, e portanto $v_m(T) = v_m(0)$. Pela fórmula de Taylor de V em uma vizinhança de $r_0 = 0$, temos que $V(r_0, 0) = v_m r_0^m + O(r_0^{m+1})$, onde $v_m \neq 0$. Observe que o índice m aparecendo nesta expressão coincide com a multiplicidade nula de $V(r, \theta)$ em $r = 0$ pelo Lema 8.20. Seja $\Pi(r_0) = r_0 + c_k r_0^k + O(r_0^{k+1})$ a aplicação de Poincaré definida em $r = 0$, onde $c_k \neq 0$. Aplicando o mesmo raciocínio da prova do Teorema 8.7, temos que Π satisfaz a equação diferencial $V(\Pi(r_0), T) = V(r_0, 0)\Pi'(r_0)$, ou seja,

$$v_m(T)\Pi(r_0)^m + O(\Pi(r_0)^{m+1}) = (v_m(0)r_0^m + O(r_0^{m+1}))(1 + kc_k r_0^{k-1} + O(r_0^k)).$$

Subtraindo $v_m(0)r_0^m + O(r_0^{m+1})$ de ambos os lados da igualdade acima, obtemos que

$$v_m(\Pi(r_0)^m - r_0^m) + O(r_0^{m+1}) = (v_m r_0^m + O(r_0^{m+1}))(kc_k r_0^{k-1} + O(r_0^k)).$$

Os termos de ordem mais baixa em ambos os lados da identidade anterior correspondem a r_0^{m+k-1} e a equação de seus coeficientes é dada por $mc_k v_m = kc_k v_m$, a qual implica que $k = m$. ■

Lema 8.22. *Considere a equação diferencial (8.14) sob o cilindro C e assuma que $r = 0$ é uma órbita periódica desta equação. Suponha que $V(r, \theta)$ é um fator integrante inverso para a equação (8.14) definido em $C \setminus \{r = 0\}$ e que a sua expansão em série de Laurent é dada por:*

$$V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1}),$$

com $v_m(\theta) \not\equiv 0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se $m \leq 0$, a órbita periódica $r = 0$ tem uma vizinhança tal que as órbitas por pontos desta vizinhança são periódicas, isto é, $r = 0$ não é um ciclo limite.

Demonstração: Seja $\dot{r} = G(r, \theta)$, $\dot{\theta} = 1$ o sistema diferencial associado a equação diferencial (8.14). E considere o campo de vetores $X_{r\theta}(r, \theta) = (G(r, \theta), 1)$ de classe C^∞ definido na faixa $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\delta < r < \delta, \theta \in [0, T]\}$ associado a este sistema. Por hipótese, $V(r, \theta)$ é um fator integrante inverso da equação (8.14), isto é, $V(r, \theta)$ é um fator integrante inverso do campo de vetores $X_{r\theta}$. Observe que a prova do Lema 8.20 também aplica-se e, portanto, temos que $v_m(\theta) \neq 0$ para qualquer $\theta \in [0, T]$. No caso que $m \leq 0$, temos que $1/V$ é um fator integrante do campo de vetores $X_{r\theta}$ definido no aberto simplesmente conexo $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\delta < r < \delta, \theta \in (0, T)\}$. Assim, $X_{r\theta}$ tem uma integral primeira $H(r, \theta)$ de classe C^2 definida em uma vizinhança de $r = 0$. A existência da integral primeira implica que o ciclo $r = 0$ é cercado de órbitas periódicas, formadas pelas curvas de nível de H . ■

Lema 8.23. *Considere o sistema (8.15) com $d \geq 1$ um inteiro ímpar e assuma que não existe direção característica.*

(a) *Se o sistema (8.15) tem um fator integrante inverso $V_0(x, y)$ definido em uma vizinhança da origem, então a função definida por*

$$V(r, \theta) = \frac{V_0(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r^d F(r, \theta)}$$

é um fator integrante inverso da equação (8.17) em $r \neq 0$.

(b) *Seja $V(r, \theta)$ um fator integrante inverso da equação (8.17) que tem uma expansão de Laurent em uma vizinhança de $r = 0$ da forma*

$$V(r, \theta) = v_m(\theta)r^m + O(r^{m+1}),$$

com $v_m(\theta) \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Então, se $m \leq 0$ a origem do sistema (8.15) é um centro.

Demonstração: (a) Como o Jacobiano da mudança de coordenadas polares é r , temos que a função

$$\frac{V_0(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r}$$

é um fator integrante inverso do sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r^d R(r, \theta), \\ \dot{\theta} = r^{d-1} F(r, \theta). \end{cases}$$

Sabemos que a equação (8.17) é a equação das órbitas associadas ao sistema acima e, portanto, a função $V(r, \theta)$ dada como no enunciado, é um fator integrante inverso de (8.17). Lembre-se que $V(r, \theta)$ não precisa ser bem definida em uma vizinhança de $r = 0$. Assim, temos apenas, que ele é um fator integrante inverso para (8.17) em $r \neq 0$.

(b) Se $m \leq 0$, as hipóteses do Lema 8.22 estão satisfeitas e assim concluímos que o ciclo $r = 0$ é cercado por órbitas periódicas. Isto implica que existe uma vizinhança da origem do sistema (8.15) constituída de órbitas periódicas do sistema, ou seja, a origem do sistema (8.15) é um centro. ■

O Lema anterior, juntamente com os Lemas 8.16 e 8.17, estabelecem que, sob as hipóteses do Teorema 8.15, se a origem é um foco do sistema (8.15), então $m \geq 1$. Além disso, pelo Lema 8.19 e o Corolário 8.21, temos que m precisa ser ímpar. Portanto isto prova a afirmação (a) do Teorema 8.15.

Assumindo que a origem do sistema (8.15) é um foco, a etapa seguinte da prova é relacionar a multiplicidade do ciclo limite $r = 0$ da equação (8.17) e a ciclicidade da origem de sistema (8.15).

O próximo lema conclui a demonstração do Teorema 8.15. Mas antes, enunciamos o Teorema de Preparação de Malgrange (veja a prova na página 95 de [25]), o qual será mencionado em sua prova.

