



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/99

OK

Correções de QCD para Processos Drell–Yan

Antonio Mihara

Orientador

Prof. Dr. Sérgio Ferraz Novaes



Março de 1999

Agradecimentos

Quero demonstrar minha gratidão a todos que contribuíram para que esta etapa importantíssima de minha formação fosse concluída:

Ao Prof. Sérgio Novaes, pela orientação e apoio nas atividades acadêmicas e também pelos seus ensinamentos.

Ao Prof. Oscar Éboli, pelos seus ensinamentos.

Aos colegas do IFT (ou seja, estudantes, professores e funcionários) que tornam esta instituição um ambiente acolhedor e agradável para estudo e pesquisa.

Por último, mas não menos importante, à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos com detalhes os cálculos de correções da Cromodinâmica Quântica (QCD) em ordem α_s aos processos do tipo Drell–Yan ($p\bar{p} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$ e $p\bar{p} \rightarrow W^\pm$). Analisamos as correções às funções de distribuição de partons e levamos em conta as contribuições de gluons reais e virtuais ao processo elementar.

Palavras Chaves: Correções de QCD; Processo Drell–Yan; Divergências Infravermelhas; Fatorização.

Áreas do conhecimento: Física de Altas Energias; Fenomenologia.

Abstract

In this dissertation we present with details the next-to-leading order corrections of Quantum Chromodynamics to the Drell-Yan processes ($p\bar{p} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$ e $p\bar{p} \rightarrow W^\pm$). We analyze the corrections to the parton distribution functions taking into account real and virtual gluon contributions to the elementary process.

Com gratidão, dedico aos meus pais.

Índice

1	Introdução	3
1.1	Cromodinâmica Quântica	5
1.1.1	A teoria de Yang-Mills	5
1.1.2	A QCD e suas Regras de Feynman	7
1.1.3	Renormalização na QCD	10
1.1.4	Liberdade Assintótica e Conseqüências	15
2	QCD na Aniquilação Elétron-Pósitron	18
2.1	Seção de Choque Total de $e^+e^- \rightarrow$ hadrons	18
2.1.1	Correções de Gluon Virtual para $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$	20
2.1.2	Sobre as Divergências Infravermelhas	24
2.1.3	Correções de Gluon Real	28
3	Correções das Funções de Distribuição	36
3.1	Espalhamento Inelástico $e-N$	37
3.2	Correções para as funções de distribuição	41
3.2.1	Correções Virtuais	42
3.2.2	Correções de Emissão de Gluon Real	43
3.2.3	Correções de Gluon Inicial	47
4	Correções de Processos Tipo Drell-Yan	53
4.1	O Processo Drell-Yan	53
4.1.1	Correções de Emissão de Gluon	56
4.1.2	Correções de Gluon Virtual	57
4.1.3	Correções de Gluon no Estado Inicial	58
4.2	Produção do Bóson W	62
5	Conclusão	66
A	Calculando os Fatores de Cor	70

B	Seção de choque em D dimensões	73
B.1	Seção de Choque	73
B.2	O Espaço de Fase em D dimensões	74
B.2.1	O Espaço de Fase de Uma Partícula	75
B.2.2	O Espaço de Fase para Duas Partículas Sem Massa	75
B.3	A Álgebra das matrizes de Dirac em D dimensões	76
C	Algumas Funções Especiais	78
D	As Integrais de Passarino–Veltman	80
E	As Funções “+”	85

Capítulo 1

Introdução

Apresentamos um pouco da história do estudo das interações fortes, do modelo a quarks até o estabelecimento da Cromodinâmica Quântica (QCD) como a teoria das interações fortes. Em seguida mostramos a teoria de Yang–Mills, que foi importante, posteriormente, para se construir a QCD como a teoria das interações fortes. Apresentamos então a QCD e suas regras de Feynman.

Em 1961, Gell-Mann (e, independentemente, Ne’eman) [1] criou o famoso *Eightfold Way*, um esquema de classificação dos hadrons no qual arranjava os bárions e mésons conhecidos na época de acordo com sua *carga* e *estranheza*. Ao organizar as partículas no decupleto de $SU(3)$, percebeu que uma partícula não havia sido observada experimentalmente, a qual deveria ter carga -1 e estranheza -3 . Gell-Mann estimou sua massa e tempo de vida e, em 1964 a partícula Ω^- com as características previstas por Gell-Mann foi observada, dando credibilidade ao modelo*.

Em 1964, Gell-Mann e Zweig [4] propuseram independentemente que os hádrons são compostos de constituintes ainda mais elementares, chamados de *quarks* por Gell-Mann. Originalmente, haviam três *sabores* de quarks: *up*(u), *down*(d) e *strange*(s), cada qual com uma carga elétrica fracionária. Neste modelo a quarks havia duas regras para construção de hadrons: todo bárion é formado por três quarks (e, analogamente, todo antibárion é formado por três antiquarks) e todo méson é formado por um quark e um antiquark. Dadas estas regras podemos fazer todas as combinações qqq bem como $q\bar{q}$, somar as cargas e as estranhezas confirmando assim o octeto e o decupleto de bárions bem como o octeto de mésons. Desta forma o *Eightfold Way* é uma conseqüência natural do modelo a quarks.

Mas alguns problemas surgiram para o modelo a quarks, o primeiro deles sendo o fato de que, até hoje, nenhum quark foi observado individualmente. Se um próton é composto de quarks, estes deveriam ser facilmente observados numa colisão suficientemente dura, e seria, em princípio, muito fácil identificá-los pelas cargas fra-

*Esta breve narração histórica condensa informações de diversos livros–textos [2] e [3]

cionárias. Como não se conseguia produzir experimentalmente quarks isolados, passou a existir uma certa resistência em relação ao modelo a quarks no fim da década de 60 e início da de 70. Os que ainda acreditavam no modelo introduziram o conceito de *confinamento de quarks* para tentar salvá-lo. Ou seja, por alguma razão (desconhecida na época e ainda hoje não muito clara), os quarks são totalmente confinados nos hadrons. Como veremos posteriormente não importa quão dura seja a colisão, o confinamento é respeitado, por exemplo, na forma de jatos de hadrons.

O segundo problema refere-se ao princípio de exclusão de Pauli que deveria se aplicar aos quarks, já que estes têm spin $\frac{1}{2}$. Por exemplo, o Δ^{++} , supostamente formado por três quarks u idênticos no mesmo estado, parece violar o princípio de exclusão. Para contornar este problema, Greenberg em 1964 propôs um novo número quântico, a *cor*, sendo que cada *sabor* de quark podia estar em um dos 3 estados de *cor*, por exemplo, *vermelho*, *azul* ou *verde*. Com este novo número quântico os três quarks de sabor u em Δ^{++} não seriam mais idênticos e o princípio de Pauli não seria mais violado. Mas esta nova hipótese parecia bastante artificial, e muitos consideraram isto como o último suspiro do modelo.

Em fins da década de 60 realizaram-se experimentos no SLAC [5], nos quais um feixe de elétrons de alta energia colidia com alvos de prótons. Observou-se que para pequenos ângulos de espalhamento os dados experimentais comportavam-se de modo semelhante ao espalhamento elástico $ep \rightarrow ep$. Mas, para ângulos grandes, os dados começavam a se desviar do espalhamento elástico, indicando que o próton tem subestrutura (espalhamento inelástico profundo), e as evidências sugeriam que este era formado por partículas mais fundamentais.

Este último fato poderia ser um forte apoio para o modelo a quarks, mas por volta de 1970 muitos físicos já não acreditavam no modelo, a tal ponto que as partículas no interior do próton foram chamadas de *partons*, e não era comum identificá-las explicitamente com os quarks.

Mas as evidências para o número quântico *cor* não eram desprezíveis. Este foi necessário para se ajustar corretamente os cálculos teóricos aos dados experimentais em, pelo menos, dois casos: decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ e a razão R entre as seções de choque totais de $e^+e^- \rightarrow$ hadrons e de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Os quarks foram, mais tarde, identificados com os partons, já que estes últimos apresentavam, nos resultados experimentais, números quânticos compatíveis com os dos quarks.

Os experimentos de espalhamento inelástico de elétrons a altas energias em prótons e nêutrons, indicavam também a invariância de escala (*scaling*) da seção de choque. Baseados nesta observação Bjorken e Feynman [6] propuseram o modelo a partons e, neste modelo, os hadrons são compostos por constituintes pontuais que praticamente não interagem entre si, isto é, são *assintoticamente livres*.

Se queremos construir uma Teoria Quântica de Campos que descreva as interações fortes, esta deve conter características aparentemente paradoxais. A TQC deve, de algum modo, conter o modelo a quarks com o número quântico de cor e o confinamento de quarks, já que este modelo reproduz muito bem o espectro hadrônico. Por outro lado, deve possuir liberdade assintótica. Veremos que a Cromodinâmica Quântica (QCD) satisfaz liberdade assintótica e há fortes indícios de que respeite o confinamento de quarks.

Entre 1972 e 1973, 't Hooft, Gross, Wilczek e Politzer [7] estudaram as teorias de gauge não-abelianas pelo método do grupo de renormalização concluindo que tais teorias gozam da propriedade de *liberdade assintótica*. Ainda em 73 foi mostrado que **apenas** as teorias não-abelianas exibiam liberdade assintótica em 4 dimensões [8].

As teorias de gauge não-abelianas são geradas por simetrias descritas por uma álgebra não-comutativa, ou seja, os sistemas de quarks-partons deveriam ter uma simetria extra associada com a teoria de gauge não-abeliana que descreve a dinâmica da interação quark-parton. Naquela mesma época, Fritsch e Gell-Mann [9] sugeriram que a tal simetria extra deveria ser identificada com a simetria de cor. Com isto muitas das dificuldades do modelo a quarks foram resolvidas e surgia então a *Cromodinâmica Quântica* (QCD).

Na Cromodinâmica Quântica, o *gluon* é o campo de gauge não-abeliano que intermedia as interações *de cor* (fortes) entre quarks. Os gluons carregam cargas de cor e, portanto, interagem entre si mesmo na ausência de quarks. Esta última característica é essencial para haver liberdade assintótica.

1.1 Cromodinâmica Quântica

1.1.1 A teoria de Yang-Mills

Logo após a descoberta do nêutron em 1932, Heisenberg notou que as massas do nêutron e do próton são muito próximas, além do fato de que as interações *fortes* sentidas por prótons e nêutrons tinham a mesma intensidade. Sugeriu então que tanto o próton quanto o nêutron são estados de uma mesma partícula, o *nucleon* [2].

Em analogia com o spin, criou-se o *isospin* I . Assim o nucleon tem isospin $\frac{1}{2}$, e a terceira componente, I_3 , tem auto-valores $+\frac{1}{2}$ (identificado como o próton) e $-\frac{1}{2}$ (o nêutron). A proposta de Heisenberg é de que as interações fortes são invariantes sob rotações no espaço de isospin. Esta simetria *interna* implica, pelo teorema de Noether, que a corrente de isospin é conservada em todas as interações fortes.

A densidade de lagrangeana do nucleon livre é dada por:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (1.1)$$

onde:

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

\mathcal{L}_0 é invariante sob rotações *globais* no espaço de isospin:

$$\psi \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2}\tau \cdot \alpha\right)\psi \quad (1.3)$$

onde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ são as matrizes de Pauli, geradores de $SU(2)$, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um parâmetro (trivetor) constante e arbitrário da transformação. Esta é a invariância global $SU(2)$. Sabemos que, impondo uma invariância *local* sob transformações do tipo $U(1)$ sobre uma densidade de lagrangeana de partículas livres é possível construir a QED. Em 1954, Yang e Mills [10] desenvolveram uma teoria com invariância $SU(2)$ local.

Uma transformação $SU(2)$ local é feita da seguinte forma:

$$\psi \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2}\tau \cdot \alpha\right)\psi \quad (1.4)$$

mas desta vez $\alpha_i = \alpha_i(x)$. Requerendo a invariância sob estas transformações obteremos a lagrangeana de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.5)$$

onde a derivada covariante é dada por:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\left(\frac{\tau^a}{2}\right)A_\mu^a \quad (1.6)$$

sendo que A_μ^a são os campos de gauge e o tensor totalmente antissimétrico envolvendo estes campos é:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.7)$$

com $a = 1, 2, 3$ e ε^{abc} é tensor totalmente antissimétrico.

Graças ao termo não-linear em (1.7) teremos auto-interação entre os bósons de gauge. Portanto, além do vértice de interação do bóson de gauge com os quarks, a teoria contém vértices de 3 e 4 bósons de gauge.

Esta teoria foi originalmente concebida para descrever as interações entre nucleons que são, notoriamente, de curto alcance. Mas como os bósons de gauge da

teoria de Yang-Mills não têm massa, a força mediada por eles deveria ter alcance infinito. Uma boa descrição fenomenológica das interações nucleares envolve a troca de partículas com massa, como os píons.

Seriam necessários mais dados experimentais para se obter evidências de subestrutura para os nucleons. Precisariamos ainda de modelos como o de quark-partons, além de estudos teóricos mais profundos sobre a teoria de Yang-Mills generalizada e sua renormalizabilidade, bem como de liberdade assintótica para que, finalmente, a teoria de Yang-Mills voltasse para descrever as interações fortes. Mas desta vez, um pouco mais complicada e num contexto diferente.

1.1.2 A QCD e suas Regras de Feynman

A teoria de Yang-Mills ressurgue na Cromodinâmica Quântica como a teoria de gauge com simetria $SU(3)$ de cor. A escolha desta simetria é feita restringindo-se aos grupos de Lie simples e compactos (compactos para que as representações unitárias sejam de dimensão finita) e requerendo que: (i) os quarks devam pertencer à representação de tripleto do grupo; (ii) o tripleto deva ser uma representação complexa, já que estados de quarks e antiquarks são diferentes; (iii) mesons e barions sejam singletos de cor. Os únicos grupos de Lie que têm representações irredutíveis de dimensão 3 são $SU(2)$, $SU(3)$, $SO(3)$ e $Sp(1)$. Mas $SU(2)$, $SO(3)$ e $Sp(1)$ são isomorfos, assim, temos duas possibilidades: $SU(3)$ e $SO(3)$. Mas a representação de tripleto de $SO(3)$ é real. Portanto, $SU(3)$ é a que satisfaz as condições acima [3]. A QCD será uma teoria de gauge não-abeliana, tal como aquela originalmente formulada por Yang e Mills, mas com simetria $SU(3)$ de cor. Os bósons de gauge da QCD não têm massa e são chamados gluons.

Temos, até agora, seis *sabores* de quarks (e respectivos antiquarks) conhecidos: u , d , c , s , t e b . Cada *sabor* possui 3 *cores*: *vermelho* (*red*), *azul* (*blue*) e *verde* (*green*).

A lagrangeana livre para certo sabor s pode ser escrita:

$$\mathcal{L}_0^{(s)} = \bar{\psi}^{(s)}(\gamma^\mu \partial_\mu - m^{(s)})\psi^{(s)} \quad (1.8)$$

onde a notação foi simplificada:

$$\psi^{(s)} = \begin{pmatrix} \psi_r^{(s)} \\ \psi_b^{(s)} \\ \psi_g^{(s)} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

importante notar que $\psi_i^{(s)}$, onde $i = r, g, b$ refere-se a *red*, *green* e *blue*, é um spinor de Dirac de 4 componentes e $\psi^{(s)}$ é um tripleto complexo.

A lagrangeana de 3 partículas de mesma massa exhibe simetria exata $SU(3)$, isto é, invariante sob transformações do tipo:

$$\psi^{(s)} \rightarrow U\psi^{(s)} \quad (1.10)$$

onde U é uma matriz 3×3 unitária que podemos escrever como:

$$U = \exp(iT^a \alpha^a), \quad a = 1, \dots, 8$$

onde T^a são os geradores de $SU(3)$ com as propriedades:

$$\begin{aligned} \text{Tr } T^a &= 0 \\ [T^a, T^b] &= if^{abc}T^c \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura, totalmente antissimétricas, de $SU(3)$, assim como ε^{abc} são as constantes de estrutura de $SU(2)$.

A convenção escolhida para normalizar as matrizes $SU(N)$ na representação fundamental (ou dos férmions) é dada por:

$$\text{Tr } T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (1.12)$$

que implica na relação:

$$\sum_a T_{ij}^a T_{jk}^a = C_F \delta_{ik}, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (1.13)$$

maiores detalhes sobre os fatores de cor podem ser encontrados no Apêndice A.

A invariância da lagrangeana sob transformações $SU(3)$ globais deve ser modificada para invariância sob transformações $SU(3)$ locais. Com isso, a derivada parcial de \mathcal{L}_0 deve ser substituída pela derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a \quad (1.14)$$

onde A_μ^a são oito campos de gauge de cor. O tensor de campo dos gluons será, graças à estrutura não-Abeliana, dado por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.15)$$

A lagrangeana da QCD pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{s=sabor} \bar{\psi}^{(s)} (\not{D} - m^{(s)}) \psi^{(s)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.16)$$

A partir desta lagrangeana podemos obter as regras de Feynman para os propagadores de quarks e gluons bem como de suas interações (vértices). Mas, para

tanto, devemos especificar completamente a teoria adicionando-se um termo *fixador* de gauge à \mathcal{L}_{QCD} . Para gauges covariantes costuma-se usar termos da forma $[-(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\lambda)]$, onde λ é o parâmetro do gauge.

Se escolhermos $\lambda = 1$ temos o gauge de Feynman e para $\lambda \rightarrow 0$ temos o gauge de Landau. É claro que o gauge de Feynman é conveniente para muitos propósitos pois o propagador do gluon adquire uma forma simples neste gauge e, como veremos ao longo desta dissertação, facilita bastante os cálculos.

Deve-se ainda adicionar interações de *fantasmas* de Faddeev-Popov à lagrangeana. O *fantasma* é assim chamado pois, apesar de ser um campo escalar, comporta-se como um férmion. Estes são introduzidos apenas como um artifício matemático para se manter a invariância de gauge e a unitariedade da teoria.

As regras de Feynman da QCD são dadas abaixo

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{-----} \\ \text{oooooo} \\ \text{-----} \\ b, \nu \end{array} \quad p \quad = \delta^{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \lambda) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right]$$

$$\begin{array}{c} i \\ \text{-----} \\ j \end{array} \quad p \quad = \delta^{ij} \frac{i}{p - m + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \text{-----} \\ b \end{array} \quad p \quad = \delta^{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ i \quad \quad j \end{array} \quad = -ig_s T_{ji}^a \gamma^\alpha$$

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ b \quad \quad c \end{array} \quad = g_s q_\alpha f^{abc}$$

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ b, \beta \quad \quad c, \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} q \\ \text{-----} \\ p \\ \text{-----} \\ r \end{array} \quad = -g_s f^{abc} [(p - q)_\gamma g_{\alpha\beta} + (q - r)_\alpha g_{\beta\gamma} + (r - p)_\beta g_{\gamma\alpha}],$$

com $p + q + r = 0$

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ b, \beta \quad \quad c, \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} d, \delta \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \quad = -ig_s^2 \left[f^{eac} f^{ebd} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \right. \\ \left. + f^{ead} f^{ebc} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) \right. \\ \left. + f^{eab} f^{ecd} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \right]$$

1.1.3 Renormalização na QCD

Durante o cálculo de diagramas de um ou mais *loops* na QCD é comum encontrarmos divergências ultravioletas (UV), associadas a momentos infinitos de *loops*. A fim de que se possa obter quantidades físicas finitas é necessário, então, renormalizar as várias quantidades (vértices e propagadores) que entram nos cálculos dos diagramas †.

A renormalização é um modo sistemático de se absorver as divergências ultravioletas em massas e constantes de acoplamentos *nuas* da teoria que, a princípio, não podem ser medidas.

O primeiro passo em qualquer programa de renormalização de um dado diagrama com singularidades UV é dar uma forma simples a estas singularidades de modo que a renormalização possa ser facilmente realizada. Isto é o que chamamos de *regularização*.

Ao longo do desenvolvimento da teoria quântica de campos, diversos métodos de regularização foram criados: de corte (*cut-off*), de Pauli-Villars, regularização analítica e a regularização dimensional (RD), entre outros. Estes métodos apresentam problemas diversos, com exceção da regularização dimensional, pois uma teoria de gauge assim regularizada apresenta invariância de Lorentz e de gauge, unitariedade, etc.; desta forma, a RD parece ser a mais adequada para teorias de gauge.

Na regularização dimensional os diagramas de Feynman são calculados em uma dimensão $D = 4 - 2\epsilon$ e a presença das singularidades será na forma de pólos em potências de $1/\epsilon$. Veremos posteriormente que este método pode ser utilizado também para se regularizar singularidades de origem infravermelha. Utilizaremos este método para todos os cálculos nesta dissertação.

Consideremos uma teoria descrita por uma densidade de lagrangeana $\mathcal{L}(g_0, \phi_0)$ que depende dos campos nus ϕ_0 e da constante nua g_0 de acoplamento entre os campos. A renormalização, de modo geral, é feita substituindo-se os parâmetros nus da teoria por parâmetros renormalizados, como

$$g_0 = Z_g \cdot g = g + \delta Z_g \quad (1.17)$$

onde Z_g é uma constante de renormalização diferente de 1 em nível de um ou mais *loops*. O parâmetro g renormalizado é finito e determinado por um conjunto de condições de renormalização.

Os campos nus presentes na densidade de Lagrangeana são também redefinidos

†Nesta breve apresentação sobre renormalização seguimos as referências [11], [12] e [13].

em termos dos campos renormalizados:

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi \tag{1.18}$$

Expandindo as constantes de renormalização deste modo:

$$Z_i = 1 + \delta Z_i \tag{1.19}$$

a lagrangeana original pode ser escrita como a soma de uma lagrangeana que tem a mesma forma da original mas com os parâmetros e campos nus substituídos pelos renormalizados, e uma lagrangeana de contratermos

$$\mathcal{L}(g_0, \phi_0) = \mathcal{L}(Z_g \cdot g, Z_\phi^{1/2} \phi) = \mathcal{L}(g, \phi) + \delta \mathcal{L}(g, \phi, \delta Z_g, \delta Z_\phi) \tag{1.20}$$

Renormalização da Constante de Acoplamento da QCD

Podemos obter a constante de acoplamento efetiva da QCD através das inserções 1PI (*one-particle irreducible*) aos propagadores dos férmions e dos bósons de gauge e dos vértices de interação férmion-bóson. Vejamos as correções de ordem g^2 :

Correções de vértice: O vértice $-igT^a \gamma_\mu$ é modificado por dois diagramas de correção em nível de 1 loop ilustrados na fig. 1.1.

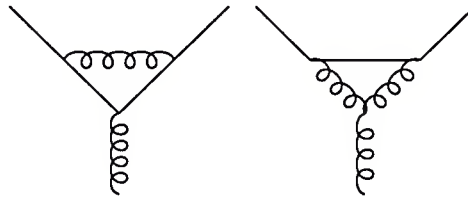


Figura 1.1: Correções ao vértice qqg .

Com isto obtemos a constante de renormalização:

$$Z_1 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} f_\Gamma \left(\frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} f_1 \tag{1.21}$$

onde μ é a massa da regularização dimensional que foi introduzida para manter a constante de acoplamento adimensional, já que ao se calcular em D dimensões a constante g_D tem dimensões de massa. Introduzimos μ através de $g_D = g \mu^{(4-D)/2}$ tal que g permanece adimensional. Em (1.21) definimos

$$f_\Gamma = \frac{\Gamma(1 + \epsilon) (\Gamma(1 - \epsilon))^2}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \approx 1 - \gamma_E \epsilon \tag{1.22}$$

e

$$f_1 = -(N_c + C_F) \frac{1}{\epsilon} \quad (1.23)$$

onde $N_c =$ número de cores e $C_F = 4/3$.

A **auto-energia do quark** a 1 *loop* é calculada pelo diagrama da figura 1.2.

