

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# **Estudo da Estabilidade do Método das Linhas Usando a Dinâmica de um Cabo Flexível**

Marilaine Colnago

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Co-orientador: Prof. Dr. José Roberto Nogueira

Presidente Prudente, Março de 2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# **Estudo da Estabilidade do Método das Linhas Usando a Dinâmica de um Cabo Flexível**

Marilaine Colnago

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Co-orientador: Prof. Dr. José Roberto Nogueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2012

*Aos meus pais,  
Marinalva e Mário Inácio.*

---

# Agradecimentos

A elaboração dessa dissertação exigiu um formalismo muito grande, além de um grande estudo para que cada linha ficasse bem clara a todos que um dia a utilizarão. Entretanto, esta página inicial é reservada para que o autor possa expressar os sentimentos experimentados durante os anos de trabalho e agradecer à possibilidade de conviver com tantas pessoas.

Agradeço à Deus pelo dom da vida.

Agradeço aos meus pais Mário e Marinalva pelo amor incondicional, por terem sabido compreender o valor da educação e por terem sido meu alicerce, minha força e por tudo que abriram mão por mim.

Agradeço ao meu namorado e amigo Lucas, pelo amor sem precedentes, pela paciência e compreensão com minhas dificuldades e minhas loucuras.

Quero expressar a minha mais sincera gratidão aos meus orientadores. Ao professor José Roberto pela paciência, apoio e grande amizade desde a graduação e ao professor Messias Meneguette pela ajuda no amadurecimento tanto profissional, quanto pessoal, já que se tornou um grande amigo ao longo desses 2 anos.

Aos professores que estiveram presentes nas etapas que me fizeram chegar até aqui, principalmente ao professor Suetônio pela ajuda na descoberta da paixão pela Matemática.

Agradeço aos membros da banca pelas correções e sugestões importantes para finalização do trabalho.

Agradeço pelo apoio, carinho e momentos de alegria, aos amigos da primeira turma do PosMAC: Diego, Marluce, Marluci, Tamiris, Danilo (in memoriam) e Vanderléa.

Agradeço a todos os colegas e amigos do PosMAC pelos momentos de descontração e concentração. Foram parte essencial para o meu crescimento.

Agradeço aos amigos Liu e Lucas que sofreram com meu sofrimento e hoje comemoram comigo. Pela amizade sincera, e pelos puxões de orelha e palavras de coragem quando o desânimo batia em minha porta.

Agradeço ao Fernando Pacanelli pela ajuda ao longo da dissertação.

Agradeço aos funcionários da Unesp, em especial ao pessoal da Seção de Pós-Graduação pela disposição e boa vontade.

E à reitoria da UNESP pelo apoio financeiro.

*“ Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto como um garoto brincando na praia, contente em achar aqui e ali, uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita, mas tendo sempre diante de mim, ainda por descobrir, “o grande oceano de verdades”. ”*

***Isaac Newton***

---

# Resumo

O estudo de equações diferenciais parciais tem merecido muito destaque nos últimos anos. O fato é que se trata de uma área muito utilizada em vários ramos da Ciência como Matemática, Física e Engenharia. Além disso, permite a modelagem de muitos problemas encontrados em nosso cotidiano e na natureza em geral. Porém, a sua utilização se torna complicada uma vez que, tais equações nem sempre apresentam o que chamamos de solução analítica. Isto só acontece com uma “pequena” classe de equações (ver [19]). Faz-se então necessário, buscar outras alternativas para a resolução de tais equações e daí os métodos numéricos de resolução desempenham um papel muito importante. O método das linhas, conhecido como um método de semi-discretização, representa uma alternativa para encontrar tais soluções e tem recebido atenção na atualidade. O presente trabalho, abrange, um estudo do método das linhas em sua forma original, bem como o estudo da estabilidade desse método utilizando a dinâmica de um cabo flexível. O método não foi satisfatório tanto para o cabo inextensível quanto para o cabo extensível, logo após poucos passos no tempo, a solução se deteriorou, representando, ao nosso ver, a instabilidade do método.

Palavras-Chave: *método das linhas, cabo flexível, perturbação.*

# Abstract

---

## **Title: The study of the Stability of the Method of Lines Using the Dynamics of a Flexible Cable**

The study of partial differential equations has received much attention in the recent years. The fact is that this is an area widely used in various branches of science such as Mathematics, Physics and Engineering. Furthermore, it allows the modeling of many problems encountered in our activities and nature in general. However, their use becomes complicated since these equations do not always have what we call analytical solution. This only happens with a “small” class of equations (see [19]). So, it is necessary to seek other alternatives for solving these equations, hence the numerical resolution methods play an important role. The method of lines, known as a semi-discretization method, represents an alternative to find such solutions and has received attention in the literature. This work includes a study of the method of lines in its original form, as well as to study the stability of this method using the dynamics of a flexible cable. This method was not satisfactory for both the inextensible cable and to extensible cable, after a few steps in time, the solution has deteriorated, representing, in our view, the instability of the method.

Keywords: *method of lines, flexible cable, perturbation.*

---

# Lista de Figuras

1.1	O sistema aéreo de reboque. Fonte: Referência [35]. . . . .	13
1.2	Cabo de baixa tensão formando loops e emaranhados no fundo do mar. Fonte: Referência [20]. . . . .	13
2.1	Estratégia geral do método das linhas. . . . .	16
2.2	Exemplo no plano. . . . .	16
3.1	Soluções analítica e numérica da Equação de Burgers . . . . .	27
3.2	Soluções numéricas da Equação de Burgers . . . . .	29
3.3	Soluções analítica e numérica da Equação Korteweg-de Vries . . . . .	32
3.4	Soluções analítica e numérica da Equação Korteweg-de Vries Burgers . . . . .	34
4.1	Visualização da Dedução da Equação do Cabo. . . . .	39
4.2	Segmentação do cabo . . . . .	56
5.1	Condições Iniciais . . . . .	64
5.2	Resultados numéricos usando o método de diferenças finitas. . . . .	65
5.3	Aproximação com $0 \leq t \leq 0.1$ e $\Delta t = 0.1/6$ . . . . .	66
5.4	Solução numérica do cabo inextensível quando $n = 20$ . . . . .	67
5.5	Aproximação com $0 \leq t \leq 0.06$ e $\Delta t = 0.06/4$ . . . . .	68
5.6	Aproximação com $0 \leq t \leq 0.06$ e $\Delta t = 0.06/4$ . . . . .	69

---

# Lista de Tabelas

3.1	Erro Numérico da Equação de Burgers usando o Método das Linhas. . . .	28
3.2	Erro Numérico da Equação Korteweg-de Vries usando o Método das Linhas.	31
3.3	Erro Numérico da Equação Korteweg-de Vries Burgers usando o Método das Linhas. . . . .	35

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Considerações Iniciais . . . . .	11
1.2	Objetivo . . . . .	12
1.3	Justificativa e Relevância do Tema . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Método das Linhas</b>	<b>15</b>
2.0.1	Integradores Temporais para o Método das Linhas . . . . .	20
2.1	Estabilidade Numérica . . . . .	25
2.1.1	Estudo da Estabilidade do Método das Linhas . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Aplicação do Método das Linhas para Problemas de Propagação de Ondas Não-Lineares</b>	<b>26</b>
3.1	Equação de Burgers . . . . .	26
3.2	A Equação de Korteweg-de Vries . . . . .	29
3.3	A Equação de Korteweg-de Vries Burgers . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Solução Numérica da Equação do Cabo</b>	<b>37</b>
4.1	Dedução da Equação do Cabo . . . . .	37
4.2	Estabilidade Linear . . . . .	41
4.3	Estabilidade Não-Linear . . . . .	41
4.4	Técnica de Perturbação . . . . .	41
4.5	O Problema do Cabo Inextensível . . . . .	42
4.5.1	Procedimento Numérico para a Resolução da Equação do Cabo Inextensível . . . . .	43
4.6	Procedimento Numérico Utilizando o Método das Diferenças Finitas . . . . .	49
4.6.1	Discretização Temporal . . . . .	50
4.7	O Problema do Cabo Extensível . . . . .	53
4.7.1	O problema de Cauchy de 1 <sup>a</sup> ordem equivalente . . . . .	54
4.7.2	Procedimento Numérico para a Resolução da Equação do Cabo Extensível . . . . .	56
4.7.3	Sistema Semi-Discreto . . . . .	57

<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>62</b>
5.1	Cabo Inextensível . . . . .	64
5.1.1	Resultado Numérico Usando Método das Diferenças Finitas . . . .	64
5.1.2	Resultado Numérico Usando Método das Linhas . . . . .	65
5.2	Cabo Extensível . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>70</b>

# Introdução

## 1.1 Considerações Iniciais

Historicamente, as equações diferenciais parciais (EDPs) são provenientes de estudo de problemas geométricos e da resolução de uma grande variedade de problemas da mecânica. Durante a segunda metade do século XIX, um grande número de matemáticos estiveram ativamente envolvidos na investigação de vários problemas apresentados por meio de equações diferenciais parciais. A principal razão para toda esta pesquisa é que as equações diferenciais parciais expressam muitas leis fundamentais da natureza e surgem na análise matemática de diversos problemas em ciência e engenharia.

O Método das Linhas (MDL) é uma aproximação da solução da equação diferencial parcial (não-linear) dependente do tempo. A ideia básica do método das linhas é substituir as derivadas espaciais da EDP com aproximações algébricas. Uma vez que isto foi feito, apenas a variável de valor inicial, geralmente o tempo, permanece. Em outras palavras, com apenas uma variável independente, temos um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que representam a equação diferencial parcial original. Temos então que formular uma aproximação para esse sistema. Feito isso, podemos aplicar qualquer algoritmo de integração para EDO de valor inicial para calcular uma aproximação numérica para a solução da EDP. Desse modo, uma das características do MDL é a utilização dos atuais e, geralmente bem estabelecidos, métodos numéricos para EDOs.

Nosso projeto destina-se a estudar a estabilidade do método das linhas em sua forma original utilizando a dinâmica de um cabo flexível utilizando a técnica de perturbação.

Como a equação do cabo é, na verdade, um sistema de equações, faz-se necessário ganhar experiência por meio da solução de outras equações que, mesmo sendo escalares, apresentam dificuldades extras como é o caso de “stiffness”, conforme expresso a seguir.

---

## 1.2 Objetivo

Desenvolver e implementar a solução numérica da equação de Burgers, Korteweg-de Vries e Korteweg-de Vries Burgers utilizando o método das linhas, como um estudo inicial e implementar a solução da equação do cabo flexível utilizando também o método das linhas com o estudo da análise da estabilidade desse método via método da energia e “perturbação”, que consiste na simulação para pequenas perturbações iniciais e análise de seu comportamento no tempo.

## 1.3 Justificativa e Relevância do Tema

O estudo de equações diferenciais parciais tem estado em alta e deve permanecer assim por muito tempo. É uma área que comporta estudos teóricos em várias frentes, bem como permite modelagem de praticamente todos os problemas do cotidiano. A solução numérica dessas equações se faz necessária porque somente em casos muito simples é possível uma solução analítica.

A solução numérica de equações parciais é por si uma importante área, não apenas pelo que pode atingir em termos de resultados, mas também por ser fonte de pesquisa. Por exemplo, na área de equações hiperbólicas, um período longo foi preciso para se conseguir bons métodos, como os esquemas *upwind* TVD (*Total Variation Diminishing*), mas a pesquisa continua em termos de esquemas centrais. Problemas não lineares ainda são de difícil solução e o método das linhas (semi-discretização) pode representar uma alternativa e tem recebido atenção na atualidade, em sua versão original e na versão com malha adaptativa [50]. A revista *Journal of Computational and Applied Mathematics* dedicou um volume, 183 (2) 2005, especialmente ao método das linhas.

O uso da equação do cabo pode ser justificada pela sua importância. Além das aplicações mais conhecidas da dinâmica do cabo, sendo usado como um elemento estrutural empregado em pontes suspensas, linhas de transmissão e suporte de teleféricos, em [35], o cabo é usado para auxiliar em caso de reboque aéreo. Segundo o autor, o sistema de antena de reboque é composto por três componentes principais: veículo hospedeiro, veículos aéreos de reboque, e cabo de conexão, ver figura 1.1. Em geral, o veículo hospedeiro é maior do que o veículo de reboque e fornece o impulso para ambas as aeronaves. Esse estudo teve como objetivo criar uma simulação dinâmica do sistema aéreo com o foco principal em torno da derivação do sistema de equações e componente de movimento em duas e três dimensões. O estudo inclui modelos matemáticos para cada um dos componentes do sistema, bem como a metodologia para a derivação das equações de movimento para cada um dos modelos de componentes mencionados.



Figura 1.1: O sistema aéreo de reboque. Fonte: Referência [35].

Outra aplicação, que está presente em [20], estuda o comportamento de cabos dentro do mar através de equações que modelam seus movimentos. Cabos colocados sobre o fundo do mar podem formar “loops” e emaranhados, como ilustrado na figura 1.2. Segundo os autores, os loops podem causar danos localizados e, no caso de cabos de fibra óptica, também podem impedir a transmissão do sinal. Essas deformações altamente não-lineares são iniciadas por condições do cabo de baixa tensão e torção suficiente para induzir uma “flambagem” no cabo (ver [36]).

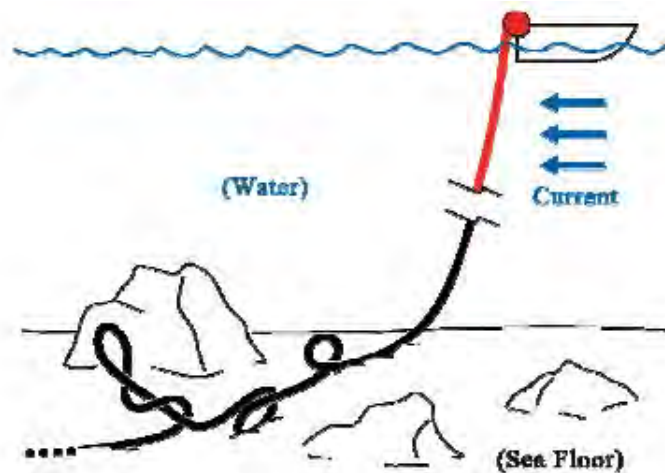


Figura 1.2: Cabo de baixa tensão formando loops e emaranhados no fundo do mar. Fonte: Referência [20].

Em [20], foi apresentada uma revisão da teoria da haste e um algoritmo numérico que pode ser usado para estudar a dinâmica não-linear de cabos altamente contorcidos. Embora o objetivo principal do trabalho foi modelar a dinâmica de cabos marinhos,

levando em consideração a formação de laços e emaranhados no fundo do mar, o autor mostrou também que as mesmas técnicas em uso para o cabo marinho com formação de laços e emaranhados podem ser usadas para estados superenrolados de DNA e as transições dinâmicas entre esses estados.

O nosso trabalho utiliza um modelo simplificado para o cabo, sem forças externas, visando a solução numérica e sua complicação, esperando trazer entendimento que sirva para outros modelos mais completos e complicados.

O estudo da estabilidade como descrito acima ainda não existe na literatura.

## Método das Linhas

Seguindo [40], a solução das equações diferenciais parciais podem ser divididas em dois tipos:

- Solução Analítica: são as soluções exatas, que são geralmente difíceis, senão impossíveis, de obter matematicamente para todas as equações.
- Solução Numérica: idealmente, essa solução seria simplesmente uma avaliação numérica da solução analítica. Mas, se a solução analítica de determinada equação não está disponível, a solução numérica é uma aproximação para a solução analítica, e nossa expectativa é que ela represente a solução analítica com boa precisão.

O uso de computadores modernos e rápidos, disponíveis atualmente, tem facilitado a resolução de EDPs mais complexas. Tais máquinas tem feito possíveis as soluções anteriormente impossíveis de equações de grande complexidade, tanto da matemática quanto da física ou engenharia. Isto nos leva à um maior desenvolvimento em softwares numéricos tais como pacotes para resolver EDOs. E então muitos progressos tem sido feitos no desenvolvimento de novos métodos numéricos, como, por exemplo, o Método das Linhas (MDL).

A solução numérica de uma EDP implica na aproximação do problema original num domínio contínuo por um sistema de equações algébricas num domínio discreto. Existem vários métodos de discretização disponíveis que fazem essa transformação ao longo de todas as coordenadas. No entanto, se recorrermos ao método das linhas, vamos realizar um procedimento que pode ser resumido da seguinte forma: primeiro discretiza-se o problema original em todas as direções, exceto em uma (geralmente no tempo), depois integra-se na direção restante o sistema de EDOs resultante do primeiro passo, com algum integrador disponível (ver Figura 2.1).