Teorema 8.24. (Teorema de Preparação de Malgrange) *Sejam $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto com $(0, 0) \in U$, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que*

$$f(x, 0) = x^k g(x),$$

para algum inteiro $k > 0$, onde g é uma função de classe C^∞ , definida em uma vizinhança do $0 \in \mathbb{R}$ com $g(0) \neq 0$. Então existem funções de classe C^∞ q , definida em uma vizinhança de $(0, 0) \in U$ com $q(0, 0) \neq 0$, e $a_1, \dots, a_m$, definidas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$f(x, \epsilon)q(x, \epsilon) = x^k + a_1(\epsilon)x^{k-1} + \dots + a_k(\epsilon).$$

Lema 8.25. *Considere o sistema (8.15) com $d \geq 1$ um inteiro ímpar, assuma que não existe direção característica e que a origem p_0 é um foco com ciclicidade $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0)$. Considere a equação correspondente (8.17) e seja $r = 0$ um ciclo limite de multiplicidade $m = 2k + 1$. Então, $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) \geq (m + d)/2 - 1$. mais ainda:*

(a) *Quando $d = 1$, temos que $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) = k$.*

(b) *Se considerarmos somente as perturbações do sistema (8.15) cujo sub grau é $\geq d$, então no máximo k ciclos limite podem bifurcar da origem do sistema (8.15), isto é, $\text{Cycl}(X_\varepsilon^{[d]}, p_0) = k$*

Demonstração: O item (a) deste lema é um resultado bem conhecido sobre bifurcações de ciclos limites a partir de focos múltiplos, veja o Theorem 40, Chap. IX, do livro [21].

Primeiramente, exibiremos um exemplo de perturbação de uma equação diferencial da forma (8.17) com m ciclos limites bifurcando de $r = 0$ e tal que o sistema em coordenadas cartesianas correspondente é uma perturbação da forma (8.13), de um sistema da forma (8.15), com exatamente $(m - 1)/2 = k$ ciclos limites bifurcando da origem. Este exemplo mostra que $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) \geq k$.

Tome a equação (8.17) e assuma que $r = 0$ é um ciclo limite de multiplicidade m , onde $m \geq 1$ é um inteiro ímpar. Considere o sistema (8.16) associado a equação (8.17), $k = (m - 1)/2$ e uma perturbação do sistema (8.16) dada por

$$\dot{r} = r^d R(r, \theta) + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^{k-i} a_i r^{2i+d}, \quad \dot{\theta} = r^{d-1} F(r, \theta). \quad (8.18)$$

Com a convenção de que se $k = 0$ nenhum termo de perturbação é considerado. A constante ε é o parâmetro de perturbação, $0 < |\varepsilon| \ll 1$ e os a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, são constantes reais escolhidos de maneira que a aplicação de deslocamento $d(r_0, \varepsilon)$, associada a aplicação de Poincaré $\Pi(r_0, \varepsilon)$ da equação diferencial ordinária

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^d R(r, \theta) + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^{k-i} a_i r^{2i+d}}{r^{d-1} F(r, \theta)} = \frac{r R(r, \theta) + r \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^{k-i} a_i r^{2i}}{F(r, \theta)},$$

tem $2k + 1$ zeros, sendo k deles positivos. Observe que $F(0, \theta) \neq 0$, para todo $\theta \in [0, T)$, e portanto, os termos perturbativos são uma perturbação analítica em uma vizinhança de $r = 0$ e $\varepsilon = 0$ da equação (8.17). A escolha dos a_i pode ser feita de maneira análoga ao descrito em [21] nas páginas 254–259. Mais precisamente, o expoente do monômio do primeiro coeficiente não nulo da expansão em serie de potências de r_0 da função de deslocamento $d(r_0, 0)$ da equação (8.17) é m . E a perturbação considerada (8.18) implica que $d(r_0, \varepsilon)$ tem todos os monômios de potências ímpares de r_0 até a ordem m . O coeficiente de cada monômio, para ε suficientemente pequeno, é dominado por uma das constantes a_i . Desta forma podemos escolher os a_i , tal que haja trocas de sinais que produza os $2k + 1$ zeros, sendo k deles positivos.

Desfazendo a mudança de coordenadas polares, o sistema (8.18) da origem a um sistema analítico em uma vizinhança da origem que é uma perturbação do sistema (8.15) da forma (8.13) e com $k = (m - 1)/2$ ciclos limite bifurcando da origem. Se denotarmos o sistema (8.15) como $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, então em coordenadas cartesianas o sistema (8.18) é dada por

$$\dot{x} = P(x, y) + xK(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = Q(x, y) + yK(x, y, \varepsilon), \quad (8.19)$$

onde $K(x, y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^{k-i} a_i (x^2 + y^2)^{i+\frac{d-1}{2}}$. Observe que d é ímpar e $d \geq 1$. Desta forma, temos que $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) \geq k$.

Fornecemos agora um exemplo de uma perturbação analítica do sistema (8.15) com pelo menos $(m + d)/2 - 1$ ciclos limites bifurcando da origem. Para isto, consideramos o sistema (8.19) e o perturbamos a fim de produzir $l = (d - 1)/2$ ciclos limites adicionais bifurcando da origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Vamos considerar o menor ciclo limite γ circundando a origem do sistema (8.19) e vamos supor que seja um atrator. Temos que os $(m - 1)/2$ ciclos limite do sistema (8.19) que bifurcam da origem são hiperbólicos, escolhendo os parâmetros ai convenientemente. Como γ é o menor ciclo limite, a origem é repulsor. Vamos considerar um valor real conveniente b_{l-1} de modo que o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) + xK(x, y, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}xb_{l-1}(x^2 + y^2)^{l-1}, \\ \dot{y} &= Q(x, y) + yK(x, y, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}yb_{l-1}(x^2 + y^2)^{l-1},\end{aligned}$$

ainda tem o ciclo limite anterior γ como um atrator ($|b_{l-1}|$ precisa ser pequeno o suficiente) e a origem também se torna um atrator (isso implica que $b_{l-1} < 0$). Portanto, há um ciclo limite bifurcando-se da origem, circundando-o e menor que γ . Se γ fosse um repulsor e a origem um atrator no sistema (8.19), tomamos $b_{l-1} > 0$ para bifurcar o novo ciclo limite. Este ciclo limite bifurcado é hiperbólico, escolhendo convenientemente o valor b_{l-1} . O sistema anterior mantém os $(m - 1)/2$ ciclos limite de (8.19) porque eles são todos hiperbólico. Assim, o sistema anterior tem pelo menos $(m - 1)/2 + 1$ ciclos limite bifurcando da origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por indução, e renomeando os parâmetros $a_i := b_{i+(d-1)/2}$, obtemos que o seguinte sistema

$$\dot{x} = P(x, y) + x\bar{K}(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = Q(x, y) + y\bar{K}(x, y, \varepsilon), \quad (8.20)$$

onde $\bar{K}(x, y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{mL-i} b_i(x^2 + y^2)^i$ e $L := (m + d)/2$, tem no máximo $(m + d)/2 - 1$ ciclos limites bifurcando a origem. Observe que ambos m e d são ímpares e $d \geq 1$, $m \geq 1$. Dessa forma, temos que $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) \geq (m + d)/2 - 1$.

