



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Soluções analíticas e numéricas para escoamentos incompressíveis Newtonianos e não-Newtonianos

Isabella Lopes Corrêa

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Gilcilene Sanchez de Paulo

Coorientadora: Prof^ª. Dr^ª. Caroline Viesel

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Soluções analíticas e numéricas
para escoamentos incompressíveis Newtonianos
e não-Newtonianos**

Isabella Lopes Corrêa

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Gilcilene Sanchez de Paulo

Coorientadora: Prof^ª. Dr^ª. Caroline Viezel

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2022

C824s

Corrêa, Isabella Lopes

Soluções analíticas e numéricas para escoamentos incompressíveis Newtonianos e não-Newtonianos / Isabella Lopes Corrêa. -- Presidente Prudente, 2022
89 p. : tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientadora: Gilcilene Sanchez de Paulo

Coorientadora: Caroline Viezel

1. Escoamentos incompressíveis. 2. Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. 3. Soluções analíticas. 4. Diferenças Finitas. 5. Método da Projeção. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO


TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Soluções analíticas e numéricas para escoamentos incompressíveis Newtonianos e não-Newtonianos

AUTORA: ISABELLA LOPES CORRÊA

ORIENTADORA: GILCILENE SANCHEZ DE PAULO

COORIENTADORA: CAROLINE VIEZEL

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO (Participação Virtual) 
Departamento de Matematica e Computacao / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. LUIS JORGE LIMA FERRÁS (Participação Virtual)
Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto FEUP

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participação Virtual)
Departamento de Matematica e Computacao / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 21 de setembro de 2022

À memória de meu avô, Joaquim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por iluminar a minha caminhada até aqui.

Aos meus pais Sandra e João, meu irmão Everton, minha avó Ivanilce e meu namorado Rafael por estarem ao meu lado em todos os momentos.

Aos professores que tive durante minha jornada acadêmica na FCT - UNESP. Em especial, à minha orientadora, professora Gilcilene Sanchez de Paulo, pela paciência, apoio e aprendizados. Agradeço também à professora Caroline Viesel pela orientação e apoio na etapa final deste trabalho.

Aos colegas do PósMAC, por todo aprendizado e companheirismo, mesmo que à distância.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Qualquer travessia, por mais gloriosa que seja, pode começar com um erro. Por isso, quando se sentirem perdidos, não se preocupem, Deus não se dará por vencido”.
McCarten, Anthony; Dois Papas, 2019.

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo acerca das soluções analíticas e numéricas para algumas classes de escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares de fluidos Newtonianos no estado estacionário ou transiente. As soluções analíticas para os escoamentos estacionários de fluidos não-Newtonianos também serão obtidas, utilizando o modelo Lei das Potências. Em consequência da dificuldade em se obter soluções analíticas de um sistema de Equações Diferenciais Parciais, os escoamentos apresentados neste trabalho pertencem a classe de escoamentos unidirecionais e retilíneos. Desta forma, o problema analítico é reduzido a duas variáveis primitivas desconhecidas: a componente não-nula da velocidade e a pressão, assim, uma simples integração ou técnicas consolidadas da matemática, como Soluções por Similaridade e Separação de Variáveis, serão aplicadas para obtenção das soluções analíticas. As soluções numéricas vêm para ampliar os estudos na área, trazendo a possibilidade de resolver as equações que modelam outras classes de escoamentos. O método empregado para obtenção das soluções numéricas, será o Método da Projeção, que consiste em desacoplar as variáveis velocidade e pressão das equações de Navier-Stokes. As equações resultantes deste desacoplamento serão aproximadas pela técnica de Diferenças Finitas sobre uma malha deslocada. As soluções analíticas obtidas serão de grande valia no processo de verificação da metodologia numérica, implementada em PythonTM.

Palavras-Chave: *Escoamentos Incompressíveis, Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, Soluções Analíticas, Diferenças Finitas, Método da Projeção.*

Abstract

The present work presents a study about the analytical and numerical solutions for some classes of incompressible, isothermal and laminar flows of Newtonian fluids in the steady or transient state. Analytical solutions for steady state flows of non-Newtonian fluids will also be obtained, using the Power Law model. As a consequence of the difficulty in obtaining analytical solutions of a Partial Differential Equations system, the flows presented in this work belong to the class of unidirectional and rectilinear flows. In this way, the analytical problem is reduced to two primary unknown variables: the non-zero component of velocity and pressure, thus, a simple integration or consolidated techniques of mathematics, such as Solutions by Similarity and Separation of Variables, will be applied to obtain the analytical solutions. The numerical solutions are presented here in order to widen the studies in the area, which provides the possibility of solving the equations that model other classes of the flows. The method employed to obtain the numerical solutions used will be the Projection Method, which consists on decoupling the velocity and pressure variables from the Navier-Stokes equations. The resulting equations will be approximated by the Finite Difference technique on a staggered grid. The analytical solutions obtained will be very useful for the process of verification of the numerical methodology, which is implemented in PythonTM.

Keywords: *Incompressible Flows, Newtonian and Non-Newtonian Fluids, Analytical Solutions, Finite Differences, Projection Method.*

Lista de Figuras

2.1	Esboço da viscosidade variando com a taxa de cisalhamento com parâmetros $m = 1.5$, $n = 0.785$, $n = 1$ e $n = 2$	22
3.1	Geometria de um escoamento em um canal de seção transversal retangular bidimensional.	23
3.2	Escoamento Couette planar.	25
3.3	Escoamento Couette planar com perfil de velocidade constante.	27
3.4	Solução analítica para o escoamento Couette planar com as velocidades 0, 0.2, 0.4, 0.6 e 0.8, e amplitude $H = 1$	27
3.5	Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Couette planar.	28
3.6	Escoamento Poiseuille planar.	29
3.7	Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido com os parâmetros $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$	31
3.8	Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido.	32
3.9	Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$	33
3.10	Escoamento Poiseuille planar com escorregamento.	34
3.11	Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 , $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$	36
3.12	Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille planar com escorregamento.	37
3.13	Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/2$, $m = 1$ e com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 , $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$	38
3.14	Escoamento Couette-Poiseuille planar.	39
3.15	Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar com velocidade máxima em y^* representado por pontos nos gráficos com $V = 0.1, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 , amplitude $a = 1$, $\eta_s = 0.3$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 2$	40

- 3.16 Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar com velocidade máxima em y^* representado por pontos nos gráficos com $V = 0.1, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 , amplitude $a = 1$, $\eta_s = 0.3$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = -2$ 41
- 3.17 Ilustração do sinal de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Couette-Poiseuille planar. 42
- 3.18 Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $h^* = 0.3, 0.5$ e 0.8 , $h = 1$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 2$. A linha contínua representa u_a e a pontilhada u_b 44
- 3.19 Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $h^* = 0.3, 0.5$ e 0.8 , $h = 1$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = -2$. A linha contínua representa u_a e a pontilhada u_b 44
- 3.20 Esboço do escoamento Poiseuille entre placas inclinadas. 45
- 3.21 Solução analítica para o escoamento Poiseuille entre placas inclinadas com o ângulo formado entre as duas placas e a direção horizontal $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, amplitude $H = 1$, viscosidade $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$, gravidade $f = 9.81$ e densidade $\rho = 1350$ 46
- 3.22 Ilustração do sinal de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille entre placas inclinadas. 47
- 3.23 Solução analítica para o escoamento Poiseuille entre placas inclinadas para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$ e com o ângulo formado entre as duas placas e a direção horizontal $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, amplitude $H = 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e gravidade $f = 9.81$ 48
- 3.24 O escoamento de uma película fina sobre uma placa com inclinação θ 49
- 3.25 Solução analítica para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada com os ângulos $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, gravidade $f = 9.81$, densidade $\rho = 1350$, viscosidade $\eta_s = 0.3$ e espessura do canal $\delta = 0.001$ 51
- 3.26 Análise do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento de uma película sobre uma placa inclinada. 52
- 3.27 Solução analítica para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$ e com os ângulos $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, gravidade $f = 9.81$, densidade $\rho = 1350$ e espessura do canal $\delta = 0.001$ 53
- 3.28 Escoamento Couette planar em duas camadas. 53
- 3.29 Solução analítica para o escoamento Couette planar em duas camadas com as velocidades $v = 0, 0.2$ e 0.4 na tampa superior, viscosidade do fluido A , $\eta_{As} = 0.1$, viscosidade do fluido B , $\eta_{Bs} = 0.5$, amplitude do canal de fluido A , $H_A = 0.7$ e amplitude do canal de fluido B , $H_B = 0.3$. Em azul claro, os perfis de velocidade do fluido A e em azul escuro os perfis de velocidade do fluido B 55
- 3.30 Análise do comportamento de $\frac{du^A}{dy}$ e $\frac{du^B}{dy}$ no escoamento Couette planar em duas camadas. 56

3.31	Solução analítica para o escoamento Couette planar em duas camadas para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n_A = n_B = 1/3$, $m_A = 1$ e $m_B = 0.7$ com as velocidades $v = 0, 0.2$ e 0.4 na tampa superior, amplitude do canal de fluido A , $H_A = 0.7$ e amplitude do canal de fluido B , $H_B = 0.3$. Em azul claro, os perfis de velocidade do fluido A e em azul escuro os perfis de velocidade do fluido B	58
3.32	Escoamento próximo a uma placa subitamente colocada em movimento. . .	59
3.33	Escoamento Couette planar no estado transiente.	64
3.34	Escoamento Poiseuille planar no estado transiente.	67
4.1	Decomposição de um campo vetorial em uma parte livre de divergencia e um campo gradiente.	74
4.2	Representação da célula deslocada utilizada pela metodologia numérica. . .	77
4.3	Perfil de velocidade numérico para cada uma das malhas.	82
4.4	Perfil de velocidade analítico e numérico para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido em cada uma das malhas.	83
4.5	Erros obtidos na implementação numérica para cada uma das malhas adotadas.	83

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
1 Introdução	15
2 Formulação Matemática	19
2.1 Equações Governantes	19
2.1.1 Fluido Newtoniano	20
2.1.2 Fluido não-Newtoniano	21
3 Escoamentos Unidirecionais e Retilíneos	23
3.1 Escoamentos Estacionários	24
3.1.1 Escoamento Couette Planar	25
3.1.2 Escoamento Poiseuille Planar Totalmente Desenvolvido	29
3.1.3 Escoamento Poiseuille Planar com Escorregamento	33
3.1.4 Escoamento Couette-Poiseuille Planar	38
3.1.5 Escoamento Poiseuille Entre Placas Inclínadas	45
3.1.6 Escoamento de uma Película Sobre uma Placa Inclínada	48
3.1.7 Escoamento Couette Planar em Duas Camadas	53
3.2 Escoamentos Transientes	58
3.2.1 Escoamento Próximo a uma Placa Subitamente Colocada em Movimento	59
3.2.2 Escoamento Próximo a uma Placa em Movimento Oscilatório	62
3.2.3 Escoamento Couette Planar	63
3.2.4 Escoamento Poiseuille Planar	67
4 Metodologia Numérica	71
4.1 Adimensionalização	71
4.2 Método da Projeção	72
4.2.1 Algoritmo Numérico	75
4.3 Discretização das Equações	76
4.3.1 Aproximação para as Derivadas por Diferenças Finitas	76
4.3.2 Termos Convectivos	78
4.3.3 Equações Discretizadas	78
4.4 Solução Numérica para um Escoamento em um Canal Bidimensional	80
5 Considerações Finais	85

Introdução

A Mecânica dos Fluidos Computacional aborda a simulação numérica de escoamentos de fluidos, transferência de calor, dentre outros fenômenos. Os escoamentos são modelados por equações diferenciais parciais que descrevem as leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Nesta área, discretiza-se os sistemas de equações diferenciais parciais por um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas computacionalmente. Uma ferramenta para a verificação destas metodologias numéricas são os estudos teóricos e as soluções analíticas, que também auxiliam no entendimento da dinâmica de fluidos complexos e na escolha dos parâmetros existentes nos modelos, [18, 19].

A solução analítica é obtida para alguns problemas, aqueles em que as condições do escoamento e de sua geometria geram hipóteses de simplificação das equações como, por exemplo, o escoamento totalmente desenvolvido entre placas paralelas ou em tubo que, inclusive, é uma classe de escoamentos mais simples e sua solução analítica pode ser encontrada na literatura tanto para fluidos Newtonianos como não-Newtonianos, [3, 11, 10, 20]

Aos poucos, em consequência da evolução da tecnologia, foram elaborados mais estudos [37, 36], sobre o comportamento dos fluidos, também tornando possível a simulação de escoamentos de fluidos que possibilita a observação dos diferentes tipos de fluidos sobre diferentes situações, como exemplo, diversos escoamentos laminares, aqueles em que o fluido move-se em camadas ou lâminas, ou seja, existe um mínimo de agitação das várias camadas do fluido; diversos escoamentos turbulentos, em que as partículas misturam-se de forma não linear, e diversos escoamentos transicionais. No final do século XIX, Reynolds realizou estudos relacionados a escoamentos dentro de tubos e verificou o fenômeno de transição de um escoamento laminar para um turbulento, e constatou que, de acordo com um parâmetro adimensional, conhecido posteriormente como número de Reynolds, seria possível identificar se o escoamento é laminar ou turbulento [35].

O objetivo desta ciência é estudar o comportamento de fluidos quando submetidos a uma deformação ou força de cisalhamento, estudar seu fluxo e, ainda, estudar sua resistência ao escoamento. A propriedade física que mede esta resistência é designada viscosidade. Como visto em [8], a viscosidade pode ser entendida como uma resistência do fluido a um escoamento de cisalhamento, ou seja, quando um fluido é submetido a uma tensão, se ele flui rapidamente, pode-se dizer que é pouco viscoso, como exemplo, a água. Por outro lado, se o fluido possui alguma resistência ao escoamento, pode-se dizer que é um fluido viscoso, por exemplo, os óleos.

Podemos classificar os fluidos como Newtonianos e não-Newtonianos. Essa classificação considera a relação existente entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de

deformação sofrida [24]. Um fluido é dito Newtoniano quando a tensão de cisalhamento aplicada é diretamente proporcional à taxa de deformação. São classificados como fluidos não-Newtonianos aqueles nos quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação sofrida.

Vale ressaltar, como visto em [31], que os fluidos Newtonianos constituem uma larga porcentagem dos fluidos presentes na biosfera, mas não há qualquer dúvida que os fluidos não-Newtonianos são igualmente relevantes em variadíssimos contextos, como exemplo, a maioria dos fluidos sintéticos industriais.

Assumindo a hipótese de não-escorregamento e o problema do escoamentos de fluidos viscoelásticos totalmente desenvolvidos em um canal ou tubo, Oliveira e Pinho [29] obtiveram a solução analítica para estes escoamentos considerando um fluido modelado pela equação constitutiva sPTT (simplified Phan-Thien–Tanner). Em seguida, Alves et al. [3] publicaram a solução analítica considerando o modelo PTT (Phan-Thien–Tanner), o qual apresenta uma derivada convectada mais geral. Oliveira [28] contribuiu nessa linha utilizando o fluido FENE-P. Considerando os fluidos viscoelásticos, sPTT e FENE-P, com contribuição de um solvente Newtoniano, Cruz e Pinho [10] também derivaram a solução analítica para este problema. A adição de um solvente Newtoniano ao fluido viscoelástico insere o termo dissipativo na equação do momento, o que torna o cálculo da solução analítica para a velocidade, matematicamente, mais trabalhoso. Em seguida, eles publicaram o trabalho [11] para modelos viscoelásticos multimodo sPTT, FENE-P e Giesekus, também considerando o solvente Newtoniano. Afonso et al. [1] combinaram a influência de eletro-cinética e forças de pressão e obtiveram a solução analítica para o referido problema usando os fluidos sPTT e FENE-P [16, 17, 26, 25]. Outros autores podem ser citados com trabalhos de obtenção de soluções analíticas [13, 14, 27, 33].

Neste trabalho, pretende-se iniciar os estudos em soluções analíticas de escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares, no estado estacionário com fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. A viscosidade é modelada a partir da Lei das Potências (*Power Law*) [5] e, no estado transiente, utiliza-se os métodos de Solução por Similaridade e Separação de Variáveis [4, 22, 30]. É importante destacar que, no contexto dos casos não-Newtonianos, até onde foi feito o levantamento bibliográfico, há uma deficiência na literatura de soluções analíticas para o caso do modelo da Lei das Potências. Os Problemas 3.1.5 e 3.1.6 foram resolvidos a partir das ideias de L.L. Ferrás.

Frente à limitação dos estudos teóricos, em que não é possível determinar soluções analíticas para escoamentos mais complexos, este trabalho apresenta um método numérico que pode ser estendido e aplicado para resolver escoamentos mais gerais. O método numérico escolhido para este trabalho foi o Método da Projeção [6] e sua implementação foi feita no Google Colaboratory em Python – vale ressaltar que outros softwares poderiam ter sido utilizados, Matlab ou Octave, por exemplo. O Método da Projeção resolve as variáveis primitivas, velocidade e pressão, de maneira segregada. As equações são discretizadas em uma malha deslocada, pois, neste trabalho será considerado o sistema Cartesiano bidimensional, utilizando a técnica de diferenças finitas, com células de dimensões δx e δy . As componentes u e v da velocidade são aproximadas, respectivamente, nos pontos $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$. Por outro lado, a pressão e a função potencial são avaliadas no centro da célula, ou seja, (i, j) .

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: neste capítulo são apresentadas as equações governantes que descrevem os escoamentos de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, incompressíveis, isotérmicos e laminares. Para o fluido Newtoniano e Newtoniano Generalizado (um caso não-Newtoniano), as equações são apresentadas na forma vetorial e em co-

ordenadas Cartesianas bidimensionais. O modelo reológico utilizado para o caso não-Newtoniano é a Lei das Potências.

- Capítulo 3: este capítulo está dividido em duas partes, escoamentos estacionários e transientes. Para o estado estacionário, os processos para a obtenção da solução analítica dos problemas são aplicados aos dois casos: fluido Newtoniano e não-Newtoniano. Enquanto que para o estado transiente, devido à adição da variável temporal, recorre-se aos métodos de solução por similaridade ou separação de variáveis para obtenção das soluções analíticas somente para o caso Newtoniano.
- Capítulo 4: este capítulo é dedicado a parte numérica do trabalho, em que descreve-se toda a metodologia numérica bem como a adimensionalização das equações. Os resultados das simulações numéricas do escoamento de um fluido Newtoniano em um canal bidimensional são apresentados neste capítulo. E, a fim de unir a parte teórica com a parte numérica deste trabalho, resultados das comparações entre as soluções numéricas e analíticas serão apresentados, proporcionando, assim, uma verificação e uma análise de convergência da metodologia numérica implementada.
- Capítulo 5: considerações finais do trabalho.

Formulação Matemática

Neste capítulo são apresentadas as equações de Navier-Stokes para os escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares de fluidos Newtonianos. Para o caso dos fluidos não-Newtonianos será utilizado um modelo de Fluido Newtoniano Generalizado conhecido como Lei das Potências. As equações serão apresentadas na forma vetorial e em coordenadas Cartesianas bidimensionais.

2.1 Equações Governantes

As equações que descrevem os escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares são as equações da continuidade e da quantidade de movimento, apresentadas, na forma conservativa e vetorial por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

respectivamente, em $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$, com apropriadas condições iniciais em $t = 0$ e de contorno em $\partial\Omega$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $t \in [0, T]$ é a variável independente temporal, $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definidos em cada $(\mathbf{X}, t) \in \Omega \times [0, T]$ do escoamento são, respectivamente, um campo vetorial que representa a velocidade do escoamento e um campo tensorial que representa as tensões geradas no escoamento em decorrência das propriedades do fluido, $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar que mede a pressão durante o escoamento em cada $(\mathbf{X}, t) \in \Omega \times [0, T]$ do domínio, \mathbf{f} um campo de força externa, e $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ representa a densidade do fluido.

