UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Mestrado Profissional em Matemática

Relações de Recorrência e Aplicações no Ensino Médio

Izabella Dias Basso Aragão

Orientador
Professor Doutor Suetônio de Almeida Meira

Presidente Prudente, 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia

DMC - Departamento de Matemática e Computação

Mestrado Profissional em Matemática

Relações de Recorrência e Aplicações no Ensino Médio

Izabella Dias Basso Aragão

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Presidente Prudente.

Orientador

Professor Doutor Suetônio de Almeida Meira

2024

A659r

Aragão, Izabella Dias Basso
Relações de recorrência e aplicações no ensino médio / Izabella Dias Basso Aragão. -- Presidente Prudente, 2024
90 p. : tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Suetônio de Almeida Meira

1. Recorrências. 2. Sequências. 3. Fibonacci. 4. Aplicações. 5. Matemática Financeira. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp.
Dados fornecidos pelo autor(a).

Izabella Dias Basso Aragão

Relações de Recorrências e Aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Profº Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP - Câmpus de Presidente Prudente
Orientador

Profº Dr. José Roberto Nogueira
UNESP - Câmpus de Presidente Prudente

Profª Dra. Dayene Miralha de Carvalho Sano
UNOESTE - Universidade do Oeste Paulista

Presidente Prudente
26 de setembro de 2024

Dedico este trabalho ao meu esposo Cleiton, que nunca me deixou desistir, sempre me ouviu e colaborou em todos os momentos para que eu conseguisse finalizar essa trajetória do mestrado. Dedico também a meus pais, Éder e Simone, que muito me apoiaram, incentivaram e não mediram esforços para que completasse meus estudos. Dedico também à minha irmã, Rafaella, que muito me incentiva e celebra todas as conquistas comigo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que com seu amor me guia todos os dias de minha vida, de acordo com Sua vontade e providência. Sem Sua permissão não teria chegado até aqui.

Agradeço ao meu esposo Cleiton, que me incentivou durante toda essa jornada, sempre me ouvindo e fazendo o que fosse possível para me auxiliar a concluir essa jornada do mestrado.

Agradeço a meus pais, Éder e Simone, por todos os conselhos, pela boa criação que me deram e por nunca medirem esforços para que eu obtivesse um estudo de qualidade. Agradeço à minha irmã Rafaella por todo carinho, conselhos e alegria em celebrar cada conquista.

Agradeço ao meu orientador, professor Doutor Suetônio de Almeida Meira, por ter aceitado fazer parte deste trabalho, pelos conselhos, correções e incentivo. Agradeço também ao professor Doutor José Roberto Nogueira, que tem um papel importante até aqui, sempre me orientando, corrigindo e incentivando.

Agradeço aos colegas de turma, professores em geral, a todos os amigos e familiares.

“A vitória mais bela que se pode alcançar é a vitória sobre si mesmo.”

Santo Inácio de Loyola

Resumo

O estudo sobre sequências e, consequentemente, sobre recorrências, é muito importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e possui diversas aplicações interessantes, como a sequência de Fibonacci e em matemática financeira. Inicialmente, é feito um levantamento histórico sobre o tema, até os dias atuais. O presente trabalho busca fundamentar o estudo de recorrências com conceitos sobre sequências e seus limites. Em seguida é feito um estudo sobre progressões aritméticas e geométricas, tema muito importante no ensino médio, sendo tipos particulares de recorrências lineares de primeira ordem. O estudo é generalizado para o método de resolução dos diversos tipos de recorrências lineares de primeira ordem e de recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, sendo uma delas a sequência de Fibonacci. Por fim, são apresentadas sequências didáticas que podem ser aplicadas em turmas do ensino médio sobre Fibonacci e sua representação geométrica e sobre a relação entre recorrências e matemática financeira, ambas com o uso do *software* GeoGebra, mostrando sua importância no ensino de matemática.

Palavras-chave: Recorrências, Sequências, Fibonacci, Aplicações, Matemática Financeira.

Abstract

The study of sequences and, consequently, of recurrences, is very important for the development of logical reasoning and has several interesting applications, such as the Fibonacci sequence and in financial mathematics. Initially, a historical survey is carried out on the subject, up to the present day. This work seeks to base the study of recurrences on concepts about sequences and their limits. Next, a study is made of arithmetic and geometric progressions, a very important topic in high school, being particular types of first-order linear recurrences. The study is generalized to the method of solving the various types of first-order linear recurrences and second-order linear recurrences with constant coefficients, one of which is the Fibonacci sequence. Finally, didactic sequences are presented that can be applied in high school classes on Fibonacci and its geometric representation and on the relationship between recurrences and financial mathematics.

Key Words: Recurrences, Sequences, Fibonacci, Applications, Financial Math.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Os padrões estão presentes em todos os lugares e as recorrências buscam estudar esses padrões, expressando-os de forma matemática para modelar diversos fenômenos no campo da biologia, economia, entre outros. O estudo sobre equações de recorrência está dentro da grande área da modelagem matemática, que busca observar os diferentes fenômenos, modelar matematicamente, testar as hipóteses, obter resultados e tirar conclusões. As equações de recorrência modelam sistemas dinâmicos discretos, que são aqueles que evoluem em intervalos de tempo inteiros.

Problemas com recorrência envolvem sequências, onde para descobrir o termo seguinte é necessário saber os termos anteriores. Quando para descobrir o próximo termo há a necessidade de saber apenas o termo imediatamente anterior, dizemos que a recorrência é de primeira ordem; quando são necessários dois termos anteriores, dizemos que a recorrência é de segunda ordem. Neste trabalho, nos dedicaremos ao estudo destes dois tipos de recorrência, suas soluções e aplicações.

Iniciamos o trabalho com um breve levantamento histórico sobre a evolução do estudo dessas sequências e seus principais representantes. Como fundamento teórico das equações de recorrências dedicamos o terceiro capítulo ao estudo das sequências e seus limites, apresentando o conceito de limite e seus principais resultados, tanto limites finitos quanto infinitos.

O quarto capítulo é sobre progressões aritmética e geométrica, sendo estas dois tipos especiais de recorrência muito trabalhadas no ensino médio. Para ambas as sequências são mostrados sua definição, classificação, termo geral e soma dos termos de uma sequência finita ou infinita.

O quinto capítulo apresenta a definição de recorrências lineares de primeira ordem e o método de solução para os três tipos dessas recorrências: quando não possui termo independente, quando a função que multiplica o termo x_n da recorrência é constante igual a 1 e quando a recorrência possui termo independente e uma função que multiplica x_n diferente de 1.

O sexto capítulo traz os principais resultados sobre recorrências lineares de segunda ordem, apresentando o método de solução quando a recorrência é homogênea e de coeficientes constantes, associando uma equação característica do segundo grau à recorrência, podendo apresentar duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais ou raízes complexas conjugadas. Também é apresentado o método de solução quando a recorrência é não homogênea e de coeficientes constantes. Neste capítulo aparece a famosa sequência de Fibonacci e o número de ouro associado à ela.

No sétimo e último capítulo são apresentadas três sequências didáticas que podem ser aplicadas para turmas do primeiro ou segundo anos do ensino médio envolvendo recorrências. A primeira proposta aborda a sequência de Fibonacci e a construção de sua espiral no *software* GeoGebra; a segunda proposta aborda a relação entre progressão aritmética e juros simples, mostrando o comportamento das sequências no GeoGebra e a terceira proposta relaciona juros compostos e progressão geométrica, também com a construção das sequências no GeoGebra e um exemplo real envolvendo juros de cartão de crédito.

2 Levantamento Histórico

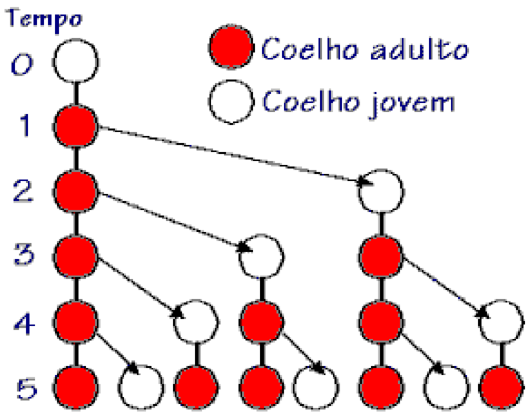
É importante iniciarmos nossa discussão sobre recorrências observando sua presença e evolução ao longo da história na matemática. Um dos primeiros problemas envolvendo esse tipo de sequência foi proposto por Leonardo Fibonacci (1170-1250) no século XIII com o "problema dos coelhos", em seu livro Liber Abaci. Este problema inicia-se com um casal de coelhos e questiona o número de coelhos ao longo do tempo, quando um casal de coelhos procria outro casal de coelhos a cada mês, sendo que cada casal se torna fértil após um mês de vida.

Figura 1 – Leonardo Fibonacci

Fonte: Disponível em <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/Fibonacci2.jpg>. Acesso em 26 jul. 2024

Na imagem a seguir podemos ver que o número de coelhos adultos forma a sequência de Fibonacci $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots)$, que será estudada mais à frente, onde os dois termos iniciais são iguais a 1 e o terceiro termo em diante são obtidos a partir da soma dos dois termos anteriores.

Figura 2 – Problema dos coelhos de Fibonacci



Fonte: Disponível em <https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/alegria/img/coelhos.png>. Acesso em 26 jul. 2024

Outro fato interessante diz respeito ao matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ainda no século XVIII, quando era criança. Conta a história que seu professor, buscando o silêncio da turma, propôs o desafio de calcular o resultado da soma de todos os números de 1 a 100. Gauss respondeu quase imediatamente e sem cálculos, observando que a soma dos extremos era sempre a mesma:

$$1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101,\ 3 + 98 = 101, \dots,\ 49 + 52 = 101\ e\ 50 + 51 = 101$$

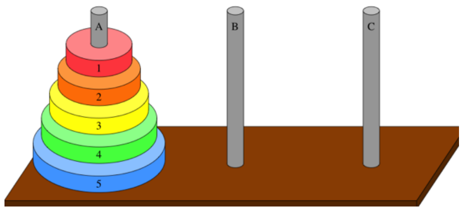
Dessa forma, temos 50 pares cuja soma é 101, resultando em $50 \cdot 101 = 5050$. Esse raciocínio deu origem à fórmula da soma dos n termos de uma progressão aritmética, que será estudada nos próximos capítulos.

Figura 3 – Carl Friedrich Gauss

Fonte: Disponível em <https://engenharia360.com/wp-content/uploads/2022/01/Infoenem.jpg>. Acesso em 26 jul. 2024

O matemático Édouard Lucas (1842-1891) propôs o problema da Torre de Hanói em 1883 (século XIX), que também pode ser resolvido por recorrência. O problema consiste em transferir discos de tamanhos diferentes de uma haste para outra, nunca colocando um disco de diâmetro maior sobre um disco de diâmetro menor. O problema surgiu de uma lenda hindu, em que na cidade de Brenares (Índia) um deus fixou em uma haste 64 discos de ouro e mais duas hastes auxiliares, usadas para fazer a movimentação já descrita e, quando os monges terminassem a tarefa, o mundo acabaria, criando o novo mundo de Hanoi.

Figura 4 – Torre de Hanoi



Fonte: Disponível em <https://cdn.kastatic.org/ka-perseus-images/5b5fb2670c9a185b2666637461e40c805fcc9ea5.png>. Acesso em 26 jul. 2024

Lucas também propôs a sequência de Lucas, que segue o mesmo padrão da sequência de Fibonacci, dada por $(1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots)$, cuja solução se parece com Fibonacci.

Figura 5 – Édouard Lucas

Fonte: Disponível em <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ad/Elucas_1.png>. Acesso em 26 jul. 2024

Graham, Knuth e Patashnik, no século XX, estudaram as aplicações das recorrências na teoria dos números, funções geradoras, na teoria da computação, entre outras áreas.

Podemos perceber como os estudos em relação a este assunto datam de muitos séculos e como foi evoluindo, permanecendo atual e colaborando com as novas tecnologias do mundo moderno.

3 Sequências e seus Limites

O estudo de sequências é a base de todo este trabalho, sendo o ponto de partida para o estudo de progressões aritméticas e geométricas e da resolução de equações de recorrência de primeira e segunda ordem, temas dos próximos capítulos.

Neste capítulo, definiremos sequências, os principais resultados ligados a elas e também estudaremos os limites de sequências de números reais.

3.1 Definição e Características das Sequências

Os resultados apresentados nesta seção são resultados particulares das sequências no infinito, que serão apresentadas ao decorrer do trabalho.

Definição 3.1: Uma sequência de números reais é uma função que associa cada número n natural a um número real x_n, que são chamados termos da sequência. Essa função é dada por

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow x(n) = x_n$$

.

A notação de uma sequência é dada geralmente por $(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n,\ \ldots)$. Também pode ser denotada por (x_n) ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dessa forma, o primeiro termo da sequência é x_1, obtido a partir de $x(1)$; o segundo termo é x_2, obtido a partir de $x(2)$, e assim por diante.

Note que neste trabalho não estamos considerando o zero um natural, para facilidade nas definições, demonstrações e exemplos.

Exemplo 3.1: A sequência $(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots)$ é uma sequência constante, cuja definição é $x_n = 2$ para todo n natural.

Exemplo 3.2: A sequência $(3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots)$ é associada à tabuada do 3 e pode ser definida pela função $x_n = 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3 (BASSANEZI, 2012): A sequência de Fibonacci é um exemplo clássico, onde os dois primeiros termos são iguais a 1 e o terceiro termo em diante são definidos a partir da soma dos dois termos anteriores. A sequência é dada por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,\ \ldots)$. É definida por $x_1 = x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$, para todo natural $n \geq 3$. Esta sequência será amplamente explorada nessa dissertação.

Podemos, a partir da sequência de Fibonacci, desenhar quadrados cujas áreas são os termos da sequência, formando a espiral de Fibonacci, presente nos quadros da Monalisa, no formato das conchas dos caracois, entre outros. Essa sequência será abordada detalhadamente nos próximos capítulos.

Definição 3.2: Uma *subsequência* de uma sequência (x_n) também é uma sequência, restrita a um subconjunto infinito $N_s \subset \mathbb{N}$. Este subconjutno é dado por

$$N_s = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$$

Podemos denotar uma subsequência por $(x_{n1},\ x_{n2},\ x_{n3},\ \ldots,\ x_{nk},\ \ldots)$ ou (x_{nk}) ou $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 3.4: Dada a sequência $(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots)$, temos a subsequência $(0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ quando n é ímpar e a subsequência $(1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$ quando n é par.

Definição 3.3: Quando, em uma sequência (x_n), temos que $x_n \geq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, dizemos que a sequência é *limitada inferiormente*. Quando $x_n \leq a$, a sequência é *limitada superiormente*.

Definição 3.4: Uma sequência é *limitada* quando existe $B > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq B$. Nesse caso, a sequência (x_n) é limitada superiormente e inferiormente. Da mesma forma, uma sequência (x_n) é *ilimitada* quando não é limitada.

No exemplo 3.3, a sequência de Fionacci é limitada inferiormente por 1, mas não é limitada superiormente. Já no exemplo 3.1, a sequência é limitada por 2.

Definição 3.5: Dizemos que uma sequência (x_n) é *monótona não-crescente* quando temos $x_{n+1} \leq x_n$ ou *monótona não-decrescente* quando temos $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.6: Uma sequência é *decrescente* quando $x_{n+1} < x_n$ e é *crescente* quando $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

No exemplo 3.2 a sequência é crescente e no exemplo 3.3 a sequência é monótona não-decrescente.

3.2 Limite de Sequências de Números Reais

Nesta seção, estudaremos a definição de limite de uma sequência e seus principais resultados. O limite será definido para um ponto, que é um caso particular de sequências no infinito.

Definição 3.7: Uma sequência de números reais (x_n) é *limitada* quando existe $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$, tal que $|x_n| < B$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências dos exemplos 3.1 e 3.4 são limitadas. A sequência do exemplo 3.1 tende ao número 2 e a sequência 3.4 pertence ao conjunto $[0,\ 1]$.

Exemplo 3.5: A sequência $s_n = sen(n)$, $n \in \mathbb{N}$ possui valores entre -1 e 1, sendo limitada e pertencendo ao conjunto $[-1,\ 1]$.

Definição 3.8: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite* de uma sequência (x_n), $n \in \mathbb{N}$, quando dado um número real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tal que $|x_n - L| < \varepsilon$. Escrevemos que $lim\ x_n = L$.

Definição 3.9: Uma sequência *convergente* é aquela cujo limite existe. Quando o limite de uma sequência não existe, esta é dita *divergente*.

Exemplo 3.6 (LIMA, 2004): Seja a sequência $(y_n) = (c,\ c^2,\ c^3,\ \ldots,\ c^n,\ \ldots)$, $0 < c < 1$. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tal que $c^{n_0} < \varepsilon$. Temos:

$$|x_n - 0| = |c^n - 0| = c^n$$

Como $n > n_0$, seque que $c^n < c^{n_0} < \varepsilon$. Logo $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

Exemplo 3.7 (SIMÕES, 2014): Seja a sequência $x_n = \frac{1}{n}$. Mostremos que o limite de x_n quando n tende ao infinito é igual a 0.
De fato, tomemos n e n_0 naturais, $n > n_0$. Seja $\varepsilon > 0$, tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Assim:

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Como $n > n_0$, temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Portanto, da definição 3.8 segue que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 3.8 (ELLER, 2015): Tomemos agora a sequência $z_n = \frac{n-1}{n}$ e mostremos que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.
Sabemos que $z_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ e seja $\varepsilon > 0$, tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, $n > n_0$ e $n,\ n_0 \in \mathbb{N}$.
Dessa forma,

$$|z_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Como $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Teorema 3.1.*Unicidade do limite.* O limite de uma sequência é único.
Demonstração: Seja (x_n) uma sequência e suponhamos que exista $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, $b \neq a$, e tomemos, arbitrariamente, $b > a$. Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{3.1}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, também existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n > n_2$ e $n_2 \neq n_1$, tal que

$$|x_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon \tag{3.2}$$

Tomemos $n_0 = min\{n_1,\ n_2\}$ e $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Desenvolvendo (3.1), temos:

$$a - \left(\frac{b-a}{2}\right) < x_n < a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow \frac{3a-b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2} \tag{3.3}$$

Desenvolvendo (3.2), temos:

$$b - \left(\frac{b-a}{2}\right) < x_n < b + \frac{b-a}{2} \Rightarrow \frac{b+a}{2} < x_n < \frac{3b-a}{2} \tag{3.4}$$

A partir de (3.3) e (3.4) chegamos a um absurdo, pois x_n não pode ser ao mesmo tempo menor e maior que $\frac{a+b}{2}$. Logo, $a = b$ e o limite de (x_n) é único.