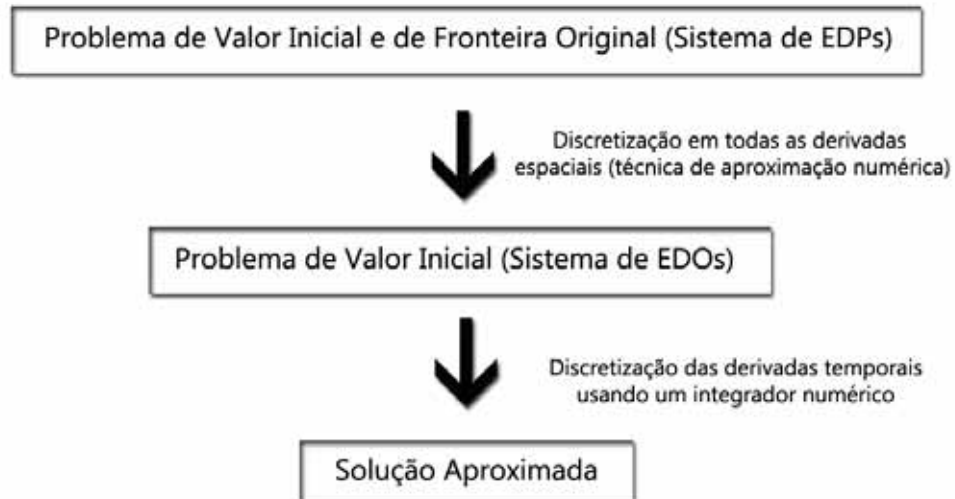
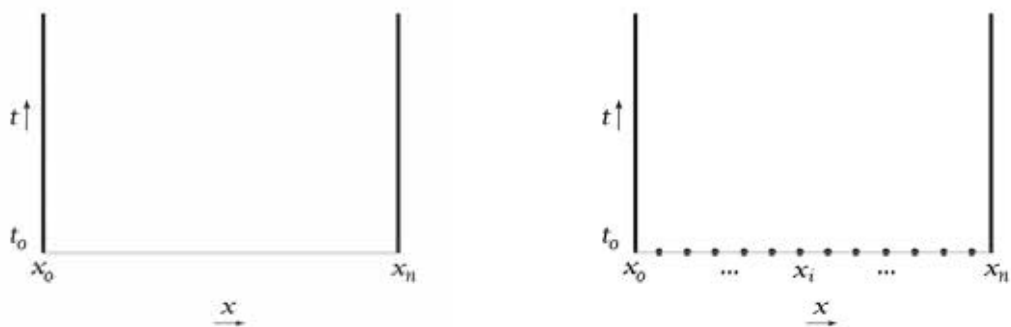
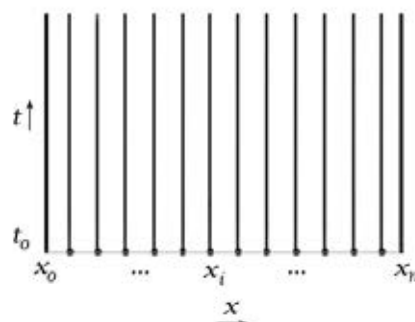


Figura 2.1: Estratégia geral do método das linhas.



(a) Domínio espacial contínuo.

(b) Discretização do domínio espacial.



(c) Integração temporal.

Figura 2.2: Exemplo no plano.

O método das linhas tem sido amplamente utilizado para resolver EDPs desde a sua primeira aparição na antiga União Soviética em 1930 [27].

---

Campo relatou em [8], que o método das linhas com base padrão de diferenças finitas e malhas grossas, mostrou-se um procedimento adequado para a análise da convecção mista em tubos verticais.

Em [32], Oymak e Selçuk propuseram o método de solução de linhas no tempo para a equação de Navier-Stokes 2D juntamente com a equação da energia. Em [38], Sadiku e Garcia utilizaram o método das linhas para resolver a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, e em [44], o método das linhas foi usado para resolver o problema de calor inverso de condução (não-linear) e, segundo os autores, o método deu resultados muito precisos.

Em [27], os autores utilizaram o método das linhas para resolver problemas com equações de águas rasas e depois aplicar em problemas envolvendo tsunami. O procedimento foi aplicado para calcular os efeitos do tsunami na Indonésia ao longo da costa da península da Malásia e Tailândia. A principal conclusão que emergiu deste estudo é que o método das linhas é um procedimento adequado para a análise de fenômenos de onda longa que se originou em regiões de águas rasas. Além disso, as comparações com o padrão de soluções utilizando diferenças finitas revelam que o MDL proporciona um eficaz algoritmo para simulação de equações de águas rasas.

Shakeri e Dehghan utilizaram o método das linhas, em [41], para resolver a equação de onda unidimensional sujeita a uma condição de conservação integral e no trabalho que realizaram citaram vários outros métodos utilizados para tal. Segundo os autores, este artigo investigou a abordagem do método das linhas para resolver a equação unidimensional hiperbólica. Os resultados computacionais confirmaram a eficiência, confiabilidade e precisão deste procedimento. E também ficou claro que o uso de diferenças finitas de ordem superior na solução MDL da equação de onda, e, geralmente, para outras equações diferenciais parciais, é recomendado.

Segundo Brito, em [6], a discretização espacial conduz, geralmente, à construção de um sistema de EDOs stiff <sup>1</sup>, o que implica que alguns métodos explícitos, como o de Runge-Kutta (RK) revelam-se computacionalmente inadequados e torna-se necessário recorrer aos métodos implícitos como os métodos BDF (Backward Differentiation Formula) ou RK implícitos, para uma resolução eficaz do problema numérico. A escolha de um integrador para a EDO resultante é um aspecto essencial na utilização do MDL. Felizmente, existe uma considerável oferta e disponibilidade de pacotes de integradores de EDOs eficientes. Essa disponibilidade de integradores de alta qualidade para resolver uma ampla gama de problemas incluindo EDOs e sistemas mistos de equações diferenciais ordinárias e algébricas é um dos aspectos de sucesso do MDL além da simplicidade de sua implementação.

Segundo Shakeri e Dehghan, em [41], a vantagem mais importante da abordagem do método das linhas é que ele tem não só a simplicidade dos métodos explícitos, mas tam-

---

<sup>1</sup>No presente trabalho, a palavra aparecerá na língua inglesa, por assim ser usada nos trabalhos que a ela se referem. Para mais detalhes sobre o assunto, ver subseção 2.0.1.

bém a superioridade (vantagem de estabilidade) dos implícitos, a menos que um método numérico não adequado para a solução das EDOs seja empregado. É possível alcançar ordem superior nas aproximações na discretização espacial de derivadas sem aumentos significativos na complexidade computacional.

Resumindo, o método das linhas tem as seguintes propriedades que justificam seu uso:

1. é um método eficiente para a resolução de equações não lineares;
2. eficiência computacional: o caráter semi-analítico da formulação leva a um algoritmo simples e compacto, que produz resultados precisos com menos esforço computacional do que outras técnicas;
3. a estabilidade numérica: separando a discretização do espaço e do tempo, é fácil estabelecer a estabilidade e convergência para uma ampla gama de problemas;
4. redução do esforço de programação: fazendo um bom uso dos integradores para equações diferenciais ordinárias (EDOs), o esforço de programação pode ser substancialmente reduzido;
5. redução do tempo computacional: uma vez que apenas uma pequena quantidade de discretização de linhas são necessárias no cálculo, não há necessidade de resolver um grande sistema de equações, daí o tempo computacional se torna pequeno.

Por outro lado, o MATLAB é amplamente disponível em indústrias e instituições e fornece uma base muito conveniente para o desenvolvimento de ferramentas para o método das linhas, permitindo operações com vetores e matrizes e exige um conhecimento mínimo de programação. Isso justifica o uso desse software neste trabalho.

Para ilustrar o Método das Linhas (MDL), vamos considerar a equação de advecção linear dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.1)$$

aproximada numa malha espacial em  $x$  com  $n$  pontos separados uniformemente por uma distância  $\Delta x$ . O primeiro passo é a discretização da variável  $x$ .

Para algum ponto  $x_i$ , usaremos a notação:  $u_i(t) = u(x_i, t)$ , daí teremos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du_i}{dt}.$$

Aproximando a derivada espacial utilizando diferenças finitas centradas em algum ponto  $x_i$ , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.2)$$

A substituição em (2.1) por essa aproximação nos dá um sistema de  $n - 1$  EDOs da forma:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= -\frac{u_2 - u_0}{2\Delta x}, \\ \frac{du_2}{dt} &= -\frac{u_3 - u_1}{2\Delta x}, \\ \frac{du_3}{dt} &= -\frac{u_4 - u_2}{2\Delta x}, \\ &\vdots \\ \frac{du_{n-1}}{dt} &= -\frac{u_n - u_{n-2}}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

E então, esse sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser resolvido usando algum integrador já existente.

Em [14], podemos encontrar um exemplo mais detalhado do uso do método das linhas:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + (u_x)^2, & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= x(1 - x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) &= \text{sen}(t), & 0 \leq t \leq T.\end{aligned}$$

O domínio  $[0, 1]$  de  $x$  é substituído por um conjunto de pontos discretos  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$ , onde  $h = (1/N)$ . Ao longo de cada uma dessas linhas  $(x_i, t)$  temos uma função  $U_i(t)$ .

Usando diferenças centradas para  $u_{xx}$  e  $u_x$  e desprezando o erro da discretização, temos

$$U'_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} + \left(\frac{U_{i+1}(t) - U_{i-1}(t)}{2h}\right)^2. \quad (2.3)$$

Tomando  $N = 5$  e  $h = 0.2$ , podemos exemplificar e chegar ao seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{aligned}U_0(t) &= U(0, t) = 0 \\ U'_1(t) &= \frac{U_2 - 2U_1 + U_0}{0,04} + \frac{(U_2 - U_0)^2}{0,16} \\ U'_2(t) &= \frac{U_3 - 2U_2 + U_1}{0,04} + \frac{(U_3 - U_1)^2}{0,16} \\ U'_3(t) &= \frac{U_4 - 2U_3 + U_2}{0,04} + \frac{(U_4 - U_2)^2}{0,16} \\ U'_4(t) &= \frac{U_5 - 2U_4 + U_3}{0,04} + \frac{(U_5 - U_3)^2}{0,16} \\ U_5(t) &= U(1, t) = \text{sen}(t),\end{aligned}$$

com condições iniciais:

$$U_0(0) = 0$$

$$U_1(0) = u(0.2, 0) = 0.2(1 - 0.2) = 0.16$$

$$U_2(0) = u(0.4, 0) = 0.4(1 - 0.4) = 0.24$$

$$U_3(0) = u(0.6, 0) = 0.6(1 - 0.6) = 0.24$$

$$U_4(0) = u(0.8, 0) = 0.8(1 - 0.8) = 0.16$$

$$U_5(0) = 0.$$

Resolvendo este sistema, obtemos aproximações para a solução  $u(x, t)$  ao longo das linhas  $(x_i, t)$ .

## 2.0.1 Integradores Temporais para o Método das Linhas

Vamos comentar alguns integradores que são essenciais na eficácia do método das linhas para a resolução de equações diferenciais parciais. Como dito anteriormente, a discretização espacial no método das linhas produz, normalmente, um sistema de EDOs do tipo stiff. Segundo Justo, em [29], as equações stiff não tem uma definição muito precisa e variam na literatura. Em [23], Hairer e Wanner citam que, a opinião mais formal e também a primeira historicamente, foi dada por Curtiss e Herschfelder em 1952 e diz que “equações stiff são equações onde certos métodos numéricos implícitos, os BDF em particular, funcionam geralmente bem melhor que os explícitos”. Em [29], Justo mostra uma definição que pode ajudar a definir uma equação como stiff ou nonstiff:

**Definição 1** A razão  $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$  entre o maior e o menor autovalor (em módulo) do sistema de EDOs (ou dos autovalores da matriz Jacobiana de um sistema geral) é chamada **stiffness ratio**.

Os autovalores da Jacobiana exercem, certamente, um papel essencial na decisão de definir uma equação stiff ou nonstiff, mas a dimensão do sistema, a suavidade da solução ou o intervalo de integração também são importantes [23].

Segundo Cash, em [9], nos anos 50, Curtiss e Hirschfelder publicaram um dos primeiros trabalhos que identificou claramente as dificuldades na resolução de problemas de valor inicial stiff da forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Depois disso, uma grande variedade de métodos tem sido propostos para a solução numérica de (2.4).

No MATLAB existem diversos algoritmos para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

1. **ode45**: Runge-Kutta explícito de ordem 4/5 (Dormand-Prince);
2. **ode23**: Runge-Kutta explícito de ordem 2/3 (Bogacki-Shampine);

3. **ode113**: Preditor-corretor de passo variável (Adams-Bashforth-Moulton);
4. **ode15s**: BDF de passo quase constante para EDOs do tipo stiff (Klopfenstein-Shampine);
5. **ode23t**: Implementação da regra trapezoidal;
6. **ode23s**: Implementação de um par Rosenbrock (2,3) modificado para EDOs stiff;
7. **ode23tb**: Runge-Kutta implícito trapezoidal/BDF (Bank-Rose-Hosea-Shampine).

Matematicamente, o mais simples dos problemas de valor inicial pode ser apresentado na forma:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= \alpha, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. A função  $y = y(x)$ , ( $x \geq a$ ) é a solução, e  $\alpha$  é o valor inicial em  $a$ .

Abaixo serão apresentados, de forma sucinta, os integradores para esse tipo de sistema de equações diferenciais ordinárias, que são melhor discutidos em [10] e [23].

### 2.0.1.1 Métodos de Runge-Kutta Implícitos

Os métodos implícitos são usados pois, geralmente, são mais precisos e menos sensíveis a erro que os métodos explícitos e, além disso, a região da estabilidade desses métodos é maior, permitindo então o uso de tamanho de passo bem maiores que os exigidos nos métodos explícitos. Porém, o esforço computacional que o método implícito requer é maior. Por isso, os métodos implícitos devem ser usados quando há necessidade de uma maior precisão, como no caso dos problemas stiff.

Os métodos de Runge-Kutta são algoritmos de passo único obtidos através de uma aproximação da série de Taylor, sem haver necessidade de calcular as derivadas. Existem várias ordens de aproximação para estes métodos, que estão relacionadas com o número de termos utilizados da série de Taylor. Assim, para a  $s$ -ésima ordem do método de Runge-Kutta, deveremos truncar a série de Taylor pelo termo de ordem  $i$ , resultando num Erro de Truncamento Local (ETL) de ordem  $s + 1$  e um Erro de Truncamento Global (ETG) de ordem  $s$ .

A classe geral dos métodos implícitos de Runge-Kutta é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.6)$$

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} k_j). \quad (2.7)$$

Os métodos de Runge-Kutta são definidos por sua *matriz de Butcher*, que mostram os coeficientes do método em uma tabela como segue:

$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdots$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdots$	$a_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\cdots$	$a_{ss}$
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_s$

Segundo Cash, em [10], os métodos de Runge-Kutta implícitos tem excelentes propriedades de estabilidade. Em particular, foi provado por Butcher que  $s$ -fases totalmente implícitas do método Gauss Runge-Kutta são de ordem  $2s$  e A-estável (Ver [7], p. 294). No entanto, uma das grandes desvantagens dos métodos Runge-Kutta implícitos, como qualquer outro método implícito, é que eles são difíceis de implementar. A principal razão para isso está no custo de resolver a equação algébrica não-linear (2.7) para  $k_i$ . Se  $y \in \mathbb{R}^n$ , (2.7) requer a solução de um conjunto de equações algébricas não-lineares em cada passo de tempo. E isso gera um esforço computacional muito maior do que o exigido nos métodos de passo múltiplo. Uma abordagem bastante diferente para obter eficiência computacional com os métodos de Runge-Kutta foi considerada por Hairer e Wanner [23]. O que fizeram foi pensar numa classe de métodos Runge-Kutta onde a equação (2.7) seja de certo modo desacoplada. Usando essas ideias, eles desenvolveram um código chamado Radau5 que é A-estável e de ordem 5 (Ver [22]).

### 2.0.1.2 Fórmula DIRK

Os métodos de Runge-Kutta Diagonalmente Implícitos (Diagonally Implicit Runge Kutta) têm sido amplamente estudados, particularmente no livro de Hairer e Wanner ([23]). Esse método foi proposto em 1977, como uma forma de diminuir o esforço computacional, que é uma das desvantagens dos métodos, e melhorar a precisão dos resultados. A ideia por trás dos métodos DIRK é considerar a classe especial de fórmulas Runge-Kutta

implícitas:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.8)$$

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j), \quad 1 \leq i \leq s. \quad (2.9)$$

Note que na formulação DIRK o índice superior do somatório que aparece em (2.9) é  $i$ , em vez de  $s$  e isso significa que a equação (2.9) define sistemas distintos de equações algébricas, cada um de tamanho  $N$  a ser resolvido para  $k_i$ . Uma desvantagem da formulação em (2.8) e (2.9) é que fórmulas DIRK têm ordem baixa e isso pode levar a um mau desempenho em problemas excessivamente stiff. Para fazer com que estas fórmulas DIRK sejam mais atraentes computacionalmente definimos:

$$a_{ii} = \lambda, \quad 1 \leq i \leq s, \quad (2.10)$$

de modo que (2.9) defina  $s$  equações, todas com a mesma matriz de iteração de Newton. É bastante difícil derivar métodos DIRK de alta ordem uma vez que não é possível fazer algumas das hipóteses simplificadoras que são feitas com métodos totalmente implícitos, mas algumas simplificações são possíveis se concentrarmos nossa atenção para métodos estáveis stiff, que são métodos onde:

$$a_{sj} = b_j, \quad (2.11)$$

para todo  $1 \leq j \leq s$ .

Para um resumo do que exatamente pode ser alcançado, ver [23]. Parece que não houve evolução destes métodos para problemas stiff como aconteceu para outros.

### 2.0.1.3 Fórmulas BDF

A Fórmula de Diferenciação Regressiva ou Backward Differentiation Formula (BDF) têm sido amplamente utilizada no método das linhas. Eles são métodos de múltiplos pontos, pois procuram aumentar a ordem da aproximação através de informações obtidas em pontos anteriores. Os métodos BDF são representados por:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \beta_1 f_{n+k}, \quad (2.12)$$

onde  $\alpha_j, j = 0, \dots, k$  e  $\beta_1$  são constantes reais e  $h$  é o tamanho do passo.

As vantagens e desvantagens do uso de métodos BDF para integrar sistemas stiff são por agora muito bem conhecidas. Segundo Cash ([10]), as fórmulas BDF, em particular, são A-estáveis incluindo até a ordem 2 e  $A(\alpha)$ -estáveis até ordem 6. Devido a isso, e devido ao fato de que ao realizar a integração do tempo num contexto MDL somente um grau baixo de precisão é, muitas vezes, necessário, uma abordagem comum é usar o BDF de segunda ordem como integrador de tempo, ou seja, para uso fixo e não por ordem variável no tempo.

#### 2.0.1.4 Fórmula Rosenbrock

Segundo Hairer e Wanner em [23], entre os métodos que dão resultados satisfatórios para as equações stiff, os métodos de Rosenbrock são os mais fáceis de programar. Métodos de Rosenbrock pertencem a uma grande classe de métodos que tentam evitar sistemas não-lineares e substituí-los por uma sequência de sistemas lineares. Um método de Rosenbrock de estágio  $s$  é dado pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} k_i &= hf \left( y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, s \\ y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^s b_j k_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\alpha_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $b_i$  são coeficientes determinados e  $J = f'(y_0)$ .

