

Paulo Sérgio da Silva Gouveia

**Resolução de Problemas de Inequações Variacionais
Usando Variações da Função
de Fischer - Burmeister**



1910001390





Resolução de Problemas de Inequações Variacionais

Usando Variações da Função

de Fischer-Burmeister

Paulo Sérgio da Silva Gouveia

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-095



Resolução de Problemas de Inequações Variacionais Usando Variações da Função de Fischer-Burmeister

Paulo Sérgio da Silva Gouveia

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Andreani

São José do Rio Preto

24 de fevereiro de 2005



518.734

G719r

04/04/2005

Doação

R\$ 23,00

AUTOR(A)

076/2005

116/05

10104003

Gouveia, Paulo Sérgio da Silva.

Resolução de problemas de inequações variacionais usando variações da função de Fischer-Burmeister / Paulo Sérgio da Silva Gouveia – São José do Rio Preto : [s.n.], 2005

87 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Roberto Andreani

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Otimização matemática. 2. Inequações variacionais. 3. Fischer-Burmeister, Função de. I. Andreani, Roberto. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.85



Agradecimentos

À Deus, sobre todas as coisas

Aos meus pais Alfredo Marques de Almeida e Maria Teresa Veloso da Silva Gonçalves pela dedicação e pelo carinho que tiveram comigo. Aos meus irmãos Rui e Luiz Fernando da Silva Gonçalves pelo apoio, incentivo e paciência que tiveram comigo durante este trabalho.

A minha amiga Tânia Maria Costa pela amizade e por ter me ajudado a superar as dificuldades deste trabalho.

Aos Prof. Drs. R. Antônio Andrade pela orientação e incentivo que me tem dado durante este trabalho. Aos professores e funcionários do UNESP São José do Rio Preto que me ajudaram durante este trabalho e especialmente o Prof. Dr. R. Antônio Andrade pela orientação e incentivo que me tem dado durante este trabalho.

Aos meus amigos Gustavo pela ajuda na elaboração dos experimentos e ao Prof. Dr. R. Antônio Andrade pela orientação e incentivo que me tem dado durante este trabalho.

A UNESP pelo auxílio financeiro concedido durante todo este trabalho.

À Deus.

À meus pais, Alfredo e Maria Teresa.

Aos meus irmãos Rui e Luiz Fernando.

Dedico



Agradecimentos

À Deus, sobre todas as coisas.

Aos meus pais Alfredo Marques de Gouveia e Maria Teresa Velosa da Silva Gouveia pela vida que me deram e pela paciência que tiveram comigo. Aos meus irmãos Rui Manuel da Silva Gouveia e Luiz Fernando da Silva Gouveia pelo apoio, incentivo e paciência que tiveram comigo durante todo este trabalho.

À minha namorada Talita Storti Garcia pela correção do português deste trabalho, pelo apoio e paciência que teve comigo.

Ao Prof. Dr. Roberto Andreani, pelas orientações e incentivos que me tem dispensado. Aos professores e funcionários da UNESP São José do Rio Preto que me proporcionaram conhecimento e condições para o desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos pós-graduandos.

Ao meu amigo Giovane pela ajuda na elaboração dos experimentos numéricos.

À CAPES pelo auxílio financeiro concedido durante todo este trabalho.



Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo aprofundado da função de Fischer-Burmeister Penalizada e a utilizamos para a reformulação do Problema de Complementaridade Não Linear $NCP(F)$, do Problema de Inequações Variacionais com restrições do tipo caixa $VIP(F, l, u)$ e do Problema de Inequações Variacionais geral $VIP(F, \Omega)$ que têm importantes aplicações na programação matemática, nos problemas de equilíbrio e na engenharia. Encontramos relações entre pontos estacionários e mínimos globais e terminamos com experimentos numéricos comparando a robustez da função de Fischer-Burmeister e da função de Fischer-Burmeister Penalizada.

Palavras-chave: Inequações Variacionais, Complementaridade, Função de Fischer-Burmeister, Otimização.



Sumário

Abstract

1. Preliminaries

In this work we make a deep study of the Fischer-Burmeister Penalized function and we utilize it for reformulation of the Nonlinear Complementarity Problem $NCP(F)$, the Variational Inequality Problem with constraints of box type $VIP(F, l, u)$ and the Variational Inequality Problem $VIP(F, \Omega)$ that have important applications in mathematical programming, equilibrium problems and in engineering. We found relations between stationary points and global minimizers and we finished with numerical experiments comparing the robustness of Fischer-Burmeister and Fischer-Burmeister Penalized functions.

Keywords: Variational Inequality, Complementarity, Fischer-Burmeister Function, Optimization.

2. O Problema de Inigualdade Variacional, $VIP(F, \Omega)$

2.1. Introdução

2.2. Formulação do $VIP(F, \Omega)$

3. Experimentos Numéricos

3.1. Introdução

3.2. Descrição dos Experimentos

3.3. Resultados Numéricos

3.3.1. Resultados de Complementaridade Não Linear

3.3.2. VIP -Box



Sumário

1	Preliminares	3
1.1	Definições e Notações	3
1.2	Condições de Otimalidade	6
2	O Problema de Complementaridade Não Linear, NCP(F)	9
2.1	Introdução	9
2.2	Formulação do Problema de Complementaridade Não Linear	9
2.3	A Função de Fischer-Burmeister Penalizada	19
2.4	Propriedades das Funções ϕ_λ , ψ_λ e Ψ_λ	21
2.5	Conjuntos de Nível	30
3	O Problema de Inequações Variacionais com Restrições de Caixa, VIP(F,l,u)	41
3.1	Introdução	41
3.2	Formulação do <i>VIP-caixa</i>	41
4	O Problema de Inequações Variacionais, VIP(F, Ω)	54
4.1	Introdução	54
4.2	Formulação do VIP(F, Ω)	54
5	Experimentos Numéricos	60
5.1	Introdução	60
5.2	Descrição do Algoritmo	60
5.3	Problemas Propostos	61
5.3.1	Problema de Complementaridade Não Linear	62
5.3.2	VIP-Caixa	68



5.3.3	VIP Geral	73
5.4	Conclusões	83
6	Conclusões	84

Problemas de Inequações Variacionais e de Complementabilidade possuem de uma diversidade de formas e descrições. A seguinte lista de aplicações dos problemas de Inequações Variacionais e de Complementabilidade mostra que estes problemas aparecem em muitas áreas da matemática e da física.

Segundo Pang [23], os temas de tais problemas podem ser classificados basicamente em três áreas: (i) problemas de programação matemática, problemas de equilíbrio e problemas de otimização em equações.

- Programação Matemática: Problemas de otimização em equações e problemas de complementaridade. Problemas de complementaridade são problemas de otimização em equações.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Se $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ para $x < 0$, então f é a função de Heaviside. A função de Heaviside é uma função contínua e limitada que satisfaz $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ para $x < 0$. A função de Heaviside é uma função contínua e limitada que satisfaz $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ para $x < 0$.

- Problemas de Equilíbrio: Em problemas de equilíbrio, os problemas de complementaridade são problemas de otimização em equações. Problemas de complementaridade são problemas de otimização em equações.

- Aplicações em Engenharia: Um grande número de problemas de otimização em equações e problemas de complementaridade aparecem em problemas de otimização em equações.



Introdução

Problemas de Inequações Variacionais e de Complementaridade provêm de uma diversidade de fontes e disciplinas. A enorme gama de aplicações destes problemas faz com que o seu estudo, tanto teórico quanto prático, seja de suma importância para a matemática moderna.

Segundo Pang [22], as fontes de tais problemas podem ser classificadas basicamente em três categorias, que são elas: programação matemática, problemas de equilíbrio em economia e aplicações na engenharia.

- Programação Matemática: Problemas de otimização são uma grande fonte de aplicações para problemas de complementaridade. Considerando-se um problema de otimização não-linear na sua forma padrão,

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } x \in \Omega \end{aligned}$$

onde, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m \text{ e } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}$ e $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são todas continuamente diferenciáveis, temos que as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) deste problema correspondem precisamente a um problema de inequações variacionais específico, veja [22] página 275 para mais detalhes.

- Problemas de Equilíbrio: Um modelo de equilíbrio fundamental que tem encontrado inúmeras aplicações em economia, estudo de oligopólios e teoria de jogos é devido a Nash [20]. Pode ser provado que um vetor de estratégia x é um *equilíbrio desejado* se, e somente se, x resolve um problema de inequações variacionais específico, veja [20] para mais detalhes.
- Aplicações na Engenharia: Um grande número de problemas de inequações em mecânica pode ser formulado como inequações variacionais e problemas de com-



plementaridade, veja [21], muitos dos quais estão inseridos em espaços de funções. Incluídos nestas aplicações na engenharia estão: problemas de contato, problemas elastoplásticos, problemas em redes neurais, redes elétricas, etc.

Atualmente existem vários métodos propostos para resolver problemas de complementaridade e de inequações variacionais; muitos desses métodos estão fundados no fato de reformulá-los como um sistema de equações não lineares homogêneas, ou como problemas de otimização, veja [8, 14, 15, 16, 17]. Motivados pelas características especiais e pelo ótimo desempenho da função de Fischer-Burmeister Penalizada para o problema de complementaridade não linear em [4], neste trabalho estendemos sua aplicação para a resolução do problema de inequações variacionais com restrições de igualdade (lineares) e de desigualdade e com restrições do tipo caixa, estudando suas propriedades práticas e teóricas.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos conceitos e resultados relevantes que serão usados durante todo o texto. No segundo capítulo abordaremos a reformulação e resolução do problema de complementaridade não linear, apresentamos também a função de Fischer-Burmeister Penalizada junto com suas propriedades, além de resultados importantes. O terceiro capítulo tratará de uma generalização do problema de complementaridade não linear, o problema de inequações variacionais com restrições do tipo caixa, ao qual nos referiremos apenas por *VIP caixa*, sua reformulação utilizando a função de Fischer-Burmeister Penalizada e resultados teóricos também serão estudados. O quarto capítulo aborda um problema de inequações variacionais mais geral onde o conjunto de restrições é composto por restrições de igualdade (restrições lineares) e de desigualdade. O quinto capítulo é composto por experimentos numéricos sobre os três problemas estudados, uma comparação de robustez entre as funções de Fischer-Burmeister e Fischer-Burmeister Penalizada será feita. O sexto e último capítulo apresenta a conclusão sobre o nosso trabalho e futuros trabalhos a serem realizados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos a notação que será usada no decorrer desta dissertação, bem como alguns conceitos necessários para o desenvolvimento da mesma.

1.1 Definições e Notações

1. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial real cujos elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são vetores coluna da forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

2. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, denota o vetor transposto.

3. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno usual de x por y é denotado e definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y.$$

4. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x^t x}$, denota a norma Euclidiana.

5. A distância (Euclidiana) entre dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definida e denotada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

6. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se $\langle x, y \rangle = 0$, então dizemos que x e y são ortogonais e denotamos por $x \perp y$.
7. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ a notação $x < y$ ($\leq, >, \geq$) significa que $x_i < y_i$ ($\leq, >, \geq$) para todo $i = 1, \dots, n$.
8. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denota uma matriz com n linhas e m colunas.
9. I_n denota a matriz identidade de ordem n , que é definida como $I_n = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = 1$, se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.
10. (Gradiente) Para uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O gradiente de f no ponto x é definido e denotado por

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

onde, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ denota a derivada parcial de f com relação a variável x_i , $i = 1, \dots, n$.

11. $C^n(\Omega)$ denota o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, f é diferenciável e tem derivada contínua até a ordem n , no conjunto Ω .
12. (Matriz Hessiana de f) A matriz Hessiana de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida e denotada por $\nabla^2 f(x) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$.
13. (Jacobiano) Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))^t$, $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. A matriz Jacobiana de F é definida e denotada por

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \nabla^t F_1(x) \\ \vdots \\ \nabla^t F_m(x) \end{pmatrix}.$$

Note que, se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ então $F'(x) = \nabla^t F(x)$.

14. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz, a matriz transposta de A é definida e denotada por $A^t = (a_{ji})$.

15. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser semi-definida positiva se $x^t A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denotada por $A \geq 0$.
16. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser definida positiva se $x^t A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ e denotada por $A > 0$.
17. $\text{vec}\{z_i\}$, denota o vetor cuja i -ésima componente é z_i .
18. $\mathcal{L}(c)$, denota o conjunto de nível de uma função.
19. $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \epsilon\}$ denota a bola Euclidiana.
20. z_+ denota a função $\max\{0, z\}$.
21. Dada uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

assuma que A é não singular. O Complemento de Schur de A em M é definido como a matriz $S = D - CA^{-1}B$.

Definição 1.1.1. Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser

- P_0 -função se, para todo x e y em $\mathbb{R}^n$ com $x \neq y$, existe um índice i tal que

$$x_i \neq y_i \quad (x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geq 0 ;$$

- P -função se, para todo x e y em $\mathbb{R}^n$ com $x \neq y$, existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] > 0 ;$$

- P -função uniforme se, existe uma constante positiva μ tal que, para todo x e y no $\mathbb{R}^n$, existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geq \mu \|y - x\|^2 .$$

Dado o Problema de Otimização

$$\min f(x)$$

$$\text{s.a. } x \in \Omega$$

definimos.

Definição 1.1.2. Um ponto $x^* \in \Omega$ é um minimizador local de f em Ω se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \Omega$ tal que $\|x - x^*\| < \epsilon$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x \neq x^*$ e $\|x - x^*\| < \epsilon$, diremos que se trata de um minimizador local estrito em Ω .

Definição 1.1.3. Um ponto $x^* \in \Omega$ é um minimizador global de f em Ω se, e somente se, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \Omega$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x \neq x^*$, diremos que se trata de um minimizador global estrito em Ω .

1.2 Condições de Otimalidade

Proposição 1.2.1 (Condições Necessárias de Primeira Ordem). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Se x^* é um minimizador local de f em $\mathbb{R}^n$, então $\nabla f(x^*) = 0$.

Proposição 1.2.2 (Condições Necessárias de Segunda Ordem). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se x^* é um minimizador local de f em $\mathbb{R}^n$, então:

1. $\nabla f(x^*) = 0$;

2. $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

Proposição 1.2.3 (Condições Suficientes de Segunda Ordem). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) > 0$, então x^* é um minimizador local estrito de f em $\mathbb{R}^n$.

As condições necessárias devem obrigatoriamente serem satisfeitas por minimizadores; já as condições suficientes, quando satisfeitas, garantem que o ponto em questão seja um minimizador.



Consideremos agora o seguinte problema de otimização

$$\min f(x) \quad (1.1)$$

$$\text{s.a. } x \in \Omega$$

onde, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m \text{ e } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}$ e $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são todas continuamente diferenciáveis.

Definição 1.2.1. Para um ponto factível x , definimos o conjunto das restrições ativas por

$$J := \{j : g_j(x) = 0\}.$$

Definição 1.2.2. Um ponto x^* é dito ser regular se os gradientes das funções das restrições de igualdade $\nabla h_i(x^*)$, $i = 1, \dots, m$ junto com os gradientes das restrições de desigualdade ativas $\nabla g_j(x^*)$, $j \in J$ são linearmente independentes.

Teorema 1.2.4 (Condições de Karush-Kuhn-Tucker, (KKT)). Se x^* é um minimizador local regular de (1.1), $\{\nabla g_i(x^*) : i \in J\} \cup \{\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)\}$ é um conjunto linearmente independente, então existem e são únicos $\mu_i \geq 0$, $i \in J$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0.$$

Desta forma, se x^* é um ponto regular e minimizador local de (1.1), definindo $\mu_i = 0$ se $i \notin J$, podemos reescrever as condições de KKT da seguinte forma:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in J} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

$$h(x^*) = 0$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Se $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ satisfaz o sistema anterior, então x^* será chamado de um ponto estacionário de (1.1).

Capítulo 2

O Problema de Complementaridade Não Linear, NCP(F)

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar alguns dos principais conceitos que serão necessários para o decorrer do nosso trabalho, nos comecando com o conceito de função-NCP e de conjuntos de nível, além disso apresentaremos também as funções de Fischer-Burmeister e de Fischer-Hartwig e finalmente apresentaremos algumas propriedades e resultados relevantes.

2.2 Formulação do Problema de Complementaridade Não Linear

Seja $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, diferenciável.

Definição 2.2.1. O Problema de Complementaridade Não Linear, denotado por NCP(F), consiste em encontrar um vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0 \quad \text{e} \quad (x^*, F(x^*)) = 0$$

Em outras palavras, em NCP(F) consiste em dada uma função $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$, encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

Capítulo 2

O Problema de Complementaridade Não Linear, $NCP(F)$

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar alguns dos principais conceitos que serão necessários para o decorrer do nosso trabalho, tais como: o conceito de função-NCP e de conjuntos de nível, além disso, apresentaremos também as funções de Fischer-Burmeister e de Fischer-Burmeister Penalizada juntamente com suas propriedades e resultados relevantes.