Teorema 3.2: Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Se existe $M < L$, então $x_n > M$, para todo n suficientemente grande. Ao contrário, se existe $M > L$, então $x_n < M$, para todo n suficientemente grande.

Demonstração: Mostremos o primeiro caso. Seja $\varepsilon = L - M$, $\varepsilon > 0$ e, assim, $M = L - \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

Como $M = L - \varepsilon$, temos que $x_n > M$.

Mostremos agora o segundo caso. Seja $\varepsilon = M - L$, $\varepsilon > 0$ e, assim, $M = \varepsilon + L$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

Como $M = \varepsilon + L$, temos que $x_n < M$.

Teorema 3.3. *Teorema do Sanduíche.* Sejam as sequências (x_n), (y_n) e (z_n), tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} z_n = L$.

Demonstração: Como $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \tag{3.5}$$

Da mesma forma, como $\lim_{n\to\infty} y_n = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n > n_2$, tal que

$$|y_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon \tag{3.6}$$

Tomemos $n_0 = max\{n_1,\ n_2\}$. Dado $\varepsilon > 0$ e $n > n_0$, segue de (3.5) e (3.6) que:

$$L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} z_n = L$.

3.3 Sequências no Infinito

Definiremos e provaremos alguns resultados quando as sequências tendem a mais infinito ou menos infinito. Quando isso acontece, as sequências não são convergentes. Também mostraremos alguns casos anteriores para as sequências no infinito.

Definição 3.10: Uma sequência (x_n) tende a mais infinito $(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty)$ quando existe um $n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0$, e, tomando $R > 0$, tem-se que $x_n > R$. Da mesma forma, uma sequência x_n tende a menos infinito $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ quando existe um $n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0$, e, tomando $R > 0$, tem-se que $x_n < -R$.

Quando $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, a sequência (x_n) é ilimitada superiormente. Já o fato de uma sequência ser ilimitada superiormente, não garante que seu limite seja infinito. Basta pensar nas sequências do tipo $y_n = (-a)^n$, onde a é um número natural.

Temos então algumas proposições envolvendo operações com limites de sequências:

Proposição 3.1: Seja (b_n) uma sequência onde $b_n \geq h,\ h \in \mathbb{R}$, e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

Demonstração: Como $b_n \geq h$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar um $M > 0$ qualquer, onde existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow a_n > M - h$$

Assim, temos:

$$n > n_0 \Longrightarrow a_n + b_n > M - h + h = M$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

Proposição 3.2: Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $h > 0,\ h \in \mathbb{R}$, tal que $b_n > h$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Demonstração: Como $b_n > h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomamos um $M > 0$ qualquer, onde existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow a_n > \frac{M}{h}$$

Assim, temos:

$$n > n_0 \Longrightarrow a_n b_n > \frac{M}{h} h = M$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.

Proposição 3.3: Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números reais. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, com $b_n > 0$, e $a_n > h > 0$, $h \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Demonstração: Sendo $M > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow b_n < \frac{h}{M}$$

Logo,

$$n > n_0 \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} > h\frac{M}{h} = M$$

Daí, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Proposição 3.4: Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números reais e seja h real, $h > 0$. Se $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e $|a_n| \leq h$, então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Demonstração: Como (a_n) é limitada, temos que existe $h > 0$ tal que $|a_n| \leq h$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $m > 0$ qualquer e existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow b_n > \frac{h}{m}$$

Logo,

$$n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < h\frac{m}{h} = m$$

Daí, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Segue alguns resultados adicionais envolvendo sequências no infinito:

Resultado 1: $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$, se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Resultado 2: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e $h > 0$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(h a_n) = +\infty$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e $h > 0$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}(h a_n) = -\infty$$

Resultado 3: Tomemos (a_n) e (b_n) sequências de números reais. Se $a_n \geq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
O contrário também vale: se $a_n \geq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Resultado 4: Temos duas situações, sendo (a_n) e (b_n) sequências de números reais e $h \in \mathbb{R}$:
Primeira situação: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = h$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, segue, para $h > 0$, que $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$; para $h < 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$;
Segunda situação: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = h$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, segue, para $h > 0$, que $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$; para $h < 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$;

Exemplo 3.9 (LIMA, 2004): Temos que $\lim_{n\to\infty} \log(2^n) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \log 2 = +\infty$.

Exemplo 3.10 (LIMA, 2004): Seja k um número natural, então $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$, aplicando $k - 1$ vezes a proposição 3.2.

Exemplo 3.11: Temos que $\lim_{n\to+\infty} \left[3 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = 3 - 0 = 3$.

Devemos sempre nos lembrar que algumas expressões são indeterminações, tais como: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 1^∞ e 0^0.

4 Progressões Aritmética e Geométrica

Estudaremos agora dois tipos de sequências, as progressões Aritmética e Geométrica, que são de grande importância para a solução de recorrências e possuem inúmeras aplicações nos estudos de matemática no ensino médio. Essas progressões também serão estudadas quando são finitas ou infinitas.

4.1 Progressão Aritmética

4.1.1 Definição e Classificação

Uma Progressão Aritmética (PA) é uma recorrência, na qual o próximo termo é sempre a soma do termo anterior a uma parcela fixa, que chamamos de razão (r). Sendo a_1 o primeiro termo, temos,

$$a_n = a_{n-1} + r, \ \forall n \geq 2$$

Exemplo 4.1: Veremos algumas progressões aritméticas:
A. A sequência $(7, \ 12, \ 17, \ 22, \ \ldots)$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo $a_1 = 7$ e razão $r = 5$.
B. A sequência $(3, \ 3, \ 3, \ 3, \ \ldots)$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 0$.
C.A sequência $(4, \ 2, \ 0, \ -2, \ \ldots)$ é uma progressão aritmética cujo primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $r = -2$.

Observamos pelo exemplo anterior que existem alguns tipos de progressão aritmética, definidos a seguir.

Crescente: É a PA cujo termo seguinte é estritamente maior que o termo anterior, como no exemplo 4.1, item A. Neste caso a razão é positiva, pois, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = r > 0$.

Outro exemplo de progressão aritmética crescente seria $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \ldots\right)$, onde $a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{1}{3}$.

Constante: É a PA cujo termo seguinte é igual ao termo anterior, como no exemplo 4.1, item B. Neste caso a razão é zero, pois, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = r = 0$.
Outro exemplo de progressão aritmética constante seria $(-10,\ -10,\ -10,\ -10,\ \ldots)$, onde $a_1 = -10$ e $r = 0$.

Decrescente: É a PA cujo termo seguinte é estritamente menor que o termo anterior, como no exemplo 4.1, item C. Neste caso a razão é negativa, pois, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = r < 0$.
Outro exemplo de progressão aritmética decrescente seria $\left(2,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \ldots\right)$, onde $a_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{2}$.

Exemplo 4.2: Determine uma PA de três termos cuja soma é igual a 21 e o produto é igual a 315.

Solução: Podemos escrever a PA da forma $(x - r,\ x,\ x + r)$. Efetuando a soma dos termos, temos:

$$3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

Efetuando o produto dos termos, temos:

$$(49 - r^2) \cdot 7 = 315 \Rightarrow 49 - r^2 = 45 \Rightarrow r = \pm 2$$

Há então duas possibilidades de resposta. Se $r = 2$, a PA é crescente e dada por $(5,\ 7,\ 9)$; se $r = -2$, a PA é decrescente e dada por $(9,\ 7,\ 5)$.

Exemplo 4.3 (LIMA, 2006): Os ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine o ângulo mediano.

Solução: A PA formada possui cinco termos e pode ser escrita como

$$(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r)$$

Como um pentágono pode ser dividido em três triângulos, a soma de seus ângulos internos é igual a $540°$. Usando este fato, temos:

$$5x = 540 \Rightarrow x = 108$$

Desta forma, o ângulo central mede $108°$.

4.1.2 Termo Geral

Iremos determinar uma fórmula para descobrir qualquer termo de uma PA, sem precisar escrevê-los um a um, chamada de termo geral de uma progressão aritmética. Partindo da definição de PA, sendo o primeiro termo a_1 e a razão r, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r \\ \qquad\vdots \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

Portanto, o termo geral de uma progressão aritmética é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Provemos a validade da fórmula por meio da indução finita.

Demonstração: A relação é válida para $n = 1$, pois:

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r = a_1$$

Suponhamos que vale para $n = k$, sendo a hipótese de indução $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$. Provemos que vale para $n = k+1$. Assim, usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_k + r &= [a_1 + (k-1) \cdot r] + r \\ &= a_1 + k \cdot r - r + r \\ &= a_1 + k \cdot r, \ onde\ k = n - 1 \end{aligned}$$

Logo, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ e a relação é válida.

Em decorrência do resultado anterior, podemos determinar qualquer termo a_n de uma PA a partir de um termo a_m, com $1 \leq m < n$, da seguinte forma:

$$a_n = a_m + (n - m) \cdot r$$

Exemplo 4.4: Determine o 25° termo da PA cujo primeiro termo é 4 e a razão é 7.
Solução: Aplicando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_{25} = 4 + (25 - 1) \cdot 7 = 4 + 24 \cdot 7 = 172$$

Logo, $a_{25} = 172$.

Exemplo 4.5 (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2011): O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?
A. 38000
B. 40500
C. 41000
D. 42000
E. 48000

Solução: Notemos que a sequência do número de passagens vendidas forma uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 33000$ e cuja razão é $r = 1500$. O termo referente ao mês de julho é a_7 e, aplicando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_7 = 33000 + 6 \cdot 1500 = 42000$$

Logo, a alternativa correta é a letra D.

4.1.3 Soma dos Termos

Mostremos agora a relação que permite determinar a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Vamos representar essa soma por S_n, da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Mostremos primeiro que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$. Temos:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_n - 2r = a_1 + a_n$$

Seguindo dessa forma, vemos que a soma de todas as parcelas é igual a $a_1 + a_n$. Agora, escrevemos a soma dos n primeiros termos da PA de duas formas:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Somando ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Vimos que todas as parcelas de soma da expressão anterior equivalem a $a_1 + a_n$ e temos n parcelas. Logo,

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Portanto, em toda progressão aritmética a soma de seus n primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$.

Exemplo 4.6: Determine a soma dos 21 primeiros termos da PA $(-7,\ -1,\ 5,\ 11,\ \ldots)$.
Solução: O 21° termo dessa PA é dado por:

$$a_{21} = -7 + 20 \cdot 6 = -7 + 120 = 113$$

Assim, a soma dos 21 primeiros termos é:

$$S_{21} = \frac{21 \cdot (-7 + 113)}{2} = 21 \cdot 53 = 1113$$

Exemplo 4.7 (LIMA, 2006): Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e estão compreendidos entre 200 e 400.

Solução: O primeiro inteiro que obedece ao pedido no enunciado é 205, pois $205 = 11 \cdot 18 + 7$, e o último é 392, pois $392 = 11 \cdot 35 + 7$. Assim, os números dessa sequência formam uma PA de razão 11:

$$(205,\ 216,\ 227,\ \ldots,\ 392)$$

Primeiro, descobrimos o número de termos dessa PA a partir do termo geral:

$$392 = 205 + (n-1) \cdot 11 \Rightarrow (n-1) \cdot 11 = 187 \Rightarrow n = 18$$

Assim, a soma dos termos é:

$$S_{18} = \frac{18 \cdot (205 + 392)}{2} = 9 \cdot 597 = 5373$$

Assim, a soma dos inteiros compreendidos entre 200 e 400 que divididos por 11 resultam em resto 7 é igual a 5373.

4.2 Progressão Geométrica

4.2.1 Definição e Classificação

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma recorrência, na qual o próximo termo sempre é o produto do termo anterior com um valor fixo, chamado de razão (q). Sendo a_1 o primeiro termo, temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \ \forall \ n \geq 2$$

Exemplo 4.8: Veremos algumas progressões geométricas:

A. A sequência $(3, \ 6, \ 12, \ 24, \ \ldots)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 3$ e razão $q = 2$;

B. A sequência $(-4, \ -4, \ -4, \ -4, \ \ldots)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = -4$ e razão $q = 1$;

C. A sequência $\left(2, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots\right)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e razão $q = \frac{1}{2}$;

D. A sequência $(2, \ 0, \ 0, \ 0, \ \ldots)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e razão $q = 0$;

E. A sequência $(-3, \ 3, \ -3, \ 3, \ \ldots)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = -3$ e razão $q = -1$;

Diferente das progressões aritméticas, existem cinco tipos de progressões geométricas, definidos a seguir.

Crescente: É a PG cujo termo seguinte é estritamente maior que o termo anterior. Isto pode ocorrer no caso em que os termos da PG são positivos e a razão é maior que 1, como no exemplo 4.8, item A. Também pode ocorrer no caso em que os termos da PG são negativos e a razão é um número entre 0 e 1, por exemplo: $\left(-16,\ -4,\ -1,\ -\frac{1}{4},\ \ldots\right)$, com razão $q = \frac{1}{4}$.

Constante: É a PG cujo termo seguinte é igual ao anterior, podendo ocorrer no caso em que os termos da sequência são diferentes de zero e a razão é igual a 1, como no exemplo 4.8, item B. Também pode ocorrer no caso em que os termos da sequência são todos nulos, com uma razão qualquer.

Decrescente: É a PG cujo termo seguinte é estritamente menor que o termo anterior. Isto pode ocorrer no caso em que os termos da PG são positivos e a razão é um número entre 0 e 1, como no exemplo 4.8, item C. Também pode ocorrer no caso em que os termos da PG são negativos e a razão é um número maior que 1, por exemplo: $(-3,\ -6,\ -12,\ -24,\ \ldots)$, com razão $q = 2$.

Estacionária: É uma PG em que o primeiro termo é diferente de zero e todos os termos a partir do segundo são iguais a zero, com razão igual a zero. Um exemplo é o item D do exemplo 4.8, e outro exemplo é a sequência $(-5,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$.

Alternante: É uma PG em que os termos possuem sinais alternados, com a razão negativa, como no item E do exemplo 4.8. Outro exemplo seria a sequência $(2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \ldots)$, cuja razão é $q = -3$.

Exemplo 4.9: A sequência $(x + 2,\ x + 12,\ x + 42,\ \ldots)$ é uma progressão geométrica. Determine seu quarto termo.
Solução: Primeiro precisamos descobrir o valor de x. Como em progressão geométrica a razão é multiplicativa, basta dividir o segundo pelo primeiro termo e o terceiro pelo

segundo termo, igualando seus resultados:

$$\begin{aligned}\frac{x+12}{x+2} &= \frac{x+42}{x+12} \\ x^2+24x+144 &= x^2+44x+84 \\ 20x &= 60 \\ x &= 3\end{aligned}$$

Dessa forma, temos a sequência inicial $(5,\ 15,\ 45,\ \ldots)$, com razão $q = 3$. A partir disso, o quarto termo da sequência é dado por $45 \cdot 3 = 135$.

Exemplo 4.10: Determine uma sequência em progressão geométrica de três números, cuja soma é 52 e cujo produto é 1728.

Solução: Podemos escrever a sequência como $(x,\ xq,\ xq^2)$, onde x é o primeiro termo e q é a razão. Iniciando pelo produto, temos:

$$x^3q^3 = 1728 \Longrightarrow (xq)^3 = 1728 \Longrightarrow xq = 12$$

Pela soma dos termos, temos:

$$\begin{aligned}x+xq+xq^2 &= 52 \\ \frac{12}{q}+12+12q &= 52 \\ \frac{12}{q} &= 40-12q \\ -12q^2+40q-12 &= 0 \\ -3q^2+10q-3 &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, obtemos duas possíveis razões: $q = \frac{1}{3}$ ou $q = 3$. Se $q = \frac{1}{3}$, o primeiro termo é $x = 36$ e a sequência é dada por $(36,\ 12,\ 4)$. Se $q = 3$, o primeiro termo é $x = 4$ e a sequência é dada por $(4,\ 12,\ 36)$.

4.2.2 Termo Geral

Assim como em progressões aritméticas, existe uma fórmula que nos auxilia ao tentar encontrar qualquer termo de uma progressão geométrica, sem a necessidade de escrever a sequência termo a termo, chamada de fórmula do termo geral. Partindo da definição de PG, sendo o primeiro termo $a_1 \neq 0$ e a razão $q \neq 0$, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{cases}$$

Portanto, o termo geral de uma progressão geométrica é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Provemos a validade da fórmula por meio da indução finita.

Demonstração: A relação é valida para $n = 1$, pois:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$$

Suponhamos que vale para $n = k$, sendo a hipótese de indução:

$$a_k = a_1 q^{k-1} \Longrightarrow a_k = a_1 \cdot \frac{q^k}{q} \Longrightarrow q^k = \frac{a_k \cdot q}{a_1}$$

Provemos que vale para $n = k + 1$, usando a hipótese de indução:

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \Longrightarrow a_{k+1} = a_1 \cdot \frac{a_k \cdot q}{a_1} \Longrightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q$$

onde $k = n - 1$. Logo, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e a relação é válida.