Cada fase deste método consiste em um sistema de equações lineares com incógnitas  $k_i$  e com matriz  $I - h\gamma_{ii}J$ .

#### 2.0.1.5 Fórmulas MEBDF

O Método de Diferenciação Regressiva Modificado Estendido ou Modified Extended Backward Differentiation Formulae (MEBDF), (ver, por exemplo, [9]) foi desenvolvido em uma tentativa de obter a estabilidade consideravelmente melhor do que é conseguido através da fórmula BDF, mas a um custo computacional razoável. MEBDF têm melhores propriedades de estabilidade em comparação com BDF uma vez que são A-estáveis até ordem 4 e são  $A(\alpha)$ -estáveis até ordem 9. Além disso, para um  $k$  dado a ordem de um MEBDF é maior do que a de um BDF. Por exemplo, no passo 1 MEBDF tem ordem 2 e isso tem consequências importantes no contexto MDL, uma vez que é auto-partida. Se tomarmos o MEBDF de 1 passo e reescrevermos como um método Runge-Kutta implícito diagonal, nós obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc}
 1 & 1 & & \\
 2 & 1 & 1 & \\
 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1
 \end{array}$$

Este método é estável. Em vista disso, parece pouca a motivação para realizar a integração no tempo utilizando 2 passos, como no caso do BDF de ordem 2, já que com 1 passo já tem-se uma precisão suficiente para uso em um contexto MDL.

## 2.1 Estabilidade Numérica

### 2.1.1 Estudo da Estabilidade do Método das Linhas

Alguns trabalhos foram desenvolvidos a fim de se obter um estudo da estabilidade do método das linhas. Nessa seção veremos alguns resultados obtidos por alguns autores. Em [46], a teoria de desigualdade diferencial para os sistemas de segunda ordem de equações diferenciais ordinárias é aplicada para obter convergência e estimativas de erro para o método das linhas. Teoremas de comparação para problemas de valores de fronteira para sistemas de equações diferenciais ordinárias foram desenvolvidos e usados para comparar soluções para problemas de valor elípticos e parabólicos. Segundo Thompson, em uma série de artigos entre 1968 e 1970, W. Walter, [47], aplica a teoria da desigualdade diferencial para problemas de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias para obter resultados sobre a convergência uniforme de soluções aproximadas do método das linhas de equações parabólicas para as soluções exatas.

Em [31], Mikhail diz que o MDL é estável e simples em aplicações quando ele é usado para resolver equações hiperbólicas e parabólicas e que uma desvantagem principal, que foi publicada, “culpou” o MDL, dizendo que ele é instável quando aplicado a equações do tipo elíptica (ver Referência [28] por exemplo). Um dos objetivos de Mikhail foi ressaltar que a instabilidade é inerente à natureza das equações elípticas e esse fato não deve realmente ser atribuído ao método das linhas.

Apesar desta instabilidade, Mikhail diz que o MDL foi aplicado com sucesso a um número de problemas elípticos de importância prática. O principal objetivo do trabalho de Mikhail foi estabelecer a relação entre a solução do MDL e a solução analítica de uma equação elíptica clássica, mais precisamente a equação de Laplace em duas dimensões, concluindo que o método das linhas é uma representação válida das equações diferenciais elípticas e que a instabilidade no MDL tem a sua origem na equação a ser resolvida.

# Aplicação do Método das Linhas para Problemas de Propagação de Ondas Não-Lineares

## 3.1 Equação de Burgers

É interessante observar que a equação de Burgers vêm se consolidando como equação modelo para testes e comparações de técnicas computacionais. Em [12], Cenedese cita que Benton e Platzman (1972) estabeleceram tabelas comparativas e publicaram 35 soluções distintas de problemas de valor inicial para as equações de Burgers em um domínio infinito, além de soluções para problemas de valores de contorno e inicial em domínios finitos.

Consideremos o modelo não linear de turbulência, com um termo dissipativo, proposto por Burgers no ano de 1948:

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é chamado coeficiente de viscosidade. Uma condição inicial e de fronteira nessa equação são dadas pela solução exata da equação e podem ser encontradas em [40]:

$$u(x, t) = \frac{0.1e^{-A} + 0.5e^{-B} + e^{-C}}{e^{-A} + e^{-B} + e^{-C}}, \quad (3.2)$$

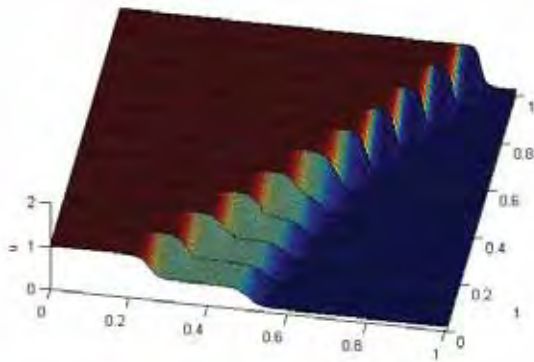
onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{0.05}{v}(x - 0.5 + 4.95t), \\ B &= \frac{0.25}{v}(x - 0.5 + 0.75t), \\ C &= \frac{0.5}{v}(x - 0.375), \end{aligned}$$

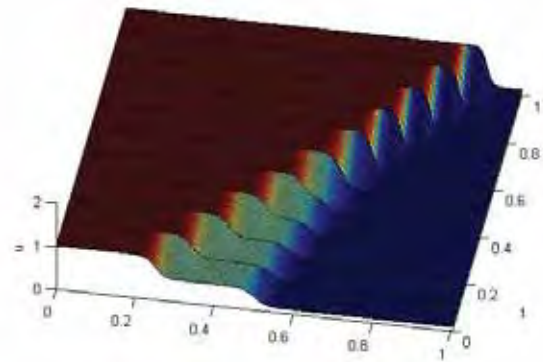
com  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq t \leq 1$ .

A solução dessa equação foi calculada no Matlab usando 201 pontos. A derivada espacial foi calculada por diferenças finitas e o sistema de 201 EDOs foi resolvido pelo integrador stiff `ode15s`. Uma implementação que serviu de guia para resolução dessa equação usando o método das linhas pode ser encontrada em [40].

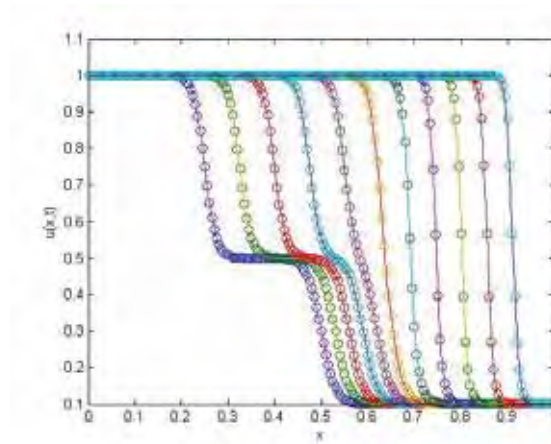
Os gráficos da solução dessa equação, tanto em 2D, quanto em 3D, quando  $\mu = 0.003$ , podem ser vistos abaixo, assim como uma tabela com os valores das soluções analítica e numérica e os erros.



(a) Solução Numérica Burgers



(b) Solução Analítica Burgers



(c) Equação de Burgers 2D

Figura 3.1: Soluções analítica e numérica da Equação de Burgers

Espaçamento	Tempo	Solução Numérica	Solução Analítica	Erro
0.000	0.0	1.000000	1.000000	0.0
0.025	0.0	1.000000	1.000000	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.975	0.0	1.000000	1.000000	0.0
1.000	0.0	1.000000	1.000000	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.375	0.2	0.948162	0.944636	0.003526
0.400	0.2	0.743099	0.749992	-0.006893
0.425	0.2	0.555188	0.555314	-0.000126
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.950	0.2	0.100000	0.100000	0.000000
0.975	0.2	0.100000	0.100000	0.000000
1.000	0.2	0.100000	0.100000	0.000000
0.000	0.4	1.000022	1.000000	0.000022
0.025	0.4	1.000016	1.000000	0.000016
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.900	0.4	0.100000	0.100000	0.000000
0.925	0.4	0.100000	0.100000	0.000000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.000	0.6	1.000098	1.000000	0.000098
0.025	0.6	1.000086	1.000000	0.000086
0.050	0.6	1.000074	1.000000	0.000074
0.075	0.6	1.000064	1.000000	0.000064
0.100	0.6	1.000054	1.000000	0.000054
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.000	1.0	1.000398	1.000000	0.000398
0.025	1.0	1.000374	1.000000	0.000374
0.050	1.0	1.000350	1.000000	0.000350
0.075	1.0	1.000327	1.000000	0.000327
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.450	1.0	1.000076	1.000000	0.000076
0.475	1.0	1.000065	1.000000	0.000065
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.900	1.0	0.882859	0.856946	0.025914
0.925	1.0	0.193920	0.199719	-0.005799
0.950	1.0	0.103996	0.102646	0.001350
0.975	1.0	0.100164	0.100065	0.000099
1.000	1.0	0.100007	0.100002	0.000005

Tabela 3.1: Erro Numérico da Equação de Burgers usando o Método das Linhas.

Para um valor de  $\mu$  muito pequeno, estaremos perto de uma equação de quebra de onda, já que a equação vai perdendo o termo dissipativo, que regulariza a equação formando assim o choque. Vejamos os gráficos, ainda da solução dessa equação, mas com  $\mu = 0.03$  e  $\mu = 0.3$ :

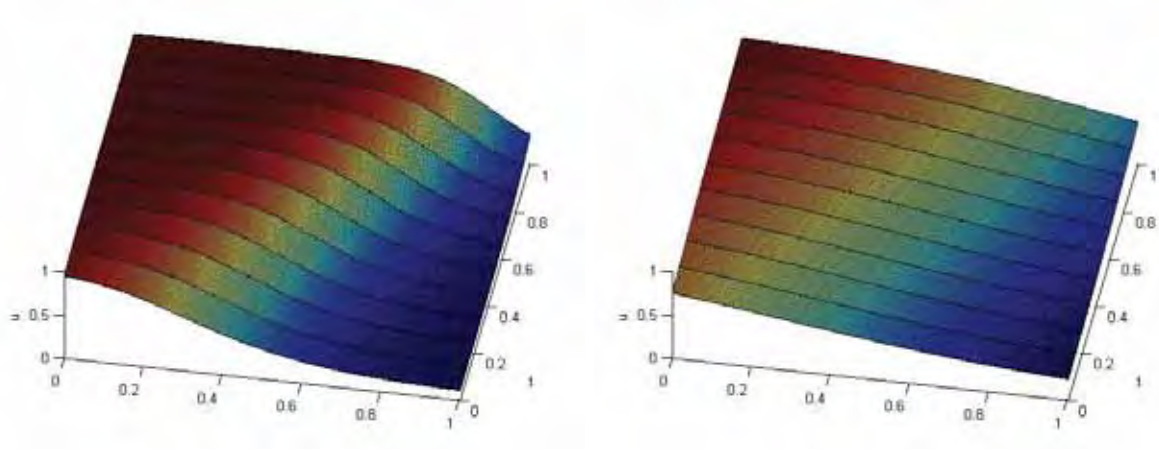
(a) Solução Numérica Burgers com  $\mu = 0.03$ (b) Solução Numérica Burgers com  $\mu = 0.3$ 

Figura 3.2: Soluções numéricas da Equação de Burgers

Comparando as figuras (3.1(b)), (3.2(a)) e (3.2(b)), podemos observar que conforme aumenta-se o valor do  $\mu$ , mais suave se torna o choque.

## 3.2 A Equação de Korteweg-de Vries

A equação de KdV foi obtida pela primeira vez por Korteweg e de Vries no estudo de ondas de água em um canal raso tentando explicar um fenômeno observado em 1834, onde uma onda se propagava por vários quilômetros e não mudava de forma ou amplitude, chamadas de “ondas solitárias”, que mais tarde deram a ela o nome de sóliton.

Posteriormente foi verificado que tal equação estava também envolvida com uma grande variedade de problemas relacionados a fenômenos físicos, principalmente àqueles aonde há a existência de ondas de choque, ondas viajantes e sólitons. Alguns fenômenos físicos da mecânica quântica podem ser explicados através de modelos baseados na equação de KdV. Além disso, essa equação é também utilizada na dinâmica de fluidos, aerodinâmica, física dos plasmas, mistura de bolhas de gás líquido, cristais anarmônicos e mecânica contínua como um modelo para formação de ondas de choque, sólitons, turbulência, comportamento de camadas de contorno e transporte de massa. Várias soluções de forma fechada, soluções de aproximações por séries e soluções numéricas são conhecidas, para casos particulares de condições de contorno e condições iniciais (ver [42] [33]).

A equação KdV clássica é dada por:

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0. \quad (3.3)$$

---

Consideremos  $\varepsilon = 6.0$  e  $\mu = 1.0$ .

A equação é de primeira ordem em  $t$  e de terceira ordem em  $x$ , e então requer uma condição inicial e três condições de fronteira.

A solução analítica é conhecida, para os parâmetros acima, por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct) \right\}. \quad (3.4)$$

A condição inicial é obtida através da solução analítica com  $t = 0$ , que é:

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{c}(x) \right\}. \quad (3.5)$$

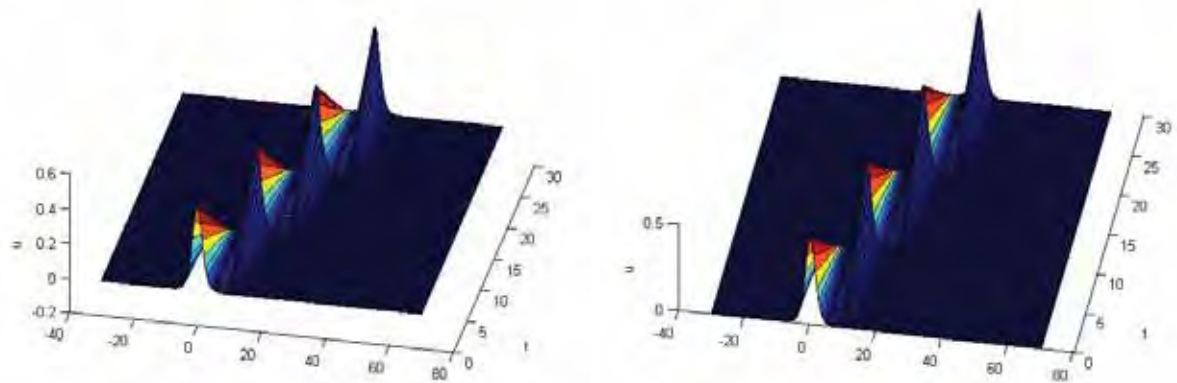
Para completar a especificação do problema, nós devemos considerar três condições de fronteira para (3.3). No entanto, se a EDP é analisada essencialmente num domínio infinito,  $-\infty \leq x \leq +\infty$ , e se mudanças na solução só ocorrem num intervalo finito em  $x$ , então condições de fronteira no infinito podem ser consideradas desprezíveis, em outras palavras, nós não temos que especificar as condições de fronteira.

A seguir apresentamos uma tabela com alguns valores gerados pelo algoritmo, onde encontram-se os valores gerados pela solução analítica, pela solução numérica e o erro. Nesse caso, definimos  $-30 \leq x \leq 70$  e o intervalo de  $t$  é definido com  $0 \leq t \leq 30$  com  $t = 0, 10, 20, 30$ .

Espaçamento	Tempo	Solução Numérica	Solução Analítica	Erro
-30.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0
-27.5	0.0	0.000000	0.000000	0.0
-25.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-27.5	10.0	-0.000232	0.000000	-0.000232
-25.0	10.0	0.000234	0.000000	0.000234
-22.5	10.0	-0.000094	0.000000	-0.000094
-20.0	10.0	-0.000089	0.000000	-0.000089
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12.5	10.0	0.138474	0.140207	-0.001733
15.0	10.0	0.013053	0.013296	-0.000244
17.5	10.0	0.001039	0.001105	-0.000066
20.0	10.0	0.000187	0.000091	0.000096
22.5	10.0	0.000199	0.000007	0.000192
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
-30.0	20.0	0.000000	0.000000	0.000000
-27.5	20.0	0.000044	0.000000	0.000044
-25.0	20.0	-0.000097	0.000000	-0.000097
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
22.5	20.0	0.136950	0.140207	-0.003257
25.0	20.0	0.012936	0.013296	-0.000360
27.5	20.0	0.000982	0.001105	-0.000123
30.0	20.0	0.000185	0.000091	0.000094
32.5	20.0	-0.000053	0.000007	-0.000061
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10.0	30.0	-0.000032	0.000000	-0.000032
12.5	30.0	-0.000034	0.000000	-0.000034
15.0	30.0	-0.000018	0.000001	-0.000019
17.5	30.0	-0.000031	0.000007	-0.000039
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
65.0	30.0	-0.000363	0.000000	-0.000363
67.5	30.0	-0.000087	0.000000	-0.000087
70.0	30.0	0.000000	0.000000	0.000000

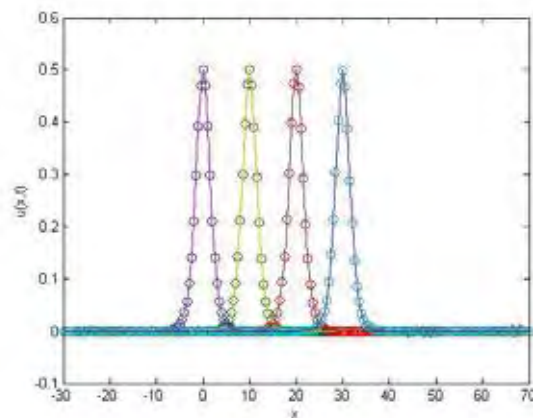
Tabela 3.2: Erro Numérico da Equação Korteweg-de Vries usando o Método das Linhas.

Encontram-se a seguir os gráficos gerados pelo software Matlab. Foram gerados os gráficos: 2D da Equação KdV, com comparação entre a solução analítica e numérica e os dois gráficos 3D de ambas as soluções.