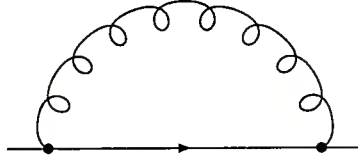


Figura 1.2: Correções ao propagador do quark.

A constante de renormalização Z_2 será dada por:

$$Z_2 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} f_1 \left(\frac{-p^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} f_2 \quad (1.24)$$

onde

$$f_2 = C_F \frac{(1 - \epsilon)}{-\epsilon} (1 - 2\epsilon) \approx -C_F \frac{1}{\epsilon} \quad (1.25)$$

As **correções ao propagador do gluon** a 1 *loop* são ilustradas na fig. 1.3.

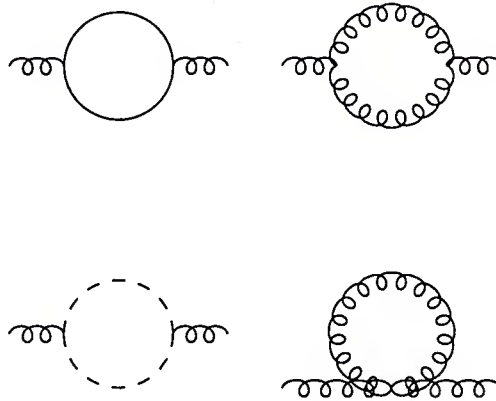


Figura 1.3: Correções ao propagador do gluon.

Este é um dos casos em que a contribuição dos *fantasmas* é necessária. Quando se calcula a contribuição do loop de gluons, observa-se que esta contém um termo que viola a identidade de Ward. Contudo, na contribuição do loop de fantasmas surge também um termo que cancela exatamente este termo indesejável.

O diagrama envolvendo o acoplamento quártico de gluons anula-se na regularização dimensional, portanto, não contribui. Obtemos então

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} f_\Gamma \left(\frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} f_3 \quad (1.26)$$

onde

$$f_3 = - \left(\frac{4n_f}{3} - \frac{5}{3}N_c \right) \frac{1}{\epsilon} \quad (1.27)$$

A Constante de Acoplamento Efetiva

A constante de acoplamento efetiva g_s é relacionada com a constante de acoplamento *nua* g e a soma das correções de *leading order* deste modo

$$\begin{aligned} -ig_s\gamma_\mu T_a &= \frac{-ig\gamma_\mu T_a}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}} [1 + (Z_1^{-1} - 1) - 2(Z_2^{-1} - 1) + (Z_3 - 1)] \\ &= \frac{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}{Z_1} (-ig\gamma_\mu T_a) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Calculando no ponto simétrico $-p^2 = -q^2 = Q^2 > 0$, obtemos:

$$Z_g = \frac{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}{Z_1} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} f_\Gamma \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left(f_2 + \frac{f_3}{2} - f_1 \right) \quad (1.29)$$

onde

$$f_\Gamma \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon \left[\ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) - \ln 4\pi + \gamma_E + \dots \right] \quad (1.30)$$

e

$$f_2 + \frac{f_3}{2} - f_1 = - \left(\frac{1}{3}n_f - \frac{11}{2} \right) \frac{1}{\epsilon} \quad (1.31)$$

Se definimos $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ e $\alpha = g^2/(4\pi)$, podemos escrever:

$$Z_g^2(Q^2) \approx 1 - \alpha \frac{\beta_0}{4\pi} \left[\frac{-1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) - \ln 4\pi + \gamma_E + \dots \right] \quad (1.32)$$

que substituída em

$$\alpha_s(Q^2) = Z_g^2(Q^2)\alpha \quad (1.33)$$

nos fornece:

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta_0}{4\pi} \left[\frac{-1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) - \ln 4\pi + \gamma_E + \dots \right] \quad (1.34)$$

vemos que, na última expressão temos um termo que tende a infinito quando $\epsilon \rightarrow 0$. E, além disso, o acoplamento nu α não é observável.

Em QED, a constante de acoplamento efetiva é determinada em termos de $\alpha_e \approx \frac{1}{137}$, a constante de estrutura fina, e esta última é definida como o valor da constante de acoplamento efetiva no limite $Q^2 \rightarrow 0$. Mas em QCD não podemos definir $\alpha_s(Q^2)$ em termos de seu valor em $Q^2 \rightarrow 0$, assim, definimos o acoplamento forte *experimental* para um certo valor de Q^2 , por exemplo, $Q^2 = \bar{\mu}^2$. Podemos agora escrever $\alpha_s(Q^2)$ em termos de $\alpha_s(\bar{\mu}^2)$:

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(\bar{\mu}^2)} + \frac{\beta_0}{4\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\bar{\mu}^2} \right) \quad (1.35)$$

e isto é finito no limite $\epsilon \rightarrow 0$ e é independente da massa de regularização dimensional μ .

A constante de acoplamento efetiva é dada então por:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\bar{\mu}^2)}{1 + \alpha_s(\bar{\mu}^2) \frac{\beta_0}{4\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\bar{\mu}^2} \right)} \quad (1.36)$$

O ponto de renormalização $\bar{\mu}^2$, é arbitrário. Note que $\alpha_s(Q^2)$ não é função de $\alpha_s(\bar{\mu}^2)$ e $\bar{\mu}^2$ separadamente, mas de um parâmetro apenas, Λ , do seguinte modo:

$$\ln(\Lambda^2) = -\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s(\bar{\mu}^2)} + \ln(\bar{\mu}^2) \quad (1.37)$$

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \quad (1.38)$$

onde Λ é um parâmetro da QCD perturbativa, e deve ser determinado experimentalmente.

A Equação do Grupo de Renormalização

No processo de renormalização introduzimos uma escala arbitrária de renormalização $\bar{\mu}$. É claro que o resultado final de uma quantidade física R (unia seção de choque, por exemplo) após renormalização não pode depender de qual valor de $\bar{\mu}$ que escolhemos, e qualquer variação em $\bar{\mu}$ deve ser compensada por uma variação em g_s e na escala dos campos. É nisto que se baseia o *grupo de renormalização*, que consiste do conjunto de todos os reescalonamentos de $\bar{\mu}$. Isto é sumarizado em:

$$\bar{\mu} \frac{dR}{d\bar{\mu}} = 0 \quad (1.39)$$

Se consideramos os quarks sem massa podemos escrever $R = R(g_s, Q^2/\bar{\mu}^2)$, onde Q^2 representa quantidades invariantes construídas a partir dos momentos externos e $g_s = g_s(\bar{\mu}^2)$. Podemos aplicar a regra da cadeia a (1.39) e obtemos a equação de grupo de renormalização (EGR) para R :

$$\left[\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} + \beta(g_s) \frac{\partial}{\partial g_s} \right] R = 0 \quad (1.40)$$

onde a função $\beta(g_s)$ indica como a constante de acoplamento varia conforme a escala de energia é variada, ou seja,

$$\beta(g_s) = \bar{\mu} \frac{\partial g_s}{\partial \bar{\mu}} \quad (1.41)$$

A função $\beta(g_s)$ é dada uma expansão em potências de g_s que começa em $\mathcal{O}(g_s^3)$

$$\beta(g_s) = -g_s \left[\frac{\alpha_s}{4\pi} \beta_0 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \beta_1 \right)^2 + \dots \right] \quad (1.42)$$

Para g_s positivo (mas pequeno) se o sinal de $\beta(g_s)$ for negativo, então vemos que a teoria é *assintoticamente livre*.

1.1.4 Liberdade Assintótica e Conseqüências

Vimos que a constante de acoplamento α_s depende da escala de energia em nível de 1 *loop*, como

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \cdot \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2n_f}{3} \quad (1.43)$$

onde $\Lambda \sim 10^2$ MeV e como o número de sabores de quarks conhecidos é pequeno ($n_f = 6$), $\alpha_s \rightarrow 0$ quando a escala de energia $\mu \gg \Lambda$. Em contrapartida, $\alpha_s \rightarrow \infty$ quando $\mu \rightarrow \Lambda$.

Percebemos que o comportamento da constante de acoplamento a altas energias caracteriza a liberdade assintótica. E é nesta região de altas energias que podemos tentar aplicar a teoria de perturbação.

Por outro lado, a intensidade da interação aumenta conforme diminui-se a escala de energia, o que parece ser compatível com o fenômeno de confinamento de quarks. É na região de baixas energias que ocorre a ligação entre os quarks para formar hadrons. Graças ao alto valor de α_s nesta região, só se pode utilizar métodos não-perturbativos como, por exemplo, QCD na rede.

Massas dos Quarks

Do ponto de vista da lagrangeana, a massa do quark é apenas outro parâmetro tal como a constante de acoplamento e é deste modo que ela é tratada na EGR. A

massa será efetiva, isto é, dependerá da escala de energia do processo considerado, e o comportamento dominante da massa efetiva, fornecido pela EGR, é dado por:

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = -m(t) + \mathcal{O}(\alpha_s), \quad t = \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \quad (1.44)$$

com a solução aproximada:

$$m(t) \sim m(0)e^{-t} \quad (1.45)$$

onde podemos notar que, aumentando a escala de energia μ a massa efetiva $m(t)$ tende a zero.

No caso da QCD a aplicação da teoria de perturbação não é trivial, já que uma quantidade física depende de massas e escalas de energia, além da constante de acoplamento, e uma seção de choque pode depender de combinações do tipo:

$$\left[\alpha_s \ln^a \frac{Q}{\mu} \right]^N, \quad \left[\alpha_s \ln^a \frac{m}{\mu} \right]^N \quad (1.46)$$

com $a = 1, 2$. Note que não podemos simplesmente aumentar μ arbitrariamente pois isto levaria a grandes logaritmos que tornariam o cálculo perturbativo inútil. É, então, crucial estabelecer um critério para se calcular quantidades físicas em QCD Perturbativa, precisamos do conceito de *segurança infravermelha* [14].

Segurança Infravermelha

Com as considerações acima em mente, podemos dizer que uma quantidade física R (por exemplo, uma seção de choque) é *segura no infravermelho* se esta é finita quando toma-se o limite de massas nulas, ou seja:

$$R \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{m}{\mu}, \alpha_s(\mu), \mu \right) = R \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, 0, \alpha_s(\mu), \mu \right) + \mathcal{O} \left[\left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^p \right] \quad (1.47)$$

onde, em geral, $Q^2 \gg m^2$ e representa quantidades invariantes construídas a partir dos momentos externos.

Encontrar quantidades seguras no infravermelho é um critério para se utilizar coerentemente a propriedade de liberdade assintótica, e exigir que R seja seguro no infravermelho significa dizer que, grosseiramente, R depende apenas do comportamento da teoria a grandes momentos. A presença de logaritmos de massas de quarks leves indica a dependência com baixas energias, situação não-perturbativa.

Em certo aspecto, pode-se dizer que o objetivo principal na QCD perturbativa é identificar quantidades seguras no infravermelho, ou seja, calculáveis em teoria de perturbação e mensuráveis por experimentos.

No próximo capítulo estudamos as correções de QCD para a seção de choque total de $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, uma quantidade física segura no infravermelho pois, como veremos, surgirão divergências infravermelhas nas diversas correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$, mas, como esperado, estas se cancelarão fornecendo um resultado finito.

Em seguida estudaremos as correções para as funções de distribuição de partons, através das funções de estrutura do espalhamento inelástico profundo (EIP). Entretanto, neste processo o cancelamento de divergências IV não é total. Isto nos leva naturalmente ao conceito de fatorização das divergências, processo pelo qual as divergências são absorvidas em distribuições de partons universais.

Por fim, calcularemos as correções em $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para as seções de choque de processos do tipo Drell–Yan. Encontraremos também divergências IV nestas seções de choque, mas veremos como estas divergências se cancelarão totalmente com as divergências das distribuições de partons universais.

Capítulo 2

QCD na Aniquilação Elétron–Pósitron

O processo no qual podemos aplicar correções de QCD de modo mais simples é a produção de hadrons a partir da aniquilação e^+e^- . Calculamos aqui as correções de ordem α_s para este processo. Ao longo dos cálculos, encontraremos singularidades nos diversos termos de ordem α_s , as quais se cancelam quando são somadas todas as contribuições. Esta é a manifestação da segurança infravermelha nesta ordem da expansão perturbativa.

2.1 Seção de Choque Total de $e^+e^- \rightarrow$ hadrons

Sabemos que para a aniquilação de um par elétron–pósitron dando origem a um par $\mu^+\mu^-$ a altas energias, regime no qual podemos desprezar as massas dos férmions, temos a seção de choque total em nível de árvore dada por:

$$\sigma_\mu = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{Q^2} \quad (2.1)$$

onde Q é a energia no centro de massa (CM). A seção de choque para a produção de um par quark–antiquark pode ser obtida analogamente, lembrando que os quarks têm cargas fracionárias e_q * e que devemos somar sobre as possíveis cores dos quarks. Assim obtemos:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3 e_q^2 \sigma_\mu \quad (2.2)$$

O que nos leva a famosa razão R entre as seções de choque:

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_f e_q^2 \quad (2.3)$$

onde a soma do quadrado das cargas é para todos os sabores f de quarks que uma dada energia de centro de massa permite produzir.

* $e_q = 2/3$ para os quarks do tipo *up* (u, c, t) e $e_q = -1/3$ para os quarks do tipo *down* (d, s, b).

Para simplificar os cálculos das correções de α_s que veremos nas próximas seções, podemos assumir que o par e^+e^- aniquila-se formando um fóton virtual γ^* , e este dá origem a $q\bar{q}$ †. Neste caso, a “taxa de decaimento” do fóton virtual em $q\bar{q}$ é dada por [15]:

$$d\Gamma = \frac{1}{2Q} \overline{|\mathcal{M}|^2} d^{(2D-2)} R_2 \quad (2.4)$$

Onde $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ é o quadrado do elemento de matriz, somado sobre os estados finais de spin e, neste caso, somado sobre os estados de polarização do γ^* . O fator $d^{(2D-2)} R_2$ refere-se ao espaço de fase para duas partículas em um espaço-tempo de D dimensões (ver Apêndice B) ‡.

Aqui estamos considerando o sistema de centro de massa (CM), ou seja, o γ^* em repouso dá origem a duas partículas sem massa que saem na mesma direção e em sentidos opostos, cada qual com metade da energia do CM. Desta forma o fator de espaço de fase torna-se,

$$R_2 = \int d^{(2D-2)} R_2 = \frac{1}{2^{(D-1)} \pi^{(D/2-1)}} \frac{\Gamma(D/2-1)}{\Gamma(D-2)} Q^{(D-4)} \quad (2.5)$$

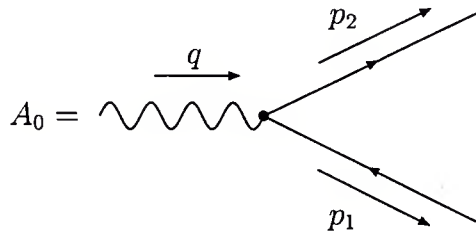


Figura 2.1: Amplitude para a formação de um par $q\bar{q}$ a partir de um fóton virtual.

Para o caso da figura 2.1, temos, em D dimensões,

$$A_0 = -ie_D e_q \bar{u}(p_2) \gamma^\mu v(-p_1) \epsilon_\mu(\lambda) \quad (2.6)$$

Note que para uma dimensão D diferente de 4, a constante de acoplamento e_D carrega dimensões. Define-se, em geral, uma constante de acoplamento adimensional (e) e uma escala de massa μ relacionadas com e_D como

$$e_D = e\mu^\epsilon \quad (2.7)$$

†Isto é válido se consideramos R como a razão entre as taxas de “decaimento” do $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ e do $\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$, o que é razoável, pois a configuração inicial é a mesma para ambas situações.

‡Neste texto utilizaremos $D = 4 - 2\epsilon$.

Tomamos o valor de $|A_0|^2$ e somamos sobre os possíveis estados de *spin* do quark e do antiquark e também sobre os estados de polarização do γ^* , não esquecendo de multiplicar ainda pelas três cores dos quarks [§], obtendo $\overline{|A_0|^2}$:

$$\overline{|A_0|^2} = \sum_{\lambda} 3L^{\mu\nu} \epsilon_{\mu}(\lambda) \epsilon_{\nu}(\lambda) \quad (2.8)$$

com:

$$L^{\mu\nu} = (e_q e_D)^2 (p_2)_{\alpha} (p_1)_{\beta} \text{Tr}(\gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu}) \quad (2.9)$$

A soma das polarizações é dada por:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(\lambda) \epsilon_{\nu}(\lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

(Note que termos proporcionais a q^{μ} não contribuem, uma vez que $q = p_1 + p_2$ e $p_1^2 = 0 = p_2^2$).

Utilizando a identidade:

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\alpha} \gamma_{\mu} = -2(1 - \epsilon) \gamma^{\alpha} \quad (2.11)$$

obtemos então:

$$\overline{|A_0|^2} = 8(e_q e_D)^2 (p_1 \cdot p_2) 3(1 - \epsilon) = 12(e_q e_D)^2 (1 - \epsilon) Q^2 \quad (2.12)$$

onde $q^2 = 2p_1 \cdot p_2 = Q^2 > 0$.

Em *leading order* (LO), a taxa de decaimento de $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ é dada por:

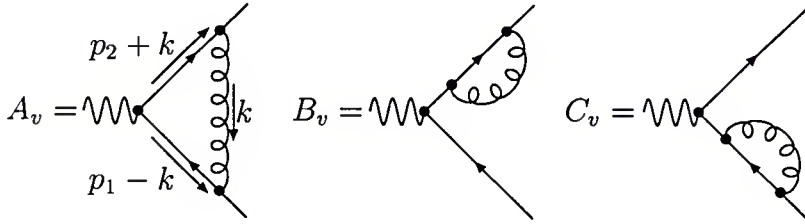
$$\Gamma_{LO} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2_0}{2Q} R_2 = 3e_q^2 \alpha Q \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\epsilon} \frac{\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} \quad (2.13)$$

onde Γ_{LO} é a taxa de decaimento em *leading order* (LO) e $\Gamma(x)$ é a função Gama. Para mais detalhes sobre a função Gama veja o Apêndice C.

2.1.1 Correções de Gluon Virtual para $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$

Consideramos agora as correções de um gluon virtual (v) para a amplitude A_0 , para o vértice e para cada perna externa de férmion (veja figura 2.2). As contribuições devem ser somadas e quadradas do seguinte modo:

$$|A_0 + V|^2 = \underbrace{|A_0|^2}_{\sim \alpha} + 2 \underbrace{\text{Re}[A_0 V^*]}_{\sim \alpha_s \alpha} + \underbrace{|V|^2}_{\sim \alpha_s^2 \alpha} \quad (2.14)$$


 Figura 2.2: Contribuições de um gluon virtual para a amplitude A_0

onde $V = A_v + B_v + C_v$. A correção de ordem mais baixa será dada pela interferência entre A_0 e V , que é de ordem $\alpha_s \alpha$.

Consideremos a amplitude A_v para a correção 1PI para o vértice $\gamma^* q \bar{q}$:

$$A_v = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{u}(p_2) (-ig_s \gamma_\beta T_{ij}^a) \frac{i \not{p}'_b}{p_b^2} (-ie e_q \gamma_\mu) \frac{i(-\not{p}'_a)}{(-p_a)^2} (-ig_s \gamma_\alpha T_{ji}^a) \frac{(-i)g^{\beta\alpha}}{k^2} v(-p_1) \epsilon^\mu \quad (2.15)$$

onde $p_a = p_1 - k$ e $p_b = p_2 + k$ e estamos utilizando o propagador do gluon no gauge de Feynman.

Devemos calcular $Re[2A_0 A_v^*]$ que, nesta notação significa que é somado sobre os spins finais dos férmions e sobre os estados de polarização do γ^* e ainda multiplicado pelo número de cores.

$$2A_0 A_v^* = -i(3)2C_F (g_{s(D)} e_D e_q)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma) p_1^\alpha p_a^\beta p_b^\rho p_2^\sigma}{p_a^2 p_b^2 k^2} \quad (2.16)$$

onde $C_F = T^a T^a$ (veja Apêndice A). Note a presença da constante de acoplamento forte em D dimensões $g_{s(D)}$, a qual será escrita como $g_{s(D)} \rightarrow g_s \mu^\epsilon$, mas, por conveniência, manteremos e_D . Lembrando que $2p_1 \cdot p_2 = Q^2$, temos que o numerador do integrando acima é dado por:

$$\mathcal{N} = 4(1 - \epsilon)[8(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) - 4Q^2 k \cdot (p_1 - p_2) - 2Q^4 - 2\epsilon Q^2 k^2] \quad (2.17)$$

Utilizamos a rotina *FeynCalc*[16] do *Mathematica* para calcular a integral em $d^D k$, obtendo o resultado:

$$\mathcal{I} = \frac{iQ^2}{\pi^2} (1 - \epsilon) \left[B_0(0, 0, 0) - \left(\frac{3}{4} + \frac{\epsilon}{2} \right) B_0(Q^2, 0, 0) - \frac{Q^2}{2} C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) \right] \quad (2.18)$$

[§]Na realidade apenas os estados de singletos de cor ($R\bar{R}$, $G\bar{G}$ ou $B\bar{B}$) podem ser formados a partir de um fóton (“branco”).

onde B_0 e C_0 são as funções escalares de 2 e 3 pontos de Passarino-Veltman, as quais são apresentadas em maiores detalhes no Apêndice D. Fazendo as substituições:

$$B_0(0, 0, 0) \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

$$B_0(Q^2, 0, 0) \rightarrow A \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \right) \quad (2.20)$$

$$C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{1}{Q^2} A \left(\frac{1}{\epsilon^2} \right) \quad (2.21)$$

onde:

$$A = \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \quad (2.22)$$

obtemos:

$$\mathcal{I} = \frac{iQ^2}{4\pi^2} (1-\epsilon) A \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \quad (2.23)$$

Ou melhor,

$$\begin{aligned} \overline{2A_0 A_v^*} &= -i(3)2C_F(g_s e_D e_q)^2 (\mu^2)^\epsilon \mathcal{I} \\ &= 12(e_D e_q)^2 (1-\epsilon) Q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F (\mu^2)^\epsilon A \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \\ &= B \overline{|A_0|^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde B é dado por

$$B = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \quad (2.25)$$

com $Q^2 = 2p_1 \cdot p_2 = q^2$.

Passemos agora para as correções de auto-energia do férmion que, como veremos, é zero desde que se considere que o férmion está na camada de massa, ou seja, $p^2 = 0$. A auto-energia do férmion, ver fig. 2.3, pode ser escrita como:

$$\Sigma(p) = -i \not{p} \overline{\Sigma}(p^2) \quad (2.26)$$

Desta forma, as amplitudes de B_v e C_v serão dadas por:

$$B_v = \overline{\Sigma}(p_1^2) A_0 \quad (2.27)$$

$$C_v = \overline{\Sigma}(p_2^2) A_0 \quad (2.28)$$

onde a forma explícita de Σ é:

$$\Sigma(p) = -g_s^2 C_F (\mu^2)^\epsilon \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha}{k^2 (p-k)^2}$$

$$\Sigma(p) = \text{---}\bullet\text{---}\overset{\text{gluon}}{\text{loop}}\text{---}\bullet\text{---}$$

Figura 2.3: Contribuição de um glúon virtual para o propagador do férmion.

e utilizamos novamente o *FeynCalc*, que nos forneceu:

$$\bar{\Sigma}(p^2) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F (\epsilon - 1) B_0(p^2, 0, 0) \quad (2.29)$$

Se consideramos que as partículas finais estão na camada de massa ($p^2 = 0$), temos $B_0(0, 0, 0) = 0$, concluindo que os diagramas B_v e C_v não contribuem no limite de massa zero. Assim, adicionando as correções virtuais a $|\overline{A_0}|^2$ teremos, em ordem α_s :

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_v}|^2 &= |\overline{A_0 + V}|^2 \\ &\approx |\overline{A_0}|^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto, a taxa de decaimento com correções virtuais de ordem α_s é dada por:

$$\Gamma_v = \Gamma_{LO} \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \right] \quad (2.31)$$

Podemos simplificar a equação acima expandindo $(-1)^\epsilon$ em torno de $\epsilon \sim 0$,

$$\begin{aligned} (-1)^\epsilon &= \exp \ln(-1)^\epsilon = \exp[\epsilon \ln(-1)] \\ &\approx 1 + \epsilon \ln(-1) + \frac{\epsilon^2}{2} \ln^2(-1) + \dots \\ &\approx 1 + i\pi\epsilon - \frac{\pi^2}{2}\epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

e tomamos a parte real:

$$\text{Re} [(-1)^\epsilon] \approx 1 - \frac{1}{2}\pi^2\epsilon^2. \quad (2.33)$$

Expandimos outro fator:

$$\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon) \approx 1 + \frac{\pi^2}{6}\epsilon^2$$

que podemos obter a partir da expansão de $\Gamma(1+x)$ para $x \rightarrow 0$ (para mais detalhes veja o Apêndice C).