Tendo em mente que, em um sistema de coordenadas Cartesianas bidimensionais, seja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ o vetor posição e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ o vetor velocidade, cujas entradas são as componentes da velocidade $u = u(x, y, t) = u(\mathbf{x}, t)$ e $v = v(x, y, t) = v(\mathbf{x}, t)$ ao longo das direções x e y , respectivamente. A densidade do fluido é representada por ρ , t o tempo, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ algum campo de força, como gravitacional, magnético ou eletromagnético e $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ é o tensor tensão total, definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

onde p é a pressão, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor simétrico das tensões. Esse tensor é determinado a partir de uma equação constitutiva que descreverá algumas características do fluido.

Desta forma, substituindo o tensor tensão total (2.3) na equação (2.2), obtém-se,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = -\nabla \cdot p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

As seções 2.1.1 e 2.1.2 são dedicadas à descrição do tensor $\boldsymbol{\tau}$.

2.1.1 Fluido Newtoniano

Define-se fluido como uma substância que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão de cisalhamento, assim, é possível classificá-lo a partir da relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação (ver, por exemplo, [5, 32, 30]).

Em modelos de fluidos Newtonianos, o tensor $\boldsymbol{\tau}$ é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação, descrito por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.5)$$

onde η_s , a constante de proporcionalidade, representa a viscosidade dinâmica do fluido e \mathbf{D} representa o tensor taxa de deformação, definido por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.6)$$

Em coordenadas Cartesianas bidimensionais, o tensor $\boldsymbol{\tau}$ (2.5) e o tensor taxa de deformação (2.6), tornam-se

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Calculando o divergente da equação (2.3) para um fluido Newtoniano, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \\ &= \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = \\ &= 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

considerando as componentes u e v pelo menos de classe $C^2(\Omega)$, o que é suficiente para aplicar o Teorema de Schwarz; e em seguida considera-se a equação (2.1), em que $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Portanto, a equação da continuidade (2.1) e da quantidade de movimento (2.4), em coordenadas Cartesianas bidimensionais para um fluido Newtoniano, podem ser reescritas como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.9)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho f_x, \quad (2.10)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho f_y. \quad (2.11)$$

A seguir, na seção 2.1.2, o tensor $\boldsymbol{\tau}$ será descrito para o caso de um fluido não-Newtoniano.

2.1.2 Fluido não-Newtoniano

Como visto anteriormente, no caso do fluido Newtoniano, η_s é sempre constante. Nos casos em que a viscosidade do fluido sofre alteração com a variação da taxa de cisalhamento, temperatura ou pressão, podemos tratá-los como escoamentos de Fluidos Newtonianos Generalizados. Esta classe de fluidos é classificada como fluido não-Newtoniano.

Neste trabalho, para o caso dos fluidos não-Newtonianos, será considerada a variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$. Desta forma, o tensor $\boldsymbol{\tau}$ será descrito por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}. \quad (2.12)$$

A taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ é definida por:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}} \quad (2.13)$$

onde a operação $:$ descreve um produto tensorial. Substituindo a equação (2.12) na equação (2.4), tem-se

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] - \nabla \cdot (\eta(\dot{\gamma})\nabla \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \nabla \cdot (\eta(\dot{\gamma})\nabla \mathbf{u}^T) + \rho \mathbf{f}. \quad (2.14)$$

Os modelos Lei das Potências, Carreau e Casson expressam as variações da viscosidade em função da taxa de cisalhamento [5, 21]. No contexto deste trabalho, o modelo escolhido é o da Lei das Potências, onde a viscosidade é expressa por

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.15)$$

onde m e n são constantes positivas conhecidas, respectivamente, como consistência e índice da Lei das Potências.

Quando $n = 1$, a equação (2.15) reduz-se ao fluido Newtoniano,

$$\eta = m\dot{\gamma}^{1-1} \Rightarrow \eta = m\dot{\gamma}^0 \Rightarrow \eta = m$$

uma vez que a viscosidade torna-se constante.

Por outro lado, quando $n < 1$, a viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento, configurando um fluido reofluidificante. E, se $n > 1$, a viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento, sendo classificado como fluido dilatante.

A Figura 2.1 mostra o comportamento da variação da viscosidade em função da taxa de cisalhamento modelado pela Lei das Potências.

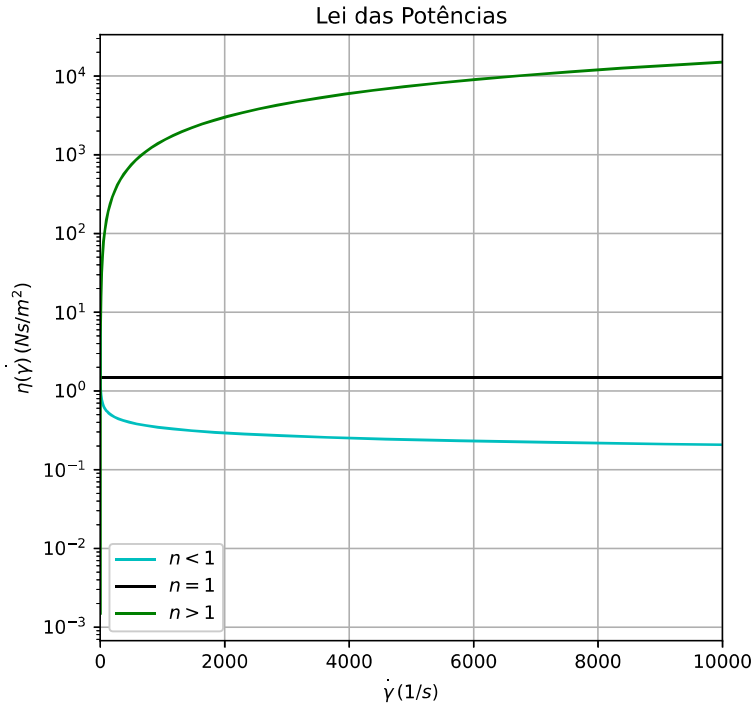


Figura 2.1: Esboço da viscosidade variando com a taxa de cisalhamento com parâmetros $m = 1.5$, $n = 0.785$, $n = 1$ e $n = 2$.

A equação (2.14), escrita em coordenadas Cartesianas bidimensionais, é descrita pelo seguinte sistema:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho f_x, \quad (2.16)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho f_y. \quad (2.17)$$

A taxa de cisalhamento dada pela equação (2.13), torna-se

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i}^2 D_{ij} D_{ji}},$$

ou seja,

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}. \quad (2.18)$$

No Capítulo 3, resolveremos analiticamente o sistema de equações (2.9), (2.16) e (2.17) para casos particulares.

Escoamentos Unidirecionais e Retilíneos

Neste capítulo são apresentados os escoamentos unidirecionais e retilíneos, ou seja, aqueles que possuem somente uma componente da velocidade não-nula e que apresentam a direção do escoamento sempre paralela a um dos eixos coordenados.

Estes tipos de escoamentos serão estudados em duas seções: para problemas estacionários (Seção 3.1) e para problemas transientes (Seção 3.2). No caso estacionário, os problemas serão resolvidos para fluidos Newtonianos e para fluidos modelados pela Lei das Potências. Já no caso transiente, os problemas serão resolvidos apenas para os fluidos Newtonianos. Para os problemas que resolveremos a partir desta seção, a força de campo \mathbf{f} , quando agir, será o campo gravitacional.

Suponha que um sistema de coordenadas cartesianas seja escolhido para descrever um escoamento retilíneo, com o eixo- x sendo paralelo à direção do escoamento, como na Figura 3.1.

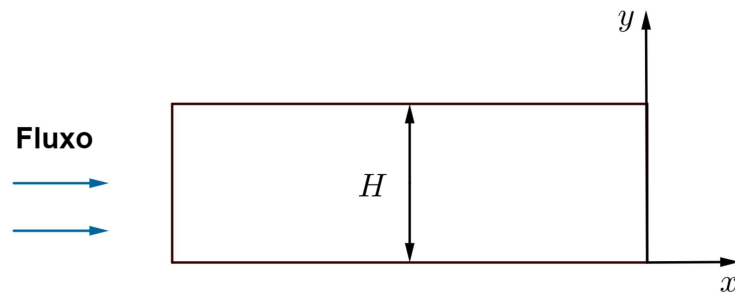


Figura 3.1: Geometria de um escoamento em um canal de seção transversal retangular bidimensional.

Desta forma, u é o único componente da velocidade não nulo e,

$$v = 0. \quad (3.1)$$

Assim, a equação da continuidade (2.9) para escoamentos incompressíveis, torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

o que indica a componente da velocidade u não muda na direção do escoamento, ou seja, u é independente de x

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(y, t). \quad (3.3)$$

Segundo [32, 30], os escoamentos que satisfazem as afirmações (3.1) e (3.3) são chamados escoamentos totalmente desenvolvidos, ou seja, aqueles em que o perfil de velocidade não muda na direção do escoamento.

3.1 Escoamentos Estacionários

Considerando os escoamentos no estado estacionário, ou seja, aqueles em que as propriedades do fluido não variam com o passar do tempo, o que indica que a componente temporal é nula

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

portanto, $\mathbf{u} = u(y)$.

- Fluidos Newtonianos

A partir das hipóteses (3.1), (3.2) e (3.4), podemos escrever a equação da quantidade de movimento em relação a x (2.10) como,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho f_x = 0. \quad (3.5)$$

Simplificando a equação (2.4), vem

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho f_x = 0. \quad (3.6)$$

O único componente não-nulo do tensor é a tensão de cisalhamento τ_{yx} ,

$$\tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy}. \quad (3.7)$$

Desta forma, a Equação Diferencial Ordinária linear de segunda ordem (3.5) é integrada em relação a y , obtendo o perfil de velocidade do escoamento

$$u(y) = \frac{1}{2\eta_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x \right) y^2 + c_1 y + c_2. \quad (3.8)$$

Portanto, o perfil de velocidade do escoamento é uma parábola que envolve duas constantes, c_1 e c_2 , que são determinadas pela aplicação das condições de contorno apropriadas para cada escoamento.

Ao derivar a equação (3.8) e substituir em (3.7), obtém-se a tensão de cisalhamento, que varia linearmente em y ,

$$\tau_{yx}(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x \right) y + \eta_s c_1. \quad (3.9)$$

Por outro lado, da afirmação (3.1), a equação da quantidade de movimento em relação a y (2.11) reduz-se a

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = 0. \quad (3.10)$$

- Fluidos não-Newtonianos: modelo Lei das Potências

Aplicando as simplificações (3.1), (3.2) e (3.4) nas equações (2.16), (2.17) e (2.18), tem-se que

$$\frac{d}{dy} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{du}{dy} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x, \quad (3.11)$$

onde, $\eta(\dot{\gamma}) = m \dot{\gamma}^{n-1} = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}$.

A solução analítica dos problemas envolvendo escoamentos unidirecionais, retilíneos e estacionários são apresentadas a seguir – sendo dividida em dois casos:

- Com fluido Newtoniano;
- Com fluido não-Newtoniano, a partir do Modelo Lei das Potências.

3.1.1 Escoamento Couette Planar

O escoamento Couette planar também conhecido como fluxo de cisalhamento simples, é o escoamento totalmente desenvolvido induzido entre duas placas paralelas infinitas, colocadas a uma distância H uma da outra, quando uma delas, neste caso, a superior, está se movendo continuamente com velocidade V em relação a outra.

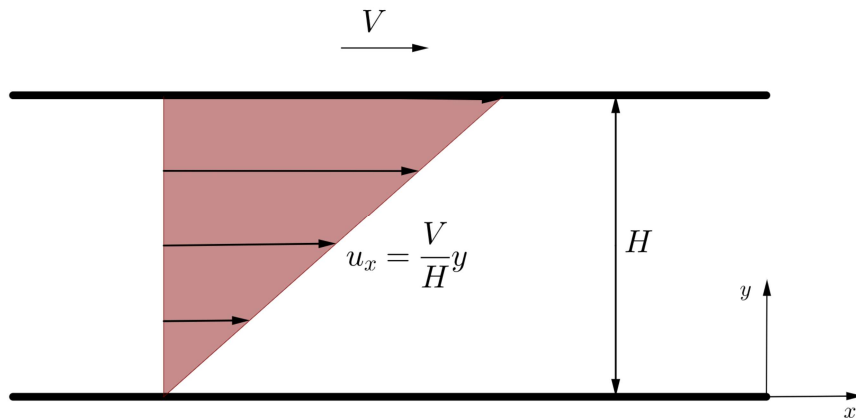


Figura 3.2: Escoamento Couette planar.

Fluido Newtoniano

Supõe-se que o gradiente de pressão e a componente da gravidade na direção x sejam nulos. Então, a equação (3.8) reduz-se à:

$$u(y) = c_1 y + c_2. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) mostra que este escoamento tem o perfil de velocidade linear. Para a geometria representada na Figura 3.2 as condições de contorno são:

$$\begin{cases} u(y) = 0 \text{ em } y = 0 \\ u(y) = V \text{ em } y = H \end{cases}$$

a partir da primeira condição de contorno, descobre-se que:

$$u(y) = c_1 y + c_2 \Rightarrow 0 = c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0,$$

considera-se então a constante $c_2 = 0$ e a segunda condição de contorno,

$$u(y) = c_1 y + c_2 \Rightarrow V = c_1 H + 0 \Rightarrow V = c_1 H \Rightarrow c_1 = \frac{V}{H}.$$

Obtidas as constantes c_1 e c_2 , substitui-se na equação (3.12),

$$u(y) = \frac{V}{H} y \quad (3.13)$$

com $0 \leq y \leq H$, representa a solução analítica para o escoamento Couette planar no estado estacionário para o caso Newtoniano.

Para obter a tensão de cisalhamento correspondente ao escoamento, deriva-se a equação (3.13), como segue,

$$\tau_{yx}(y) = \eta_s \frac{du}{dy} = \eta_s \frac{d}{dy} \left(\frac{V}{H} y \right) = \eta_s \frac{V}{H} \quad (3.14)$$

mostrando que a tensão de cisalhamento é constante.

Por outro lado, ao integrar a equação (3.13), obtém-se a taxa de fluxo volumétrico por unidade de largura, que representa o volume de fluido que atravessa uma determinada área em um tempo determinado,

$$\frac{Q}{W} = \int_0^H u dy = \int_0^H \frac{V}{H} y dy = \frac{V}{H} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H = \frac{V}{H} \left(\frac{H^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{VH^2}{2H} = \frac{1}{2} VH \quad (3.15)$$

e a tensão de cisalhamento τ_w exercida pelo fluido na placa superior é

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\eta_s \frac{V}{H}, \quad (3.16)$$

o sinal negativo representa a parede superior voltada para a direção y negativa do sistema de coordenadas escolhido. A força de cisalhamento por unidade de largura necessária para mover a placa superior é,

$$\frac{F}{W} = - \int_0^L \tau_w dx = - \int_0^L -\eta_s \frac{V}{H} dx = \eta_s \frac{V}{H} \int_0^L dx = \eta_s \frac{V}{H} [x]_0^L = \eta_s \frac{V}{H} L, \quad (3.17)$$

onde L é o comprimento da placa.

Agora, considerando o caso em que ambas placas se movem com a mesma velocidade V . As condições de contorno tornam-se então,

$$u(0) = u(H) = V.$$

Aplica-se as condições de contorno para obter as constantes,

$$c_1 0 + c_2 = c_1 H + c_2 = V$$

ou seja,

$$c_2 = V \text{ e } c_1 = 0,$$

logo, substituindo as constantes c_1 e c_2 na equação (3.12),

$$u(y) = V.$$

Assim, neste caso, o escoamento Couette planar se degenera em um escoamento com perfil de velocidade constante

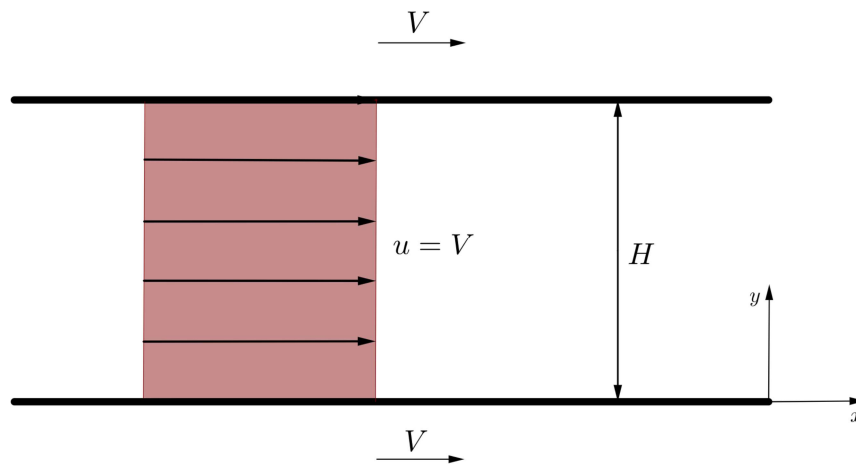


Figura 3.3: Escoamento Couette planar com perfil de velocidade constante.

A seguir, uma representação do perfil de velocidade para o escoamento Couette planar no estado estacionário para o caso Newtoniano.

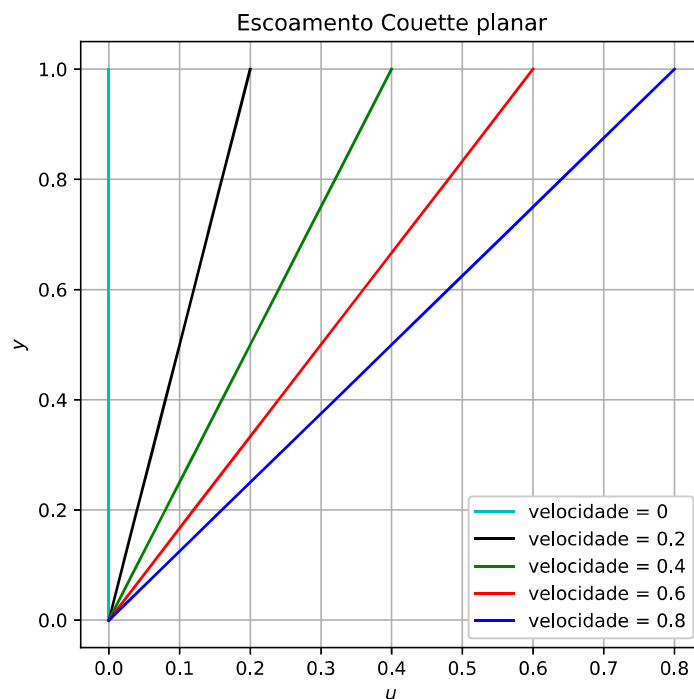


Figura 3.4: Solução analítica para o escoamento Couette planar com as velocidades 0, 0.2, 0.4, 0.6 e 0.8, e amplitude $H = 1$.

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

O gradiente de pressão e a componente da gravidade na direção x são nulos. Desta forma, a equação (3.11) reduz-se à:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = 0, \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Integra-se a primeira equação de (3.18) em relação a y ,

$$\int \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) dy = \int 0 dy \Rightarrow \eta \frac{du}{dy} = c_1. \quad (3.19)$$

Antes de começar a modelagem da viscosidade, é necessário analisar o sinal da derivada, uma vez que a expressão que descreve a viscosidade η , apresentada em (3.18), inclui o módulo de $\frac{du}{dy}$.