(a) Solução Numérica KdV

(b) Solução Analítica KdV



(c) Equação Korteweg-de Vries 2D

Figura 3.3: Soluções analítica e numérica da Equação Korteweg-de Vries

Observando os gráficos, podemos ver que as ondas solitárias resultantes da equação de KdV podem colidir, passar uma através da outra e recuperar completamente a forma original após a colisão. As ondas solitárias desse tipo são chamadas sólitons [33].

### 3.3 A Equação de Korteweg-de Vries Burgers

A equação de Korteweg-de Vries Burgers é uma equação diferencial parcial não-linear dada por

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0, \quad (3.6)$$

onde  $\varepsilon$ ,  $\nu$  e  $\mu$  são parâmetros positivos, que definimos como  $\nu = 0.001$ ,  $\mu = 0.001$  e  $\varepsilon = 1.0$ .

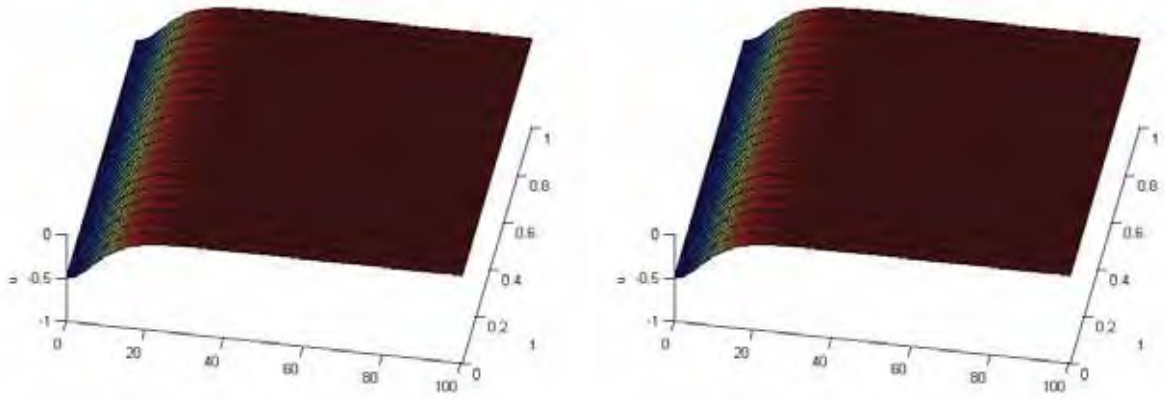
Segundo os autores, em [25], esta equação foi formulada inicialmente por Gardner e este modelo surge em muitas aplicações físicas como a propagação de ondas em um tubo elástico preenchido com um fluido viscoso e ondas de plasma fracamente não-linear com certos efeitos dissipativos. Essa equação representa aproximações do comprimento de onda onde os efeitos do termo de advecção não linear  $uu_x$  é contrabalançado pelo da dispersão  $u_{xxx}$ .

Essa equação é uma combinação da equação de Burgers ( $\mu = 0$ ) com a equação KdV ( $\nu = 0$ ) que combina vários efeitos tal como força, não linearidade ( $\varepsilon uu_x$ ), dissipação ( $\nu u_{xx}$ ) e dispersão ( $\mu u_{xxx}$ ).

A condição inicial e de fronteira, como nos casos anteriores, são dadas por uma das soluções analíticas da equação, representada por:

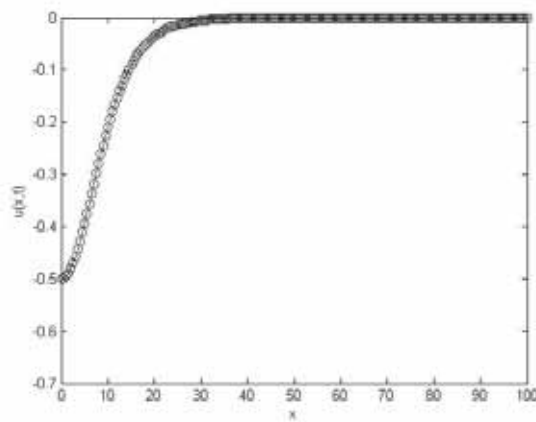
$$\begin{aligned} u(x, t) &= A(1 + \tanh(B(x + At))) - 0.5(\operatorname{sech}(B(x + At)))^2, \\ A &= \frac{6\nu^2}{25\mu} \\ B &= \frac{\nu}{10\mu}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Segue o gráfico 2D da equação KdVB, com comparação entre a solução analítica e numérica, e os dois gráficos 3D de ambas as soluções, gerados no Matlab.



(a) Solução Numérica KdV Burgers

(b) Solução Analítica KdV Burgers



(c) Equação Korteweg-de Vries Burgers 2D

Figura 3.4: Soluções analítica e numérica da Equação Korteweg-de Vries Burgers

Encontra-se abaixo uma tabela com alguns valores gerados pela solução analítica, pela solução numérica e o erro.

Espaçamento	Tempo	Solução Numérica	Solução Analítica	Erro
0.00	0.00	-0.500240	-0.500240	0.000000
2.50	0.00	-0.470306	-0.470306	0.000000
5.00	0.00	-0.393575	-0.393575	0.000000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100.0	0.05	-0.000480	-0.000480	0.000000
0.00	0.10	-0.500240	-0.500240	0.000000
2.50	0.10	-0.470305	-0.470306	0.000001
5.00	0.10	-0.393574	-0.393574	-0.000000
7.50	0.10	-0.298685	-0.298684	-0.000001
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7.50	0.25	-0.298685	-0.298683	-0.000002
10.0	0.25	-0.210411	-0.210408	-0.000003
12.5	0.25	-0.140652	-0.140650	-0.000002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15.0	0.60	-0.090812	-0.090808	-0.000004
17.5	0.60	-0.057373	-0.057370	-0.000003
20.0	0.60	-0.035798	-0.035796	-0.000002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.00	0.75	-0.393571	-0.393568	-0.000003
7.50	0.75	-0.298685	-0.298679	-0.000007
10.0	0.75	-0.210412	-0.210404	-0.000008
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.00	0.90	-0.500240	-0.500240	0.000000
2.50	0.90	-0.470298	-0.470301	0.000003
5.00	0.90	-0.393570	-0.393567	-0.000004
7.50	0.90	-0.298685	-0.298677	-0.000008
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
97.5	1.00	-0.000480	-0.000480	0.000000
100.0	1.00	-0.000480	-0.000480	0.000000

Tabela 3.3: Erro Numérico da Equação Korteweg-de Vries Burgers usando o Método das Linhas.

A solução dessa equação, como nos demais casos, foi feita com uma malha espacial de 201 pontos. Definimos o espaçamento como  $0 \leq x \leq 100$  e o tempo  $0 \leq t \leq 1$ .

É fácil observar que a solução numérica se aproximou muito da solução analítica, e em todos os casos citados nesse capítulo, o acordo entre as soluções analítica e numérica

é bastante satisfatório, os erros numéricos não crescem ou se acumulam com o aumento de  $t$ , o que nos faz concluir que o Método das Linhas foi eficiente e funcionou muito bem.

# Solução Numérica da Equação do Cabo

## 4.1 Dedução da Equação do Cabo

Os cabos têm sido amplamente utilizados como uma das estruturas mais simples e mais eficientes por muitos anos. As primeiras considerações sobre o comportamento de cabos nos levam provavelmente aos gregos. A teoria matemática da catenária elástica foi estabelecida por Bernoulli, Leibniz e Huygens.

Em [34] e [48], temos um bom panorama sobre a matemática dos cabos, conforme passamos a relatar neste parágrafo. Vemos que em 1675, na ata da Royal Society, onde publicou sua famosa lei de proporcionalidade, Hooke anunciou que um arco incompressível, livre de movimento, suportando seu próprio peso, poderia ser obtido invertendo-se a catenária, qualquer que fosse sua forma. Em 1690, Bernoulli desafiou o mundo científico, propondo um concurso para encontrar a forma da catenária. Em mais ou menos um ano, Bernoulli, Leibniz e Huygens haviam solucionado o problema. A solução de Huygens estava baseada na geometria, enquanto Leibniz e Bernoulli basearam-se no cálculo, teoria recente na época. Em 1760, Lagrange usou o modelo discreto de corda como ilustração da aplicação de sua equação de movimento. Este trabalho, que está entre os primeiros a resolver os problemas de vibração por diferenças finitas, foi incluído em seu celebrado livro *Mécanique Analytique* em 1788. A vibração do cabo suspenso foi considerada pela primeira vez por Rohrs, em 1851, em um trabalho em que um dos resultados cruciais parecem ter sido derivados por Stokes. O trabalho de Rohrs foi completado por E.J. Routh, que em 1868 derivou a solução exata para a vibração simétrica transversal de uma cadeia heterogênea e inextensível. Em 1941, W. Rannie e T. Von Kármán, independentemente, derivaram resultados para os modos planos simétricos e anti-simétricos de um cabo inextensível entre 4 apoios. Em 1945, G.S. Vincente ampliou essas análises para o caso de

---

cabos extensíveis, mesmo ano que G.F. Carrier incorporou a extensibilidade para o estudo das cordas, obtendo pela primeira vez um modelo de corda não-linear. Para cabos elásticos, Simpson, em 1965, investigou a vibração no plano do cabo extensível perto de seu equilíbrio e em [43] usou o método de matriz de transferência para obter as frequências naturais, em 1966.

Em [11], o autor investigou a relação entre a velocidade de translação e frequência natural para o movimento transversal de cabos elásticos lineares. Em um estudo anterior presente em [15], os autores analisaram configurações de cabo estático com modelos discretos e estabeleceram a relação entre o modelo de ponto de massa e o modelo de vara. Seu procedimento de pré-eliminação reduziu drasticamente o número de incógnitas na definição dos modelos discretos.

Segundo Wang, em [48], Wickert e Mote obtiveram a solução linear das cordas viajantes. A dinâmica de cabos elásticos tridimensionais foi investigada e os modos naturais para um cabo foram obtidos e a estabilidade correspondente de um modelo contínuo discreto foi investigado. Em [49], o autor cita que existe uma vasta literatura que trata tanto o caso em que o cabo é perfeitamente flexível quanto o caso em que tenha rigidez. Estes estudos geralmente não são completamente rigorosos e muitas vezes fazem suposições sobre a simplificação do modelo. No entanto, ao longo dos últimos poucos anos os matemáticos têm melhorado dramaticamente sua capacidade de tratar problemas não lineares e conseguem dar resultados mais rigorosos.

Em [24], Handscomb formula, em notação vetorial, as equações do movimento de um cabo flexível e inextensível, sem forças externas e de comprimento  $L$ , fixado em ambas as extremidades, mas de forma livre para se mover. Ele mostra as equações discretizadas no espaço, mantendo a conservação de energia e levando a possibilidade de resolver o problema dependente do tempo pelo método das linhas.

Para iniciarmos então a dedução da equação do cabo, que trataremos em nosso projeto, devemos considerar que o cabo está em um plano e tem as extremidades fixadas. Outras hipóteses devem ser consideradas:

1. São permitidas deformações a partir da configuração de equilíbrio.
2. As principais forças devem ser consideradas: pressão, força de arrasto, etc...
3. Tensões longitudinal e transversal são consideradas.
4. Deve-se supor que o cabo é fino, flexível e tem densidade uniforme.

Toda a teoria para este estudo foi baseada na tese [3] da bibliografia.

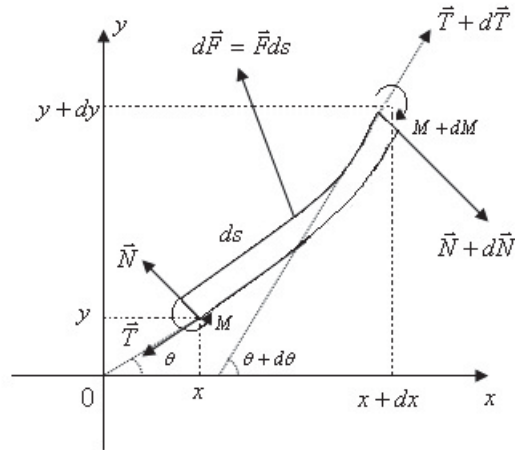


Figura 4.1: Visualização da Dedução da Equação do Cabo.

Considerando  $N$  o *shear*,  $T$  a tensão em um ponto  $P_1(x, y)$  e um elemento infinitesimal  $ds$  no cabo, que assumimos ter uma densidade  $\rho$ . A descrição cinemática do elemento linear  $ds$  é obtida usando as Leis de Newton. Resolvendo as forças relevantes ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , nós obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \rho ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= [(T + dT) \cos(\theta + d\theta) + (N + dN) \text{sen}(\theta + d\theta) - T \cos \theta - N \text{sen} \theta] + F^X ds \\ &= \frac{d}{ds} (T \cos \theta + N \text{sen} \theta) + F^X ds + O(ds^2) \\ \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= [(T + dT) \text{sen}(\theta + d\theta) - (N + dN) \cos(\theta + d\theta) - T \text{sen} \theta + N \cos \theta] + F^Y ds \\ &= \frac{d}{ds} (T \text{sen} \theta - N \cos \theta) + F^Y ds + O(ds^2), \end{aligned}$$

onde  $F^X$  e  $F^Y$  são componentes de força na direção dos eixos  $x$  e  $y$  aplicados em  $ds$ .

Obtemos as seguintes equações da linearidade e geometria de  $ds$ :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \text{sen} \theta.$$

Da teoria de Euler-Bernoulli sobre elasticidade plana, temos a seguinte fórmula:

$$M = C(K_1 - K),$$

onde  $K_1 = \frac{d\theta}{ds}$  é a curvatura do cabo deformado e  $K$ , que nesse modelo é igual a zero, é a curvatura do cabo não deformado. A constante  $C$  é a constante de rigidez e  $M$  é o momento da curva. Então, considerando a soma dos momentos para o elemento  $ds$  e

fazendo algumas manipulações matemáticas (ver [3]), temos:

$$N = \frac{d^2\theta}{ds^2}C.$$

As equações do movimento são as mesmas tanto para o cabo extensível como para o inextensível. Já as outras equações mudam no caso extensível. Usando as Leis de Hooke e a geometria obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= (1 + e) \cos \theta, \\ \frac{dy}{ds} &= (1 + e) \text{sen} \theta, \\ T &= \lambda e,\end{aligned}$$

onde  $e$  é a extensão do elemento  $ds$ . Para as equações da teoria de Euler-Bernoulli, no caso do cabo extensível, obtemos:

$$N = \frac{C}{1 + e} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2}.$$

Para as condições de fronteira da equação, assumiremos que o cabo está preso nas duas extremidades. Isto implica que os valores de  $x$ ,  $y$  e  $\theta$  são dados e constantes em  $s = 0$  e  $s = 1$  em todo o tempo  $t$ . Estaremos considerando problemas de valor de fronteira da forma:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}(T \cos \theta + N \text{sen} \theta), \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}(T \text{sen} \theta - N \cos \theta), \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= (1 + e) \cos \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= (1 + e) \text{sen} \theta,\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde:

$$N = \frac{C}{1 + e} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}, \quad T = \lambda e,$$

definido para  $(s, t) \in \Omega = [0, 1] \times [0, \tau]$ , juntamente com as condições de fronteira e iniciais, sendo que  $N$  é o shear,  $T$  a tensão,  $e$  o módulo de elasticidade,  $\lambda$  a deformação do cabo,  $C$  a constante de rigidez,  $\rho$  é a densidade linear, e as soluções são  $x = x(s, t)$  e  $y = y(s, t)$ .

## 4.2 Estabilidade Linear

O uso do método das diferenças finitas para resolver equações lineares surge da física-matemática e tem levado à estudos aprofundados de propriedades das equações de diferenças finitas. Essas propriedades são estabilidade e convergência de um sistema. A teoria de estabilidade e convergência começou quando descobriu-se que um sistema de diferenças finitas usado para resolver um problema bem posto pode ser instável (ou não bem posto). Esta propriedade levou os matemáticos a estabelecerem uma relação entre estabilidade e convergência. Nos anos 50, muitos autores como Lax, Richtmyer e Von Neumann deduziram por diferentes métodos um resultado fundamental que é conhecido como o teorema da equivalência:

**Teorema 1** *Para uma equação diferencial linear bem posta e homogênea, a consistência e estabilidade implicam convergência da solução de diferenças finitas para a solução da equação diferencial([14], p.31).*

Entre os critérios eficientes de estabilidade, foi estabelecido o critério de Von Neumann para equações com coeficientes constantes (Ver [14]). Existem importantes desenvolvimentos nas definições da estabilidade não linear e técnicas, tais como o método da energia, que veremos ainda nessa seção.

## 4.3 Estabilidade Não-Linear

Quando um PVI é resolvido computacionalmente, os resultados podem parecer plausíveis mesmo se não forem muito confiáveis, por causa de algumas instabilidades numéricas. Em problemas não lineares, muito pouco é conhecido sobre estabilidade e convergência, assim a maioria desses problemas são tratados experimentalmente.

Com máquinas rápidas, é relativamente fácil testar a estabilidade de um sistema de diferenças finitas para uma dada malha de pontos. Nas situações não lineares, o problema não acaba aqui, porque para um caso não linear, uma aproximação de um sistema numérico pode ser estável para algumas condições iniciais e instáveis para outras.

## 4.4 Técnica de Perturbação

A técnica da perturbação consiste em estudar o crescimento, no tempo, de pequenas perturbações. A condição de estabilidade é dita ser satisfeita se a amplitude de pequenas perturbações introduzidas no tempo, em alguma variável independente, não aumenta tão rapidamente quando  $t$  cresce [3]. Esta condição pode ser exposta da seguinte forma:

Se  $\delta\rho(s, t)$  e  $\delta\rho(s, t + \Delta t)$  são valores de perturbações em algumas das variáveis independentes  $x, y, \theta$  e  $T$ , então o método numérico é dito ser estável se a seguinte inequação

é satisfeita:

$$\left| \frac{\delta\rho(s, t + \Delta t)}{\delta\rho(s, t)} \right| \leq 1, \quad (4.2)$$

para todo  $t \leq \tau$ .

### Magnitude e característica de perturbações iniciais

Uma perturbação inicial ideal deve ser grande o suficiente para que dê uma resposta de imediato e deve ser substancialmente maior do que o erro de integração em um passo ou o erro de arredondamento. Tendo satisfeito essas condições, a perturbação inicial deve ser a menor possível.