2.2 Formulação do Problema de Complementaridade Não Linear

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável.

Definição 2.2.1. *O Problema de Complementaridade Não Linear, denotado por $NCP(F)$, consiste em encontrar um vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$x^* \geq 0, F(x^*) \geq 0 \text{ e } \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0$$

Em outras palavras, um $NCP(F)$ consiste em, dada uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$, encontrar $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ tal que



$$F(x^*) \in \mathbb{R}_+^n \text{ e } x^* \perp F(x^*).$$

Atualmente existem vários métodos voltados a resolver o NCP(F) ou problemas relacionados. Estes métodos estão baseados no fato de reformulá-los como um sistema de equações não lineares homogêneas usando uma função-NCP, ou como um problema de otimização usando uma função de mérito adequada.

Definição 2.2.2 (função-NCP). Dizemos que uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função-NCP se

$$\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Note geometricamente que uma função-NCP apresenta as suas raízes sobre os semi-eixos positivos mais a origem (veja a figura a seguir).

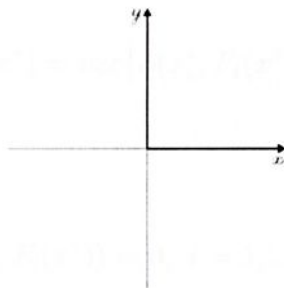


Figura 2.1: as raízes de uma função-NCP

Alguns exemplos de funções-NCP podem ser encontradas em [14], de onde podemos citar:

- $\phi_1(a, b) := \frac{1}{2} \min^2\{a, b\};$
- $\phi_2(a, b) := \frac{1}{2}((ab)^2 + \min^2\{0, a\} + \min^2\{0, b\}).$

Uma vez definido o conceito de função-NCP, podemos definir um vetor $\Phi(x)$ da seguinte maneira:

$$\Phi(x) := \text{vec}\{\phi(x_i, F_i(x))\},$$

logo

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \phi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \phi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Definindo o vetor $\Phi(x)$ desta forma, podemos obter o seguinte resultado que mostra a equivalência entre o problema de complementaridade não linear e o sistema homogêneo de equações não lineares (2.1).

Lema 2.2.1. *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema de equações $\Phi(x) = 0$ se, e somente se, x^* for solução do $NCP(F)$.*

Prova 2.2.1. *De fato.*

Primeiramente suponha que $x^ \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema $\Phi(x) = 0$. Como*

$$\Phi(x^*) = \text{vec}\{\phi(x_i^*, F_i(x^*))\},$$

temos que

$$\phi(x_i^*, F_i(x^*)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, pela caracterização de NCP-funções e pelo fato de ϕ ser uma, temos que

$$x_i^* F_i(x^*) = 0 \quad \text{e} \quad x_i^* \geq 0, \quad F_i(x^*) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0.$$

Portanto, x^ é solução do $NCP(F)$.*

Reciprocamente, se x^ é solução do $NCP(F)$, temos que*

$$x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0.$$

Logo, analisando cada componente vemos que, $x_i^* \geq 0$, $F_i(x^*) \geq 0$ e consequentemente $x_i^* F_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Tendo em vista o fato de ϕ ser uma função-NCP vem que

$$\phi(x_i, F_i(x)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto, x^* é solução do sistema $\Phi(x) = 0$.

■

A próxima definição nos dá o conceito de função de mérito.

Definição 2.2.3 (Função de Mérito). Tome $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma função de mérito para o NCP é uma função não negativa $\Psi : C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que x^* é uma solução do NCP se, e somente se, $x^* \in C$ e $\Psi(x^*) = 0$.

Claramente, pela definição anterior, nota-se que $\Psi(x)$ é uma função de mérito para o NCP se, e somente se, as soluções do NCP coincidem com as soluções globais do problema

$$\min \Psi(x) \tag{2.2}$$

$$x \in C$$

com valor funcional zero.

Neste trabalho admitiremos apenas $C = \mathbb{R}^n$ e o próximo resultado, nos garante a existência de uma função de mérito natural com $C = \mathbb{R}^n$ para todo $NCP(F)$.

Proposição 2.2.2. Para todo $NCP(F)$, a função

$$\Psi(x) := \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2,$$

é uma função de mérito, onde $\Phi(x)$ é definido em (2.1).

Prova 2.2.2. De fato.

Para todo x^* pertencente ao conjunto solução do problema (2.2) temos que

$$\Psi(x^*) = 0.$$

Logo,

$$\Phi(x^*) = 0.$$

Portanto, pelo Lema 2.2.1, temos que x^* é solução do $NCP(F)$.

Agora, se $\bar{x}$ é solução do $NCP(F)$ então, novamente pelo Lema 2.2.1 $\bar{x}$ é solução do sistema (2.1). Então pela não negatividade da função $\Psi(x)$ o resultado segue imediatamente.

■

Apresentamos agora a função de Fischer-Burmeister, além de algumas propriedades e resultados que nos ajudarão no decorrer do nosso trabalho.

A função de Fischer-Burmeister é definida da seguinte maneira:

$$\phi_{FB}(a, b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Esta função foi apresentada pela primeira vez em [9] e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores; vários algoritmos foram baseados com ênfase nesta função devido as suas ótimas propriedades.

Proposição 2.2.3. *A função de Fischer-Burmeister é uma função-NCP.*

Prova 2.2.3. *De fato.*

Primeiramente, vamos assumir que $ab = 0$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, logo,

$$\phi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\stackrel{ab=0}{=} a + b - \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= a + b - \sqrt{(a + b)^2}$$

$$= a + b - |(a + b)|$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow 0.$$

Reciprocamente, assumamos que $\phi_{FB}(a, b) = 0$, logo

$$\phi_{FB}(a, b) = 0$$

$$a + b - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$a + b = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.3)$$

Agora, elevando-se ao quadrado ambos os lados de (2.3), temos que

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab = 0$$

$$ab = 0.$$

Sem perda de generalidade suponhamos $b = 0$, logo de (2.3)

$$a = \sqrt{a^2}$$

$$a = |a|$$

Portanto, $a \geq 0$.

Analogamente, prova-se que $b \geq 0$.

Logo, o resultado fica provado. ■

Uma vez provado que a função $\phi_{FB}(a, b)$ de Fischer-Burmeister é uma função-NCP, faz sentido pensarmos no sistema:

$$\Phi_{FB}(x) := \begin{pmatrix} \phi_{FB}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \phi_{FB}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix} = 0,$$

e na função de mérito

$$\Psi_{FB}(x) := \frac{1}{2} \|\Phi_{FB}(x)\|^2,$$

a qual, pelos resultados anteriores, reformula o *NCP*.

Os próximos três resultados garantem que a função de mérito $\Psi_{FB}(x)$ é continuamente diferenciável.

Proposição 2.2.4. *Seja $\phi_{FB}(a, b)$ a função de Fischer-Burmeister, então a função $\phi_{FB}^2(a, b)$ é diferenciável e*

$$D(\phi_{FB}^2(a, b)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } (a, b) = (0, 0) \\ 2\nabla^t \phi_{FB}(a, b) \cdot \phi_{FB}(a, b), & \text{se } (a, b) \neq (0, 0) \end{cases}$$

onde $D(\cdot)$ é o operador diferencial.

Prova 2.2.4. *Com efeito*

$$\phi_{FB}^2(a, b) = (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})^2$$

$$= (a + b)^2 - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

$$= 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Para $(a, b) \neq (0, 0)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$D(\phi_{FB}^2(a, b)) = 2 \left(\frac{\partial \phi_{FB}}{\partial a}(a, b), \frac{\partial \phi_{FB}}{\partial b}(a, b) \right)^t \cdot \phi_{FB}(a, b)$$

$$2\nabla^t \phi_{FB}(a, b) \cdot \phi_{FB}(a, b)$$

- Para $(a, b) = (0, 0)$

$$D(\phi_{FB}^2(a, b)) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{\phi_{FB}^2(a, b) - \phi_{FB}^2(0, 0)}{\|(a, b)\|}$$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{\phi_{FB}^2(a, b)}{\|(a, b)\|}$$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\|(a, b)\|}$$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= 2 \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2 \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 2 \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.4)$$

Mas

$$0 \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2}} \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{a^2}{|a|} \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} a = 0. \quad (2.5)$$

Logo, pelo Teorema do Confronto o primeiro e o terceiro limites em (2.4) são nulos. E

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad (2.6)$$

pois,

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

logo,

$$0 \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \left| \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \left| \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \sqrt{a^2 + b^2} = 0.$$

E

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} a+b = 0. \quad (2.7)$$

Logo, por (2.5), (2.6) e (2.7)

$$D(\phi_{FB}^2(a, b)) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} \frac{\phi_{FB}^2(a, b) - \phi_{FB}^2(0, 0)}{\|(a, b)\|} = 0$$

Portanto, $\phi_{FB}^2(a, b)$ é diferenciável.

■

Proposição 2.2.5. $D(\phi_{FB}^2(a, b))$ é contínua.

Prova 2.2.5. Com efeito.

- Para $(c, d) \neq (0, 0)$.

$$\lim_{\substack{a \rightarrow c \\ b \rightarrow d}} D(\phi_{FB}^2(a, b)) = \lim_{\substack{a \rightarrow c \\ b \rightarrow d}} 2\nabla^t \phi_{FB}(a, b) \cdot \phi_{FB}(a, b)$$

$$2\nabla^t \phi_{FB}(c, d) \cdot \phi_{FB}(c, d).$$

- Para $(a, b) = (0, 0)$.

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} D(\phi_{FB}^2(a, b)) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} 2\nabla^t \phi_{FB}(a, b) \cdot \phi_{FB}(a, b)$$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} 2 \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^t (a+b - \sqrt{a^2+b^2}).$$

Mas como o primeiro termo é limitado e o segundo é um infinitésimo, temos que

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} D(\phi_{FB}^2(a, b)) = 0.$$

Portanto, $D(\phi_{FB}^2(a, b))$ é contínua.

■

Corolário 2.2.6. *A função de mérito $\Psi_{FB}(x)$ é continuamente diferenciável.*

Prova 2.2.6. *De fato.*

$$\begin{aligned}\Psi_{FB}(x) &= \frac{1}{2} \|\Phi_{FB}(x)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_{FB}^2(x_i, F_i(x)).\end{aligned}$$

Como, cada F_i é continuamente diferenciável, e $\Psi(x)$ é soma de funções $\frac{1}{2}\phi_{FB}^2(a, b)$, o resultado segue imediatamente das Proposições 2.2.4 e 2.2.5. ■

A diferenciabilidade da função de mérito natural de Fischer-Burmeister torna possível o desenvolvimento de métodos para a resolução do *NCP*, com rápida convergência local e global [8, 16].

Uma propriedade desejada na aplicação destes métodos é que os conjuntos de nível sejam limitados. A hipótese necessária para que a função de mérito de Fischer-Burmeister tenha conjuntos de nível limitados é que a função F seja uma P -função uniforme (Proposição 2.5.5), a qual é restritiva desta maneira.

Algumas modificações foram então propostas no intuito de melhorar este condicionante, entre elas:

- Luo e Tseng [17]

$$\Psi_{LT} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ([-\phi_{FB}(x_i, F_i(x))]_+^2) + \frac{1}{2} [x^t F(x)]_+^2,$$

onde, $z_+ := \max\{0, z\}$, para $z \in \mathbb{R}$.

Esta função de mérito apresenta conjuntos de nível limitados para $NCP(F)$ monótonos com ponto factível estrito, isto é, $\bar{x} > 0$ e $F(\bar{x}) > 0$.

- Kanzow, Yamashita e Fukushima [13]

$$\Psi_{KYF}(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ([-\phi_{FB}(x_i, F_i(x))]_+^2 + [x_i F_i(x)]_+^2).$$

Esta função preserva a propriedade da função de Luo e Tseng, entretanto ambas as funções apresentam dificuldades algorítmicas devido a sua definição.

A função de Fischer-Burmeister tem boas propriedades para resolver o *NCP* como um sistema não suave de equações ou como um problema de otimização, onde pontos estacionários são equivalentes a soluções do *NCP*.

Na próxima sessão, estudaremos a função de Fischer-Burmeister Penalizada, que combina a atraente característica da função de mérito Ψ_{KYF} e da função de Fischer-Burmeister.

2.3 A Função de Fischer-Burmeister Penalizada

A função de Fischer-Burmeister Penalizada denotada por $\phi_\lambda(a, b)$ é uma combinação convexa da função de Fischer-Burmeister ϕ_{FB} com o termo a_+b_+ e é definida pela seguinte expressão,

$$\phi_\lambda(a, b) := \lambda\phi_{FB}(a, b) + (1 - \lambda)a_+b_+,$$

onde, $\lambda \in (0, 1]$ é um parâmetro fixo.

Claramente, quando λ se aproxima de 1, então ϕ_λ se aproxima da função de Fischer-Burmeister ϕ_{FB} .

Note que o termo a_+b_+ penaliza a condição de complementaridade no octante positivo, logo é intuitivo chamá-la de função de Fischer-Burmeister Penalizada.

O próximo resultado garante que a função $\phi_\lambda(a, b)$ é uma função-NCP.

Proposição 2.3.1. *A função de Fischer-Burmeister Penalizada ϕ_λ é uma função-NCP.*

Prova 2.3.1. *Primeiramente, vamos assumir que $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $ab = 0$.*

Logo,

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(a, b) &= \lambda\phi_{FB}(a, b) + (1 - \lambda)a_+b_+ \\ &= \lambda\phi_{FB}(a, b).\end{aligned}$$

Mas,

$$\phi_{FB}(a, b) = 0$$

pois, $\phi_{FB}(a, b)$ é uma função-NCP pela Proposição 2.2.3.

Portanto, $\phi_\lambda(a, b) = 0$.

Reciprocamente, assuma que $\phi_\lambda(a, b) = 0$.

Vamos provar primeiro que $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Suponha por contradição, sem perda de generalidade, que $a < 0$, logo

$$\phi_\lambda(a, b) = \lambda\phi_{FB}(a, b) + (1 - \lambda)a_+b_+$$

$$= \lambda\phi_{FB}(a, b)$$

E como $\phi_{FB}(a, b)$ é uma função-NCP, temos que,

$$\phi_\lambda \neq 0,$$

o que é uma contradição, pois havíamos suposto que $\phi_\lambda(a, b) = 0$.

Portanto, $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Provemos agora que, $ab = 0$.

$$\phi_\lambda(a, b) = 0$$

$$\underbrace{\lambda\phi_{FB}(a, b)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)a_+b_+}_{\geq 0} = 0.$$

Logo, $\phi_{FB}(a, b) = 0$ e como $\phi_{FB}(a, b)$ é uma função-NCP temos que

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ e } ab = 0.$$

Portanto, $\phi_\lambda(a, b)$ é uma função-NCP.

■

Analogamente às funções $\Phi_{FB}(x)$ e $\Psi_{FB}(x)$ podemos definir o sistema

$$\Phi_{\lambda}(x) := \begin{pmatrix} \phi_{\lambda}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \phi_{\lambda}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix} = 0,$$

e a função de mérito

$$\Psi_{\lambda}(x) = \frac{1}{2} \|\Phi_{\lambda}(x)\|^2.$$

Vamos definir agora uma função auxiliar que nos ajudará no manuseio da função de mérito $\Psi_{\lambda}(x)$.

Defina ψ_{λ} da seguinte maneira

$$\psi_{\lambda}(a, b) := \frac{1}{2} \phi_{\lambda}^2(a, b),$$

a qual, obviamente é uma função-NCP.

Assim, a função de mérito Ψ_{λ} pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda}(x) &= \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_{\lambda}^2(x_i, F_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \phi_{\lambda}^2(x_i, F_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_{\lambda}(x_i, F_i(x)). \end{aligned}$$

2.4 Propriedades das Funções ϕ_{λ} , ψ_{λ} e Ψ_{λ}

Faremos agora um estudo sobre as propriedades das funções ϕ_{λ} , ψ_{λ} e Ψ_{λ} . Para isto, comecemos definindo o seguinte conjunto:

$$N_{\phi} = \{(a, b) : a \geq 0, b \geq 0, e ab = 0\}.$$

Proposição 2.4.1. A função $\phi_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades

1. $\phi_\lambda(a, b) = 0 \Leftrightarrow (a, b) \in N_\phi$;
2. $\phi_\lambda(a, b)$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus N_\phi$;
3. Sejam $\{a^k\}, \{b^k\} \subset \mathbb{R}$, duas seqüências tais que, $a_+^k b_+^k \rightarrow \infty$, ou $a^k \rightarrow -\infty$, ou $b^k \rightarrow -\infty$. Então $|\phi_\lambda(a^k, b^k)| \rightarrow \infty$.