Exemplo 4.11 (MORGADO, 2015): Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

Solução: Tomemos como a_1 o valor inicial. O valor ao final de 12 meses é dado como a_{13} e pode ser calculado usando a fórmula do termo geral de uma PG, sendo a razão $q = 1 - 0,05 = 0,95$. Assim, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Longrightarrow a_{13} = a_1 \cdot (0,95)^{12} \Longrightarrow a_{13} \approx 0,54a_1$$

Dessa forma, resta aproximadamente 54% do valor inicial, representando uma redução anual de aproximadamente 46%.

Exemplo 4.12 (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2023): Um agricultor é informado sobre um método de proteção para sua lavoura que consiste em inserir larvas específicas, de rápida reprodução. A reprodução dessas larvas faz com que sua população multiplique-se por 10 a cada 3 dias e, para evitar eventuais desequilíbrios, é possível cessar essa reprodução aplicando-se um produto X. O agricultor decide iniciar esse método com 100 larvas e dispõe de 5 litros do produto X, cuja aplicação recomendada é de exatamente 1 litro para cada população de 200000 larvas. A quantidade total do produto X de que ele dispõe deverá ser aplicada de uma única vez. Quantos dias após iniciado esse método o agricultor deverá aplicar o produto X?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 12

E. 18

Solução: Como o produto será aplicado de uma só vez e é necessário 1 litro para cada 200000 larvas, será aplicado quando o número de larvas for de 1000000. O problema pode ser representado por uma PG, onde $a_1 = 100$, $q = 10$ e $a_n = 1000000$. Dessa forma, aplicando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Longrightarrow 1000000 = 100 \cdot 10^{n-1} \Longrightarrow 10^n = 100000 \Longrightarrow n = 5$$

Logo, $a_5 = 1000000$ e de a_1 até a_5 temos quatro intervalos de três dias cada, totalizando 12 dias. Assim, o produto deverá ser aplicado após 12 dias, sendo correta a alternativa D.

4.2.3 Soma dos Termos de PG Finita

Veremos agora que existem maneiras diferentes de calcular a soma dos termos de uma PG finita ou infinita. Comecemos pela PG finita. Supondo $q \neq 1$, a soma dos termos de uma PG finita cujo primeiro termo é a_1 e último termo é a_n, é dada por:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{4.1}$$

Multiplicando todos os membros da equação (4.1) por q, temos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \tag{4.2}$$

Subtraindo os termos da equação (4.1) de (4.2), obtemos:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \Longrightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

Portanto, a soma dos termos de uma progressão geométrica finita é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

Provemos a validade da fórmula por meio da indução finita.

Demonstração: A relação é válida para $n = 1$, pois:

$$S_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1} = a_1$$

Suponhamos que vale para $n = k$, sendo a hipótese de indução $S_k = \dfrac{a_1(q^k-1)}{q-1}$. Provemos que vale para $n = k+1$, usando a hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \\
&= \frac{a_1(q^k-1)}{q-1} + a_1 \cdot q^k = \\
&= \frac{a_1(q^k-1) + a_1 \cdot q^{k+1} - a_1 \cdot q^k}{q-1} = \\
&= \frac{a_1(q^k-1) + a_1(q^{k+1} - q^k)}{q-1} = \\
&= \frac{a_1(q^k - 1 + q^{k+1} - q^k)}{q-1} = \\
&= \frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1}
\end{aligned}$$

Logo, a relação é válida.

Exemplo 4.13: Em uma PG de sete números, a soma dos seis primeiros é igual a 1456 e a soma dos seis últimos é de 4368. Determine todos os termos dessa PG.

Solução: Seja q a razão da PG e seus termos podem ser representados por $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_7)$. Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, a soma dos seis primeiros termos é dada por:

$$\frac{a_1(q^6-1)}{q-1} = 1456 \tag{4.3}$$

Já a soma dos seis últimos termos é dada por

$$\frac{a_2(q^6-1)}{q-1} = 4368 \tag{4.4}$$

Dividindo (4.4) por (4.3), temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q = 3$$

Sendo a razão igual a 3, obtemos, a partir de (4.3):

$$\frac{728a_1}{2} = 1456 \Longrightarrow a_1 = 4$$

Sendo o primeiro termo igual a 4 e usando a razão 3, os termos da progressão são dados por $(4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324,\ 972,\ 2916)$.

4.2.4 Soma dos Termos de PG Infinita

Quando a PG é infinita, precisaremos usar o conceito de limite de sequências para definir sua soma, como vimos no capítulo 3.

Seja a razão $-1 < q < 1$ de uma progressão geométrica infinita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$, então a soma de seus temos é dada por $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Demonstração: Vamos calcular o limite da soma S_n dos termos de uma PG, tendendo ao infinito, lembrando que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, quando $-1 < q < 1$. Assim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Como a_1 e q são constantes, seque que $\dfrac{a_1}{1-q}$ também é constante.

Exemplo 4.14: Calcule a soma dos termos da PG $\left(3,\ 1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \ldots\right)$.

Solução: Vemos que a PG é infinita, com primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = \dfrac{1}{3}$. Usando a fórmula da soma para PG infinita, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

5 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Apresentaremos agora a teoria sobre recorrências lineares de primeira ordem, usando a fundamentação estudada nos capítulos anteriores.

As equações de recorrência são aquelas onde o termo seguinte é definido com base nos termos anteriores, sendo necessário o conhecimento dos primeiros termos para, assim, construirmos a lei de formação da sequência.

A forma geral de uma recorrência linear de primeira ordem, com n natural, é dada por

$$x_{n+1} = f(n)g(x_n) + h(n), \tag{5.1}$$

onde $f(n)$ é uma função definida em n, $g(x_n)$ é uma função definida em x_n e $h(n)$ é o termo independente.

Definição 5.1: Uma recorrência é linear quando a função de x_n for do primeiro grau.

Definição 5.2: Uma recorrência é de primeira ordem quando o termo seguinte é definido em função de um único termo imediatamente anterior.

Exemplo 5.1: Vejamos algumas recorrências lineares de primeira ordem:
A. A progressão aritmética, estudada anteriormente, é uma recorrência desse tipo, sendo dada por $x_{n+1} = x_n + r$, onde r é a razão. Nesse caso, de (5.1), $f(n) = 1$, $g(x_n) = x_n$ e $h(n) = r$.
B. A progressão geométrica, também estudada no capítulo anterior, é uma recorrência linear de primeira ordem, dada por $x_{n+1} = x_n \cdot q$, onde q é a razão. Nesse caso, de (5.1), $f(n) = q$, $g(x_n) = x_n$ e $h(n) = 0$.

A partir das progressões aritmética e geométrica, observamos uma diferença entre as recorrências, que é a soma ou não de um termo independente $h(n)$, como mostra a equação (5.1).

Definição 5.3: Uma recorrência é homogênea quando não há termo independente $(h(n) = 0)$. Quando há termo independente, a recorrência é chamada de não-homogênea.

No caso do exemplo 5.1, a progressão aritmética é uma recorrência não-homogênea na forma $x_{n+1} = g(x_n) + h(n)$ e a progressão geométrica é uma recorrência homogênea na forma $x_{n+1} = f(n)g(x_n)$.

Vamos agora mostrar como resolver os vários tipos de relações de recorrência lineares de primeira ordem. Resolver essas recorrências significa encontrar a fórmula que permite calcular qualquer termo da recorrência, a partir de um termo dado.

5.1 Relações do tipo $x_{n+1} = f(n)g(x_n)$

Estudaremos a resolução a partir de exemplos. Note que, nesse caso, a partir de (5.1), $h(n) = 0$ e a relação é homogênea.

Exemplo 5.2: Encontrar a solução geral da equação $x_{n+1} = 3x_n$, sendo $x_1 = K$ constante.

Solução: Fazendo a expansão termo a termo da recorrência, temos:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_3 = 3x_2 = 3^2x_1 \\ x_4 = 3x_3 = 3^3x_1 \\ \qquad\vdots \\ x_n = 3^{n-1}x_1 \end{cases}$$

Como $x_1 = K$, segue que a solução geral dessa recorrência é $x_n = K3^{n-1}$.

Exemplo 5.3: Determine a solução geral da recorrência $x_{n+1} = 2nx_n$, sendo $x_1 = A$, constante.

Solução: Expandindo termo a termo da recorrência, temos:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 4x_2 \\ x_4 = 6x_3 \\ \qquad \vdots \\ x_n = 2(n-1)x_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando ambos os lados das equações e cancelando os termos em comum, obtemos:

$$\begin{aligned} x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(n-1)x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \\ x_n &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot 2(n-1)x_1 \\ x_n &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)x_1 \\ x_n &= 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x_1 \end{aligned}$$

Como $x_1 = A$, constante, a solução geral da recorrência é dada por $x_n = A \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!$.

5.2 Relações do tipo $x_{n+1} = x_n + h(n)$

Veremos como resolver, de forma geral, esse segundo tipo de recorrência linear de primeira ordem, onde, de (5.1), $f(n) = 1$. Expandindo termo a termo, temos:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h(1) \\ x_3 = x_2 + h(2) \\ x_4 = x_3 + h(3) \\ \qquad \vdots \\ x_n = x_{n-1} + h(n-1) \end{cases}$$

Somando ambos os lados das equações e cancelando os termos comuns:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (h(1) + h(2) + \ldots + h(n-1)) \\ x_n &= x_1 + (h(1) + h(2) + \ldots + h(n-1)) \end{aligned}$$

Logo, a solução geral desse tipo de recorrência é dada por:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \tag{5.2}$$

Veremos agora alguns exemplos.

Exemplo 5.4: Encontre a solução geral da recorrência $x_{n+1} = x_n + 5^n$, onde $x_1 = 1$.
Solução: De (5.2), temos:

$$x_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{n-1}$$

Note que x_n é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 5$. Usando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, temos:

$$x_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

Logo, a solução geral da recorrência dada é $x_n = \dfrac{5^n - 1}{4}$.

Exemplo 5.5: Determine a solução geral da recorrência $x_{n+1} = x_n - 3n$, onde $x_1 = 4$.
Solução: Da fórmula geral (5.2), temos:

$$x_n = 4 - (3 + 6 + 9 + \ldots + 3(n-1))$$

Note que a parcela entre parênteses representa a soma dos termos de uma progressão aritmética, onde o primeiro termo é $a_1 = 3$, o último termo é $a_n = 3(n-1)$ e a razão é $r = 3$. Assim, usando a fórmula da soma dos termos de uma PA, temos:

$$x_n = 4 - \frac{(n-1)(3 + 3n - 3)}{2} = 4 - \frac{(n-1)3n}{2} = \frac{-3n^2 + 3n + 8}{2}$$

Logo, a solução geral da recorrência é dada por $x_n = \dfrac{-3n^2 + 3n + 8}{2}$.

5.3 Relações do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$

Observe que a relação agora está completa. Para resolver relações desse tipo, usamos transformação e combinamos as soluções dos dois tipos anteriores de recorrência. O passo a passo para a resolução é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 5.1: Seja a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$ e $a_n \neq 0$ uma solução particular dessa recorrência. A recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$ será transformada em $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{f(n)a_n}$

se feita a substituição $x_n = a_n y_n$.

Demonstração: Essa demonstração já nos dará o passo a passo para a resolução da recorrência. O primeiro passo consiste em utilizar a solução não nula a_n da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$, ficando com uma recorrência homogênea do primeiro tipo:

$$a_{n+1} = f(n)a_n$$

O segundo passo é fazer a substituição $x_n = a_n y_n$ na recorrência geral, obtendo uma recorrência do segundo tipo estudado:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(n)x_n + h(n) \\
a_{n+1}y_{n+1} &= f(n)a_n y_n + h(n) \\
f(n)a_n y_{n+1} &= f(n)a_n y_n + h(n) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h(n)}{f(n)a_n}
\end{aligned}$$

Aqui está provado o teorema. Para encontrar a solução geral da recorrência, o terceiro passo é combinar as soluções a_n e y_n encontradas, lembrando da substituição inicial $x_n = a_n y_n$.

Exemplo 5.6: Determine a solução geral da recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 5$, onde $x_1 = 3$.

Solução: O primeiro passo é determinar uma solução particular a_n da recorrência homogênea $x_{n+1} = 3x_n$. Como vimos no exemplo 5.2, a solução dessa recorrência é $x_n = K3^{n-1}$, sendo $x_1 = K$. Logo,

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \Longrightarrow a_n = 3^n$$

O segundo passo é realizar a substituição $x_n = a_n y_n$. Como $x_n = 3^n y_n$, temos:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 3x_n + 5 \\
3^{n+1}y_{n+1} &= 3 \cdot (3^n y_n) + 5 \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{5}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Como a relação obtida é do segundo tipo estudado, a solução é dada de acordo com a equação (5.2):

$$y_n = y_1 + \left(\frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \ldots + \frac{5}{3^n}\right)$$

De $x_n = a_n y_n$, temos $x_n = 3^n y_n \Longrightarrow x_1 = 3y_1 \Longrightarrow y_1 = 1$. Substituindo y_1 e aplicando a soma dos termos de uma PG finita na parcela entre parênteses, obtemos:

$$y_n = 1 + \frac{\frac{5}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$
$$y_n = 1 + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - 3^{-(n-1)}\right)$$

O terceiro passo é combinar as soluções a_n e y_n, através de $x_n = a_n y_n$:

$$x_n = 3^n \cdot \left(1 + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - 3^{-n+1}\right)\right)$$
$$x_n = 3^n + \frac{5}{6}3^n - \frac{5}{2}$$
$$x_n = \frac{11}{6}3^n - \frac{5}{2}$$
$$x_n = \frac{11 \cdot 3^n - 15}{6}$$

Portanto, a solução geral de $x_{n+1} = 3x_n + 5$, onde $x_1 = 3$, é dada por $x_n = \dfrac{11 \cdot 3^n - 15}{6}$.

Exemplo 5.7 (MORGADO, 2015): Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,\ 1,\ 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?
Solução: Seja x_n o número de sequências com n termos, formados pelos números dados no enunciado. Para $n = 1$ são possíveis $3^1 = 3$ sequências, mas apenas uma atende ao problema, que é a sequência (0). Logo, $x_1 = 1$.

Para $n = 2$ são possíveis $3^2 = 9$ sequências, mas as que atendem ao problema são as do tipo $(0, x)$ ou $(x, 0)$, tendo duas possibilidades para x, 1 ou 2, em cada tipo, resultando em $x_2 = 4$.

Para $n = 3$, são possíveis $3^3 = 27$ sequências, mas atendem ao problema as que possuem um ou três zeros, sendo as do tipo $(0, x, y)$, $(x, 0, y)$, $(x, y, 0)$ e $(0, 0, 0)$, podendo x e y assumir os valores 1 ou 2 em cada tipo, resultando em $x_3 = 13$.

Para $n = 4$, são possíveis $3^4 = 81$ sequências, mas atendem ao problema as que possuem um ou três zeros, sendo as do tipo $(0, x, y, z)$, $(x, 0, y, z)$, $(x, y, 0, z)$, $(x, y, z, 0)$, $(x, 0, 0, 0)$, $(0, x, 0, 0)$, $(0, 0, x, 0)$ e $(0, 0, 0, x)$, podendo x, y e z assumir os valores 1 ou 2 em cada tipo, resultando em $x_4 = 40$.

Assim, temos que $x_2 = x_1 + 3$, $x_3 = x_2 + 9$, $x_4 = x_3 + 27$ e assim por diante, obtendo a relação de recorrência $x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}$. Vamos resolver essa recorrência, que é do segundo tipo estudado e, de acordo com a equação (5.2), sua solução é dada por:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) = 1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1}$$

Note que x_n é a soma dos termos de uma PG finita, de razão $q = 3$ e primeiro termo igual a 1. Dessa forma,

$$x_n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Portanto, o número de sequências de n termos, formadas por $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0 é dado por $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Exemplo 5.8 (LIMA, 2006): Resolva a recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, $x_1 = 1$.

Solução: Vamos em primeiro lugar determinar uma solução particular a_n da recorrência homogênea $x_{n+1} = (n+1)x_n$. Essa recorrência é a do primeiro tipo estudado e expandindo termo a termo, temos:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_2 \\ x_4 = 4x_3 \\ \qquad \vdots \\ x_n = nx_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando ambos os lados das equações, obtemos:

$$x_n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot x_1 \Longrightarrow x_n = x_1 \cdot n!$$

Assim, a solução particular é dada por:

$$a_n = x_1 \cdot n! \Longrightarrow a_n = n!$$

Em segundo lugar, fazemos a substituição $x_n = a_n y_n = n! y_n$ na recorrência original, ficando com:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= (n+1)x_n + n \\
(n+1)!y_{n+1} &= (n+1)n!y_n + n \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{n}{(n+1)!} \\
y_n &= y_{n-1} + \frac{n-1}{n!} \\
y_n &= y_{n-1} + \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \\
y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

De $x_n = n!y_n$ temos que $y_1 = 1$ e da equação (5.2) segue que:

$$\begin{aligned}
y_n &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) \\
y_n &= 2 - \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

E terceiro lugar, combinando as soluções a_n e y_n, chegamos a

$$x_n = a_n y_n \Longrightarrow x_n = n!\left(2 - \frac{1}{n!}\right) \Longrightarrow x_n = 2n! - 1$$

Logo, a solução geral da recorrência dada é $x_n = 2n! - 1$.

6 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Neste capítulo buscamos estudar os métodos de resolução de recorrências lineares de segunda ordem. Resolver essas recorrências significa encontrar uma solução geral que permite determinar todos os termos de (x_n), a partir de cada valor de n.

Definição 6.1: Uma recorrência é de segunda ordem quando o termo seguinte é definido em função de dois termos imediatamente anteriores.