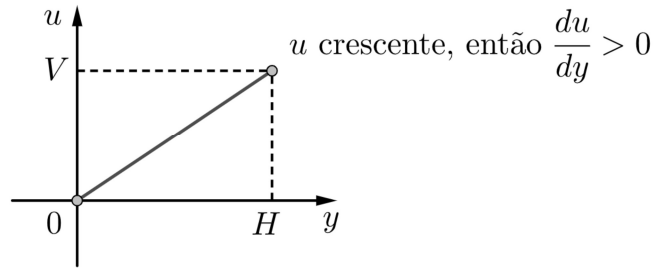


Figura 3.5: Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Couette planar.

Como $\frac{du}{dy} > 0$, substituindo a equação (3.18) em (3.19), tem-se:

$$m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = c_1 \Rightarrow m \left(\frac{du}{dy} \right)^n = c_1 \Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(\frac{c_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.20)$$

integra-se (3.20) em relação a y ,

$$\int \frac{du}{dy} dy = \left(\frac{c_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \int dy \Rightarrow u = \left(\frac{c_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} y + c_2. \quad (3.21)$$

Para obter as constantes c_1 e c_2 , aplica-se as condições de contorno,

$$0 = u(0) \Rightarrow 0 = \left(\frac{c_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0,$$

e,

$$V = u(H) \Rightarrow V = \left(\frac{c_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} H \Rightarrow c_1 = \left(\frac{V}{H} \right)^n m$$

onde $c_1 > 0$. Logo, reescreve-se a equação (3.21),

$$u(y) = \left(\frac{\left(\frac{V}{H} \right)^n m}{m} \right)^{\frac{1}{n}} y \Rightarrow u(y) = \frac{V}{H} y$$

com $0 \leq y \leq H$, que representa a solução analítica para o escoamento Couette planar no estado estacionário no caso não-Newtoniano. Para este escoamento, percebe-se que a solução analítica para as duas classes de fluidos, Newtoniano e não-Newtoniano, coincidem.

3.1.2 Escoamento Poiseuille Planar Totalmente Desenvolvido

O escoamento Poiseuille planar ocorre quando um fluido é colocado em movimento, a partir de um gradiente de pressão constante $\frac{\partial p}{\partial x}$, entre duas placas infinitas, paralelas e estacionárias, com a componente da gravidade nula.

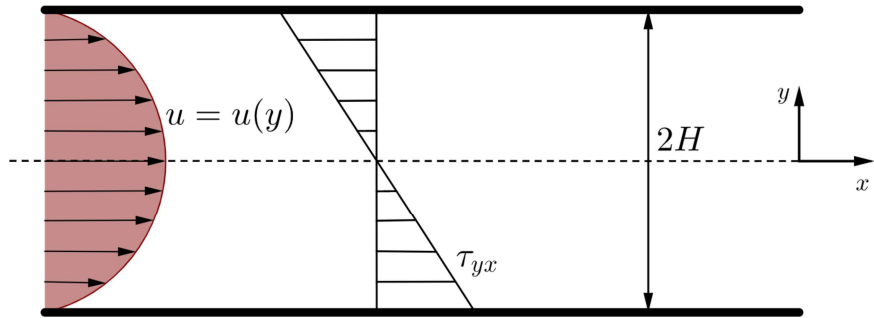


Figura 3.6: Escoamento Poiseuille planar.

Fluido Newtoniano

Com estas hipóteses a equação (3.6) reduz-se à:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.22)$$

em que agora $\frac{\partial p}{\partial x}$ é uma constante negativa. Para obter a solução geral para o estado estacionário, integra-se a equação (3.22) duas vezes em relação a y , como é apresentado na equação (3.8).

Toma-se no eixo de simetria do escoamento passando pela origem do plano Cartesiano, como mostra a Figura 3.6. Assume-se que a distância entre as duas placas seja $2H$. Desta forma, as condições de contorno são:

$$\begin{cases} \tau_{yx}(y) = \eta_s \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ (eixo de simetria)} \\ u(y) = 0 \text{ em } y = H \text{ (placa estacionária)} \end{cases}$$

em consequência da simetria do fluxo, a condição $u = 0$ em $y = -H$ também poderia ser usada.

Para aplicar a condição de contorno no eixo de simetria, deriva-se a equação (3.8), obtendo a tensão de cisalhamento,

$$\tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy} = \eta_s \frac{d \left(\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \right)}{dy} = \eta_s \left(\frac{1}{\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \right) = \frac{\partial p}{\partial x} y + \eta_s c_1. \quad (3.23)$$

Ao aplicar as condições de contorno, descobre-se as constantes $c_1 = 0$ e $c_2 = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2$. Logo, a distribuição da tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau_{yx}(y) = \frac{\partial p}{\partial x} y \quad (3.24)$$

ou seja, τ_{yx} varia linearmente, sendo zero no eixo de simetria e atingindo seu valor absoluto máximo na parede. A tensão de cisalhamento exercida pelo fluido na parede em $y = H$ é

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\frac{\partial p}{\partial x} H.$$

As constantes c_1 e c_2 são substituídas na equação (3.8), que descreve o seguinte perfil de velocidade parabólica,

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2), \quad (3.25)$$

com $-H \leq y \leq H$. A equação (3.25) é a solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido no estado estacionário para o caso Newtoniano.

Se o gradiente de pressão for negativo, então o fluxo está na direção positiva, como na Figura 3.6. No eixo de simetria, onde $y = 0$, a velocidade u atinge seu valor máximo,

$$u_{max} = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2.$$

A taxa de fluxo volumétrico por unidade de largura é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= \int_{-H}^H u dy = \\ &= 2 \int_0^H -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) dy = \\ &= 2 \left(\int_0^H -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 dy + \int_0^H \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 dy \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 [y]_0^H + \left(\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^H \right) \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 + \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^3}{3} \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{H^3}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H^3}{6\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{-6\eta_s H^3 + 2\eta_s H^3}{12\eta_s^2} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{-4\eta_s H^3}{12\eta_s^2} \right) = \\ &= -2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^3}{3\eta_s} = \\ &= -\frac{2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \Rightarrow Q = \frac{-2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 W. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A equação (3.26) indica que a taxa de fluxo volumétrico Q é proporcional ao gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$, e inversamente proporcional à viscosidade η_s . Observe também que, como $\frac{\partial p}{\partial x}$ é negativo, Q é positivo.

Por outro lado, a velocidade média \hat{u} é dada por,

$$\hat{u} = \frac{Q}{WH} = -\frac{2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2.$$

A seguir, uma representação do perfil de velocidade para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido no estado estacionário para o caso Newtoniano.

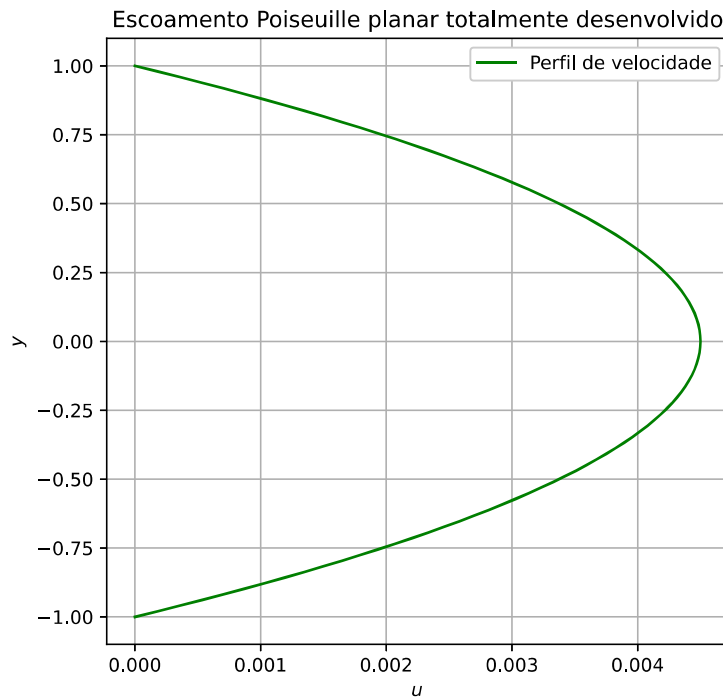


Figura 3.7: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido com os parâmetros $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$.

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

A partir da descrição já feita das hipóteses de simplificação para este problema, a equação (3.11) reduz-se à

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Integra-se a primeira equação do sistema de equações (3.27) em relação a y , resultando em

$$\eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y + c_1$$

aplicando a condição de contorno $\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} = 0$ em $y = 0$, tem-se,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0, \quad (3.28)$$

logo, $\eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y$.

Para a modelagem da viscosidade η , é necessário analisar o sinal da derivada do problema, a Figura 3.8 ilustra seu comportamento.

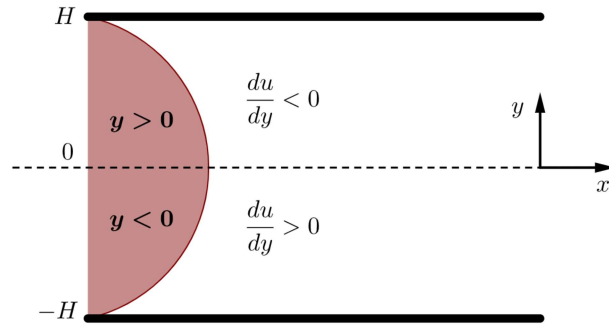


Figura 3.8: Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido.

Este escoamento é simétrico, portanto, resolve-se para metade do canal, neste caso, para $\frac{du}{dy} > 0$, $y < 0$,

$$m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow m \left(\frac{du}{dy} \right)^n = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} y \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.29)$$

como $y < 0$, $m > 0$ e $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ se quisermos uma solução real, n deve ser ímpar.

Integra-se a equação (3.29) em relação a y ,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{dy} dy &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \int y^{\frac{1}{n}} dy \Rightarrow \\ u(y) &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) y^{\frac{1+n}{n}} + c_2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

por outro lado, a partir da condição de contorno $u = 0$ em $y = -H$, obtém-se a constante c_2

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} + c_2 \Rightarrow \\ c_2 &= - \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}}. \end{aligned}$$

Substituindo a constante c_2 em (3.30), tem-se,

$$u(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) y^{\frac{1+n}{n}} - \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} \Rightarrow$$

$$u(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) \left(y^{\frac{1+n}{n}} - (-H)^{\frac{1+n}{n}} \right), \quad -H \leq y \leq 0$$

que é a solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido no estado estacionário para o caso não-Newtoniano. Devendo ser n ímpar para obtenção de solução real.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pela solução analítica acima, é apresentada a seguir na Figura 3.9.

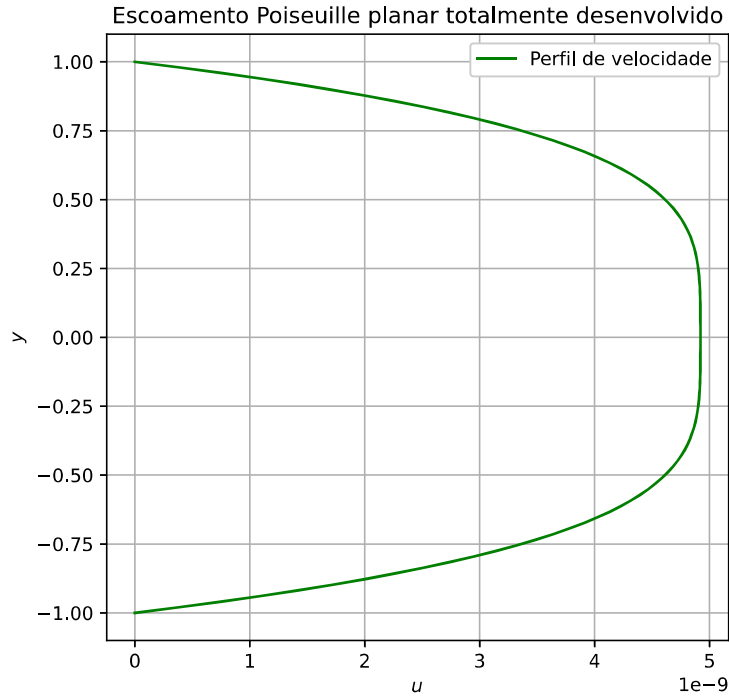


Figura 3.9: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$.

3.1.3 Escoamento Poiseuille Planar com Escorregamento

Considere o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido do Problema (3.1.2), e assuma que o deslizamento ocorre ao longo das duas placas, de acordo com a lei do deslizamento dada por

$$\tau_w = \beta u_w \text{ em } y = H,$$

onde $\beta > 0$ é o parâmetro de deslizamento do material, τ_w é a tensão de cisalhamento exercida pelo fluido na placa, que pode ser descrita por

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H},$$

e u_w é a velocidade de deslizamento.

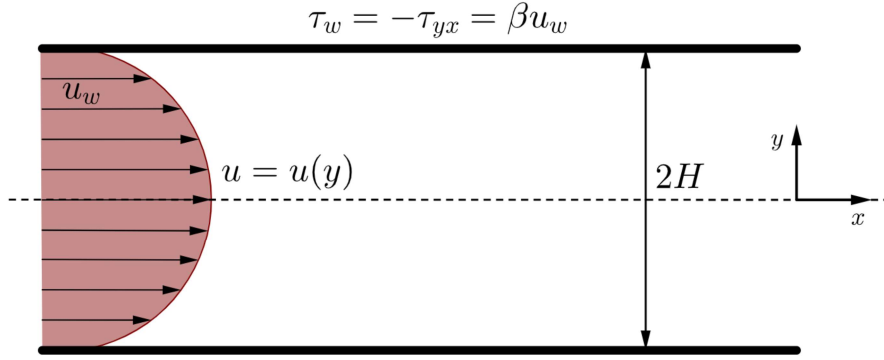


Figura 3.10: Escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

Fluido Newtoniano

Este fluxo é simétrico em relação ao eixo de simetria. Neste caso, as condições de contorno são

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = 0, \\ \tau_w = \beta u_w \text{ em } y = H. \end{cases}$$

A condição em $y = 0$ resulta em $c_1 = 0$, com base na equação (3.8) para o gradiente de pressão constante e gravidade nula. Conseqüentemente,

$$u(y) = \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_2,$$

com a tensão de cisalhamento dada por,

$$\tau_{yx} = -\eta_s \frac{du}{dy} = -\eta_s \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_2 \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} y,$$

onde $\tau_{yx}|_{y=H} = \tau_w = -\frac{\partial p}{\partial x} H$.

Para obter a constante c_2 , aplica-se a condição de contorno em $y = H$,

$$\tau_w = \beta u_w \Rightarrow u_w = \frac{1}{\beta} \tau_w \Rightarrow u(H) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H \Rightarrow \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 + c_2 = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H,$$

logo,

$$c_2 = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} \right)$$

e, assim,

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} \right) = -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} - y^2 \right). \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é a solução analítica do escoamento Poiseuille planar com escorregamento no estado estacionário para o caso Newtoniano, e descreve o perfil de velocidade do escoamento. Observe também que esta expressão reduz-se ao perfil do escoamento de Poiseuille padrão quando $\beta \rightarrow \infty$, uma vez que a velocidade de escorregamento é inversamente proporcional ao coeficiente de escorregamento β .

Uma outra alternativa para a expressão da distribuição de velocidade é,

$$u(y) = u_w - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2)$$

o que indica que u é a superposição da velocidade de escorregamento u_w à distribuição de velocidade do problema 3.1.2.

Para obter a taxa de fluxo volumétrico por unidade de largura, faz-se,

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{W} &= 2 \int_0^H u dy = \\
&= 2 \int_0^H \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left(H^2 + \frac{2\eta_s H}{\beta} - y^2 \right) \right) dy = \\
&= 2 \left(\int_0^H -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 dy + \int_0^H -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2\eta_s H}{\beta} dy + \int_0^H -\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 dy \right) = \\
&= 2 \left(\left[-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 y \right]_0^H + \left[-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2\eta_s H}{\beta} y \right]_0^H + \left[\frac{1}{6\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} y^3 \right]_0^H \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2\eta_s H^2}{\beta} + \frac{1}{6\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left(1 + \frac{2\eta_s}{\beta H} - \frac{1}{3} \right) \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{2\eta_s}{\beta H} \right) \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{2}{6\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 - \frac{2\eta_s}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^3}{\beta H} \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{1}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^2}{\beta} \right) = \\
&= 2 \left(-\frac{\partial p}{\partial x} H^3 \frac{1}{3\eta_s} \left(1 + \frac{3\eta_s}{H\beta} \right) \right) = \\
&= \frac{-2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left(1 + \frac{3\eta_s}{H\beta} \right) \Rightarrow Q = -\frac{2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 W \left(1 + \frac{3\eta_s}{\beta H} \right). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

A velocidade média \hat{u} é dada por

$$\hat{u} = \frac{Q}{WH} = -\frac{2}{3\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 \left(1 + \frac{3\eta_s}{\beta H} \right). \tag{3.33}$$

A seguir, uma representação do perfil de velocidade do escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

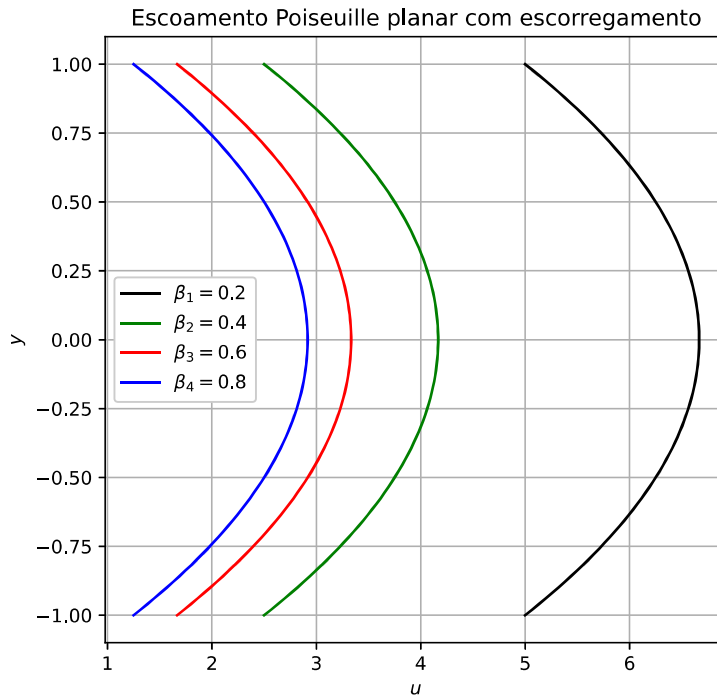


Figura 3.11: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 , $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e amplitude do canal $H = 1$.

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

A partir das hipóteses já apresentadas para este problema, $\frac{\partial p}{\partial x}$ constante e gravidade nula, a equação (3.11) reduz-se à

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Integra-se a primeira equação do sistema de equações (3.34) em relação a y ,

$$\int \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) dy = -\frac{\partial p}{\partial x} \int dy \Rightarrow \eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y + c_1. \quad (3.35)$$

Para obter a constante c_1 , aplica-se a condição de contorno $\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} = 0$ em $y = 0$,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Obtida a constante $c_1 = 0$, podemos substituí-la em (3.35), e desta forma,

$$\eta \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (3.36)$$

Para fazer a modelagem da viscosidade η é preciso analisar o comportamento da derivada, como ilustra a Figura 3.12.

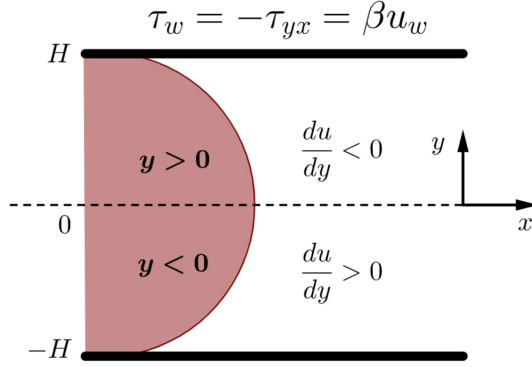


Figura 3.12: Ilustração do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille planar com escorregamento.