Ficamos então com:

$$\Gamma_v = \Gamma_{LO} \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \frac{2\pi^2}{3} \right) \right] \quad (2.34)$$

2.1.2 Sobre as Divergências Infravermelhas

Consideremos um diagrama de Feynman genérico com n loops e seja k_i , $i = 1, \dots, n$ o momento interno do i -ésimo loop. A amplitude deste diagrama pode ser escrita como,

$$\mathcal{A}(g_j, p_l, \mu_j) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \mathcal{I}(g_j, p_l, k_i, \mu_j) \quad (2.35)$$

onde g_j é cada uma das constantes de acoplamento envolvidas, e μ_j é uma massa arbitrária que introduzimos para que g_j permaneça adimensional. E, obviamente, tanto \mathcal{A} quanto \mathcal{I} dependem dos momentos p_l externos.

Como a integração é feita em todo o espaço de momentos a amplitude \mathcal{A} pode conter divergências, tanto ultravioletas (UV) quanto infravermelhas (IV). Na regularização dimensional a dimensão do espaço-tempo D é estendida em torno de 4, e esta *continuação analítica* regulariza tanto divergências UV (se $D < 4$) quanto IV ($D > 4$). Podemos, grosseiramente, pensar que com $D < 4$ o volume do espaço de fase é diminuído e, como as divergências UV resultam do grande número de estados de altas energias, estas divergências são “suavizadas” conforme o volume do espaço de fase é reduzido (veja ref. [17]).

Já as divergências IV em \mathcal{A} resultam de singularidades no integrando \mathcal{I} , e quando estas singularidades são “colocadas” em um volume de espaço de fase maior, as divergências resultantes da integração são “suavizadas”.

Vejamos, por exemplo, uma integral do tipo $\int d^D k / (k^2)^2$, que é divergente infravermelha para $D \leq 4$, mas finita no IV para $D > 4$. Já o comportamento UV é justamente oposto.

Mas como lidar com ambas divergências? Começamos com funções de Green regularizadas em $D < 4$. Após renormalização temos funções de Green renormalizadas que são funções analíticas de D ¶ em alguma região do plano- D tal que $4 - \delta_1 \leq D \leq 4 + \delta_2$, com $\delta_{1,2} > 0$. Isto nos permite fazer a continuação analítica das funções de Green para $D > 4$, região do plano- D onde as divergências IV são regularizadas.

¶Note que D é tratada como uma variável complexa.

Por exemplo, no caso da integral escalar $C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0)$, (2.21), o pólo duplo em ϵ é totalmente de origem infravermelha e C_0 é finita no UV. Como dito anteriormente, as divergências IV são resultantes de singularidades nos integrandos \mathcal{I} , e a estrutura analítica do integrando depende, como veremos, das configurações dos momentos k_i e p_j . Vejamos a seguir um método para estudar a estrutura analítica dos diagramas de Feynman, através das equações de Landau e “visões físicas” das soluções destas equações.

Equações de Landau

Apresentamos a seguir uma aplicação do método de Landau [18] para estudo das propriedades analíticas dos diagramas de vértices. Tomando como exemplo o diagrama de vértice escalar, ou seja, $C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0)$, o método de análise emprega a parametrização de Feynman do integrando:

$$C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) \sim \int d^4k \int \frac{da_1 da_2 da_3 \delta(1 - \Sigma a_i)}{[\mathcal{D}(a_i, k)]^3} \quad (2.36)$$

com o denominador dado por (veja fig. 2.4), (veja as representações diagramáticas de C_0 no Apêndice D),

$$\mathcal{D} = a_1 k^2 + a_2(p_1 - k)^2 + a_3(p_2 + k)^2 + i\epsilon \quad (2.37)$$

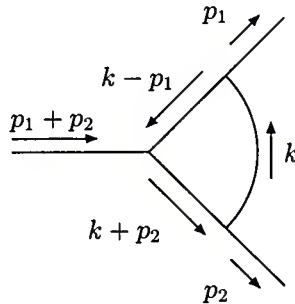


Figura 2.4: Representação diagramática de C_0 .

A função C_0 é definida em termos das integrais nos planos de k^μ e a_i . Como \mathcal{D} é quadrático nos momentos, pode haver dois pólos em cada componente do momento, quando as outras são fixas. Quando estes pólos são reais, \mathcal{D} se anula nos dois pontos do contorno. A integral de contorno pode ser deformada por rotação de Wick, tal que o contorno não cruze as singularidades, que são as soluções de $\mathcal{D} = 0$. E, desde

que as soluções de $\mathcal{D} = 0$ sejam separadas no plano (ou seja, dois pólos simples), o contorno pode ser deformado de modo que o integrando seja limitado em todos os pontos dentro do contorno, levando a um resultado finito (o que não nos interessa neste momento).

Por outro lado, quando o pólo do integrando é degenerado, o contorno não pode ser deformado e o resultado pode ser singular. Este é o chamado *pinch* no contorno que, traduzido matematicamente, é escrito como:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k^\mu} \right|_{\text{zeros de } \mathcal{D}} = 0 \quad (2.38)$$

Como a ordem de integração é irrelevante, devemos ter um pólo degenerado em cada componente do momento do *loop* para termos uma singularidade. Estas são as assim chamadas equações de Landau.

Aplicamos isto ao denominador de C_0 , o que nos conduz a:

$$a_1 k^\mu - a_2(p_1 - k)^\mu + a_3(p_2 + k)^\mu = 0 \quad (2.39)$$

Uma solução para estas equações é:

$$k = 0, \quad (a_2/a_1) = (a_3/a_1) = 0 \quad (2.40)$$

um outro conjunto de soluções é quando k é proporcional a um dos momentos externos:

$$k = \alpha p_1, \quad a_3 = 0, \quad a_1 \alpha = a_2(1 - \alpha) \quad (2.41)$$

$$k = -\beta p_2, \quad a_2 = 0, \quad a_1 \beta = a_3(1 - \beta) \quad (2.42)$$

com α e β reais e entre 0 e 1.

A solução (2.40) corresponde a k *soft* e as outras soluções (2.41) e (2.42) correspondem às configurações de momentos nas quais k é *colinear* a p_1 e p_2 , respectivamente. Estas configurações de momentos são as que causam singularidades no integrando e, conseqüentemente, divergências infravermelhas em C_0 .

Para tentar ilustrar uma configuração colinear de momentos neste caso em questão, introduzimos a interpretação física (de Coleman e Norton) de uma amplitude de espalhamento para frente, que utilizaremos também no fim deste capítulo.

Coleman e Norton [19] mostraram que as equações de Landau são condições

necessárias e suficientes para que os diagramas no contorno físico ^{||} tenham singularidades.

Eles provaram ainda que estas amplitudes terão singularidades no contorno físico se, e apenas se, o diagrama de Feynman relevante puder ter a interpretação física de um processo no espaço-tempo que conserva energia e momento e com todas as partículas internas reais, na camada de massa e movendo-se para frente no tempo.

Assim sendo, na região (ou contorno) física as equações de Landau correspondem a condições cinemáticas para que o evento representado por um dado diagrama ocorra classicamente [20]. Podemos considerar cada propagador interno como representando uma partícula de momento ℓ_i e também podemos assumir que os vértices nos quais a partícula é absorvida e emitida são separados por um intervalo no espaço-tempo dado por

$$\Delta x_i \sim a_i \ell_i \tag{2.43}$$

onde cada a_i é um parâmetro de Feynman de (2.37) e pode ser identificado, a menos fatores de proporcionalidade, com o tempo que a partícula i existe entre as colisões.

Apliquemos esta análise a uma das soluções da equação de Landau para C_0 , por exemplo, ao caso colinear (2.41). Os momentos das linhas internas podem ser obtidos de (2.37):

$$\ell_1 = k, \quad \ell_2 = p_1 - k, \quad \ell_3 = p_2 + k$$

Substituindo (2.41) em (2.43), obtemos os intervalos Δx_i

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &\sim a_1 k = a_2 \frac{1 - \alpha}{\alpha} k = a_2 \frac{1 - \alpha}{\alpha} \alpha p_1 \\ &\sim a_2 (1 - \alpha) p_1 \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &\sim a_2 (p_1 - k) = a_2 (p_1 - \alpha p_1) \\ &\sim a_2 (1 - \alpha) p_1 \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\Delta x_3 \sim a_3 (p_2 + k) = 0 \tag{2.46}$$

Vemos que $\Delta x_1 \sim \Delta x_2$ e que a linha interna associada ao momento $\ell_3 = p_2 + k$ tem um “tempo de vida” proporcional a a_3 que é zero, ou seja, esta linha é contraída para um ponto, ou seja, não há propagação para esta partícula. Isto resulta no diagrama reduzido da fig. 2.5 que descreve um processo físico em que

^{||}Coleman e Norton definem *contorno físico* como a porção do domínio da amplitude para a qual a amplitude é a transformada de Fourier do valor esperado do vácuo de um produto temporalmente ordenado de operadores de campo. E no contorno físico os momentos externos são reais, embora não necessariamente na camada de massa.

duas partículas sem massa de momentos k e $p_1 - k$ são criadas no vértice v_1 e propagam-se colinearmente até v_2 onde se combinam formando a partícula final de momento p_1 .

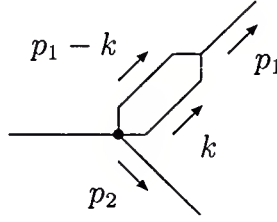


Figura 2.5: Diagrama reduzido correspondente a uma configuração colinear de momentos.

O pólo duplo em ϵ presente na correção de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para $\overline{|A_0|^2}$ vem, como já vimos, de:

$$C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{1}{Q^2} A\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$$

e podemos identificá-lo, graças à análise acima, como sendo uma sobreposição de divergências causadas por gluon virtual *soft* e gluon virtual colinear.

2.1.3 Correções de Gluon Real

Consideremos agora o caso da emissão (e) de um gluon real por um dos férmions do estado final. Novamente nos preocuparemos apenas com o “decaimento” do γ^* em q , \bar{q} e g . Os diagramas que contribuem para este processo são ilustrados na fig. 2.6.

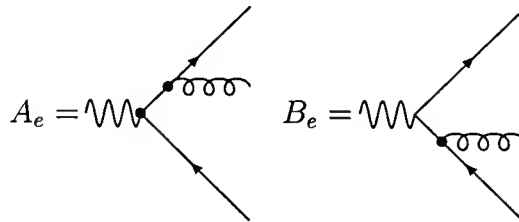


Figura 2.6: Contribuições de emissão gluon real

As amplitudes serão dadas por,

$$A_e = \bar{u}(p_2)(-ig_s\gamma^\nu T_{ij}^a)\left(\frac{i}{\not{p}_a}\right)(-iee_q\gamma^\mu)v(p_1)\epsilon_\mu\epsilon'_\nu \quad (2.47)$$

$$B_e = \bar{u}(p_2)(-iee_q\gamma^\mu)\left(\frac{i}{\not{p}_b}\right)(-ig_s\gamma^\nu T_{ij}^a)v(p_1)\epsilon_\mu\epsilon'_\nu \quad (2.48)$$

onde $p_{1(2)}$ é o momento do antiquark (quark) e p_3 é o momento do gluon e definimos também

$$\begin{aligned} p_a &= p_2 + p_3 \\ p_b &= p_1 + p_3 \\ q &= p_1 + p_2 + p_3 \\ E_{CM} &= Q = (q^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

A taxa de decaimento diferencial para 3 corpos em D dimensões é dada por

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_{CM}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d^{(2D-3)}R_3 \quad (2.50)$$

Definindo as frações adimensionais de energia:

$$x_i = \frac{2p_i \cdot q}{Q^2}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.51)$$

e, desprezando a massa dos produtos de decaimento, obtemos:

$$p_i \cdot p_j = \frac{1}{2}Q^2(1 - x_k) \quad (2.52)$$

E os invariantes de Mandelstam escrevem-se como

$$\begin{aligned} s &= (q - p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_3 = Q^2(1 - x_2) \\ t &= (q - p_1)^2 = 2p_2 \cdot p_3 = Q^2(1 - x_1) \\ u &= (q - p_3)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = Q^2(1 - x_3) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Com o equivalente da conservação de energia:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (2.54)$$

o que implica em $s + t + u = Q^2$.

Calculemos agora $|\overline{\mathcal{M}}|^2_e = \overline{|A_e|^2} + \overline{|B_e|^2} + 2\overline{A_e B_e^*}$, que é a amplitude ao quadrado somada sobre todas as configurações de *spins* finais dos férmions e sobre todas as polarizações do gluon final e levando o fator de cor em conta. Novamente, utilizamos o *FeynCalc* para calcular $|\overline{\mathcal{M}}|^2$.

$$\begin{aligned} \overline{|A_e|^2} &= 3 \frac{(g_s e_D e_q)^2}{p_a^4} (T_a T_a) \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma^\nu) p_2^\alpha p_a^\beta p_1^\rho p_a^\sigma \\ &= 3C_F (g_s e e_q)^2 8(1 - \epsilon)^2 \frac{1 - x_2}{1 - x_1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
 |\overline{B_e}|^2 &= 3 \frac{(g_s e_D e_q)^2}{p_b^4} (T_a T_a) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\sigma) p_b^\alpha p_1^\beta p_b^\rho p_2^\sigma \\
 &= 3 C_F (g_s e e_q)^2 8 (1 - \epsilon)^2 \frac{1 - x_1}{1 - x_2}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{2A_e B_e^*} &= 3 \frac{(g_s e_D e_q)^2}{(p_a^2 p_b^2)} (T_a T_a) \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\sigma) p_a^\alpha p_1^\beta p_b^\rho p_2^\sigma \\
 &= 3 C_F (g_s e e_q)^2 16 (1 - \epsilon) \left[\frac{(1 + \epsilon)(x_1 + x_2 - 1) - \epsilon x_1 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Obtemos assim,

$$|\overline{\mathcal{M}}|_e^2 = 3 C_F (g_s e_D e_q)^2 8 (1 - \epsilon) \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 - \epsilon(2 - x_1 - x_2)^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right]. \tag{2.58}$$

Devemos agora calcular a integral de espaço de fase para o decaimento em 3 corpos sem massa, em um espaço-tempo de dimensão D :

$$d^{(2D-3)} R_3 = \prod_{i=1}^3 \frac{d^{D-1} p_i}{(2\pi)^{D-1} (2E_i)} (2\pi)^D \delta^D(q - \Sigma p_i). \tag{2.59}$$

Integramos inicialmente em p_3 , usando,

$$\int d^{D-1} p_3 \delta^D(q - \Sigma p_i) = \delta(Q - \Sigma E_i)$$

Como as partículas finais são sem massa, podemos escrever :

$$d^{D-1} p_1 d^{D-1} p_2 = E_1^{D-2} dE_1 d\Omega_1 E_2^{D-2} dE_2 d\Omega_2$$

onde Ω_2 descreve a orientação de \vec{p}_2 em relação a \vec{p}_1 e Ω_1 a orientação de \vec{p}_1 em relação a algum eixo. Podemos integrar em Ω_1 , utilizando:

$$\int d\Omega_1 = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma[(D-1)/2]}$$

Se escolhermos o eixo na direção da partícula 1, definimos θ_{12} como sendo o ângulo entre as partículas 1 e 2, e também $z = \cos \theta_{12}$. Lembrando que $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 (1 - z) = Q^2 (x_1 + x_2 - 1)/2$ e que $x_i = 2E_i/Q$, podemos obter a relação:

$$z = 1 + 2 \frac{(1 - x_1 - x_2)}{x_1 x_2}. \tag{2.60}$$

Utilizando a relação (veja Apêndice B):

$$\int d^{D-1} p_2 = \frac{2\pi^{(D/2-1)}}{\Gamma[D/2-1]} \int dE_2 \int_{-1}^1 dz E_2^{D-2} (1 - z^2)^{(D/2-2)} \tag{2.61}$$

temos:

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{d^{D-1}p_1}{2E_1} \frac{d^{D-1}p_2}{2E_2} = \\ & = \frac{2^{D-3}\pi^{D-2}}{\Gamma(D-2)} \int \int dE_1 dE_2 (E_1 E_2)^{D-3} \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^{D/2-2} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Podemos utilizar a propriedade da função δ :

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{f'(x_0)} \delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0 \quad (2.63)$$

bem como as relações (2.52) e $p_i^2 = 0$, $i = 1, 2, 3$, para manipular a função δ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(Q - E_1 - E_2 - E_3)}{2E_3} &= \delta[(q - p_1 - p_2 - p_3)^2] \\ &= \delta\left[Q^2\left(1 - x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2(1 - z)\right)\right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Integrando em z , obtemos:

$$\int_{-1}^1 dz (1 - z^2)^{D/2-2} \frac{\delta(Q - E_1 - E_2 - E_3)}{2E_3} = \frac{2(1 - z^2)^{D/2-2}}{x_1x_2Q^2} \quad (2.65)$$

Fazemos então uma mudança de variáveis $E_i \rightarrow x_i$, através de:

$$dE_1 dE_2 (E_1 E_2)^{D-3} = \left(\frac{Q}{2}\right)^{2D-4} (x_1 x_2)^{D-3} dx_1 dx_2 \quad (2.66)$$

e o elemento infinitesimal do espaço de fase pode ser escrito como:

$$\frac{Q^2}{16(2\pi)^3} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^{2\epsilon} \frac{1}{\Gamma(2-2\epsilon)} \left(\frac{1-z^2}{4}\right)^{-\epsilon} (x_1 x_2)^{-2\epsilon} dx_1 dx_2 \quad (2.67)$$

não esquecendo que $z = z(x_1, x_2)$.

Para obter a taxa de decaimento total devemos integrar a equação nos valores de x_1 e x_2 cinematicamente possíveis. Dado que $z = \cos\theta_{12}$ temos que $-1 \leq z \leq 1$. Lembrando que z também pode ser escrito em termos de x_1 e x_2 , (2.60), temos que a região no espaço de fase para quarks e gluons sem massa é dada pela solução de

$$-1 \leq 1 + 2 \frac{(1 - x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \leq 1 \quad (2.68)$$

o intervalo de variação de x_2 será dado pela solução de

$$-1 \leq \frac{1 - x_1 - x_2}{x_1 x_2} \leq 0 \quad (2.69)$$

Obtemos então a região triangular (ver figura 2.7)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 1 \\ 1 - x_1 &\leq x_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.70)$$

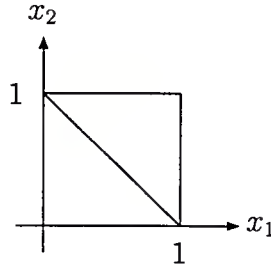


Figura 2.7: Região cinematicamente possível para o “decaimento” do γ^* em um par quark-antiquark e um gluon, todos sem massa

A “taxa de decaimento” de $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ pode ser escrita como:

$$\Gamma_e = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \Gamma_{LO} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(2-\epsilon)} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \left(\frac{1-z^2}{4} \right)^{-\epsilon} (x_1 x_2)^{-2\epsilon} F(x_1, x_2) \quad (2.71)$$

onde $F(x_1, x_2)$ é dado por:

$$F(x_1, x_2) = (1-\epsilon) \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 - \epsilon(2-x_1-x_2)^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right] \quad (2.72)$$

Estas integrais acima são trabalhosas se tentarmos resolvê-las diretamente, mas podem ser simplificadas inserindo-se uma nova variável y , $0 \leq y \leq 1$,

$$x_2 = 1 - yx_1$$

o que implica na mudança $dx_1 dx_2 \rightarrow x_1 dx_1 dy$ e nos deixa com duas integrais que variam de 0 a 1. E teremos:

$$F(x_1, y) = (1-\epsilon) \left\{ \frac{(1+y^2)x_1^2 - 2yx_1 + 1 - \epsilon[1-x_1(1-y)]^2}{x_1 y (1-x_1)} \right\} \quad (2.73)$$

Utilizando a relação

$$\int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

obtemos

$$\Gamma_e = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \Gamma_{LO} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-3\epsilon)} \left(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} \right) \quad (2.74)$$

que, após algumas manipulações, fica:

$$\Gamma_e = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \Gamma_{LO} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{57}{6} - \frac{2\pi^2}{3} \right) \quad (2.75)$$

Enfim, somando-se Γ_v (dado por (2.34)) e Γ_e obtemos a “taxa de decaimento” total de $\gamma^* \rightarrow$ hadrons até $\mathcal{O}(\alpha_s)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\gamma^* \rightarrow q\bar{q}) &= \Gamma_v + \Gamma_e \\ &= \frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \Gamma_{LO} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{LO} \frac{\alpha_s}{\pi}\end{aligned}\quad (2.76)$$

onde $C_F = 4/3$ e, com $\epsilon \rightarrow 0$, temos $\Gamma_{LO} = 3\alpha e_q^2 Q$. Note que há um cancelamento total entre as singularidades da contribuição de gluon virtual e as singularidades da contribuição de emissão de gluon real.

Como dito anteriormente, R pode ser calculada como a razão entre as taxas de decaimento e não é difícil mostrar que $\Gamma_t(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-) = \alpha Q$, ou seja, $\Gamma_{LO} = 3e_q^2 \Gamma_t(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)$. Temos, portanto:

$$R = \frac{\sum_f \Gamma_t(\gamma^* \rightarrow q\bar{q})}{\Gamma_t(\gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_f e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (2.77)$$

que, como esperado, é finita e, portanto, uma quantidade segura no infravermelho. Assim α_s/π é a correção a um *loop* para a produção de um par $q\bar{q}$ em colisões e^+e^-

Mostramos que a seção de choque $e^+e^- \rightarrow$ partons é segura no infravermelho em ordem α_s . Podemos analisar um pouco mais esta seção de choque e ver que é segura no IV em todas as ordens em teoria de perturbação. Para isso utilizamos as interpretações físicas de Coleman e Norton e o teorema óptico, que apresentamos brevemente a seguir.

Diagramas Cortados e o Teorema Óptico

Um modo conveniente de se organizar os cálculos dos diagramas que contribuem para o módulo ao quadrado de uma amplitude é através dos diagramas cortados, nos quais combinamos as contribuições \mathcal{M} e \mathcal{M}^* em um único diagrama para $|\mathcal{M}|^2$ com um corte representando o estado final [14]. Para se calcular estes diagramas cortados utilizam-se regras de Feynman modificadas (ver fig. 2.8): o diagrama para \mathcal{M}^* tem todas as setas das linhas de férmions revertidas e os sinais todos os momentos são invertidos; as linhas de férmions cortadas são representadas na integral do diagrama cortado pelos fatores $(\not{p}_j + m_j)(2\pi)\delta(p_j^2 - m_j^2)$. Para linhas de bósons vetoriais cortadas toma-se o fator acima mas com $(\not{p}_j + m_j)$ trocado pelas projeções de spin.

Como exemplo, vejamos, na ordem dominante, o diagrama cortado que contribui para a seção de choque total $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, dado na fig. 2.9.