Prova 2.4.1. 1. O resultado segue imediatamente do fato de $\phi_\lambda(a, b)$ ser uma função-NCP.

2. O resultado segue imediatamente do fato que $\phi_\lambda(a, b)$ é uma combinação convexa de funções continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus N_\phi$.

3. Suponha primeiramente que $a_+^k b_+^k \rightarrow \infty$. Logo, existe um número $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k > k_0, a^k > 0 \text{ e } b^k > 0.$$

Assim, temos que

$$a^k + b^k - \sqrt{(a^k)^2 + (b^k)^2} > 0.$$

Mas como $a_+^k b_+^k \rightarrow \infty$ é claro que

$$|\phi_\lambda(a^k, b^k)| = |\lambda(a^k + b^k - \sqrt{(a^k)^2 + (b^k)^2}) + (1 - \lambda)a_+^k b_+^k| \rightarrow \infty.$$

Suponha agora que

$$a^k \rightarrow -\infty.$$

Logo,

$$b^k - \sqrt{(a^k)^2 + (b^k)^2} \rightarrow -\infty$$

e

$$a_+^k b_+^k \rightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$\phi_\lambda(a^k, b^k) \rightarrow -\infty.$$

E, portanto

$$|\phi_\lambda(a^k, b^k)| \rightarrow \infty.$$

Analogamente, se supormos $b^k \rightarrow -\infty$, tem-se $|\phi_\lambda(a^k, b^k)| \rightarrow \infty$.

■

O próximo resultado mostra que a função $\psi_\lambda(a, b)$ é continuamente diferenciável.

Proposição 2.4.2. *A função ψ_λ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$.*

Prova 2.4.2.

$$\psi_\lambda(a, b) = \frac{1}{2} \phi_\lambda^2(a, b)$$

$$= \frac{1}{2} [\lambda(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) + (1 - \lambda)a_+ b_+]^2$$

$$= \frac{1}{2} [\lambda^2 \phi_{FB}^2(a, b) + 2\lambda(1 - \lambda) \phi_{FB}(a, b) a_+ b_+ + (a_+ b_+)^2]$$

Portanto, basta provar que $\phi_{FB}^2(a, b)$, $\phi_{FB}(a, b) a_+ b_+$ e $a_+^2 b_+^2$ são continuamente diferenciáveis.

De fato.

- $\phi_{FB}^2(a, b)$ é continuamente diferenciável pelas Proposições 2.2.4 e 2.2.5.
- $\phi_{FB}(a, b) a_+ b_+$ é continuamente diferenciável, pois $\phi_{FB}(a, b) a_+ b_+$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial \phi_{FB}(a, b) a_+ b_+}{\partial a} = \frac{\partial \phi_{FB}}{\partial a}(a, b) a_+ b_+ + a'_+ b_+ \phi_{FB}(a, b)$$

$$= \begin{cases} (0, 0), & \text{se } a = 0 \\ \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) a_+ b_+ + a'_+ b_+ \phi_{FB}(a, b) & \text{c.c.} \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial \phi_{FB}(a, b) a_+ b_+}{\partial b} = \frac{\partial \phi_{FB}}{\partial b}(a, b) a_+ b_+ + b'_+ a_+ \phi_{FB}(a, b)$$

$$= \begin{cases} (0, 0), & \text{se } b = 0 \\ \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) a_+ b_+ + b'_+ a_+ \phi_{FB}(a, b) & \text{c.c.} \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $\phi_{FB}(a, b) a_+ b_+$ é continuamente diferenciável.

- $f(a, b) = a_+^2 b_+^2$ é continuamente diferenciável, pois f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 2a_+ b_+^2 \cdot a'_+$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq 0 \\ 2ab_+^2, & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 2b_+ a_+^2 \cdot b'_+$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } b \leq 0 \\ 2ba_+^2, & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$. Portanto, f é continuamente diferenciável. Portanto, $\psi_\lambda(a, b)$ é continuamente diferenciável.

■

Corolário 2.4.3. A função $\Psi_\lambda(x)$ é continuamente diferenciável.

Prova 2.4.3. O resultado segue do fato de que F é de classe C^1 e $\Psi_\lambda(x)$ é soma de funções continuamente diferenciáveis.

■

As propriedades a seguir são cruciais para podermos estudar as propriedades de um ponto estacionário de $\Psi_\lambda(x)$.

Proposição 2.4.4. As seguintes sentenças são verdadeiras para ψ_λ

1. $\psi_\lambda(a, b) = 0 \Leftrightarrow \nabla \psi_\lambda(a, b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(a, b) = 0$;
2. $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) \cdot \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(a, b) \geq 0$.

Prova 2.4.4. De fato.

1. Se $\psi_\lambda(a, b) = 0$, então (a, b) é um mínimo global da função $\psi_\lambda(a, b)$.

Logo, pelas condições necessárias de otimalidade em minimização irrestrita e pela Proposição 2.4.2, temos que $\nabla \psi_\lambda(a, b) = (0, 0)$. Consequentemente, se (a, b) é um ponto estacionário, então é claro que suas derivadas parciais têm valor nulo em (a, b) . Assim somente falta provar a implicação

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) = 0 \Rightarrow \psi_\lambda(a, b) = 0,$$

Em vista da Proposição 2.4.2, nós podemos assumir que $a \neq 0$.

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) &= \phi_\lambda(a, b) \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a}(a, b) \\ &= \phi_\lambda(a, b) \left[\lambda \left(1 - \frac{a}{\|(a, b)\|} \right) + (1 - \lambda) b_+ q(a) \right]. \end{aligned}$$

onde

$$q(a) := \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0 \\ 1, & \text{se } a > 0 \end{cases}$$



Logo, temos que, ou $\phi_\lambda(a, b) = 0$ ou $\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a}(a, b) = 0$.

Se $\phi_\lambda(a, b) = 0$, então o resultado está provado.

Assuma então que $\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a}(a, b) = 0$. Como $b + q(a) \geq 0$, temos que

$$1 - \frac{a}{\|(a, b)\|} \leq 0.$$

Mas

$$\left| \frac{a}{\|(a, b)\|} \right| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{|a|}{\sqrt{a^2}} = \frac{|a|}{|a|} = 1.$$

Logo

$$1 - \frac{a}{\|(a, b)\|} = 0.$$

Entretanto

$$1 - \frac{a}{\|(a, b)\|} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 0.$$

Mas isto implica que $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $ab = 0$, o que faz com que $\phi_\lambda(a, b) = 0$, provando assim o item 1.

2. Em vista da Proposição 2.4.2 o resultado fica claro se $a = 0$. Com isso, assumamos que $a \neq 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) &= \phi_\lambda(a, b) \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a}(a, b) \\ &= \phi_\lambda(a, b) \left[\underbrace{\lambda \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)b + q(a)}_{\geq 0} \right]. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(a, b) = \phi_\lambda(a, b) \left[\underbrace{\lambda \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)a + q(b)}_{\geq 0} \right].$$

Assim,

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(a, b) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(a, b) = \phi_\lambda^2(a, b) \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a}(a, b) \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial b}(a, b) \geq 0.$$

■

O próximo teorema nos dá uma condição para um ponto estacionário ser uma solução do $NCP(F)$.

Teorema 2.4.5. *Assuma que x^* é um ponto estacionário de Ψ_λ tal que o Jacobiano $F'(x^*)$ seja uma P_0 -matriz. Então x^* é uma solução do $NCP(F)$.*

Prova 2.4.5. *Note que,*

$$\Psi_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \psi_\lambda(x_i, F_i(x)).$$

Note também que,

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_2}$$

⋮

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_i}$$

⋮

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_n} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Logo,

$$\nabla \Psi_\lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \frac{\partial F_2}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{(F')^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_1} \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial F_n} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}}.$$

Agora, como $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto estacionário de Ψ_λ temos que

$$0 = \nabla \Psi(x^*) = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(x^*, F(x^*)) + F'(x^*)^t \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*)). \quad (2.8)$$

Analisando, cada componente de (2.8), temos que

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(x_i^*, F_i(x^*)) + [F'(x^*)^t \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*))]_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Pré-multiplicando a i -ésima equação por $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_i^*, F_i(x^*))$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_i^*, F_i(x^*)) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(x_i^*, F_i(x^*)) + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_i^*, F_i(x^*)) \\ & \times \left[F'(x^*)^t \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*)) \right]_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assuma agora que $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*)) \neq 0$. Por hipótese $F'(x^*)$ e, portanto, $F'(x^*)^t$ é uma P_0 -matriz. Assim, existe um índice i_0 tal que $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) \neq 0$ e

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) [F'(x^*)^t \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*))]_{i_0} \geq 0. \quad (2.10)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) \geq 0 \quad (2.11)$$

pela Proposição 2.4.4 item 2. E em vista da Proposição 2.4.4 item 1, (2.9) - (2.11), nós obtemos

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) = 0.$$

Pela Proposição 2.4.4 item 1

$$\psi_\lambda(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) = 0,$$

o que novamente pela Proposição 2.4.4 item 1 implica que $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x_{i_0}^*, F_{i_0}(x^*)) = 0$, que contradiz a escolha do índice i_0 . Logo, $\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b}(x^*, F(x^*)) = 0$, o que novamente pela Proposição 2.4.4 item 1, implica que $\Psi_\lambda(x) = 0$ que nos dá que x^* é uma solução do $NCP(F)$. ■

Teorema 2.4.6. *Seja F uma P_0 -função diferenciável e x^* um ponto estacionário de Ψ_λ . Então x^* é uma solução do $NCP(F)$.*

Prova 2.4.6. *O resultado segue do fato de que se F é uma P_0 -função diferenciável, então sua matriz Jacobiana $F'(x)$ é uma P_0 -matriz e do Teorema 2.4.5.*



2.5 Conjuntos de Nível

Nesta sessão apresentaremos definições e resultados sobre conjuntos de nível, os quais são de extrema importância, pois quando limitados garantem a existência de pontos limites para as sequências geradas pelos métodos de resolução do $NCP(F)$.

Definição 2.5.1. Definimos o conjunto de nível c e denotamos por $\mathcal{L}(c)$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi_\lambda(x) \leq c\}.$$

Definição 2.5.2. Definimos o conjunto de nível factível e denotamos por $\mathcal{L}(c, \mathcal{F})$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}(c, \mathcal{F}) := \{x \in \mathcal{F} : \Psi_\lambda(x) \leq c\},$$

onde o conjunto $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ e } F(x) \geq 0\},$$

denota o conjunto factível do problema de complementaridade não-linear $NCP(F)$.

Vejamos agora resultados que garantem a limitação dos conjuntos de nível $\mathcal{L}(c)$.

Proposição 2.5.1. As seguintes sentenças são verdadeiras.

1. Se $\mathcal{L}_{FB}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi_{FB}(x) \leq c\}$ é limitado para algum $c \geq 0$, então $\mathcal{L}(c')$ é limitado para $c' = \lambda^2 c$;
2. Se $L := \{x \in \mathcal{F} : x^t F(x) \leq c\}$ é limitado para algum $c \geq 0$, então $\mathcal{L}(c, \mathcal{F})$ é limitado para $c' = \frac{(1-\lambda)^2 c^2}{2n}$.

Prova 2.5.1. 1. Por definição temos que

$$\begin{aligned}
\Psi_\lambda(x) &= \frac{1}{2} \|\text{vec}\{\lambda\phi_{FB}(x_i, F_i(x)) + (1 - \lambda)[x_i]_+[F_i(x)]_+]\}\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \lambda^2 \|\Phi_{FB}(x)\|^2 \\
&= \lambda^2 \Psi_{FB}(x).
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Logo,

$$\lambda^2 \Psi_{FB}(x) \leq \Psi_\lambda(x). \tag{2.12}$$

Assim, para todo $x \in \mathcal{L}(c')$, temos que

$$\Psi_\lambda(x) \leq \lambda^2 c. \tag{2.13}$$

Mas, por (2.12) e (2.13), vemos que

$$\lambda^2 \Psi_{FB}(x) \leq \Psi_\lambda(x) \leq \lambda^2 c.$$

Assim, dividindo por λ^2 obtemos

$$\Psi_{FB}(x) \leq c.$$

Portanto, $x \in \mathcal{L}_{FB}(c)$ e como $\mathcal{L}_{FB}(c)$ é limitado o resultado fica claro.

2. Como ϕ_{FB} é não-negativa em $\mathcal{F}$, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi_\lambda(x) &= \frac{1}{2} \|\text{vec}\{\lambda\phi_{FB}(x_i, F_i(x)) + (1 - \lambda)x_i F_i(x)\}\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} (1 - \lambda)^2 \|\text{vec}\{x_i F_i(x)\}\|^2
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{(1-\lambda)^2}{2n} (x^t F(x))^2$$

onde, a segunda desigualdade, segue do fato que $\|z\|_1 \leq \sqrt{n}\|z\|$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

Logo,

$$\frac{(1-\lambda)^2}{2n} (x^t F(x))^2 \leq \Psi_\lambda(x). \quad (2.14)$$

Assim, para todo $x \in \mathcal{L}(c', \mathcal{F})$, temos que

$$\Psi_\lambda(x) \leq \frac{(1-\lambda)^2}{2n} c^2, \quad (2.15)$$

Mas, por (2.14) e (2.15), vem que

$$\frac{(1-\lambda)^2}{2n} (x^t F(x))^2 \leq \Psi_\lambda(x) \leq \frac{(1-\lambda)^2}{2n} c^2. \quad (2.16)$$

Consequentemente, dividindo-se por $\frac{(1-\lambda)^2}{2n}$, obtemos

$$(x^t F(x))^2 \leq c^2$$

$$x^t F(x) \leq c.$$

Portanto, $x \in L$ e como L é limitado por hipótese o resultado fica claro.

Lema 2.5.2. *Seja F uma P_0 -função continuamente diferenciável e suponha que o conjunto solução do $NCP(F)$ seja não vazio e limitado. Então os conjuntos de nível*

$$\mathcal{L}_{FB}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi_{FB}(x) \leq c\}, \quad (2.17)$$

são limitados para todo c positivo suficientemente pequeno.

Prova 2.5.2. *Veja [7] Lema 4.3.*



Corolário 2.5.3. *Seja F uma P_0 -função continuamente diferenciável e suponha que o conjunto solução do $NCP(F)$ seja não vazio e limitado. Então as curvas de nível $\mathcal{L}(c)$ são limitadas para todo c suficientemente pequeno.*

Prova 2.5.3. *De fato.*

O resultado se comprova imediatamente da aplicação do Lema 2.5.2 e da Proposição 2.5.1 item 1.

Corolário 2.5.4. *Seja F uma função afim. Se o conjunto solução do $NCP(F)$ é limitado, então $\mathcal{L}(c, F)$ é limitado para todo $c > 0$.*

Prova 2.5.4. *Se o conjunto solução do $NCP(F)$ é limitado, então o conjunto*

$$\{x \in \mathcal{F} : x^t F(x) \leq c\},$$

é limitado para todo $c > 0$.

Logo, o resultado segue da Proposição 2.5.1 item 2.

Proposição 2.5.5. *Suponha que F é uma P -função uniforme. Então o conjunto de nível $\mathcal{L}_{FB}(c')$ é limitado.*

Prova 2.5.5. *Assuma que exista uma sequência $\{x^k\}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \infty$$

e

$$\Psi(x^k) \leq \Psi(x_0). \quad (2.17)$$

Defina o conjunto de índices $J = \{i : \{x_i^k\} \text{ seja ilimitado}\}$.

Como $\{x^k\}$ é ilimitada, $J \neq \emptyset$.

Tome $\{z^k\}$ uma sequência limitada definida da seguinte forma

$$z^k = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in J, \\ x_i^k & \text{se } i \notin J. \end{cases}$$

Da definição de $\{z^k\}$ e da hipótese sobre F , temos que

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i \in J} (x_i^k)^2 &= \mu \|x^k - z^k\|^2 \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i^k - z_i^k)(F_i(x^k) - F_i(z^k)) \\ &= \max_{i \in J} x_i^k (F_i(x^k) - F_i(z^k)) \\ &= x_j^k (F_j(x^k) - F_j(z^k)) \\ &= |x_j^k| |F_j(x^k) - F_j(z^k)|, \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde μ é a constante positiva da definição de P -função uniforme e j é um dos índices para o qual o máximo é atingido e o qual sem perda de generalidade, assumimos ser independente de k . Como $j \in J$, nós podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\{|x_j^k|\} \rightarrow \infty. \tag{2.19}$$

Dividindo por $|x_j^k|$, de (2.18) temos que

$$\mu |x_j^k| \leq |F_j(x^k) - F_j(z^k)|.$$

Assim, como $F_j(z^k)$ é limitado, implica que

$$\{|F_j(x^k)|\} \rightarrow \infty. \tag{2.20}$$

Logo, de (2.19) e (2.20) temos que

$$|\phi_{FB}(x_j^k, F_j(x^k))| \rightarrow \infty,$$

o que contradiz (2.17). ■

Daremos agora uma condição para que o conjunto $\mathcal{L}(c)$ seja limitado para todo $c \geq 0$.