Como o escoamento é simétrico, busca-se a solução apenas para $\frac{du}{dy} > 0$, $y < 0$, e substituindo a modelagem de viscosidade dada pela segunda equação do sistema (3.34) em (3.36), vem,

$$m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow m \left(\frac{du}{dy} \right)^n = -\frac{\partial p}{\partial x} y \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} y \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.37)$$

Integra-se (3.37) em relação a y ,

$$\int \frac{du}{dy} dy = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \int y^{\frac{1}{n}} dy \Rightarrow$$

$$u(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) y^{\frac{1+n}{n}} + c_2. \quad (3.38)$$

Para obter a constante c_2 deve-se calcular a tensão de cisalhamento, obtida derivando a equação (3.38), para posteriormente aplicar a condição de contorno $\tau_w = \beta u_w$. Sendo assim,

$$\tau_{yx} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) \left(\frac{1+n}{n} \right) y^{\frac{1+n}{n}-1} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$$

consequentemente,

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=-H} = - \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (-H)^{\frac{1}{n}} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} H \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Da condição de contorno $\tau_w = \beta u_w$ implica $u_w = \frac{1}{\beta} \tau_w$ e, considerando que $u(-H) =$

$-\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} H \right)^{\frac{1}{n}}$, iguala-se a equação (3.38), para obter a constante c_2

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) y^{\frac{1+n}{n}} + c_2 = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} H \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$c_2 = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\beta} H^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} \right) \quad (3.39)$$

a constante c_2 , descrita por (3.39), é substituída na equação (3.38), que apresenta a solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento no estado estacionário para o caso não-Newtoniano

$$\begin{aligned} u(y) &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) y^{\frac{1+n}{n}} - \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\beta} H^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} \right) = \\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{n}{1+n} \right) (y^{\frac{1+n}{n}} - H^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{\beta} H^{\frac{1}{n}}) \right), \quad -H \leq y \leq 0, \end{aligned}$$

onde n é tal que a solução seja válida matematicamente.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pela solução analítica acima, é apresentada a seguir na Figura 3.13.

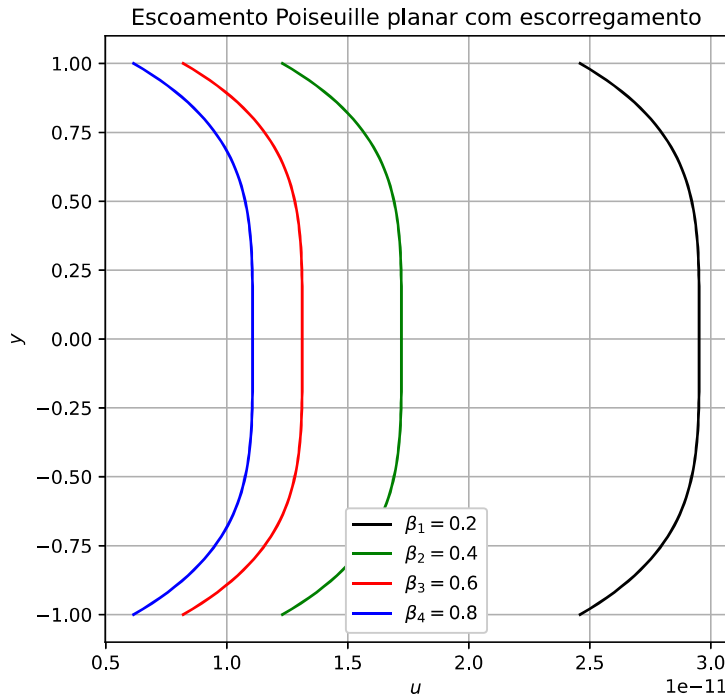


Figura 3.13: Solução analítica para o escoamento Poiseuille planar com escorregamento para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/2$, $m = 1$ e com os parâmetros de deslizamento do material $\beta = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0,0027$ e amplitude do canal $H = 1$.

3.1.4 Escoamento Couette-Poiseuille Planar

Considere o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido com a placa superior movendo-se com a velocidade constante V . Este escoamento é denominado Couette-Poiseuille planar ou Couette geral.

Em contraste com os dois exemplos anteriores, este escoamento não é simétrico em relação ao eixo de simetria do canal, desta maneira, ter a origem das coordenadas car-

tesianas na linha central não é conveniente. Portanto, a origem é movida para a placa inferior.

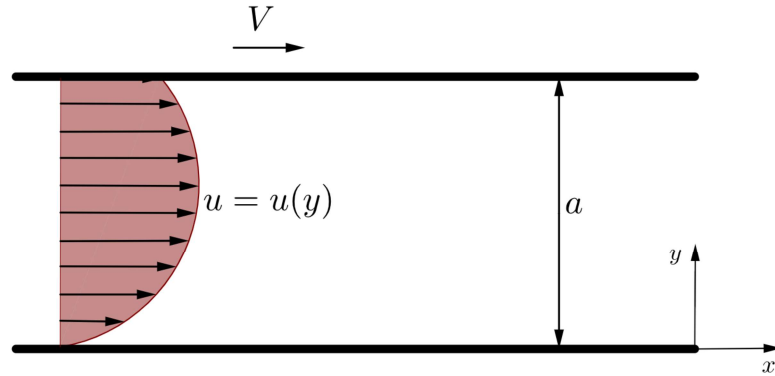


Figura 3.14: Escoamento Couette-Poiseuille planar.

Fluido Newtoniano

As condições de contorno para este escoamento são:

$$\begin{cases} u = 0 \text{ em } y = 0 \\ u = V \text{ em } y = a \end{cases}$$

onde a é a distância entre as duas placas.

A partir das condições de contorno pode-se obter as constantes de integração c_1 e c_2 . Como $u(0) = 0$, tem-se que

$$0 = \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} 0^2 + c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0,$$

ou seja, $c_2 = 0$. E, como $u(a) = V$,

$$V = \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 + c_1 a \Rightarrow c_1 = \frac{V}{a} - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} a$$

obtendo $c_1 = \frac{V}{a} - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} a$. Logo, obtidas as constantes c_1 e c_2 , substitui-se na equação (3.8), gerando a solução analítica do escoamento no estado estacionário para o caso Newtoniano

$$u(y) = \frac{V}{a} y - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (ay - y^2). \quad (3.40)$$

A partir da solução analítica para este escoamento, descrita pela equação (3.40), pode-se obter a tensão de cisalhamento

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \eta_s \frac{du}{dy} = \\ &= \eta_s \frac{d\left(\frac{V}{a} y - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} (ay - y^2)\right)}{dy} = \\ &= \eta_s \left(\frac{V}{a} - \frac{1}{2\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} a + \frac{1}{\eta_s} \frac{\partial p}{\partial x} 2y\right) = \\ &= \frac{V}{a} \eta_s - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (a - 2y). \end{aligned} \quad (3.41)$$

O perfil de velocidade deste escoamento, descrito por (3.40), quando $a = 2H$ e com o eixo- y transladado a uma distância H e quando $V = 0$, se degenera ao escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido, como mostra o Problema (3.1.2), com perfil de velocidade parabólico, descrito pela equação (3.8). Por outro lado, se o gradiente de pressão for zero, o escoamento se degenera para o Couette planar, estudado no Problema (3.1.1), onde o perfil de velocidade é linear. Desta forma, a solução analítica apresentada na equação (3.40) é a soma das soluções para os dois problemas citados acima. Essa superposição de soluções é resultado da linearidade da equação (3.5) e das condições de contorno.

Observe também que a equação (3.40) é válida não apenas quando o gradiente de pressão e o movimento da parede conduzem o fluido na mesma direção, mas também quando se opõem. Quando $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$, pode ocorrer um fluxo reverso na direção- x negativa. Por fim, é possível encontrar o ponto y^* onde a velocidade atinge seu valor máximo. Este ponto é um zero da tensão de cisalhamento

$$0 = \eta_s \frac{V}{a} - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (a - 2y^*) \Rightarrow y^* = \frac{a}{2} - \frac{\eta_s V}{a \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)}$$

quando $V = 0$, $y^* = \frac{a}{2}$, ou seja, à metade da largura do canal, como esperado no caso particular do escoamento Poiseuille.

Uma representação gráfica do perfil de velocidade para o escoamento Couette-Poiseuille planar no estado estacionário para o caso Newtoniano é apresentada na Figura 3.15.

Para o gradiente de pressão positivo:

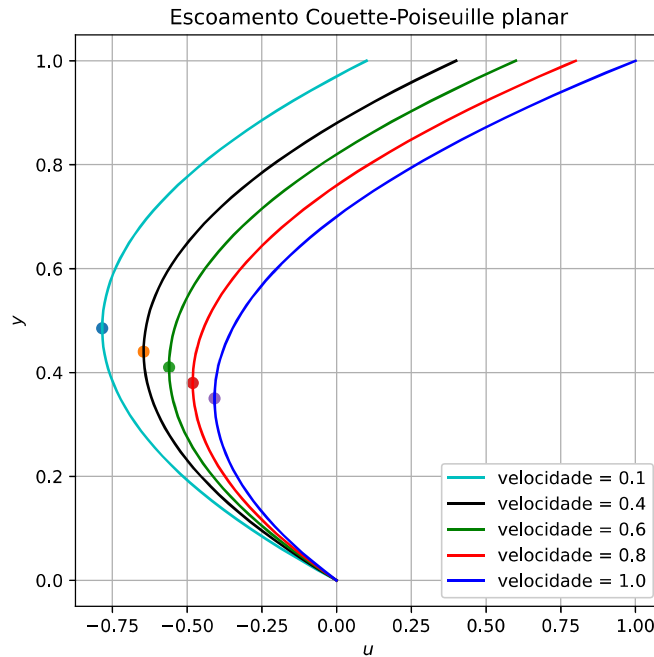


Figura 3.15: Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar com velocidade máxima em y^* representado por pontos nos gráficos com $V = 0.1, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 , amplitude $a = 1$, $\eta_s = 0.3$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 2$.

E, para o gradiente de pressão negativo, na Figura 3.16:

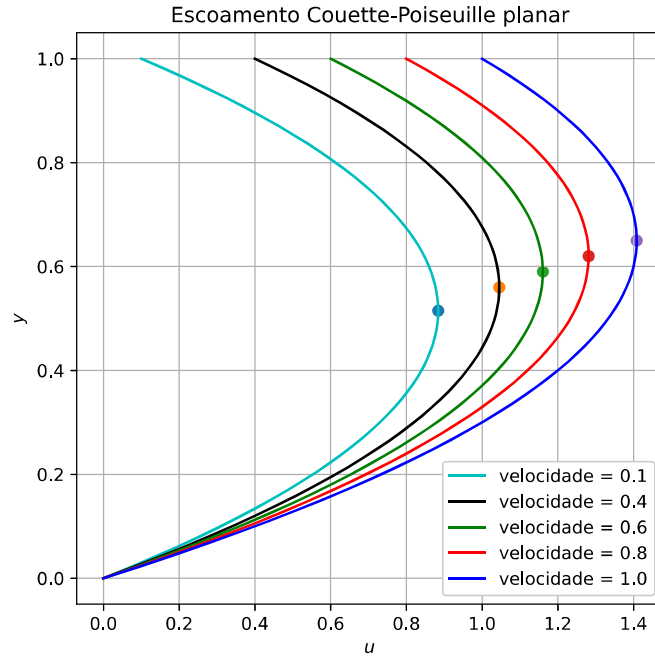


Figura 3.16: Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar com velocidade máxima em y^* representado por pontos nos gráficos com $V = 0.1, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 , amplitude $a = 1$, $\eta_s = 0.3$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = -2$.

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

A resolução deste problema segue o trabalho [20] de Davaa, Shiguechi e Momoki, no qual os autores apresentam os detalhes desta resolução e diversos dados acerca do comportamento deste escoamento.

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}. \end{cases} \quad (3.42)$$

Integra-se a primeira equação de (3.42) em relação a y , obtendo

$$\eta \frac{du}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1. \quad (3.43)$$

Este escoamento não é simétrico. Portanto, para a modelagem do parâmetro η divide-se o canal longitudinalmente em dois: como ilustrado na Figura 3.17.

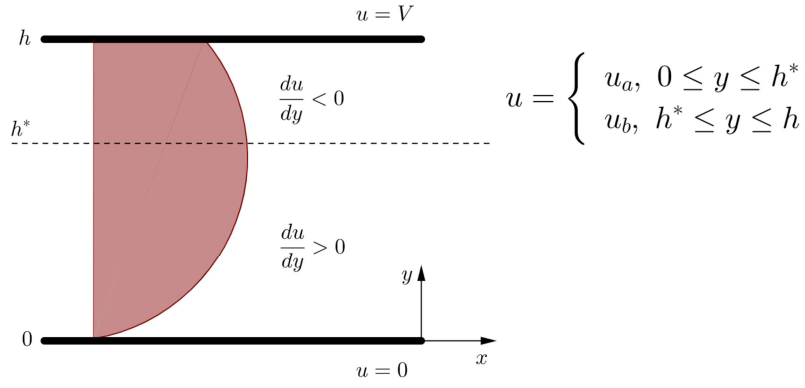


Figura 3.17: Ilustração do sinal de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Couette-Poiseuille planar.

Considerando a equação (3.43), para $0 \leq y \leq h^*$, vem

$$\frac{du_a}{dy}(h^*) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial p}{\partial x} h^* + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} h^*.$$

Obtendo a constante $c_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} h^*$. Desta forma, pode-se substituir a constante e reescrever a equação (3.43).

$$\eta \frac{du_a}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} (y - h^*). \quad (3.44)$$

Como $\frac{du_a}{dy} > 0$, aplica-se a viscosidade η em (3.44), da seguinte forma

$$m \left(\frac{du_a}{dy} \right)^n = \frac{\partial p}{\partial x} (y - h^*) \Rightarrow \frac{du_a}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (y - h^*)^{\frac{1}{n}} \quad (3.45)$$

Para obter o perfil de velocidade, integra-se (3.45) em relação a y ,

$$u_a(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (y - h^*)^{\frac{1+n}{n}} + c_2 \quad (3.46)$$

da condição de contorno $u_a(0) = 0$, pode-se obter a constante c_2 ,

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (0 - h^*)^{\frac{1+n}{n}} + c_2 \Rightarrow$$

$$c_2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (-h^*)^{\frac{1+n}{n}}$$

obtida a constante c_2 , pode-se reescrever a equação (3.46)

$$u_a(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) [(y - h^*)^{\frac{1+n}{n}} - (-h^*)^{\frac{1+n}{n}}], \quad 0 \leq y \leq h^* \quad (3.47)$$

que descreve o perfil de velocidade para a parte crescente do canal, no estado estacionário e para o caso não-Newtoniano.

Pela continuidade da derivada de u , c_1 possui o mesmo valor para a parte em que a velocidade decresce, onde $h^* \leq y \leq h$, ou seja, a constante c_1 é dada por

$$\frac{du_b}{dy}(h^*) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} h^*,$$

e desta forma, reescreve-se a equação (3.43)

$$\eta \frac{du_b}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} (y - h^*). \quad (3.48)$$

Substituindo a modelagem de η considerando $\frac{du_b}{dy} < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} -m \left(-\frac{du_b}{dy} \right)^n &= \frac{\partial p}{\partial x} (y - h^*) \Rightarrow \\ \frac{du_b}{dy} &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (h^* - y)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para obter o perfil de velocidade desta parte do canal, integra-se (3.49) em relação a y

$$u_b(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (h^* - y)^{\frac{1+n}{n}} + c_2 \quad (3.50)$$

e, da condição de contorno $u_b(h) = V$, é possível obter a constante de integração c_2

$$c_2 = V - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (h^* - h)^{\frac{1+n}{n}}$$

assim, substituindo a constante c_2 na equação (3.50), é obtida a solução analítica para a parte em que a velocidade decresce, no estado estacionário e no caso não-Newtoniano.

$$u_b(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) [(h^* - y)^{\frac{1+n}{n}} - (h^* - h)^{\frac{1+n}{n}}] + V, \quad h^* \leq y \leq h. \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que o índice n é determinado de tal forma que a solução seja válida matematicamente.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pelas soluções analíticas para u_a e u_b , a partir das equações (3.47) e (3.51), respectivamente, são apresentadas a seguir nas Figuras 3.18 e 3.19.

Para o gradiente de pressão positivo:

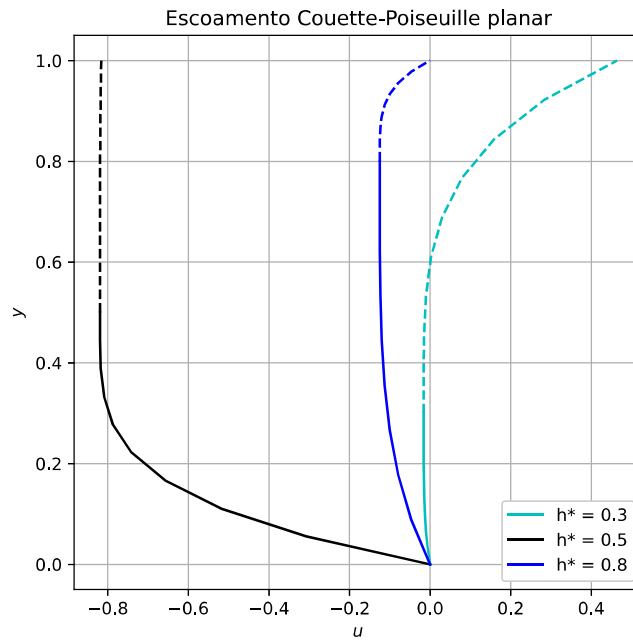


Figura 3.18: Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $h^* = 0.3, 0.5$ e 0.8 , $h = 1$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 2$. A linha contínua representa u_a e a pontilhada u_b .

E, para o gradiente de pressão negativo:

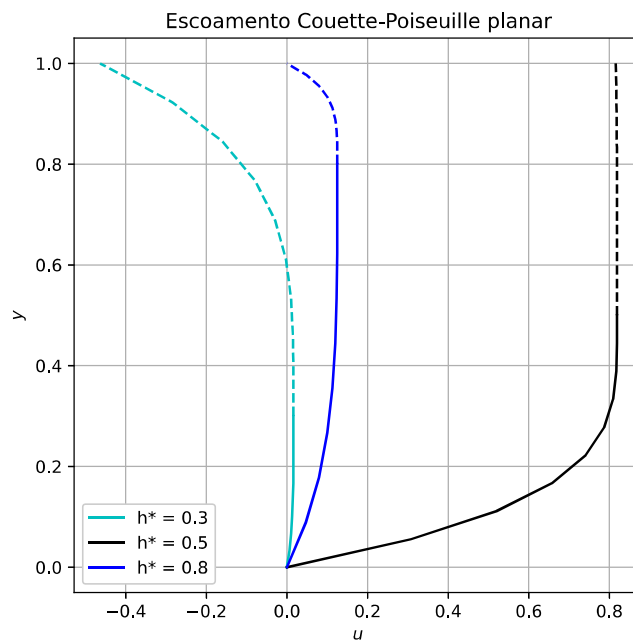


Figura 3.19: Solução analítica para o escoamento Couette-Poiseuille planar para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$, $h^* = 0.3, 0.5$ e 0.8 , $h = 1$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = -2$. A linha contínua representa u_a e a pontilhada u_b .

Além disso, escolhida a altura h^* onde ocorre a velocidade máxima, qual deve ser a velocidade V na placa?

Como u é contínua em h^* então $u_a(h^*) = u_b(h^*)$. Logo, aplica-se as equações (3.47) e (3.51), que representam as soluções analíticas para cada parte do canal, em h^*

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) [-(-h^*)^{\frac{1+n}{n}}] = V + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) [-(h^* - h)^{\frac{1+n}{n}}] \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) [(h^* - h)^{\frac{1+n}{n}} - (-h^*)^{\frac{1+n}{n}}]$$

ou seja, escolhida a altura h^* , $0 \leq h^* \leq h$, obtém-se o valor da velocidade V na placa.