Vários experimentos numéricos podem ser necessários para encontrar uma perturbação boa. Várias perturbações são testadas passando por diferentes direções na condição inicial, mas a perturbação geral pode ser tomada como  $\delta\rho = \varepsilon\alpha(s)$  onde  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  e  $\varepsilon$  é um número randômico dado pela biblioteca do software Matlab.

Em geral, este método não daria informações, a menos que os experimentos sejam feitos exaustivamente nos possíveis limites das condições de estabilidade. Contudo, em problemas lineares, para mostrar que um sistema numérico é estável, temos somente que provar que a inequação abaixo é satisfeita:

$$\|U^j\| \leq C_0 \|U^0\|. \quad (4.3)$$

Porém, em problemas não lineares este método não é adequado, já que delimita a solução pela condição inicial e, então, a condição (4.3) pode ser satisfeita, mas o método pode falhar e não convergir para a solução analítica. Este fenômeno pode ocorrer já que, em problemas não lineares, diferentes sistemas não respondem proporcionalmente às diferentes perturbações. Deste modo, um método pode ser estável em relação à pequenas perturbações nas condições iniciais, mas a solução pode crescer rapidamente quando um certo limite é atingido.

## 4.5 O Problema do Cabo Inextensível

Dado um cabo inextensível de espessura mínima, uma condição inicial em  $t = 0$  e certa condição de fronteira na extremidade  $s = 0$  e  $s = 1$  para todo  $t$ , o movimento do

cabo inextensível pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} (T \cos \theta + N \operatorname{sen} \theta) \\
 \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} (T \operatorname{sen} \theta - N \cos \theta) \\
 \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \theta \\
 \frac{\partial y}{\partial s} &= \operatorname{sen} \theta \\
 N &= C \theta_{ss}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

### Condições de Fronteira:

As equações (4.4) são resolvidas com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
 x(0, t) &= x_0, & y(0, t) &= y_0, & \theta(0, t) &= \theta_0 \\
 x(1, t) &= x_{\bar{1}}, & y(1, t) &= y_{\bar{1}}, & \theta(1, t) &= \theta_{\bar{1}} \\
 \frac{\partial x(0, t)}{\partial t} &= \frac{\partial x(1, t)}{\partial t} = \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial y(1, t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(1, t)}{\partial t} = 0,
 \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ , onde  $x_0, y_0, \theta_0, x_{\bar{1}}, y_{\bar{1}}$  e  $\theta_{\bar{1}}$  são números reais dados.

### Condições Iniciais:

Consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\theta(s, t) = \theta(s), \quad \frac{\partial \theta(s, t)}{\partial t} \equiv 0, \tag{4.5}$$

em  $t = 0$  e todo  $0 \leq s \leq 1$ , onde  $\theta(s)$  é uma função smooth (suave), consistente com (4.4).

## 4.5.1 Procedimento Numérico para a Resolução da Equação do Cabo Inextensível

Antes da discretização, alguns ajustes e manipulações foram feitos para facilitar o procedimento numérico. Para discretizar em relação à variável espacial, utilizamos o método das diferenças finitas, mais especificamente as fórmulas regressivas, progressivas e centradas de primeira ordem, testadas separadamente, e centrada de segunda ordem, que resulta em um sistema de EDOs. As condições de fronteira são fixas e equivalem a considerar o cabo fixo rigidamente pelas extremidades e as condições iniciais são também fixadas para uma conformação inicial do cabo.

Estudamos duas alternativas para a resolução do problema do cabo inextensível pelo método das linhas. A primeira equivale a fazer manipulações nas equações (4.4) e transformá-las num sistema de equações da forma

$$A(z) \frac{dz}{dt} = F(z), \quad (4.6)$$

onde  $z = (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3, \dots, \dot{x}_{n-2}, \dot{y}_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-6}$ ,  $F : \mathbb{R}^{2n-6} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-6}$  e  $A(z)$  é uma matriz quadrada. Neste caso, a tensão foi mantida variável. Na segunda alternativa, consideramos a tensão  $T$  constante e procedemos de tal forma a discretizar as derivadas espaciais, usando o método das diferenças finitas, e aproximar o sistema de equações diferenciais parciais (4.4) por um sistema de EDOs dependentes do tempo, para finalmente utilizar algum integrador para EDO e obter a solução aproximada.

Veremos o procedimento numérico para a resolução do problema nesses dois casos.

### Alternativa 1:

Discretizando as equações (4.4) e reescrevendo-as para  $i$  e  $i + 1$ , temos:

$$\rho h \frac{d^2 x_i}{dt^2} = (T_i \cos \theta_i + N_i \text{sen} \theta_i) - (T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + N_{i-1} \text{sen} \theta_{i-1}) \quad (4.7)$$

$$\rho h \frac{d^2 y_i}{dt^2} = (T_i \text{sen} \theta_i - N_i \cos \theta_i) - (T_{i-1} \text{sen} \theta_{i-1} - N_{i-1} \cos \theta_{i-1}) \quad (4.8)$$

$$\rho h \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} = (T_{i+1} \cos \theta_{i+1} + N_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1}) - (T_i \cos \theta_i + N_i \text{sen} \theta_i) \quad (4.9)$$

$$\rho h \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} = (T_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1} - N_{i+1} \cos \theta_{i+1}) - (T_i \text{sen} \theta_i - N_i \cos \theta_i). \quad (4.10)$$

Assim, temos 4 equações com 3 incógnitas  $T_{i-1}$ ,  $T_i$  e  $T_{i+1}$ . Para eliminarmos  $T_i$ , multiplicamos a equação (4.7) por  $\text{sen} \theta_{i-1}$  e a equação (4.8) por  $\cos \theta_{i-1}$ . Subtraindo as equações resultantes, temos:

$$\begin{aligned} \rho h \left[ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \text{sen} \theta_{i-1} - \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cos \theta_{i-1} \right] &= T_i (\cos \theta_i \text{sen} \theta_{i-1} - \text{sen} \theta_i \cos \theta_{i-1}) \\ &+ N_i (\text{sen} \theta_i \text{sen} \theta_{i-1} + \cos \theta_i \cos \theta_{i-1}) - N_{i-1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplicando a equação (4.9) por  $\text{sen} \theta_{i+1}$  e a equação (4.10) por  $\cos \theta_{i+1}$  e subtraindo as equações resultantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho h \left[ \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} \text{sen} \theta_{i+1} - \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} \cos \theta_{i+1} \right] &= T_i (\text{sen} \theta_i \cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i \text{sen} \theta_{i+1}) \\ &- N_i (\text{sen} \theta_i \text{sen} \theta_{i+1} + \cos \theta_i \cos \theta_{i+1}) + N_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Agora, multiplicando a equação (4.11) por  $\text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i)$  e a equação (4.12) por  $\text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1})$  e subtraindo as equações resultantes, eliminamos  $T_i$  e chegamos à:

$$\begin{aligned} & \rho h \left[ \left( \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} \text{sen} \theta_{i+1} - \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} \cos \theta_{i+1} \right) \text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \right. \\ & \left. \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} \text{sen} \theta_{i-1} - \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cos \theta_{i-1} \right) \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i) \right] = N_{i+1} \text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1}) + \\ & + N_{i-1} \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i) - N_i \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}), \quad \forall \quad 2 \leq i \leq n-3, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde:

$$N_i = \frac{C}{h^2} (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}), \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Esse procedimento nos leva a um conjunto de  $(n-4)$  equações lineares para  $(2n-2)$  incógnitas  $\frac{dx_i}{dt}$  e  $\frac{dy_i}{dt}$ , onde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  e  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ . Logo, precisamos de mais  $(n+2)$  equações lineares que serão obtidas das equações:

$$\begin{aligned} x_s &= \cos \theta \\ y_s &= \text{sen} \theta. \end{aligned}$$

Dessas equações, temos:

$$\begin{cases} x_s \text{sen} \theta - y_s \cos \theta = 0 \\ x_s \cos \theta + y_s \text{sen} \theta = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Diferenciando as equações (4.14) em relação ao tempo, temos:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \text{sen} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \cos \theta - \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \text{sen} \theta = 0. \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \cos \theta - \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \text{sen} \theta + \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \text{sen} \theta + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \theta = 0. \quad (4.16)$$

Consequentemente, da equação (4.15) temos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial s} \text{sen} \theta - \frac{\partial \dot{y}}{\partial s} \cos \theta \right). \quad (4.17)$$

E das equações (4.16) e (4.17):

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial s} \cos \theta + \frac{\partial \dot{y}}{\partial s} \text{sen} \theta = 0.$$

Diferenciando a equação anterior em relação ao tempo e usando a equação (4.17), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial s \partial t} \cos \theta + \frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial s \partial t} \operatorname{sen} \theta = - \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial s} \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial \dot{y}}{\partial s} \cos \theta \right)^2. \quad (4.18)$$

Discretizando as equações (4.17) e (4.18) chegamos à:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{1}{h} [(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \operatorname{sen} \theta_i - (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \cos \theta_i] \quad (4.19)$$

$$\left[ \frac{d\dot{x}_{i+1}}{dt} - \frac{d\dot{x}_i}{dt} \right] \cos \theta_i + \left[ \frac{d\dot{y}_{i+1}}{dt} - \frac{d\dot{y}_i}{dt} \right] \operatorname{sen} \theta_i = -[(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \operatorname{sen} \theta_i - (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i)]^2, \quad (4.20)$$

$\forall 0 \leq i \leq n-1$ .

O conjunto de equações (4.13) e (4.20) nos dá um conjunto com  $(2n-4)$  equações para  $(2n-2)$  incógnitas. Logo precisamos eliminar algumas incógnitas a fim de resolver o sistema de equações lineares. Conseguimos isso manipulando as equações (4.19) e (4.20) e usando as condições de fronteira:

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} \cos \theta_0 + \frac{d\dot{y}_1}{dt} \operatorname{sen} \theta_0 = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d\dot{x}_{n-1}}{dt} \cos \theta_{n-1} + \frac{d\dot{y}_{n-1}}{dt} \operatorname{sen} \theta_{n-1} = 0 \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_1 \operatorname{sen} \theta_0 - \dot{y}_1 \cos \theta_0 = 0 \quad (4.23)$$

$$\dot{x}_{n-1} \operatorname{sen} \theta_{n-1} - \dot{y}_{n-1} \cos \theta_{n-1} = 0. \quad (4.24)$$

Diferenciando a equação (4.23), obtemos:

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{d\dot{y}_1}{dt} \cos \theta_0 = 0,$$

consequentemente, usando a equação (4.21), nós obtemos:

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = \frac{d\dot{y}_1}{dt} = 0, \forall t.$$

Do mesmo modo, usamos as equações (4.22) e (4.24) para mostrar que:

$$\frac{d\dot{x}_{n-1}}{dt} = \frac{d\dot{y}_{n-1}}{dt} = 0.$$

Finalmente, o conjunto de equações (4.13) e (4.20) nos levam a resolver o seguinte sistema de equações, para os valores de  $\theta_i$  dados:

$$A(z)\frac{dz}{dt} = F(z), \quad (4.25)$$

onde  $z = (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3, \dots, \dot{x}_{n-2}, \dot{y}_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-6}$ ,  $F: \mathbb{R}^{2n-6} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-6}$  e  $A(z)$  é uma matriz quadrada da forma:

$$A(z) = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & \\ & B_2 & & A_2 & & & & \\ & & & B_3 & & A_3 & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & & & & B_{n-3} & A_{n-3} \\ & & & & & & & & B_{n-2} \end{bmatrix}$$

onde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_i^j & \text{sen} \theta_i^j \end{pmatrix},$$

$$B_{n-2} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_{n-2}^j & -\text{sen} \theta_{n-2}^j \end{pmatrix},$$

e para todo  $2 \leq i \leq n-3$ , temos:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i^j & \text{sen} \theta_i^j \\ \rho h \text{sen} \theta_{i+1}^j \text{sen}(\theta_i^j - \theta_{i-1}^j) & -\rho h \cos \theta_{i+1}^j \text{sen}(\theta_i^j - \theta_{i-1}^j) \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} -\cos \theta_i^j & -\text{sen} \theta_i^j \\ -\rho h \text{sen} \theta_{i-1}^j \text{sen}(\theta_{i+1}^j - \theta_i^j) & \rho h \cos \theta_{i-1}^j \text{sen}(\theta_{i+1}^j - \theta_i^j) \end{pmatrix}.$$

Então, podemos utilizar o Método das Linhas para resolver o problema do cabo inextensível, integrando o sistema de EDOs (4.13) e (4.25) com condição inicial  $\theta(s, 0) = \theta(s)$  e  $z(0) = 0$ . Assim, encontramos as incógnitas  $x_i$  e  $y_i$  integrando  $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$  e  $\frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i$  onde as condições iniciais  $x_i(0)$  e  $y_i(0)$  são dadas.

### Alternativa 2:

Nesse caso, o procedimento numérico é mais simples tendo em vista que a tensão é mantida constante. Considerando o sistema de equações (4.4), vamos fazer a discretização espacial de três maneiras diferentes: aproximando as derivadas de primeira ordem com diferenças finitas centradas, regressivas e progressivas e em todos os casos usaremos diferenças finitas centradas para a derivada de segunda ordem.

Considerando  $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}_i$  e  $\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}_i$  e utilizando diferenças finitas centradas de primeira ordem, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial t} &= \dot{x}_i \\
\frac{\partial y_i}{\partial t} &= \dot{y}_i \\
\rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} &= \frac{1}{2h} [T(\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_{i-1}) + (N_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1} - N_{i-1} \text{sen} \theta_{i-1})] \\
\rho \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} &= \frac{1}{2h} [T(\text{sen} \theta_{i+1} - \text{sen} \theta_{i-1}) - (N_{i+1} \cos \theta_{i+1} - N_{i-1} \cos \theta_{i-1})] \\
\frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= \text{sen} \theta_i \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}}{2ds} - \cos \theta_i \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{i-1}}{2h}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Consideramos a tensão  $T$  constante e  $N_i = \frac{C}{h^2}(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$  e então obtemos o seguinte sistema de EDOs que pode ser resolvido com algum integrador já disponível:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial t} &= \dot{x}_i \\
\frac{\partial y_i}{\partial t} &= \dot{y}_i \\
\rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} &= \frac{T}{2h} (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_{i-1}) + \frac{1}{2h^3} [(\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i) \text{sen} \theta_{i+1} - (\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}) \text{sen} \theta_{i-1}] \\
\rho \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} &= \frac{T}{2h} (\text{sen} \theta_{i+1} - \text{sen} \theta_{i-1}) - \frac{1}{2h^3} [(\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i) \cos \theta_{i+1} - (\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}) \cos \theta_{i-1}] \\
\frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= \text{sen} \theta_i \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}}{2h} - \cos \theta_i \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{i-1}}{2h}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

No caso de se usar diferenças finitas regressivas, obtemos o seguinte sistema de EDOs dependente do tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial t} &= \dot{x}_i \\
\frac{\partial y_i}{\partial t} &= \dot{y}_i \\
\rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} &= \frac{T}{h} (\cos \theta_i - \cos \theta_{i-1}) + \frac{1}{h^3} [(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \text{sen} \theta_i - (\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}) \text{sen} \theta_{i-1}] \\
\rho \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} &= \frac{T}{h} (\text{sen} \theta_i - \text{sen} \theta_{i-1}) - \frac{1}{h^3} [(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \cos \theta_i - (\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}) \cos \theta_{i-1}] \\
\frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= \text{sen} \theta_i \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}}{2h} - \cos \theta_i \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{i-1}}{2h}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

E, similar aos casos anteriores, o sistema resultante para quando se usa diferenças finitas progressivas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial t} &= \dot{x}_i \\
\frac{\partial y_i}{\partial t} &= \dot{y}_i \\
\rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} &= \frac{T}{h} (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) + \frac{1}{h^3} [(\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i) \text{sen} \theta_{i+1} - (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \text{sen} \theta_i] \\
\rho \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} &= \frac{T}{h} (\text{sen} \theta_{i+1} - \text{sen} \theta_i) - \frac{1}{h^3} [(\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i) \cos \theta_{i+1} - (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \cos \theta_i] \\
\frac{\partial \theta_i}{\partial t} &= \text{sen} \theta_i \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i-1}}{2h} - \cos \theta_i \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{i-1}}{2h}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Visando uma comparação do método das linhas (semi-discretização) com um outro método mais clássico, foi elaborado o procedimento numérico do cabo inextensível feito de forma completa (fully discretized) com o método das diferenças finitas, trabalho este iniciado em [13] e aqui melhorado para que essa comparação pudesse ser feita.

## 4.6 Procedimento Numérico Utilizando o Método das Diferenças Finitas

As equações que modelam o comportamento do cabo, condições iniciais e de fronteiras aqui, serão as mesmas estudadas na seção anterior.