6.1 Recorrências Homogêneas e de Coeficientes Constantes

Primeiro veremos como resolver as recorrências lineares de segunda ordem que são homogêneas e possuem coeficientes constantes. A forma geral dessas recorrências é dada por:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \tag{6.1}$$

onde p e q são os coeficientes constantes e equação não possui termo independente, sendo homogênea. Consideramos q não nulo, pois se $q = 0$, a recorrência será de primeira ordem.

Toda recorrência do tipo (6.1) possui uma equação característica do segundo grau associada do tipo

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{6.2}$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{6.3}$$

Essas raízes nunca serão iguais a zero, pois $q \neq 0$. Dessa forma, podemos ter duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais e duas raízes complexas distintas.

Veremos como resolver as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e com coeficientes constantes para cada tipo de raiz.

6.1.1 Raízes Reais e Distintas

Neste caso, dois teoremas embasam o método de resolução, provados a seguir.

Teorema 6.1: Sejam r_1 e r_2 raízes reais e distintas da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Então, para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência dada.

Demonstração: Vamos substituir $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtendo:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= 0 \\ \left(C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}\right) + p\left(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}\right) + q\left(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n\right) &= 0 \\ C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) &= 0 \\ C_1 r_1 0 + C_2 r_2 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são raízes da equação característica, as duas últimas expressões entre parênteses são iguais a zero, provando que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência.

Teorema 6.2: Sejam r_1 e r_2 raízes reais e distintas da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Então, para todo n, todas as soluções de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ possuem a forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, sendo C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Suponhamos que y_n seja uma solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e conseguimos determinar as constantes C_1 e C_2 a partir da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \\ y_2 = C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 \end{cases}$$

Dessa forma:

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \qquad e \qquad C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

Essas constantes são números reais, pois $r_2 \neq r_1$ e $r_1, r_2 \neq 0$.

Suponhamos agora que, para todo n, $y_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$. Provemos que $z_n = y_n - C_1r_1^n - C_2r_2^n = 0$, para todo n. Assim:

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n =$$
$$= (y_{n+2} - C_1r_1^{n+2} - C_2r_2^{n+2}) + p(y_{n+1} - C_1r_1^{n+1} - C_2r_2^{n+1}) + q(y_n - C_1r_1^n - C_2r_2^n) =$$
$$= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) - C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q)$$

As duas últimas expressões entre parênteses são iguais a zero, pois r_1 e r_2 são raízes da equação característica e a primeira expressão entre parênteses também é igual a zero, pois y_n é uma solução da recorrência. Assim, $z_n = 0$. A partir do sistema, como $y_1 - C_1r_1 - C_2r_2 = z_1 = 0$ e $y_2 - C_1r_1^2 - C_2r_2^2 = z_2 = 0$, segue que $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, temos que $z_n = 0$ para todo n e todas as soluções da recorrência são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$.

Exemplo 6.1: Encontre a solução geral da recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$.
Solução: A equação característica associada à recorrência é dada por $r^2 - 4r - 5 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 5$ e $r_2 = -1$. Assim, a solução é dada por

$$a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$$
$$a_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot (-1)^n$$

Como não possuímos dois valores iniciais da recorrência, não podemos determinar os valores das constantes C_1 e C_2.

Exemplo 6.2 (MORGADO, 2015): Encontre a solução geral da recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0$, sendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.
Solução: A equação característica associada à recorrência é dada por $r^2 + r - 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Assim, a solução é dada por

$$a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$$
$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n$$

Como possuímos os valores de x_1 e x_2, resolvemos o seguinte sistema para determinar os valores de C_1 e C_2:

$$\begin{cases} 2C_1 - 3C_2 = 1 \\ 4C_1 + 9C_2 = 4 \end{cases}$$

Assim, $C_1 = \dfrac{7}{10}$ e $C_2 = \dfrac{2}{15}$. Logo, a solução geral da recorrência é dada por:

$$a_n = \frac{7}{10} \cdot 2^n + \frac{2}{15} \cdot (-3)^n$$

Exemplo 6.3 (Sequência de Fibonacci): Como já vimos no capítulo 3, a sequência de Fibonacci pode ser descrita como $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, sendo $x_1 = x_2 = 1$. Vamos agora determinar a solução geral dessa famosa sequência.

Solução: A equação característica associada à recorrência é dada por $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, a solução é dada por

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para encontrar os valores de C_1 e C_2 iremos tomar $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, por conveniência. Assim, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 1 \end{cases}$$

Encontramos que $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Logo, a solução geral da sequência de Fibonacci é:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

É a partir desta famosa sequência que temos o número de ouro. Este número é dado por

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988$$

Note que o número de ouro é a primeira raiz da equação característica associada à sequência de Fibonacci. Note também que a segunda raiz da dessa equação característica é:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

Dessa forma, podemos escrever a solução geral da sequência de Fibonacci da seguinte forma:

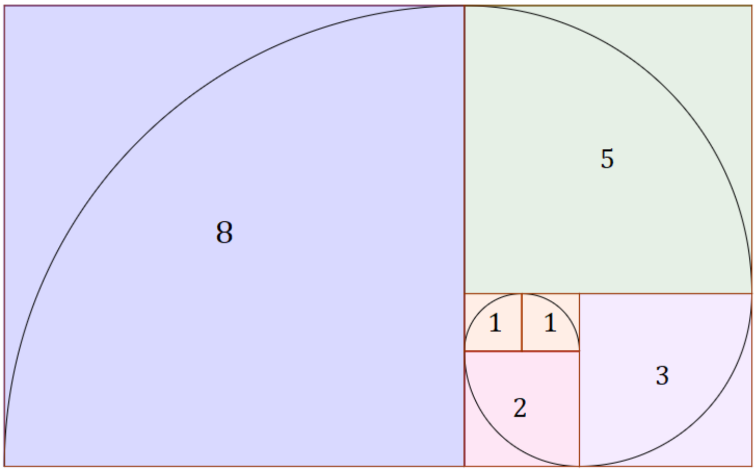
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n$$

A partir da sequência de Fibonacci podemos ver que a razão entre um termo qualquer da sequência e seu termo imediatamente anterior tende ao valor do número de ouro, quanto maiores são os números da sequência. Tomando a sequência de Fibonacci $(F_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots)$, temos:

$$\frac{F_7}{F_6} = 1,625; \quad \frac{F_8}{F_7} \approx 1,61538; \quad \frac{F_9}{F_8} \approx 1,61905; \quad \frac{F_{10}}{F_9} \approx 1,61765; \quad \frac{F_{11}}{F_{10}} \approx 1,61818; \ \ldots$$

Este número de ouro é encontrado na natureza, na arte, na arquitetura, entre outros, sendo conhecido como a "proporção áurea", que representa harmonia e beleza. Cada termo da sequência de Fibonacci representa um quadrado, cujas medidas dos lados obedecem a sequência, formando a famosa espiral de Fibonacci.

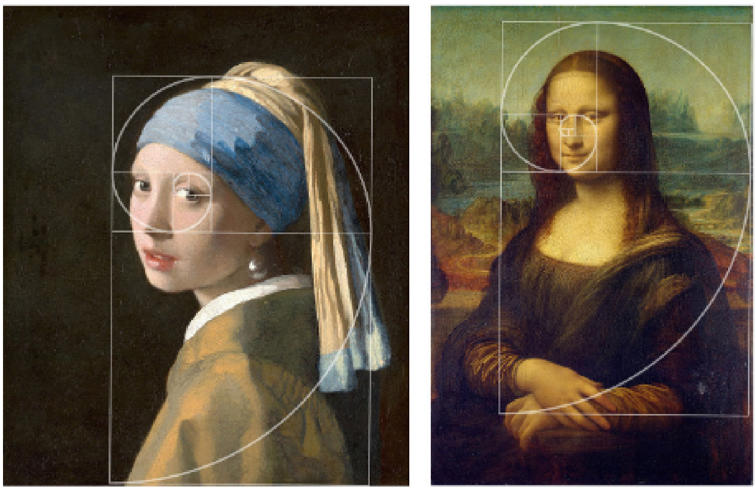
Figura 6 – Espiral de Fibonacci



Fonte: Disponível em <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2018/06/img_5b117b4475151.png>. Acesso em 07 ago. 2024

No capítulo de aplicações veremos como construir essa espiral utilizando o *software* GeoGebra. Retângulos cuja razão entre as medidas de seus lados representam o número de ouro foram usados também em obras de arte:

Figura 7 – Proporção áurea em obras de arte



Fonte: Disponível em <https://static.wixstatic.com/media/d8f9f4_aa7665316fb2444b904d3a7c6d16c9a4 mv2.jpg/v1/fill/w_1481,h_949,al_c,q_85/meisje-met-de-parel-mona-lisa.jpg>. Acesso em 07 ago. 2024

Podemos ver o número de ouro presente na arquitetura:

Figura 8 – Proporção áurea na arquitetura

Fonte: Disponível em <https://cdn.prod.website-files.com/60ff690cd7b0537edb99a29a/61323dbb12356a5598934773_Sequencia-de-Fibonacci-na-arquitetura-do-Paternon-com-o-retangulo-de-ouro.jpg>. Acesso em 07 ago. 2024

Também vemos a proporção áurea na natureza:

Figura 9 – Proporção áurea na natureza

Fonte: Disponível em <https://imagens-revista-pro.vivadecora.com.br/uploads/2019/03/Propor%C3%A7%C3%A3o-%C3%A1urea-na-natureza-1.jpg>. Acesso em 07 ago. 2024

Vale observar que a sequência de Fibonacci está presente na maioria das referências utilizadas para este trabalho.

6.1.2 Raízes Reais e Iguais

Também neste caso temos dois teoremas que embasam o método de resolução das recorrências, provados a seguir.

Teorema 6.3: Sejam $r_1 = r_2 = r$ raízes reais e iguais da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Então, para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2, $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é solução da recorrência dada.

Demonstração: Como as raízes são iguais, o valor de r é dado por:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm 0}{2} \Longrightarrow r = -\frac{p}{2}$$

Vamos substituir $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtendo:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= 0 \\ \left(C_1r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2}\right) + p\left(C_1r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}\right) + q\left(C_1r^n + C_2nr^n\right) &= 0 \\ C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^{n+1}(2r + p) &= 0 \\ C_1r^n0 + C_2nr^n0 + C_2r^{n+1}0 &= 0 \end{aligned}$$

Como r é raiz da equação característica, as duas primeiras expressões entre parênteses são iguais a zero e a terceira expressão entre parênteses também é igual a zero, pois $r = -\dfrac{p}{2}$, provando que $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é solução da recorrência.

Teorema 6.4: Sejam $r_1 = r_2 = r$ raízes reais e iguais da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Então, para todo n, todas as soluções de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ possuem a forma $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$, sendo C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Suponhamos que y_n seja uma solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e conseguimos determinar as constantes C_1 e C_2 a partir da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1 = C_1r + C_2r \\ y_2 = C_1r^2 + 2C_2r^2 \end{cases}$$

Dessa forma:

$$C_1 = \frac{2y_1r - y_2}{r^2} \qquad e \qquad C_2 = \frac{y_2 - y_1r}{r^2}$$

Essas constantes são números reais, pois $r \neq 0$.

Suponhamos agora que, para todo n, $y_n = C_1r^n + C_2nr^n$.

Provemos que $z_n = y_n - C_1r^n - C_2nr^n = 0$, para todo n. Assim:

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n =$$
$$= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^{n+1}(2r + p)$$

A segunda e a terceira expressões entre parênteses são iguais a zero, pois r é raiz da equação característica; a primeira expressão entre parênteses é igual a zero, pois y_n é uma solução da recorrência e a última expressão entre parênteses é igual a zero, pois $r = -\dfrac{p}{2}$. Assim, $z_n = 0$. A partir do sistema, como $y_1 - C_1r - C_2r = z_1 = 0$ e $y_2 - C_1r^2 - 2C_2r^2 = z_2 = 0$, segue que $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, temos que $z_n = 0$ para todo n e todas as soluções da recorrência são da forma $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$.

Exemplo 6.4 (LIMA, 2006): Determine a solução geral da recorrência $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

Solução: A equação característica associada à recorrência é dada por $r^2 + 6r + 9 = 0$, cuja raiz é $r = -3$. Assim, a solução é dada por

$$a_n = C_1r^n + C_2nr^n$$
$$a_n = C_1(-3)^n + C_2n(-3)^n$$

Exemplo 6.5 (ELLER, 2015): Resolva a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, sendo $x_1 = 5$ e $x_2 = 8$.

Solução: A equação característica associada à recorrência é dada por $r^2 - 4r + 4 = 0$, cuja raiz é $r = 2$. Assim, a solução é dada por

$$a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$$

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 n 2^n$$

Como $x_1 = 5$ e $x_2 = 8$, resolvemos o seguinte sistema para determinar os valores das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 5 \\ 4C_1 + 8C_2 = 8 \end{cases}$$

Obtemos que $C_1 = 3$ e $C_2 = -\dfrac{1}{2}$. Portanto, a solução geral da recorrência é:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - \frac{1}{2} n 2^n \Longrightarrow a_n = 3 \cdot 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

6.1.3 Raízes Complexas

Quando a equação característica possui raízes complexas, elas são distintas e conjugadas. Veremos qual a forma geral da solução neste caso.

Sejam $r_1 = x + yi$ e $r_2 = x - yi$ raízes complexas e conjugadas da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. A solução geral será dada por

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2 e para todo n. A solução será escrita usando a forma trigonométrica das raízes r_1 e r_2. Para isso, precisamos calcular o módulo de cada raiz, da seguinte forma:

$$|r_1| = |r_2| = p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Chamamos de θ o argumento principal de r_1 e r_2, sendo $x = p\cos\theta$ e $y = p\,\text{sen}\theta$. Assim, temos:

$$r_1 = p\cos\theta + ip\,\text{sen}\theta \qquad e \qquad r_2 = p\cos\theta - ip\,\text{sen}\theta$$
$$r_1 = p(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) \qquad e \qquad r_2 = p(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)$$
$$r_1^n = p^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}n\theta) \qquad e \qquad r_2^n = p^n(\cos n\theta - i\,\text{sen}n\theta)$$

Dessa forma, segue que:

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$
$$a_n = C_1(p^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}n\theta)) + C_2(p^n(\cos n\theta - i\,\text{sen}n\theta))$$
$$a_n = p^n(C_1\cos n\theta + C_1 i\,\text{sen}n\theta + C_2\cos n\theta - C_2 i\,\text{sen}n\theta)$$
$$a_n = p^n(\cos n\theta(C_1 + C_2) + i\,\text{sen}n\theta(C_1 - C_2))$$

Sendo $C_3 = C_1 + C_2$ e $C_4 = C_1 - C_2$, a solução geral quando as raízes são complexas é dada por:

$$a_n = p^n(C_3\cos n\theta + C_4 i\,\text{sen}n\theta)$$

Exemplo 6.6 (MORGADO, 2015): Encontre a solução de $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

Solução: A equação característica associada à recorrência é $r^2 + 2r + 2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. O módulo de r_1 e r_2 é $p = \sqrt{2}$. De r_1, temos:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De r_2, temos:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad \text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, o argumento principal é $\theta = \frac{\pi}{4}$. Assim, a solução geral é dada por:

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left(C_3\cos\frac{n\pi}{4} + C_4 i\,\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exemplo 6.7: Determine a solução da recorrência $x_{n+2} + 9x_n = 0$.

Solução: A equação característica associada à recorrência é $r^2 + 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 3i$ e $r_2 = -3i$. O módulo de r_1 e r_2 é $p = 3$. De r_1, temos:

$$\cos\theta = 0 \qquad e \qquad \text{sen}\theta = 1$$

De r_2, temos:

$$\cos\theta = 0 \qquad e \qquad \text{sen}\theta = -1$$

Logo, o argumento principal é $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. Assim, a solução geral é dada por:

$$a_n = 3^n\left(C_3\cos\frac{n3\pi}{2} + C_4 i\,\text{sen}\frac{n3\pi}{2}\right)$$

6.2 Recorrências Não Homogêneas e de Coeficientes Constantes

A forma geral de uma recorrência linear de segunda ordem não homogênea é dada por

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n) \tag{6.4}$$

Admitimos $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria de primeira ordem.

O teorema a seguir mostra que a solução desse tipo de recorrência é a combinação entre a solução da recorrência homogênea associada e a solução da parcela não homogênea, que será encontrada por suposições.

Teorema 6.5: Seja $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ uma equação de recorrência de segunda ordem e a_n uma solução dessa equação. Então, ser for feita a substituição $x_n = a_n + y_n$, a equação é transformada em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.
Demonstração: Fazendo a substituição $x_n = a_n + y_n$ na recorrência dada, temos:

$$f(n) = x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$$
$$f(n) = a_{n+2} + y_{n+2} + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n)$$
$$f(n) = (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n)$$

Como a_n é solução da recorrência, temos que a primeira expressão entre parênteses é igual a $f(n)$, resultando em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Exemplo 6.8 (LIMA, 2006): Encontre a solução de $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$.