3.1.5 Escoamento Poiseuille Entre Placas Inclinadas

Considere o escoamento estacionário entre duas placas inclinadas paralelas, impulsionado tanto pelo gradiente de pressão constante quanto pela gravidade. A distância entre as duas placas é $2H$. Um esboço do problema é mostrado na Figura 3.20. O ângulo formado pelas duas placas e a direção horizontal é θ .

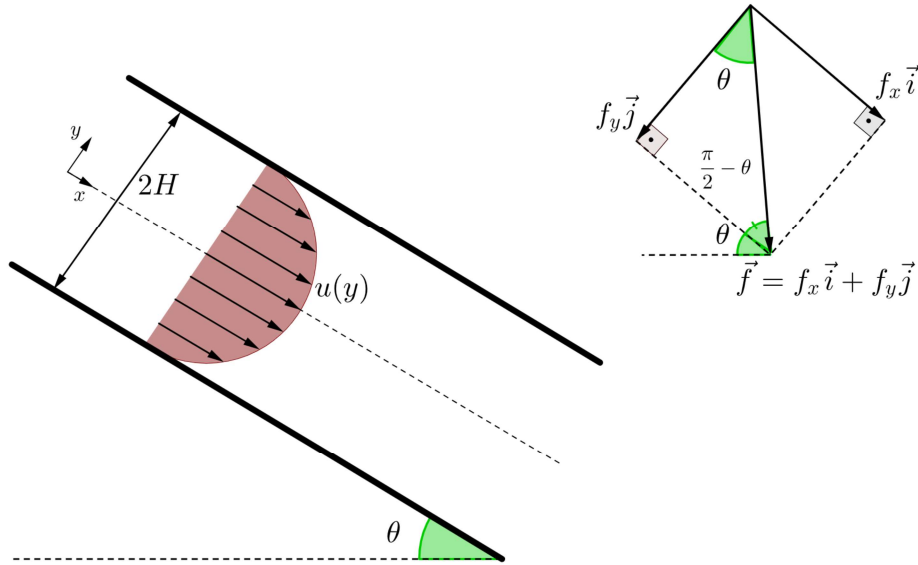


Figura 3.20: Esboço do escoamento Poiseuille entre placas inclinadas.

Fluido Newtoniano

A solução geral deste escoamento é representada pela equação (3.8), com as constantes c_1 e c_2 a determinar, $f = \|\vec{f}\|$ representando a gravidade.

Logo, a solução analítica é dada por

$$u(y) = \frac{1}{2\eta_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x \right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad \text{onde } f_x = f \sin(\theta) \quad (3.52)$$

com as condições de contorno,

$$\begin{cases} \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = 0, \\ u = 0 \text{ em } y = \pm H. \end{cases}$$

As constantes de integração são obtidas a partir das condições de contorno. Para aplicar a primeira condição, é necessário derivar a equação (3.52) em relação a y , e assim obtém-se $c_1 = 0$. Para determinar c_2 , aplica-se a condição da placa na equação (3.52). Portanto, a solução analítica para este escoamento no estado estacionário e para o caso Newtoniano é dada pela equação (3.53).

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho f \sin(\theta) \right) (H^2 - y^2). \quad (3.53)$$

Uma representação do perfil de velocidade para o escoamento Poiseuille entre placas inclinadas no estado estacionário e para o caso Newtoniano é apresentada na Figura 3.21.

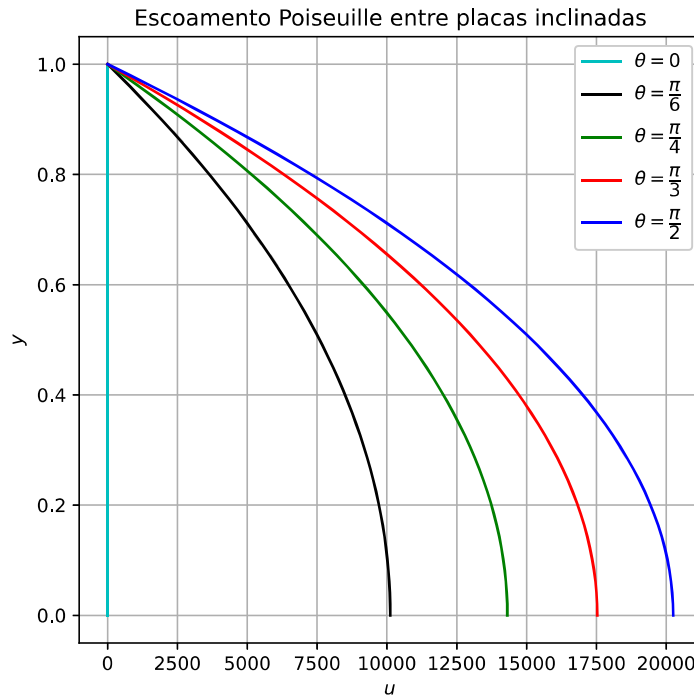


Figura 3.21: Solução analítica para o escoamento Poiseuille entre placas inclinadas com o ângulo formado entre as duas placas e a direção horizontal $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, amplitude $H = 1$, viscosidade $\eta_s = 0.3$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$, gravidade $f = 9.81$ e densidade $\rho = 1350$.

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

Este problema, no caso do modelo Lei das Potências, foi resolvido com base nas ideias de L.L. Ferrás quando visitou o Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional - PósMAC em 2014.

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \text{ onde } f_x = f \sin(\theta), \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \end{cases} \quad (3.54)$$

onde $f = \|\vec{f}\|$ representa a gravidade. Integra-se a primeira equação de (3.54) em relação a y , obtendo

$$\eta \frac{du}{dy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) y + c_1 \quad (3.55)$$

para determinar a constante c_1 , aplica-se a condição de contorno $\frac{du}{dy} = 0$ em $y = 0$, fazendo

$$\eta 0 = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

desta forma, $c_1 = 0$. Portanto, reescreve-se a equação (3.55), tendo

$$\eta \frac{du}{dy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) y.$$

Para prosseguir com a modelagem para a viscosidade, é preciso analisar o comportamento da derivada, tal fato é ilustrado na Figura 3.22.

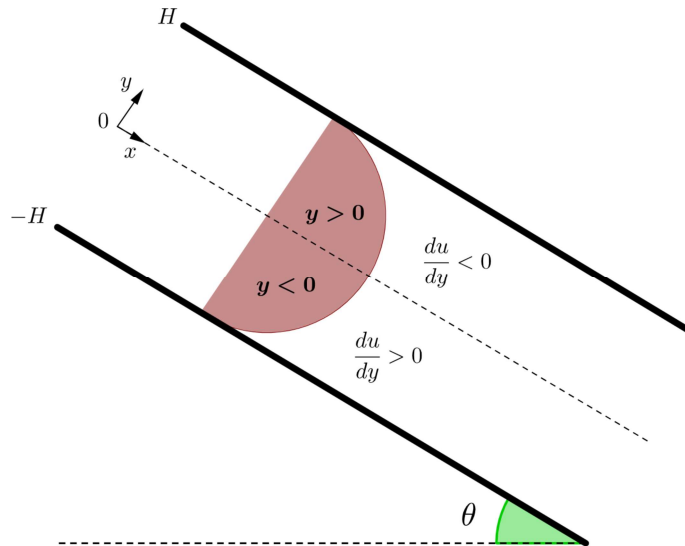


Figura 3.22: Ilustração do sinal de $\frac{du}{dy}$ no escoamento Poiseuille entre placas inclinadas.

Nota-se que o escoamento é simétrico, ou seja, a solução será determinada somente para metade do canal, a parte crescente onde $\frac{du}{dy} > 0$, $y < 0$. Sendo assim, aplica-se o modelo Lei das Potências, a partir da segunda equação de (3.54), tem-se

$$\begin{aligned} m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \left(\frac{du}{dy} \right) &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) y \Rightarrow \\ \frac{du}{dy} &= \left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Agora, integra-se a equação (3.56) em relação a y ,

$$u(y) = \left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \text{sen}(\theta) \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{ny^{\frac{1+n}{n}}}{1+n} \right) + c_2, \quad (3.57)$$

para obter a constante c_2 , aplica-se a condição de contorno $u = 0$ em $y = -H$,

$$0 = \left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \operatorname{sen}(\theta) \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} + c_2$$

$$c_2 = - \left(\left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \operatorname{sen}(\theta) \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) (-H)^{\frac{1+n}{n}} \right) \quad (3.58)$$

obtida a constante c_2 , substitui-se na equação (3.57), que fornece a solução analítica para o escoamento no estado estacionário e para o caso não-Newtoniano.

$$u(y) = \left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + f \operatorname{sen}(\theta) \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) \left(y^{\frac{1+n}{n}} - (-H)^{\frac{1+n}{n}} \right), \quad -H \leq y \leq 0. \quad (3.59)$$

onde o parâmetro n é tal que a solução seja válida matematicamente.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pela solução analítica (3.59), é apresentada a seguir na Figura 3.23.

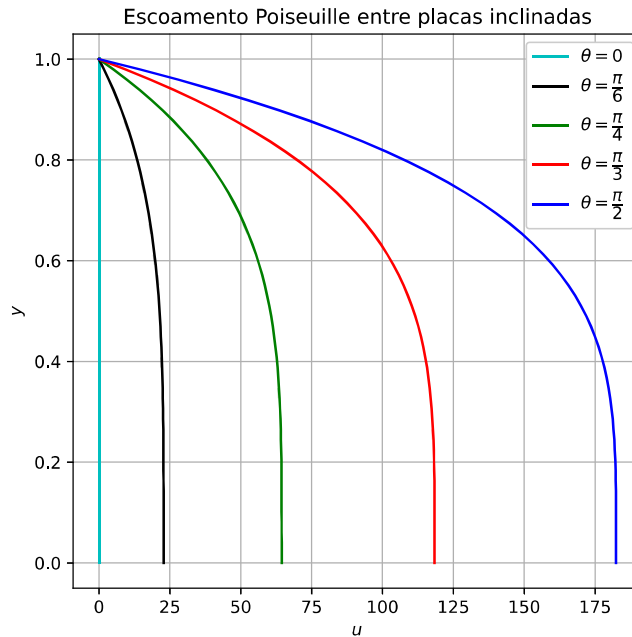


Figura 3.23: Solução analítica para o escoamento Poiseuille entre placas inclinadas para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$ e com o ângulo formado entre as duas placas e a direção horizontal $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, amplitude $H = 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0027$ e gravidade $f = 9.81$.

3.1.6 Escoamento de uma Película Sobre uma Placa Inclinada

Considere o escoamento incompressível e isotérmico de uma película fina sobre uma placa inclinada, de espessura uniforme δ e com o ângulo formado entre a placa e a direção horizontal θ , como mostra a Figura 3.24.

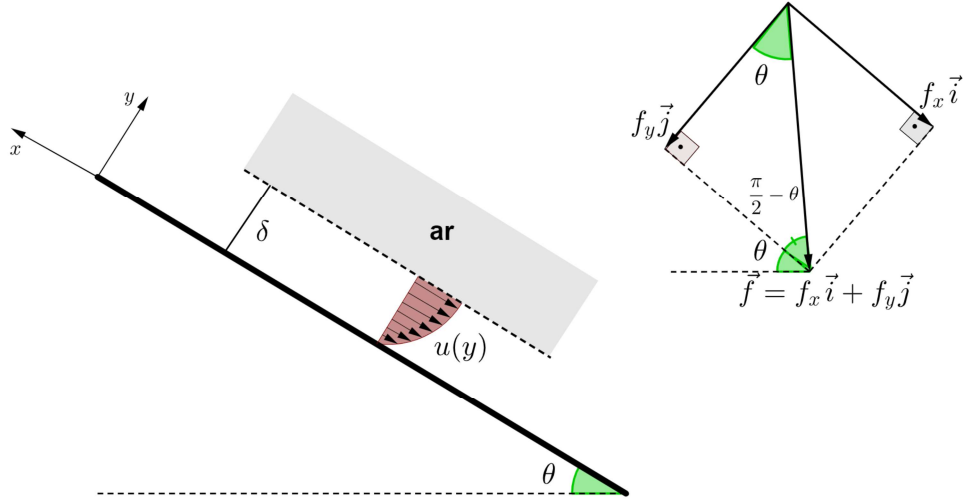


Figura 3.24: O escoamento de uma película fina sobre uma placa com inclinação θ .

Fluido Newtoniano

O ar ambiente é considerado estacionário então, na interface fluido-ar a tensão de cisalhamento é nula, $\tau_{yx} = 0$, e o fluxo é impulsionado apenas pelo campo gravitacional, então $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ e, portanto, a pressão também só depende de y , $p = p(y)$. Para este problema, a tensão superficial do líquido pode ser desprezada.

A equação governante para este escoamento é dada por

$$\begin{cases} \eta_s \frac{d^2 u}{dy^2} = -\rho f \sin(\theta), \\ \frac{dp}{dy} = \rho f \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.60)$$

onde $f = \|\vec{f}\|$, com as condições de contorno na placa e superfície livre, descritas, respectivamente, por

$$\begin{cases} u = 0 \text{ em } y = 0, \\ \tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = \delta. \end{cases} \quad (3.61)$$

Para resolver os sistemas de equações (3.60)–(3.61), integra-se a primeira equação do sistema de equações (3.60) duas vezes em relação a y , fazendo

$$\int \frac{d^2 u}{dy^2} dy = -\frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \int dy \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} y + c_1$$

e,

$$\int \frac{du}{dy} dy = -\frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \int y dy + \int c_1 dy \Rightarrow u(y) = -\frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2,$$

resultando no perfil de velocidade para o problema com duas constantes de integração, c_1 e c_2 , a determinar.

$$u(y) = \frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2. \quad (3.62)$$

Para obter as constantes, aplica-se as condições de contorno, como segue

$$u(y) = \frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \Rightarrow 0 = \frac{\rho f \sin(\theta)}{\eta_s} \frac{0^2}{2} + c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

ou seja, $c_2 = 0$. Para aplicar a segunda condição de contorno, calcula-se a tensão de cisalhamento

$$\tau_{yx} = \eta_s \frac{du}{dy} = \eta_s \left(\frac{-\rho f \operatorname{sen}(\theta) y}{\eta_s} + c_1 \right) = -\rho f \operatorname{sen}(\theta) y + \eta_s c_1$$

obtida a tensão de cisalhamento, utiliza-se a segunda condição de contorno, ou seja,

$$\tau_{yx}(\delta) = -\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta + \eta_s c_1$$

daí segue,

$$-\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta + \eta_s c_1 = 0 \Rightarrow \eta_s c_1 = \rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta \Rightarrow c_1 = \frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta}{\eta_s} \quad (3.63)$$

então $c_1 = \frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta}{\eta_s}$. Portanto, pode-se substituir as constantes c_1 e c_2 na equação (3.62), obtendo a solução analítica da velocidade no estado estacionário e para o caso Newtoniano, que é dada por

$$u(y) = \frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right). \quad (3.64)$$

Conseqüentemente, a velocidade média, \hat{u} , ao longo de uma seção transversal da película é obtida por

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u(y) dy = \frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta^2}{3\eta_s}. \quad (3.65)$$

Por outro lado, a taxa de volume por unidade de largura,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= \int_0^{\delta} u dy = \\ &= \left(\frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \right) \int_0^{\delta} \delta y - \frac{y^2}{2} dy = \\ &= \left(\frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \right) \left[\delta \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{\delta} = \\ &= \left(\frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \right) \left[\frac{6\delta y^2 - 2y^3}{12} \right]_0^{\delta} = \\ &= \left(\frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \right) \left[\frac{6\delta^3 - 2\delta^3}{12} \right] = \\ &= \left(\frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta)}{\eta_s} \right) \left[\frac{\delta^3}{3} \right] = \\ &= \frac{\rho f \operatorname{sen}(\theta) \delta^3}{3\eta_s}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Já para solucionar a pressão, integra-se a equação (2.11) em relação a y , desta forma,

$$p(y) = -\rho f \cos(\theta) y + c.$$

Na superfície livre, em $y = \delta$, a pressão deve ser igual à pressão atmosférica, $p(\delta) = p_0$, logo, $c = p_0 + \rho f \cos(\theta)$. Portanto, a pressão neste escoamento é distribuída da seguinte forma

$$p(y) = p_0 + \rho f (\delta - y) \cos(\theta).$$

Uma representação do perfil de velocidade para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada, é apresentada na Figura 3.25.

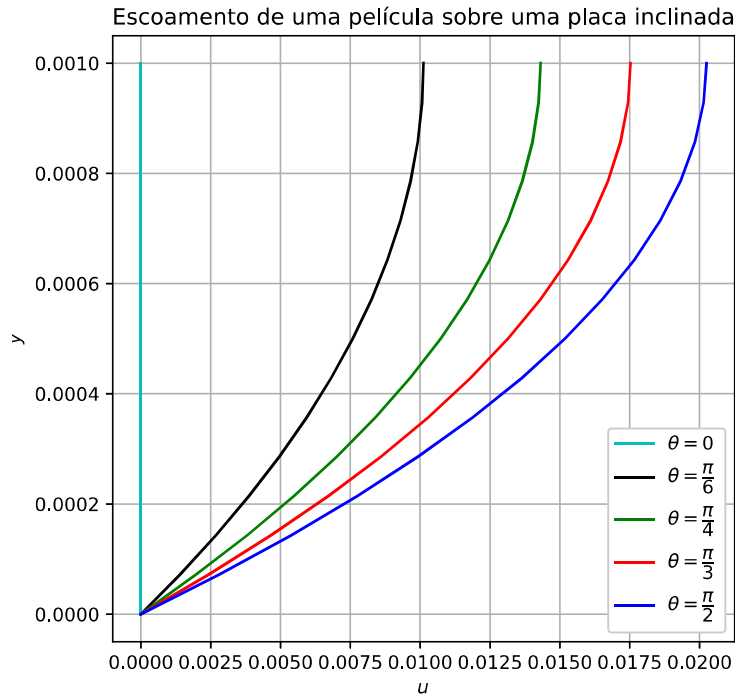


Figura 3.25: Solução analítica para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada com os ângulos $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, gravidade $f = 9.81$, densidade $\rho = 1350$, viscosidade $\eta_s = 0.3$ e espessura do canal $\delta = 0.001$

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

Este problema, no caso do modelo Lei das Potências, foi resolvido com base nas ideias de L.L. Ferrás quando visitou o Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional - PósMAC em 2014.

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = \rho f \text{sen}(\theta), \\ \eta = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}. \end{cases} \quad (3.67)$$

Integra-se a primeira equação de (3.67) em relação a y , obtendo

$$\eta \frac{du}{dy} = \rho f \text{sen}(\theta) y + c_1 \quad (3.68)$$

para obter a constante c_1 , aplica-se a condição de contorno $\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} = 0$ em $y = \delta$

$$0 = \rho f \text{sen}(\theta) \delta + c_1 \Rightarrow c_1 = -\rho f \text{sen}(\theta) \delta \quad (3.69)$$

substitui-se $c_1 = -\rho f \text{sen}(\theta) \delta$ em (3.68), obtendo,

$$\eta \frac{du}{dy} = \rho f \text{sen}(\theta) (y - \delta). \quad (3.70)$$

Para prosseguir com a modelagem da viscosidade, analisa-se o comportamento da derivada, como mostra a Figura 3.26.