Finalmente, vamos provar a afirmação (b) do lema. Se considerarmos apenas as perturbações do sistema (8.15) cujo sub grau é $\geq d$, ou seja, campos vetoriais do tipo $X_\varepsilon^{[d]}$, então, a transformação desses termos perturbativos em coordenadas polares dá origem a uma perturbação da equação correspondente (8.17) que é analítica em uma vizinhança de $r = 0$ e $\varepsilon = 0$. Vamos supor que o círculo $r = 0$ é um ciclo limite com multiplicidade m e consideramos a aplicação de Poincaré Π dada por

$$\Pi(r_0) = r_0 + c_m r_0^m + O(r_0^{m+1}),$$

com $c_m \neq 0$. Note que a equação (8.17) tem simetria discreta $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$ porque vem de um sistema em coordenadas cartesianas (8.15). Esta simetria implica que $r = 0$ é um ciclo limite que não pode ser semi-estável e, portanto, m é ímpar. O ponto chave da prova é que qualquer perturbação de (8.17) analítica em uma vizinhança de $(r, \varepsilon) = (0, 0)$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$, tem uma função de deslocamento $d(r_0, \varepsilon) = \Pi(r_0, \varepsilon) - r_0$ que é analítica em $(r_0, \varepsilon) = (0, 0)$ e quando $\varepsilon = 0$ coincide com a função de deslocamento $d(r_0, 0) = \Pi(r_0) - r_0$ da equação não perturbada (8.17). Usando um argumento padrão (contando zeros, com o Teorema de Preparação de Malgrange, de $d(r_0; \varepsilon)$ em uma vizinhança de $(r_0, \varepsilon) = (0, 0)$), a ciclicidade do círculo $r = 0$ sob perturbações analíticas da equação (8.17) é m . Lembramos que a ciclicidade e a multiplicidade de um ciclo limite são as mesmas, consulte [21]. No entanto, uma vez que o primeiro termo da fórmula de Taylor em $r_0 = 0$ da função de deslocamento $d(r_0; 0) = \Pi(r_0) - r_0$ da equação não perturbada (8.17) é de ordem ímpar m e levando em consideração a simetria discreta acima mencionada, temos que apenas $(m - 1)/2$ zeros de $d(r_0, \varepsilon)$ podem aparecer para $r_0 > 0$ e ε suficientemente pequeno.

Este fato dá que no máximo $(m - 1)/2$ ciclos limite bifurcam da origem do sistema (8.15), quando apenas este tipo de perturbação são consideradas. Portanto, provamos que $\text{Cycl}(X_\varepsilon^{[d]}, p_0) = (m - 1)/2$. De fato, o exemplo dado em (8.19) mostra que esse limite superior é atingido. ■

Observação 8.26. A prova do Teorema 8.15, mostra que se existe um fator integrante inverso $V_0(x, y)$ do sistema (8.15), tal que $V_0(r \cos \theta, r \sin \theta)/r^d$ tem uma expansão de Laurent em uma vizinhança de $r = 0$, então os expoentes dos monômios do primeiro coeficiente não nulo da expansão de cada uma das funções $V_0(r \cos \theta, r \sin \theta)/r^d$ e $V(r, \theta)$ coincidem. Portanto, a multiplicidade nula m pode ser calculada sem passar o sistema para coordenadas polares.

Como uma aplicação do Teorema 8.15, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 8.27. Sejam k e s números inteiros tal que $s \geq 2k \geq 0$ e considere o sistema diferencial

$$\dot{x} = -y(x^2 + y^2)^k + xR_s(x, y), \quad \dot{y} = x(x^2 + y^2)^k + yR_s(x, y), \quad (8.21)$$

onde $R_s(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau s . A origem deste sistema é um ponto singular monodrômico pois não existe direções características. Fazendo a mudança de coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, e observando que $R_s(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^s R_s(\cos \theta, \sin \theta)$, o sistema (8.21) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{r} = r^{s+1} R_s(\cos \theta, \sin \theta), \quad \dot{\theta} = r^{2k}.$$

Associado ao sistema acima temos a equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = r^{s-2k+1} R_s(\cos \theta, \sin \theta). \quad (8.22)$$

A equação acima tem variáveis separáveis. Daí, resolvendo a equação, temos que sua solução com condição inicial $r(0) = r_0$ satisfaz

$$(r(\theta))^{s-2k} = \frac{r_0^{s-2k}}{(2k - s)r_0^{s-2k} \int_0^\theta R_s(\cos \theta, \sin \theta) d\theta + 1},$$

se $s \neq 2k$ e

$$r(\theta) = r_0 e^{\int_0^\theta R_s(\cos \theta, \sin \theta) d\theta},$$

se $s = 2k$. Se $r(2\pi) = r_0$, a origem é um centro. Portanto origem do sistema (8.21) é um foco se, e somente se, a seguinte integral é diferente de zero:

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} R_s(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \neq 0.$$

Note que, se s é ímpar, então a integral acima é sempre 0 e, portanto, a origem é um centro. Temos que $V_0(x, y) = (x^2 + y^2)^{s/2+1}$ é um fator integrante inverso do sistema (8.21) e $V(r, \theta) = r^{s+1-2k}$ é um fator integrante inverso da equação diferencial ordinária (8.22). Portanto, como $m = s + 1 - 2k$, $d = s + 1$ e $s \geq 2k$. Aplicando o Teorema 8.15, concluímos que a ciclicidade $\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0)$ da origem do sistema (8.21), com $\mathcal{L} \neq 0$, é

$$\text{Cycl}(X_\varepsilon, p_0) \geq \frac{m + d}{2} - 1 = \frac{(s + 1 - 2k) + (s + 1)}{2} - 1 = 2 \frac{(s + 1 - k)}{2} - 1 = s - k \geq k.$$