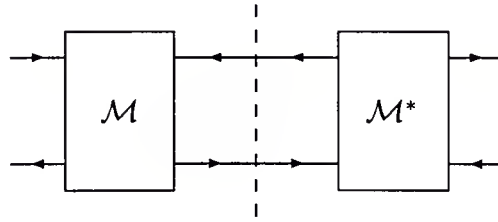


Figura 2.8: Diagramas cortados, o corte vertical representa o estado final.

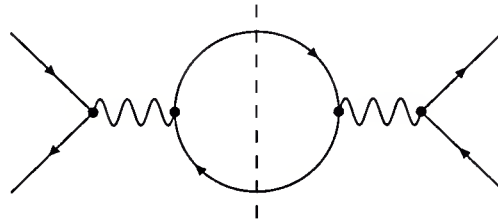


Figura 2.9: Diagrama de Born cortado para a aniquilação e^+e^- .

Da unitariedade da matriz-S podemos tirar uma relação interessante para os diagramas cortados: a soma de todos os cortes de um diagrama com momentos externos fixos é igual a duas vezes a parte imaginária do mesmo diagrama sem os cortes, ou seja,

$$\sum_c \Gamma_c = 2 \cdot \text{Im } \Gamma \tag{2.78}$$

Como consequência desta relação temos o Teorema Óptico que diz que a seção de choque total (que, a menos de fatores, é igual a $\sum \Gamma_c$) é proporcional à parte imaginária da amplitude de espalhamento para frente (*forward*, dada por Γ). Assim, por exemplo, a seção de choque total para a aniquilação e^+e^- é proporcional a parte imaginária da amplitude de espalhamento para frente da fig. 2.10.

Segurança no IV da Seção de Choque e^+e^-

Agora passemos para a análise da seção de choque total para a aniquilação e^+e^- . Se o diagrama da fig. 2.10 for seguro no IV, pelo Teorema Óptico, a seção de choque total também será. Como já vimos anteriormente, Coleman e Norton provaram que as amplitudes possuem singularidades no contorno físico **somente se** o diagrama de



Figura 2.10: Amplitude de espalhamento para frente $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, com um estado intermediário de multi-partículas

Feynman relevante puder ter a interpretação física de um processo no espaço-tempo que conserva energia e momento, com todas as partículas internas reais, na camada de massa e movendo-se para frente no tempo.

Entretanto, uma interpretação física deste tipo para o diagrama da fig. 2.10 consistiria da criação de um conjunto de diversas partículas na camada de massa a partir de um γ^* de momento q **. Estas partículas se propagariam livremente por uma distância finita e então se aniquilariam formando um γ^* de momento q novamente.

Mas o que ocorre é que uma vez que as partículas são criadas da aniquilação estas podem ser emitidas em todas as direções e nunca mais se encontrarão. E, conseqüentemente, não se aniquilarão para formar o γ^* novamente. Não há, portanto, uma interpretação física consistente para o diagrama da fig. 2.10 e se não há interpretação física não há singularidades. Conclusão, o diagrama da fig. 2.10 e, pelo Teorema Óptico, a seção de choque total $e^+e^- \rightarrow$ partons são seguros no IV em todas as ordens de teoria de perturbação[14].

**Obviamente, γ^* foi formado da aniquilação e^+e^- .

Capítulo 3

Correções das Funções de Distribuição

O Espalhamento Inelástico Profundo (EIP) foi o primeiro e talvez mais importante teste da QCD perturbativa. Consistia, originalmente, da colisão de um feixe de elétrons com alvo fixo de nucleons. No modelo a partons, podemos descrever o EIP como a interação do elétron com os partons carregados do alvo, mediante troca de γ^* . O nome Espalhamento Inelástico Profundo, na verdade, designa uma grande diversidade de processos que podemos descrever, genericamente, tal como na fig. 3.1.

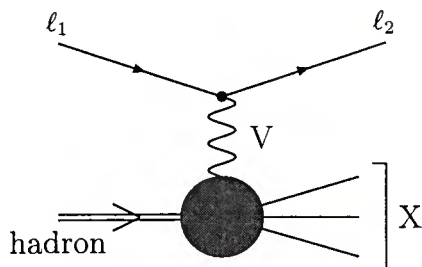


Figura 3.1: O Espalhamento Inelástico Profundo

Onde o lepton ℓ_1 é, em geral, um neutrino ou um lepton carregado, o boson V pode ser γ^* , Z ou W , e o lepton ℓ_2 deve ser carregado para que possa ser detetado.

Os primeiros experimentos [5] de colisão altamente inelástica de elétron– próton em fins da década de 60 serviram, inicialmente, para verificar que os nucleons eram compostos de partículas pontuais, os partons, através da observação do *scaling* aproximado de Bjorken [6]. Também verificou-se que os partons carregados eram férmions através da relação de Callan–Gross. A fração de momento dos partons carregados, é aproximadamente 0.5, o que levava a se pensar na existência de partons neutros. Identificar os partons carregados com quarks e os neutros com gluons foi um dos fatos que contribuiu para se escolher a QCD como a teoria quântica de

campos para as interações fortes.

Mais tarde, experimentos mais precisos de EIP serviram para observar a violação de *scaling*, tal como previsto pela QCD. Atualmente, a análise das funções de estrutura de espalhamento inelástico determina as distribuições de momento dos diversos partons nos hadrons, e estas distribuições são utilizadas como dados de entrada para se calcular seções de choque de colisões hadrônicas em altas energias [21].

3.1 Espalhamento Inelástico $e-N$

Podemos escrever a seção de choque para o diagrama da fig. 3.2 como:

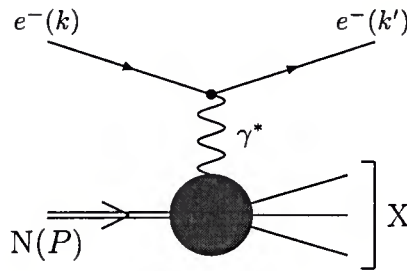


Figura 3.2: O Espalhamento Inelástico elétron-núcleon

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \frac{e^4}{Q^4} (4\pi M) L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \quad (3.1)$$

onde M é a massa do nucleon, s é o quadrado da energia de CM, e a virtualidade do γ^* é dada por $q^2 = -Q^2 < 0$. As informações sobre os vértices de interações estão nos tensores $L^{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$. No tensor $L^{\mu\nu}$ estão as informações da interação lepton- γ^* , que podemos obter diretamente das regras de Feynman da QED:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \bar{u}(k') \gamma^{\mu} u(k) \bar{u}(k) \gamma^{\nu} u(k') \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(k' \gamma^{\mu} k \gamma^{\nu}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

O tensor $W^{\mu\nu}$ contém as informações da interação γ^* -nucleon. Nossa informação sobre $W^{\mu\nu}$ vem das simetrias que devem ser respeitadas pela amplitude, *e. g.* invariância de Lorentz. $W^{\mu\nu}$ pode depender apenas dos momentos P e q , ou melhor das possíveis combinações lineares dos tensores: $P_{\mu}P_{\nu}$, $P_{\mu}q_{\nu}$, $P_{\nu}q_{\mu}$, $q_{\mu}q_{\nu}$, $g_{\mu\nu}$ e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^{\alpha}q^{\beta}$. Mas como estamos considerando o caso eletromagnético, devemos eliminar a combinação totalmente antissimétrica, que viola paridade. Esperamos ainda

que haja conservação de corrente, ou seja, $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ e $q_\nu W^{\mu\nu} = 0$. Estas condições de simetria limitam bastante a forma de $W^{\mu\nu}$, o que nos leva a:

$$W_{\mu\nu} = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(\nu, Q^2) + \left(P_\mu - q_\mu \frac{P \cdot q}{q^2} \right) \left(P_\nu - q_\nu \frac{P \cdot q}{q^2} \right) \frac{W_2(\nu, Q^2)}{M^2} \quad (3.3)$$

onde W_1 e W_2 são as funções de estrutura que dependem de dois invariantes cinemáticos:

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} = E - E' \quad (3.4)$$

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.5)$$

ν é a energia perdida pelo elétron e θ é o ângulo de espalhamento do elétron no referencial de laboratório. A seção de choque duplo diferencial será então:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{4\alpha E'^2}{Q^4} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.6)$$

onde $d\Omega' = d\phi d(\cos \theta)$.

Para se obter experimentalmente W_2 , por exemplo, mede-se a seção de choque acima para ângulo de espalhamento θ pequeno, situação na qual a contribuição para a seção de choque virá principalmente de W_2 . Os primeiros experimentos da colaboração SLAC-MIT [5] mediram a seção de choque para o espalhamento de elétrons a energias de 7 a 17 GeV por alvos de hidrogênio a ângulos de espalhamento de 6° e 10° . Mediram νW_2 como função da razão ν^2/q^2 apenas, ou seja, o *scaling* de Bjorken [6].

Em geral, são definidos a variável de Bjorken x

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (3.7)$$

e os fatores de forma dimensionais

$$F_1(x, Q^2) \equiv 2M W_1(\nu, Q^2) \quad (3.8)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2) \quad (3.9)$$

O *scaling* de Bjorken é um reflexo do fato do γ^* estar espalhando constituintes *pontuais*, pois, se não fosse assim, as funções de estrutura dependeriam da razão Q/Q_0 , onde $1/Q_0$ representaria a escala de comprimento característica do tamanho dos constituintes.

Introduzimos então as idéias principais do *modelo a partons*. Neste contexto, o EIP é melhor formulado no referencial de ‘momento infinito’ no qual o nucleon tem

quadrimento $P^\mu \approx (P, 0, 0, P)$ com $P \gg M$. Consideramos apenas o caso em que o γ^* espalha um parton, partícula pontual que podemos identificar com o quark. Cada parton move-se paralelamente ao nucleon e carrega momento $p_\mu = yP_\mu$, com $0 \leq y \leq 1$. Ver fig. 3.3.

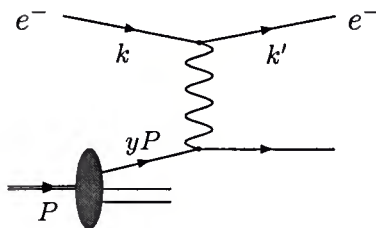


Figura 3.3: O Espalhamento Inelástico elétron-núcleon no modelo a partons

Os quarks finais recombina-se de modo a respeitar o confinamento, ou seja, formando hadrons. Os detalhes da formação de hadrons dependem do comportamento da QCD a longas distâncias, cujo tratamento é não-perturbativo e está além do objetivo deste trabalho. Para nossos interesses, porém, basta que consideremos apenas a soma dos estados hadrônicos finais e que nos concentremos, portanto, no subprocesso partônico.

Em nível de árvore, o subprocesso partônico pode ser reduzido a $\gamma^*q \rightarrow q$. Desprezando-se a massa dos quarks, temos, para o quark final:

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= 0 = 2p \cdot q - Q^2 \\ &= y(2P \cdot q) - Q^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

ou seja,

$$y = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \equiv x. \tag{3.11}$$

Assim, nesta ordem de teoria de perturbação, x pode ser identificado com a fração do momento do nucleon carregado pelo parton espalhado.

No modelo a partons assume-se a existência de uma função de distribuição de partons $\phi_i(y)$, tal que $\phi_i(y) dy$ é a probabilidade de se encontrar um parton de espécie i com fração de momento entre y e $y + dy$. Denotando a seção de choque para o subprocesso partônico numa ordem arbitrária em teoria de perturbação por $d\hat{\sigma}_i$, a seção de choque é dada pela convolução:

$$d\sigma = \sum_i \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \phi_i(y) d\hat{\sigma}_i \tag{3.12}$$

na qual podemos definir os limites da integral lembrando que o parton espalhado é um estado de massa invariante positiva:

$$(p + q)^2 = y(2P \cdot q) - Q^2 \geq 0$$

temos $y \geq x$ e, então, $y_{min} = x$ e, obviamente, $y_{max} = 1$ pois é a fração de momento máxima que um parton pode carregar.

Podemos escrever o análogo de (3.1) para o subprocesso,

$$d\hat{\sigma}_i = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} \hat{W}_{\mu\nu}^i \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \quad (3.13)$$

onde: $\hat{s} = (p + k)^2 = 2p \cdot k = ys$. Note que utilizamos a notação na qual as quantidades com “ ^ ” são aquelas relacionadas com o processo elementar partônico.

Substituindo (3.13) em (3.12) e comparando com (3.1), vemos que o tensor $W_{\mu\nu}$ pode ser escrito como:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y} \phi_i(y) \hat{W}_{\mu\nu}^i \quad (3.14)$$

Examinando (3.13) vemos que $2\hat{s}$ é o fator de fluxo e $1/Q^4$ vem do quadrado do propagador do γ^* . As informações do vértice leptônico estão condensadas em $L_{\mu\nu}$ e temos também o espaço de fase do elétron espalhado. Concluimos que o tensor $\hat{W}_{\mu\nu}^i$ deve conter as informações do vértice γ^*qq e o espaço de fase do(s) parton(s) espalhado(s). Podemos escrever então:

$$\hat{W}_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \int d\hat{X} \langle p | J_\mu^i | \hat{X} \rangle \langle \hat{X} | J_\nu^i | p \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p + q - \hat{X}) \quad (3.15)$$

com a amplitude para o processo $\gamma^*q \rightarrow q$ em nível de árvore dado por:

$$\langle p | J_\mu^i | \hat{X} \rangle = -ie_q \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \quad (3.16)$$

sendo que a integral em $d\hat{X}$ indica que estamos somando sobre os estados finais, neste caso, somamos sobre os *spins* e cores do quark final. Tomamos também a média sobre os *spins* (já presente como o fator 1/2 na equação (3.15)) e cores do quark inicial. Portanto,

$$\hat{W}_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} (ee_q)^2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - p') \text{Tr}(p' \gamma_\mu p' \gamma_\nu) \quad (3.17)$$

a integral de espaço de fase de 1 partícula pode ser simplificada (veja Apêndice B)

$$R_1 = \delta[(p + q)^2] \quad (3.18)$$

Calculando o traço, obtemos:

$$\hat{W}_{\mu\nu}^i = 2(ee_q)^2 (2y^2 P_\mu P_\nu + yq_\mu P_\nu + yq_\nu P_\mu - yg_{\mu\nu} P \cdot q) \frac{2\pi}{2P \cdot q} \delta(y-x) \quad (3.19)$$

que substituída em (3.14) e comparada com (3.3) nos fornece as funções de estrutura $W_{1,2}$ (ou $F_{1,2}$) escritas em termos das funções de distribuição de partons, ou seja,

$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= \sum_q (ee_q)^2 [q(x) + \bar{q}(x)] \\ F_2(x, Q^2) &= \sum_q (ee_q)^2 x [q(x) + \bar{q}(x)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

já que, neste caso, só temos as funções de distribuição de q 's e \bar{q} 's

Podemos notar que $F_2 = xF_1$, esta é a relação de Callan–Gross que é observada experimentalmente e é evidência de que os partons carregados têm spin 1/2.

3.2 Correções para as funções de distribuição

Nesta seção calcularemos as correções de NLO para as funções de distribuição. Para se definir as funções de distribuição de quarks em todas as ordens de QCD perturbativa é convencional utilizar F_2 , através da expressão,

$$F_2(x, Q^2) \equiv \sum_q (ee_q)^2 x q(x, Q^2) \quad (3.21)$$

Numa notação mais abreviada, $q(x, Q^2)$ na equação acima representa tanto quarks quanto antiquarks. Naturalmente, em $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$, temos $q(x, Q^2) = q_0(x)$ que é a definição de (3.20). Se definimos $z \equiv x/y$ e tendo em vista (3.11), podemos escrever:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) \quad (3.22)$$

A partir do tensor $W_{\mu\nu}$, (3.3), são definidas as funções de estrutura transversal e longitudinal em D dimensões:

$$W_T \equiv -g^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = (3 - 2\epsilon)W_1 - \frac{\nu^2}{Q^2} W_2 \quad (3.23)$$

$$W_L \equiv P^\mu P^\nu W_{\mu\nu} = -\frac{M^2 \nu^2}{Q^2} W_1 + \frac{M^2 \nu^4}{Q^4} W_2 \quad (3.24)$$

Das equações acima podemos escrever W_2 em termos de W_T e W_L e lembrando da definição de F_2 , (3.9), temos:

$$(1 - \epsilon) \frac{1}{M} F_2 = xW_T + 4 \frac{x^3}{Q^2} (3 - 2\epsilon) W_L \quad (3.25)$$

Contraindo $(-g^{\mu\nu})$ com (3.14), obtemos W_T :

$$W_T = \frac{1}{4\pi M} \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y} \phi_i(y) \hat{W}_T^i \quad (3.26)$$

e contraindo (3.14) com $P^\mu P^\nu = p^\mu p^\nu / y^2$, obtemos:

$$W_L = \frac{1}{4\pi M} \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y^3} \phi_i(y) \hat{W}_L^i \quad (3.27)$$

Para calcular as correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para funções de distribuição de quarks devemos levar em consideração todas as possíveis contribuições, ou seja, diagramas de gluon virtual, de emissão de gluon real e diagramas de gluon emitido no estado inicial.

3.2.1 Correções Virtuais

Os diagramas que contribuem para as correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ são os de interferência do nível de árvore com os de gluon virtual (veja fig. 3.4).

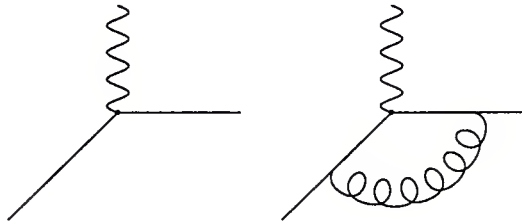


Figura 3.4: O diagrama de EIP em nível de árvore e o de correção de um gluon virtual. Denotamos estes diagramas por \mathcal{M}_0 e \mathcal{M}_v , respectivamente.

Como vimos anteriormente, na regularização dimensional a auto-energia do quark em $\mathcal{O}(\alpha_s)$ é zero para quarks sem massa, assim o problema se reduz a calcular as correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para o vértice γ^* -quarks.

Podemos repetir a análise que fizemos no capítulo anterior para obter (2.25). Para \mathcal{M}_0 dado pela Eq. (3.16), a interferência entre o diagrama de nível de árvore e o de 1 loop será dado por:

$$\overline{|2\mathcal{M}_0^* \mathcal{M}_v|^2} = 2\mathcal{B} \overline{|\mathcal{M}_0|^2} \quad (3.28)$$

como vimos anteriormente, \mathcal{B} é, em $\mathcal{O}(\alpha_s)$, dado por:

$$\mathcal{B} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \quad (3.29)$$

onde $C_F = 4/3$ e $q^2 = -2p \cdot p' = -Q^2 < 0$, dado que o subprocesso que estamos considerando é $\gamma^*(q) + q(p) \rightarrow q(p')$. Note que aqui fizemos o *crossing* dos momentos de A_0 para os de \mathcal{M}_0 deste modo: $p_1 \rightarrow -p$, $p_2 \rightarrow p'$.

Ficamos com:

$$\mathcal{B} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 \right) \quad (3.30)$$

Expandindo o fator:

$$\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon) \approx 1 + \frac{\pi^2}{6}\epsilon^2$$

obtemos:

$$\mathcal{B} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 - \frac{\pi^2}{3} \right) \quad (3.31)$$

Inserindo estas correções virtuais em (3.22), obtemos a função de estrutura com as correções virtuais:

$$\begin{aligned} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \Big|_v &= \sum_q (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) \\ &\times \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Já analisamos no capítulo anterior a estrutura analítica das correções de vértice e vimos que estas singularidades são do tipo colinear e *soft*.

3.2.2 Correções de Emissão de Gluon Real

Os diagramas que contribuem para a emissão de um glúon real, ou seja, $\gamma^*(q) + q(p) \rightarrow q(p') + g(k)$ são ilustrados na fig. 3.5. Calcularemos estas contribuições para F_2 através de (3.25), (3.26) e (3.27).

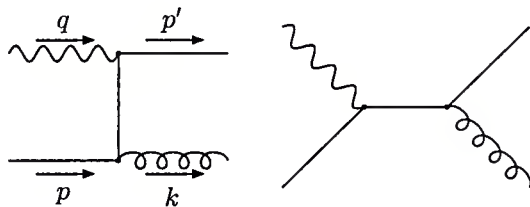


Figura 3.5: Diagramas de emissão de um glúon real

A amplitude para a emissão (e) de um glúon real é dada por:

$$\mathcal{M}_e = -g_s ee_q \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} T^a \gamma^\nu + T^a \gamma^\nu \frac{(\not{p}' + \not{q})}{\hat{s}} \gamma^\mu \right] u(p) \epsilon_\mu \epsilon_\nu^a \quad (3.33)$$

Devemos calcular o módulo ao quadrado da expressão acima, tomando a média sobre os *spins* e cores do quark inicial. Somamos ainda sobre as polarizações transversais do gluon, já que é real e sobre as cores e *spins* do quark final. E somamos sobre as polarizações transversais do γ^* , obtendo o elemento de matriz que dá a contribuição transversal do γ^* :

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_e|_T^2} &= \frac{(g_s e e_q)^2}{2} \text{Tr} \left\{ \not{p}' \left[\gamma^\mu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{(\not{p}' + \not{q})}{\hat{s}} \gamma^\mu \right] \not{p}' \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\gamma_\nu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{(\not{p}' + \not{q})}{\hat{s}} \gamma_\nu \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Calculando, por exemplo, o termo proporcional a $1/\hat{t}^2$ em D dimensões (veja Apêndice B):

$$\begin{aligned} &\frac{(g_{s(D)} e_D e_q)^2}{2} \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\mu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\nu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \gamma_\mu \right] \\ &= -(g_{s(D)} e_D e_q)^2 \frac{(1 - \epsilon)}{\hat{t}^2} \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\mu \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \not{p}' \frac{(\not{p}' - \not{k})}{\hat{t}} \gamma_\mu \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

lembrando que os quarks sem massa e os gluons estão na camada de massa, $\not{p}^2 = \not{p}'^2 = \not{k}^2 = 0$, ficamos com

$$\begin{aligned} &= -(g_{s_D} e_D e_q)^2 \frac{(1 - \epsilon)}{\hat{t}^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{k}' \not{p}' \not{k}' \gamma_\mu] \\ &= -(g_{s_D} e_D e_q)^2 \frac{(1 - \epsilon)}{\hat{t}^2} \text{Tr} [-2 \not{p}' \not{k}' \not{p}' \not{k}' + 2\epsilon \not{p}' \not{k}' \not{p}' \not{k}'] \\ &= 2(g_{s_D} e_D e_q)^2 \frac{(1 - \epsilon)^2}{\hat{t}^2} \text{Tr} [\not{p}' \not{k}' \not{p}' \not{k}'] \end{aligned} \quad (3.36)$$

e com os invariantes de Mandelstam $\hat{s} = 2p' \cdot k$ e $\hat{t} = -2p \cdot k$, a expressão torna-se:

$$4(g_{s(D)} e_D e_q)^2 \frac{(1 - \epsilon)^2}{\hat{t}^2} \hat{s}(-\hat{t}) \quad (3.37)$$

Calculando os outros termos analogamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_e|_T^2} &= 16\pi \alpha_s C_F (e e_q)^2 (1 - \epsilon) (\mu^2)^\epsilon \\ &\quad \times \left[(1 - \epsilon) \left(\frac{\hat{s}}{-\hat{t}} + \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} \right) + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} + 2\epsilon \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Obtemos a contribuição de quark no estado inicial (ou de emissão de gluon real) para \hat{W}_T integrando o elemento de matriz acima no espaço de fase de duas partículas

(veja Apêndice B). Para facilitar a integração vamos escrever os invariantes de Mandelstam em termos de $z = x/y$ e $v = (1 + \cos \theta)/2$, onde θ é o ângulo de espalhamento no CM.

$$\hat{s} = \frac{Q^2(1-z)}{z}, \quad \hat{t} = \frac{-Q^2}{z}(1-v), \quad \hat{u} = \frac{-Q^2}{z}v \quad (3.39)$$

Como já vimos, o tensor $\hat{W}_{\mu\nu}^i$ em (3.14) é o quadrado da amplitude multiplicado pelo fator de espaço de fase do parton espalhado. Analogamente, definimos

$$\begin{aligned} \hat{W}_T^q &= \overline{|\mathcal{M}_e|_T^2} d^{D-2}R_2 \\ &= 2\alpha_s C_F (ee_q)^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{(1-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon \int_0^1 dv [v(1-v)]^{-\epsilon} \\ &\times \left[(1-\epsilon) \left(\frac{1-z}{1-v} + \frac{1-v}{1-z}\right) + \frac{2z}{(1-z)(1-v)} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde R_2 é o espaço de fase das duas partículas do estado final, q e g .