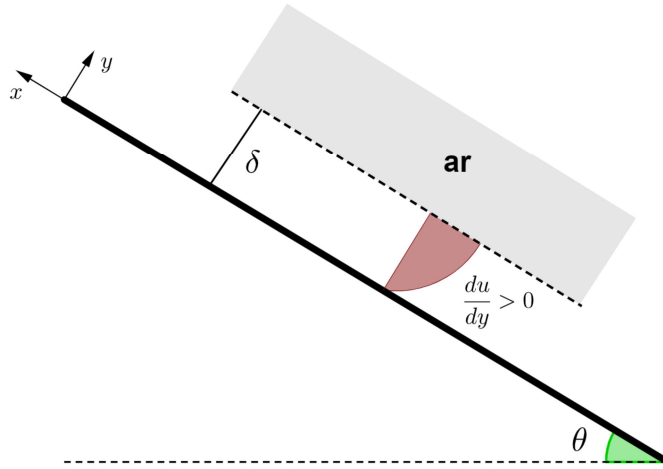


Figura 3.26: Análise do comportamento de $\frac{du}{dy}$ no escoamento de uma película sobre uma placa inclinada.

Como este escoamento tem comportamento crescente, $\frac{du}{dy} > 0$. Modela-se a viscosidade a partir da Lei das Potências,

$$m \left(\frac{du}{dy} \right)^n = -\rho f \text{sen}(\theta) (\delta - y) \Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(\frac{-\rho f \text{sen}(\theta)}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (\delta - y)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.71)$$

Integra-se a equação (3.71) em relação a y ,

$$u(y) = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{-\rho f \text{sen}(\theta)}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (\delta - y)^{\frac{1+n}{n}} + c_2, \quad (3.72)$$

aplica-se a condição de contorno $u(y) = 0$ em $y = 0$ na equação (3.72), para obter a constante c_2

$$0 = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{-\rho f \text{sen}(\theta)}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (\delta - y)^{\frac{1+n}{n}} + c_2 \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{-\rho f \text{sen}(\theta)}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (\delta - y)^{\frac{1+n}{n}}.$$

Portanto, substituindo c_2 em (3.72) obtém-se a solução analítica para a velocidade com fluido não-Newtoniano com a viscosidade modelada a partir da Lei das potências

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{-\rho f \text{sen}(\theta)}{m} \right)^{\frac{1}{n}} (\delta^{\frac{1+n}{n}} - (\delta - y)^{\frac{1+n}{n}}), \quad 0 \leq y \leq \delta.$$

onde n é tal que a solução seja válida matematicamente.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descrita pela solução analítica acima, é apresentada a seguir na Figura 3.27.

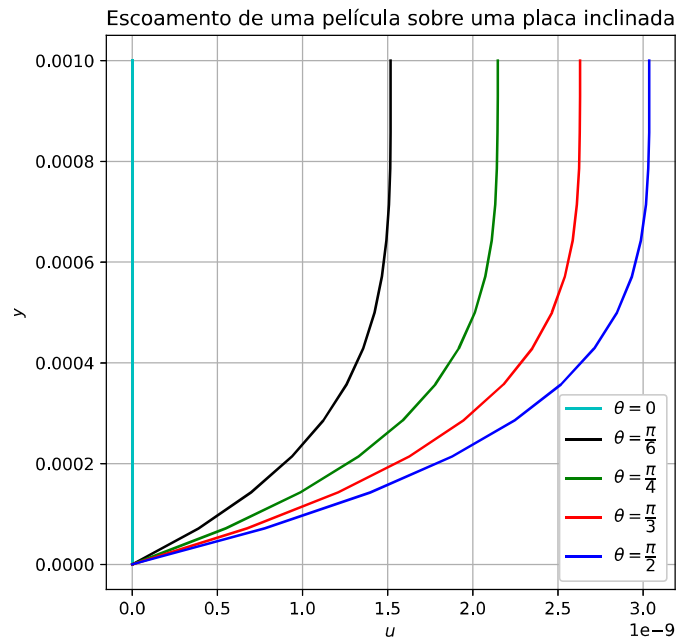


Figura 3.27: Solução analítica para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n = 1/3$, $m = 1$ e com os ângulos $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, gravidade $f = 9.81$, densidade $\rho = 1350$ e espessura do canal $\delta = 0.001$.

3.1.7 Escoamento Couette Planar em Duas Camadas

Dois líquidos A e B , incompressíveis e imiscíveis, ou seja, de densidades diferentes ρ_A e ρ_B , onde $\rho_A > \rho_B$ e que não se misturam, com viscosidades η_A e η_B fluem entre duas placas paralelas infinitas. O escoamento é induzido pelo movimento da placa superior que se move com velocidade V , enquanto a placa inferior é estacionária, como mostra a Figura 3.28.

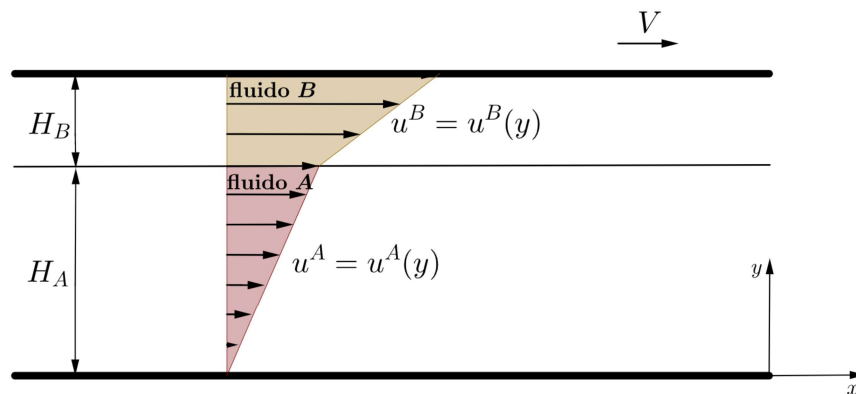


Figura 3.28: Escoamento Couette planar em duas camadas.

Fluido Newtoniano

As distribuições de velocidade em ambas camadas obedecem a equação (2.9) e são dadas pela equação (3.8). As condições de contorno para este problema são

$$\begin{cases} u^A = c_1^A y + c_2^A, & 0 \leq y \leq H_A, \\ u^B = c_1^B y + c_2^B, & H_A \leq y \leq H_A + H_B. \end{cases}$$

onde u^A é a distribuição de velocidade com constantes de integração c_1^A e c_2^A para o fluido A , u^B é a distribuição de velocidade com c_1^B e c_2^B constantes de integração para o fluido B . As constantes são determinadas pelas condições de contorno nos limites sólidos e na interface das duas camadas.

Aplica-se primeiro as condições de contorno de não escorregamento nas duas placas

$$y = 0 \Rightarrow u^A = 0$$

assim, $c_2^A = 0$. Por outro lado, em

$$y = H_A + H_B \Rightarrow u^B = V$$

logo, $c_2^B = V - c_1^B(H_A + H_B)$. Desta forma, reescreve-se as distribuições de velocidade,

$$\begin{cases} u^A = c_1^A y, & 0 \leq y \leq H_A, \\ u^B = V - c_1^B(H_A + H_B - y), & H_A \leq y \leq H_A + H_B. \end{cases}$$

Na interface, $y = H_A$, temos duas condições adicionais:

- (a) a distribuição de velocidade é contínua, ou seja, $u^A = u^B$ em $y = H_A$;
- (b) a transferência de momento através da interface é contínua, ou seja, $\tau_{yx}^A = \tau_{yx}^B$ em $y = H_A \Rightarrow \eta_{As} \frac{du^A}{dy} = \eta_{Bs} \frac{du^B}{dy}$ em $y = H_A$.

A partir das condições da interface, descobre-se que

$$c_1^A = \frac{\eta_{Bs} V}{\eta_{As} H_B + \eta_{Bs} H_A} \text{ e } c_1^B = \frac{\eta_{As} V}{\eta_{As} H_B + \eta_{Bs} H_A}$$

portanto, os perfis de velocidade nas duas camadas são

$$\begin{cases} u^A = \frac{\eta_{Bs} V}{\eta_{As} H_B + \eta_{Bs} H_A} y, & 0 \leq y \leq H_A, \\ u^B = V - \frac{\eta_{As} V}{\eta_{As} H_B + \eta_{Bs} H_A} (H_A + H_B - y), & H_A \leq y \leq H_A + H_B. \end{cases}$$

Se os dois líquidos têm a mesma viscosidade, $\eta_{As} = \eta_{Bs} = \eta_s$, então os dois perfis de velocidade são os mesmos e os resultados se simplificam para o perfil de velocidade linear do escoamento Couette de uma camada, como segue:

$$u^A = u^B = \frac{V}{H_A + H_B} y.$$

Uma representação gráfica da solução analítica para o escoamento Couette planar em duas camadas, no estado estacionário e para o caso Newtoniano é apresentada a seguir na Figura 3.29.

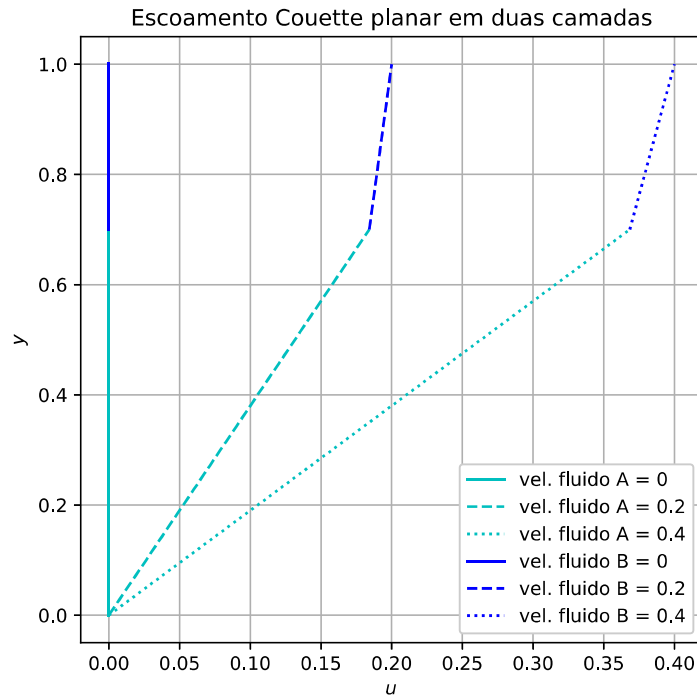


Figura 3.29: Solução analítica para o escoamento Couette planar em duas camadas com as velocidades $v = 0, 0.2$ e 0.4 na tampa superior, viscosidade do fluido A , $\eta_{A_s} = 0.1$, viscosidade do fluido B , $\eta_{B_s} = 0.5$, amplitude do canal de fluido A , $H_A = 0.7$ e amplitude do canal de fluido B , $H_B = 0.3$. Em azul claro, os perfis de velocidade do fluido A e em azul escuro os perfis de velocidade do fluido B .

Fluido não-Newtoniano: modelo Lei das Potências

As condições para cada fluido são

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta_A \frac{du^A}{dy} \right) = 0, \\ \eta_A = m_A \left| \frac{du^A}{dy} \right|^{n_A-1} \end{cases}$$

para o Fluido A , e

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left(\eta_B \frac{du^B}{dy} \right) = 0, \\ \eta_B = m_B \left| \frac{du^B}{dy} \right|^{n_B-1}. \end{cases}$$

para o Fluido B .

Na interface $y = H_A$, valem duas condições:

(c) a distribuição de velocidade é contínua

$$u^A(H_A) = u^B(H_A);$$

(d) a transferência de momento é contínua

$$\tau_{xy}^A(H_A) = \tau_{xy}^B(H_B) \Rightarrow \eta_A \frac{du^A}{dy} = \eta_B \frac{du^B}{dy} \text{ em } y = H_A.$$

Para iniciar a modelagem da viscosidade para o caso não-Newtoniano, analisa-se o comportamento do escoamento – tal fato pode ser analisado a partir do comportamento da derivada da distribuição de velocidade de cada fluido.

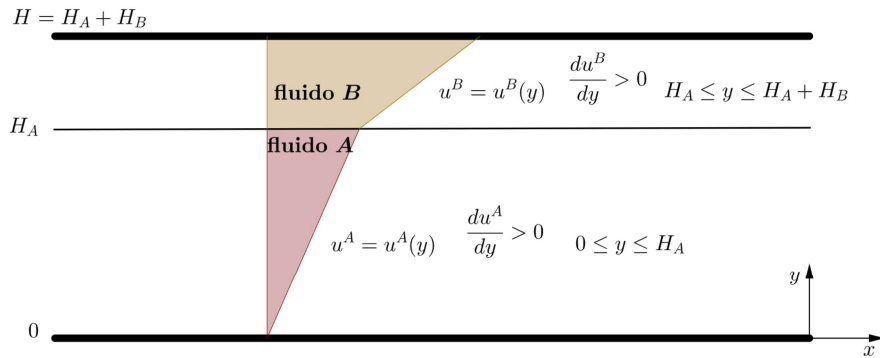


Figura 3.30: Análise do comportamento de $\frac{du^A}{dy}$ e $\frac{du^B}{dy}$ no escoamento Couette planar em duas camadas.

Para o fluido A , onde $0 \leq y \leq H_A$, $\frac{du^A}{dy} > 0$, ou seja, u^A é crescente. Integra-se a primeira equação de (3.1.7) em relação a y , que gera

$$\eta_A \frac{du^A}{dy} = c_1^A \quad (3.73)$$

modela-se a viscosidade, η_A , de acordo com o modelo Lei das Potências

$$m_A \left(\frac{du^A}{dy} \right)^{n_A} = c_1^A \Rightarrow \frac{du^A}{dy} = \left(\frac{c_1^A}{m_A} \right)^{\frac{1}{n_A}} \quad (3.74)$$

integra-se a equação (3.74) em relação a y ,

$$u^A(y) = \left(\frac{c_1^A}{m_A} \right)^{\frac{1}{n_A}} y + c_2^A, \quad 0 \leq y \leq H_A \quad (3.75)$$

da condição de contorno $u^A = 0$, na placa inferior em $y = 0$, obtém-se,

$$0 = u^A(0) = c_2^A \Rightarrow c_2^A = 0.$$

O processo é análogo para o fluido B , ou seja,

$$u^B(y) = \left(\frac{c_1^B}{m_B} \right)^{\frac{1}{n_B}} y + c_2^B, \quad H_A \leq y \leq H_A + H_B = H \quad (3.76)$$

na placa superior, $u^B = V$ em $y = H = H_A + H_B$,

$$V = u^B(H_A + H_B) = \left(\frac{c_1^B}{m_B} \right)^{\frac{1}{n_B}} (H_A + H_B) + c_2^B \Rightarrow c_2^B = V - \left(\frac{c_1^B}{m_B} \right)^{\frac{1}{n_B}} (H_A + H_B)$$

da condição (d),

$$\eta_A \frac{du^A}{dy} = \eta_B \frac{du^B}{dy}$$

e, da equação (3.73), vem

$$c_1^A = c_1^B. \quad (3.77)$$

Por outro lado, da condição (c),

$$\left(\frac{c_1^A}{m_A}\right)^{\frac{1}{n_A}} H_A = \left(\frac{c_1^B}{m_B}\right)^{\frac{1}{n_B}} (-H_B) + V$$

em resumo,

$$\begin{cases} u^A(y) = \left(\frac{c_1^A}{m_A}\right)^{\frac{1}{n_A}} y, & 0 \leq y \leq H_A, \\ u^B(y) = \left(\frac{c_1^A}{m_B}\right)^{\frac{1}{n_B}} (y - (H_A + H_B)) + V, & H_A \leq y \leq H. \end{cases}$$

Se $n_A \neq n_B$, então obtemos c_1^A implicitamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_1^A}{m_A}\right)^{\frac{1}{n_A}} H_A + \left(\frac{c_1^B}{m_B}\right)^{\frac{1}{n_B}} (H_B) - V &= 0 \Rightarrow \\ (c_1^A)^{\frac{1}{n_A}} \frac{H_A}{(m_A)^{\frac{1}{n_A}}} + (c_1^A)^{\frac{1}{n_B}} \frac{H_B}{(m_B)^{\frac{1}{n_B}}} - V &= 0 \end{aligned}$$

e, se $n_A = n_B = n$, é simples explicitar c_1^A

$$\begin{aligned} (c_1^A)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{H_A}{(m_A)^{\frac{1}{n}}} + \frac{H_B}{(m_B)^{\frac{1}{n}}} \right) = V &\Rightarrow \left(\frac{(m_B)^{\frac{1}{n}} H_A + (m_A)^{\frac{1}{n}} H_B}{(m_A m_B)^{\frac{1}{n}}} \right) (c_1^A)^{\frac{1}{n}} = V \Rightarrow \\ c_1^A &= \frac{(m_A m_B)}{((m_B)^{\frac{1}{n}} H_A + (m_A)^{\frac{1}{n}} H_B)^n} V^n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} u^A(y) = \frac{(m_B)^{\frac{1}{n}}}{((m_B)^{\frac{1}{n}} H_A + (m_A)^{\frac{1}{n}} H_B)} V y, & 0 \leq y \leq H_A \\ u^B(y) = \frac{(m_A)^{\frac{1}{n}}}{((m_B)^{\frac{1}{n}} H_A + (m_A)^{\frac{1}{n}} H_B)} V (y - (H_A + H_B)) + V, & H_A \leq y \leq H, \end{cases} \quad (3.78)$$

representando as soluções analíticas para a velocidade dos escoamentos com fluidos A e B descritos neste problema. Vale ressaltar que o parâmetro n é tal que a solução seja válida matematicamente.

Outro fato importante é que ao colocar os parâmetros $n_A = n_B = 1$ e $m_A = m_B = 1$, o perfil de velocidade apresentado no sistema de equações (3.78) coincide com o perfil de velocidade para o caso Newtoniano.

A representação gráfica do perfil de velocidade, descritas pelas soluções analíticas acima, é apresentada a seguir na Figura 3.31.

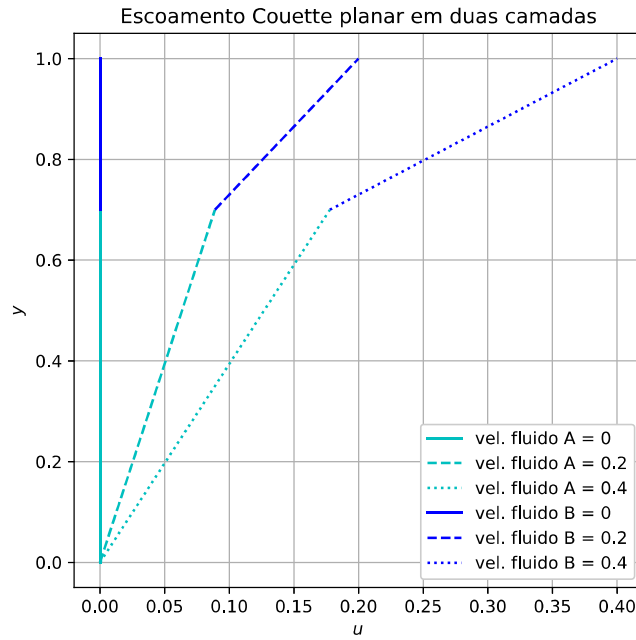


Figura 3.31: Solução analítica para o escoamento Couette planar em duas camadas para o caso não-Newtoniano com os parâmetros $n_A = n_B = 1/3$, $m_A = 1$ e $m_B = 0.7$ com as velocidades $v = 0, 0.2$ e 0.4 na tampa superior, amplitude do canal de fluido A , $H_A = 0.7$ e amplitude do canal de fluido B , $H_B = 0.3$. Em azul claro, os perfis de velocidade do fluido A e em azul escuro os perfis de velocidade do fluido B .

3.2 Escoamentos Transientes

Nesta seção são apresentados os escoamentos unidirecionais, retilíneos e transientes, ou seja, aqueles em que as propriedades do fluido em um ponto do campo variam com o tempo. Esta classe de escoamento é descrita pelas equações (3.79) e (3.10) para fluidos Newtonianos. Os problemas apresentados a seguir podem ser encontrados em [30].