Condição 2.5.1. *Toda sequência $\{x^k\}$ tal que*

$$\|x^k\| \rightarrow \infty, [-x^k]_+ < \infty \text{ e } [-F(x^k)]_+ < \infty,$$

e que se cumpra

$$\max_i [x_i^k]_+ + [F_i(x^k)]_+ \rightarrow \infty.$$

Teorema 2.5.6. *Se a função F satisfaz a Condição 2.5.1, então os conjuntos de nível $\mathcal{L}(c)$ são limitados para todo $c \geq 0$.*

Prova 2.5.6. *De fato.*

Assuma que exista uma sequência ilimitada $\{x^k\} \subseteq \mathcal{L}(c)$ para algum $c \geq 0$. Como $\Psi_\lambda(x^k) \leq c$ para todo $k \geq 0$, a sequência $\{\Psi_{FB}(x^k)\}$ é também limitada pela demonstração da Proposição 2.5.1. Logo não existe um índice i tal que $x_i^k \rightarrow -\infty$ ou $F_i(x^k) \rightarrow -\infty$. Como F satisfaz a condição anterior, existe pelo menos um índice j fixo em uma subsequência tal que $[x_j^k]_+ + [F_j(x^k)]_+ \rightarrow \infty$.

Contudo, isto implica que $\Psi_\lambda(x^k)$ é ilimitada, o que contradiz a hipótese. ■

Para a função de Fischer-Burmeister e outras propostas a hipótese para se ter conjuntos de nível limitados é que a função F seja uma P -função uniforme. O próximo teorema garante que se F é uma P -função uniforme então a Condição 2.5.1 é satisfeita.

Teorema 2.5.7. *Seja F uma P -função uniforme, então dada uma sequência $\{x^k\}$ tal que*

$$\|x^k\| \rightarrow \infty, [-x^k]_+ < \infty \text{ e } [-F(x^k)]_+ < \infty.$$

Então

$$\max_i [x_i^k]_+ [F_i(x^k)]_+ \rightarrow \infty.$$

Prova 2.5.7. Como F é uma P -função uniforme sabemos que

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i^k [F_i(x^k) - F_i(0)] \geq \mu \|x^k\|^2.$$

Como $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que existe um índice j fixo e $K \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i^k [F_i(x^k) - F_i(0)] = x_j^k [F_j(x^k) - F_j(0)], \quad \forall k \in K.$$

Logo

$$x_j^k [F_j(x^k) - F_j(0)] \geq \mu \|x^k\|^2.$$

Dividindo por $\|x^k\|$, temos que

$$\frac{x_j^k}{\|x^k\|} [F_j(x^k) - F_j(0)] \geq \mu \|x^k\|.$$

Claramente, como $\|x^k\| \rightarrow \infty$ e $\frac{x_j^k}{\|x^k\|}$ é limitado, temos que

$$|F_j(x^k)| \rightarrow \infty.$$

Assim, como $|F_j(x^k)| \rightarrow \infty$ e por hipótese, $[-F(x^k)]_+ < \infty$ temos que

$$F_j(x^k) \rightarrow \infty$$

Logo, existe k_0 tal que $\frac{x_j^k}{\|x^k\|} \geq 0 \quad \forall k \geq k_0$.

Contudo, $[x_j^k]_+ = x_j^k$, então

$$x_j^k [F(x^k) - F(0)]_j \geq \mu \|x^k\|^2.$$

Portanto,

$$[x_j^k]_+ [F_j(x^k)]_+ \rightarrow \infty.$$



Um exemplo onde esta condição se cumpre mas a função não é uma P -função uniforme é o seguinte. Tome a função $F(x) = 1$ e a sequência $\{x_k\} = k$. Esta sequência cumpre a condição mas a função não é uma P -função uniforme e de fato neste caso para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Psi_{FB}(x^k) &= (F(x_k) + x_k - \sqrt{F(x_k)^2 + x_k^2})^2 \\ &= (1 + k - \sqrt{1 + k^2})^2 \\ &= \left(\frac{(1 + k)^2 - (1 + k^2)}{1 + k + \sqrt{1 + k^2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\frac{1}{k} + 1 + \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} \right)^2 \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}_{FB}(1)$ é ilimitado.

Isto mostra que para conjuntos de nível a função de Fischer-Burmeister Penalizada é melhor do que a função de Fischer-Burmeister.

O próximo teorema mostra que $\sqrt{\Psi_\lambda}$ fornece um limite para o erro global para um problema de complementaridade com uma P -função uniforme.

Teorema 2.5.8. *Se F é uma P -função, então existe uma constante $\tau > 0$ tal que*

$$\|x - x^*\| \leq \tau \Psi_\lambda(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde x^* é a única solução do $NCP(F)$.

Prova 2.5.8. *De fato. Chen, mostrou em [3] que $(\|\min\{x, F(x)\}\| + [x]_+^t [F(x)]_+)$ é um limite para o erro global para o $NCP(F)$ com F sendo uma P -função uniforme.*

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
\|x - x^*\| &\leq \tau_1(\|\min\{x, F(x)\}\| + [x]_+^t[F(x)]_+)^2 \\
&\leq \tau_2(\|\min\{x, F(x)\}\|_1 + [x]_+^t[F(x)]_+)^2 \\
&= \tau_2\|\min\{x, F(x)\} + \text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|_1^2 \\
&\leq \tau_3\|\min\{x, F(x)\} + \text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|^2 \\
&= \tau_3(\|\min\{x, F(x)\}\|^2 + \|\text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|^2) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^n |\min\{x_i, F_i(x)\}|[x]_+[F_i(x)]_+ \\
&\leq \tau_3(c^2\|\Phi_{FB}(x)\|^2 + \|\text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|^2) + 2c \sum_{i=1}^n |\phi_{FB}(x_i, F_i(x))|[x]_+[F_i(x)]_+ \\
&= \tau_3(\|c\Phi_{FB}(x) + \text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|^2) \\
&\leq \tau(\frac{1}{2}\|\lambda\Phi_{FB}(x) + (1-\lambda)\text{vec}\{[x]_+[F_i(x)]_+\}\|^2) \\
&= \tau\Psi_\lambda(x),
\end{aligned}$$

onde a segunda e a terceira inequações seguem da equivalência das normas, a quarta inequação segue do Lema 3.1 em [25] com $c > 0$ sendo uma contante. $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau$ são constantes positivas apropriadas que dependem da dimensão n , e τ também depende de λ .

■

Proposição 2.5.9. Se F é uma P_0 -função e o $NCP(F)$ tem um conjunto solução não vazio e limitado, então existe um ponto factível estrito para o $NCP(F)$.

Prova 2.5.9. De fato. Para um parâmetro $u > 0$ fixo, defina

$$\phi_{FB}(a, b; u) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2u}$$

e

$$\Phi_{FB}(x; u) := \text{vec}\{\phi_{FB}(x_i, F_i(x); u)\}.$$

Note que, para $u = 0$, $\phi_{FB}(a, b; u)$ e $\Phi_{FB}(x; u)$ se reduzem as funções $\phi_{FB}(a, b)$ e $\Phi_{FB}(x)$ respectivamente, e têm a seguinte propriedade

$$\phi_{FB}(a, b; u) = 0 \Leftrightarrow a > 0, \quad b > 0, \quad ab = u,$$

portanto

$$\Phi_{FB}(x; u) = 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad F(x) > 0, \quad x_i F_i(x) = u \quad \forall i.$$

Pelo Lema 2.5.2, o conjunto de nível

$$\mathcal{L}_{FB}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\Phi_{FB}(x)\| \leq c\}$$

são não vazios e limitados para $c > 0$ suficientemente pequeno. Nós queremos mostrar que isto implica na compacidade do conjunto de nível

$$\mathcal{L}_{FB}(c/2; u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Phi_{FB}(x; u)\| \leq c/2\}$$

para $u > 0$ suficientemente pequeno.

Para isto, primeiro observamos a seguinte relação para todo $u > 0$, veja [11]

$$\|\Phi_{FB}(x) - \Phi_{FB}(x; u)\| \leq k\sqrt{u}, \quad (2.21)$$

onde $k := \sqrt{2n}$.

Tome

$$u := (c/(2k))^2 > 0$$

então, para todo $x \in \mathcal{L}_{FB}(c/2; u)$, nós temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi_{FB}(x)\| &\leq \|\Phi_{FB}(x) - \Phi_{FB}(x; u)\| + \|\Phi_{FB}(x; u)\| \\ &\leq k\sqrt{u} + c/2 \\ &= c. \end{aligned}$$

Consequentemente, $x \in \mathcal{L}_{FB}(c)$ implica que $\mathcal{L}(c/2; u)$ é compacto. Além disso, para toda solução x^* do $NCP(F)$, temos que

$$\|\Phi_{FB}(x^*; u)\| \leq \|\Phi_{FB}(x^*) - \Phi_{FB}(x^*; u)\| + \|\Phi_{FB}(x^*)\| \leq k\sqrt{u} = c/2.$$

Isto implica que o conjunto de nível $\mathcal{L}_{FB}(c/2; u)$ é não vazio, pois o conjunto solução do $NCP(F)$, que é não vazio por hipótese, pertence ao conjunto de nível.

A aplicação contínua $\|\Phi_{FB}(\cdot; u)\|$ portanto, atinge um mínimo global x_u o qual obviamente também é um mínimo global da correspondente função de mérito

$$\Psi_{FB}(x; u) := \frac{1}{2} \Phi_{FB}(x; u)^t \Phi_{FB}(x; u).$$

Logo, x_u é um ponto estacionário desta função de mérito. Como F é uma P_0 -função por hipótese, segue de [12] que x_u é uma solução do sistema e equações não-lineares

$$\Phi_{FB}(x;u)=0.$$

Em particular, x_u satisfaz a condição $x_u > 0$ e $F(x_u) > 0$. Logo, x_u é um ponto factível estrito para o $NCP(F)$. ■

O Problema de Inequações Variacionais com Restrições de Caixa, $VIP(F, \Omega)$

3.1 Introdução

Existem dois formalismos para a formulação de Inequações Variacionais. Neste capítulo vamos tratar de uma generalização do problema de Complementaridade Não Linear, o Problema de Inequações Variacionais com restrições de caixa, no qual são adicionadas apenas as VIP -ness. Analogamente ao $NCP(F)$ fazemos uma reformulação de VIP -ness para obtenção de um sistema de equações não-lineares equivalentes. Definições e resultados serão apresentados.

3.2 Formulação do VIP -ness

O Problema de Inequações Variacionais pode ser escrito da seguinte forma:

Definição 3.2.1. Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^2 e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. O Problema de Inequações Variacionais definido por $VIP(F, \Omega)$ consiste em encontrar $x^* \in \Omega$ tal que

$$F(x^*) \cdot x^* \geq 0, \quad \forall x^* \in \Omega.$$

Neste capítulo vamos estudar como o conjunto Ω aparece nas restrições de caixa.



Capítulo 3

O Problema de Inequações Variacionais com Restrições de Caixa, $VIP(F, l, u)$

3.1 Introdução

Problemas de Complementaridade são casos especiais de Inequações Variacionais. Neste capítulo iremos tratar de uma generalização do Problema de Complementaridade Não linear, o Problema de Inequações Variacionais com restrições do tipo caixa, ao qual nos referiremos apenas por *VIP-caixa*. Analogamente ao $NCP(F)$ faremos uma reformulação do *VIP-caixa* para obtermos um problema de otimização irrestrita equivalente. Definições e resultados teóricos serão apresentados.

3.2 Formulação do *VIP-caixa*

O Problema de Inequações Variacionais geral é definido da seguinte forma.

Definição 3.2.1. *Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, O Problema de Inequações Variacionais, denotado por $VIP(F, \Omega)$ consiste em encontrar $x^* \in \Omega$ tal que*

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Neste capítulo iremos admitir como conjunto Ω apenas “caixas” contidas no $\mathbb{R}^n$,



ou seja, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$, onde l e u são vetores no $\mathbb{R}^n$ e $-\infty$ e ∞ , são valores admissíveis para l_i e u_i , respectivamente, $i = 1, \dots, n$.

A partir de agora usaremos a notação $VIP(F, l, u)$ para denotar o Problema de Inequações Variacionais com restrições do tipo caixa e vamos supor que o $VIP(F, l, u)$ admite pelo menos uma solução.

Note que.

1. Se todos os limites são infinitos, ou seja, $l_i = -\infty$ e $u_i = \infty$ para todo i , $i = 1, \dots, n$, então o $VIP(F, l, u) = VIP(F, \mathbb{R}^n)$, que é equivalente ao problema de encontrar uma solução para o sistema $F(x) = 0$.
2. Se $l_i = 0$ e $u_i = \infty$ para todo i , $i = 1, \dots, n$, então o $VIP(F, l, u) = VIP(F, \mathbb{R}_+^n)$, que é equivalente ao Problema de Complementaridade Não Linear, $NCP(F)$.

As justificativas para as observações anteriores seguem abaixo.

1. Se $l_i = -\infty$ e $u_i = \infty$ para todo i , $i = 1, \dots, n$, então $y := x - x^*$ pode ser qualquer vetor do $\mathbb{R}^n$. Logo

$$\langle F(x^*), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

o que implica que $F(x^*) = 0$.

A recíproca é trivial.

2. Primeiramente, se x^* é solução do $VIP(F, \mathbb{R}_+^n)$, então

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Logo, pela factibilidade de x^* temos que $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ e portanto $x^* \geq 0$.

Suponha agora que exista um índice i , $i \in I = \{1, \dots, n\}$ tal que $F_i(x^*) < 0$.

Tome $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$ da seguinte forma



$$\bar{x} := x^* + e_i,$$

onde e_i é a i -ésima coluna da matriz identidade ordem n .

Assim, como havíamos suposto inicialmente que x^* é solução do $VIP(F, \mathbb{R}_+^n)$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$, temos que

$$\langle F(x^*), \bar{x} - x^* \rangle = \langle F(x^*), x^* + e_i - x^* \rangle.$$

$$= \langle F(x^*), e_i \rangle$$

$$F_i(x^*) < 0.$$

Absurdo, pois x^* é solução do $VIP(F, l, u)$. Portanto, $F(x^*) \geq 0$.

Mostremos agora que

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0.$$

Com efeito.

Como x^* é solução do $VIP(F, \mathbb{R}_+^n)$, temos que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Logo,

$$\langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\langle F(x^*), x \rangle \geq \langle F(x^*), x^* \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Como $0 \in \mathbb{R}_+^n$, temos que



$$\langle F(x^*), x^* \rangle \leq 0. \quad (3.1)$$

Mas, $x^* \geq 0$ e $F(x^*) \geq 0$, logo

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0. \quad (3.2)$$

Portanto de (3.1) e (3.2) $\langle F(x^*), x^* \rangle = 0$.

Reciprocamente, para todo x^* solução do $NCP(F)$, temos que

$$x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0 \quad e \quad \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \leq \langle F(x^*), x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

$$0 \leq \langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Portanto, x^* é solução do $VIP(F, \mathbb{R}_+^n)$.

O Problema de Inequações Variacionais não é um problema de otimização, entretanto a cada $VIP(F, \Omega)$ está associado um problema de otimização linear teórico da forma

$$\min \langle F(x^*), x \rangle \quad (3.3)$$

$$s.a. \quad x \in \Omega.$$

O próximo resultado mostra a equivalência do $VIP(F, \Omega)$ com o problema de minimização (3.3).

Teorema 3.2.1. *Um ponto $x^* \in \Omega$ é uma solução do $VIP(F, \Omega)$ se, e somente se, x^* é um minimizador global do problema (3.3).*

Prova 3.2.1. *Primeiramente, vamos admitir que x^* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$, logo*

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim,

$$\langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\langle F(x^*), x \rangle \geq \langle F(x^*), x^* \rangle \quad \forall x \in \Omega.$$

Logo, pela definição de minimizador global, temos que x^ é solução do problema (3.3).*

Reciprocamente, se x^ é um minimizador global de (3.3), então*

$$\langle F(x^*), x \rangle \geq \langle F(x^*), x^* \rangle \quad \forall x \in \Omega$$

$$\langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto, x^ é solução do $VIP(F, \Omega)$.*

■

Começaremos agora a reformulação do $VIP(F, l, u)$ como um problema de otimização prático. Para isto utilizaremos a estrutura especial das restrições do tipo caixa.