Solução: Em primeiro lugar resolvemos a equação homogênea $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$. A equação característica associada à homogênea é $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$. Assim, a solução da equação homogênea é:

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n$$

Em segundo lugar fazemos uma suposição para encontrar uma solução da equação não homogênea. Como $f(n) = 2^n$ é uma função exponencial, supomos uma solução exponencial $y_n = A2^n$ e substituímos na equação não homogênea:

$$\begin{aligned} A2^{n+2} - 5A2^{n+1} + 6A2^n &= 2^n \\ 2^n(4A - 10A + 6A) &= 2^n \\ 0 \cdot 2^n &= 2^n \end{aligned}$$

Note que $0 \cdot 2^n = 2^n$ não possui solução, então devemos aumentar o grau da parcela que não foi possível encontrar a solução em nossa suposição. Fazemos uma nova suposição $y_n = An2^n$ e substituímos na equação não homogênea:

$$\begin{aligned} 2^{n+2}(An + 2A) - 5 \cdot 2^{n+1}(An + A) + 6An2^n &= 2^n \\ 2^n(4An + 8A - 10An - 10A + 6An) &= 2^n \\ -2A2^n &= 2^n \\ A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dessa forma, a solução particular é $y_n = -\dfrac{1}{2}n2^n = -n2^{n-1}$. Logo, a solução geral da recorrência é:

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + y_n \\ x_n &= C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n - n2^{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo 6.9: Determine a solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 5 - 2n$, onde $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

Solução: Resolvemos em primeiro lugar a equação homogênea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$. A equação característica associada é $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = 2$. Assim, a solução da equação homogênea é dada por

$$a_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot 2^n$$

Em segundo lugar, encontramos uma solução particular da equação não homogênea. Como $f(n) = 5 - 2n$ é um polinômio do primeiro grau, suponhamos uma solução nesse formato, sendo $y_n = A + Bn$. Substituindo y_n na equação não homogênea, temos:

$$\begin{aligned} A + B(n+2) - 6(A + B(n+1)) + 8(A + Bn) &= 5 - 2n \\ 3A - 4B + 3Bn &= 5 - 2n \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema a seguir encontramos os valores de A e B:

$$\begin{cases} 3A - 4B = 5 \\ \quad 3B = -2 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{7}{9} \quad e \quad B = -\frac{2}{3}$$

Logo, $y_n = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}n$ e a solução geral da equação não homogênea é dada por:

$$x_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot 2^n + \frac{7}{9} - \frac{2}{3}n$$

Como $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$, resolvemos o sistema a seguir para determinar o valor das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{7}{9} = 2 \\ 4C_1 + 2C_2 + \frac{1}{9} = 3 \end{cases} \Longrightarrow C_1 = \frac{2}{9} \quad e \quad C_2 = 1$$

Portanto, a solução da recorrência é

$$x_n = \frac{2^{2n+1}}{9} + 2^n + \frac{7}{9} - \frac{2}{3}n$$

Finalizando o estudo teórico, acrescentamos uma observação em relação às recorrências de ordem maior que dois. O mesmo método de resolução de recorrências de segunda ordem apresentado no teorema 6.5 pode ser utilizado para resolver recorrências de ordem superior. Isto pode ser feito a partir de uma solução y_n da equação homogênea associada à recorrência e de uma solução particular a_n da recorrência, sendo a solução geral da recorrência não homogênea dada por $x_n = a_n + y_n$.

7 Aplicações

Neste último capítulo serão apresentados alguns modelos de sequências didáticas utilizando o *software* GeoGebra para serem trabalhadas em turmas do ensino médio, contendo os conteúdos de relações de recorrência de primeira e segunda ordens estudadas nesta dissertação.

7.1 Escolha do *software* GeoGebra

A escolha do *software* se deu por vários motivos, sendo um dos mais importantes o fato de ser gratuito, podendo ser utilizado em escolas públicas ou privadas, sendo acessado pelo navegador ou aplicativo, tanto em celulares como em computadores.

O segundo motivo da escolha é sua facilidade de uso, onde professores e alunos aprendem rapidamente seus comandos, podendo ser utilizado no estudo de diversos conteúdos, como funções, sequências, geometria plana e espacial, entre outros.

O terceiro motivo foi a necessidade de mostrar aplicações práticas com o GeoGebra, pois é muito conhecido entre os profissionais da educação, mas pouco utilizado, apesar de sua facilidade de uso. Com tutoriais simples, facilmente encontrados na internet, tem-se acesso a uma gama de atividades com o *software*, que se mostra um grande aliado no ensino de matemática.

Pretendemos mostrar seu uso no estudo de recorrências, contendo em cada aplicação o passo a passo para a construção dos modelos, para que os professores que tiverem contato com este trabalho possam desenvolver as sequências didáticas com suas turmas. Além dessas aplicações, também pretendemos incentivar o uso do GeoGebra para o ensino de diversos conteúdos em matemática.

7.2 Sequência de Fibonacci

Nesta seção, mostraremos como aplicar atividades em sala de aula sobre a sequência de Fibonacci, construindo-a no *software* GeoGebra. Vejamos o planejamento.

Tema: Recorrências lineares de segunda ordem.

Conteúdo: Sequência de Fibonacci.

Ano/Série: 1ª série do ensino médio.

Recursos: Computador, lousa e caderno.

Objetivos:
• Retomar o conceito de sequência, onde o próximo termo é definido a partir de termos anteriores;
• Compreender, sem uso de fórmula, a lei de formação da sequência de Fibonacci, relacionando-ao ao raciocínio de recorrência;
• Realizar a construção geométrica da sequência de Fibonacci com o auxílio do *software* GeoGebra, relacionando seu formato à aplicações no mundo real.

Sequência Didática: O professor inicia explicando aos alunos o conceito inicial de sequências numéricas de forma simplificada, onde um número vem após o outro, formando certo padrão. Solicita aos alunos exemplos de sequências numéricas, onde a maioria será de recorrências de primeira ordem, como:

$$(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots)\ -\ somando\, 2$$
$$(1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots)\ -\ multiplicando\, 3$$

A partir dos exemplos dos alunos, o professor define recorrências de primeira ordem como sendo sequências em que o próximo termo é obtido a partir de um termo anterior.

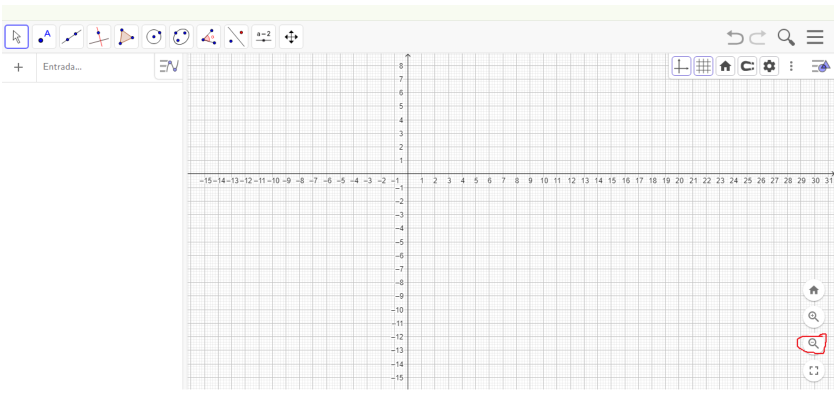
Logo após solicita aos alunos uma pesquisa sobre Fibonacci e sua sequência, com o objetivo de apresentar-lhes recorrências de segunda ordem. Os alunos apresentam os resultados de sua pesquisa e a sequência de Fibonacci, dada por:

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots)$$

A partir dessa sequência o professor mostra que ela representa uma recorrência de segunda ordem, pois o próximo termo é sempre obtido a partir de dois termos anteriores, nesse caso, a soma deles. Pode-se atrair a atenção dos alunos dizendo que essa sequência forma uma espiral perfeita e que eles irão construí-la utilizando o *software* GeoGebra. Recomenda-se que essa construção seja feita em computadores.

Para acessar o *software*, basta digitar seu nome em um site de busca e clicar em "GeoGebra clássico". Para que a figura fique mais completa, clique na lupa com sinal de menos no canto inferior direito, para reduzir o *zoom*, e arrastando o mouse é possível reposicionar os eixos, deixando da seguinte forma:

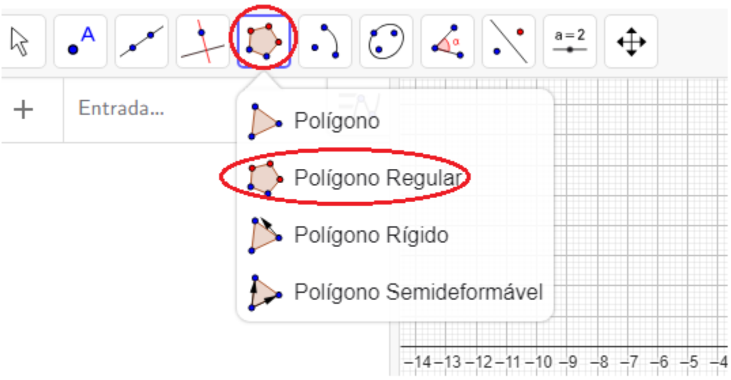
Figura 10 – Eixos no GeoGebra



Fonte: Autor, 2024

A partir de agora vamos construir quadrados cuja medida dos lados correspondem à sequência de Fibonacci (referência [17]), para formar a espiral relacionada à essa sequência. Clique no símbolo de polígono e depois em "polígono regular":

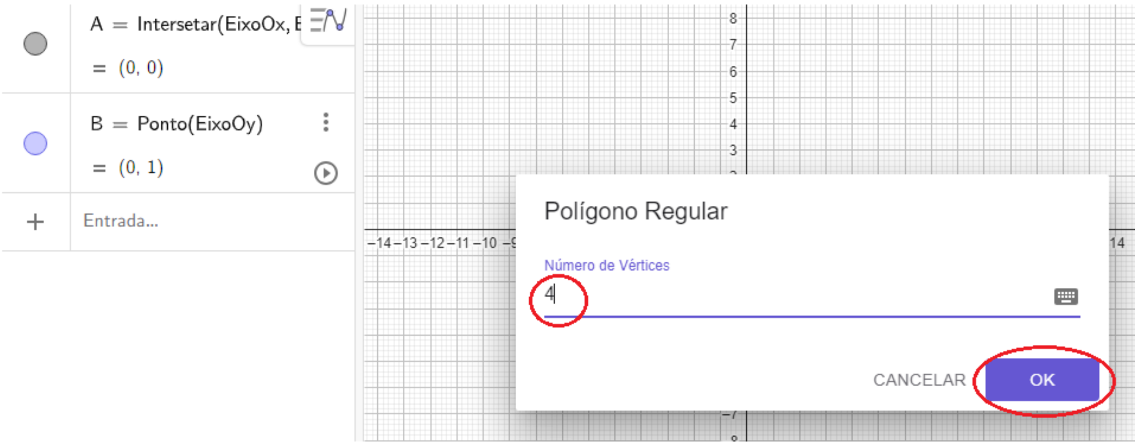
Figura 11 – Comando Polígono Regular



Fonte: Autor, 2024

Clique nos pontos $(0,1)$ e $(0,0)$ (nesta ordem) e, automaticamente, aparecerá a caixa a seguir, onde o número de vértices deve ser definido para 4 e clique em "ok":

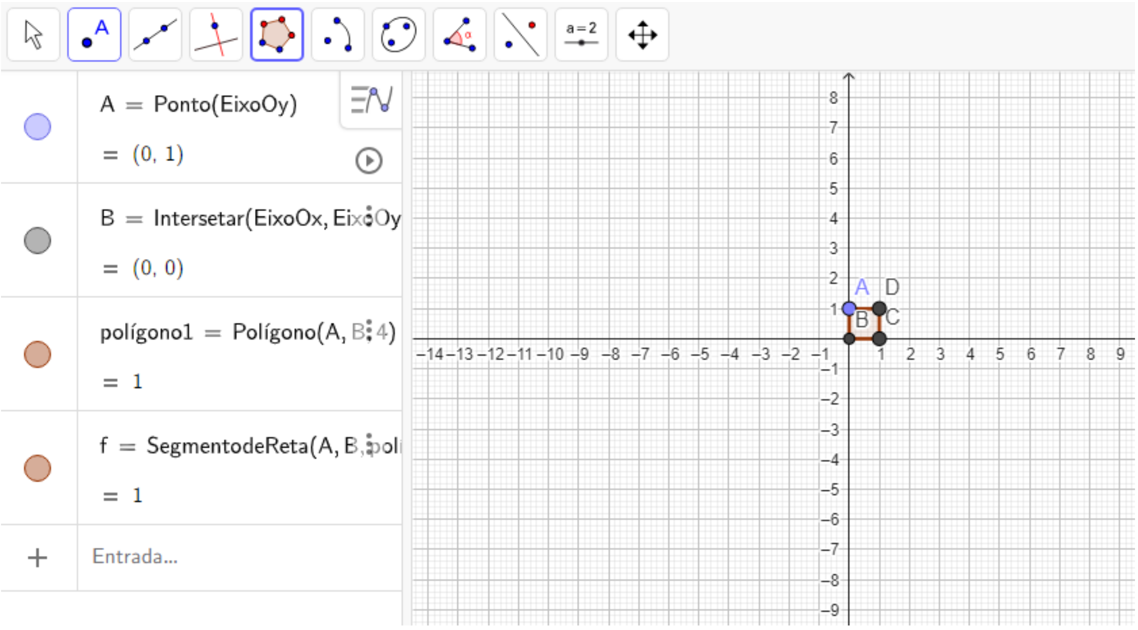
Figura 12 – Construção de polígono regular



Fonte: Autor, 2024

O quadrado ABCD de lado 1 será formado:

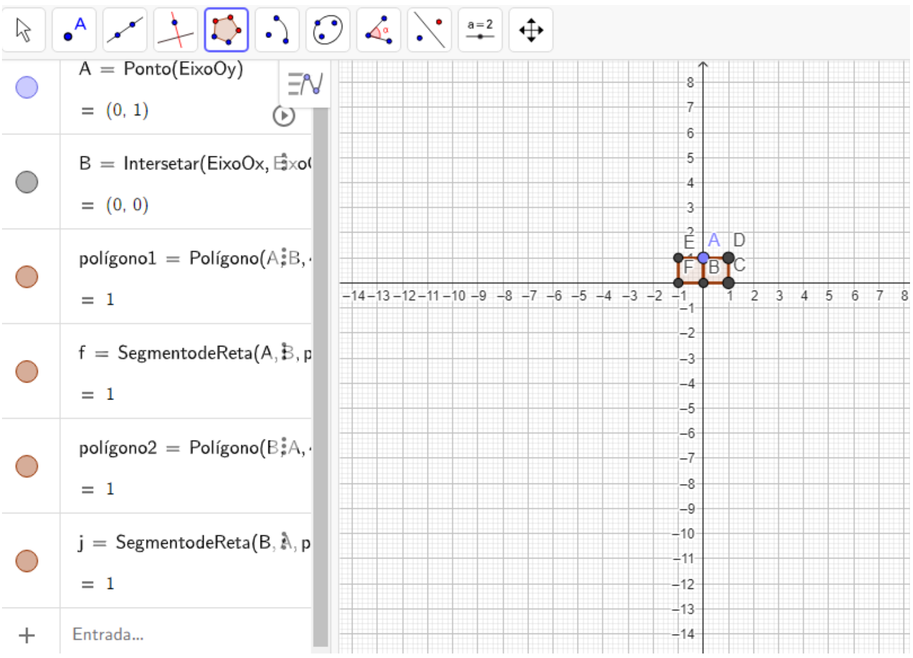
Figura 13 – Quadrado ABCD



Fonte: Autor, 2024

Repita o procedimento de formação de polígono regular clicando nos pontos $B(0,0)$ e $A(0,1)$ (nesta ordem) para formar o quadrado ABEF, também de lado 1:

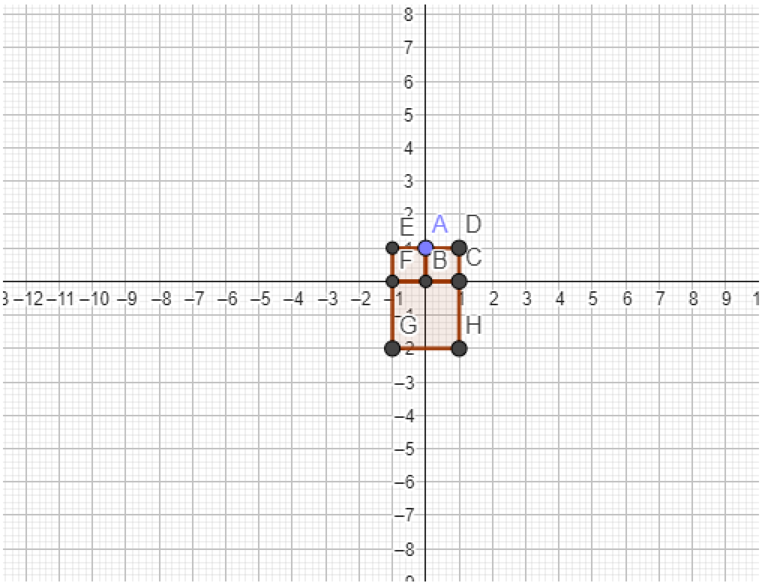
Figura 14 – Quadrado ABEF



Fonte: Autor, 2024

A partir dos dois quadrados de lado 1 formaremos o quadrado de lado 2, clicando nos pontos $C(1,0)$ e $F(-1,0)$ (nesta ordem), formando o quadrado CFGH:

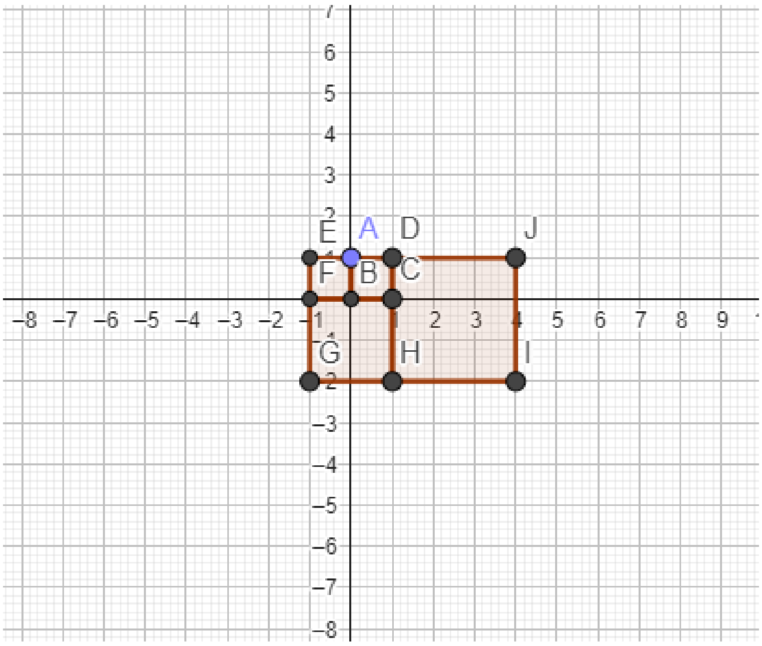
Figura 15 – Quadrado CFGH



Fonte: Autor, 2024

Seguindo a sequência de Fibonacci, formaremos o quadrado de lado 3 a partir dos quadrados de lados 1 e 2. Para isso, clique nos pontos $D(1, 1)$ e $H(1, -2)$ (nesta ordem), formando o quadrado DHIJ:

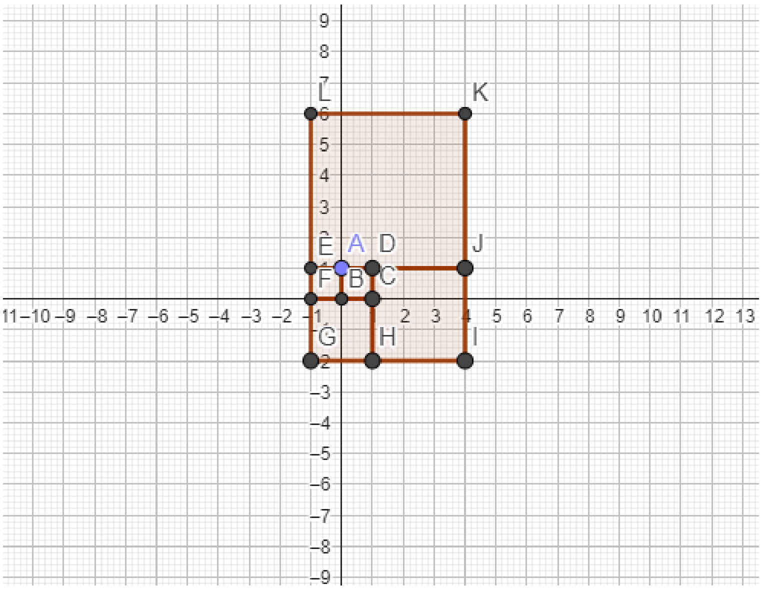
Figura 16 – Quadrado DHIJ



Fonte: Autor, 2024

Para formar o quadrado de lado 5, clique nos pontos $E(-1, 1)$ e $J(4, 1)$ (nesta ordem), obtendo o quadrado EJKL:

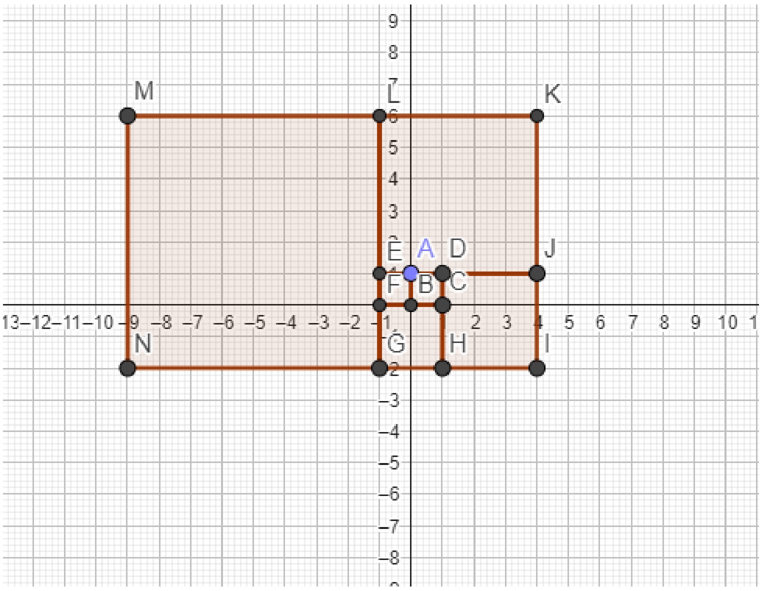
Figura 17 – Quadrado EJKL



Fonte: Autor, 2024

Clique nos pontos $G(-1,-2)$ e $L(-1,6)$ (nesta ordem) para obter o quadrado GLMN, de lado 8:

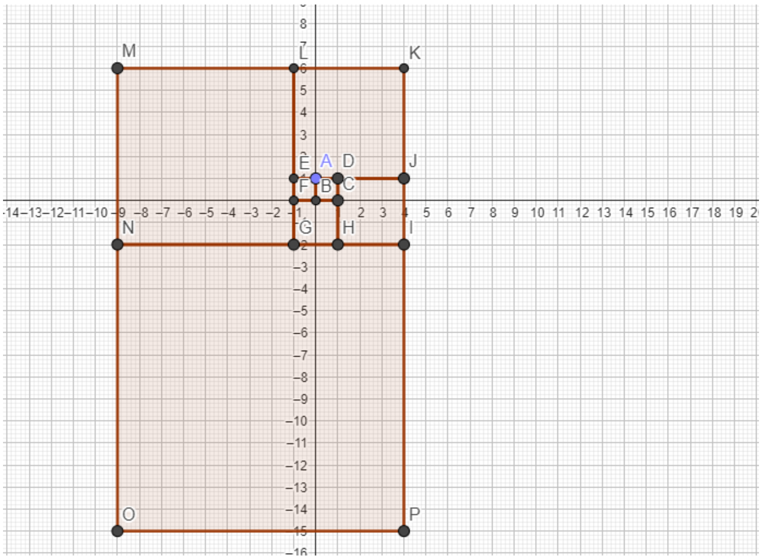
Figura 18 – Quadrado GLMN



Fonte: Autor, 2024

Para obter o quadrado de lado 13, clique nos pontos $I(4,-2)$ e $N(-9,-2)$ (nesta ordem), formando o quadrado INOP:

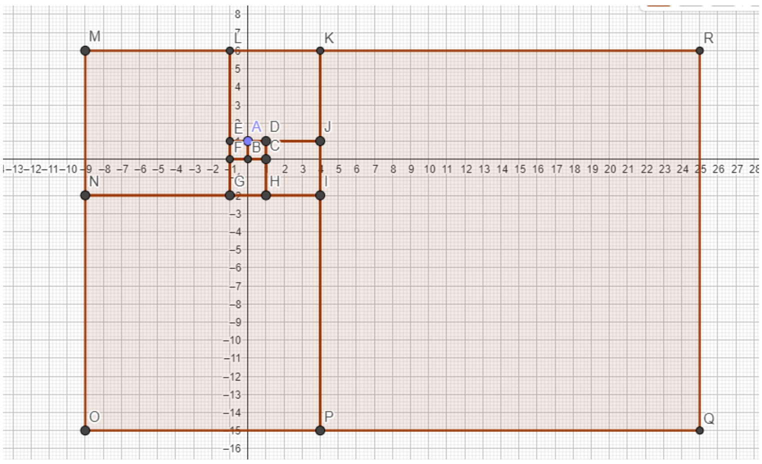
Figura 19 – Quadrado INOP



Fonte: Autor, 2024

Desenharemos por último o quadrado de lado 21, clicando nos pontos $K(4,6)$ e $P(4,-15)$ (nesta ordem), obtendo KPQR:

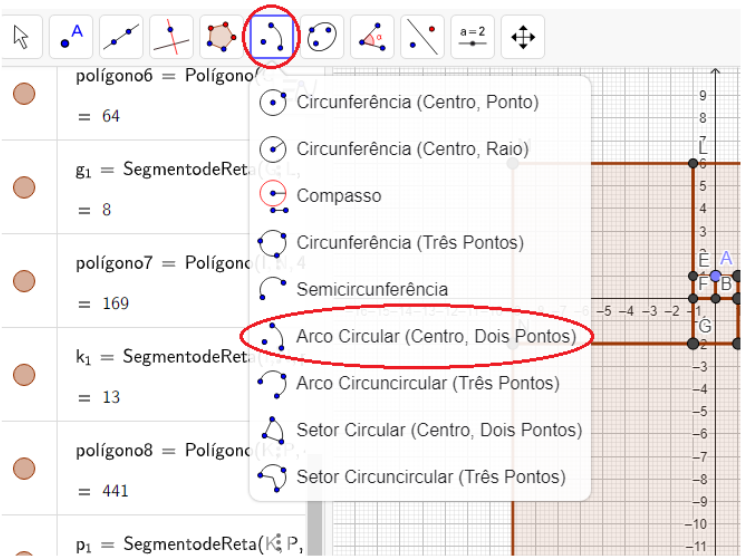
Figura 20 – Quadrado KPQR



Fonte: Autor, 2024

Para formar a espiral utilizamos a ferramenta de construção de arco de circunferência. Clique na parte superior no símbolo de arco e selecione a opção "Arco Circular (Centro, Dois Pontos)":

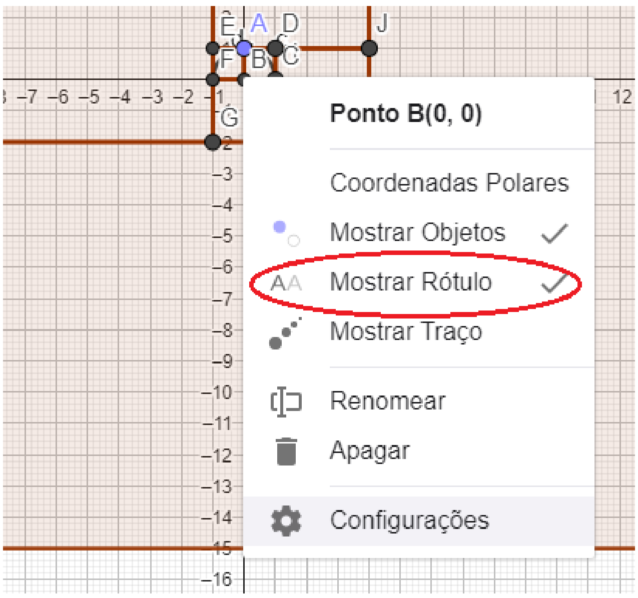
Figura 21 – Comando Arco Circular



Fonte: Autor, 2024

O primeiro arco terá centro B e será formado por C e A. Para desenhar o arco, primeiro clique no centro B e depois nos extremos C e A. Repita o mesmo processo para a construção do segundo arco, clicando no centro B e depois nos extremos A e F. Para que os dois primeiros arcos fiquem melhor visíveis, clique com o botão direito do mouse no ponto B e depois no ponto F e clique em "mostrar rótulo":

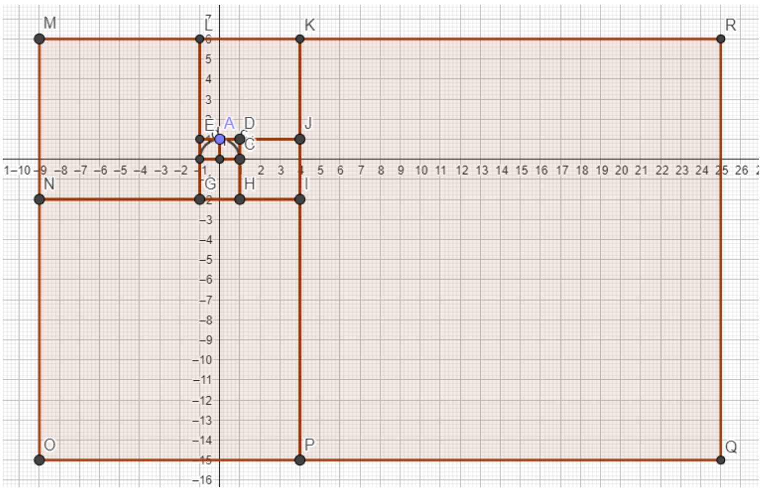
Figura 22 – Rótulo de pontos



Fonte: Autor, 2024

Assim, visualizamos os dois primeiros arcos:

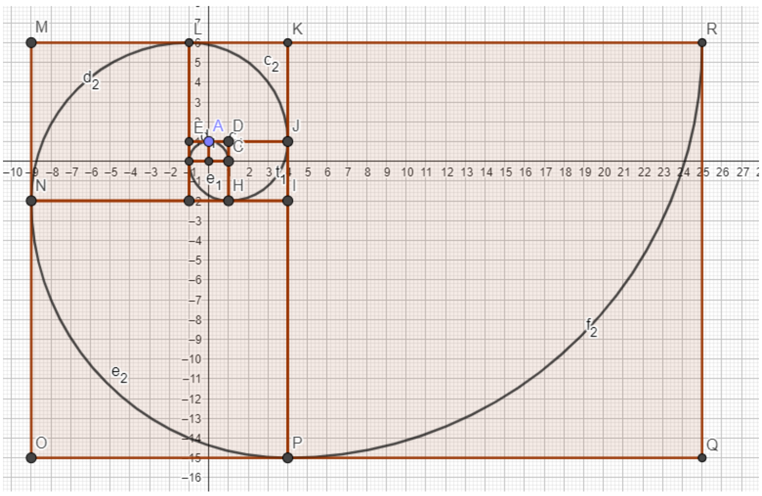
Figura 23 – Arcos dos quadrados de lado 1



Fonte: Autor, 2024

Para a construção dos próximos arcos, siga o roteiro aqui descrito. Terceiro arco: clique no centro C e nos extremos F e H (apague o rótulo do ponto G); quarto arco: clique no centro D e nos extremos H e J; quinto arco: clique no centro E e nos extremos J e L; sexto arco: clique no centro G e nos extremos L e N; sétimo arco: clique no centro I e nos extremos N e P; oitavo arco: clique no centro K e nos extremos P e R. Obtemos, assim, a espiral a partir da sequência de Fibonacci:

Figura 24 – Espiral de Fibonacci no GeoGebra



Fonte: Autor, 2024

Por fim, pode-se mostrar onde essa espiral é encontrada, como na natureza, construções e obras de arte, como vimos no exemplo 6.3, mostrando a relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro.

7.3 Progressão Aritmética e Juros Simples

Nesta sequência didática o objetivo principal é relacionar progressões aritméticas a juros simples, mostrando o comportamento das sequências no *software* GeoGebra.

Tema: Recorrências lineares de primeira ordem.

Conteúdo: Progressão aritmética e juros simples.

Ano/Série: 2ª série do ensino médio.

Recursos: Computador, lousa e caderno.

Objetivos:
• Compreender o significado de progressão aritmética como uma sequência de soma, construindo sua lei de formação através da fórmula do termo geral;
• Estudar o conceito de juros simples com ou sem uso de fórmulas, mostrando que o montante aumenta seguindo a mesma razão, de um período a outro;
• Relacionar o comportamento das progressões aritméticas ao de juros simples, solucionando problemas.

Sequência Didática: Primeiramente o professor deve recordar o significado de progressão aritmética como uma sequência em que o próximo termo é obtido a partir do termo anterior através da soma (ou subtração) de um mesmo número, chamado de razão. Deve também chamar a atenção para o fato de que esse tipo de sequência é uma recorrência de primeira ordem.

Após dar exemplos de diversas PAs, os alunos devem ser levados a encontrar as leis de formação de algumas progressões e plotá-las no GeoGebra para observar seu comportamento. Lembramos que a fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

onde a_1 é o primeiro termo, n é a posição dos termos e r a razão. Tomemos um exercício como exemplo.

Exercício 7.1: Determine a lei de formação e plote no GeoGebra cada sequência a seguir:
A. $(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ \ldots)$.
B. $(22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30,\ \ldots)$.

Solução: A sequência do item A possui primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 5$. Sua lei de formação é dada por:

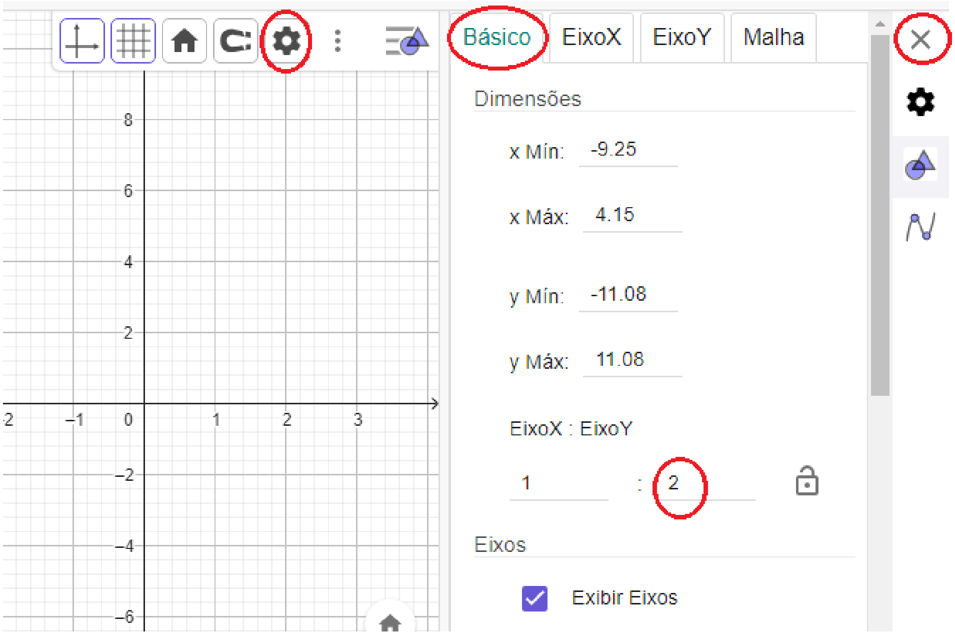
$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1) \cdot 5 \\ a_n &= 5n - 2 \end{aligned}$$

A sequência do item B possui primeiro termo $a_1 = 22$ e razão $r = 2$. Sua lei de formação é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= 22 + (n-1) \cdot 2 \\ a_n &= 2n + 20 \end{aligned}$$

Vamos plotar as sequências no GeoGebra, lembrando que sequências possuem domínio discreto. Para a sequência do item A, abra o GeoGebra clássico online e configure o eixo y para que aumente de dois em dois, clicando no símbolo da engrenagem no canto superior direito e ajustando a escala 1:2 no ambiente "básico", apertando a tecla "enter"para que a mudança ocorra. Clique no "X"ao lado direito para fechar as configurações.