A partir da simplificação para cada problema, de acordo com sua geometria e condições de contorno e inicial, a equação (3.79),

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho f_x \quad (3.79)$$

pode reduzir-se à uma Equação Diferencial Parcial homogênea ou não homogênea. Neste trabalho, serão utilizados os métodos de Solução por Similaridade e Separação de Variáveis.

No método de Solução por Similaridade, busca-se reduzir o número de variáveis independentes y , t , e combiná-las em uma variável de similaridade,

$$\xi = \xi(y, t), \quad (3.80)$$

A vantagem deste método é que se existe uma solução por similaridade, então a Equação Diferencial Parcial original para $u(y, t)$ é reduzida a uma Equação Diferencial Ordinária para $u(\xi)$.

Por outro lado, nos problemas homogêneos que admitem o método de Separação de Variáveis, a variável dependente $u(y, t)$ é expressa na forma

$$u(y, t) = Y(y)T(t) \quad (3.81)$$

A aplicação da equação (3.81) na equação governante transforma o problema em um problema equivalente em que resolve-se duas Equações Diferenciais Ordinárias com $Y(y)$ e $T(t)$ como variáveis dependentes.

Além disso, o **Lema 1** e o **Lema 2** serão utilizados para obtenção das soluções.

Lema 1. *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que*

$$[u_m]_{m=1}^{+\infty} \quad (3.82)$$

é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a Equação Diferencial Parcial linear homogênea $Lu = 0$, onde a cada função u (suficientemente diferenciável) corresponde a uma única função Lu ; dessa maneira definimos um operador ou transformação L . Logo, se o conjunto de funções (3.82) é uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \quad (3.83)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω , então u satisfaz $Lu = 0$.

Lema 2. *As funções $y_1(t) = \exp((\lambda + i\mu)t)$ e $y_2(t) = \exp((\lambda - i\mu)t)$, com o significado expresso por $\exp((\lambda + i\mu)t) = \exp(\lambda t)(\cos(\mu t) + i\text{sen}(\mu t))$, são soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ quando as raízes da equação característica $ar^2 + br + c = 0$ são números complexos $(\lambda \pm i\mu)$.*

Observação 1 Se y_1 e y_2 são soluções da equação $ay'' + by' + cy = 0$ então qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é solução. Ou seja, se as raízes da equação característica são números complexos $(\lambda \pm i\mu)$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da equação é $y = c_1 \exp(\lambda t) \cos(\mu t) + c_2 \exp(\lambda t) \text{sen}(\mu t)$.

A seguir, são obtidas as soluções analíticas de quatro casos distintos no estado transiente para o caso Newtoniano utilizando as técnicas descritas acima que melhor convém para cada problema.

3.2.1 Escoamento Próximo a uma Placa Subitamente Colocada em Movimento

Considera-se um fluido Newtoniano incompressível semi-infinito, de viscosidade η_s e densidade ρ , delimitado inferiormente por uma placa, em $y = 0$, como mostra a Figura 3.32.

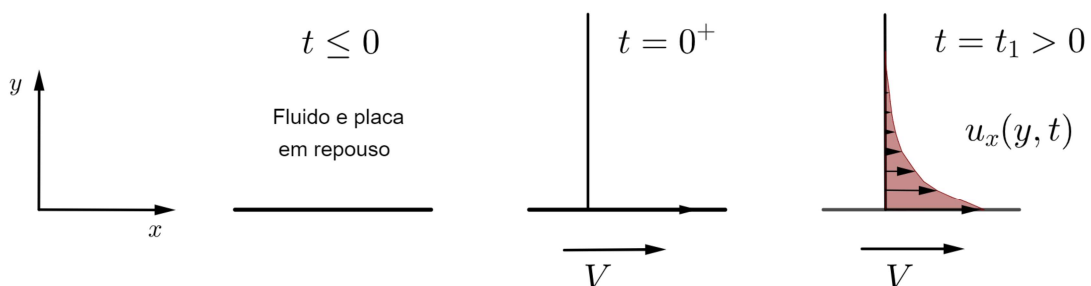


Figura 3.32: Escoamento próximo a uma placa subitamente colocada em movimento.

Inicialmente, a placa e o fluido encontram-se em repouso. No tempo $t = 0^+$, a placa começa a se mover na direção x , com velocidade constante V . Neste caso, o gradiente de

pressão e a componente da gravidade na direção do fluxo são nulos. Este problema foi estudado por Stokes em 1851 e é denominado *problema de Rayleigh* ou *primeiro problema de Stokes*.

A equação governante para este problema é homogênea e é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.84)$$

onde $\nu = \frac{\eta_s}{\rho}$ é a viscosidade cinemática. A equação (3.84) é conhecida como equação do calor ou difusão. As condições de contorno e inicial, são:

$$\begin{cases} u = V, & \text{em } y = 0, t > 0, \\ u = 0, & \text{em } y \rightarrow \infty, t \geq 0, \\ u = 0, & \text{em } t = 0, 0 \leq y < \infty. \end{cases} \quad (3.85)$$

Utiliza-se o método de solução por similaridade, este método pode ser empregado para resolver alguns problemas não-lineares. Analisando a equação governante (3.84), observa-se que u depende de uma combinação de y e t , da forma $\frac{y}{\sqrt{t}}$.

Além de t e y , a velocidade u deve ser uma função de V e μ , também. Desta forma, pode-se concluir que a velocidade adimensional $\frac{u}{V}$ deve ser uma função das quantidades cinemáticas restantes deste escoamento: ν , t e y .

Assume-se que a existência de uma solução por similaridade e que a combinação adequada destas quantidades não sejam conhecidas a priori, que a solução seja da forma,

$$u(y, t) = Vf(\xi), \quad (3.86)$$

onde,

$$\xi = a \frac{y}{t^n}, \quad \text{com } n > 0 \quad (3.87)$$

e $\xi(y, t)$ é a variável de similaridade, a é uma constante a ser determinada posteriormente para que ξ seja adimensional e n um número positivo a ser escolhido para que a equação (3.84) possa ser transformada em uma equação diferencial ordinária com f como variável dependente e ξ como independente. A condição de contorno em $y = 0$ é equivalente a

$$f = 1, \quad \text{em } \xi = 0,$$

a condição de contorno em $y \rightarrow \infty$ e a condição inicial formam uma única condição de contorno para f ,

$$f = 0, \quad \text{em } \xi \rightarrow \infty.$$

Note que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\eta_s}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \Leftrightarrow -na \frac{y}{t^{n+1}} = \frac{\eta_s}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \Leftrightarrow -na \frac{y}{t^{n+1}} = 0. \quad (3.88)$$

Assim, derivando a equação (3.86),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial Vf(\xi)}{\partial t} = V \frac{\partial f(\xi(y, t))}{\partial t} = V \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi(y, t)}{\partial t} = Vf'(\xi) \left(-na \frac{y}{t^{n+1}} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -Vn \frac{ay}{t^{n+1}} f'(\xi) = -Vn \frac{\xi}{t} f'(\xi) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -Vn \frac{\xi}{t} f'(\xi), \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = V \frac{\partial f(\xi(y, t))}{\partial y} = V \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi(y, t)}{\partial y} = V \frac{a}{t^n} f'(\xi)$$

e,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{a}{t^n} f'(\xi) \right) = V \frac{a}{t^n} \frac{\partial}{\partial y} f'(\xi(y, t)) = V \frac{a}{t^n} f''(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} = V \frac{a^2}{t^{2n}} f''(\xi).$$

Agora, substituindo os resultados acima na equação (3.84), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\eta_s}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\Leftrightarrow -V n \frac{\xi}{t} f'(\xi) = \frac{\eta_s}{\rho} V \frac{a^2}{t^{2n}} f''(\xi) \Leftrightarrow \frac{\eta_s}{\rho} \frac{a^2}{t^{2n}} f''(\xi) + n \frac{\xi}{t} f'(\xi) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'' + \frac{n\xi}{\nu a^2} t^{2n-1} f' = 0 \end{aligned}$$

Considera-se $n = \frac{1}{2}$ para eliminar o termo transiente, e a expressão se transforma em uma equação diferencial ordinária da forma,

$$f'' + \frac{\xi}{2\nu a^2} f' = 0 \text{ com } \xi = a \frac{y}{\sqrt{t}}. \quad (3.90)$$

Por conveniência e para tornar ξ adimensional, usa-se $a = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}$. Assim,

$$f'' + \frac{\xi}{2\nu \left(\frac{1}{2\sqrt{\nu}}\right)^2} f' = 0 \Leftrightarrow f'' + 2\xi f' = 0, \text{ com } \xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (3.91)$$

A solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem (3.91), é dada por

$$f(\xi) = c_1 \int_0^\xi \exp(-z^2) dz + c_2, \quad (3.92)$$

onde z é uma variável “fictícia” de integração. Em $\xi = 0$, $f = 1$, tem-se $c_2 = 1$. Por outro lado, $\xi \rightarrow \infty$, $f = 0$,

$$0 = c_1 \int_0^\infty \exp(-z^2) dz + 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\int_0^\infty \exp(-z^2) dz} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

ou seja,

$$f(\xi) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-z^2) dz + 1 = 1 - \text{erf}(\xi),$$

onde $\text{erf}(\xi)$ é a função erro definida por $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-z^2) dz$. Substituindo então na equação (3.86), temos a solução analítica para o escoamento próximo a uma placa subitamente colocada em movimento, no estado transiente e para o caso Newtoniano

$$u(y, t) = V \left[1 - \text{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \text{ ou } \frac{u}{V} = 1 - \text{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right), \quad (3.93)$$

para $t > 0$. Uma animação do perfil de velocidade $u(y, t)$ é exibida no GeoGebraTM a partir do link <https://www.geogebra.org/classic/wvqmybt2> – para colocar a animação em movimento, volte o controle deslizante do tempo (t) em 0 e aperte o play do respectivo controle deslizante.

3.2.2 Escoamento Próximo a uma Placa em Movimento Oscilatório

Considere o fluxo de um fluido Newtoniano semi-infinito, colocado em movimento a partir de uma placa oscilante com velocidade

$$V = V_0 \cos(\omega t), \quad t > 0. \quad (3.94)$$

Neste caso, o gradiente de pressão constante e a componente em x da gravidade são nulas. A equação governante deste problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.95)$$

com condições de contorno e inicial,

$$\begin{cases} u = V_0 \cos(\omega t), & \text{em } y = 0, \quad t > 0, \\ u = 0, & \text{em } y \rightarrow \infty, \quad t \geq 0, \\ u = 0, & \text{em } t = 0, \quad 0 \leq y \leq \infty. \end{cases} \quad (3.96)$$

Da condição de contorno em $y = 0$, apresentada na primeira equação do sistema de equações (3.96), ω representa a frequência angular do movimento sinusoidal. Além disso,

$$\text{quando } t \rightarrow 0, \quad u(0, t) \rightarrow V_0$$

este fato, juntamente com a condição inicial, descrita pela última equação do sistema de equações (3.96), mostra uma descontinuidade de $u(y, t)$ em $t = 0$ para $y = 0$.

Para obter a solução analítica deste problema, aplica-se o método de Separação de Variáveis. Portanto, separa-se as duas variáveis independentes e representa a velocidade $u(y, t)$, como

$$u(y, t) = \text{Re}[Y(y) \exp(i\omega t)], \quad (3.97)$$

onde Re representa a parte real de $Y(y) \exp(i\omega t)$, i é a unidade imaginária descrita por $i = \sqrt{-1}$, $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$ e $Y(y)$ representa uma função complexa.

Substitui-se a equação (3.97) em (3.95), de tal forma,

$$\begin{aligned} \text{Re}[Y(y) i\omega \exp(i\omega t)] &= \nu \text{Re} \left[\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \exp(i\omega t) \right] \Rightarrow \\ \text{Re} \left[\left(i\omega Y(y) - \nu \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right) \exp(i\omega t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

observe que se

$$i\omega Y(y) - \nu \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0, \quad (3.99)$$

então, a equação (3.98) se satisfaz. Portanto, impõe-se que a equação (3.99) seja verdadeira. Assim,

$$\begin{aligned} \nu \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= i\omega Y(y) \Rightarrow \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= \frac{i\omega}{\nu} Y(y) \Rightarrow \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} Y(y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Note que

$$\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1 + i).$$

Seja $m = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1 + i)$, logo, reescreve-se a equação diferencial ordinária (3.100), cuja solução geral é dada por

$$Y(y) = c_1 \exp(-my) + c_2 \exp(my). \quad (3.101)$$

Para determinar as constantes c_1 e c_2 , aplica-se as condições de contorno. Como $u \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$ e $u(y, t) = \text{Re}[Y(y) \exp(i\omega t)]$, então, $Y(y)$ deve tender a zero quando $y \rightarrow \infty$ e, portanto, c_2 deve ser nula. Obtida a constante c_2 , reescreve-se a equação (3.101),

$$Y(y) = c_1 \exp(-my).$$

Por outro lado, em $y = 0$, tem-se $u = V_0 \cos(\omega t)$. Logo,

$$\begin{aligned} V_0 \cos(\omega t) &= u(0, t) \\ &= \text{Re}[Y(0) \exp(i\omega t)] \\ &= \text{Re}[c_1 \exp(-m \cdot 0) \exp(i\omega t)] \\ &= \text{Re}[c_1 \exp(i\omega t)] \\ &= \text{Re}[c_1 \cos(\omega t) + i c_1 \text{sen}(\omega t)], \end{aligned}$$

ou seja, $c_1 = V_0$. Assim, reescreve-se a equação (3.101), substituindo a constante c_1 obtida

$$Y(y) = V_0 \exp(-my),$$

e assim, a solução analítica para o escoamento próximo a uma placa em movimento oscilatório, no estado transiente e para o caso Newtoniano é dada por

$$u(y, t) = V_0 \text{Re}[\exp(-my) \exp(i\omega t)] = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right). \quad (3.102)$$

Uma animação do perfil de velocidade $u(y, t)$ é exibida no GeoGebra™ a partir do link <https://www.geogebra.org/classic/qrzbe9hj> – para colocar a animação em movimento, volte o controle deslizante do tempo (t) em 0 e aperte o play do respectivo controle deslizante.

3.2.3 Escoamento Couette Planar

Considere um fluido Newtoniano de densidade ρ e viscosidade η_s limitado por duas placas paralelas infinitas, separadas por uma distância H , como mostra a Figura 3.33.

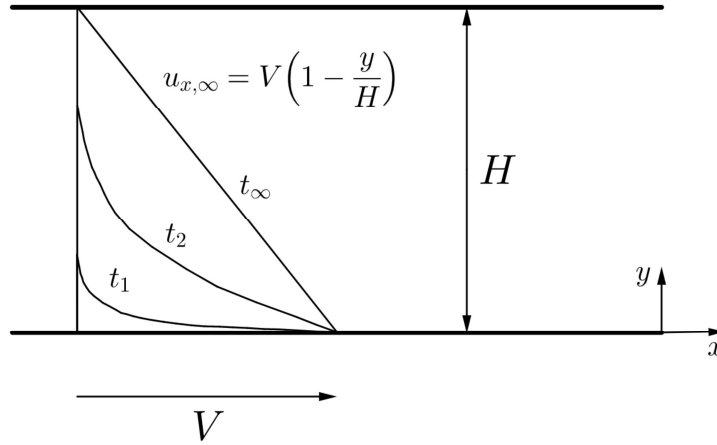


Figura 3.33: Escoamento Couette planar no estado transiente.

O fluido e as placas estão inicialmente em repouso. No tempo $t = 0^+$, a placa inferior é movimentada repentinamente a uma velocidade constante V no seu próprio plano, enquanto a placa superior é mantida estacionária.

A equação governante é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.103)$$

com as condições de contorno e inicial,

$$\begin{cases} u = V, & \text{em } y = 0, t > 0 \\ u = 0, & \text{em } y = H, t \geq 0 \\ u = 0, & \text{em } t = 0, 0 \leq y \leq H. \end{cases} \quad (3.104)$$

Note que enquanto a equação governante é homogênea, a condição de contorno não é. Diferentemente dos problemas anteriores, das seções 3.2.1 e 3.2.2, este problema está definido em um domínio espacial limitado, $0 \leq y \leq H$. Além disso, este problema admite uma solução estacionária, ou seja, no caso em que $t \rightarrow \infty$. Esta solução estacionária foi mostrada na seção 3.1.1. Desta forma, será possível transformar este problema em um problema homogêneo, com condição de contorno também homogênea, e assim, aplicar o método de Separação de Variáveis para problemas homogêneos em domínios limitados. Sendo assim, decompõe-se a solução $u(y, t)$ em componente estacionária e componente transiente

$$u(y, t) = u(y) - \bar{u}(y, t) \quad (3.105)$$

onde $u(y)$ é a componente estacionária dada por

$$u(y) = V \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

e $\bar{u}(y, t)$ é a componente transiente. Assim, a equação (3.105) é reescrita como

$$u(y, t) = V \left(1 - \frac{y}{H}\right) - \bar{u}(y, t). \quad (3.106)$$

Substituindo a equação (3.106) nas equações (3.103) e (3.104), obtemos um novo problema, agora com equação governante e condições de contorno homogêneas.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad (3.107)$$

e,

$$\begin{cases} \bar{u} = 0, \text{ em } y = 0, t > 0 \\ \bar{u} = 0, \text{ em } y = H, t \geq 0 \\ \bar{u} = V \left(1 - \frac{y}{H}\right), \text{ em } t = 0, 0 \leq y \leq H. \end{cases} \quad (3.108)$$

Agora, aplica-se o método de Separação de Variáveis

$$\bar{u}(y, t) = Y(y)T(t), \quad (3.109)$$

substituindo a equação (3.109) na equação governante (3.107), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Y(y)T(t))}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2(Y(y)T(t))}{\partial y^2} \Rightarrow Y(y) \frac{dT(t)}{dt} = \nu T(t) \frac{d^2Y(y)}{dy^2} \Rightarrow \\ &\frac{1}{\nu T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Iguala-se ambas funções de (3.110) a uma mesma constante, a fim de que as duas funções em variáveis distintas sejam iguais. Por conveniência, a constante escolhida foi $-\frac{\alpha^2}{H^2}$. Logo,

$$\frac{1}{\nu T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{H^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

para a função em relação a $T(t)$,

$$\frac{1}{\nu T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{H^2} \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\nu T(t) \alpha^2}{H^2} \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + \frac{\nu T(t) \alpha^2}{H^2} = 0, \quad (3.111)$$

e, em relação a $Y(y)$,

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\frac{\alpha^2}{H^2} \Rightarrow \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\frac{\alpha^2 Y(y)}{H^2} \Rightarrow \frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{\alpha^2 Y(y)}{H^2} = 0. \quad (3.112)$$

As equações (3.111) e (3.112) são duas equações diferenciais ordinárias e, a solução da equação (3.111) é

$$T(t) = c_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2 \nu}{H^2} t\right), \quad (3.113)$$

onde c_0 é uma constante de integração arbitrária que será determinada pela condição inicial, e $\exp\left(-\frac{\alpha^2 \nu}{H^2} t\right)$ é o fator integrante. Por outro lado, a equação (3.112), que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, cuja solução geral é (ver **Lema 2**)

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha y}{H}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\alpha y}{H}\right), \quad (3.114)$$

as constantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições de contorno. Aplica-se a equação (3.109) nas condições de contorno em $y = 0$ e $y = H$,

$$Y(0)T(t) = 0 \text{ e } Y(H)T(t) = 0$$

o caso em que $T(t) = 0$ é excluído, já que corresponde ao estado estacionário, pois é o caso em que $t \rightarrow \infty$. Portanto, as condições tornam-se:

$$Y(0) = 0 \text{ e } Y(H) = 0, \quad (3.115)$$

note que para encontrar as condições de contorno em $Y(y)$ é essencial que essas condições sejam homogêneas.

$$\text{Em } y = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ então } Y(y) = c_1 \text{sen} \left(\frac{\alpha y}{H} \right).$$

Agora, em $y = H$,

$$Y(H) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \text{sen} \left(\frac{\alpha H}{H} \right) \Rightarrow 0 = c_1 \text{sen}(\alpha)$$

que possui infinitas raízes da forma

$$\alpha_k = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

cada uma dessas raízes correspondem a uma solução $Y_k(y)$ e $T_k(t)$. Por superposição (ver **Lema 1**),

$$\bar{u}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \text{sen} \left(\frac{\alpha_k y}{H} \right) \exp \left(-\frac{\nu \alpha_k^2 t}{H^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{H} \right) \exp \left(-\frac{\nu k^2 \pi^2 t}{H^2} \right), \quad (3.116)$$

onde a constante $B_k = c_{0k} c_{1k}$ é determinada pela condição inicial. Para $t = 0$, obtém-se,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{H} \right) = V \left(1 - \frac{y}{H} \right). \quad (3.117)$$

Para isolar B_k , aproveitamos o seguinte resultado,

$$\int_0^1 (\text{sen}(k\pi y) \text{sen}(n\pi y)) dy = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

Multiplica-se ambos lados da equação (3.117) por $\text{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right)$ e integra-se de 0 a H ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^H \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{H} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy = V \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{H} \right) dy.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = \frac{y}{H}$, segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 \text{sen}(k\pi\xi) \text{sen}(n\pi\xi) d\xi = V \int_0^1 (1 - \xi) \text{sen}(n\pi\xi) d\xi.$$

O caso utilizado aqui é para $k = n$, então,

$$B_k \frac{1}{2} = V \int_0^1 (1 - \xi) \text{sen}(n\pi\xi) d\xi = V \frac{1}{k\pi} \Rightarrow \frac{B_k}{2} = \frac{V}{k\pi} \Rightarrow B_k = \frac{2V}{k\pi} \quad (3.118)$$

substitui-se B_k na equação (3.116), logo,

$$\bar{u}(y, t) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{H} \right) \exp \left(-\frac{\nu k^2 \pi^2 t}{H^2} \right) \quad (3.119)$$

por fim, como foi obtido o termo transiente $\bar{u}(y, t)$, substitui-se a equação (3.119) na equação (3.106)

$$u(y, t) = V \left(1 - \frac{y}{H} \right) - \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{H} \right) \exp \left(-\frac{\nu k^2 \pi^2 t}{H^2} \right). \quad (3.120)$$

A equação (3.120) é a solução analítica para o escoamento Couette planar no estado transiente para o caso Newtoniano.