Integrando em v , obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{W}_T^q &= 2\alpha_s C_F (ee_q)^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon \\ &\times \left[-\frac{1}{\epsilon} \frac{1+z^2}{1-z} + 3 - z - \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} - \frac{7}{2} \epsilon \frac{1}{1-z} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Calculamos agora a contribuição das polarizações longitudinais do γ^* , ou seja, \hat{W}_L^q . Tomamos o tensor \mathcal{M}_e^μ , que é equivalente à amplitude \mathcal{M}_e com o vetor de polarização do γ^* fatorado

$$\mathcal{M}_e^\mu = -g_s ee_q \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \frac{\not{p}' - \not{k}}{\hat{t}} T^a \gamma^\nu + T^a \gamma^\nu \frac{\not{p}' + \not{q}}{\hat{s}} \gamma^\mu \right] u(p) \varepsilon_\nu^a \quad (3.42)$$

Contraíndo \mathcal{M}_e^μ com p_μ :

$$p_\mu \mathcal{M}_e^\mu = g_s ee_q T^a \bar{u}(p') \frac{\not{p}' \not{k}' \gamma^\nu}{\hat{t}} T^a u(p) \varepsilon_\nu^a. \quad (3.43)$$

O módulo ao quadrado da expressão acima, com as mesmas somas e médias tomadas sobre *spins*, cores e polarizações para se obter $\overline{|\mathcal{M}_e|_L^2}$, é dado por:

$$\overline{|\mathcal{M}_e|_L^2} = 8\pi \alpha_s C_F (ee_q)^2 (1-\epsilon) (\mu^2)^\epsilon Q^2 \hat{u} \quad (3.44)$$

utilizando as relações (3.39) na equação acima e integrando no espaço de fase de 2 partículas, obtemos a função de estrutura longitudinal em ordem α_s para o subprocesso em que o γ^* interage com um q do hadron:

$$\begin{aligned} \hat{W}_L^q &= \overline{|\mathcal{M}_e|_L^2} d^{D-2}R_2 \\ &= \alpha_s C_F (ee_q)^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (1-\epsilon) \left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon \frac{1}{2z} \end{aligned} \quad (3.45)$$

utilizando as equações (3.26) e (3.27), obtemos W_T e W_L que, substituídos em (3.25), nos fornece a correção de ordem α_s para o subprocesso em que o γ^* interage com um q do hadron:

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} \Big|_q &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \sum_q (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \\ &\quad \left(\frac{z}{1-z} \right)^\epsilon \times \left[-\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right) + 3 - z - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{2}\epsilon \left(\frac{1}{1-z} \right) + 3z \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Utilizamos as distribuições ‘+’ para deixar as singularidades em ϵ explícitas. Neste caso utilizamos a identidade (ver Apêndice E)

$$\left(\frac{z}{1-z} \right)^\epsilon \frac{1}{1-z} \approx -\frac{1}{\epsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} - \epsilon \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ + \epsilon \frac{\ln z}{1-z} \quad (3.47)$$

e a expansão

$$\left(\frac{z}{1-z} \right)^\epsilon \approx 1 + \epsilon \ln \frac{z}{1-z} \quad (3.48)$$

obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} \Big|_q &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \sum_q (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \\ &\quad \times \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} \delta(1-z) - \frac{1}{\epsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{\epsilon} \delta(1-z) + (1+z^2) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right] + 3 + 2z - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} \delta(1-z) \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Podemos facilmente estudar as singularidades presentes na expressão acima, lembrando que a amplitude deste processo possui um termo proporcional a $1/\hat{t}$, ou seja,

$$\mathcal{M}_e \sim \frac{1}{2p \cdot k} \quad (3.50)$$

Supondo que o quark se mova na direção do eixo z , e que o gluon seja espalhado no plano y - z com ângulo θ em relação a z , podemos escrever os momentos como:

$$\begin{aligned} p &= (E_p, 0, 0, E_p) \\ k &= (E_k, 0, E_k \sin \theta, E_k \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Temos então:

$$\mathcal{M}_e \sim \frac{1}{2E_p E_k (1 - \cos \theta)} \quad (3.52)$$

na qual teremos singularidades em $E_k \rightarrow 0$, ou seja, quando o gluon for emitido com energia muito baixa (*soft*), ou então na mesma direção do quark incidente $\theta = 0$ (colinear).

3.2.3 Correções de Gluon Inicial

Os diagramas que contribuem para $\gamma^*(q) + g(k) \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2)$ são ilustrados na fig. 3.6

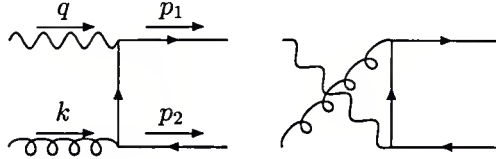


Figura 3.6: Diagramas de $\gamma^*(q) + g(k) \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2)$

Fazendo o *crossing* a partir de $\gamma^*q \rightarrow gq$, com as trocas de momentos

$$q \rightarrow q, \quad p' \rightarrow p_1, \quad k \rightarrow -k, \quad p \rightarrow -p_2$$

que implicam na troca das variáveis de Mandelstam:

$$\hat{s} \rightarrow \hat{u}, \quad \hat{t} \rightarrow \hat{t}, \quad \hat{u} \rightarrow \hat{s}$$

$|\overline{\mathcal{M}}_i|_T^2$ será proporcional a (3.38), com a troca de variáveis de Mandelstam acima e com um sinal negativo geral vindo do *crossing* do férmion. Tomando a amplitude ao quadrado, com as médias sobre as cores dos gluons (8) e suas polarizações transversais $(D - 2)^*$ e somada sobre as cores dos quarks finais.

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_i|_T^2 &= 8\pi \alpha_s (ee_q)^2 (\mu^2)^\epsilon \\ &\times \left[(1 - \epsilon) \left(\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right) - \frac{2\hat{s}Q^2}{\hat{u}\hat{t}} - 2\epsilon \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Novamente, escrevemos os invariantes de Mandelstam em termos de z e v , obtendo (3.39) e integramos no espaço de fase de duas partículas

$$\begin{aligned} \hat{W}_T^g &= \int |\overline{\mathcal{M}}_i|_T^2 d^{D-2}R_2 \\ &= 2(ee_q)^2 \alpha_s [z^2 + (1 - z)^2] \left(-\frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} + \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \frac{1 - z}{z} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

*Em um espaço-tempo de D dimensões temos uma dimensão temporal, uma dimensão espacial longitudinal, e, portanto, $D - 2$ dimensões espaciais transversais.

E, por fim, para calcular \hat{W}_L^g repetimos o mesmo processo para obter \hat{W}_T^g . Tomamos o tensor \mathcal{M}_i^μ , que representa a amplitude \mathcal{M}_i sem o vetor de polarização do γ^* , e tomamos o módulo ao quadrado de $\mathcal{M}_i^\mu k_\mu$, fazendo as mesmas somas e médias de *spins*, cores e polarizações que fizemos para obter $|\overline{\mathcal{M}_i}|_T^2$. Finalmente integramos no espaço de fase de duas partículas:

$$\hat{W}_L^g = \int |\overline{\mathcal{M}_i}|_L^2 d^{D-2}R_2 = (ee_q)^2 \alpha_s Q^2 \frac{1-z}{z} \quad (3.55)$$

Obtemos assim as contribuições para F_2 devido à correção de gluon inicial.

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} \Big|_g &= \sum_q (ee_q)^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{(1-\epsilon)} \int_x^1 \frac{dy}{y} g_0(y) \left\{ 6z(1-z) \right. \\ &+ \left. [z^2 + (1-z)] \left[-\frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} + \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \frac{1-z}{z} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde $g_0(x)$ é a distribuição de gluons nua.

Note que o termo $1/\epsilon$ também é uma divergência colinear, pois, como podemos verificar de modo análogo ao caso anterior, ocorre quando o férmion emergente move-se na mesma direção do gluon incidente.

As correções da Função de Distribuição de Quarks

Devemos agora coletar estas correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ e, ao fazer isso, teremos o cancelamento de boa parte das divergências, mas restarão ainda divergências colineares. Isto nos levará quase que naturalmente ao conceito de Fatorização. Veremos também a violação de *scaling* de Bjorken, ou seja, a função de estrutura F_2 dependerá também de Q^2 .

Obtemos a função de estrutura F_2/x , até $\mathcal{O}(\alpha_s)$, através da soma:

$$\frac{F_2}{x} \Big|_v + \frac{F_2}{x} \Big|_q + \frac{1}{2} \frac{F_2}{x} \Big|_g \quad (3.57)$$

note que o fator $1/2$ é necessário pois $\gamma^*g \rightarrow q\bar{q}$ contribui igualmente tanto para função de distribuição de quarks quanto para de antiquarks. Fazendo a soma acima e comparando o resultado com F_2/x em $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ obtemos as correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para as funções de distribuições de quarks, através da definição da referência [22], na qual a forma (3.21) sem correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ é preservada, apenas com a troca da distribuição *nua* de partons pela distribuição de partons dependente de escala, isto é,

$$\frac{F_2}{x} = \sum_q (ee_q)^2 q(x, Q^2) \quad (3.58)$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned}
 q(x, Q^2) &= q_0(x) + \frac{\alpha_s}{4\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} g_0(y) \frac{1}{(1-\epsilon)} \left\{ [z^2 + (1-z)] \right. \\
 &\times \left[-\frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} + \ln \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \frac{1-z}{z} \right) \right] + 6z(1-z) \left. \right\} \\
 &+ \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left\{ \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] \right. \\
 &\times \left[-\frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} + \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right] + (1+z^2) \left(\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ \\
 &+ 3 + 2z - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z \\
 &\left. - \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \delta(1-z) \right\} \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Podemos simplificar a expressão acima introduzindo as funções de *splitting*:

$$P_{qq}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] \quad (3.60)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)] \quad (3.61)$$

onde $z = x/y$.

A função $P_{ij}(x/y)$ é interpretada, neste caso, como a probabilidade de que um parton j com momento yP dê origem a um par de partons, através do vértice $q \rightarrow qg$ ou $g \rightarrow q\bar{q}$ [†], e que um destes partons produzidos denotado por i , neste caso $i = q$, tenha momento xP (lembrando que $x \leq y \leq 1$). Uma dedução detalhada destas funções é apresentada em [23].

Utilizamos também a expansão:

$$-\frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \approx -\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E \quad (3.62)$$

e introduzimos

$$\Delta = -\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma_E \quad (3.63)$$

A Eq. (3.59), torna-se

$$\begin{aligned}
 q(x, Q^2) &= q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ g_0(y) \left[P_{qg}(z) \left(\Delta + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. + C_q(z) \right] + q_0(y) \left[P_{qq}(z) \left(\Delta + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) + C_g(z) \right] \right\} \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

[†]Nesta notação q representa os sabores dos quarks e suas respectivas antipartículas. Assim, $q = u, d, s, \dots, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \dots$ e, obviamente, se $q = \bar{u}$, temos $\bar{q} = u$ e assim por diante.

onde são definidos:

$$\begin{aligned}
 C_q(z) &= C_F \left[(1+z^2) \left(\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \delta(1-z) \right. \\
 &\quad \left. + 3 + 2z - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z \right] \\
 C_g(z) &= \frac{1}{2} \left\{ [z^2 + (1-z)] \ln \frac{1-z}{z} - 8z^2 + 8z - 1 \right\} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Note que o pólo $1/\epsilon$ é uma divergência colinear, e como o γ^* pode *distiguir* um quark de um par quark-gluon com mesmo momento total, esta divergência não está sujeita a cancelamento. Podemos entender esta divergência colinear como a situação na qual o momento transversal do parton (q ou g) $p_T^2 \rightarrow 0$, que corresponde à parte de grandes distâncias da interação forte e que não pode ser calculada em teoria de perturbação. Contudo, F_2 e mesmo $q(x, Q^2)$ são objetos que se deseja medir, ou seja, devem ser *seguros no infravermelho*, para isso devemos introduzir o conceito de *Fatorização*.

Note que para se obter as correções de ordem α_s para F_2 e, através de (3.58), $q(x, Q^2)$, a função de estrutura partônica (que contem o pólo) deve ser convoluída com uma distribuição de partons (q_0 ou g_0) *nua*. Como ocorre na renormalização dos parâmetros de uma teoria, podemos considerar as distribuições nuas de partons como objetos não-mensuráveis. As singularidades são, então, absorvidas nestas distribuições nuas de partons a uma certa escala de fatorização μ_f . Tal como ocorre na renormalização, existem esquemas de fatorização que estabelecem quais partes finitas, além das singularidades, serão absorvidas e, obviamente, quais partes finitas restarão. Uma vez escolhido o esquema de fatorização para se obter as distribuições de partons, devemos utilizar o mesmo esquema para calcular seções de choque de outros processos que envolvam as distribuições de partons [21].

O esquema no qual F_2 mantém a forma $F_2 = \Sigma(ee_q)^2 xq(x, Q^2)$ sem correções explícitas de ordem igual ou maior que α_s é o chamado esquema DIS [24]. Um outro esquema muito utilizado atualmente é o $\overline{\text{MS}}$ [25], no qual o termo Δ é absorvido. Neste esquema temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_2}{x} &= \sum_q (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q(y, \mu^2) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} C_q^{\overline{\text{MS}}}\left(\frac{x}{y}\right) + \dots \right] \right. \\
 &\quad \left. + g(y, \mu^2) \left[\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} C_g^{\overline{\text{MS}}}\left(\frac{x}{y}\right) + \dots \right] \right\} \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Neste caso, $C_{q,g}^{\overline{\text{MS}}}(z) = C_{q,g}(z)$, e a distribuição de quarks é dada, até ordem α_s , por:

$$q(x, \mu^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [P_{qq}(z)q_0(y) + P_{qg}(z)g_0(y)] \left(\Delta + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \quad (3.67)$$

Estas distribuições são obtidas através das medições de F_2 , e diversos grupos construíram, a partir dos dados experimentais, parametrizações para estas funções de distribuições de partons, que podem ser utilizadas para se calcular numericamente seções de choque que envolvam distribuições de partons. Veremos um exemplo disto no próximo capítulo no qual calcularemos as correções para a seção de choque do processo Drell–Yan.

Um pouco mais sobre Fatorização

O Teorema de Fatorização generaliza os resultados do modelo a partons no contexto da teoria quântica de campos, a fim de que possamos aplicar as correções de QCD perturbativa aos observáveis físicos.

Esta generalização permite escrever seções de choque hadrônicas como a convolução de duas funções. Uma que contém toda a dependência dos efeitos de curta distância e deste modo pode ser calculada da teoria de perturbação e é segura no IV. Depende apenas do parton que participa da colisão dura e independe do hadron, podemos entender como a generalização da seção de choque de Born partônica do modelo a partons (seção de choque elementar).

A outra função contém toda a dependência dos efeitos de longa distância e é específica de cada hadron, é a generalização da distribuição de quarks no modelo a partons.

No caso do EIP e, como veremos no próximo capítulo, do processo Drell–Yan, ao se calcular as seções de choque partônicas envolvendo gluon para obter as correções de ordem α_s , percebemos que estas contêm singularidades colineares. Então convoluímos estas singularidades com as distribuições de partons nuas, fornecendo-nos distribuições de partons universais, no sentido que estas independem do processo considerado.

Evolução e a Equação de DGLAP

Uma consequência importante da fatorização é o fato de que se medirmos as funções de distribuições em uma certa escala de energia Q_0 , podemos prevê-las em uma outra escala Q , desde que Q_0 e Q sejam suficientemente grandes de modo que $\alpha_s(Q_0)$ e $\alpha_s(Q)$ sejam pequenos. Esta *evolução* é regida pela equação de DGLAP[†]. Podemos, grosseiramente, obter esta equação derivando a distribuição de quarks

[†]DGLAP \equiv Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi. Também conhecida simplesmente como equação de Altarelli–Parisi.

(3.64) em $\ln Q^2$ e, fazendo as aproximações $q_0(x) \approx q(x, Q^2)$ e $g_0(x) \approx g(x, Q^2)$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2) P_{qq}(z) + g(y, Q^2) P_{qg}(z)] \quad (3.68)$$

Um tratamento mais rigoroso utilizando a expansão de produto de operadores e grupo de renormalização confirma a equação acima e estende o resultado para todas as ordens em teoria de perturbação. Teremos também uma equação de DGLAP para a distribuição de gluons $g(x, Q^2)$, análoga a anterior. Para se obter um conjunto completo de funções de distribuição a uma certa escala de energia, por exemplo $Q^2 = M_W^2$, começamos com as distribuições medidas experimentalmente em uma escala Q_0^2 , geralmente diferente de M_W^2 , e usamos as equações de DGLAP para *evoluí-las*. As soluções destas equações são obtidas numericamente, já que estas são equações integro-diferenciais acopladas.

Capítulo 4

Correções de Processos Tipo Drell–Yan

Originalmente o mecanismo de Drell–Yan foi proposto para explicar a produção de pares de leptons na colisão dura de hadrons. Atualmente, esta denominação é utilizada para a produção de partícula que não interage fortemente tal como um bóson vetorial W ou Z .

Apresentamos inicialmente as correções de QCD ao processo de Drell–Yan propriamente dito. Em seguida reproduzimos as correções análogas para o processo de produção de bóson W .

4.1 O Processo Drell–Yan

Drell e Yan [26] aplicaram as idéias do modelo a partons desenvolvidas para o espalhamento inelástico profundo aos processos envolvendo colisões hadrônicas. O processo que é chamado de Drell–Yan é a produção de um par leptônico $\ell^+\ell^-$ com grande massa invariante, $M^2 = (p_{\ell^+} + p_{\ell^-})^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, através da aniquilação de um par quark e antiquark.

No modelo a partons entendemos este processo como a aniquilação de um quark de um hadron a com um antiquark do hadron b formando um fóton virtual que dá origem a um par de leptons massivos, como por exemplo $\mu^+\mu^-$ (ver fig. 4.1).

A seção de choque tem a forma:

$$d\sigma_{DY} = \sum_{q,\bar{q}} dx_a dx_b [q_0(x_a)\bar{q}_0(x_b) + q_0(x_b)\bar{q}_0(x_a)] \hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-) \quad (4.1)$$

Definindo P_a e P_b como os momentos dos hadrons incidentes, $q_0(x_i)dx_i$ * é a probabilidade de se encontrar um quark no hadron i carregando momento $p_i = x_i P_i$, $i = a, b$. O quadrado da massa invariante dos hadrons colidindo é $s = (P_a + P_b)^2$ e, analogamente, para os partons colidindo é $\hat{s} = (p_a + p_b)^2 \approx x_a x_b s$.

*Ao contrário do capítulo anterior, neste utilizamos uma notação na qual $q_0(x)$ representa uma distribuição nua de quark e $\bar{q}(x)$ representa uma distribuição de antiquark.

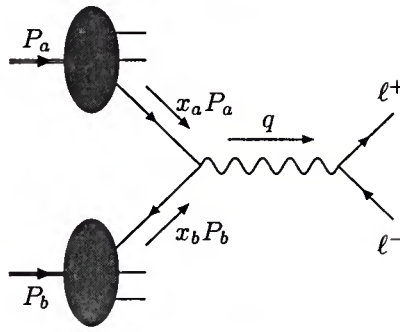


Figura 4.1: Processo Drell–Yan no modelo a partons

Em *leading order* (LO), $\hat{s} = M^2$, ou seja, a massa invariante do par de léptons finais mas, em geral, \hat{s} é uma variável independente. Define-se também a variável τ como

$$\tau = \frac{\hat{s}}{s} = x_a x_b \quad (4.2)$$

obviamente, o valor mínimo de τ , neste caso, é $\tau_0 = M^2/s$, já que deve haver energia suficiente para, pelo menos, produzir o par de léptons.

É comum definir a variável y , a rapidez do par leptônico no sistema de CM, como

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_a}{x_b} \quad (4.3)$$

A seção de choque do subprocesso $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$ a altas energias, é dada por :

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{1}{3} \frac{4\pi\alpha^2 e_q^2}{3M^2} \quad (4.4)$$

que, exceto pelo fator de cor $1/3$, é o mesmo que para $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Este fator de cor pode ser entendido como uma probabilidade, no sentido de que para um quark com uma cor definida, há um terço de chance de que este encontre um antiquark com a anticor correta para se aniquilar e formar um γ^* sem cor.

Para simplificar a apresentação de nossos resultados vamos calcular apenas a seção de choque para produção de um γ^* com massa invariante M^2 , cuja amplitude é dada por:

$$\mathcal{M}_{dy} = -(e_q e) \bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \varepsilon_\mu \quad (4.5)$$

Tomando o módulo ao quadrado da amplitude, multiplicando pelo fator de cor, somando sobre as polarizações do γ^* e tomando a média sobre os *spins* iniciais, obtemos, em D dimensões (veja Apêndice B):

$$|\overline{\mathcal{M}_{dy}}|^2 = \frac{(1-\epsilon)}{3} (e_q e_D)^2 M^2 \quad (4.6)$$

O espaço de fase para 1 partícula é :

$$\begin{aligned} (2\pi) \frac{d^{D-1}k}{2E} \delta^D(p_1 + p_2 - k) &= (2\pi) d^D k \delta(k^2 - M^2) \delta^D(p_1 + p_2 - k) \\ &= (2\pi) \delta(k^2 - M^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

e a seção de choque no nível partônico fica:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2\hat{s}} |\mathcal{M}_{dy}|^2 \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1} 2E} (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 - k) \quad (4.8)$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} \alpha_D (1 - \epsilon) \delta(\hat{s} - M^2) \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

onde α_D é a constante de acoplamento eletromagnética em D dimensões.

Como $\hat{s} = x_a x_b s$, podemos manipular a função delta acima deste modo

$$\delta(x_a x_b s - M^2) = \frac{1}{x_a x_b s} \delta\left(1 - \frac{M^2}{s} \cdot \frac{1}{x_a x_b}\right) = \frac{1}{x_a x_b s} \delta\left(1 - \frac{\tau_0}{x_a x_b}\right) \quad (4.11)$$

ficamos com:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 e_q^2 \frac{1}{x_a x_b} \delta(1 - z) \quad (4.12)$$

onde:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{4\pi^2}{3s} \alpha_D (1 - \epsilon) \quad (4.13)$$

e

$$z \equiv \frac{M^2}{s} = \frac{\tau_0}{x_a x_b} \quad (4.14)$$

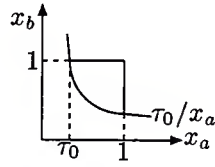
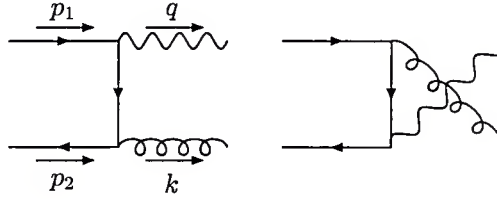
Calcularemos a seguir os termos de ordem α_s em D dimensões e, como veremos, estes dependerão de $\hat{\sigma}_1$ em D dimensões. A seção de choque será dada por

$$\sigma = \hat{\sigma}_1 \sum_q e_q^2 \int \frac{dx_a}{x_a} \frac{dx_b}{x_b} [q_0(x_a) \bar{q}_0(x_b) + (q_0 \leftrightarrow \bar{q}_0)] \delta(1 - z) \quad (4.15)$$

Os extremos da integral acima podem ser obtidos lembrando que x_a e x_b podem assumir apenas valores de 0 a 1 e, ainda, que $\tau = x_a x_b$ com $\tau_0 \leq \tau \leq 1$, (veja fig. 4.2). Obtemos então os limites de integração:

$$\begin{aligned} \tau_0/x_a \leq x_b &\leq 1 \\ \tau_0 \leq x_a &\leq 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Calcularemos as correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para este processo que são provenientes da emissão de um gluon, da troca de um gluon virtual e da contribuição de um gluon no estado inicial.