Discretizando as equações (4.4) e reescrevendo-as para  $i$  e  $i + 1$ , temos:

$$\rho h \frac{d^2 x_i}{dt^2} = (T_i \cos \theta_i + N_i \text{sen} \theta_i) - (T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + N_{i-1} \text{sen} \theta_{i-1}) \tag{4.30}$$

$$\rho h \frac{d^2 y_i}{dt^2} = (T_i \text{sen} \theta_i - N_i \cos \theta_i) - (T_{i-1} \text{sen} \theta_{i-1} - N_{i-1} \cos \theta_{i-1}) \tag{4.31}$$

$$\rho h \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} = (T_{i+1} \cos \theta_{i+1} + N_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1}) - (T_i \cos \theta_i + N_i \text{sen} \theta_i) \tag{4.32}$$

$$\rho h \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} = (T_{i+1} \text{sen} \theta_{i+1} - N_{i+1} \cos \theta_{i+1}) - (T_i \text{sen} \theta_i - N_i \cos \theta_i). \tag{4.33}$$

Assim, temos 4 equações com 3 incógnitas  $T_{i-1}$ ,  $T_i$  e  $T_{i+1}$ . Para eliminarmos  $T_i$ , multiplicamos a equação (4.30) por  $\text{sen} \theta_{i-1}$  e a equação (4.31) por  $\cos \theta_{i-1}$ . Subtraindo as equações resultantes, temos:

$$\begin{aligned} \rho h \left[ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \text{sen} \theta_{i-1} - \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cos \theta_{i-1} \right] &= T_i (\cos \theta_i \text{sen} \theta_{i-1} - \text{sen} \theta_i \cos \theta_{i-1}) \\ &+ N_i (\text{sen} \theta_i \text{sen} \theta_{i-1} + \cos \theta_i \cos \theta_{i-1}) - N_{i-1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Multiplicando a equação (4.32) por  $\text{sen} \theta_{i+1}$  e a equação (4.33) por  $\cos \theta_{i+1}$  e subtraindo as equações resultantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho h \left[ \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} \text{sen} \theta_{i+1} - \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} \cos \theta_{i+1} \right] &= T_i (\text{sen} \theta_i \cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i \text{sen} \theta_{i+1}) \\ &- N_i (\text{sen} \theta_i \text{sen} \theta_{i+1} + \cos \theta_i \cos \theta_{i+1}) + N_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Agora, multiplicando a equação (4.34) por  $\text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i)$  e a equação (4.35) por  $\text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1})$  e subtraindo as equações resultantes, eliminamos  $T_i$  e temos:

$$\begin{aligned} \rho h \left[ \left( \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} \text{sen} \theta_{i+1} - \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} \cos \theta_{i+1} \right) \text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \right. \\ \left. \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} \text{sen} \theta_{i-1} - \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} \cos \theta_{i-1} \right) \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i) \right] &= N_{i+1} \text{sen}(\theta_i - \theta_{i-1}) + \\ + N_{i-1} \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i) - N_i \text{sen}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}), \quad \forall \quad 2 \leq i \leq n-3, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde:

$$N_i = \frac{C}{h^2} (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}), \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n-2. \quad (4.37)$$

### 4.6.1 Discretização Temporal

Para estabilidade e boa precisão, discretizamos as derivadas no tempo na equação (4.36) usando a fórmula centrada de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{x_i^{j+1} - 2x_i^j + x_i^{j-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} &= \frac{x_{i+1}^{j+1} - 2x_{i+1}^j + x_{i+1}^{j-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} &= \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\Delta t^2}. \end{aligned}$$

Então as incógnitas  $N_{i-1}$ ,  $N_i$  e  $N_{i+1}$  são substituídas por  $\frac{N_{i-1}^{j+1} + N_{i-1}^{j-1}}{2}$ ,  $\frac{N_i^{j+1} + N_i^{j-1}}{2}$  e  $\frac{N_{i+1}^{j+1} + N_{i+1}^{j-1}}{2}$ , respectivamente e mantemos todas as variáveis de  $\theta_1^j$  a  $\theta_i^j$  exceto aquelas usadas

em (4.37). O objetivo desse procedimento é discretizar as equações (4.36) e (4.37) de forma precisa e resolver as equações lineares para as incógnitas  $x_i^j$ ,  $y_i^j$  e  $\theta_i^j$ . Usando o procedimento acima para a equação (4.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
& x_{i+1}^{j+1} \sin \theta_{i+1}^j \alpha_i^j - y_{i+1}^{j+1} \cos \theta_{i+1}^j \alpha_i^j - x_i^{j+1} \sin \theta_{i-1}^j + y_i^{j+1} \cos \theta_{i-1}^j - D \alpha_i^j \theta_{i+2}^{j+1} + \\
& + D(2\alpha_i^j + \beta_i^j) \theta_{i+1}^{j+1} - D(1 + 2\beta_i^j + \alpha_i^j) \theta_i^{j+1} + D(2 + \beta_i^j) \theta_{i-1}^{j+1} - D \theta_{i-2}^{j+1} = \\
& = (2x_{i+1}^j + x_{i+1}^{j-1}) \sin \theta_{i+1}^j \alpha_i^j + (-2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}) \cos \theta_{i+1}^j \alpha_i^j + \\
& + (-2x_i^j + x_i^{j-1}) \sin \theta_{i-1}^j - (-2y_i^j + y_i^{j-1}) \cos \theta_{i-1}^j + \\
& + D[\alpha_i^j \theta_{i+2}^{j-1} - (2\alpha_i^j + \beta_i^j) \theta_{i+1}^{j-1} + (1 + \alpha_i^j + 2\beta_i^j) \theta_i^{j-1} - (2 + \beta_i^j) \theta_{i-1}^{j-1} + \theta_{i-2}^{j-1}], \\
& \quad \forall \quad 2 \leq i \leq n-3 \quad \text{e} \quad j \geq 1,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde

$$\alpha_i^j = \frac{\text{sen}(\theta_i^j - \theta_{i-1}^j)}{\text{sen}(\theta_{i+1}^j - \theta_i^j)}, \quad \beta_i^j = \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j)}{\text{sen}(\theta_{i+1}^j - \theta_i^j)} \quad \text{e} \quad D = \frac{C(\Delta t)^2}{2\rho(\Delta s)^3}.$$

Como no sistema acima o índice  $i$  varia de 2 a  $(n-3)$ , esse conjunto de equações algébricas é um conjunto de  $(n-4)$  equações lineares para  $(3n-6)$  incógnitas. Obtemos o número de incógnitas observando que o índice  $i$  de  $x^{j+1}$  e de  $y^{j+1}$  varia de 2 a  $(n-2)$  e o de  $\theta^{j+1}$  varia de 0 a  $n-1$ , ou seja, as  $(3n-6)$  incógnitas são:  $x_2^{j+1}, x_3^{j+1}, \dots, x_{n-2}^{j+1}, y_2^{j+1}, \dots, y_{n-2}^{j+1}, \theta_0^{j+1}, \dots, \theta_{n-1}^{j+1}$ .

Pelas condições discretas de fronteira descritas anteriormente, sabemos que os valores de fronteira  $x_0, y_0, x_1, y_1, \theta_0, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, y_n$  e  $\theta_{n-1}$  são números reais dados, e podemos substituir esses números que acima considerávamos incógnitas e chegar no valor de  $(3n-8)$  incógnitas  $x_2^{j+1}, x_3^{j+1}, \dots, x_{n-2}^{j+1}, y_2^{j+1}, \dots, y_{n-2}^{j+1}, \theta_1^{j+1}, \dots, \theta_{n-2}^{j+1}$ .

Assim, é claro que para computar as incógnitas acima precisamos ter  $(2n-4)$  outras equações. Essas equações podem ser obtidas da condição discreta de inextensibilidade:

$$\Delta x_i^{j+1} = h \cos \theta_i^{j+1} \quad \text{e} \quad \Delta y_i^{j+1} = h \text{sen} \theta_i^{j+1}.$$

Se linearizarmos essas equações usando o método de Newton para  $\theta^j$  com  $1 \leq i \leq n-2$ , obtemos as seguintes equações lineares para as incógnitas  $x_{i+1}^{j+1}, x_i^{j+1}, y_{i+1}^{j+1}, y_i^{j+1}$  e  $\theta_i^{j+1}$ :

$$\begin{aligned}
x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1} + h \theta_i^{j+1} \text{sen} \theta_i^j &= h(\cos \theta_i^j + \theta_i^j \text{sen} \theta_i^j), \\
y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1} - h \theta_i^{j+1} \cos \theta_i^j &= h(\text{sen} \theta_i^j - \theta_i^j \cos \theta_i^j).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

A saber, o método de Newton é um método de iteração para a procura de zeros de uma função diferenciável  $f$ , e é escrito da seguinte forma para o ponto  $x_k$ :



$$A_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & h \operatorname{sen} \theta_{n-2}^j \\ -1 & -h \operatorname{cos} \theta_{n-2}^j \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \theta_{i-1}^j & -D(1 + \alpha_i^j + 2\beta_i^j) & \alpha_i^j \operatorname{sen} \theta_{i+1}^j \\ 0 & h \operatorname{sen} \theta_i^j & 1 \\ -1 & -h \operatorname{cos} \theta_i^j & 0 \end{pmatrix},$$

para  $2 \leq i \leq n-3$ ,

$$B_i = \begin{pmatrix} -\alpha_i^j \operatorname{cos} \theta_{i+1}^j & D(2\alpha_i^j + \beta_i^j) & 0 & 0 & -D\alpha_i^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 \leq i \leq n-4,$$

$$C_i = \begin{pmatrix} -D & 0 & 0 & D(2 + \beta_i^j) & -\operatorname{sen} \theta_{i-1}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3 \leq i \leq n-3.$$

O método usado para a resolução do sistema linear resultante foi o BiCGSTAB, que segundo [18], foi desenvolvido no sentido de corrigir frequentes irregularidades no processo de convergência do método do gradiente conjugado, por um tipo de minimização local do vetor resíduo. Esse método é uma variante do método do gradiente biconjugado (BiCG) e tem convergência mais rápida e mais suave do que o BiCG original [37]. No caso do método das diferenças finitas, nos vários testes que fizemos, esse foi o que melhor funcionou em relação à convergência.

## 4.7 O Problema do Cabo Extensível

Seja  $s$  a medida do comprimento do arco ao longo do cabo, antes que seja estendido e  $e$  a extensão. Considere que o cabo tem um comprimento igual a 1 em  $t = 0$ . Portanto, o movimento plano de cabo extensível preso em ambas as extremidades é dada pelas seguintes equações diferenciais parciais não-lineares:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} (T \operatorname{cos} \theta + N \operatorname{sen} \theta), \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} (T \operatorname{sen} \theta - N \operatorname{cos} \theta), \\ x_s &= (1 + e) \operatorname{cos} \theta, \\ y_s &= (1 + e) \operatorname{sen} \theta, \\ N &= C \frac{\theta_{ss}}{1 + e}, \quad T = \lambda e, \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde  $1 + e > 0$  e o coeficiente  $\lambda$  é positivo. Aqui, todas as variáveis e coeficientes foram definidas como no caso do cabo inextensível, mas agora  $e \neq 0$ .

Olhando para este sistema vemos 4 equações e 4 incógnitas  $x, y, e$  e  $\theta$ , todas funções de  $s$  e  $t$ , e até poderíamos pensar que se pode resolver o sistema nesta forma, porém esta não é uma forma adequada para usarmos o Método das Linhas. Precisamos de um sistema de primeira ordem em  $t$  para usarmos métodos para EDOs após a discretização das derivadas em  $s$ .

A discretização diretamente de  $\partial x/\partial s$  e  $\partial y/\partial s$  leva a um sistema algébrico diferencial em geral mais difícil de resolver, assim é preciso obter  $\partial x/\partial t$  e  $\partial y/\partial t$  equivalentemente.

### Condições de Fronteira:

Se o cabo extensível está preso em ambas as extremidades, teremos as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} x(0, t) &= x_0, & y(0, t) &= y_0, & \theta(0, t) &= \theta_0, & e(0, t) &= 0, \\ x(1, t) &= x_{\bar{1}}, & y(1, t) &= y_{\bar{1}}, & \theta(1, t) &= \theta_{\bar{1}}, & e(1, t) &= 0 \quad \text{e} \\ \frac{\partial x}{\partial t}(0, 1) &= \frac{\partial x}{\partial t}(1, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(1, t) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(1, t) \equiv 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde  $x_0, y_0, \theta_0, x_{\bar{1}}, y_{\bar{1}}$  e  $\theta_{\bar{1}}$  são números reais dados.

### Condições Iniciais:

Para resolver os problemas (4.41) e (4.42) precisamos de algumas condições iniciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) &= \frac{\partial y}{\partial t}(s, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(s, 0) = \frac{\partial e}{\partial t}(s, 0) \equiv 0 \\ \text{e } \theta(s, 0) &= \theta(s), \quad e(s, 0) = \bar{e}(s), \quad \text{para todo } s \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde  $\theta(s)$  e  $\bar{e}(s)$  são funções suaves, consistentes com as condições iniciais (4.42).

## 4.7.1 O problema de Cauchy de 1ª ordem equivalente

O problema de valor inicial de fronteira (4.41) e (4.43) é equivalente ao problema de Cauchy de primeira ordem para soluções suficientemente suaves.

Vamos supor que o problema (4.41) e (4.43) tem solução suave, assim, derivando as equações

$$\frac{\partial x}{\partial s} = (1 + e) \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = (1 + e) \sin \theta, \quad (4.44)$$

em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \cos \theta \frac{\partial e}{\partial t} + (1+e) \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial e}{\partial t} - (1+e) \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Permutando os sinais de diferenciação, ou seja, considerando que as funções são contínuas, obtemos:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}. \quad (4.46)$$

Assim, as seguintes equações equivalentes são obtidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - \cos \theta \frac{\partial e}{\partial t} + (1+e) \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial e}{\partial t} - (1+e) \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

e podem ser escritas na forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} -(1+e) \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ (1+e) \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial e}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é igual a  $-(1+e)$ , que é menor que zero. Então, a matriz é invertível e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \frac{\partial e}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{1+e} & \frac{\cos \theta}{1+e} \\ \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} \end{pmatrix}.$$

Denotando  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  por

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (4.48)$$

finalmente temos o seguinte problema de Cauchy de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + LU = 0 \\ U(s, 0) = U^0 \quad \text{para } (s, t) \in \Omega, \end{cases} \quad (4.49)$$

onde

$$LU = - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda e \cos \theta + N \operatorname{sen} \theta) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda e \operatorname{sen} \theta - N \cos \theta) \\ -\frac{\operatorname{sen} \theta}{1+e} \frac{\partial \dot{x}}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{1+e} \frac{\partial \dot{y}}{\partial s} \\ \cos \theta \frac{\partial \dot{x}}{\partial s} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \dot{y}}{\partial s} \end{bmatrix}$$

em que  $U = (x, y, \dot{x}, \dot{y}, \theta, e)$  e  $U^0$  são vetores dados.

Note que o problema de valor de fronteira e inicial (4.49) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + AU + B \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + L_1 U = 0,$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas e  $L_1$  é um operador diferencial não linear.

#### 4.7.2 Procedimento Numérico para a Resolução da Equação do Cabo Extensível

Segundo Dreyer e Murray, em [16], existem duas formas vantajosas para a determinação numérica de modelos de cabo na forma discreta: uma é usando o modelo de massa concentrada, que é composto por pontos de massa conectados por cordas sem peso considerável, e a outra pelo modelo de hastes, que é composto por hastes unidas por dobradiças. Em um outro artigo, os mesmos autores (ver [17]) usam o modelo de massa concentrada juntamente com o modelo da haste e mostram que essa estratégia, chamada de procedimento de pré-eliminação, pode reduzir o número de equações algébricas acopladas além de outras vantagens em termos computacional e de tempo.

Logo, para usarmos o procedimento de pré-eliminação para a resolução do cabo extensível usando o método das linhas, precisamos discretizar o cabo extensível em  $n$  segmentos extensíveis  $r_i$  de tamanho  $(1 + e_i)h$ , onde  $e_i$  é a extensão do segmento no tempo  $t$ . Cada segmento é um ponto de massa  $\rho h$ , onde  $h = 1/n$  (figura 4.2). Este procedimento leva a uma série de equações de pontos fixos.

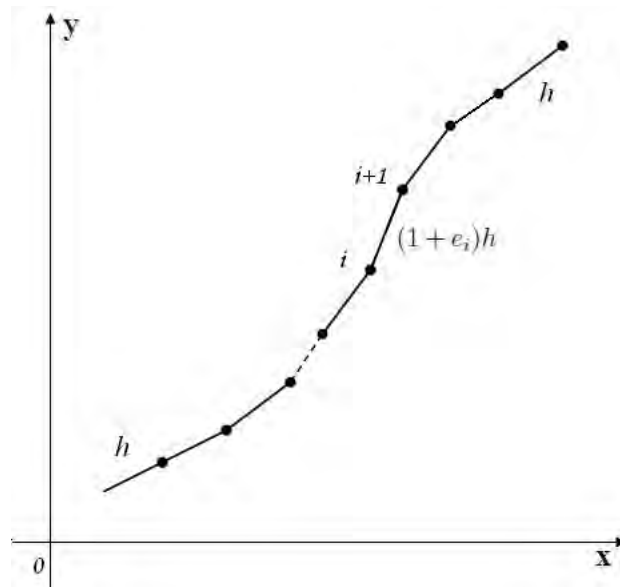


Figura 4.2: Segmentação do cabo

Neste problema são permitidas contrações e extensões, que é a função  $e(s, t)$ , que pode mudar de sinal em alguns pontos da malha espacial.

### Condições de Fronteira Semi-Discretas

Aqui a forma das condições de fronteira (4.42) é dada na fronteira esquerda por:

$$\begin{aligned} x(0, t) &= x_0, & y(0, t) &= y_0, & \theta(0, t) &= \theta_0, & e(0, t) &= 0, \\ x(h, t) &= x_1, & y(h, t) &= y_1 & \text{e} & & & \\ \frac{\partial x}{\partial t}(0, t) &= \frac{\partial x}{\partial t}(h, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(h, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

e na direita:

$$\begin{aligned} x(1, t) &= x_{\bar{1}}, & y(1, t) &= y_{\bar{1}}, & \theta((n-1)h, t) &= \theta_{n-1}, & e((n-1)h, t) &= 0, \\ x((n-1)h, t) &= x_{n-1}, & y((n-1)h, t) &= y_{n-1} & \text{e} & & & \\ \frac{\partial x}{\partial t}(1, t) &= \frac{\partial y}{\partial t}(1, t) = \frac{\partial x}{\partial t}((n-1)h, t) = \frac{\partial y}{\partial t}((n-1)h, t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Em geral, precisamos de duas condições de fronteira em cada extremidade porque o método que usamos exige isto.