8.4 O Problema do Centro Revisado

Os pontos singulares *monodrômicos simples* são aqueles para os quais, após uma mudança de coordenadas polares ou polares generalizadas $(x, y) \mapsto (r, \theta)$, a equação diferencial (8.14) correspondente é analítica no cilindro $C = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 : |r| < \delta\}$. Em outras palavras, a aplicação de retorno de Poincaré associado é analítica. Lembramos que as *coordenadas polares generalizadas*, introduzidas por Lyapunov [26, 27], são as únicas soluções $x(\theta) = C\sin\theta$ e $y(\theta) = S\cos\theta$ do seguinte problema de Cauchy

$$\frac{dx}{d\theta} = -y^{2p-1}, \quad \frac{dy}{d\theta} = x^{2q-1}, \quad x(0) = \sqrt[2q]{\frac{1}{p}}, \quad y(0) = 0.$$

Nesta seção iremos supor que a origem é um ponto singular monodrômico simples do campo de vetores $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, onde P e Q são funções analíticas. Nas coordenadas polares (r, θ) , a equação diferencial associada a X , sobre o cilindro C , é da forma (8.14). Portanto, $G(r, \theta)$ é uma função analítica em C . Assumiremos que o círculo $r = 0$ é uma solução periódica particular da equação (8.14) e, portanto, $G(0, \theta) \equiv 0$ para todo $\theta \in S^1$. Denotemos a série de Taylor de G por

$$G(r, \theta) = \sum_{i \geq 1} G_i r^i,$$

onde G_i são funções T -periódicas. Assumiremos também a existência de um fator integrante inverso $V(r, \theta)$ definido em uma vizinhança de $r = 0$ e tal que sua série de Laurent é dada por

$$V(r, \theta) = \sum_{i \geq m} v_i(\theta) r^i, \quad (8.23)$$

com $v_m(\theta) \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Considere $\Psi(\theta; r_0) = \sum_{i \geq 1} \Psi_i(\theta) r_0^i$ o fluxo associado a equação (8.14), tal que $\Psi(0; r_0) = r_0$. Observe que a aplicação de Poincaré $\Pi : \Sigma \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $\Pi(r_0) = \Psi(T; r_0) = \sum_{i \geq 1} c_i r_0^i$, onde as constantes $c_i := \Psi_i(T)$ são chamadas de constantes de Poincaré-Liapounov.

O Teorema abaixo pode ser encontrado em [28].

Teorema 8.28. *Assuma que a origem é um ponto singular monodrômico simples de um campo de vetores analítico X . Seja $V(r, \theta)$ um fator integrante inverso da equação (8.14) correspondente, cuja a expansão de Laurent em uma vizinhança de $r = 0$ é da forma (8.23). Considere a função $\mathcal{F}(r) = \int_0^T \frac{G(r, \theta)}{V(r, \theta)} d\theta$.*

- (a) *Se $m \leq 0$ então a origem é um centro.*
- (b) *Seja $m \geq 1$. Se as primeiras m constantes de Poincaré-Liapounov satisfazem $c_1 = 1$ e $c_i = 0$, para $i = 2, \dots, m$, então a origem é um centro.*
- (c) *Se a origem é um centro, então $\mathcal{F}(r) = 0$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: O item (a) segue do Teorema 8.15.

Para provar o item (b) assuma por contradição que a origem é um foco de X . E considere a aplicação de Poincaré associada $\Pi(r_0) = r_0 + c_k r_0^k + O(r_0^{k+1})$, onde $k \geq 2$ com $c_k \neq 0$. O Corolário 8.21 garante que a existência de $V(r, \theta)$ implica que o ciclo limite $r = 0$ de (8.14) tem multiplicidade m . Portanto, $m = k$. Mas isto é uma contradição com a hipótese $c_m = 0$. Logo, a origem de X deve ser um centro.

Para provar o item (c), seja $\omega = dr - G(r, \theta)d\theta$ a 1-forma diferencial associada a equação (8.14). Agora o fator integrante inverso $V(r, \theta)$ pode se anular em $r = 0$ e até mesmo pode não estar bem definido por causa de um polo em $r = 0$. De qualquer maneira, a forma fechada ω/V está bem definida no aberto simplesmente conexo $C^+ = \{(r, \theta) : 0 < r < \delta, \theta \in (-T, 2T)\}$, para δ suficientemente pequeno, pois $V(r, \theta) \neq 0$ em C^+ . Assim, existe uma integral primeira $H^+(r, \theta)$ de classe $\mathcal{C}^2$ definida em C^+ , da equação (8.14).

Seja $r_0 > 0$ suficientemente pequeno e $\Psi(\theta, r_0)$ a solução da equação (8.14) com a condição inicial $\Psi(0, r_0) = r_0$. Como a origem é um centro do campo de vetores X a órbita associada $(\Psi(\theta, r_0), \theta)$ não corta o círculo $r = 0$ e $M = \min_{0 \leq \theta \leq T} \{\Psi(\theta, r_0)\} > 0$. Seja r^* tal que $0 < r^* < M \leq r_0$ e considere em C^+ a curva de Jordan suave por partes $\gamma_{r^*} = \cup_{i=1}^4 l_i$ onde $l_1 = \{(r^*, \theta) \in C^+ : 0 \leq \theta \leq T\}$, $l_2 = \{(r, T) \in C^+ : r^* \leq r \leq \Pi(r_0)\}$, $l_3 = \{(\Psi(\theta, r_0), \theta) \in C^+ : 0 \leq \theta \leq T\}$ e $l_4 = \{(r, 0) \in C^+ : r^* \leq r \leq r_0\}$. Note que $\int_{l_3} \omega/V = 0$, pois l_3 é um arco da órbita de (8.14) por r_0 . Temos então que

$$\oint_{\gamma_{r^*}} \frac{\omega}{V} = \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{\omega}{V} = \int_0^T \frac{-G(r^*, \theta)}{V(r^*, \theta)} d\theta + \int_{r^*}^{\Pi(r_0)} \frac{dr}{V(r, T)} + \int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{V(r, 0)}.$$