 Figura 4.2: Região do plano x_a - x_b onde a integral deve ser calculada.

 Figura 4.3: Diagramas para o subprocesso $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + g$

4.1.1 Correções de Emissão de Gluon

Consideremos o caso no qual um gluon é emitido pelo processo de fusão de dois quarks $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q) + g(k)$, onde o γ^* dá origem ao par de léptons.

Os invariantes de Mandelstam são dados por:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 \quad (4.17)$$

$$\hat{t} = (q - p_1)^2 \quad (4.18)$$

$$\hat{u} = (k - p_1)^2 \quad (4.19)$$

e a massa invariante do γ^* é do tipo tempo: $q^2 = M^2 > 0$. Notamos que nos diagramas temos propagadores nos canais \hat{t} e \hat{u} , os quais aparecerão como denominadores na amplitude ao quadrado $|\overline{\mathcal{M}_e(q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + g)}|^2$

$$|\overline{\mathcal{M}_e}|^2 = (g_s e_D e_q)^2 \frac{4}{9} \frac{1}{4} 8(1 - \epsilon)(\mu^2)^\epsilon \left[(1 - \epsilon) \left(\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right) + \frac{2M^2 \hat{s}}{\hat{u} \hat{t}} - 2\epsilon \right] \quad (4.20)$$

nesta expressão, o fator $1/4$ é da média sobre os spins iniciais e $4/9$ é o fator de cor $1/3$, cuja interpretação é a mesma do fator $1/3$ presente em (4.4), multiplicado pelo operador de Casimir C_F . E é válida a relação $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = M^2$.

O espaço de fase de 2 partículas é dado por (ver Apêndice):

$$dR_2 = \prod_{i=3}^4 \frac{d^{D-1} p_i}{(2\pi)^{D-1} 2E_i} (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (4.21)$$

$$= \frac{(4\pi)^{\epsilon-1}}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{dE}{E^{2\epsilon-1}} \frac{d \cos \theta}{(1 - \cos^2 \theta)^\epsilon} \delta(\hat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\hat{s}}E) \quad (4.22)$$

Integramos na energia E do gluon e fazemos a mudança de variáveis $v = (1 + \cos \theta)/2$:

$$dR_2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right) \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} z^\epsilon (1-z)^{1-2\epsilon} dv [v(1-v)]^{-\epsilon} \quad (4.23)$$

onde $z = M^2/\hat{s}$.

No referencial de CM, os invariantes \hat{s}, \hat{t} e \hat{u} são escritos em termos z e v como

$$\hat{s} = \frac{M^2}{z}, \quad \hat{t} = -\hat{s}(1-z)(1-v), \quad \hat{u} = -\hat{s}(1-z)v. \quad (4.24)$$

A seção de choque para este subprocesso será então:

$$\int d\hat{\sigma}_e = \int \frac{1}{2\hat{s}} |\overline{\mathcal{M}}_e|^2 dR_2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e &= \frac{\hat{\sigma}_1}{x_a x_b} e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} z^\epsilon (1-z)^{1-2\epsilon} \int_0^1 dv [v(1-v)]^{-\epsilon} \\ &\times \frac{4}{3} \left[(1-\epsilon) \left(\frac{1-v}{v} + \frac{v}{1-v} \right) + \frac{2z}{(1-z)^2 v(1-v)} - 2\epsilon \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como já fizemos no capítulo anterior, integramos a expressão acima em v , e tornamos as singularidades em ϵ manifestas utilizando as distribuições “+” (veja Apêndice E)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e &= \frac{\hat{\sigma}_1}{x_a x_b} e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} \delta(1-z) - \frac{2}{\epsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \right. \\ &\left. + 4(1+z^2) \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - 2 \frac{1+z^2}{1-z} \ln z \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

esta seção de choque deverá ser somada à seção de choque partônica corrigida por gluons virtuais, e a soma será convoluída com as distribuições de quarks.

4.1.2 Correções de Gluon Virtual

Como nos capítulos anteriores, consideraremos apenas a interferência do diagrama de nível de árvore com o diagrama de correção de vértice, já que as correções de auto-energia se anulam na regularização dimensional (veja fig. 4.4).

Aqui teremos $p_1 + p_2 = q$ e $2p_1 \cdot p_2 = M^2$, algo similar ao processo $e^+e^- \rightarrow$ hadrons. Podemos repetir a análise que fizemos para obter (2.25) chegando à conclusão de que basta simplesmente fazer a troca $Q^2 \rightarrow M^2$. A seção de choque partônica corrigida por um gluon virtual é dada, então, por:

$$\hat{\sigma}_v = \frac{\hat{\sigma}_1}{x_a x_b} e_q^2 \delta(1-z) \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \frac{2}{3}\pi^2 \right) \right] \quad (4.27)$$

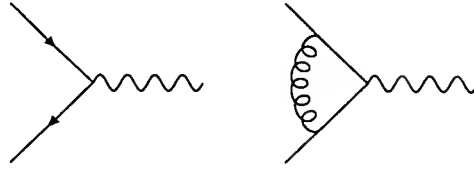


Figura 4.4: Devemos calcular a interferência destes diagramas

Agora somando as contribuições de gluon real e virtual, obtemos $\hat{\sigma}^{q\bar{q}}$. Esta soma, como veremos, deverá ser convoluída com uma distribuição de quarks e uma de antiquarks.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{q\bar{q}} &= \hat{\sigma}_e + \hat{\sigma}_v \\ &= \frac{\hat{\sigma}_1}{x_a x_b} e_q^2 \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[2P_{qq}(z) \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{D}_q(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $P_{qq}(z)$ e Δ foram definidos por (3.60) e (3.63), respectivamente, e $\mathcal{D}_q(z)$ é dada por:

$$\mathcal{D}_q(z) = C_F \left[4(1+z^2) \left(\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - 2 \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + \left(\frac{2\pi^2}{3} - 8 \right) \delta(1-z) \right] \quad (4.29)$$

Notemos que novamente ocorreram vários cancelamentos entre os pólos em ϵ . No entanto, ainda resta uma singularidade, contida em Δ que podemos identificar como colinear de modo análogo ao que foi feito no capítulo anterior.

4.1.3 Correções de Gluon no Estado Inicial

Vejam agora as correções vindas do caso em que um gluon de um dos hadrons interage com o quark do outro hadron, ou seja, $q(p_1) + g(p_2) \rightarrow q(p_3) + \gamma^*(p_4)$ (veja fig. 4.5), que também é um processo de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ que leva à produção de um γ^* .

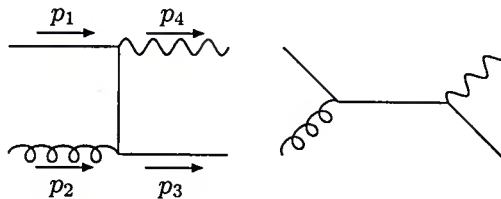


Figura 4.5: Diagramas para o subprocesso $qg \rightarrow q\gamma^*$

O módulo da amplitude ao quadrado, somado sobre os spins e polarizações e contendo os outros fatores relevantes é dado por:

$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathcal{M}_i|^2} &= \frac{1}{3} \frac{1}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2(1-\epsilon)} (g_s e_q e)^2 \text{Tr}(T^A T^A) \\
 &\times \left[\text{Tr}(\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma_\mu) \frac{1}{\hat{t}^2} + \right. \\
 &+ \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_\nu) \frac{1}{\hat{s}^2} + \\
 &\left. + 2 \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_\nu) \frac{1}{\hat{s}\hat{t}} \right]. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

onde os fatores $1/3$ e $1/2$ referem-se a média sobre as cores e os spins do q inicial, respectivamente, e $1/8$ e $1/2(1-\epsilon)$ são devidos a média sobre as cores e polarizações transversais do g , respectivamente.

E os invariantes, são dados por:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 \quad (4.31)$$

$$\hat{t} = (p_3 - p_1)^2 \quad (4.32)$$

$$\hat{u} = (p_3 - p_2)^2. \quad (4.33)$$

Calculando os traços, obtemos:

$$\overline{|\mathcal{M}_i|^2} = \frac{4\pi}{3} \alpha_s (e_D e_q)^2 (\mu^2)^\epsilon \left[(1-\epsilon) \left(\frac{-\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} \right) - \frac{2M^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} + 2\epsilon \right]. \quad (4.34)$$

Repetindo os passos para a obtenção de $\hat{\sigma}_e$, calculamos a seção de choque $\hat{\sigma}_{qg}$ para o subprocesso partônico.

$$\hat{\sigma}_{qg} = \frac{\hat{\sigma}_1}{x_a x_b} e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P_{qg}(z) \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{D}_g(z) \right] \quad (4.35)$$

$P_{qg}(z)$ e Δ foram definidos no capítulo anterior e $\mathcal{D}_g(z)$ é dado por:

$$\mathcal{D}_g(z) = P_{qg}(z) \ln \frac{(1-z)^2}{z} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}z - \frac{7}{4}z^2 \quad (4.36)$$

A seção de choque (4.35) será convoluída posteriormente com uma distribuição de quarks (ou antiquarks) e uma distribuição de gluons. Note que $\hat{\sigma}_{qg}$ apresenta singularidade, contida em Δ . Por uma análise similar a que já fizemos anteriormente, podemos concluir que esta singularidade é colinear.

As correções de NLO à Seção de Choque de DY

Considerando então a possibilidade de que um glúon em um dos hadrons interaja com um quark do outro hadron antes de dar origem ao fóton, devemos introduzir a distribuição de glúons $g(x)$ e escrever a seção de choque corrigida até ordem α_s como,

$$\begin{aligned} \sigma_{DY} = & \sum_{q, \bar{q}} \int dx_a dx_b \{ [q_0(x_a) \bar{q}_0(x_b) + (q_0 \leftrightarrow \bar{q}_0)] \hat{\sigma}^{q\bar{q}} + \\ & + g_0(x_a) [q_0(x_b) + \bar{q}_0(x_b) + (q_0, \bar{q}_0 \leftrightarrow g_0)] \hat{\sigma}^{qg} \} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.28) e (4.35) na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{DY} = & \hat{\sigma}_1 \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \left\{ \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} [q_0(x_a) \bar{q}_0(x_b) + (q_0 \leftrightarrow \bar{q}_0)] \delta(1-z) \right. \\ & + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} [q_0(x_a) \bar{q}_0(x_b) + (q_0 \leftrightarrow \bar{q}_0)] \left[2P_{qq}(z) \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{D}_q(z) \right] \\ & + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} [[q_0(x_a) + \bar{q}_0(x_a)] g_0(x_b) + (q_0, \bar{q}_0 \leftrightarrow g_0)] \\ & \left. \times \left[P_{qg}(z) \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{D}_g(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nesta expressão ainda temos singularidades colineares vindas de $\hat{\sigma}^{q\bar{q}}$ e $\hat{\sigma}^{qg}$ que devem ser eliminadas, já que devemos obter um resultado finito.

Para levar em conta de forma consistente a correção de ordem α_s para σ_{DY} , devemos considerar as correções para as funções de distribuição dos partons até esta ordem (3.67). Isto precisa ser feito na primeira linha do lado direito de (4.38), uma vez que as outras parcelas já são de ordem α_s . Estes procedimentos deverão fazer com que as divergências contidas nos Δ 's se cancelem.

Desta forma, tomando a contribuição proporcional a $\delta(1-z)$ de (4.38), temos

$$\hat{\sigma}_1 \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 [\mathcal{I}(q, \bar{q}) + \mathcal{I}(\bar{q}, q)] \quad (4.39)$$

onde

$$\mathcal{I}(q, \bar{q}) = \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} q_0(x_a) \bar{q}_0(x_b) \delta(1-z), \quad (4.40)$$

Incluindo a correção para as funções de distribuição conforme (3.67), escrevemos:

$$q_0(x_i) = q(x_i, M^2) - \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_{x_i}^1 \frac{dy}{y} \left[P_{qq} \left(\frac{x_i}{y} \right) q_0(y) + P_{qg} \left(\frac{x_i}{y} \right) g_0(y) \right] \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \quad (4.41)$$

onde $i = a, b$.

A partir daqui denotaremos $q(x_i, M^2)$ simplesmente por $q(x_i)$. Levando em conta a correção análoga a (4.41) para $\bar{q}_0(x)$, a integral $\mathcal{I}(q, \bar{q})$ pode ser escrita, até ordem α_s , como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(q, \bar{q}) &= \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} \delta(1-z) q(x_a) \bar{q}(x_b) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \\ &\times \left\{ \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} \delta(1-z) \int_{x_b}^1 \frac{dy}{y} q(x_a) \left[\bar{q}_0(y) P_{q\bar{q}} \left(\frac{x_b}{y} \right) + g_0(y) P_{qg} \left(\frac{x_b}{y} \right) \right] + \right. \\ &\left. \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dx_b}{x_b} \delta(1-z) \int_{x_a}^1 \frac{dy}{y} \bar{q}(x_b) \left[q_0(y) P_{q\bar{q}} \left(\frac{x_a}{y} \right) + g_0(y) P_{qg} \left(\frac{x_a}{y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Devemos manipular um pouco a segunda e terceira linhas da expressão acima. Na segunda linha, lembrando que $z = \tau_0/(x_a x_b)$, utilizamos a propriedade da função delta

$$\frac{1}{x_b} \delta \left(1 - \frac{\tau_0}{x_a x_b} \right) = \delta \left(x_b - \frac{\tau_0}{x_a} \right) \quad (4.43)$$

e integramos em x_b . A segunda linha de (4.42) torna-se então

$$\int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} q(x_a) \int_{\frac{\tau_0}{x_a}}^1 \frac{dy}{y} \left[\bar{q}_0(y) P_{q\bar{q}} \left(\frac{\tau_0}{y x_a} \right) + g_0(y) P_{qg} \left(\frac{\tau_0}{y x_a} \right) \right]. \quad (4.44)$$

onde a integral em y é feita entre τ_0/x_a e 1. Mas y é uma variável de integração, podemos simplesmente fazer a troca $y \rightarrow x_b$ e a segunda linha de (4.42) torna-se

$$\int \frac{dx_a}{x_a} \frac{dx_b}{x_b} q(x_a) [\bar{q}_0(x_b) P_{q\bar{q}}(z) + g_0(x_b) P_{qg}(z)]. \quad (4.45)$$

Do mesmo modo manipulamos a terceira linha de (4.42), mas utilizando

$$\frac{1}{x_a} \delta \left(1 - \frac{\tau_0}{x_a x_b} \right) = \delta \left(x_a - \frac{\tau_0}{x_b} \right) \quad (4.46)$$

e integrando em x_a . Desta vez trocamos a variável de integração y por x_a e reescrevemos a terceira linha de (4.42) como

$$\int \frac{dx_a}{x_a} \frac{dx_b}{x_b} \bar{q}(x_b) [q_0(x_a) P_{q\bar{q}}(z) + g_0(x_a) P_{qg}(z)]. \quad (4.47)$$

Levando em conta $\mathcal{I}(\bar{q}, q)$, a primeira linha do lado direito de (4.38) torna-se

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_1 \sum_q e_q^2 \int \frac{dx_a}{x_a} \frac{dx_b}{x_b} \delta(1-z) [q(x_a) \bar{q}(x_b) + (q \leftrightarrow \bar{q})] + \\ &- \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int \frac{dx_a}{x_a} \int \frac{dx_b}{x_b} \left\{ [q(x_a) \bar{q}(x_b) + (q \leftrightarrow \bar{q})] 2P_{q\bar{q}}(z) \right. \\ &\left. + [[q(x_a) + \bar{q}(x_a)]g(x_b) + (q, \bar{q} \leftrightarrow g)] P_{qg}(z) \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde a integração é feita na região do plano x_a - x_b dada por (4.16).

Note que agora podemos aproximar $q_0(x_i) \sim q(x_i)$, uma vez que que elas diferem por termos da ordem α_s . Fazendo esta aproximação em toda a expressão (4.38) e substituindo a primeira linha de (4.38) pela expressão acima, veremos o cancelamento total das singularidades (Δ) e ficaremos com:

$$\begin{aligned} \sigma_{DY} = & \hat{\sigma}_1 \sum_{q\bar{q}} e_q^2 \int \frac{dx_a}{x_a} \frac{dx_b}{x_b} \\ & \left\{ [q(x_a)\bar{q}(x_b) + (q \leftrightarrow \bar{q})] \cdot \left[\delta(1-z) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \mathcal{D}_q(z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \mathcal{D}_g(z) [q(x_a) + \bar{q}(x_a)]g(x_b) + (q, \bar{q} \leftrightarrow g) \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Lembremos que a expressão acima é a seção de choque para a produção de um γ^* com massa invariante M^2 . Se quisermos a seção de choque para a produção de um par de leptons de massa invariante M^2 a partir da colisão dura hadron–hadron, devemos apenas trocar $\hat{\sigma}_1$ da expressão acima por $\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-)$ dada por (4.4).

É notável a consistência e o poder preditivo da Fatorização. Podemos obter as distribuições de quarks e gluons através dos experimentos de espalhamento inelástico profundo. Estas distribuições são ditas universais, no sentido de que não dependem do processo em si. Com isto em mente, podemos utilizar estas distribuições para calcular as seções de choque de diversos processos inclusivos de espalhamento duro em colisões hadron–hadron, desde que, é claro, a Fatorização análoga à do EIP se aplique a estes processos.

Aqui reproduzimos os cálculos detalhados que verificam a Fatorização para o processo Drell–Yan em NLO. Na realidade existem provas para a fatorização da seção de choque deste processo em todas as ordens em teoria de perturbação (ver ref. [27]).

4.2 Produção do Bóson W

Em 1983, no anel de colisão $p\bar{p}$ do CERN, foram observados os bósons W e Z e este fato experimental foi uma forte evidência em favor do Modelo Padrão das interações eletrofracas. Apresentamos a seguir a seção de choque para a produção do bóson W a partir da colisão dura $p\bar{p}$ corrigidas até ordem α_s .

O procedimento é basicamente o mesmo da seção anterior e, como veremos, as correções de ordem α_s serão as mesmas correções para o processo Drell–Yan [21] já que o W e o Z não interagem fortemente. Começamos calculando a amplitude em

nível de árvore do subprocesso: $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow W^+(k)^\dagger$:

$$i\mathcal{M}_W = -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \varepsilon_\mu(k) \quad (4.50)$$

Tomamos o módulo ao quadrado desta amplitude, somamos sobre as polarizações do W e tomamos a média dos *spins* dos quarks. Como na seção anterior, multiplicamos pelo fator $1/3$ que pode ser interpretado como a probabilidade de que um quark com uma dada cor encontre um antiquark com a anticor correta para produzirem um bóson W sem cor. A soma de polarizações do bóson W deve ser substituída por

$$-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \quad (4.51)$$

Mas o termo $k^\mu k^\nu / M_W^2$ não contribui para o módulo ao quadrado da amplitude graças a conservação de corrente do W para quarks sem massa, isto é

$$k_\mu \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) = \bar{v}(p_2) (\not{p}'_1 + \not{p}'_2)(1 - \gamma_5) u(p_1) = 0 \quad (4.52)$$

uma vez que $\not{p}'_1 u(p_1) = 0$ e $\bar{v}(p_2) \not{p}'_2 = 0$.

O quadrado da amplitude será dado por:

$$\overline{\mathcal{M}_W^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{g_D^2}{8} \cdot 8\hat{s} \quad (4.53)$$

onde $\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = k^2$. O espaço de fase para 1 partícula é dado por:

$$dR_1 = (2\pi) \frac{d^{D-1}k}{2E_k} \delta^D(p_1 + p_2 - k) = (2\pi) \delta(k^2 - M_W^2) \quad (4.54)$$

Obtemos assim a seção de choque partônica para $q\bar{q} \rightarrow W^+$, com a substituição $g_D^2 \rightarrow e_D^2/x_W$

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow W^+) = \hat{\sigma}_W \delta(\hat{s} - M_W^2) \quad (4.55)$$

onde:

$$\hat{\sigma}_W = \frac{\pi^2}{3} \frac{\alpha_D}{x_W} (1 - \epsilon) \quad (4.56)$$

onde $x_W \equiv \sin^2 \theta_W$ e $\alpha = e^2/4\pi$. A seção de choque para $p\bar{p} \rightarrow W^+$ será dada por

$$\sigma_W = \frac{\pi^2}{3} \frac{\alpha}{x_W} (1 - \epsilon) \frac{1}{s} \sum_{i,j} \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} [q_i(x_a) \bar{q}_j(\tau_0/x_a) + (q \leftrightarrow \bar{q})] \quad (4.57)$$

temos agora $\tau_0 = M_W^2/s$ e a soma deve ser sobre todas as combinações de quark-antiquark que contribuem, isto é, $u\bar{d}, c\bar{s}$.

[†]Nestes cálculos supomos a matriz de Cabibbo igual à identidade.

As correções de ordem α_s são calculadas a partir de diagramas semelhantes aos do processo Drell-Yan, com o γ^* trocado por um W^+ . Para as correções devido a gluons iniciais (i), os diagramas que contribuem são os mesmos da fig. 4.5, com γ^* trocado por W^+ . A amplitude é dada por:

$$i\mathcal{M}_i = -\frac{g}{2\sqrt{2}} g_s \bar{u}(p_3) \left[\gamma^\mu T^A \frac{i}{\not{p}_3 - \not{p}_1} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) + \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \frac{i}{\not{p}_1 + \not{p}_2} \gamma^\mu T^A \right] u(p_2) \varepsilon_\mu^A(p_1) \varepsilon_\nu(k) \quad (4.58)$$

onde ε_μ^A e ε_ν são os vetores de polarização do gluon e do W , respectivamente.

Tomamos o módulo ao quadrado da amplitude, somamos sobre as polarizações do gluon e do W , lembrando que o termo $k^\mu k^\nu / M_W^2$ da soma das polarizações do W não contribui graças a conservação da corrente do W . Somamos também sobre os *spins* e cores do quark final e tomamos a média sobre *spins* e cores do quark inicial, tomamos a média sobre os tipos de gluons, que fornece um fator $1/8$, e a média sobre as polarizações transversais de gluons que fornece um fator $1/[2(1 - \epsilon)]$. Ficamos então com:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_i|^2} &= \frac{1}{3} \frac{1}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2(1 - \epsilon)} \frac{g^2}{8} (g_s)^2 C_F \\ &\times \left\{ \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma_\mu] \frac{1}{\hat{t}^2} + \right. \\ &+ \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \frac{1}{\hat{s}^2} + \\ &\left. + 2 \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu (\not{p}_3 - \not{p}_1) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \frac{1}{\hat{s}\hat{t}} \right\}. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Os invariantes são os mesmos do processo Drell-Yan, e calculando os traços, obtemos:

$$\overline{|\mathcal{M}_i|^2} = \frac{1}{12} g_s^2 (g_D)^2 (\mu^2)^\epsilon \left[(1 - \epsilon) \left(\frac{-\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} \right) - \frac{2M_W^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} + 2\epsilon \right]. \quad (4.60)$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, obtemos:

$$\hat{\sigma}_i = \frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{s}} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P_{qg}(z) \left(\Delta + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{D}_g(z) \right] \quad (4.61)$$

onde $\mathcal{D}_g(z)$ é dado por e $P_{qg}(z)$ por .