### 4.7.3 Sistema Semi-Discreto

A discretização proposta da equação do cabo extensível consiste em discretizar todas as derivadas espaciais de primeira ordem usando a fórmula de diferenças finitas regressiva e progressiva, enquanto as derivadas de segunda ordem são aproximadas usando a fórmula da diferença central. Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{U}_i}{\partial t} + (LU)_i &= 0 \\ \underline{U}(ih, 0) &= \underline{U}_i^0 \quad \forall t \in [0, \tau], \end{aligned}$$

onde  $\underline{U}_i^0$  é um vetor dado e:

$$(LU)_i = - \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \frac{1}{\rho h} \nabla (\lambda e_i \cos \theta_i + N_i \text{sen} \theta_i) \\ \frac{1}{\rho h} \nabla (\lambda e_i \text{sen} \theta_i - N_i \cos \theta_i) \\ \left( -(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \text{sen} \theta_i + (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \cos \theta_i \right) / (1 + e_i) \\ (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \cos \theta_i + (\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \text{sen} \theta_i \end{bmatrix}$$

e  $N_i = \frac{C \delta^2 \theta_i}{1 + e_i}$  para  $1 \leq i \leq n - 2$ .

Os operadores lineares  $\nabla$  e  $\delta^2$  são os operadores de diferenças finitas regressiva de primeira ordem e central de segunda ordem, respectivamente.

Para os três primeiros componentes de  $(LU)_i$ , o subscrito  $i$  é executado a partir de 2 até  $n - 2$ , considerando que para os componentes restantes é executado de 1 a  $n - 1$ . Isto acontece porque quando usamos diferenças finitas teríamos um problema nas fronteiras se considerássemos que o índice  $i$  varia de 1 a  $n - 1$  em todas as componentes de  $(LU)_i$ .

Precisamos agora utilizar uma técnica a fim de eliminarmos a incógnita  $e$  no sistema de equações. Esta técnica discute o mais econômico e eficiente método semi discreto para resolver o problema de valor inicial (4.41). Consiste em eliminar a incógnita  $e$  das equações e depois resolver um problema de valor inicial em EDO para as incógnitas  $x$ ,  $y$ , e  $\theta$ . Este procedimento reduz o número de equações ordinárias para  $n - 2$ . Se necessário, a extensão  $e(s, t)$  pode ser computada com a seguinte fórmula:

$$e(s, t) = [x_s^2 + y_s^2]^{1/2} - 1. \quad (4.52)$$

Vamos considerar novamente a série de equações (4.41):

$$\begin{aligned} x_s &= (1 + e) \cos \theta, \\ y_s &= (1 + e) \text{sen} \theta, \\ N &= C \frac{\theta_{ss}}{1 + e}, \\ \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= (\lambda e \cos \theta + N \text{sen} \theta)_s, \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= (\lambda e \text{sen} \theta - N \cos \theta)_s. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nosso objetivo é eliminar a incógnita  $e$  das equações anteriores, e há vários caminhos para fazer isto.

Um caminho é usar a relação (4.52), mas vamos preferir o seguinte procedimento:

$$x_s = (1 + e) \cos \theta \quad \implies \quad e \cos \theta = x_s - \cos \theta.$$

Da mesma forma, obtemos:

$$e \operatorname{sen} \theta = y_s - \operatorname{sen} \theta,$$

e então:

$$N \operatorname{sen} \theta = \frac{C \theta_{ss} (1 + e) \operatorname{sen} \theta}{(1 + e)^2} \quad \text{quando } (1 + e) > 0.$$

Assim,

$$N \operatorname{sen} \theta = \frac{C \theta_{ss} y_s}{x_s^2 + y_s^2}.$$

Similarmente, teremos:

$$N \cos \theta = \frac{C \theta_{ss} (1 + e) \cos \theta}{(1 + e)^2}.$$

Portanto

$$N \cos \theta = \frac{C \theta_{ss} x_s}{x_s^2 + y_s^2}.$$

Então obtemos as seguintes equações:

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left[ \lambda (x_s - \cos \theta) + \frac{C \theta_{ss} y_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s.$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[ \lambda (y_s - \operatorname{sen} \theta) - \frac{C \theta_{ss} x_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s.$$

Para resolver essas equações, precisamos de outra equação para a incógnita  $\theta$ . Esta equação é obtida eliminando a incógnita  $e$  das seguintes equações:

$$x_s = (1 + e) \cos \theta \quad \text{e} \quad y_s = (1 + e) \operatorname{sen} \theta.$$

Multiplicando a primeira equação por  $\operatorname{sen} \theta$ , a segunda por  $\cos \theta$  e subtraindo a primeira da segunda, obtemos:

$$x_s \operatorname{sen} \theta - y_s \cos \theta = 0.$$

Diferenciamos então essa última equação em relação ao tempo, a fim de obter a equação necessária, e então

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\dot{y}_s \cos \theta - \dot{x}_s \text{sen} \theta}{[x_s^2 + y_s^2]^{1/2}}.$$

Assim, temos de resolver o seguinte sistema de EDP de primeira ordem (considerando que será feita a discretização espacial)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \dot{x}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \dot{y}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\dot{y}_s \cos \theta - \dot{x}_s \text{sen} \theta}{[x_s^2 + y_s^2]^{1/2}}, \\ \rho \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left[ \lambda(x_s - \cos \theta) + \frac{C\theta_{ss}y_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s, \\ \rho \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[ \lambda(y_s - \text{sen} \theta) - \frac{C\theta_{ss}x_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s. \end{aligned} \quad (4.54)$$

As condições iniciais e de fronteira para resolver essas equações são as mesmas (4.42) e (4.43).

### Discretização Espacial

O sistema de equações (4.54) é discretizado substituindo todas as derivadas espaciais pela fórmula das diferenças finitas de primeira e segunda ordem. Então teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \dot{x}_i, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \dot{y}_i, \\ \rho \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \nabla \left[ \lambda \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{h} - \cos \theta_i \right) + \frac{C\delta^2 \theta_i (y_{i+1} - y_i)}{h [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]} \right], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ \rho \frac{d\dot{y}_i}{dt} = \rho \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \nabla \left[ \lambda \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \text{sen} \theta_i \right) - \frac{C\delta^2 \theta_i (x_{i+1} - x_i)}{h [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]} \right], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{(\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) \cos \theta_i - (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) \text{sen} \theta_i}{[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2}}, \quad 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Vamos considerar  $\partial x/\partial s \neq 0$ , condição satisfeita por muitos problemas práticos. Então temos de resolver a seguinte série de EDPs:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial t} &= \dot{x}, \\
 \frac{\partial y}{\partial t} &= \dot{y}, \\
 \rho \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} &= \left[ \lambda(x_s - \cos \theta) + \frac{C\theta_{ss}y_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s, \\
 \rho \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} &= \left[ \lambda(y_s - \text{sen}\theta) - \frac{C\theta_{ss}x_s}{x_s^2 + y_s^2} \right]_s, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\dot{y}_s \cos \theta - \dot{x}_s \text{sen}\theta}{[x_s^2 + y_s^2]^{1/2}}.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

A discretização espacial dessas equações é a mesma que a discretização das equações (4.54) e (4.55).

**Observação:** Os valores  $\theta_i$  poderiam ser obtidos por:

$$\theta_i = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \quad 1 \leq i \leq n - 2, \tag{4.57}$$

mas nossa implementação mantém a equação  $\partial\theta/\partial t$  no sistema.

## Resultados Numéricos

Vários experimentos numéricos foram feitos para a resolução do problema do cabo para várias condições iniciais, integradores temporais e diferentes valores de  $n$ , além de, em alguns casos, testes com diferentes intervalos no tempo. A mudança de integrador temporal não contribuiu na resolução numérica, já que em todos os casos testados o método não se mostrou estável. No caso da resolução do cabo inextensível pelo método das linhas, nós usamos a alternativa 2 (ver seção 4.5.1) e deixamos a primeira como trabalho futuro.

Como temos apenas o modelo teoricamente, foram construídas algumas condições iniciais (ver figura 5.1), que são, três delas, funções contínuas e diferenciáveis e uma apenas contínua, todas de tamanho 1, como imposto no modelo. Como estamos trabalhando com a segmentação do cabo, essas condições foram construídas a partir de um  $h$  especificado.

Como visto no capítulo 3, o método das linhas funcionou bem inclusive para equações com soluções *stiff*, então o esperado era que ele também funcionasse bem para o problema aqui estudado, apesar do modelo do cabo ser um sistema de equações e não somente uma equação escalar.

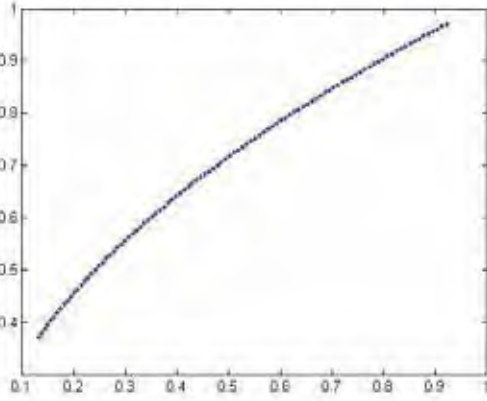
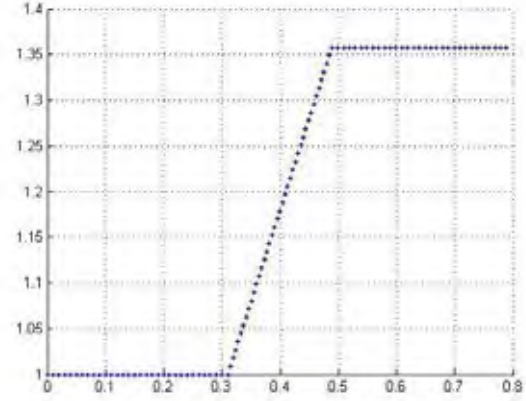
Outro aspecto a ser considerado é que a discretização foi baseada na segmentação do cabo, onde cada segmento tem tamanho  $h$ . Esse modo de discretização indicaria o uso de diferenças finitas regressivas, conforme proposto em [3]. Mas, foram desenvolvidas também as discretizações usando diferenças finitas centradas e progressivas. Como pode ser visto nas figuras deste capítulo, nenhuma delas funcionou com o método das linhas. Deduz-se dos experimentos que o problema em questão apresenta sensibilidade significativa em relação às condições de contorno, bem como perturbações na condição inicial. Ainda, como estamos considerando  $T$  constante, experimentos foram efetuados com altos valores de  $T$ , imaginando que um cabo tensionado fosse mais facilmente resolvido; nem nesse caso o método das linhas funcionou.

---

Vale ressaltar que desenvolvemos uma discretização completa por diferenças finitas para o cabo inextensível, visando comparações. Essa também, por sua vez, mostrou que o problema do cabo é “difícil” de ser resolvido, já que exigiu o uso do BiCGSTAB e um forte pré-condicionamento para a solução do sistema final. Na verdade, esse foi o único caso em que funcionou. Notamos ainda que o método não funcionou para a condição inicial não diferenciável (figura 5.2(b)).

Nesse capítulo, os resultados numéricos serão exibidos separadamente, primeiro os resultados do cabo inextensível usando diferenças finitas, em quatro casos, mudando apenas as condições iniciais. A seguir, temos o caso do cabo inextensível usando o método das linhas, que em cada condição inicial foram feitos três testes: com diferenças finitas centradas, regressivas e progressivas na discretização espacial das derivadas de primeira ordem. Nesse caso, os testes foram feitos com apenas duas condições iniciais, onde o método conseguiu trabalhar, variando o intervalo de tempo. No caso do cabo extensível, a resolução pelo método das linhas, como sugerido nesse trabalho, fica instável mais rápido que no caso do cabo inextensível e só há testes com uma condição inicial e como no caso anterior, variando o intervalo de tempo.

Abaixo, podemos ver as figuras das condições iniciais que foram usadas ao longo do procedimento numérico.

(a) Condição inicial dada por  $y = \sqrt{x}$ 

(b) Condição inicial 2

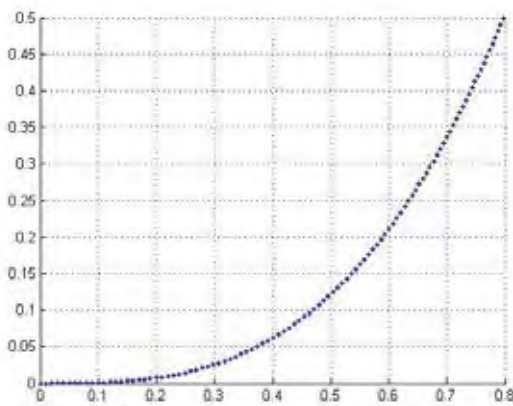
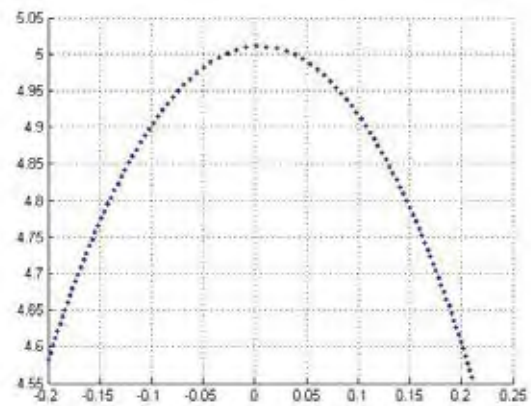
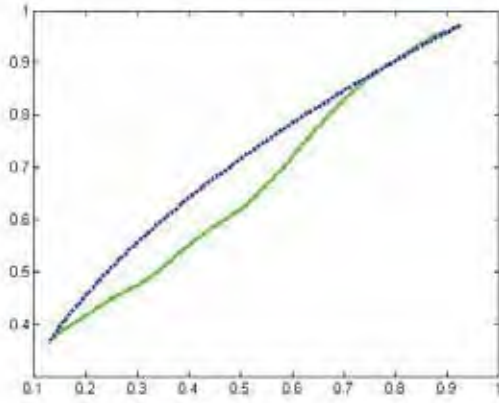
(c) Condição inicial dada por  $y = x^3$ (d) Condição inicial dada por  $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 b^2}}$ 

Figura 5.1: Condições Iniciais

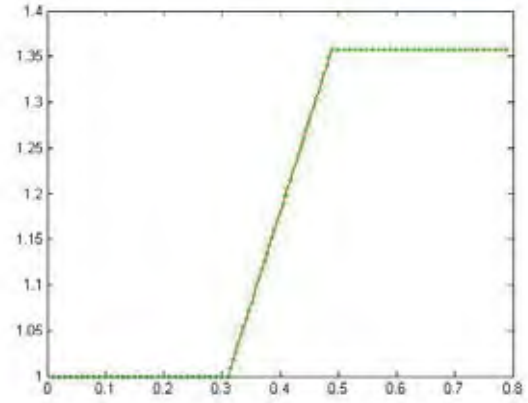
## 5.1 Cabo Inextensível

### 5.1.1 Resultado Numérico Usando Método das Diferenças Finitas

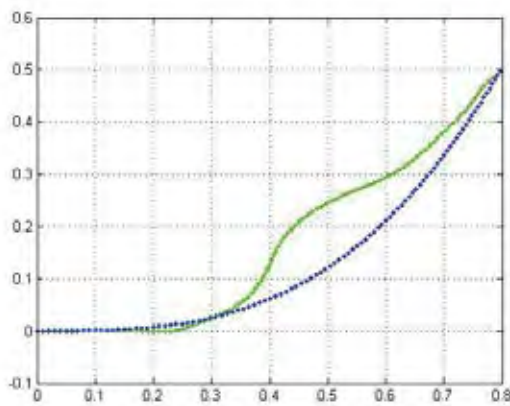
No caso do método de diferenças finitas, as figuras que seguem podem ser interpretadas da seguinte forma: a linha em vermelho, exatamente sob o pontilhado em verde, indica o movimento do cabo no tempo final, o pontilhado em azul a condição inicial e o pontilhado em verde, um teste para verificar se  $\theta$  foi bem resolvido, criando uma curva dada pela posição inicial  $(x(1), y(1))$  e o vetor  $\theta$  calculado. A malha espacial nesse caso foi definida com 101 pontos, as constantes  $C = 0.5$  e  $\rho = 100$  e o intervalo de tempo definido de 0 a 1, com passo 0.001. No caso da figura 5.2(b), as soluções não foram plotadas ao longo do tempo, pois a matriz do sistema foi considerada singular, aparentemente isso ocorre porque a condição inicial, sendo constante em uma das variáveis “zera” uma linha ou coluna da matriz do sistema.



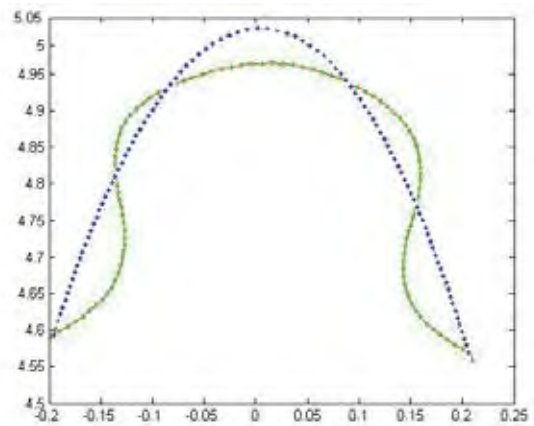
(a) Teste com a condição inicial 5.1(a).



(b) Teste com a condição inicial 5.1(b).



(c) Teste com a condição inicial 5.1(c).

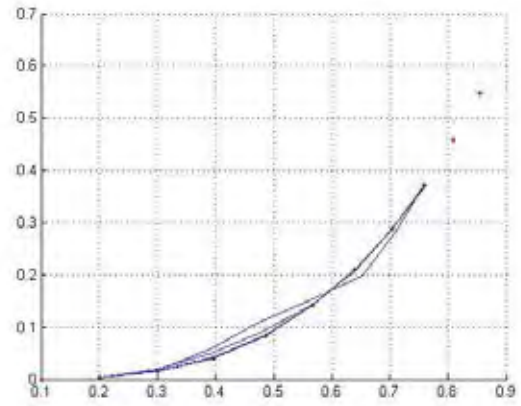
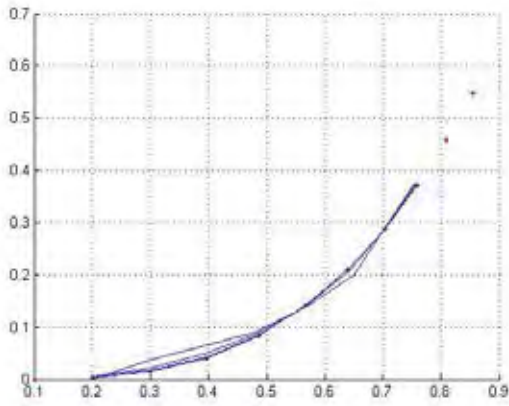


(d) Teste com a condição inicial 5.1(d).