Agora $\oint_{\gamma_{r^*}} \omega/V = 0$, pois $dH^+ = \omega/V$ e γ_{r^*} é fechada. Além disso, como $V(r, T) = V(r, 0)$ e $\Pi(r_0) = r_0$ (pois a origem é um centro), segue que

$$\int_{r^*}^{\Pi(r_0)} \frac{dr}{V(r, T)} + \int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{V(r, 0)} = 0.$$

Daí, obtemos

$$\int_0^T \frac{G(r^*, \theta)}{V(r^*, \theta)} d\theta = 0$$

para todo $r^* > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, a prova de (c) está concluída. ■

8.5 Perturbações Singulares

Conjuntos periódicos limite contendo um número infinito de pontos singulares podem ter uma ciclicidade maior do que o esperado. Devido à estreita relação entre os ciclos limite e o fator integrante inverso, a teoria de perturbações singulares é um campo novo e muito interessante para aplicar propriedades do fator integrante inverso a fim de detectar ciclos limite. Como vimos, para outros conjuntos periódicos limite, o fator integrante inverso não só fornece uma forma alternativa de estudar a ciclicidade, mas contém mais informações: localização dos ciclos limites, cálculo da ciclicidade do objeto em estudo, uma equação diferencial parcial explícita (3.1) que reúne todas as informações, etc.

Nesta seção iremos considerar famílias a um parâmetro de campos vetoriais X_ε em $\mathbb{R}^2$ da forma $X_\varepsilon = f(x, y, \varepsilon)\partial_x + \varepsilon g(x, y, \varepsilon)\partial_y$, onde $\varepsilon \geq 0$ e f, g são funções analíticas ou de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. O objetivo do problema de perturbação singular é estudar o retrato de fase, para ε suficientemente pequeno, próximo ao conjunto de pontos singulares de X_0 dados por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y, 0) = 0\}$. Em particular, se X_ε tem um ciclo limite que tende para uma órbita singular de X_0 quando $\varepsilon \searrow 0$. Uma órbita singular é um conjunto periódico limite do sistema X_0 .

Definição 8.29. Para o campo vetorial X_0 , dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é normalmente hiperbólico se $\frac{\partial f}{\partial x}(p, 0) \neq 0$.

O sistema de equações diferenciais associado a X_ε é

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \quad (8.24)$$

onde “ $\dot{}$ ” denota a derivada com relação ao tempo t . Chamamos este sistema de *sistema rápido*. Introduzindo uma nova variável temporal através de $\tau = \varepsilon t$, obtemos o sistema denominado *sistema lento* com a seguinte forma:

$$\varepsilon x' = f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon),$$

onde “ $'$ ” denota a derivada com relação ao tempo τ . O problema reduzido é definido pelo sistema lento tomando $\varepsilon = 0$, o que dá uma equação diferencial restrita a curva crítica Σ , ou seja, o problema reduzido é

$$f(x, y, 0) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y, \varepsilon).$$

As principais órbitas singulares são aquelas que consistem em três pedaços de curvas suaves; uma órbita do problema reduzido começando em um ponto normalmente hiperbólico $p_1 \in \Sigma$, uma órbita do problema reduzido terminando em um ponto normalmente hiperbólico ponto $p_2 \in \Sigma$ e uma órbita do problema rápido conectando os dois anteriores.

O principal resultado está enunciado e provado abaixo, e pode ser encontrado em [29].

Teorema 8.30. *Considere $\varepsilon_0 > 0$ e $V_\varepsilon(x, y)$ um fator integrante inverso de classe $\mathcal{C}^1$ de X_ε , ou seja, $X_\varepsilon V_\varepsilon = \text{div} X_\varepsilon V_\varepsilon$, definido em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Sejam $\Gamma \subset U$ uma órbita singular e Γ_ε um ciclo limite de X_ε em U para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, com $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$, de acordo com a distância de Hausdorff. Então $V_0(\Gamma) = 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 6.6, temos que $V_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon) = 0$. Se existe $p \in \Gamma$ tal que $V_0(p) \neq 0$, então existe um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $p \in W$ e $V_0(q) \neq 0$, para todo $q \in W$. A convergência de Hausdorff $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ implica que existe $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $\Gamma_\varepsilon \cap W \neq \emptyset$ para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Neste caso, existe $q \in \Gamma_\varepsilon$ com $V_0(q) \neq 0$. A continuidade de V com respeito a ε implica que existe $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ temos $V_\varepsilon(q) \neq 0$, e isto é uma contração. Então $V_0(\Gamma) = 0$. ■

9 O Multiplicador inverso de Jacobi

O multiplicador inverso de Jacobi é uma generalização natural do fator integrante inverso para sistemas dinâmicos n -dimensionais, com $n \geq 3$ (veja [30]).

Neste capítulo trabalharemos com campos de vetores de classe $\mathcal{C}^1$ da forma

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, \dots, x_n) \partial_{x_i},$$

definidos em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e denotaremos por ϕ o fluxo do sistema associado a este campo de vetores.

Definição 9.1. Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ é chamada de multiplicador inverso de Jacobi do campo de vetores X se V é solução da equação diferencial parcial linear de primeira ordem $XV = V \operatorname{div} X$ em U .

Muitas das propriedades de fatores integrantes inversos para o caso planar ($n = 2$) são herdadas pelo multiplicador inverso de Jacobi. Listaremos algumas delas a seguir:

- Se a mudança de coordenadas $y = \psi(x)$ é introduzida, então

$$W(y) = (V \circ \psi^{-1})(y) \det\{D\psi(\psi^{-1}(y))\}$$

é um multiplicador inverso do campo vetorial transformado $\psi_* X = D\psi \circ X \circ \psi^{-1}$.

- Sejam V_1 e V_2 dois multiplicadores inversos de Jacobi linearmente independentes de X definidos em U . Se $V_1(x) \neq 0$ para todo $x \in U$ então a razão V_2/V_1 é uma integral primeira de X em U .
- Considere p_0 um zero isolado de um multiplicador inverso de Jacobi V tal que $V \geq 0$ em uma vizinhança N de p_0 . Então p_0 é um ponto singular estável (resp. instável) de X desde que $\operatorname{div} X \leq 0$ (resp. ≥ 0) em N . Além disso, a estabilidade (resp. instabilidade) de p_0 é assintoticamente estável quando $\operatorname{div} X < 0$ (resp. > 0) em N (veja a demonstração da Proposição 7.6).