Como visto anteriormente, o $VIP(F, l, u)$ consiste em, dada uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$, encontrar x^* pertencente a caixa, tal que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x, \quad l \leq x \leq u.$$

Primeiramente, vamos escrever o conjunto factível do $VIP(F, l, u)$ da seguinte maneira.

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : l_i \leq x_i \leq u_i \ (i \in I_{lu}), \ l_i \leq x_i \ (i \in I_l), \ x_i \leq u_i \ (i \in I_u)\},$$

onde I_{lu} , I_l e I_u são subconjuntos disjuntos de $I = \{1, \dots, n\}$, os quais correspondem as variáveis com limites inferiores e superiores, somente limites inferiores e somente limites superiores, respectivamente.

Iremos assumir que todos os limites são finitos, ou seja, $-\infty < l_i$ e $u_i < \infty$ para $i \in I_{lu} \cup I_l \cup I_u$.

Vamos denotar por I_f o conjunto de índices das variáveis livres, ou seja, as variáveis sem limites inferiores e nem superiores.

Note que

$$I_f := I \setminus (I_{lu} \cup I_l \cup I_u).$$

Denote por $I_{\bar{f}}$ o complemento de I_f no conjunto I , logo

$$I_{\bar{f}} := I \setminus I_f = I_{lu} \cup I_l \cup I_u$$

A partir dessa notação podemos escrever o conjunto Ω da seguinte forma

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} l_i \leq x_i & i \in I_l \\ l_i \leq x_i \leq u_i & i \in I_{lu} \\ x_i \leq u_i & i \in I_u \\ x_i \text{ livre} & i \in I_f \end{array} \right\}.$$

Agora, valendo-se da estrutura de Ω , vamos reformulá-lo como a não negatividade de uma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $m := 2|I_{lu}| + |I_l| + |I_u|$, onde g é definida da seguinte maneira.

$$g(x) := \begin{pmatrix} x_i - l_i & (i \in I_{lu}) \\ u_i - x_i & (i \in I_{lu}) \\ x_i - l_i & (i \in I_l) \\ u_i - x_i & (i \in I_u) \end{pmatrix}.$$

É claro que um ponto $x \in \Omega$ se, e somente se, $g(x) \geq 0$, ou seja,

$$\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}.$$

A título de não sobrecarregar a notação vamos assumir que o vetor variável x e o operador F estão ordenados como a seguir

$$x = (x_f, x_{lu}, x_l, x_u) \quad e \quad F = (F_f, F_{lu}, F_l, F_u),$$

onde x_f representa x_{I_f} e assim sucessivamente.

Fazendo uso desta notação é fácil ver que $\nabla g(x)$ é uma matriz $n \times m$, independente da variável x dada por

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{lu} & -E_{lu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_u \end{pmatrix}.$$

Onde as submatrizes E 's indicam matrizes identidades cujas dimensões são compatíveis e $\nabla g(x)$ denota o Jacobiano transposto.

Levando-se em conta o Teorema 3.2.1 e a nova representação do conjunto Ω obtemos o seguinte problema de otimização equivalente ao $VIP(F, l, u)$

$$\min \langle F(x^*), x \rangle \tag{3.4}$$

$$s.a. \quad g(x) \geq 0.$$

Assim, podemos estabelecer as condições de KKT para o Problema 3.4 que são dadas por

$$\begin{aligned} F(x) - \nabla g(x)z &= 0 \\ z^t g(x) &= 0 \\ z &\geq 0, \quad g(x) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Iremos nos referir ao sistema (3.5) apenas como condições de KKT do $VIP(F, l, u)$.



O próximo resultado ressalta que as condições de KKT acima são totalmente equivalentes ao problema original $VIP(F, l, u)$ no sentido que um ponto x^* é uma solução do $VIP(F, l, u)$ se, e somente se, existe um vetor $z^* \in \mathbb{R}^n$ tal que (x^*, z^*) satisfaz o sistema (3.5).

Teorema 3.2.2. *Um ponto x^* é uma solução do $VIP(F, l, u)$ se, e somente se, existe um vetor $z^* \in \mathbb{R}^m$ tal que (x^*, z^*) é solução de (3.5).*

Prova 3.2.2. *Pela convexidade do problema (3.4) temos que as condições de KKT (necessárias de primeira ordem) são também suficientes, caracterizando assim, a total equivalência entre o problema (3.4) e o sistema (3.5). Portanto, pelo Teorema 3.2.1 o resultado fica claro.*

Analisando o sistema KKT (3.5) podemos observar que as duas últimas condições nada mais são do que um problema de complementaridade não linear. Vamos então nos beneficiar da reformulação feita no capítulo anterior utilizando a função de Fischer-Burmeister Penalizada para reformular as condições de KKT (3.5) como um sistema não linear homogêneo $\Phi_\lambda(w) = 0$. Logo

$$\Phi_\lambda(w) := \begin{pmatrix} F(x) - \nabla g(x)z \\ \phi_\lambda(g_1(x), z_1) \\ \vdots \\ \phi_\lambda(g_m(x), z_m) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

e $w = (x, z) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Associado ao sistema (3.6) está a função de mérito natural $\Psi_\lambda(w)$, definida por

$$\Psi_\lambda(w) := \frac{1}{2} \|\Phi(w)\|^2.$$

O próximo resultado evidencia a equivalência entre soluções do $VIP(F, l, u)$ e os minimizadores globais de Ψ_λ .

Teorema 3.2.3. *Um ponto $w^* \in \mathbb{R}^{n+m}$ é uma solução do sistema (3.5) se, e somente se, w^* é um minimizador global de Ψ_λ com valor objetivo $\Psi_\lambda(w^*) = 0$.*

Prova 3.2.3. Primeiramente suponha que w^* é um minimizador global de $\Psi_\lambda(w)$ e $\Psi(w^*) = 0$, logo

$$\frac{1}{2} \|\Phi_\lambda(w^*)\|^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \langle \Phi_\lambda(w^*), \Phi_\lambda(w^*) \rangle = 0$$

$$\langle \Phi_\lambda(w^*), \Phi_\lambda(w^*) \rangle = 0.$$

Logo, $\Phi_\lambda(w^*) = 0$.

Assim,

$$F(x) - \nabla g(x)z = 0$$

e

$$\phi(g_i(x), z_i) = 0 \quad \forall i, \quad i = 1, \dots, m.$$

E como, ϕ_λ é uma NCP-função temos que w^* satisfaz o sistema (3.5), logo o resultado segue.

Reciprocamente, se w^* satisfaz (3.5), então

$$F(x^*) - \nabla g(x^*)z^* = 0$$

$$(z^*)^t g(x^*) = 0$$

$$z^* \geq 0, \quad g(x^*) \geq 0.$$

Como ϕ_λ é uma NCP-função, temos que

$$\Phi_\lambda(w^*) = 0$$

e, consequentemente

$$\Psi_\lambda(w^*) = 0$$

Portanto, w^* é um minimizador global de Ψ_λ .

Corolário 3.2.4. Um ponto $w^* = (x^*, z^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ é um minimizador global de Ψ_λ com valor objetivo $\Psi_\lambda(w^*) = 0$ se, e somente se, x^* é uma solução do $VIP(F, l, u)$.

Prova 3.2.4. O resultado segue diretamente a partir da aplicação dos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3

Uma vez que a maioria dos métodos usados para encontrar pontos de mínimo de funções convergem para pontos estacionários das mesmas, que nem sempre são mínimos globais, faz sentido a seguinte questão: sob quais hipóteses um ponto estacionário de Ψ_λ é um ponto de mínimo global e, portanto, uma solução do $VIP(F, l, u)$?

Teoricamente, esta é a mais importante questão neste capítulo, pois caracteriza soluções do $VIP(F, l, u)$ como pontos estacionários de Ψ_λ .

Teorema 3.2.5. Seja $w^* = (x^*, z^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ um ponto estacionário de Ψ_λ . Assuma que

1. $\nabla F(x^*)_{ff}$ é não singular e;
2. o Complemento de Schur $\nabla F(x^*)/\nabla F(x^*)_{ff}$ é uma P_0 -matriz.

Então, $\Psi_\lambda(w^*) = 0$ e x^* é solução do $VIP(F, l, u)$.

Prova 3.2.5. De fato.

Primeiramente, vamos particionar os vetores w e $\Phi_\lambda(w)$ da seguinte maneira

$$w = (x_f, x_{\bar{f}}, z)$$

e

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} (F(x) - Az)_f \\ (F(x) - Az)_{\bar{f}} \\ \phi(g_1(x), z_1) \\ \vdots \\ \phi(g_m(x), z_m) \end{pmatrix},$$

onde A denota $\nabla g(x)$.



Logo,

$$\Psi_{\lambda}(x_f, x_{\bar{f}}, z) = \frac{1}{2} \|(F(x) - Az)_f\|^2 + \frac{1}{2} \|(F(x) - Az)_{\bar{f}}\|^2 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \phi_{\lambda}^2(g_i(x), z_i).$$

Assim,

$$\nabla_{x_f} \Psi_{\lambda}(x_f, x_{\bar{f}}, z) = (F(x) - Az)_f \cdot \frac{\partial F_f}{\partial x_f}(x) + (F(x) - Az)_{\bar{f}} \cdot \frac{\partial F_{\bar{f}}}{\partial x_f}(x)$$

$$\nabla_{x_{\bar{f}}} \Psi_{\lambda}(x_f, x_{\bar{f}}, z) = (F(x) - Az)_f \cdot \frac{\partial F_f}{\partial x_{\bar{f}}}(x) + (F(x) - Az)_{\bar{f}} \cdot \frac{\partial F_{\bar{f}}}{\partial x_{\bar{f}}}(x) +$$

$$+ \phi_{\lambda}(g_1(x), z_1) \cdot \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial g_1(x)}(g_1(x), z_1) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_{\bar{f}}}(x) + \dots +$$

$$+ \phi_{\lambda}(g_m(x), z_m) \cdot \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial g_m(x)}(g_m(x), z_m) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_{\bar{f}}}(x)$$

$$\nabla_z \Psi_{\lambda}(x_f, x_{\bar{f}}, z) = -(F(x) - Az)_{\bar{f}} \cdot \frac{\partial A}{\partial z}(z) + \phi_{\lambda}(g(x), z) \cdot \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial z}(g(x), z).$$

Consequentemente, denotando-se

$$(F(x) - Az)_f := L(x, z)_f =: L_f$$

$$(F(x) - Az)_{\bar{f}} := L(x, z)_{\bar{f}} =: L_{\bar{f}}$$

$$\text{vec}\{\phi_{\lambda}(g_i(x), z_i)\}, i = 1, \dots, m := \phi_{\lambda}(g(x), z) =: \phi_{\lambda},$$

obtemos

$$\nabla \Psi(x_f, x_{\bar{f}}, z) = \begin{pmatrix} \nabla F(x)_{ff} L_f + \nabla F(x)_{f\bar{f}} L_{\bar{f}} \\ \nabla F(x)_{\bar{f}f} L_f + \nabla F(x)_{\bar{f}\bar{f}} L_{\bar{f}} + \nabla g_{\bar{f}}(x) \mathcal{D}_a(w) \phi_{\lambda} \\ - \nabla^t g_{\bar{f}}(x) + \mathcal{D}_b(w) \phi_{\lambda} \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{D}_a(w)$ e $\mathcal{D}_b(w)$ são matrizes diagonais com elementos

$$a_i = \lambda \left(1 - \frac{g_i(x)}{\sqrt{g_i(x)^2 + z_i^2}} \right) + (1 - \lambda)[z_i]_+ [g_i(x)]'_+$$

e

$$b_i = \lambda \left(1 - \frac{z_i}{\sqrt{g_i(x)^2 + z_i^2}} \right) + (1 - \lambda)[g_i(x)]_+ [z_i]'_+,$$

respectivamente.

Assim, pela hipótese de que $w^* = (x^*, z^*)$ é um ponto estacionário de Ψ_λ , temos que

$$\nabla F(x^*)_{ff} L_f^* + \nabla F(x^*)_{f\bar{f}} L_{\bar{f}}^* = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla F(x^*)_{\bar{f}f} L_f^* + \nabla F(x^*)_{\bar{f}\bar{f}} L_{\bar{f}}^* + \nabla g_{\bar{f}}(x^*) \mathcal{D}_a(w^*) \phi_\lambda^* = 0 \quad (3.8)$$

$$-\nabla g_{\bar{f}}(x^*)^t L_{\bar{f}}^* + \mathcal{D}_b(w^*) \phi_\lambda^* = 0. \quad (3.9)$$

E como, $\nabla F(x^*)_{ff}$ é não singular, obtemos de (3.7) que

$$L_f^* = -\nabla F(x^*)_{ff}^{-1} \nabla F(x^*)_{f\bar{f}} L_{\bar{f}}^*.$$

Logo, substituindo em (3.8), vemos que

$$(\nabla F(x^*)_{\bar{f}\bar{f}} - \nabla F(x^*)_{\bar{f}f} \nabla F(x^*)_{ff}^{-1} \nabla F(x^*)_{f\bar{f}}) L_{\bar{f}}^* + \nabla g_{\bar{f}}(x^*) \mathcal{D}_a(w^*) \phi_\lambda^* = 0. \quad (3.10)$$

Assuma sem perda de generalidade que as matrizes diagonais $\mathcal{D}_a(w^*)$ e $\mathcal{D}_b(w^*)$ são não singulares, com elementos diagonais positivos (isto se deve ao fato de que o i -ésimo elemento da diagonal é sempre multiplicado pelo elemento correspondente $\phi_\lambda(g_i(x^*), z_i^*)$) o qual é igual a zero se o elemento diagonal é igual a zero, assim trocando-se os elementos diagonais nulos nada muda em (3.7)-(3.9).

Logo, (3.9) é equivalente a

$$\phi_{\lambda}^* = \mathcal{D}_b(w^*)^{-1} \nabla g_{\bar{f}}(x^*)^t L_{\bar{f}}^*,$$

que junto a (3.10) implica em

$$(\nabla F(x^*)/\nabla F(x^*)_{ff} + \underbrace{\nabla g_{\bar{f}}(x^*) \mathcal{D}_a(w^*) \mathcal{D}_b(w^*)^{-1} (\nabla g_{\bar{f}}(x^*))^t}_{\mathcal{D}}) L_{\bar{f}}^* = 0. \quad (3.11)$$

Agora, levando-se em conta a estrutura de $\nabla g(x^*)$ e que as matrizes $\mathcal{D}_a(w)$ e $\mathcal{D}_b(w)$ são definidas positivas, é fácil ver que $\mathcal{D}$ é uma matriz diagonal definida positiva.

Usando este fato e a hipótese de que o Complemento de Schur $\nabla F(x^*)/\nabla F(x^*)_{ff}$ é uma P_0 -matriz, obtemos que o sistema linear em (3.11) é não singular, veja [5] Teorema 3.3. Logo $L_{\bar{f}}^* = 0$ é a única solução de (3.11). Assim, devido a (3.7) e (3.9), temos que

$$L_f^* = 0 \quad e \quad \phi_{\lambda}^* = 0.$$

Consequentemente, $\Phi_{\lambda}(w^*) = 0$ e $\Psi_{\lambda}(w^*) = 0$.

Portanto, x^* é solução do $VIP(F, l, u)$. ■

Capítulo 4

O Problema de Inequações Variacionais, $VIP(F, \Omega)$

4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores tratamos de casos particulares de problemas de inequações variacionais, que foram: *o problema de complementaridade não linear* e *o problema de inequações variacionais com restrições do tipo caixa*, onde nós os reformulamos como um problema de otimização equivalente.

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, vamos estabelecer resultados análogos para um problema mais geral, onde o conjunto Ω é formado por restrições lineares de igualdade e por restrições de desigualdade.

4.2 Formulação do $VIP(F, \Omega)$

O problema de inequações variacionais tratado neste capítulo é definido exatamente como no capítulo anterior com diferença apenas no conjunto Ω que aqui é dado por

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ e } g(x) \geq 0\},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é convexa e pelo menos continuamente diferenciável e vamos admitir também que o conjunto Ω satisfaz alguma “constraint qualification”.



Tendo em vista o novo conjunto Ω , vamos caminhar no mesmo sentido do capítulo 2 para reformulá-lo como um problema de otimização equivalente.