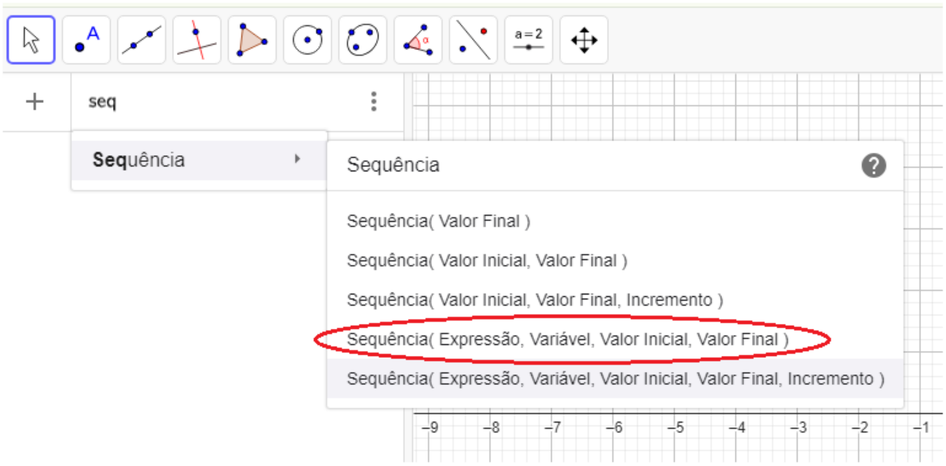
Figura 25 – Escala dos eixos no GeoGebra



Fonte: Autor, 2024

No campo de entrada digite "seq"de "sequência"e selecione a opção "Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)":

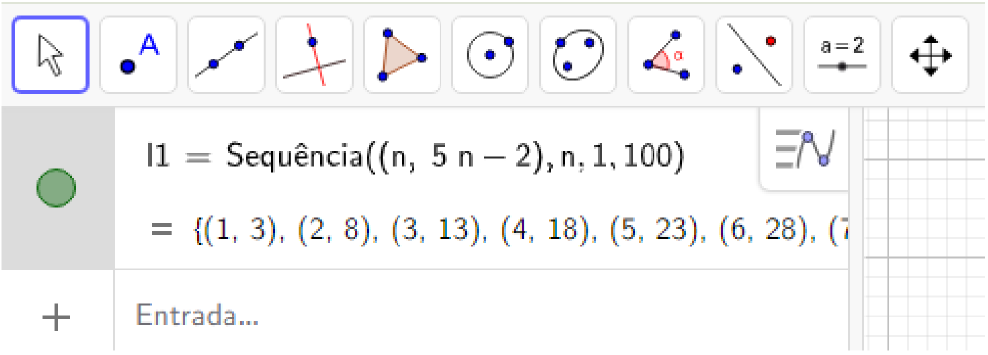
Figura 26 – Comando Sequência



Fonte: Autor, 2024

Para que os pontos apareçam na malha quadriculada, digite no campo "expressão"a coordenada $(n,\ 5n-2)$ e coloque a variável como n, valor inicial como 1 e valor final 100 (ou outro número não pequeno):

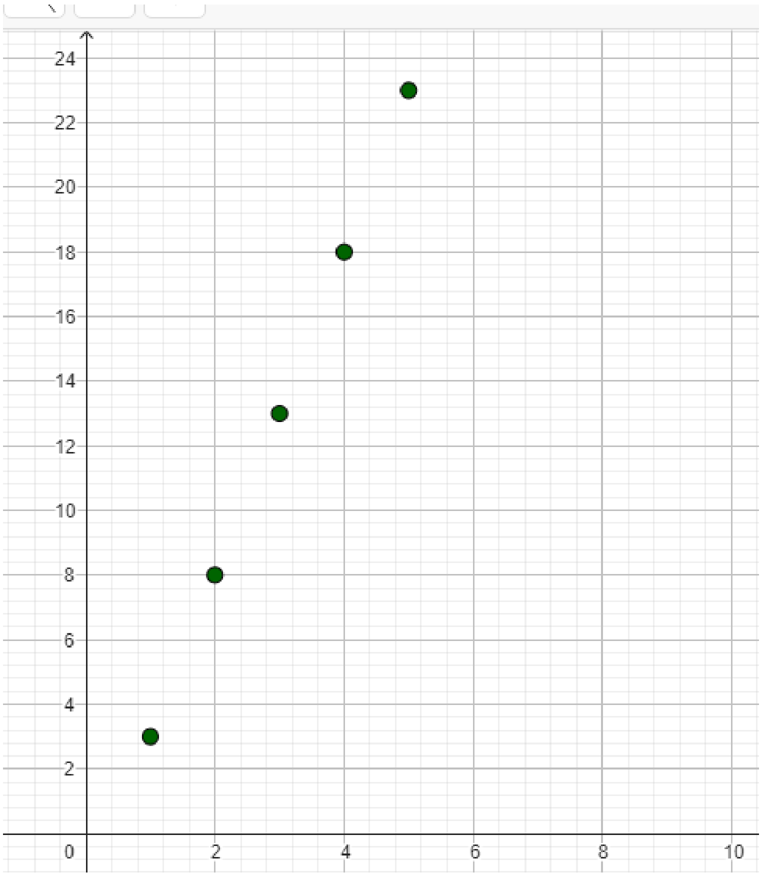
Figura 27 – Comando para a PA do item A, exercício 7.1



Fonte: Autor, 2024

Após isso os pontos já aparecerão no plano e podemos reduzir o *zoom* e movimentar o plano para obter uma melhor visualização:

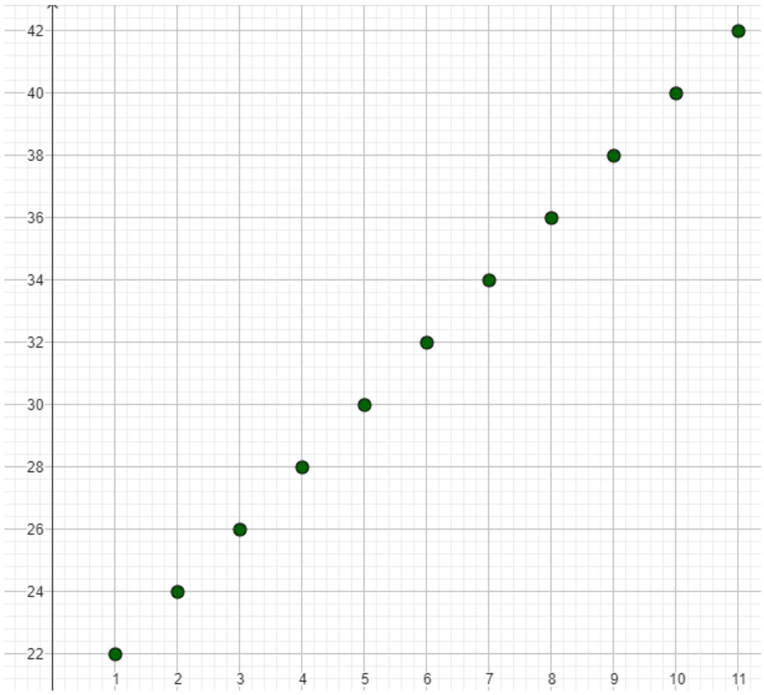
Figura 28 – Gráfico da PA do item A, exercício 7.1



Fonte: Autor, 2024

O mesmo processo deve ser feito para plotar a sequência do item B:

Figura 29 – Gráfico da PA do item B, exercício 7.1



Fonte: Autor, 2024

O professor levará o aluno observar que as duas sequências apresentam um comportamento linear, devido à característica de somar sempre a mesma razão em relação ao termo anterior.

Após a explicação sobre progressão aritmética deve-se explicar os conceitos de capital, montante, juros e taxa de juros, para que os alunos possam compreender juros simples como um regime de capitalização onde se calcula a taxa de juros sobre o capital e esse juro é somado de maneira igual em todos os períodos de tempo. Pode-se usar como exercício:

Exercício 7.2 (IEZZI, 2004): Escreva uma sequência de seis números obtida a partir dos resultados do montante em cada período quando um capital de $R\$\ 4000,00$ é aplicado a uma taxa de 2% ao mês, no regime de juros simples. O primeiro valor da sequência deve ser o capital. Encontre o termo geral da sequência obtida e a plote no GeoGebra.

Solução: Sem o uso de fórmula, deve-se calcular o valor do juro para cada período, que é o resultado de 2% de 4000, dado por 80. Sendo assim, o capital aumenta um valor fixo de $R\$\ 80,00$ em cada período, obtendo a sequência:

$$(4000,\ 4080,\ 4160,\ 4240,\ 4320,\ 4400)$$

O professor mostrará que essa sequência nada mais é do que uma progressão aritmética, cuja razão é o resultado do capital (C) vezes a taxa (i):

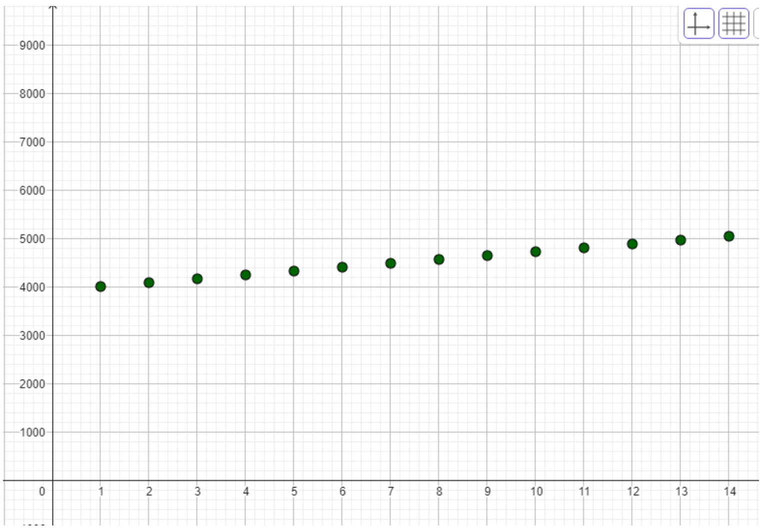
$$r = C \cdot i$$

Dessa forma, o regime de juros simples nada mais é do que uma progressão aritmética. Para plotar a sequência no GeoGebra, precisamos de seu termo geral, dado por:

$$a_n = 4000 + (n-1) \cdot 80$$
$$a_n = 80n + 3920$$

Antes de plotar no GeoGebra, devemos ajustar a escala do eixo y de 1000 em 1000, seguindo o processo já detalhado anteriormente e usar o ambiente de sequência. Assim, temos:

Figura 30 – Gráfico da PA do exercício 7.2



Fonte: Autor, 2024

Note que o comportamento do gráfico é linear, pois é uma progressão aritmética, com domínio discreto. Segue outro modelo de problema que pode ser utilizado.

Exercício 7.3 (IEZZI, 2004): Um capital de $R\$\ 7000,00$ foi investido por um ano e meio e, ao final, o montante obtido foi de $R\$\ 9142,00$. O montante obtido a cada mês obedece a uma PA. Determine a razão dessa PA, seu termo geral e plote a sequência no GeoGebra.

Solução: Como o montante obtido a cada mês obedece a uma PA, sabemos que o regime do investimento é o de juros simples e que o investimento durou 18 meses (um ano e meio). Consideremos o capital como sendo o primeiro termo da PA. Assim, usando a fórmula de juros simples, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$
$$M - C = 7000 \cdot i \cdot 18$$
$$2142 = 126000i$$
$$i = 0,017$$

Logo, a razão da PA é dada por

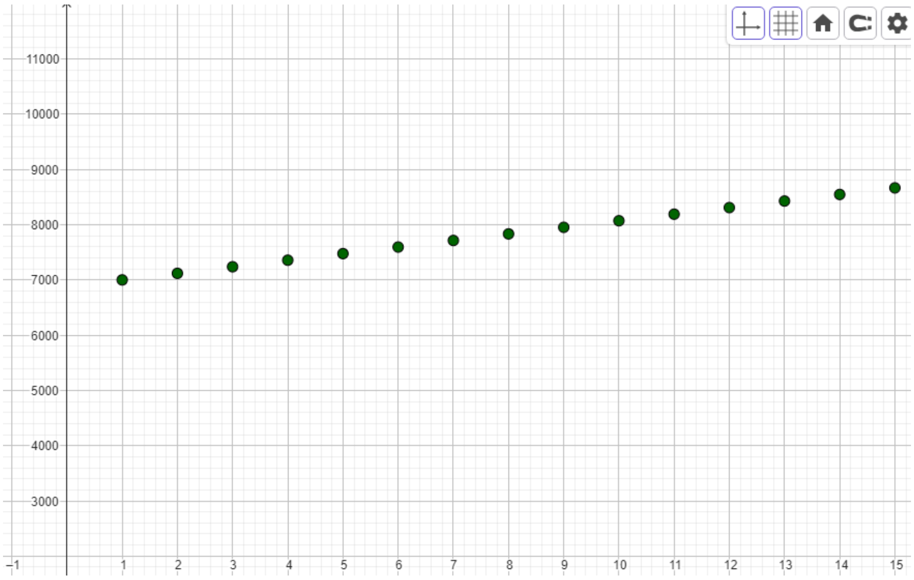
$$r = C \cdot i \Longrightarrow r = 7000 \cdot 0,017 \Longrightarrow r = 119$$

Dessa forma, o montante aumenta $R\$\ 119,00$ por mês. O termo geral é dado por

$$a_n = 7000 + (n-1) \cdot 119$$
$$a_n = 119n + 6881$$

Ao plotar a sequência no GeoGebra observamos o crescimento linear, com domínio discreto:

Figura 31 – Gráfico da PA do exercício 7.3



Fonte: Autor, 2024

7.4 Progressão Geométrica e Juros Compostos

Nesta última sequência didática temos o objetivo de relacionar progressões geométricas a juros compostos, mostrando também o comportamento das sequências no *software* GeoGebra.

Tema: Recorrências lineares de primeira ordem.

Conteúdo: Progressão geométrica e juros compostos.

Ano/Série: 2ª série do ensino médio.

Recursos: Computador, lousa e caderno.

Objetivos:

• Compreender o significado de progressão geométrica como uma sequência multiplicativa, construindo sua lei de formação através da fórmula do termo geral;

• Estudar o conceito de juros compostos com ou sem o uso de fórmulas, mostrando que o juro deve ser recalculado a cada novo período sobre o novo montante obtido;

• Relacionar o comportamento das progressões geométricas ao de juros compostos, solucionando problemas.

Sequência Didática: Primeiramente deve ser recordado o conceito de progressão geométrica como uma sequência em que o próximo termo é obtido a partir do termo anterior através da multiplicação de um mesmo número, chamado de razão. Assim como na PA, deve ser explicado que a progressão geométrica é uma recorrência de primeira ordem.

Após compreender o conceito de PG a partir de exemplos, os alunos devem encontrar a lei de formação de algumas progressões desse tipo e plotá-las no GeoGebra para observar seu comportamento. Lembramos que a fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

onde a_1 é o primeiro termo, n é a posição de determinado termo e q a razão. Vejamos um exercício como exemplo.

Exercício 7.4: Determine a lei de formação e represente no GeoGebra cada sequência a seguir:
A. $(2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots)$.
B. $(1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ \ldots)$.

Solução: A sequência do item A possui primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$. Sua lei de formação é dada por:

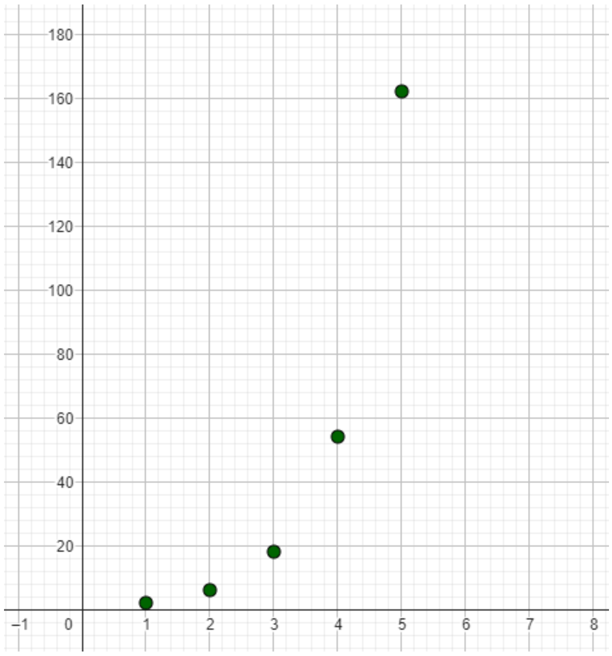
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

A sequência do item B possui primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 4$. Sua lei de formação é dada por:

$$a_n = 1 \cdot 4^{n-1}$$
$$a_n = 4^{n-1}$$

Para plotar as sequências lembramos novamente que elas possuem domínio discreto e, por isso, devem aparecer pontos no GeoGebra e não uma função contínua. Para a sequência do item A configure o eixo y para que aumente de 20 em 20, como já fizemos anteriormente. Use o mesmo ambiente de sequência mostrado em PA e no campo "expressão" deve ser digitado o par ordenado $(n,\ 2 \cdot 3^{n-1})$. Assim, temos:

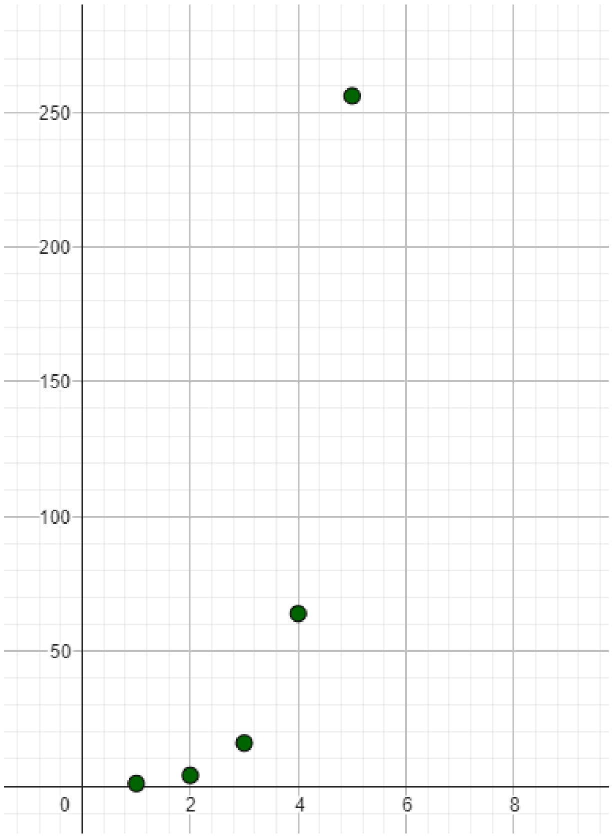
Figura 32 – Gráfico da PG do item A, exercício 7.4



Fonte: Autor, 2024

Para a sequência do item B, reduzindo o *zoom*, temos:

Figura 33 – Gráfico da PG do item B, exercício 7.4



Fonte: Autor, 2024

O professor levará o estudante a observar que as duas sequências apresentam um comportamento exponencial, devido à característica de multiplicar sempre a mesma razão em relação ao termo anterior.