Sejam $\gamma = \{\gamma(t) \in U : 0 \leq t \leq T\}$ um ciclo limite T -periódico de X e V um multiplicador inverso de Jacobi em uma região contendo γ . Se $x_0 \in \gamma$, então $\phi(T, x_0) = x_0 = \phi(0, x_0)$ e pela Proposição 7.8

$$V(x_0) = V(\phi(x_0, T)) = V(x_0) \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} X \circ \gamma(\tau) d\tau \right). \quad (9.1)$$

Denotaremos por

$$\Delta(\gamma) = \int_0^T \operatorname{div} X \circ \gamma(t) dt,$$

então pela equação (9.1), temos que

$$(1 - e^{\Delta(\gamma)}) V(x_0) = 0.$$

Portanto, se $\Delta(\gamma) \neq 0$, então $V(x_0) = 0$.

Teorema 9.2. *Se $\Delta(\gamma) > 0$ então γ não é um ciclo limite estável. Para um sistema planar, uma órbita fechada satisfazendo $\Delta(\gamma) < 0$ é necessariamente assintoticamente estável.*

Não apresentaremos a prova do teorema acima, porém ela pode ser encontrada em [31].

Definição 9.3. Dizemos que γ é um ciclo limite forte, quando $\Delta(\gamma) \neq 0$. Caso contrário, se $\Delta(\gamma) = 0$, então dizemos que γ é um ciclo limite fraco.

Os próximos resultados podem ser encontrados em [30].

Teorema 9.4. *Seja V um multiplicador inverso de Jacobi do campo de vetores X definido em uma região contendo um ciclo limite de X . Então, γ está contido em $V^{-1}(0)$ nos seguintes casos:*

- (i) se γ é um ciclo limite forte, ou
- (ii) se γ é assintoticamente estável (instável).

Demonstração: (i) Suponha que o multiplicador inverso de Jacobi V não se anula em um ciclo limite γ , então podemos supor, sem perda de generalidade, que $V|_\gamma > 0$ e portanto,

$$\Delta(\gamma) = \int_0^T \operatorname{div} X \circ \gamma(\tau) d\tau = \int_0^T \frac{\dot{V}(\gamma(\tau))}{V(\gamma(\tau))} d\tau = \ln V(\gamma(T)) - \ln V(\gamma(0)) = 0,$$

isto é, γ é um ciclo limite fraco, o que contraria a hipótese. Portanto, $\gamma \subset V^{-1}(0)$.

(ii) Invertendo a direção do tempo, se necessário, assumamos que γ é assintoticamente estável. Suponha que $\gamma \not\subset V^{-1}(0)$, então para todo $x_0 \in \gamma$, $V(x_0) \neq 0$ (veja a Proposição 7.8), e, sem perda de generalidade, considere $V|_\gamma > 0$. Como V é contínuo, por compacidade, existem duas constantes positivas m e M tal que

$$m \leq V(x) \leq M, \tag{9.2}$$

para todo $x \in B_\varepsilon(\gamma) = \bigcup \{B_\varepsilon(x_0) : x_0 \in \gamma\}$, onde $B_\varepsilon(x_0)$ denota a bola aberta de centro x_0 e raio ε .

Tome $x_0 \in \gamma$ e considere a bola aberta $B_\delta(x_0)$ de raio $\delta > 0$ (suficientemente pequeno) tal que $\phi(B_\delta(x_0), t) \subseteq B_\varepsilon(\gamma)$ para todo $t > 0$. De (9.2) obtemos

$$\int_{\phi(t, B_\delta(x_0))} \frac{dx}{m} \geq \int_{\phi(t, B_\delta(x_0))} \frac{dx}{V(x)} \geq \int_{\phi(t, B_\delta(x_0))} \frac{dx}{M}.$$

Como a integral

$$\int_{\phi(t, B_\delta(x_0))} \frac{dx}{V(x)}$$

é uma integral invariante, segue que

$$\frac{\text{Área}(\phi(t, B_\delta(x_0)))}{m} \geq \int_{\phi(t, B_\delta(x_0))} \frac{dx}{V(x)} = \int_{B_\delta(x_0)} \frac{dx}{V(x)} \geq \frac{\text{Área}(B_\delta(x_0))}{M} > 0, \quad t > 0.$$

Mas isso contradiz o fato de que $\text{Área}(\phi(B_\delta(x_0), t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, pois por hipótese γ é assintoticamente estável. Esta contradição mostra que $V(x_0) = 0$ para um certo ponto $x_0 \in \gamma$ e portanto $V|_\gamma = 0$. ■

O seguinte exemplo ilustra uma aplicação do teorema.

Exemplo 9.5. Considere o campo vetorial polinomial cúbico em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z) = \lambda(-y + xf(x, y)) \\ \dot{y} = Q(x, y, z) = \lambda(x + yf(x, y)) \\ \dot{z} = R(x, y, z) = z \end{cases},$$

onde $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ e $\lambda > 0$ é um parâmetro real. Temos que

$$\gamma = \{f(x, y) = 0\} \cap \{z = 0\}$$

é um ciclo limite de período $T = 2\pi/\lambda$ deste sistema. De fato, $\gamma(t) = (\cos \lambda t, \sin \lambda t, 0)$. Considere X o campo associado a este sistema. Calculando $\text{div}(X)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lambda - 3\lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda - \lambda x^2 - 3\lambda y^2 + 1 = 2\lambda - 4\lambda(x^2 + y^2) + 1,$$

então

$$\text{div}X(\gamma(t)) = 2\lambda - 4\lambda(\cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)) + 1 = 2\lambda - 4\lambda + 1 = -2\lambda + 1.$$

Assim, chegamos que

$$\Delta(\gamma) = \int_0^T \text{div}X \circ \gamma(t) dt = \frac{2(1 - 2\lambda)}{\lambda} \pi.$$

Um multiplicador inverso de Jacobi para este sistema é dado por

$$V_1(x, y, z) = f(x, y)(x^2 + y^2)z,$$

isto é, $XV_1 = V_1(\text{div}X)$. Note que V_1 não depende de λ e $\gamma \subseteq V_1^{-1}(0)$. Agora, se $\lambda = 1/2$, γ é um ciclo limite fraco e $V_2(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2$ é outro multiplicador inverso de Jacobi para o sistema. Observe que $\gamma \not\subseteq V_2^{-1}(0)$.