Assim, de acordo com o Teorema 3.2.1, temos que x^* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$ se, e somente se, x^* é uma solução do problema

$$\min \langle F(x^*), x \rangle$$

$$s.a. \quad x \in \Omega.$$

Logo, valendo-se da estrutura do nosso conjunto Ω , vemos que x^* deve ser solução do problema

$$\min \langle F(x^*), x \rangle \tag{4.1}$$

$$s.a. \quad Ax = b$$

$$g(x) \geq 0.$$

Agora, aplicando-se as condições de KKT ao problema (4.1) obtemos o seguinte sistema

$$F(x) + A^t y - \nabla g(x) z = 0$$

$$Ax - b = 0$$

$$z^t g(x) = 0$$

$$z \geq 0, g(x) \geq 0.$$

O próximo teorema mostra a total equivalência entre o sistema KKT (4.2) e o problema $VIP(F, \Omega)$.

Teorema 4.2.1. *Um ponto x^* é uma solução do problema $VIP(F, \Omega)$ se, e somente, existem $y^* \in \mathbb{R}^p$ e $z^* \in \mathbb{R}^m$ tais que (x^*, y^*, z^*) satisfazem o sistema KKT (4.2).*

Prova 4.2.1. *Analogamente a demonstração do Teorema 3.2.2*

Analogamente ao capítulo 3, temos que as duas últimas condições no sistema (4.2) nada mais são que um problema de complementaridade não linear. Assim, vamos então utilizar a função de Fischer-Burmeister Penalizada para reformulá-las, logo o sistema KKT pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
F(x) + A^t y - \nabla g(x)z &= 0 \\
Ax - b &= 0 \\
\phi_\lambda(g_1(x), z_1) &= 0 \\
&\vdots \\
\phi_\lambda(g_m(x), z_m) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos denotar o sistema (4.3) por $\Phi_\lambda(t) = 0$, onde $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+p+m}$

Associado à função $\Phi_\lambda(t)$ está a função de mérito $\Psi_\lambda(t)$, definida da seguinte maneira

$$\Psi_\lambda(t) := \frac{1}{2} \|\Phi_\lambda(t)\|^2.$$

Assim,

$$\Psi_\lambda(t) = \frac{1}{2} \|F(x) + A^t y - \nabla g(x)z\|^2 + \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \phi_\lambda^2(g_i(x), z_i).$$

O próximo resultado evidencia a equivalência entre soluções do $VIP(F, \Omega)$ e os minimizadores globais de $\Psi_\lambda(t)$.

Teorema 4.2.2. *Um ponto $t^* = (x^*, y^*, z^*)$ é uma solução do sistema (4.2) se, e somente se, t^* é um minimizador global de Ψ_λ com valor objetivo zero.*

Prova 4.2.2. *Analogamente à demonstração do Teorema 3.2.3.*

Como a busca por minimizadores globais é um trabalho muito difícil, especialmente em problemas de grande porte, é interessante caracterizar pontos estacionários da função de mérito como soluções do $VIP(F, \Omega)$.

O próximo teorema relaciona pontos estacionários de $\Psi_\lambda(t)$ como soluções do $VIP(F, \Omega)$.

Primeiramente, vamos definir a matriz K como sendo a matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de A .

Teorema 4.2.3. *Se $t^* = (x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{n+p+m}$ é um ponto estacionário de $\Psi_\lambda(t)$ e*

$$K^t [F'(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* \nabla^2 g_i(x^*)] K > 0.$$



Então, x^* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Prova 4.2.3. Como t^* é um ponto estacionário de $\Psi_\lambda(t)$, temos que

$$\nabla \Psi_\lambda(t^*) = 0.$$

E como

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(t) &= \frac{1}{2} \|F(x) + A^t y - \nabla g(x)z\|^2 + \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \phi_\lambda^2(g_i(x), z_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F_i(x) + [A^t y]_i - [\nabla g(x)z]_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [Ax - b]_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \phi_\lambda^2(g_i(x), z_i) \end{aligned}$$

temos que

$$\nabla_x \Psi_\lambda(t) = (F'(x))^t - \sum_{i=1}^m \nabla^2 g_i(x) z_i (F(x) + A^t y - \nabla g(x)z) + A^t (Ax - b) + \nabla g(x) \mathcal{D}_a(t^*) \phi_\lambda^*$$

$$\nabla_y \Psi_\lambda(t) = A(F(x)A^t y - \nabla g(x)z)$$

$$\nabla_z \Psi_\lambda(t) = -\nabla^t g(x)(F(x) + A^t y - \nabla g(x)z) + \mathcal{D}_b(t^*) \phi_\lambda^* \quad (4.4)$$

onde $\mathcal{D}_a(t^*)$ e $\mathcal{D}_b(t^*)$ são como no capítulo anterior.

Logo, como t^* é um ponto estacionário de Ψ_λ , temos que

$$\nabla_x \Psi_\lambda(t) = (F'(x^*))^t - \sum_{i=1}^m \nabla^2 g_i(x^*) z_i^* (F(x^*) +$$

$$A^t y^* - \nabla g(x^*) z^*) + A^t (Ax^* - b) + \nabla^t g(x^*) \mathcal{D}_a(t^*) \phi_\lambda^* = 0.$$

$$\nabla_y \Psi_\lambda(t) = A(F(x^*)A^t y^* - \nabla g(x^*) z^*) = 0.$$

$$\nabla_z \Psi_\lambda(t) = -\nabla^t g(x^*)(F(x^*) + A^t y^* - \nabla g(x^*) z^*) + \mathcal{D}_b(t^*) \phi_\lambda^* = 0.$$

Para facilitar a demonstração vamos denotar

$$P = F'(x^*)^t - \sum_{i=1}^m \nabla^2 g_i(x^*) z_i^*$$

$$s = F(x^*) + A^t y^* - \nabla g(x^*) z.$$

Assim, podemos escrever o sistema $\nabla \Psi_\lambda(t^*) = 0$ como

$$Ps + A^t(Ax^* - b) + \nabla^t g(x^*) \mathcal{D}_a \phi_\lambda^* = 0 \quad (4.5)$$

$$As = 0 \quad (4.6)$$

$$-\nabla^t g(x^*) s + \mathcal{D}_b \phi_\lambda^* = 0. \quad (4.7)$$

Logo, multiplicando-se (4.5) por s^t , obtemos

$$s^t[Ps + A^t(Ax^* - b) + \nabla^t g(x^*) \mathcal{D}_a \phi_\lambda^*] = 0. \quad (4.8)$$

Mas por (4.6), $s \in N(A)$, logo de (4.8) vemos que

$$s^t Ps = -s^t \nabla g(x^*) \mathcal{D}_a(t^*) \phi_\lambda^*.$$

E por (4.4), temos que

$$s^t Ps = -\phi_\lambda^t \mathcal{D}_b(t^*) \mathcal{D}_b(t^*) \phi_\lambda^* \leq 0,$$

pois $\mathcal{D}_b(t^*) \mathcal{D}_b(t^*) > 0$, como visto no capítulo anterior.

Agora, usando a hipótese de que $K^t P K > 0$ e que $s \in N(A)$, temos que $s = 0$, logo

$$F(x^*) + A^t y^* - \nabla g(x^*) z = 0.$$

E por (4.7) e (4.5) temos respectivamente que

$$\mathcal{D}_b(t^*) \phi_\lambda^* = 0$$

e

$$Ax^* - b = 0.$$

Portanto, $\Psi_\lambda(t^*) = 0$ e conseqüentemente x^* é uma solução do VIP(F, Ω).

■

Note que na demonstração do teorema anterior não foi requerido a convexidade das funções g_i 's, caracterizando assim, uma vantagem em relação à estratégia apresentada por Andreani, Friedlander e Martínez em [1].

5.1 Introdução

Neste capítulo, vamos descrever o método proposto para a resolução do problema de otimização não linear. O método proposto é baseado no algoritmo de otimização de primeira ordem, com a utilização de uma técnica de regularização, para garantir a existência de uma solução única para o problema de otimização.

5.2 Descrição do Algoritmo

O algoritmo foi implementado no MATLAB 6.4 executado em um computador AMD ATHLON XP (tm) - 2600 com 256MB de memória RAM. O problema "função" de Math 10 foi usado para avaliar a função penalizada $\Psi_\lambda(x)$, com os seguintes parâmetros: a função a ser minimizada é o ponto inicial para o início dos cálculos. Para cada valor de λ foram calculados $\lambda = 0.1, \lambda = 0.2, \lambda = 0.5, \lambda = 0.7, \lambda = 0.9, \lambda = 1$ a qual representa a função de Fischer-Burmeister com penalização. Os resultados de cada cálculo são mostrados na tabela de resultados (100.000), número máximo de iterações da função (100.000) e o valor da função (10⁻¹⁰). Todos os resultados são mostrados na tabela de resultados.



5.2 Problemas Propostos

Capítulo 5

Experimentos Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos descrever o método usado para a resolução dos problemas estudados nos capítulos anteriores e mostrar resultados numéricos de vários problemas presentes na literatura, entre eles, alguns problemas propostos nas bibliotecas **MCPLIB** e **GAMSLIB**, além de alguns problemas encontrados em [24].

5.2 Descrição do Algoritmo

Nosso algoritmo foi implementado em **MATLAB 6.5** e testado em um computador **AMD ATHLON XP (tm) - 2000** com **256MB** de memória RAM. O comando “fminsearch” do MATLAB foi usado para minimizar a função penalizada $\Psi_\lambda(x)$, este comando necessita dos seguintes parâmetros: a função a ser minimizada e o ponto inicial para o início dos cálculos. Para cada teste os valores de λ testados são, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.3$, $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.7$, $\lambda = 0.9$ e $\lambda = 1$ o qual representa a função de Fischer-Burmeister sem penalização. Os critérios de parada usados no método são número máximo de iterações (100.000), número máximo de avaliações da função (100.000) e tolerância no valor da função (10^{-25}), todos com relação a função de mérito $\Psi_\lambda(x)$.



5.3 Problemas Propostos

Em nossa gama de problemas procuramos inserir tanto problemas clássicos da literatura sobre o tema, como alguns dos problemas das bibliotecas **GAMSLIB** e **MCPLIB**, quanto problemas de outras fontes.

As tabelas contendo os resultados numéricos foram elaboradas da seguinte maneira:

PI: mostra o ponto inicial dado para o início do algoritmo;

λ : mostra os valores de λ que foram utilizados;

x_f : mostra a solução encontrada pelo algoritmo;

$\Psi_\lambda(x_f)$: mostra o valor da função $\Psi_\lambda(x_f)$ no ponto x_f ;

it: mostra o número de iterações;

fcalc: mostra o número de avaliações da função Ψ_λ ;

tempo (s): em segundos, mostra o tempo transcorrido do início até o fim do programa.

E: indica que houve um estouro no número de interações.

-: indica que o valor objetivo do ponto que a implementação encontrou esta longe de zero não sendo assim uma solução do problema.

λ	PI	x_f	tempo (s)		
0.1	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
0.3	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
0.5	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
0.7	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
0.9	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
1.0	(1.22 -0.01 -0.10 0.50)	3.5674e-023	310	906	0.21
0.1	(0.11 -0.61 6.45 -0.02)	-	1773	3050	0.66
0.3	(0.11 -0.61 6.45 -0.02)	-	715	1200	0.29
0.5	(1.00 -0.00 2.4 -0.01)	9.1012e-026	1270	2143	0.47
0.7	(1.00 -0.00 2.4 -0.01)	9.1012e-026	723	1196	0.37
0.9	(1.00 -0.00 2.4 -0.01)	1.0137e-025	658	1229	0.25
1.0	(0.00 2.13 -0.27 -1.10)	-	345	679	0.16

Tabela 5.14: Solglove (tamanho $n=4$)



5.3.1 Problema de Complementaridade Não Linear

1. Kojima-Shinido n=4 [23]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 1 1 1)	0.1	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	4.6204e-026	555	929	0.46
	0.3	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	1.4152e-025	486	821	0.28
	0.5	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	3.5674e-025	410	696	0.21
	0.7	(1.22 0.00 -0.00 0.50)	1.4205e-025	450	753	0.22
	0.9	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	1.3189e-025	387	662	0.23
	1.0	(1.00 -0.00 3.00 0.00)	4.2002e-026	281	495	0.19
(2 0 0 2)	0.1	(-1.35 -0.34 -0.05 0.33)	-	649	1185	0.40
	0.3	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	9.3205e-026	607	1025	0.33
	0.5	(1.22 -0.00 -0.00 0.50)	1.6084e-025	551	934	0.28
	0.7	(1.00 -0.00 3.00 0.00)	4.6139e-026	954	1590	0.48
	0.9	(1.22 0.00 0.00 0.50)	4.5989e-026	540	920	0.27
	1.0	(1.22 0.00 0.00 0.50)	8.0718e-026	590	1012	0.33
(10 10 10 10)	0.1	(-0.11 -0.62 6.85 -0.62)	-	1776	3050	0.66
	0.3	(-0.11 -0.62 6.85 -0.62)	-	717	1292	0.29
	0.5	(1.00 -0.00 3.00 -0.00)	9.0952e-026	1279	2145	0.47
	0.7	(1.00 -0.00 3.00 -0.00)	3.4673e-025	703	1196	0.27
	0.9	(1.00 -0.00 3.00 0.00)	1.0107e-025	488	829	0.20
	1.0	(0.00 2.13 -0.27 0.13)	-	348	679	0.16

Tabela 5.1: Kojima-Shinido n=4



2. Fukushima n=3

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0.2x_1^3 - 0.5x_2 + 0.1x_3 - 4 \\ -0.5x_1 + x_2 + 0.1x_2^3 + 0.5 \\ 0.5x_1 - 0.2x_2 + 2x_3 - 0.5 \end{pmatrix}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 1 1)	0.1	(1.64 0.32 -0.00)	1.4122e-026	240	431	0.18
	0.3	(1.64 0.32 0.00)	7.5439e-026	208	379	0.10
	0.5	(1.64 0.32 0.00)	5.7489e-026	206	374	0.08
	0.7	(1.64 0.32 0.00)	6.7429e-027	185	339	0.07
	0.9	(1.64 0.32 -0.00)	1.5582e-025	181	338	0.09
	1.0	(1.64 0.32 0.00)	1.6360e-025	189	346	0.08
(5 5 5)	0.1	(1.64 0.32 -0.00)	2.4636e-025	254	454	0.11
	0.3	(1.64 0.32 0.00)	8.9686e-026	238	421	0.10
	0.5	(1.64 0.32 0.00)	1.3809e-026	226	410	0.09
	0.7	(1.64 0.32 -0.00)	2.5634e-026	200	370	0.08
	0.9	(1.64 0.32 -0.00)	2.6640e-026	192	346	0.09
	1.0	(1.64 0.32 0.00)	3.4796e-025	210	386	0.08
-(10 10 10)	0.1	(1.64 0.32 -0.00)	6.8414e-026	260	470	0.12
	0.3	(1.64 0.32 0.00)	1.6568e-025	240	433	0.10
	0.5	(1.64 0.32 0.00)	2.8046e-026	234	419	0.09
	0.7	(1.64 0.32 0.00)	4.6933e-026	205	375	0.10
	0.9	(1.64 0.32 -0.00)	4.8932e-026	217	392	0.09
	1.0	(1.64 0.32 -0.00)	9.1462e-026	219	393	0.07

Tabela 5.2: Fukushima n=3



3. Hilbert n=5 [2]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 1 1 1 1)	0.1	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 -0.00)	1.7546e-016	1503	2455	0.72
	0.3	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 -0.00)	9.2030e-019	2084	3345	0.87
	0.5	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 -0.00)	2.9772e-021	1950	3126	0.81
	0.7	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.2522e-024	2176	3512	0.93
	0.9	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.8285e-020	1526	2469	0.65
	1.0	(1.00 0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	4.6289e-021	2375	3804	0.99
(5 5 5 5 5)	0.1	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.7516e-021	3045	4855	1.26
	0.3	(1.00 0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	6.8686e-011	1243	2143	0.55
	0.5	(1.00 0.00 0.00 -0.00 -0.00)	8.8402e-020	2405	3829	0.99
	0.7	(1.00 0.00 -0.00 0.00 -0.00)	3.6221e-023	2525	4081	1.05
	0.9	(1.00 0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	5.5106e-020	1974	3184	0.82
	1.0	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	2.6040e-017	1999	3331	0.85
(1 2 3 4 5)	0.1	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.9740e-022	1946	3134	0.83
	0.3	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.9480e-019	1461	2361	0.62
	0.5	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	1.3102e-018	1703	2775	0.73
	0.7	(1.00 0.00 0.00 -0.00 -0.00)	8.3303e-022	2006	3232	0.85
	0.9	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 -0.00)	1.3603e-023	1962	3173	0.84
	1.0	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 0.00)	3.3573e-021	2089	3396	0.89