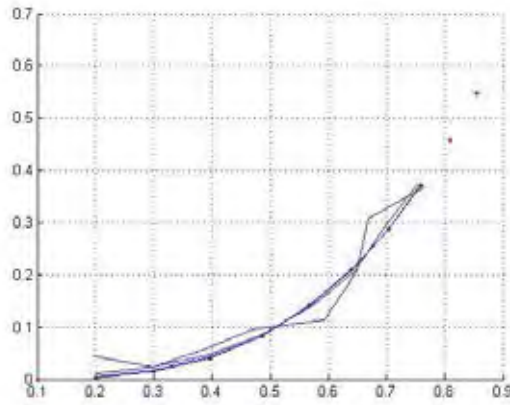
Figura 5.2: Resultados numéricos usando o método de diferenças finitas.

### 5.1.2 Resultado Numérico Usando Método das Linhas

Nesse caso, devido à instabilidade do método, foram feitos alguns testes variando o intervalo de tempo e o número de linhas, a fim de se obter algum resultado mais sólido. Como se pode ver nas figuras que seguem, ao aumentarmos um pouco o nosso  $n$ , mais especificamente, de 10 para 20, a solução tende a não funcionar, como foi o caso do teste com  $n = 101$ . Veremos primeiro o caso da condição inicial referente à figura 5.1(c), com  $C = 0.5$ ,  $\rho = 100$  e  $n = 10$  onde foram plotados apenas quatro valores da solução no tempo.



(a) Aproximação no espaço com diferenças finitas centradas. (b) Aproximação no espaço com diferenças finitas regressivas.



(c) Aproximação no espaço com diferenças finitas progressivas.

Figura 5.3: Aproximação com  $0 \leq t \leq 0.1$  e  $\Delta t = 0.1/6$

A seguir a solução numérica com os mesmos valores do caso anterior, mas com  $n = 20$ , feita apenas com diferenças finitas centradas (em todos os casos a solução não é satisfatória).

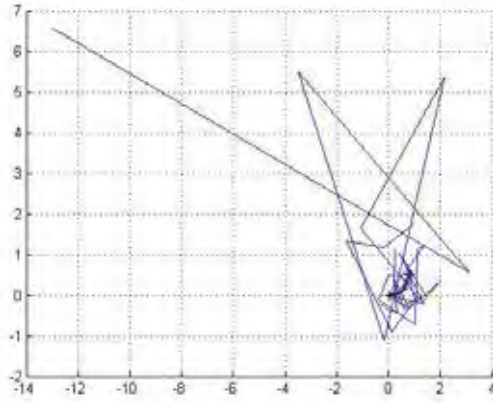
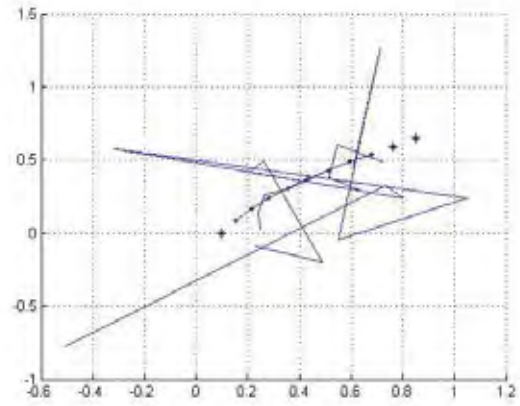
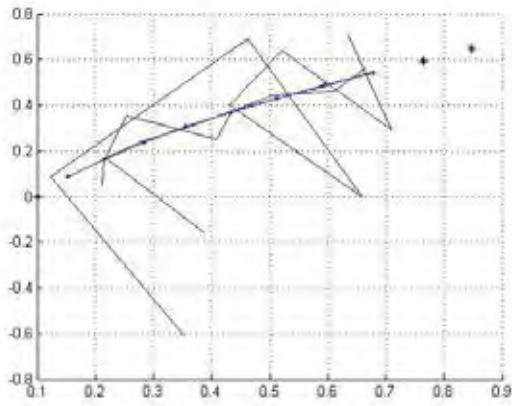
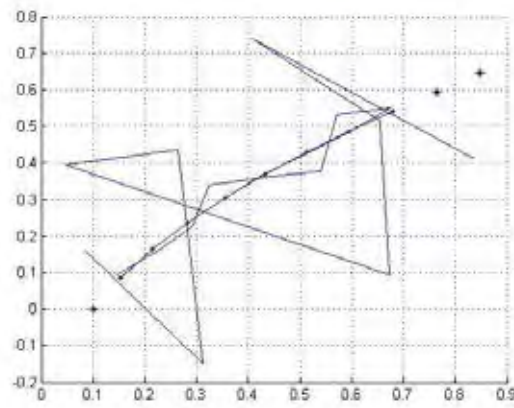


Figura 5.4: Solução numérica do cabo inextensível quando  $n = 20$ .

Fizemos os mesmos testes com o intervalo de tempo como nos casos anteriores, mas com a condição inicial da figura 5.1(a).



(a) Aproximação no espaço com diferenças finitas centradas. (b) Aproximação no espaço com diferenças finitas regressivas.



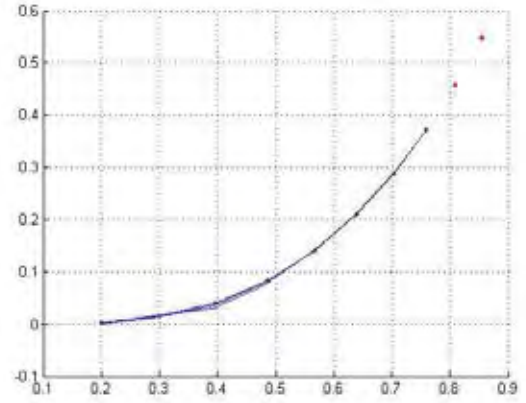
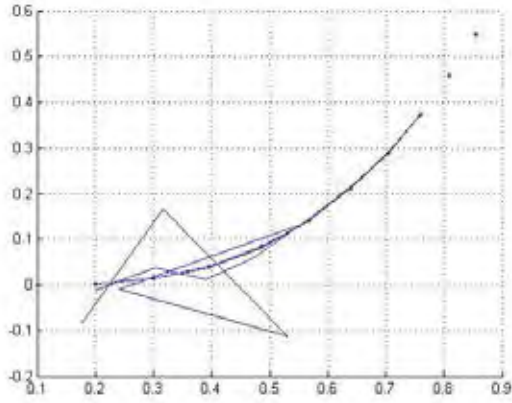
(c) Aproximação no espaço com diferenças finitas progressivas.

Figura 5.5: Aproximação com  $0 \leq t \leq 0.06$  e  $\Delta t = 0.06/4$

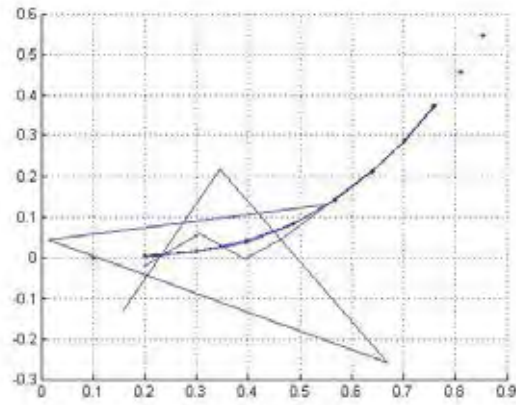
Vale ressaltar aqui que, em ambos os casos, foram feitos outros testes com outros intervalos no tempo, ou valores de constantes e nada mudou significativamente.

## 5.2 Cabo Extensível

No caso do cabo extensível, os testes foram feitos com a aproximação sugerida no procedimento numérico na seção 4.7, e apenas com a condição inicial presente na figura 5.1(c), pois aqui o método foi menos estável que no caso do cabo inextensível, então para a condição inicial como na figura 5.1(a), as soluções numéricas pioraram em relação ao que vimos na figura 5.5.



(a) Aproximação com  $0 \leq t \leq 0.08$  e  $\Delta t = 0.08/9$ . (b) Aproximação no espaço com diferenças finitas regressivas.



(c) Aproximação no espaço com diferenças finitas progressivas.

Figura 5.6: Aproximação com  $0 \leq t \leq 0.06$  e  $\Delta t = 0.06/4$

## Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos o modelo matemático planar do movimento de um cabo flexível, não submetido à forças externas, e estudamos a estabilidade do método das linhas para a resolução numérica desse modelo. Primeiramente testamos esse método em algumas equações mais conhecidas, sugeridas em [40] e [50], equação de Burguers, KdV e KdV Burgers e pudemos ver que o método funcionou bem em todos os casos. Toda a teoria envolvendo o modelo do cabo foi baseada em [3], onde o autor propõe o método das linhas para a resolução tanto do cabo extensível quanto inextensível. O método das linhas mostrou-se inadequado para o problema do cabo, ou seja, logo após alguns poucos passos no tempo a solução se deteriorou significativamente, o que representa, em nosso entendimento, a instabilidade do método das linhas. Ressaltamos, entretanto, que devido a forte sensibilidade do problema, tanto em relação à condição de fronteira como nas perturbações na condição inicial, o método precisaria ser muito melhor trabalhado para fazer frente a um possível mau condicionamento do modelo. Este, por exemplo, foi o caso da solução por diferenças finitas, onde o método exigiu o uso do BiCGSTAB e de um forte pré-condicionamento.

Os vários testes executados e a maturidade adquirida no trato deste modelo, nos permitem sugerir que este problema é complexo e merece ser estudado detalhadamente em diferentes direções, por exemplo, numa discussão da modelagem em si, considerar forças externas agindo sobre o cabo, fazer uma análise cuidadosa da influência da fronteira na solução discreta, bem como utilizar e fazer uma análise de métodos numéricos mais robustos.

Do ponto de vista prático, os problemas envolvendo a equação do cabo na literatura são resolvidos ou considerando modelos mais algébricos e menos diferenciais, ou em situações mais específicas, seja com o cabo fixo em apenas uma das extremidades ou sujeito à forças externas específicas. Esse modelo mais geral, porém sem forças externas, não é comum

na literatura e por isso foi usado visando o estudo da estabilidade e robustez do método das linhas.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDER, R. Diagonally implicit runge-kutta methods for stiff o.d.e.'s. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 14, 6 (Dez 1977), 1006–1021.
- [2] ARANHA, G. Formulação de um elemento finito de barra para análise dinâmica não-linear geométrica, com aplicação a cabos de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Dissertação de Mestrado em Engenharia, Universidade Federal do Pará, Pará, Dez 2003.
- [3] BENHAMMOUDA, B. Stability of finite-difference schemes for an initial-value problem in partial differential equations. Master's thesis, Linacre College, Oxford, Nov 1985.
- [4] BERZINS, M., CAPON, P. J., AND JIMACK, P. K. On spatial adaptivity and interpolation when using the method of lines. *International Journal of Engineering Science* (Fev 1991).
- [5] BIN, L., YINGHUI, L., AND XUEGANG, Y. Dynamic modeling and simulation of flexible cable with large sag. *Shanghai University* 21, 6 (Jun 2000), 707–714.
- [6] BRITO, P. Métodos numéricos adaptativos para a resolução de modelos multidimensionais em engenharia química. Tese de Doutorado em Engenharia Química, Universidade de Coimbra, Coimbra, Set 2010.
- [7] BURDEN, R., AND FAIRES, J. *Análise Numérica*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [8] CAMPO, A. Numerical prediction of combined laminar convection in isothermal vertical tubes via the method of lines. *Warme und Stoffübertragung* 23 (1988), 229–247.
- [9] CASH, J. Modified extended backward differentiation formulae for the numerical solution of stiff initial-value problems in odes and daes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 125 (2000), 117–130.
- [10] CASH, J. Efficient time integrators in the numerical method of lines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 183 (Ago 2004), 259274.

- 
- [11] CD., M. J. On the non-linear oscillation of an axially moving string. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 183 (Ago 2004), 259274.
- [12] CENEDESE, E. Solução das equações de burgers e de navierstokes bidimensionais utilizando a técnica da transformada integral generalizada. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Unesp, Ilha Solteira, 2005.
- [13] COSTA, C. G. Introdução ao método das linhas para equações diferenciais parciais não-lineares. Relatório ic/fapesp, FCT/UNESP-PP, 2010.
- [14] CUMINATO, J., AND MENEGUETTE, M. Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas, 2000.
- [15] DREYER, T., AND MURRAY, D. The numerical solution of the pre-elimination models of cable configurations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 10 (Ago 1984), 81–91.
- [16] DREYER, T., AND MURRAY, D. On the modeling of two-dimensional segment representations of cable shape. *Ocean Engng.* 11, 6 (1984), 609–625.
- [17] DREYER, T., AND MURRAY, D. The numerical solution of the pre-elimination models of cable configurations. *Appl. Math. Modelling* 9 (Jun 1985), 163–169.
- [18] ELIAS, R. Métodos tipo newton inexatos para a solução de problemas não-lineares resultantes da formulação supg/pspg das equações de navier-stokes incompressíveis em regime permanente. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.
- [19] FRANKS, R. G. E. *Modeling and simulation in chemical engineering*. Wiley-Interscience, 1972.
- [20] GOYAL, S., PERKINS, N., AND LEE, C. Writhing dynamics of cables with self-contact. *International Symposium on Cable Dynamics* (Set 2003), 27–36.
- [21] HAFELE, M. Dynamic simulation of a tubular reactor for the production of low-density polyethylene using adaptive method of lines. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 183 (2005), 288–300.
- [22] HAIRER, E., AND WANNER, G. Apresenta informações sobre o método radau5. Disponível em: <<http://www.dm.uniba.it/~testset/solvers/radau5.php>>. Acesso em: 07 set. 2011.
- [23] HAIRER, E., AND WANNER, G. *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential algebraic equations*. Springer, 2010.

- 
- [24] HANDSCOMB, D. Theoretical and computational mechanics of a flexible cable.
- [25] HAQ, S., ISLAM, S., AND UDDIN, M. A mesh-free method for the numerical solution of the kdvburgers equation. *Applied Mathematical Modelling* 33 (2009), 34423449.
- [26] ISERLES, A. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [27] ISMAIL, A., KARIM, F., ROY, G., AND MEAH, M. A. Numerical modelling of tsunami via the method of lines. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 32 (2007), 177–185.
- [28] JONES, D., SOUTH, J., AND KLUNKER, E. On the numerical solution of elliptic partial differential equations by the method of lines. *Comput. Physics* 9, 3 (Jun 1972).
- [29] JUSTO, D. Métodos numéricos para equações diferenciais. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~dago/metnum/metnum.pdf>>. Acesso em: 20 jun. 2011.
- [30] MASS, U., AND NOWAK, U. An adaptive method of lines for the simulation of complex laminar combustion processes. *Berlin* (Dez 1996).
- [31] MIKHAIL, N. On the validity and stability of the method of lines for the solution of partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 22 (1987), 89–98.
- [32] OYMAC, O., AND SELCUK, N. Method of lines solution of time-dependent two-dimensional navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluid* 23 (Jan 1996), 455–466.
- [33] PARREIRA, G., AND ARAUJO, L. Sólitos em comunicações ópticas, Jan 2004.
- [34] PAULETTI, R. Sobre cabos e cordas, fev 2003. Disponível em: <<http://www.lmc.ep.usp.br/people/pauletti/Publicacoesarquivos/ISNT-Sobre-Cabos-e-Cordas.pdf>>. Acesso em: 4 jun. 2011.
- [35] QUISENBERRY, J. Dynamic simulation of low altitude aerial tow systems. Master's thesis, College of Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma, Jul 2005.
- [36] RODRIGUES, P., AND HERMINA, A. Modelagem de elementos básicos de estruturas para a análise qualitativa do comportamento estrutural. *Revista de Ciência e Tecnologia* 06, 01 (Jun 2006), 19–28.
- [37] SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.

- 
- [38] SADIKU, M., AND GARCIA, R. Methods of lines solution of axisymmetric problems. *Southeastcon Conference* (Abr 2000), 527–530.
- [39] SADIKU, M., AND OBIOZOR, C. A simple introduction to the method of lines. *International Journal of Electrical Engineering Education* 37, 3, 282–296.
- [40] SCHIESSER, W., AND GRIFFITHS, G. *A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with Matlab*. Cambridge University Press, 2009.
- [41] SHAKERI, F., AND DEHGHAN, M. The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral conservation condition. *Computers and Mathematics with Applications* 56 (Mar 2008), 2175 – 2188.
- [42] SHEN, Q. A meshless method of lines for the numerical solution of kdv equation using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 33 (Mar 2008), 11711180.
- [43] SIMPSON, A. Determination of the in-plane natural frequencies of multispan transmission lines by a transfer matrix method. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 113 (1966).
- [44] TALER, J., AND DUDA, P. Solution of nonlinear inverse heat conduction problems using method of lines. *Heat and Mass Transfer*, 37 (Mai 1999), 147–155.
- [45] TENTIS, E., MARGARIS, D., AND PAPANIKAS, D. Transient gas flow simulation using an adaptive method of lines. *C.R Mechanique* 331 (Mai 2003), 481–487.
- [46] THOMPSON, R. Convergence and error estimates for the method of lines for certain nonlinear elliptic and elliptic-parabolic equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 13, 1 (Mar 1976), 27–43.
- [47] WALTER, W. *Differential and integral inequalities*. Springer-Verlag, 1970.
- [48] WANG, Y., AND LUO, A. Dynamics of traveling, inextensible cables. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 9 (Fev 2003), 531 – 542.
- [49] WOLFE, P. The effect of bending stiffness on inextensible cables. *International Journal of Engineering Science* 30, 9 (Ago 1992), 1187–119.
- [50] WOUWER, A., SAUCEZ, P., AND SCHIESSER, W. *Adaptive method of lines*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [51] WOUWER, A., SAUCEZ, P., SCHIESSER, W., AND THOMPSON, S. A matlab implementation of upwind finite differences and adaptive grids in the method of lines. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (Set 2004).