Um ponto singular hiperbólico x_0 de um campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ é dito um ponto de *sela* quando a matriz $DX(x_0)$ tem autovalores com partes reais positivas e negativas. Assumindo que k dessas partes reais são positivas e os $n - k$ restantes são negativos, o Teorema da Variedade Estável (ver página 107 do livro [17]) garante a existência de duas variedades invariantes de classe $\mathcal{C}^1$, $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$ com dimensões $\dim W^u(x_0) = k$ e $\dim W^s(x_0) = n - k$, tal que elas se cruzam transversalmente uma com a outra em x_0 e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_0, \quad x \in W^u(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0, \quad x \in W^s(x_0).$$

Veremos um exemplo simples que serve para nos convencer de que, mesmo que um multiplicador inverso de Jacobi V se anula em um ponto singular x_0 , não se pode esperar que V se anule simultaneamente em ambas as variedades invariantes do ponto x_0 .

Exemplo 9.6. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = -z. \end{cases}$$

A origem é um ponto de sela deste sistema e $V_1(x, y, z) = x$, $V_2(x, y, z) = y$ são dois multiplicadores inversos de Jacobi que se anulam somente na variável estável correspondente $W^s(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

Para investigar a nulidade dos multiplicadores inversos de Jacobi em variedades invariantes de pontos singulares, consideramos um ponto singular forte não degenerado x_0 do campo de vetores X e recorremos mais uma vez à equação diferencial $\dot{V} = V \operatorname{div} X$. Se V é um multiplicador inverso definido em uma vizinhança U de x_0 e $x \in U$ é um ponto pertencente a uma variedade invariante de x_0 ; então a solução da equação diferencial $\dot{V} = V \operatorname{div} X$ nos diz que

$$V(\phi(x, t)) = V(x) \exp \left(\int_0^t (\operatorname{div} X \circ \phi(x, \cdot))(\tau) d\tau \right),$$

isto é,

$$V(x) = V(\phi(x, t)) \exp \left(- \int_0^t (\operatorname{div} X \circ \phi(x, \cdot))(\tau) d\tau \right).$$

Agora, se $\operatorname{div} X(x_0) > 0$ e $x \in W^s(x_0)$ vemos que $V(\phi(x, t)) \rightarrow V(x_0) = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e portanto, fazendo $t \rightarrow \infty$ na igualdade acima, obtemos $V(x) = 0$. Analogamente pode ser mostrado que $V(x) = 0$ desde que $\operatorname{div} X(x_0) < 0$ e $x \in W^u(x_0)$.

Estabelecemos o seguinte resultado que resume a discussão acima.

Teorema 9.7. *Seja p_0 um ponto singular forte não degenerado do campo vetorial X com um multiplicador inverso de Jacobi V definido em uma vizinhança de p_0 . Então V se anula em $W^u(p_0)$ (resp. $W^s(p_0)$) desde que $\operatorname{div} X(p_0) < 0$ (resp. $\operatorname{div} X > 0$).*

10 Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi estudar o fator integrante inverso de sistemas diferenciais planares e suas aplicações. Relacionamos a existência de um fator integrante inverso com diversos objetos da teoria dos sistemas dinâmicos, a saber, a integrabilidade de campos de vetores no plano, ciclos limites, o Problema do Centro-Foco, bifurcações e finalizamos com uma breve generalização do fator integrante inverso para o caso n -dimensional com $n \geq 3$.

A integrabilidade de um campo está totalmente interligada com a existência de um fator integrante inverso. De fato, mostramos que a existência de uma integral primeira é equivalente à existência de um fator integrante inverso. Vimos também que a existência de um fator integrante inverso racional implica em uma integral primeira do tipo Darboux.

No que diz respeito ao problema do centro-foco, vimos um importante resultado, equivalente ao Teorema do centro de Poincaré-Liapunov, utilizando o fator integrante inverso. Este resultado diz que, se um sistema não degenerado possui um centro na origem, então existe um fator integrante inverso, não nulo, em uma vizinhança da origem. E mais, a recíproca é válida.

O fator integrante inverso também é de suma importância quando o sistema possui ciclos limites, pois quando existe o fator inverso integrante, ele determina a localização desta trajetória no retrato de fase.

Estudamos o conjunto dos zeros de um fator integrante inverso. Impondo algumas condições, vimos que o fator integrante inverso se anula ao longo de qualquer separatriz de um campo de vetores e em alguns pontos singulares específicos.

Por fim, generalizamos o conceito de fator integrante inverso. Definimos os multiplicadores inversos de Jacobi e vimos algumas condições para que um ciclo limite esteja contido no conjunto de zeros de um multiplicador inverso de Jacobi. Além disso, sob algumas hipóteses, vimos também que os multiplicadores inversos de Jacobi se anulam nas variedades estável e instável de pontos singulares de campos de vetores.

Referências

- [1] ARTÉS, J. C.; DUMORTIER, F.; LLIBRE, J. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. New York: Springer, 2006.
- [2] CHAVARRIGA, J.; GIACOMINI, H.; GINÉ, J. An improvement to Darboux integrability theorem of systems having a center. *Applied Mathematics Letters*, v. 12, p. 85–89, 1999.
- [3] GARCÍA, I. A.; GRAU, M. A survey on the inverse integrating factor. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, v. 9, p. 115–166, 2010.
- [4] CHAVARRIGA, J.; GIACOMINI, H.; GINÉ, J. The null divergence factor. *Publicacions Matemàtiques*, v. 41, p. 41–56, 1997.
- [5] SCHINZEL, A. *Polynomials with special regard to reducibility*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. v. 77.
- [6] CHAVARRIGA, J.; GARCÍA, J.; SOROLLA, J. Non-nested configuration os algebraic limit cycle in quadratic systems. *Journal of Differential Equations*, v. 225, p. 513–527, 2006.
- [7] CHAVARRIGA, J.; GARCÍA, J.; J.GINÉ. On the integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 11, p. 711–722, 2001.
- [8] CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; PEREIRA, J. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 229, p. 61–118, 2007.
- [9] FULTON, W. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*. New York: W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Mathematics Lecture Notes Series.
- [10] CHAVARRIGA, J. et al. Darboux integrability and the inverse integrating factor. *Journal of Differential Equations*, v. 194, p. 116–139, 2003.
- [11] FERRAGUT, A.; LLIBRE, J. On the remarkable values of the rational first integrals of polynomial vector fields. *Journal of Differential Equations*, v. 241, p. 399–417, 2007.
- [12] LOUD, W. S. Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers. *Contributions to Differential Equations*, 1964.