Analogamente, podemos calcular as correções de emissão (e) de gluon através da seção choque para o subprocesso partônico $q\bar{q} \rightarrow gW^+$, cuja amplitude é dada pelo *crossing* de $qg \rightarrow qW$, ou seja, $\hat{s} \rightarrow \hat{u}$, $\hat{u} \rightarrow \hat{s}$, além de levar em conta um sinal

negativo devido à troca do do férmion. A seção de choque será dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e = & \frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{s}} \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{M_W^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} \delta(1-z) - \frac{2}{\epsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \right. \\ & \left. + 4(1+z^2) \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - 2 \frac{1+z^2}{1-z} \ln z \right\} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Quanto às correções virtuais, novamente consideraremos apenas as correções de vértice, pois os diagramas de auto-energia não contribuem. Como já fizemos anteriormente, calculamos a interferência entre a diagrama de nível de árvore e o de um *loop* no vértice.

A seção de choque em nível de árvore mais esta correção virtual de ordem α_s é dada por:

$$\hat{\sigma}_v = \hat{\sigma}_W \left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \frac{2\pi^2}{3} \right) \right] \quad (4.63)$$

A seção de choque $p\bar{p} \rightarrow W$ será dada pela convolução destas seções de choque partônicas com as distribuições de partons:

$$\begin{aligned} \sigma_W = & \sum_{i,j} \int dx_a dx_b \{ [q_i(x_a) \bar{q}_j(x_b) + (q \leftrightarrow \bar{q})] (\hat{\sigma}_v + \hat{\sigma}_e) + \\ & + g(x_a) [q_i(x_b) + \bar{q}_i(x_b)] \hat{\sigma}_i \} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Devemos então substituir as distribuições nuas através da equação (3.67) com M^2 trocado por M_W^2 . Com isso temos o cancelamento das singularidades colineares e a seção de choque é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_W = & \hat{\sigma}_W \sum_{i,j} \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_a}{x_a} \int_{\tau_0/x_a}^1 \frac{dx_b}{x_b} \\ & \times \left\{ [q_i(x_a, M_W^2) \bar{q}_j(x_b, M_W^2) + (q \leftrightarrow \bar{q})] \cdot \left[\delta(1-z) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \mathcal{D}_q(z) \right] \right. \\ & + [q_i(x_a, M_W^2) + \bar{q}_i(x_a, M_W^2)] g(x_b, M^2) + (q, \bar{q} \leftrightarrow g) \\ & \left. \times \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \mathcal{D}_g(z) \right\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como podemos ver, a correção para este processo é bastante similar à do caso anterior ($p\bar{p} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$).

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação estudamos as correções da QCD aos processos do tipo Drell–Yan, onde partículas que não interagem fortemente são produzidas em colisões hadrônicas.

Iniciamos pela análise do espalhamento inelástico profundo onde mostramos como extrair as funções de distribuição dos partons contidos nos hadrons. Posteriormente calculamos as correções de gluons reais e virtuais para a seção de choque elementar do processo Drell–Yan e mostramos como ocorre o cancelamento das divergências colineares com aquelas das funções de distribuição de partons.

Em um esquema consistente de fatorização, podemos medir as distribuições de partons a uma escala de energia Q_0 e, utilizando as equações de DGLAP, podemos *evolú-las* para qualquer outra escala Q , desde que Q_0 e Q sejam suficientemente grandes a fim de que os valores de α_s nestas escalas sejam pequenos.

As distribuições de partons são funções de x e Q^2 , cujos parâmetros são obtidos ajustando-se os dados experimentais de EIP, por exemplo. Pode-se utilizar, então, estas parametrizações das distribuições de partons para integrar σ_{DY} (4.49) e σ_W (4.65).

Em colisões de alvo fixo, por exemplo, $p + Cu \rightarrow \mu^+\mu^-$ a $\sqrt{s} = 38.8$ GeV [28] as correções NLO são positivas e aumentam a seção de choque de LO em cerca de 50%.

Já para a produção de W , as correções de ordem α_s de gluon virtuais e da emissão de gluon a $\sqrt{s} = 1.8$ TeV é positiva e cerca de 33% da seção de choque em LO. As correções de gluons iniciais são negativas e da ordem de 7%. No total, as correções de NLO aumentam a seção de choque de LO em 26% [29].

Percebemos que as correções NLO são grandes, o que poderia colocar em dúvida a validade deste cálculo perturbativo. Poderíamos perguntar se a correção na próxima ordem seria maior que esta. Entretanto, a seção de choque corrigida até NLO tem uma boa concordância com os dados experimentais, indicando que as correções de

ordem superiores devem ser pequenas.

A seguir apresentamos alguns resultados que ilustram a comparação das previsões das seções de choque, corrigidas até NLO, com os dados experimentais.

Na fig. 5.1 são apresentados os dados obtidos pela colaboração CERN-R-209 [30], o processo é $p + p \rightarrow \mu^+ + \mu^- + X$ a \sqrt{s} de 44 e 62 GeV. O gráfico apresenta a seção de choque diferencial $d\sigma/dm$ (onde m é a massa invariante do par de léptons) a $x = 0$, onde x é a fração de momento longitudinal do par de léptons, ou seja, $x = x_1 - x_2$.

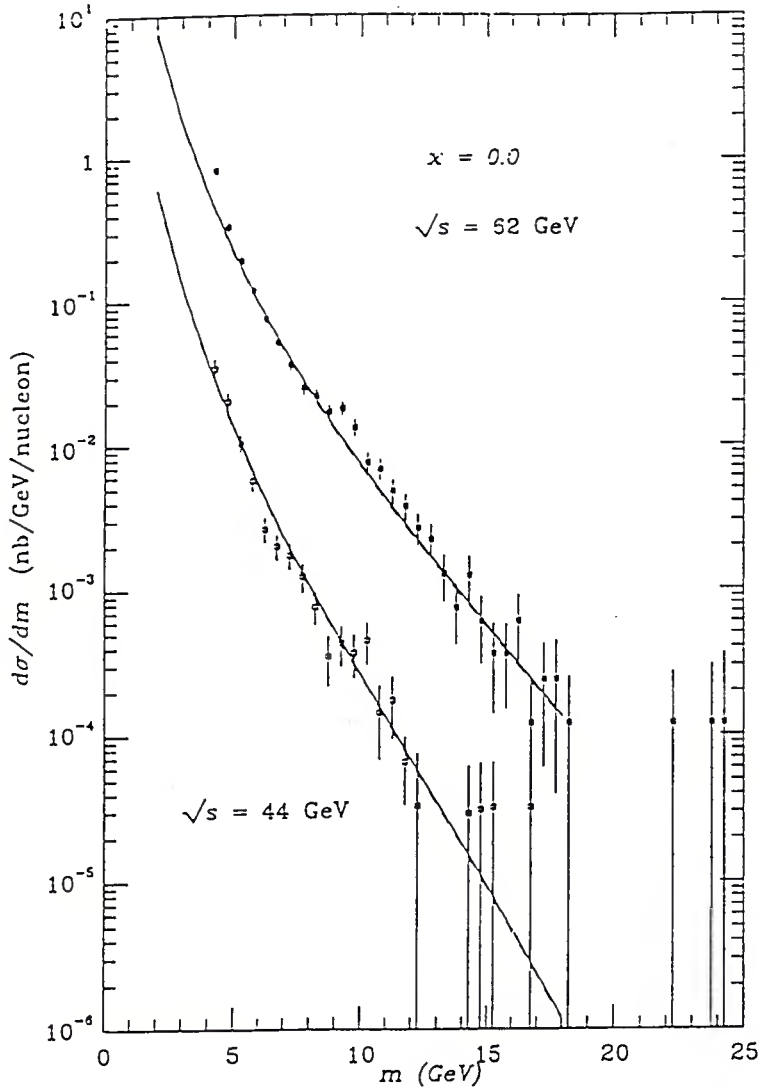


Figura 5.1: Seção de choque diferencial $d\sigma/dm$ para a de produção de pares de léptons em colisões pp a \sqrt{s} de 44 e 62 GeV. m é a massa invariante do par de léptons. A linha sólida é a previsão em ordem α_s .

Podemos ver que o excelente acordo também existe para energias mais altas. Na fig. 5.2 apresentamos a seção de choque de produção de um par leptônico em colisões $p\bar{p}$ a $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. Note a presença do pico do Z para $M \sim 90$ GeV [31].

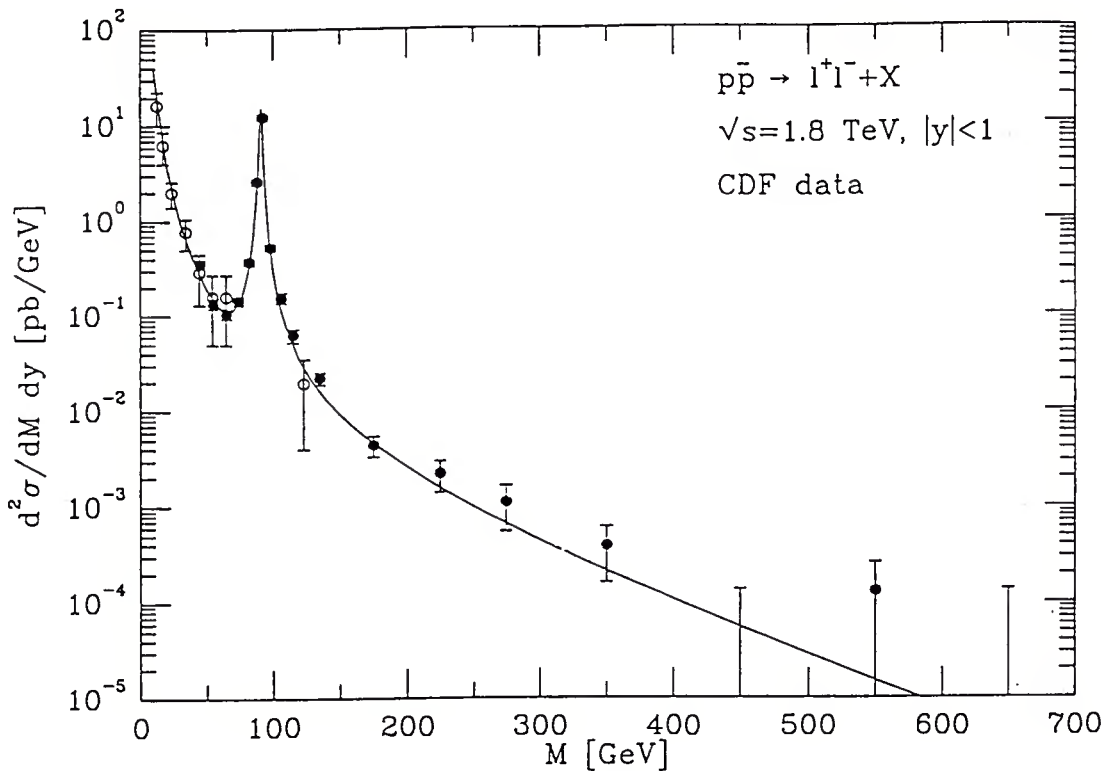


Figura 5.2: Seção de choque de produção de pares de léptons em colisões $p\bar{p}$ a $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. M é a massa invariante do par de léptons e y é a rapidez do par leptônico dada por (4.3). A linha sólida é a previsão em ordem α_s .

Apresentamos na fig. 5.3 os dados da colaboração E605 [28] para o processo $pN \rightarrow \mu^+\mu^-$ a $\sqrt{s} = 38.8$ GeV. Note a boa concordância das previsões, obtidas a partir das distribuições de partons HMRS(B) e HMRS(E), com os dados experimentais [32].

Foram feitas, e ainda se faz, diversas parametrizações para as distribuições de partons, de acordo com o crescente aumento da precisão dos dados experimentais. Atualmente, a credibilidade nestas correções de QCD é suficiente para que se façam análises globais de distribuições de partons utilizando não apenas dados experimentais de espalhamento inelástico profundo mas em conjunto com dados do processo Drell-Yan e também da produção de W [32].

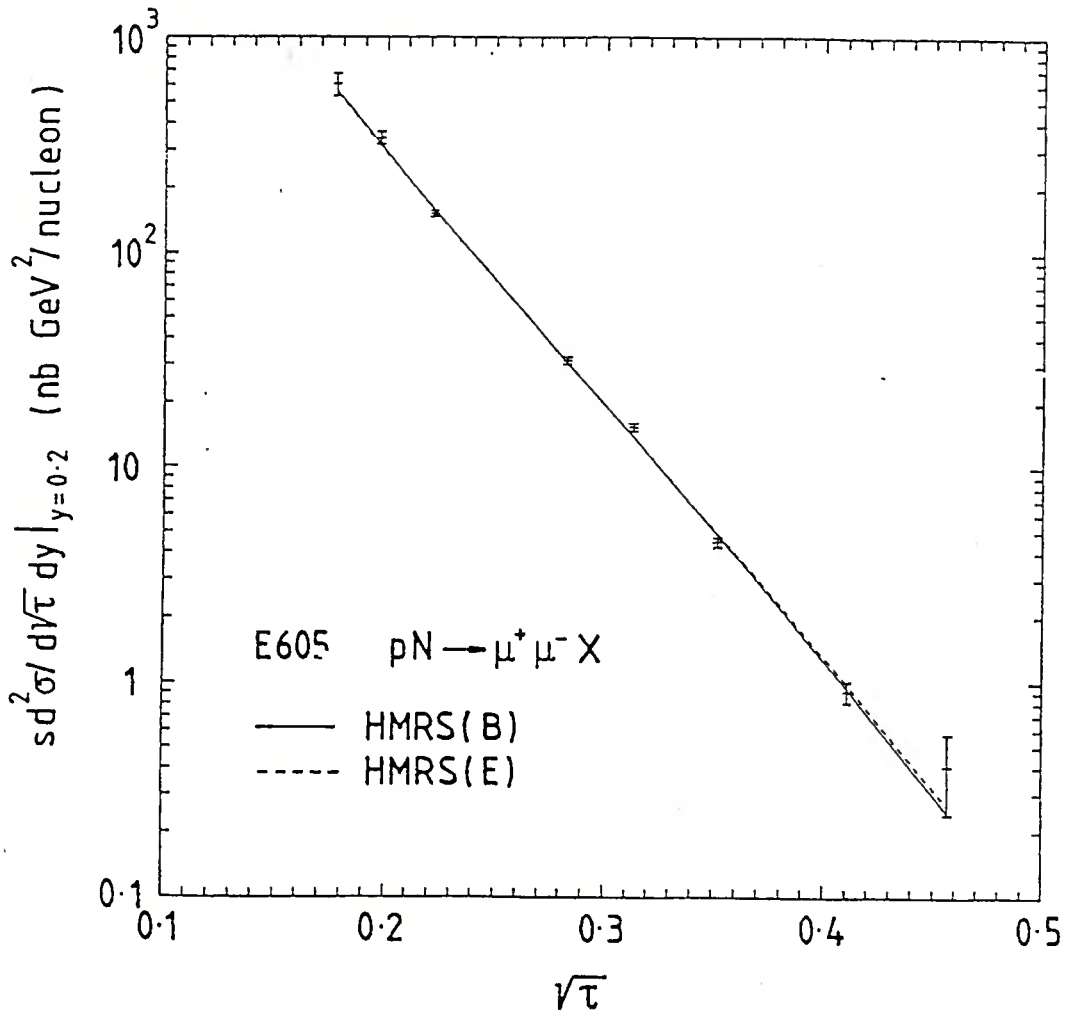


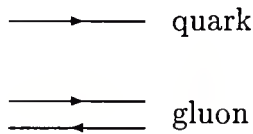
Figura 5.3: Comparação entre os dados experimentais da colaboração E605 e as previsões teóricas em NLO [32].

Apêndice A

Calculando os Fatores de Cor

Apresentamos alguns “truques” gráficos que podemos utilizar para o cálculo dos fatores de cor dos diagramas na QCD. Seguimos aqui, basicamente, as referências [33] e [34].

Podemos dizer, grosseiramente, que o quark carrega uma *cor* e que o gluon carrega uma *cor* e uma *anticor*. A partir destas afirmações representamos graficamente a *cor* (ou a *anticor*) por uma linha. Conseqüentemente, os propagadores do quark e do gluon serão representados por:



Nesta análise vamos nos preocupar apenas com o fluxo de cor. Conseqüentemente, para o vértice qqg só nos interessará a matriz T^a , geradora de $SU(N)$ (para a QCD, $N = 3$). E para o vértice de 3 gluons basta que consideremos a constante de estrutura de $SU(N)$, f^{abc} .

O gerador T^a , na representação fundamental, é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \longrightarrow \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \longrightarrow \end{array} \right] = T^a$$

O diagrama acima incorpora a idéia da conservação de cor, através da qual os números quânticos de cor do par $q\bar{q}$ são transferidos ao gluon. A parte proporcional a $1/N$ aparece somente quando a cor do quark e do antiquark são as mesmas. Isto assegura que o traço de T^a é nulo. O fator $1/\sqrt{2}$ está relacionado com a normalização dos geradores

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \tag{A.1}$$

A contração de índices de cor é feita conectando-se as linhas de cor. Um *loop* fechado de uma linha de cor nos fornece um fator N , já que um *loop* fechado é equivalente ao traço de uma matriz identidade. Vejamos, por exemplo, o produto de duas matrizes:

$$(T^a T^b)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} \overset{a}{\uparrow} \quad \overset{b}{\uparrow} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \underset{i}{\leftarrow} \quad \underset{j}{\leftarrow} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} + \frac{1}{N^2} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \end{array} \right]$$

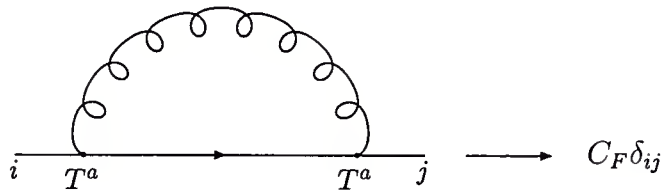
Fazendo a contração $T^a T^b \delta^{ab}$ e somando sobre os possíveis a , ou seja, os tipos de gluons, obtemos:

$$\sum_a (T^a T^a)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} + \frac{1}{N^2} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \end{array} \right]$$

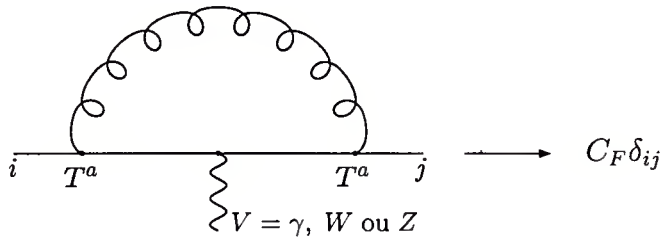
O primeiro diagrama é proporcional a N , pois tem um *loop*, e a linha de cor ligando i a j equivale a δ_{ij} . Analogamente, o segundo e o terceiro diagramas são equivalentes a δ_{ij} . O último diagrama nos fornece N e δ_{ij} . Obtemos então o operador de Casimir C_F do $SU(N)$:

$$\begin{aligned} \sum_a (T^a T^a)_{ij} &= \frac{1}{2} \left(N - \frac{2}{N} + \frac{N}{N^2} \right) \delta_{ij} \\ &= C_F \delta_{ij}, \quad \text{com } C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Observando os diagramas acima já podemos perceber uma aplicação para este fator, a auto-energia de um quark em nível de um *loop*. E, realmente, não é difícil mostrar que o fator de cor para o diagrama de auto-energia é dado por:

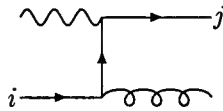


Podemos explorar um pouco mais o resultado acima. Sabemos que o fóton, o W e o Z não carregam cor, portanto, se conectarmos um destes bósons ao diagrama acima o fator de cor continuará o mesmo.

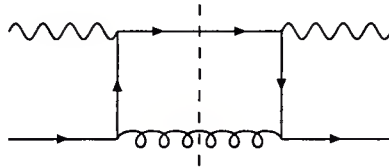


Ao longo desta dissertação calculamos as correções de ordem α_s para diversos processos a altas energias. Assim, em todos os diagramas dos processos com correções de QCD só aparece o vértice qqg e não aparecem as interações de 3 e 4 gluons. Para estes diagramas o fator de cor é, em geral, proporcional a C_F ou $N C_F$.

Vejamos como exemplo ilustrativo, um dos diagramas que contribuem para $\gamma q \rightarrow qg$



O módulo ao quadrado do diagrama é dado pelo diagrama cortado:



E calculamos o fator de cor do diagrama acima pelos diagramas de linhas de cor (aqui representamos sem os cortes de estado final, pois é irrelevante para o cálculo do fator de cor):

$$\frac{1}{2} \left[\text{diagram 1} - \frac{2}{N} \text{diagram 2} + \frac{1}{N^2} \text{diagram 3} \right]$$

O fator de cor será dado por:

$$\frac{1}{2} \left(N - \frac{2}{N} + \frac{N}{N^2} \right) \delta_{ii} = C_F \delta_{ii} = C_F \tag{A.3}$$

Vimos aqui alguns exemplos simples, mas este “método” pode ser utilizado para se calcular o fator de cor de diagramas mais complicados, tais como diagramas envolvendo 3 gluons.

Apêndice B

Seção de choque em D dimensões

Para se calcular a seção de choque de um determinado processo ou uma largura de decaimento precisamos do *espaço de fase*, que é o espaço de todas as configurações dos momentos em conformidade com a conservação de energia e momento. Precisamos calcular também os elementos de matrizes, que contêm as informações da dinâmica da interação. Vejamos inicialmente a definição de seção de choque e de espaço de fase em 4 dimensões, e em seguida a generalização para D dimensões. Apresentamos também neste apêndice a “álgebra” das matrizes de Dirac em D dimensões

B.1 Seção de Choque

Para um processo relativístico do tipo: $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$, a seção de choque é dada por:

$$d\sigma = S \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{\mathcal{F}} d^{3n-4}R_n \quad (\text{B.1})$$

onde cada fator de (B.1) é definido como:

- $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ é o módulo da amplitude invariante ao quadrado e contém toda a informação da dinâmica do processo.
- \mathcal{F} é o fator de fluxo dado por:

$$\mathcal{F} = 4 \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$$

- $d^{3n-4}R_n$ é o elemento diferencial do espaço de fase e é dado por:

$$d^{3n-4}R_n = (2\pi)^4 \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta^4(p_a + p_b - \sum p_i)$$

- \mathcal{S} é o fator estatístico que leva em conta as partículas idênticas no estado final, ou seja, para m partículas idênticas do tipo i , temos:

$$\mathcal{S} = \prod_i \frac{1}{m_i!}$$

Em um processo no qual n partículas são produzidas, devemos impor a conservação de energia e momento:

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= \sum_{j=1}^n E_j \\ \vec{p}_{\text{in}} &= \sum_{j=1}^n \vec{p}_j \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde E_{in} e \vec{p}_{in} são a energia e momento iniciais. Desta forma, temos 4 vínculos. O espaço de momentos é o espaço de $3n$ dimensões dos momentos \vec{p}_i . As condições (B.2) restringem o conjunto de \vec{p}_i possíveis, e este conjunto forma um subespaço de dimensão $3n - 4$ no espaço de momentos. Este subespaço de dimensão $3n - 4$ é o chamado *espaço de fase* [35].

Para se calcular a seção de choque em D dimensões, apenas $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ e $d^{3n-4}R_n$ serão alterados.