Agora deve-se explicar o conceito de juros compostos como um regime de capitalização onde se calcula a taxa de juros sobre cada novo montante em cada período de tempo, havendo um crescimento exponencial. Da fórmula de juros compostos, temos que:

$$M = C(1+i)^t$$

Logo, o capital (C) representa o valor inicial de uma progressão geométrica e a razão é dada por

$$q = 1 + i,$$

onde i é a taxa de juros. Resolveremos dois problemas para exemplificar.

Exercício 7.5: Escreva uma sequência de seis números obtida a partir dos resultados do montante em cada período quando um capital de $R\$\ 1500,00$ é aplicado a uma taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos. O primeiro valor da sequência deve ser o capital. Encontre o termo geral da sequência e a represente no GeoGebra.

Solução: Temos que a razão da sequência é dada por

$$q = 1 + i \Longrightarrow q = 1 + 0,02 \Longrightarrow q = 1,02$$

Logo, a sequência é

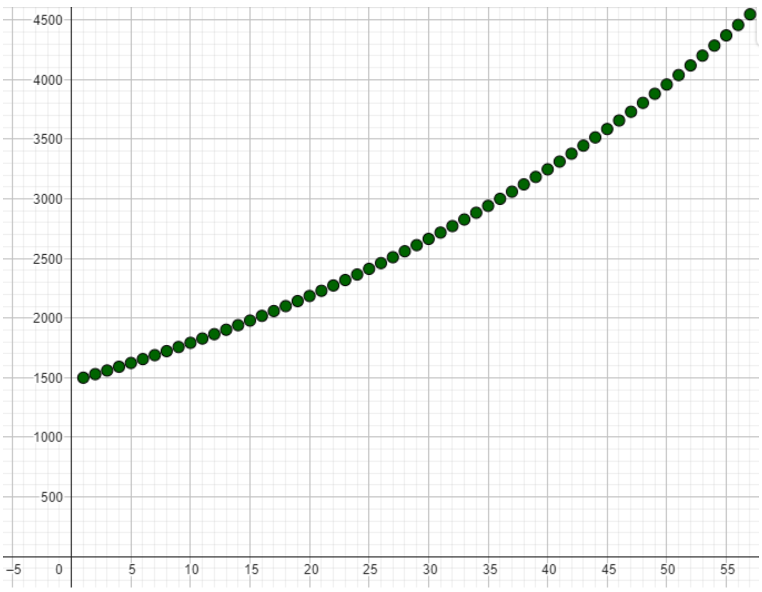
$$(1500;\ 1530;\ 1560,6;\ 1591,81;\ 1623,65;\ 1656,12),$$

onde alguns valores foram aproximados. Sendo assim, obtemos o termo geral

$$a_n = 1500 \cdot (1,02)^{n-1}$$

Para representar essa sequência no GeoGebra a escala do eixo y foi deixada de 100 em 100 e depois o *zoom* foi reduzido para uma melhor visualização. Assim, temos o seguinte gráfico com comportamento exponencial e domínio discreto:

Figura 34 – Gráfico da PG do exercício 7.5



Fonte: Autor, 2024

Exercício 7.6 (IEZZI, 2004): Um capital de $R\$\ 80000,00$ foi investido por um ano e, ao final, o montante obtido foi de $R\$\ 97240,50$. O montante obtido a cada trimestre obedece a uma PG. Determine a razão dessa PG, seu termo geral e represente a sequência no GeoGebra.

Solução: Como o montante obtido a cada trimestre obedece a uma PG, sabemos que o regime do investimento é o de juros compostos e que o investimento durou 4 trimestres (um ano). Consideremos o capital como sendo o primeiro termo da PG. Assim, usando a fórmula de juros compostos, temos:

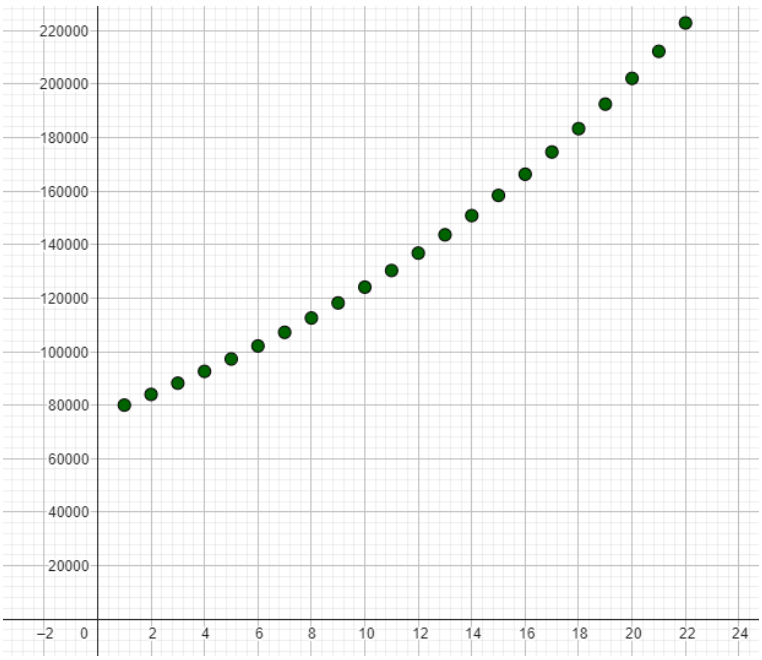
$$M = C(1+i)^t$$
$$97240,50 = 80000(1+i)^4$$
$$(1+i)^4 = 1,21550625$$
$$1+i = 1,05$$
$$q = 1,05$$

Logo, a razão da PG é $q = 1,05$ e o termo geral é dado por

$$a_n = 80000 \cdot (1,05)^{n-1}$$

Para representar a sequência no GeoGebra a escala do eixo y foi deixada de 10000 em 10000 e depois o *zoom* foi reduzido para uma melhor visualização. O gráfico está representado a seguir, onde podemos observar o comportamento exponencial, lembrando que a função possui domínio discreto:

Figura 35 – Gráfico da PG do exercício 7.6



Fonte: Autor, 2024

Exercício 7.7: Para finalizar essa sequência vamos dar um exemplo real envolvendo juros de cartão de crédito. Pesquisando os juros do cartão "Ourocard Fácil", bandeira Visa, do Banco do Brasil, vemos que o custo efetivo total (CET) é de $16,12\%$ ao mês, sendo que essa taxa já representa o juro de crédito rotativo, o juro por atraso e a multa por atraso juntos. Essa taxa é dividida pelo número de dias de um mês, sendo cobrada a porcentagem por dia de atraso no pagamento da fatura.

Suponhamos que uma pessoa não pague uma fatura no valor de $R\$\ 1200,00$, com vencimento no dia 10/03. Suponhamos que ela não terá nenhum gasto a mais e que as faturas que vencem em 10/04 e 10/05 sejam ambas no valor de $R\$\ 990,00$. Calculemos o valor total pago, caso a pessoa atrase as três faturas e consiga efetuar o pagamento no dia 30/05.

Entre os meses de março e abril temos um mês de atraso da fatura no valor de $R\$\ 1200,00$. Cobrando a taxa de $16,12\%$, temos o montante do primeiro mês de atraso:

$$M = 1200 \cdot (1,1612) = 1393,44$$

Após o primeiro mês de atraso somamos ao montante encontrado o valor da fatura que vence em abril, ficando com:

$$1393,44 + 990,00 = 2383,44$$

O juro cobrado entre os meses de abril e maio incidirá sobre o valor de $R\$\ 2383,44$. Encontrando o montante do segundo mês de atraso, temos:

$$M = 2383,44 \cdot (1,1612) \approx 2767,65$$

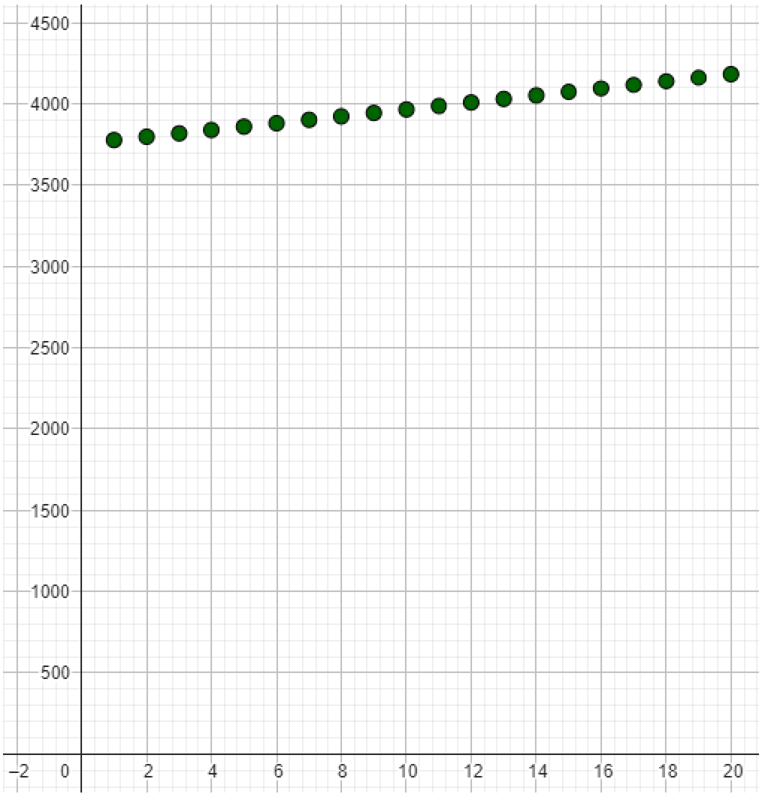
A este montante somamos o valor de $R\$\ 990,00$ referente à fatura vencida em 10/05, ficando com $R\$\ 3757,65$. O juro cobrado entre 10/05 e 30/05 incidirá sobre o valor de $R\$\ 3757,65$. A taxa de $16,12\%$ dividida por 30 dias é de, aproximadamente, $0,54\%$ ao dia. Assim, nos últimos 20 dias teremos o montante final:

$$M = 3757,65 \cdot (1,0054)^{20} = 3757,65 \cdot (1,1137241009) \approx 4184,99$$

Desta forma, quitando sua dívida no dia 30/05 a pessoa pagará o valor total de $R\$\ 4184,99$. Caso tivesse pago as três faturas sem atraso, o valor a ser pago seria de $1200 + 990 + 990 = 3180$. Notamos, assim, uma diferença de $R\$\ 1004,99$.

Usando a expressão $3757,65 \cdot (1,0054)^n$ no ambiente de sequência no GeoGebra, com valor inicial 1 e valor final 20, podemos notar o aumento no valor da fatura nos últimos 20 dias. Para construir o gráfico, a escala entre os eixos x e y foi deixada da forma 1:200 com redução do *zoom* para melhor visualização. Como a função possui domínio discreto, cada ponto representa o montante no dia n:

Figura 36 – Gráfico da PG do exercício 7.7



Fonte: Autor, 2024

Os juros do cartão de crédito podem ser consultados no aplicativo de cada banco e se apresenta como um exemplo interessante para ser trabalhado com os estudantes, oportunizando um ensino sobre inteligência financeira.

8 Considerações Finais

A partir deste trabalho vemos quão amplo é o estudo sobre equações de recorrência, cuja teoria não foi inteiramente abordada, podendo ser utilizada para a produção de trabalhos futuros. Além disso, todas as referências bibliográficas contribuíram para a construção teórica do trabalho. Todos os capítulos possuem a demonstração dos resultados e diversos exemplos, para que o conteúdo abordado não deixe dúvidas e seja bem fundamentado.

A fundamentação teórica sobre sequências e seus limites foi importante para embasar todo o estudo seguinte sobre recorrências. O foco foi dado para as recorrências lineares, tanto de primeira como de segunda ordem, que se mostraram uma importante área de estudo, principalmente por serem trabalhadas no ensino médio nas formas das progressões aritmética e geométrica. Além das progressões, esse trabalho mostra que é possível abordar as recorrências no ensino médio, trazendo uma visão mais ampla da matemática e um estudo agradável da disciplina para os alunos.

As aplicações propostas trazem teoria e prática organizadas em sequências didáticas, mostrando a relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro e como essa sequência é encontrada na natureza, arquitetura e arte. As aplicações envolvendo matemática financeira trazem exemplos e mostram como as recorrências são utilizadas em problemas reais, como o juro do cartão de crédito. Todas as sequências didáticas foram planejadas para serem aplicadas na sala de aula e podem ser utilizadas pelos professores que lerem esta dissertação.

Destacamos o uso do *software* GeoGebra nas sequências didáticas mostradas no capítulo de aplicações, que facilita o entendimento dos estudantes sobre o assunto estudado, podendo visualizar o comportamento das recorrências. Este aplicativo gratuito, que pode ser acessado *online*, permite outras possibilidades de uso na sala de aula em diversos conteúdos e deveria ser mais utilizado pelos professores, bem como outros aplicativos que tornam mais simples o aprendizado de matemática. É importante dizer que esses aplicativos não substituem o ensino teórico dos conteúdos realizado pelo professor, mas são excelentes auxiliares durante as aulas, devendo também ser explorados pelos próprios alunos para que aprofundem seus conhecimentos.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. Temas e Modelos. 1. Ed. Campinas: Edição do autor UFABC, 2012. Cap 2, p. 37-60.

[2] BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. Modelagem Matemática. Uberlândia, MG: UFU, 2014, 187p.

[3] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA Roberto C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

[4] CASTRO, Fabiano José de. **Matemática discreta: Tópicos de Recorrências Lineares e Suas Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

[5] ELLER, Elcie Sanches. **Equações de Diferenças. Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, 2015.

[6] GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. **Concrete Mathematics: a foundation for computer science**. Second Edition. United States of America: copyright Eddison-Wesley Publishing Company, 1994.

[7] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas. v. 4, 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.

[8] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David M. Fundamentos de Matemática Elementar: Matemática Comercial, Matemática Financeira, Estatística Descritiva. v. 11, 1. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] KNUTH, Donald E. *The Art of Computer Programming: fundamental algorithms*. Third Edition. United States of America: copyright Eddison-Wesley Publishing Company, 1997.

[10] LIMA, Elon Lages. Análise Real. v. 1, 7. Ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[11] LIMA, Elon Lages, et al. A Matemática do Ensino Médio. v. 2, 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Cap. 1, p.1-50. Cap. 3, p.77-102. Cap. 4, p. 131-133.

[12] LUÍS, Rafael Domingos Garanito. Equações de diferenças e aplicações. Disponível em https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/204. Acesso em 16 mar. 2021.

[13] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Exame Nacional do Ensino Médio: prova de matemática e suas tecnologias. Caderno azul, 2011. Disponível em < https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/07_AZUL_GAB.pdf >. Acesso em 08 mai. 2024.

[14] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Exame Nacional do Ensino Médio: prova de matemática e suas tecnologias. Caderno amarelo, 2023. Disponível em < https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2023_PV_impresso_D2_CD5.pdf >. Acesso em 11 mai. 2024.

[15] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. Matemática Discreta. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[16] PEREIRA, Marcus Vinícius. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[17] PROJETO CÁLCULO II. Espiral da sequência de Fibonacci no Geogebra. YouTube, 10 jul. de 2023. Disponível em < https://www.youtube.com/watch?v=WKaGOVzm5zY >. Acesso em 06 mai. 2024.

[18] SANTOS, Linovaldo Coêlho dos. **Uma ferramenta computacional para o cálculo e treinamento do método de escalonamento de Gauss**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

[19] SARAIVA, Paulo; MURTEIRO, José. Equações de Diferenças. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.

[20] SILVA, Israel Carley da. **Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio**. Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

[21] SILVA, Reginaldo Leoncio; ALMEIDA, Roger Luiz da Silva. A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 18, 2020. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/2 Acesso em: 07 ago. 2024.

[22] SILVA, Tiago Marinho da. **Uma Abordagem de Sequências Numéricas no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

[23] SIMÕES, Diego Ayllo da Silva. **Recorrências: Conceitos e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.