Tabela 5.3: Hilbert n=5



4. Fathi n=5 [6]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 9 & 10 & 10 \\ 2 & 6 & 10 & 13 & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Harker Nash Cournot n=5 [10]

$$F(x) = [c + L^{1/b}x^{1/b} - p(Q)(e - \frac{x}{\gamma Q})]$$

$$c=[10 \ 8 \ 6 \ 4 \ 2];$$

$$b=[1.2 \ 1. \ 1 \ 0.9 \ 0.8];$$

$$L=[5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5];$$

$$e=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1];$$

$$\gamma = 1.1$$



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 -1 1 -1 1)	0.1	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	2.8262e-022	1655	2669	0.71
	0.3	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	3.3424e-025	775	1268	0.35
	0.5	(1.00 -0.00 0.00 -0.00 0.00)	6.3040e-026	805	1314	0.35
	0.7	(1.00 0.00 0.00 -0.00 0.00)	6.1536e-026	554	909	0.25
	0.9	(1.00 -0.00 -0.00 0.00 0.00)	3.4767e-026	512	844	0.25
	1.0	(1.00 0.00 0.00 0.00 -0.00)	4.5882e-026	591	968	0.25
(0 10 10 ² 10 ³ 10 ⁴)	0.1	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	2.5749e-026	3015	4869	1.24
	0.3	(0.35 -116.11 193.82 -165.28 60.54)	-	14812	E	21.03
	0.5	(0.09 0.09 0.19 0.09 -0.01)	-	2572	4482	1.11
	0.7	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	1.3477e-025	2936	4794	1.25
	0.9	(-0.53 0.40 0.21 0.16 0.14)	-	15193	E	20.68
	1.0	(0.05 0.12 0.12 0.11 0.11)	-	14834	E	20.62
-(50 4 30 2 1)	0.1	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	6.9454e-025	2429	3915	1.00
	0.3	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	1.9136e-025	1509	2436	0.62
	0.5	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00)	1.4159e-026	1294	2091	0.51
	0.7	(1.00 -0.00 -0.00 -0.00 0.00)	6.6492e-026	832	1365	0.35
	0.9	(1.00 0.00 0.00 0.00 0.00)	2.6372e-026	910	1512	0.37
	1.0	(1.00 0.00 0.00 -0.00 0.00)	3.7955e-026	995	1626	0.39

Tabela 5.4: Fathi n=5



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 1 1 1 1)	0.1	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.6508e-021	7006	11301	3.66
	0.3	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	6.1712e-024	2936	4720	1.65
	0.5	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	6.6996e-026	1713	2765	0.96
	0.7	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	3.8394e-026	1059	1729	0.59
	0.9	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	7.1449e-026	718	1197	0.43
	1.0	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	2.9207e-026	1205	1963	0.69
(5 5 5 5 5)	0.1	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	7.9997e-018	5232	8462	2.92
	0.3	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.2795e-024	2234	3618	1.25
	0.5	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.1286e-024	1732	2832	1.01
	0.7	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	4.6641e-025	819	1334	0.48
	0.9	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	7.1506e-026	557	932	0.32
	1.0	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.4311e-025	891	1439	0.52
10(1 -1 1 -1 1)	0.1	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	2.7711e-021	6415	10388	3.60
	0.3	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.2157e-025	1833	2983	1.06
	0.5	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.2115e-025	1280	2079	0.72
	0.7	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	2.0365e-025	800	1312	0.48
	0.9	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	5.8904e-026	740	1188	0.41
	1.0	(15.43 12.50 9.66 7.17 5.13)	1.2571e-025	1051	1726	0.61

Tabela 5.5: Harker Nash Cournot n=5



5.3.2 VIP-Caixa

1. Fukushima n=3

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0.2x_1^3 - 0.5x_2 + 0.1x_3 - 4 \\ -0.5x_1 + x_2 + 0.1x_2^3 + 0.5 \\ 0.5x_1 - 0.2x_2 + 2x_3 - 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x_1 \leq 3, x_2 \geq 1, x_3 \leq 1\}$$

2. Murty n=5 [6]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : i * 0.1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x \leq 1\}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(1.00 -0.00 0.00)	7.4339e-022	12223	17357	6.79
	0.3	(1.00 0.00 -0.00)	2.8746e-025	4355	6211	2.41
	0.5	(1.00 -0.00 -0.00)	7.0800e-026	2202	3207	1.25
	0.7	(1.00 0.00 -0.00)	1.8217e-025	1865	2698	1.04
	0.9	(1.00 0.00 0.00)	5.1671e-026	2266	3275	1.28
	1.0	(1.00 0.00 0.00)	1.0897e-025	1895	2744	1.06
(2 ... 2)	0.1	(1.00 0.00 -0.00)	5.3928e-020	15790	22356	8.68
	0.3	(1.00 0.00 0.00)	2.8794e-025	3104	4462	1.75
	0.5	(1.00 0.00 0.00)	2.6999e-026	2777	3997	1.56
	0.7	(1.00 -0.00 -0.00)	6.4885e-026	2346	3381	1.30
	0.9	(1.00 0.00 0.00)	1.2063e-024	2795	4043	1.58
	1.0	(1.00 0.00 -0.00)	2.6036e-025	2959	4289	1.66
(1 -1 ... 1 -1)	0.1	(1.00 0.00 0.00)	1.0632e-018	12029	17064	7.07
	0.3	(1.00 0.00 0.00)	1.7590e-024	3826	5505	2.14
	0.5	(1.00 0.00 -0.00)	1.2675e-025	2583	3688	1.44
	0.7	(1.00 -0.00 0.00)	9.0624e-026	1866	2729	1.06
	0.9	(1.00 0.00 0.00)	1.2908e-025	1865	2713	1.07
	1.0	(1.00 -0.00 -0.00)	8.6599e-026	2220	3222	1.30

Tabela 5.6: Fukushima Ω_1



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(2.00 1.00 -0.15)	7.7450e-026	2806	4211	1.41
	0.3	(2.00 1.00 -0.15)	1.4997e-025	1507	2297	0.77
	0.5	(2.00 1.00 -0.15)	8.4853e-026	1102	1669	0.56
	0.7	(2.00 1.00 -0.15)	2.2665e-025	1099	1699	0.54
	0.9	(2.00 1.00 -0.15)	1.0239e-025	1143	1753	0.61
	1.0	(2.00 1.00 -0.15)	4.5488e-026	1270	1977	0.64
(5 ... 5)	0.1	(2.00 1.00 -0.15)	1.4546e-024	3740	5586	1.83
	0.3	(2.00 1.00 -0.15)	1.9063e-025	1599	2428	0.81
	0.5	(2.00 1.00 -0.15)	4.3632e-026	1238	1884	0.62
	0.7	(2.00 1.00 -0.15)	3.4707e-026	1540	2349	0.76
	0.9	(2.00 1.00 -0.15)	1.0195e-025	1585	2396	0.79
	1.0	(2.00 1.00 -0.15)	5.9674e-025	2626	3963	1.26
-10*(1 ... 1)	0.1	(2.00 1.00 -0.15)	3.6195e-024	4264	6390	2.09
	0.3	(2.00 1.00 -0.15)	1.1276e-025	1959	2940	0.95
	0.5	(2.00 1.00 -0.15)	7.1054e-026	1499	2275	0.75
	0.7	(2.00 1.00 -0.15)	5.9566e-026	1224	1889	0.62
	0.9	(2.00 1.00 -0.15)	1.1091e-025	1491	2268	0.73
	1.0	(2.00 1.00 -0.15)	1.2199e-025	4399	6606	2.14

Tabela 5.7: Fukushima Ω_2



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(-0.01 0.02 0.11 0.20 0.82)	-	49755	E	50.25
	0.3	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	7.6953e-024	74187	96644	52.11
	0.5	(0.10 0.20 0.30 0.40 0.99)	2.4158e-006	61218	E	52.08
	0.7	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	1.1312e-025	30347	39764	21.35
	0.9	(0.08 0.17 0.28 0.37 0.89)	-	48225	E	51.08
	1.0	(0.09 0.19 0.30 0.66 0.97)	-	24316	E	50.09
(0.5 ... 0.5)	0.1	(0.06 0.08 0.15 0.33 0.91)	3.2830e-004	51423	E	51.85
	0.3	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	4.0383e-020	76864	E	54.05
	0.5	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	1.6993e-025	39815	51880	27.90
	0.7	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	2.0255e-025	22508	29458	15.79
	0.9	(0.06 0.12 0.18 0.30 0.56)	-	18563	E	46.31
	1.0	(0.07 0.13 0.22 0.32 0.67)	-	19297	E	46.35
-(0.5 ... 0.5)	0.1	(0.03 0.02 -0.01 0.14 0.70)	-	33519	E	48.80
	0.3	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	1.2636e-006	76952	E	54.39
	0.5	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	1.0511e-024	25635	33506	17.96
	0.7	(0.10 0.20 0.30 0.40 1.00)	2.3515e-025	21929	28752	15.32
	0.9	(0.43 0.16 0.20 0.21 0.58)	-	13856	E	45.92
	1.0	(0.10 0.19 0.64 0.45 0.95)	-	17169	22907	12.32

Tabela 5.8: Murty Ω_1



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(0.97 -0.98 0.99 -1.00 1.00)	2.2087e-007	76664	E	54.07
	0.3	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	5.3311e-014	76759	E	54.34
	0.5	(-0.72 0.61 -0.26 -0.03 0.61)	-	53029	E	50.99
	0.7	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	1.2071e-023	46015	59993	32.29
	0.9	(-0.85 1.10 -0.88 0.42 0.46)	-	22272	E	46.97
	1.0	(-0.76 0.69 0.54 0.82 -0.59)	-	18385	E	46.62
-(1 ... 1)	0.1	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	1.0096e-009	76629	E	55.57
	0.3	(0.09 0.06 -0.51 0.82 0.00)	-	32837	44305	25.93
	0.5	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	5.7197e-019	59871	78232	46.25
	0.7	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	2.8025e-023	31053	40551	23.85
	0.9	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	6.9738e-021	34080	44595	25.56
	1.0	(-0.97 0.97 0.00 -0.99 1.00)	-	41018	E	53.78
x=(0.2 ... 0.2) y=(1 ... 1)	0.1	(-0.57 0.39 -0.11 -0.22 0.70)	9.1020e-004	31619	E	48.20
	0.3	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	8.8281e-021	76644	E	54.67
	0.5	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	1.8195e-019	69891	91109	49.88
	0.7	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	1.7160e-023	33539	43764	23.75
	0.9	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	2.9954e-024	36720	47741	25.89
	1.0	(1.00 -1.00 1.00 -1.00 1.00)	2.4740e-023	58500	76465	41.64

Tabela 5.9: Murty Ω_2



5.3.3 VIP Geral

1. Braess n=5 [18]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 \\ x_2 + 50 \\ x_3 + 10 \\ x_4 + 50 \\ 10x_5 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : Bx = b \text{ e } x \geq 0\}$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2. Fukushima n=3

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0.2x_1^3 - 0.5x_2 + 0.1x_3 - 4 \\ -0.5x_1 + x_2 + 0.1x_2^3 + 0.5 \\ 0.5x_1 - 0.2x_2 + 2x_3 - 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 0.4x_2^2 + 0.6x_3^2 - 1 \leq 0\}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(5 ... 5)	0.1	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	1.3049e-018	75675	E	50.57
	0.3	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	1.4543e-024	38672	51234	24.92
	0.5	(3.83 0.17 1.83 0.00 0.01)	-	10055	13688	6.76
	0.7	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	1.3263e-025	17939	23800	11.52
	0.9	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	8.1054e-025	12481	16578	8.14
	1.0	(4.03 1.45 1.21 2.32 2.14)	-	7579	10563	5.12
(4 ... 4)	0.1	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	7.6498e-020	75698	E	54.01
	0.3	(0.01 0.00 0.01 0.00 0.06)	-	5040	7170	3.80
	0.5	(0.85 0.03 2.22 0.14 3.90)	-	19975	E	45.27
	0.7	(2.92 0.04 0.08 0.04 2.95)	-	11982	16450	8.55
	0.9	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	8.8969e-026	14794	19684	10.21
	1.0	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	2.8003e-025	19952	26463	13.98
(2 ... 2)	0.1	(2.94 0.02 0.18 0.01 0.93)	-	13832	E	40.65
	0.3	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	2.5599e-024	37759	49957	24.38
	0.5	(2.99 0.00 0.01 0.00 3.00)	-	13285	18015	8.61
	0.7	(3.01 0.08 0.19 0.08 2.82)	-	10871	14821	7.10
	0.9	(4.00 2.00 2.00 2.00 4.00)	4.9693e-025	18374	24325	11.73
	1.0	(2.70 2.12 1.60 1.48 4.05)	-	16908	E	41.90

Tabela 5.10: Braess n=5



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(0 ... 0)	0.1	(1.00 0.00 -0.00)	5.1847e-026	631	1061	0.33
	0.3	(1.00 0.00 0.00)	1.0394e-025	533	900	0.27
	0.5	(1.00 0.00 0.00)	1.6755e-026	536	927	0.26
	0.7	(1.00 -0.00 -0.00)	3.1667e-026	499	851	0.25
	0.9	(1.00 -0.00 0.00)	4.9759e-026	454	780	0.24
	1.0	(1.00 -0.00 0.00)	4.7558e-026	469	803	0.26
(1 ... 1)	0.1	(1.00 0.00 -0.00)	4.5941e-026	420	700	0.24
	0.3	(1.00 0.00 -0.00)	7.5343e-026	327	565	0.18
	0.5	(1.00 0.00 -0.00)	7.6743e-026	321	563	0.17
	0.7	(1.00 -0.00 0.00)	3.5566e-026	302	533	0.16
	0.9	(1.00 0.00 0.00)	3.1263e-026	267	478	0.15
	1.0	(1.00 -0.00 -0.00)	5.2109e-026	293	518	0.15
(1 -1 1 -1 1)	0.1	(1.00 0.00 -0.00)	3.4571e-025	399	692	0.24
	0.3	(1.00 0.00 0.00)	4.1960e-026	372	630	0.19
	0.5	(1.00 0.00 -0.00)	3.9872e-026	364	618	0.17
	0.7	(1.00 -0.00 0.00)	7.7354e-026	292	512	0.17
	0.9	(1.00 -0.00 0.00)	6.1133e-026	298	526	0.15
	1.0	(1.00 0.00 -0.00)	4.4431e-026	327	573	0.18

Tabela 5.11: Fukushima n=3



3. Harker Nash Cournot n=5 [19]

$$F(x) = [c + L^{1/b}x^{1/b} - p(Q)(e - \frac{x}{\gamma Q})]$$

$$c=[10 \ 8 \ 6 \ 4 \ 2];$$

$$b=[1.2 \ 1. \ 1 \ 0.9 \ 0.8];$$

$$L=[5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5];$$

$$e=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1];$$

$$\gamma = 1.1$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, x \geq 0\}$$

4. Hilbert n=5 [2]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, x \geq 0\}$$

5. Kojima-Shinido n=4 [23]

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, x \geq 0\}$$

PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	3.5979e-020	47323	64797	36.25
	0.3	(2.34 2.17 2.18 1.94 1.87)	-	25820	36446	20.54
	0.5	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	1.5752e-025	16967	23284	12.92
	0.7	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	5.1224e-025	18072	24756	13.72
	0.9	(10.44 8.45 7.37 6.03 4.40)	-	6363	9074	4.98
	1.0	(-2.14 1.77 -1.48 11.87 -1.08)	-	98690	E	61.20
10*(1 ... 1)	0.1	(1.03 1.02 1.06 0.99 1.07)	-	53115	75245	45.74
	0.3	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	4.7079e-025	17407	23843	14.69
	0.5	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	6.1480e-025	12373	16904	10.52
	0.7	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	4.5990e-024	11034	15143	8.95
	0.9	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	1.2931e-025	15328	20956	12.86
	1.0	(0.87 1.43 0.35 0.36 1.14)	-	36405	E	57.76
(5 ... 5)	0.1	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	4.3811e-023	57768	78887	44.48
	0.3	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	1.8669e-023	17215	23707	13.48
	0.5	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	8.7566e-026	12434	17049	9.58
	0.7	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	2.8092e-025	9487	13081	7.33
	0.9	(0.98 0.99 1.00 1.01 1.02)	6.8800e-025	11625	16019	8.97
	1.0	(-2.24 4.50 -1.92 11.28 -1.76)	-	97959	E	63.68