B.2 O Espaço de Fase em D dimensões

Em D dimensões as condições (B.2) tornam-se D vínculos:

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} = \sum_{j=1}^n E_j &\leftrightarrow 1 \text{ componente} \\ \vec{p}_{\text{in}} = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j &\leftrightarrow (D - 1) \text{ componentes} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O espaço de momentos tem $(D-1)n$ dimensões, impondo-se as D condições (B.3) teremos um espaço de fase de $[(D-1)n - D]$ dimensões. O elemento diferencial do espaço de fase será escrito como:

$$d^{[(n-1)D-n]}R_n = (2\pi)^D \prod_{i=1}^n \frac{d^{D-1}p_i}{(2\pi)^{D-1} 2E_i} \delta^D(p_{\text{in}} - \sum p_i) \quad (\text{B.4})$$

Vejam os exemplos de espaço de fase para 1 e 2 partículas no estado final. Os resultados destes exemplos são utilizados nos cálculos de seções de choque desta dissertação.

B.2.1 O Espaço de Fase de Uma Partícula

Mostremos inicialmente a identidade:

$$\int d^D p \delta(p^2 - m^2) \theta(E) = \int \frac{d^{D-1} p}{2E} \quad (\text{B.5})$$

Utilizamos a propriedade da função δ :

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{f'(x_0)} \delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

para mudar o integrando em (B.5):

$$f(E) = p^2 - m^2 = E^2 - \vec{p}^2 - m^2 \Rightarrow E_{0\pm} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (\text{B.7})$$

portanto,

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(E - E_{0-})}{2E_{0-}} + \frac{\delta(E - E_{0+})}{2E_{0+}} \quad (\text{B.8})$$

E obtemos:

$$\begin{aligned} \int d^D p \delta(p^2 - m^2) \theta(E) &= \int d^{D-1} p \int dE \frac{\delta(E - E_{0+})}{2E_{0+}} \\ &= \int \frac{d^{D-1} p}{2E}, \quad \text{com } E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Com o resultado acima em mãos, o cálculo do espaço de fase de 1 partícula torna-se bastante simples [35]:

$$\begin{aligned} R_1 &= (2\pi)^D \int \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \delta^D(p_{\text{in}} - p_1) \\ &= (2\pi) \int d^D p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \theta(E_1) \delta^D(p_{\text{in}} - p_1) \\ &= \delta(p_{\text{in}}^2 - m_1^2) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.2.2 O Espaço de Fase para Duas Partículas Sem Massa

Utilizamos a identidade (B.5) para integrar em p_2 :

$$\begin{aligned} d^{D-2} R_2 &= (2\pi)^D \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \frac{d^{D-1} p_2}{(2\pi)^{D-1} 2E_2} \delta^D(p_{\text{in}} - p_1 - p_2) \\ &= (2\pi) \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} d^D p_2 \delta(p_2^2) \delta^D(p_{\text{in}} - p_1 - p_2) \\ &= (2\pi) \frac{d^{D-1} p_1}{(2\pi)^{D-1} 2E_1} \delta[(p_{\text{in}} - p_1)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Como o argumento da função δ é invariante de Lorentz podemos escolher o referencial de repouso de p_{in} , ou seja, $p_{\text{in}} = (\sqrt{s}, 0, 0, 0)^*$, que nos fornece:

$$(p_{\text{in}} - p_1)^2 = s - 2\sqrt{s}E_1 + p_1^2 = s - 2\sqrt{s}E_1 \quad (\text{B.12})$$

E a integral $\int d^{D-1}p_1$ pode ser escrita em coordenadas esféricas, em $D - 1$ dimensões [36]:

$$\int d^{D-1}p_1 = \int d|\vec{p}_1| |\vec{p}_1|^{D-2} d\Omega_{D-1} \quad (\text{B.13})$$

onde

$$d\Omega_{D-1} = \sin^{D-3} \theta_1 \sin^{D-4} \theta_2 \cdots \sin \theta_{D-3} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{D-3} d\theta_{D-2} \quad (\text{B.14})$$

Lembrando que para uma partícula sem massa temos $|\vec{p}_1| = E_1$, podemos deixar a integral de espaço de fase em termos de E_1 e θ_1 , integrando nos outros ângulos com o auxílio de

$$\int_0^1 d\theta \sin^k \theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k+2)/2)} \quad (\text{B.15})$$

ficamos com:

$$\int d^{D-1}p_1 = \frac{2\pi^{(D-2)/2}}{\Gamma(D/2-1)} \int dE_1 E_1^{D-2} \int_{-1}^1 d\cos \theta_1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{D/2-2} \quad (\text{B.16})$$

Para $D = 4 - 2\epsilon$, temos o fator de espaço de fase dado por:

$$R_2 = \frac{(4\pi)^{\epsilon-1}}{\Gamma(1-\epsilon)} \int \frac{dE_1}{E_1^{2\epsilon-1}} \int_{-1}^1 \frac{d\cos \theta_1}{(1 - \cos^2 \theta_1)^\epsilon} \delta(s - 2\sqrt{s}E_1) \quad (\text{B.17})$$

B.3 A Álgebra das matrizes de Dirac em D dimensões

Em um espaço-tempo de D dimensões, as matrizes de Dirac satisfazem

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \mathbf{I}_D \quad (\text{B.18})$$

onde \mathbf{I}_D é a matriz identidade em D dimensões, e os índices $\mu, \nu = 0, \dots, D - 1$.

E também temos:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D \mathbf{I}_D \quad (\text{B.19})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\mu = (2 - D) \gamma_\alpha \quad (\text{B.20})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu = 4g_{\alpha\beta} \mathbf{I}_D + (D - 4) \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad (\text{B.21})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\mu = -2\gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\alpha - (D - 4) \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \quad (\text{B.22})$$

*Para o caso de de uma colisão de duas partículas este é o referencial de CM delas, e para o decaimento de uma partícula temos \sqrt{s} é massa desta partícula.

Contudo, é comum definir [15], [29]

$$\text{Tr}(\mathbf{I}_D) = 4 \tag{B.23}$$

que resulta em:

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4g_{\alpha\beta} \tag{B.24}$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4(g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho} - g_{\alpha\lambda} g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho} g_{\beta\lambda}) \tag{B.25}$$

Apêndice C

Algumas Funções Especiais

Utilizamos algumas fórmulas relacionadas às funções Gama e Beta ao longo deste texto. Apresentamos as definições das referidas funções e algumas de suas propriedades [15].

A função $\Gamma(x)$ é definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dy e^{-y} y^{x-1} \quad (\text{C.1})$$

e algumas de suas propriedades:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ inteiro}) \quad (\text{C.2})$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0) \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma(x+1/2) \quad (\text{C.4})$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{C.5})$$

$$(\text{C.6})$$

A primeira e a segunda derivadas de $\Gamma(x)$ em $x = 1$ são dadas por:

$$\Gamma'(1) = -\gamma_E \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma''(1) = \gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{C.8})$$

$$(\text{C.9})$$

onde γ_E é a constante de Euler–Mascheroni que satisfaz

$$\gamma_E = - \int_0^{\infty} dx e^{-x} \ln x \quad (\text{C.10})$$

e seu valor numérico é $\gamma_E \approx 0.577$.

Dadas as relações acima podemos obter a expansão de $\Gamma(1+x)$ em torno de $x \approx 0$

$$\Gamma(1+x) = 1 - \gamma_E x + \frac{1}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) x^2 + \dots \quad (\text{C.11})$$

Por outro lado, a função Beta que é definida como

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (\text{C.12})$$

pode ser relacionada com a função Γ através de:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{C.13})$$

Apêndice D

As Integrais de Passarino–Veltman

Vamos discutir aqui as funções de Passarino–Veltman para os cálculos de *loops* com n pontos (vértices). Seguimos aqui, basicamente, as definições da referência [13]. Contudo, as integrais em D dimensões são definidas na ref. [13] com um fator μ^{4-D} , onde μ é um parâmetro de massa arbitrário. Este fator é introduzido para que as dimensões das constantes de acoplamento em frente das integrais permaneçam independentes de D . Neste texto fizemos algo diferente, a constante de acoplamento em D dimensões, digamos, e_D carrega dimensões de massa e definimos uma constante de acoplamento adimensional, e , tal que $e_D = e \cdot \mu^\epsilon$. Com isto as definições das integrais utilizadas neste texto não possuem o fator proporcional à massa.

A integral escalar de 1 ponto é definida como

$$\frac{i}{(4\pi)^2} A_0(m^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} , \quad (\text{D.1})$$

a integral escalar de 2 pontos

$$\frac{i}{(4\pi)^2} B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)[(k + p_1)^2 - m_1^2]} \quad (\text{D.2})$$

e a integral escalar de 3 pontos:

$$\begin{aligned} [i/(4\pi)^2] C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \\ = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)[(k + p_1)^2 - m_1^2][(k + p_2)^2 - m_2^2]} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Estas definições são compatíveis com as do programa algébrico *FeynCalc* [16], rotina que utilizamos para cálculo dos *loops*. Aqui vamos examinar apenas alguns casos de B_0 e C_0 presentes nos cálculos das correções virtuais. Apresentamos as soluções explícitas para B_0 e C_0 em $D = 4 - 2\epsilon$ dimensões:

$$B_0(p^2 = Q^2, m_0^2 = 0, m_1^2 = 0) = -i(4\pi)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k + Q)^2} \quad (\text{D.4})$$

O integrando, utilizando a parametrização de Feynman, torna-se:

$$\frac{1}{k^2(k+Q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{\mathcal{D}^2} \quad (\text{D.5})$$

onde:

$$\mathcal{D} = x(k+Q)^2 + (1-x)k^2 \quad (\text{D.6})$$

$$= k^2 + 2k \cdot Qx + xQ^2 \quad (\text{D.7})$$

$$= (k+Qx)^2 + Q^2x(1-x) \quad (\text{D.8})$$

$$= K^2 - M^2 \quad (\text{D.9})$$

onde $K = k + Qx$ é um *shift* no espaço de momento e $M^2 = -Q^2x(1-x)$. Com isso, $B_0(Q^2, 0, 0)$ torna-se:

$$\begin{aligned} B_0(Q^2, 0, 0) &= -i16\pi^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{(K^2 - M^2)^2} \quad (\text{D.10}) \\ &= -i16\pi^2 \int_0^1 dx \left[\frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(M^2)^{2-D/2}} \right] \\ &= \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^{2-D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{\frac{D}{2}-2} \end{aligned}$$

$$B_0(Q^2, 0, 0) = \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{(1-2\epsilon)} \quad (\text{D.11})$$

Estudemos o caso em que $Q^2 = 0$, a equação (D.10) se reduz a

$$B_0(Q^2 = 0, 0, 0) \sim \int \frac{d^D K}{(K^2)^2} \quad (\text{D.12})$$

Mas, utilizando a prescrição para as integrais do tipo [3]:

$$\int \frac{d^D k}{(-k^2)^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0 \quad (\text{D.13})$$

chegamos a $B_0(0, 0, 0) = 0$.

Vejamos o caso $C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0)$:

$$C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) = -i(4\pi)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+p_1)^2(k+p_2)^2} \quad (\text{D.14})$$

utilizando a parametrização de Feynman para o integrando:

$$\frac{1}{k^2(k+p_1)^2(k+p_2)^2} = \int dx dy dz \frac{2\delta(x+y+z-1)}{\mathcal{D}^3} \quad (\text{D.15})$$

Como $p_1^2 = 0$, $p_2^2 = Q^2$ e $(p_1 - p_2)^2 = 0$, temos $2p_1 \cdot p_2 = Q^2$. O denominador fica então:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= k^2 + 2k \cdot (p_1x + p_2y) + Q^2y \\ &= (k + p_1x + p_2y)^2 + Q^2y(1 - x - y) \\ &= K^2 - M^2 \end{aligned} \tag{D.16}$$

onde $K = k + p_1x + p_2y$ e $M^2 = -Q^2y(1 - x - y)$.

A integral torna-se agora:

$$\begin{aligned} C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) &= -i(16\pi^2)2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{(K^2 - M^2)^3} \\ &= \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{Q^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [y(1 - x - y)]^{\frac{D}{2}-3} \\ &= \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1 + \epsilon)\Gamma(-\epsilon)2^{2\epsilon+1}\pi^{1/2}}{Q^2\Gamma(1/2 - \epsilon)} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1+2\epsilon}} \end{aligned} \tag{D.17}$$

e fazendo algumas manipulações da função Gama, obtemos:

$$C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0) = \frac{1}{Q^2} \left(\frac{4\pi}{-Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1 + \epsilon)\Gamma^2(1 - \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \left(\frac{1}{-\epsilon} \right)^2 \tag{D.18}$$

Representações Diagramáticas de C_0

Discutimos aqui algumas representações diagramáticas compatíveis com a definição de C_0 . Estas representações podem ser úteis para se entender melhor os argumentos de C_0 .

Tomemos, por exemplo, uma teoria de campo escalar real ϕ com interação do tipo ϕ^3 *. A correção de um *loop* para o vértice ϕ^3 é dado, a menos de constantes (irrelevantes para esta discussão), por $C_0(q_1^2, (q_1 - q_2)^2, q_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) \sim \mathcal{I}$. Veja fig. D.1, abaixo.

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \frac{1}{(K^2 - m_0^2)[(K + q_1)^2 - m_1^2][(K + q_2)^2 - m_2^2]} \tag{D.19}$$

Com este diagrama acima deve ficar mais claro o significado dos argumentos de C_0 . Os três primeiros argumentos são os quadrados dos momentos das partículas externas e os três últimos são os quadrados das massas das partículas internas. É claro que, para o caso de uma teoria ϕ^3 com apenas um tipo de partícula (campo), os seis argumentos são iguais ao quadrado da massa da partícula.

*Apesar de ser uma teoria de campos não-física, é muito comum na literatura utilizar esta teoria para exemplificar alguns conceitos em teoria de campos. Veja, por exemplo, [3] e [37].

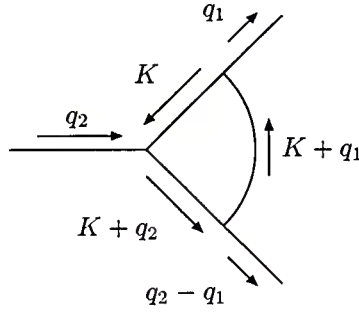


Figura D.1: Correção de um *loop* para o vértice ϕ^3 .

Analisemos o caso $C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0)$ e relacionemos isto à correção de um gluon virtual para o vértice de interação entre γ^* e quarks. Mas antes, para simplificar esta tarefa, vamos redefinir os momentos através de:

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 \\ p_2 &= q_2 - q_1 \end{aligned}$$

o que implica na troca dos momentos:

$$\begin{aligned} q_2 &\rightarrow p_1 + p_2 \\ K &\rightarrow K \\ K + q_2 &\rightarrow K + p_1 + p_2 \\ K + q_1 &\rightarrow K + p_1 \end{aligned}$$

Note que \mathcal{I} é invariante sob deslocamentos no espaço de momentos, assim podemos fazer a mudança $K + p_1 \rightarrow k$, obtemos assim o diagrama da fig. D.2:

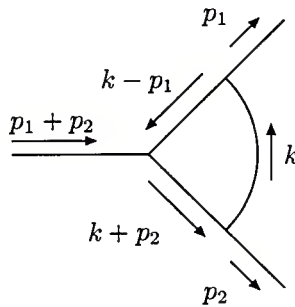


Figura D.2: Diagrama com os momentos redefinidos.

A integral de 3 pontos torna-se, então:

$$C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$$

$$\sim \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)[(k - p_1)^2 - m_0^2][(k + p_2)^2 - m_2^2]} \quad (\text{D.20})$$

Enfim vejamos $C_0(0, 0, Q^2, 0, 0, 0)$, que será proporcional a

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k - p_1)^2(k + p_2)^2} \quad (\text{D.21})$$

E podemos interpretar como o decaimento de uma partícula de massa Q em 2 partículas sem massa, e estas trocariam uma terceira partícula, virtual e sem massa. Como poderíamos esperar intuitivamente, esta estrutura é semelhante ao caso da correção de um gluon virtual ao vértice $\gamma^* q\bar{q}$ no processo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

Apêndice E

As Funções “+”

A função $[F(x)]_+$ é uma distribuição bem comportada apenas quando convoluída com uma função $g(x)$ suave que tende a zero suficientemente rápido com $x \rightarrow 1$ [15]. Uma definição comum é dada por:

$$\int_0^1 dx g(x) [F(x)]_+ = \int_0^1 dx g(x)F(x) - \int_0^1 dx g(1)F(x) \quad (\text{E.1})$$

Para uma função $g(x)$ constante, por exemplo $g(x) = 1$, temos uma propriedade importante destas distribuições:

$$\int_0^1 dx [F(x)]_+ = 0 \quad (\text{E.2})$$

Podemos utilizar o resultado acima para obter as distribuições “+” a partir de algumas funções, vejamos, por exemplo, a equação presente na função de estrutura do espalhamento inelástico profundo $z^\epsilon(1-z)^{-1-\epsilon}$ que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon \frac{1}{1-z} \approx \frac{1}{1-z} + \epsilon \frac{\ln z}{1-z} - \epsilon \frac{\ln(1-z)}{1-z} \quad (\text{E.3})$$

Dada a expressão acima é válida a equação:

$$\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon \frac{1}{1-z}\right]_+ \approx \frac{1}{(1-z)_+} + \epsilon \left(\frac{\ln z}{1-z}\right)_+ - \epsilon \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z}\right]_+ \quad (\text{E.4})$$

Agora calculemos o lado esquerdo da equação acima utilizando (E.2):

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^\epsilon(1-z)^{-1-\epsilon} &= \Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon) \\ &\approx -\frac{1}{\epsilon} - \frac{\pi^2}{6}\epsilon \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

que podemos escrever como:

$$\int_0^1 dz \left[z^\epsilon(1-z)^{-1-\epsilon} + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{\pi^2}{6}\epsilon\right) \delta(1-z) \right] = 0 \quad (\text{E.6})$$

Ou seja,

$$\left[\left(\frac{z}{1-z} \right)^\epsilon \frac{1}{1-z} \right]_+ = z^\epsilon (1-z)^{-1-\epsilon} + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{\pi^2}{6} \epsilon \right) \delta(1-z) \quad (\text{E.7})$$

Analogamente, para o segundo termo do lado direito da equação (E.4), temos:

$$\int_0^1 dz \frac{\ln z}{1-z} = -\frac{\pi^2}{6} \quad (\text{E.8})$$

que nos leva a:

$$\left(\frac{\ln z}{1-z} \right)_+ = \frac{\ln z}{1-z} + \frac{\pi^2}{6} \delta(1-z) \quad (\text{E.9})$$

Substituindo (E.7) e (E.9) em (E.4), obtemos (3.47):

$$\left(\frac{z}{1-z} \right)^\epsilon \frac{1}{1-z} \approx -\frac{1}{\epsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} - \epsilon \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ + \epsilon \frac{\ln z}{1-z} \quad (\text{E.10})$$

Mas nem sempre podemos usar (E.2) para calcular as funções “+”, pois em alguns casos temos que as integrais simplesmente divergem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \frac{1}{1-z} &\rightarrow \infty \\ \int_0^1 dz \frac{\ln(1-z)}{1-z} &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Para estes casos podemos usar uma definição um pouco diferente [15]:

$$[F(x)]_+ = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[F(x) \theta(1-x-\beta) - \delta(1-x-\beta) \int_0^{1-\beta} dz F(z) \right] \quad (\text{E.12})$$

Não é difícil verificar que (E.1) e (E.2) seguem diretamente de (E.12). Em (3.47) poderíamos ter usado a definição (E.12) para obter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)_+} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-z} \theta(1-z-\beta) + \ln \beta \delta(1-z-\beta) \right] \\ \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \theta(1-z-\beta) + \frac{1}{2} \ln^2 \beta \delta(1-z-\beta) \right] \end{aligned}$$

mas aparentemente isto serviria apenas para introduzir mais singularidades desnecessárias, parece melhor então simplesmente manter a forma de (3.47) como, aliás, é comum na literatura: [22] e [29].

Referências

- [1] Os artigos originais são coletados em M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W. A. Benjamin, Inc. (1964).
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc. (1988);
F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, John Wiley & Sons, Inc. (1990);
F. Halzen e A. D. Martin, *An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, Inc. (1984);
C. Quigg, *Gauge Theories of Electromagnetic, Weak and Strong Interactions*, Addison Wesley Publishing Co. (1990).
- [3] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1987)
- [4] Extensa bibliografia sobre o modelo a quarks é dada e comentada por O. W. Greenberg em *Am. J. Phys.* **50** (1982) 1074.
- [5] E. D. Bloom *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 930;
M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 935.
- [6] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179** (1969) 1547;
R. P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 1415.
- [7] G. 't Hooft em *Proc. Colloquium on Renormalization of Yang-Mills Fields and Applications on Particle Phys.*, editado por C. P. Korthals-Altes. Marseilles (1972). Veja também, *idem*, *Nucl. Phys.* **B254** (1985) 11.
D. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343.
H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.
- [8] S. Coleman e D. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 851.
- [9] H. Fritzsch e M. Gell-Mann em *Proc. XVI Conf. on High Energy Physics*, editado por J. Jackson e A. Roberts. Fermilab (1972).

- [10] C. N. Yang e R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191
- [11] G. Sterman *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 157.
- [12] A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 199.
- [13] W. Hollik em *Particle and Fields, VII J. A. Swieca Summer School*, editado por O. Éboli e V. Rivelles, World Scientific Co. Pte. Ltd. (1994).
- [14] G. Sterman, em *Proceedings of the 1991 TASI in Elementary Particle Physics*, editado por R. K. Ellis, C. T. Hill e J. D. Lykken, World Scientific Co. Pte. Ltd. (1992).
- [15] R. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison Wesley Publishing Co. (1989).
- [16] R. Mertig, *Guide to FeynCalc*, não publicado.
- [17] G. Sterman, *Partons, Factorization and Resummation*, preprint ITP-SB-96-4 e hep-ph/ 9606312.
- [18] L. D. Landau, *Nucl. Phys.* **13** (1959) 181.
- [19] S. Coleman e R. E. Norton, *Nuovo Cim.* **38** (1965) 438.
- [20] P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*, Cambridge Univ. Press (1977).
- [21] R. K. Ellis, W. J. Stirling e B. R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge Univ. Press (1996).
- [22] G. Altarelli, R. K. Ellis e G. Martinelli, *Nucl. Phys.* **B157** (1979) 461.
- [23] W. Greiner e A. Schäfer, *Quantum Chromodynamics*, Springer Verlag (1994).
- [24] G. Altarelli, R. K. Ellis e G. Martinelli, *Nucl. Phys.* **B153** (1978) 521.
- [25] W. Bardeen, A. Buras, D. Duke e T. Muta, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3998.
- [26] S. Drell e T. M. Yan, *Ann. Phys.* **66** (1971) 578.
- [27] G. T. Bodwin, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 2616,
J. Collins, D. Soper e G. Sterman, *Nucl. Phys.* **B261** (1985) 104, e *idem*,
hep-ph/9806234.
- [28] C. N. Brown *et al.*, Colaboração E605, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2637.

- [29] S. Willenbrock, *QCD corrections to $p\bar{p} \rightarrow W^+ + X$: A Case Study*. Aulas apresentadas no Theoretical Advanced Summer Institute (TASI) de 1989, editado por T. DeGrand e D. Toussiant, World Scientific Co. Pte. Ltd. (1990).
- [30] Antreasyan *et al.*, Colaboração CERN-R-209, Phys. Rev. Lett. , **48** (1981) 302.
- [31] F. Abe *et al.*, Colaboração CDF, Phys. Rev. **D49** (1994) 1.
- [32] P. N. Harriman, A. D. Martin, W. J. Stirling e R. G. Roberts, Phys. Rev. **D42** (1990) 798.
- [33] P. Nason, *Introduction to QCD*, notas do curso apresentado na 1997 European School of High Energy Physics, editado por N. Ellis, M. Neubert (1998).
- [34] M. Mangano, *Introduction to QCD*, notas do curso apresentado na X Escola de Verão J. A. Swieca (1999).
- [35] S. F. Novaes, *Cinemática Relativística*, notas do curso de Partículas Elementares.
- [36] W. Marciano, Nucl. Phys. **B88** (1975) 86.
- [37] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press (1983).