-
- [13] PLESHKAN, I. I. A new method of research on the isochronism of a system of two differential equations. *Differencial'nye Uravnenija*, 1969.
- [14] GINÉ, J. On the centers of planar analytic differential systems. *Int. J. Bifurc. Chaos Appli. Sci. Eng.*, v. 17, p. 3061–3070, 2007.
- [15] BERRONE, L. R.; GIACOMINI, H. On the vanishing set of inverse integrating factors. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, v. 1, p. 211–230, 2000.
- [16] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11.
- [17] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. New York: Springer, 2001.
- [18] GARCÍA, I. A.; SHAFER, D. S. Integral invariants and limit sets of planar vector fields. *Journal of Differential Equations*, v. 217, p. 363–376, 2005.
- [19] GIACOMINI, H.; LLIBRE, J.; VIANO, M. On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers. *Nonlinear Anal.*, v. 41, p. 501–516, 2000.
- [20] BLOWS, T.; PERKO, L. Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems. *SIAM Rev.*, v. 36, p. 341–376, 1994.
- [21] ANDRONOV, A. et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1973.
- [22] GARCÍA, I. A.; GIACOMINI, H.; GRAU, M. The inverse integrating factor and the poincaré map. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 362, p. 3591–3612, 2010.
- [23] GARCÍA, I.; GINÉ, J.; GRAU, M. A necessary condition in the monodromy problem for analytic differential equations on the plane. *J. Symbolic Comput.*, v. 41(9), p. 943–958, 2006.
- [24] GARCÍA, I. A.; GIACOMINI, H.; GRAU, M. Generalized Hopf bifurcation for planar vector fields via the inverse integrating factor. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 23, p. 251–281, 2011.
- [25] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities*. New York: Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.
- [26] CHAVARRIGA, J.; GINÉ, J. Integrability of a linear center perturbed a fifth degree homogeneous polynomial. *Publi Math.*, v. 41, p. 335–356, 1997.
- [27] COLL, B.; GASULL, A.; PROHENS, R. Differential equations defined by the sum of two quasi-homogeneous vector fields. *Can. J. Math.*, v. 49(2), p. 212–231, 1997.
- [28] GARCÍA, I.; MAZA, S. A new approach to center conditions for simple analytic monodromic singularities. *Journal of Differential Equations*, v. 248, p. 363–380, 2010.
- [29] LLIBRE, J.; MEDRADO, J.; SILVA, P. Limit cycles for singular perturbation problems via inverse integrating factor. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, v. 26, n. 1-2, p. 41–52, 2008.

-
- [30] BERRONE, L.; GIACOMINI, H. Inverse Jacobi multipliers. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, v. 52, p. 77–130, 2003.
- [31] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. New York: J. Wiley & Sons, 1964.

Índice Remissivo

- Órbita periódica, 57
- 1-forma, 22
 - exata, 36
 - fechada, 36
- Aplicação de Poincaré, 34
- Bifurcação, 71
- Campo vetorial, 21
- Centro, 51
 - degenerado, 52
 - isócrono, 54
 - nilpotente, 52
 - tipo linear, 52
- Ciclicidade, 72
- Ciclo limite, 57
 - forte, 96
 - fraco, 96
- Codimensão, 71
- Cofator, 24
- Conjunto, 72
 - α -limite, 63
 - ω -limite, 63
 - periódico limite, 72
- Coordenadas, 78
 - curvilíneas, 78
 - polares, 82
 - polares generalizadas, 91
- Curva algébrica invariante, 24
 - notável crítica, 42
- Desdobramento, 71
- Direção característica, 83
- Divergente, 23
- Equação diferencial, 22
 - ordinária, 22
 - parcial, 53
- extática, 42
- Fator, 23
 - exponencial, 27
 - integrante, 23
 - integrante inverso, 35
- Foco, 51
- Função, 22
 - analítica, 22
 - Darboxiana, 32
 - de Liapounov, 62
 - deslocamento, 88
 - Hamiltoniana, 22
 - homogênea, 37
 - racional, 31
- Gráfico, 69
- Hiperbólico, 71
- Integral, 67
 - de Poincaré-Melnikov, 76
 - invariante, 67
- Integral primeira, 22
 - de Darboux, 32
 - de Darboux generalizada, 42
- Invariante, 22
- Limite de um centro do tipo linear, 54
- Multiplicador inverso de Jacobi, 95
- Multiplicidade nula, 78
- Normalmente hiperbólico, 92
- Policiclo, 69
- Polinômio, 21
 - irredutível, 42
 - redutível, 42
- Ponto singular, 21
 - assintoticamente estável, 62
 - estável, 62
 - forte, 28
 - fraco, 28

- hiperbólico, 97
- instável, 62
- monodrômico, 51
- monodrômico simples, 91
- não degenerado, 61

Separatrizes, 63

Setor, 68

- elíptico, 68
- hiperbólico, 68
- parabólico, 68

Sistema, 52

- degenerado, 52
- lento, 93
- nilpotente, 52
- rápido, 93
- tipo linear, 52

Sistema diferencial, 21

- homogêneo, 37
- polinomial, 21

Solução particular, 40

Teorema, 28

- da Variedade Estável, 64
- de Bézout, 28
- de Bendixson, 57
- de Darboux, 28
- de Euler, 40
- de Green, 57
- de Mudança de Variáveis, 67
- de Poincaré-Liapunov, 52
- de Preparação de Malgrange, 89
- do Valor Médio, 66
- dos Zeros de Hilbert, 48

Valor notável, 42

- crítico, 42

Variedade, 97

- estável, 97
- instável, 97