Tabela 5.12: Harker Nash Cournot n=5



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(-0.00 -0.00 -0.00 -0.00 5.00)	5.3426e-024	24887	34188	16.74
	0.3	(0.00 0.00 0.00 -0.00 5.00)	1.2308e-024	9429	13010	6.96
	0.5	(-0.00 -0.00 0.00 0.00 5.00)	1.2345e-025	9020	12400	6.03
	0.7	(-0.00 0.00 0.00 -0.00 5.00)	4.5734e-025	9366	12898	6.21
	0.9	(0.00 0.00 -0.00 -0.00 5.00)	2.3730e-009	21330	E	42.74
	1.0	(0.00 0.00 0.00 -0.00 5.00)	9.0834e-026	10183	14021	6.84
-(1 ... 1)	0.1	(-0.01 -0.00 -0.00 0.51 4.50)	7.1745e-005	14403	E	41.94
	0.3	(-0.00 -0.00 0.00 -0.00 5.00)	4.1551e-025	11955	16389	8.51
	0.5	(0.00 -0.00 -0.00 -0.00 5.00)	3.2940e-025	8662	11878	5.98
	0.7	(-0.00 -0.00 0.00 0.00 5.00)	1.2902e-025	9053	12482	6.18
	0.9	(1.24 0.58 0.29 0.12 -0.00)	7.3535e-006	13953	E	42.19
	1.0	(-0.00 0.00 -0.00 -0.00 5.00)	8.2027e-026	11049	15260	7.36
(3 ... 3)	0.1	(-0.16 -0.04 -0.02 0.02 5.21)	2.6950e-004	17361	E	45.53
	0.3	(0.00 -0.00 -0.00 -0.00 5.00)	3.5276e-024	14616	20020	10.69
	0.5	(-0.00 0.00 0.00 -0.00 5.00)	3.5526e-025	8083	11097	6.12
	0.7	(-0.00 -0.00 -0.00 -0.00 5.00)	1.4319e-025	8872	12260	6.55
	0.9	(-0.00 -0.00 -0.00 0.00 5.00)	8.5647e-025	8470	11667	6.18
	1.0	(-0.00 -0.00 -0.00 2.68 2.32)	-	14469	E	46.26

Tabela 5.13: Hilbert n=5



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(3.32 -1.93 3.62 -1.04)	-	4403	6504	2.88
	0.3	(1.22 -0.00 -0.00 2.78)	2.2801e-025	6125	8762	3.95
	0.5	(1.03 0.60 -0.00 2.37)	1.5154e-025	6131	8744	3.90
	0.7	(1.22 0.00 -0.00 2.78)	1.7950e-025	4077	5867	2.61
	0.9	(1.03 0.60 -0.00 2.37)	2.0870e-025	4355	6214	2.77
	1.0	(1.22 0.00 0.00 2.78)	7.6217e-026	4318	6260	2.77
1.2*(1 ... 1)	0.1	(1.03 0.57 -0.01 2.41)	2.7921e-007	12465	E	38.44
	0.3	(1.00 -0.00 3.00 0.00)	1.5408e-023	12284	17355	7.88
	0.5	(1.12 1.72 0.41 0.75)	1.2285e-025	3722	5381	2.38
	0.7	(1.22 -0.00 -0.00 2.78)	6.0063e-025	3739	5358	2.41
	0.9	(1.22 0.00 -0.00 2.78)	1.0489e-025	3770	5449	2.45
	1.0	(1.22 0.00 0.00 2.78)	2.2554e-025	3979	5696	2.56
-(1 ... 1)	0.1	(1.18 0.95 0.01 1.85)	-	15916	38.86	
	0.3	(1.12 1.72 0.41 0.75)	1.9974e-025	5259	7506	3.36
	0.5	(1.22 0.00 -0.00 2.78)	1.9983e-024	6058	8647	3.86
	0.7	(1.22 -0.00 -0.00 2.78)	2.1603e-025	6075	8709	3.88
	0.9	(1.62 0.00 2.25 0.12)	1.8476e-024	5587	8020	3.55
	1.0	(1.03 0.60 -0.00 2.37)	8.1495e-026	5662	8050	3.59

Tabela 5.14: Kojima-Shinido n=4



6. Mathiesen n=3 [19]

$$F(x) = - \begin{pmatrix} 0.9(5x_2 + 3x_3)/x_1 \\ 0.1(5x_2 + 3x_3/x_2 - 5) \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_2 - x_3 \leq 0, x \geq 0\}$$

7. Pang e Murty Nash Cournot n=5 [23]

$$F(x) = [c + L^{1/b}x^{1/b} - p(Q)(e - \frac{x}{\gamma Q})]$$

$$c=[10 \ 8 \ 6 \ 4 \ 2];$$

$$b=[1.2 \ 1. \ 1 \ 0.9 \ 0.8];$$

$$L=[5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5];$$

$$e=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1];$$

$$\gamma = 1.1$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, x \geq 0\}$$



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(1 ... 1)	0.1	(0.50 0.08 0.42)	6.5759e-026	4353	6360	2.96
	0.3	(0.50 0.08 0.42)	7.4141e-026	2608	3808	1.71
	0.5	(0.50 0.08 0.42)	1.3242e-025	3435	5057	2.28
	0.7	(0.50 0.08 0.42)	2.1098e-025	3840	5624	2.56
	0.9	(0.50 0.08 0.42)	6.5772e-026	4211	6154	2.78
	1.0	(0.50 0.08 0.42)	1.2337e-025	4164	6119	2.77
(0.1 0.2 ... 0.8)	0.1	(0.50 0.08 0.42)	5.5829e-025	7144	10357	4.70
	0.3	(0.50 0.08 0.42)	1.7745e-025	4801	6967	3.16
	0.5	(0.58 0.09 0.25)	-	7820	11686	5.29
	0.7	(0.38 0.00 0.03)	-	2931	4641	2.10
	0.9	(0.46 -0.00 -0.00)	-	14310	E	40.78
	1.0	(0.32 0.02 0.05)	-	7153	10983	4.98
(0.2 0.4 ... 1.6)	0.1	(0.50 -0.04 0.54)	8.6364e-006	7137	10592	4.79
	0.3	(0.50 -0.05 0.55)	1.3088e-004	7296	10861	5.42
	0.5	(0.50 0.08 0.42)	1.3306e-024	4964	7248	3.42
	0.7	(0.50 0.08 0.42)	1.5388e-025	4030	5913	2.98
	0.9	(0.50 0.08 0.42)	7.1229e-026	3162	4640	2.20
	1.0	(0.50 0.08 0.42)	7.0064e-026	3946	5768	2.79

Tabela 5.15: Mathiesen n=3



PI	λ	x_f	$\Psi(x_f)$	it	fcalc	tempo (s)
(5 ... 5)	0.1	(-10.85 16.21 4.23 16.07 16.56)	-	4186	6764	3.94
	0.3	(1.21 6.58 6.02 4.38 4.24)	-	17140	51.91	51.91
	0.5	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	1.9864e-025	12608	17296	10.00
	0.7	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	8.4317e-025	15504	21211	12.03
	0.9	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	3.6153e-025	13360	18378	11.18
	1.0	(1.57 1.18 0.70 0.18 0.10)	-	16802		53.02
(10 ... 10)	0.1	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	9.6805e-022	51517	70585	43.18
	0.3	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	2.4515e-024	22683	31048	19.15
	0.5	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	3.9562e-024	16597	22797	13.79
	0.7	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	9.4189e-025	9991	13679	8.56
	0.9	(1.06 1.09 1.12 1.22 1.17)	-	25429	E	56.36
	1.0	(0.09 1.87 1.13 0.62 0.27)	-	13305	E	52.69
(15 ... 15)	0.1	(4.00 0.67 3.69 4.31 0.84)	-	17006	E	50.01
	0.3	(0.92 0.92 0.96 0.96 1.00)	-	39852	E	52.60
	0.5	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	1.0356e-024	14775	20355	11.47
	0.7	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	5.8294e-025	10443	14238	8.09
	0.9	(1.60 1.64 1.72 1.77 1.79)	-	34549	E	52.38
	1.0	(0.96 0.98 1.00 1.02 1.04)	4.3046e-025	14557	20032	11.32

Tabela 5.16: Pang e Murty Nash Cournot n=5



5.4 Conclusões

Nossos experimentos numéricos mostram que a função de Fischer-Burmeister Penalizada é competitiva com a função de Fischer-Burmeister, em todos os nossos testes pelo menos um dos parâmetros de $\lambda \neq 1$ que testamos se comportou melhor que o parâmetro $\lambda = 1$, que representa a função de Fischer-Burmeister sem penalização.

A única excessão que temos é no primeiro teste em problemas de complementaridade não-linear, onde o parâmetro $\lambda = 1$ com o primeiro ponto inicial se comportou melhor do que qualquer outro parâmetro testado, entretanto, o ponto para o qual convergiu é uma solução diferente das demais.

Também houve casos em que a função de Fischer-Burmeister não conseguiu encontrar uma solução para o problema, apesar disso sempre houve um parâmetro de $\lambda \neq 1$ que conseguiu encontrar uma solução.

Podemos notar, em nosso conjunto de experimentos, que todos os parâmetros de $\lambda \neq 1$ em algum momento foi o melhor, isto nos mostra que o fator de penalização ótimo pode variar, ou seja, hora devemos penalizar muito, hora devemos penalizar pouco.



Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação tivemos a oportunidade de estudar o Problema de Inequações Variacionais geral $VIP(F, \Omega)$ e seus casos particulares: o Problema de Complementaridade Não Linear $NCP(F)$ e o Problema de Inequações Variacionais com restrições do tipo caixa $VIP(F, l, u)$. Fizemos um estudo aprofundado da função de Fischer-Burmeister Penalizada aplicando-a à resolução do Problema de Complementaridade Não Linear analisando suas propriedades, qualidades e mostrando sua superioridade perante a função de Fischer-Burmeister segundo o critério de conjuntos de nível limitados. Estendemos sua aplicação para a resolução do VIP com restrições do tipo caixa e do VIP geral, apresentando resultados que caracterizam pontos estacionários da função de mérito como soluções do problema em questão.

Nossos experimentos numéricos mostraram que a função de Fischer-Burmeister Penalizada é competitiva com a função de Fischer-Burmeister, nota-se que quanto maior a dimensão do problema, maior a dificuldade da estratégia de minimização ser robusta no VIP -caixa e no VIP geral, pois a quantidade de variáveis da função de mérito aumenta significativamente.

Como nossa gama de experimentos numéricos é pequena, podemos apenas concluir que a penalização da função de Fischer-Burmeister é benéfica pois, sempre apresentamos um parâmetro de $\lambda \neq 1$ que se comportou melhor do que a função de Fischer-Burmeister sem penalização.

Continuando nesta mesma linha de pesquisa, um caminho a se seguir é o de



transformar o parâmetro λ em uma variável, criando assim um critério para decidir se na k -ésima iteração deve-se ou não penalizar a função de Fischer-Burmeister e, se sim, o quanto se deve penalizar. Acreditamos que esta estratégia seja muito mais robusta que a estratégia que utiliza λ como um parâmetro fixo no sentido de diminuir o número de iterações para se obter a convergência e no sentido de resolver problemas que esta estratégia tem dificuldade.

[1] J. Andreani, A. Fracalanza and J. M. Martínez: A Fast Strategy for Solving Variational Inequalities in Bounded Polytopes, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 23, pp.553-594, 2003.

[2] J. Andreani and J. M. Martínez: The Solution of Variational Inequalities as a Simplex and Complementarity of Feasible Cones Problem, *SIAM J. Optimization*, 10, n.3, pp.1155-1190, 1999.

[3] B. Chen: Error Bounds for Feasible and Infeasible Problems, *Complementarity Problems: Technical Report*, Department of Mathematics and Systems, Washington State University, Pullman, WA, 1997.

[4] B. Chen, B. Chen and C. Kanzow: A Primal-Dual Fischer-Burmeister SQP Algorithm for Linear Programs and Nonlinear Feasible Mathematical Programming, 58, pp.211-239, 2000.

[5] B. Chen and C. F. He: A Nonmonotone Continuation Method for Linear Complementarity Problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 14, pp.1078-1100, 1993.

[6] B. Chen and X. Ye: An Infeasible-Starting Method for Variational Inequalities, Technical Report AMR 96-33, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 1996.

[7] F. Facchinei: Structural and Stability Properties of Feasible Complementarity Problems, Technical Report, University of Roma "La Sapienza", Department of Information e Sistemistica, Roma, Italy, 1997.



Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, A. Friedlander and J. M. Martínez: A New Strategy for Solving Variational Inequalities in Bounded Polytopes: Numerical Functional Analysis and Optimization, 16, pp.653-668, 1995.
- [2] R. Andreani and J. M. Martínez: Reformulation of Variational Inequalities on a Simplex and Compactification of Complementarity Problems, SIAM J. Optimization, 10, n°3, pp.1168-1190, 1993.
- [3] B. Chen: Error Bounds for R_0 -type and Monotone Nonlinear Complementarity Problems. Technical Report, Department of Mangagement and Systems, Washington State University, Pullman, WA, 1997.
- [4] B. Chen, X. Chen and C. kanzow: A Penalized Fischer-Burmeister NCP-function Theoretical Investigation and Numerical Results, Mathematical Programming, 88, pp.211-216, 2000.
- [5] B. Chen and P. T. Harker: A Non-interior-Point Continuation Method for Linear Complementarity Problems, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14, pp.1168-1190, 1993.
- [6] X. Chen and Y. Ye: On Homotopy-Smoothing Methods for Variational Inequalities. Technical Report AMR 96/39, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 1996.
- [7] F. Facchinei: Structural and Stability Properties of P_0 Nonlinear Complementarity Problems. Technical Report, Universit'a di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Informatica e SIStemistica, Rome, Italy, 1997.



- [8] F. Facchinei and J. Soares: A New Merit Function for Nonlinear Complementarity Problems and a Related Algorithm, SIAM Journal on Optimization 7, pp.225-247, 1997.
- [9] A. Fischer: A Special Newton-Type Optimization Method, Optimization 24, pp.269-284, 1992.
- [10] P.T. Harker: Accelerating the Convergence of the Diagonalization and Projection Algorithms for Finite-Dimensional Variational Inequalities, Mathematical Programming, 41, pp.29-59, 1988.
- [11] C. Kanzow: A New Approach to Continuation Methods for Complementarity Problems with P -Functions, Operations Research Letters, 20, pp.85-92, 1997.
- [12] C. Kanzow: Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 17, pp. 851-868, 1996.
- [13] C. Kanzow, N. Yamashita and M. Fukushima: New NCP-Functions and Their Properties, Journal of Optimization Theory and Applications 94, pp.115-135, 1997.
- [14] C. Kanzow: Nonlinear Complementarity as Unconstrained Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications 88, 1, pp.139-155, 1996.
- [15] C. Kanzow, H. Kleinmichel: A New Class of Semismooth Newton-Type Methods for Nonlinear Complementarity Problems. Preprint 118, Institute of Applied Mathematics, University of Hamburg, Hamburg, Germany, 1997.
- [16] T. de Luca, F. Facchinei and C. Kanzow: A Semismooth Equation Approach to the Solution of Nonlinear Complementarity Problems, Mathematical Programming 75, pp.407-439, 1996.
- [17] Z.Q. Luo and P. Tseng: A New Class of Merit Functions for the Nonlinear Complementarity Problem, IN: M.C. Ferris and J.S. Pang (eds.): Complementarity and Variational Problems: State of the Art. SIAM, Philadelphia, PA. pp.204-225, 1997.



- [18] P. Marcotte: Application of Khobotov's Algorithm to Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems, INFORM, 29, 1991.
- [19] L. Mathiesen: An Algorithm Based on a Sequence of Linear Complementarity Problems Applied to a Walrasian Equilibrium Model: An Exemple, Mathematical Programming, 37, pp.1-18, 1987.
- [20] J.F. Nash: Equilibrium Points in n-Person Games, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, pp. 48-49, 1950.
- [21] P.D. Panagiotopoulos: Inequality Problems in Mechanics and Applications, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [22] J.S. Pang: Complementarity Problems. In: R. Horst and P.M. Pardalos (eds), Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Plublisher, Dordrecht, pp. 271-338, 1995.
- [23] J.S. Pang and S.A. Gabriel : NE/SQP: A Robust Algorithm for the Nonlinear Complementarity Problem, Mathematical Programming, 60, pp.295-337, 1993.
- [24] F. Tinti: A Matlab Collection of Variational Inequality Problems, URL: <http://dm.unife.it/pn2o/software.html>, 2003.
- [25] P. Tseng: Growth Behaviour of a Class of Merit Functions for the Nonlinear Complementarity Problem, Journal of Optimization Theory and Applications 89, 1, pp.17-37,1996.