3.2.4 Escoamento Poiseuille Planar

Considera-se um fluxo transiente que é induzido por um gradiente de pressão constante aplicado de maneira repentina. Um fluido Newtoniano de densidade ρ e viscosidade η_s está contido entre duas placas horizontais separadas por uma distância $2H$, como mostra a Figura 3.34,

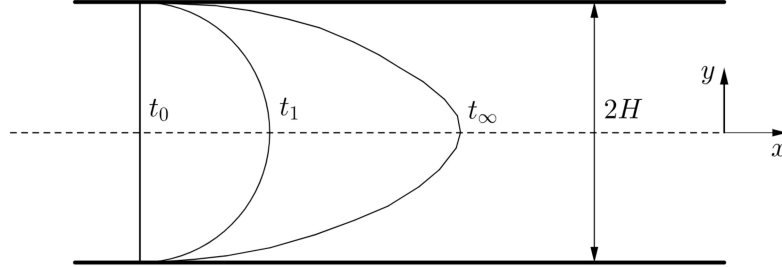


Figura 3.34: Escoamento Poiseuille planar no estado transiente.

O fluido está inicialmente em repouso. No tempo $t = 0^+$, o gradiente de pressão constante $\frac{\partial p}{\partial x}$ é aplicado, colocando o líquido em movimento.

A equação governante deste fluxo é,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.121)$$

Posiciona-se o eixo- x no plano de simetria do escoamento. Consequentemente, as condições de contorno e inicial são,

$$\begin{cases} u = 0, & \text{em } y = \pm H, t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \text{em } y = 0, t \geq 0, \\ u = 0, & \text{em } t = 0, 0 \leq y \leq H. \end{cases} \quad (3.122)$$

O problema está definido em um domínio espacial limitado, $0 \leq y \leq H$. Entretanto, a equação governante (3.121) não é homogênea, portanto, o método de Separação de Variáveis não pode ser aplicado diretamente. Como este problema admite solução no estado estacionário, como visto na seção 3.1.2, então, primeiro, decompõe-se a solução da equação (3.121)

$$u(y, t) = u(y) - \bar{u}(y, t) \quad (3.123)$$

onde $u(y)$ é a componente no regime estacionário dada por

$$u(y) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} (H^2 - y^2) \quad (3.124)$$

e $\bar{u}(y, t)$ é a componente no regime transiente. Logo, a equação (3.123) torna-se

$$u(y, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} (H^2 - y^2) - \bar{u}(y, t). \quad (3.125)$$

Substituindo a equação (3.123) nas equações (3.121) e (3.122),

$$-\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \Rightarrow -\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial p}{\partial x \eta_s} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \Rightarrow$$

$$-\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta_s \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \Rightarrow 0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\eta_s}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (3.126)$$

ou seja, a equação (3.126) é a nova equação governante do problema, agora homogênea. E, as novas condições de contorno, também homogêneas, são

$$\begin{cases} \bar{u} = 0, & \text{em } y = H, t \geq 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, & \text{em } y = 0, t \geq 0, \\ \bar{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} (H^2 - y^2), & \text{em } t = 0, 0 \leq y \leq H. \end{cases} \quad (3.127)$$

Assim é possível aplicar o método de Separação de Variáveis

$$\bar{u}(y, t) = Y(y)T(t). \quad (3.128)$$

Aplica-se a equação (3.128) em (3.126), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Y(y)T(t))}{\partial t} - \frac{\eta_s}{\rho} \frac{\partial^2(Y(y)T(t))}{\partial y^2} = 0 &\Rightarrow Y(y) \frac{dT(t)}{dt} - \frac{\eta_s}{\rho} T(t) \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\rho}{\eta_s T(t)} \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Iguala-se ambas equações de (3.129) a mesma constante, $-\frac{\alpha^2}{H^2}$. Para a função em relação a $T(t)$,

$$\frac{\rho}{\eta_s T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{H^2} \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + \frac{\eta_s T(t) \alpha^2}{\rho H^2} = 0 \quad (3.130)$$

e, em relação a $Y(y)$,

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\frac{\alpha^2}{H^2} \Rightarrow \frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{Y(y) \alpha^2}{H^2} = 0 \quad (3.131)$$

a solução da equação (3.130) é

$$T(t) = c_0 \exp\left(-\frac{\eta_s t \alpha^2}{\rho H^2}\right) \quad (3.132)$$

onde, $\exp\left(-\frac{\eta_s t \alpha^2}{\rho H^2}\right)$ é o fator integrante e c_0 é uma constante de integração arbitrária que será determinada pela condição inicial. Por outro lado, a equação (3.131) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, cuja solução geral é (ver **Lema 2**)

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha y}{H}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\alpha y}{H}\right). \quad (3.133)$$

Da condição sobre o eixo de simetria, $y = 0$, tem-se que $\frac{dY(0)}{dy} = 0$, dessa forma, derivando a equação (3.133) em relação a y e aplicando em $y = 0$, segue

$$\frac{dY(0)}{dy} = \frac{c_1 \alpha}{H} \cos\left(\frac{\alpha y}{H}\right) - \frac{c_2 \alpha}{H} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha y}{H}\right) \Rightarrow 0 = \frac{c_1 \alpha}{H} \Rightarrow c_1 = 0$$

então, a equação (3.133) reduz-se a,

$$Y(y) = c_2 \cos\left(\frac{\alpha y}{H}\right)$$

da condição sobre as placas, tem-se $Y(H) = Y(-H) = 0$ então,

$$Y(H) = c_2 \cos\left(\frac{\alpha H}{H}\right) \Rightarrow 0 = c_2 \cos(\alpha)$$

que possui infinitas raízes da forma,

$$\alpha_k = k\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.134)$$

para cada uma dessas raízes existe uma solução $Y_k(y)$ e $T_k(t)$, as quais são definidas pelo princípio da superposição, (ver **Lema 1**)

$$\bar{u}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Y_k(y) T_k(t) \Rightarrow \bar{u}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right) \exp\left(-\frac{\eta_s k^2 \pi^2 t}{4\rho H^2}\right). \quad (3.135)$$

Da condição inicial,

$$u(y, 0) = u(y) - \bar{u}(y, 0) \Rightarrow 0 = u(y) - \bar{u}(y, 0) \Rightarrow u(y) = \bar{u}(y, 0), \text{ então}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} H^2 \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right). \quad (3.136)$$

Para isolar B_k será aproveitado o seguinte resultado

$$\int_0^1 \left(\cos\left(\frac{k\pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \right) dy = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

Assim, multiplicando ambos lados da equação (3.136) por $\cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right)$ e integrando de 0 a H ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^H \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right) dy = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} H^2 \int_0^H \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right) dy$$

faz-se a mudança de variável $\xi = \frac{y}{H}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi \xi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi \xi}{2}\right) d\xi = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} H^2 \int_0^1 (1 - \xi^2) \cos\left(\frac{k\pi \xi}{2}\right) d\xi$$

Resolve-se as integrais, obtendo B_k . Consequentemente, substituindo na equação (3.135),

$$\bar{u}(y, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} H^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-16(k\pi) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 32\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)^3} \right) \cos\left(\frac{k\pi y}{2H}\right) \exp\left(-\frac{\eta_s k^2 \pi^2 t}{\rho 4H^2}\right). \quad (3.137)$$

Para k ímpar, tem-se $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ e $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \pm 1$. Logo, das equações (3.137) e (3.124), reescreve-se a equação (3.123),

$$u(y, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta_s} H^2 \left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi y}{2H}\right) \exp\left(-\frac{\eta_s(2k-1)^2\pi^2 t}{\rho 4H^2}\right) \right]. \quad (3.138)$$

A equação (3.138) representa a solução analítica do escoamento Poiseuille planar no estado transiente e para o caso Newtoniano.

No Capítulo 4 será apresentada a metodologia numérica, a discretização das equações e a solução numérica para um escoamento em um canal bidimensional, no caso Newtoniano. Este escoamento foi resolvido no capítulo 3 para um fluido Newtoniano e não-Newtoniano no problema 3.1.2.

Metodologia Numérica

Neste capítulo é apresentada a adimensionalização das equações bem como os passos para a obtenção da solução numérica. Esta solução numérica será obtida a partir do Método da Projeção, que desacopla a velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes, também é apresentada a discretização das equações por diferenças finitas, utilizando a formulação explícita.

O termo convectivo presente nas equações constitutivas é aproximado pela técnica de alta ordem CUBISTA (Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection) [2], este termo é um dos principais causadores de dificuldades numéricas nas implementações e simulações. Para o tratamento da fronteira, é usado o esquema FOU (First Order Upwind) que possui boas propriedades de estabilidade e é incondicionalmente estável [7, 15]. A implementação numérica é feita no PythonTM.

4.1 Adimensionalização

O processo de adimensionalização das equações em mecânica dos fluidos computacional consiste na utilização das equações que modelam os escoamentos de forma adimensional. Este processo permite mostrar os efeitos físicos e formular o modelo para o problema independente do sistema de unidades de medidas. A partir disso, aparecem constantes adimensionais como, por exemplo, o número de Reynolds, de Weissenberg, entre outros, conhecidos na literatura [18, 34].

As variáveis adimensionais, acrescidas do sobrescrito *, são:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad \mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{p}}{\rho U^2} \quad (4.1)$$

onde L descreve o comprimento do canal, U a velocidade e ρ a densidade. A partir disso, aparecem os números adimensionais

- Número de Reynolds (Re): estabelece a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento e é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0} \quad (4.2)$$

onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, a qual η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Froude (Fr): representa a razão entre as forças inerciais e as forças do campo e é dado por

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}. \quad (4.3)$$

Para obter a equação da continuidade em sua forma adimensional, faz-se as seguintes manipulações

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial Uu^*}{\partial Lx^*} + \frac{\partial Uv^*}{\partial Ly^*} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{U}{L}}_{\neq 0} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

e, de forma similar, são obtidas as equações da quantidade de movimento em suas formas adimensionais sem o acréscimo do sobrescrito *, (ver **Observação 2**), em relação a x e y , respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f_x, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f_y. \quad (4.6)$$

Observação 2 *Por questão de simplicidade, no decorrer do trabalho, a notação acrescida do sobrescrito * nas variáveis adimensionais será omitida, uma vez que as constantes adimensionais já denotam que a equação está em sua forma adimensional.*

4.2 Método da Projeção

A partir da adimensionalização das equações realizada na Seção 4.1, reescreve-se o sistema de equações (2.9)–(2.11) da seguinte maneira,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}. \quad (4.8)$$

As equações (4.7) e (4.8) descrevem um sistema de equações diferenciais parciais de natureza mista, para [12], isto significa que enquanto a equação da continuidade (4.7) é elíptica, a equação da quantidade de movimento (4.8) determina um processo transiente e é parabólica.

Sabe-se como é a evolução temporal da velocidade \mathbf{u} mas, por outro lado, não se sabe ocorre esta evolução para a pressão p . Como a equação da continuidade e da quantidade de movimento devem ser simultaneamente satisfeitas, a ligação entre elas é dada pela especificação do campo escalar da pressão, ou seja, o papel da pressão em escoamentos incompressíveis é de garantir que, a cada instante de tempo, a equação da continuidade esteja satisfeita. Logo, há um acoplamento entre a pressão e a velocidade.

Neste trabalho, utiliza-se um método numérico segregado, ou seja, obtém-se a solução de equações de Navier-Stokes incompressíveis calculando a velocidade \mathbf{u} e a pressão p de maneira consecutiva e separada. Para isto, utiliza-se o Método da Projeção, que se fundamenta no Teorema de Helmholtz-Hodge. A demonstração deste teorema também

será apresentada e pode ser encontrada em [6].

Teorema 1. (Decomposição de Helmholtz-Hodge) *Seja Ω uma região com fronteira suave $\partial\Omega$ e \mathbf{u} um campo vetorial definido em Ω . Nestes termos, a decomposição de \mathbf{u} na forma*

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\psi \quad (4.9)$$

existe e é única, sendo ψ um campo escalar também definido em Ω . Já o campo vetorial \mathbf{u} é solenoidal e paralelo a $\partial\Omega$, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.10)$$

e, ao longo de $\partial\Omega$,

$$\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.11)$$

onde \vec{n} é o vetor normal a $\partial\Omega$ e orientado para fora de Ω .

Demonstração. *Primeiramente, estabelece a relação de ortogonalidade*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla\psi dV = 0.$$

Pela propriedade do operador divergente, tem-se:

$$\nabla \cdot (\psi\mathbf{u}) = (\nabla \cdot (\mathbf{u}))\psi + \mathbf{u} \cdot \nabla\psi$$

aplicando o Teorema da Divergência e considerando a hipótese de que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, vem

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla\psi dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi\mathbf{u}) dV = \int_{\partial\Omega} \psi\mathbf{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

porque $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$ em $\partial\Omega$.

Para provar a unicidade, suponha que $\bar{\mathbf{u}} = u_1 + \nabla\psi_1 = u_2 + \nabla\psi_2$. Então

$$0 = u_1 + \nabla\psi_1 - u_2 - \nabla\psi_2 = u_1 - u_2 + \nabla(\psi_1 - \psi_2)$$

fazendo o produto interno com $u_1 - u_2$ e integrando, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u_1 - u_2) \cdot (u_1 - u_2) + (u_1 - u_2) \cdot \nabla(\psi_1 - \psi_2) dV = \\ &= \int_{\Omega} \|u_1 - u_2\|^2 + (u_1 - u_2) \cdot \nabla(\psi_1 - \psi_2) dV = \\ &= \int_{\Omega} \|u_1 - u_2\|^2 dV \end{aligned}$$

pela relação de ortogonalidade. Segue que $u_1 = u_2$ e, então $\nabla\psi_1 = \nabla\psi_2$.

Se $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\psi$, note que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla \cdot (\nabla\psi) = \Delta\psi$$

e, para provar a existência,

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \nabla^2\psi$$

de fato, dado $\tilde{\mathbf{u}}$, definimos ψ pela solução do problema de Neumann

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \text{ em } \Omega, \text{ com } \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \vec{n} \text{ em } \partial\Omega.$$

Sabe-se, [9], que a solução para este problema existe e é única até a adição de uma constante a ψ . Desta escolha de ψ , define-se $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla\psi$. Então, \mathbf{u} tem as propriedades desejadas $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$ pela construção de ψ .

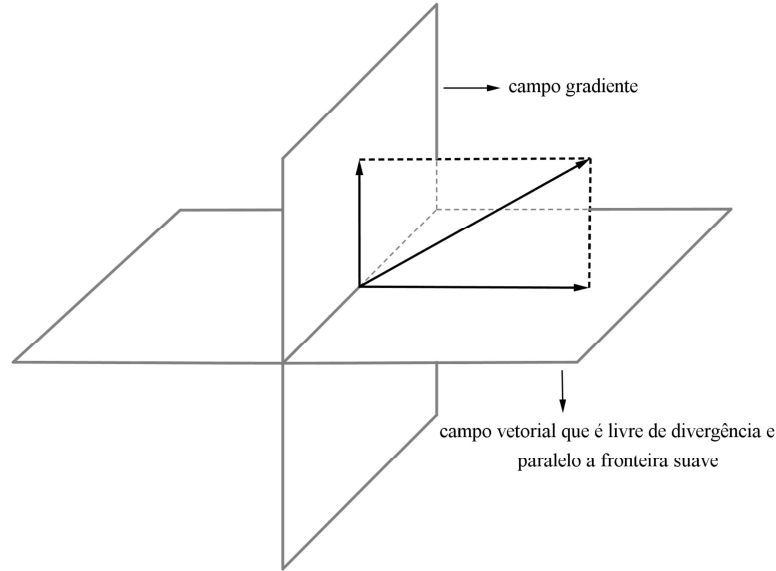


Figura 4.1: Decomposição de um campo vetorial em uma parte livre de divergência e um campo gradiente.

A principal ideia do Método da Projeção consiste em definir um campo de velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$ a partir de

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} [\nabla^2 \mathbf{u}] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f} \quad (4.12)$$

onde \tilde{p} é o campo de pressão tentativo tal que

$$p \neq \tilde{p}$$

em seguida, aplica-se o **Teorema 1**, onde $\tilde{\mathbf{u}}$ pode ser decomposto como mostra a equação (4.9), e $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ é um potencial auxiliar determinado pela equação de poisson

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.13)$$

que é obtida substituindo a decomposição (4.9) em (4.7) como a seguir

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \nabla\psi) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \nabla^2 \psi.$$

Portanto, a partir do entendimento numérico, assume-se que o termo não-linear na equação de Navier-Stokes seja aproximado explicitamente e, assim, o propósito é a resolução da equação (4.12) para a velocidade $\tilde{\mathbf{u}}$ e da equação de poisson

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.14)$$

para o potencial auxiliar ψ então, conhecido ψ , a velocidade \mathbf{u} é obtida a partir da decomposição (4.9). Desta forma, da decomposição (4.9) e da equação (4.12), define-se uma fórmula de atualização para expressar p em termos do campo tentativo \tilde{p} e ψ .

4.2.1 Algoritmo Numérico

Supõe-se que a velocidade \mathbf{u}^n e a pressão p^n sejam conhecidas no tempo $t = t_n$. Os passos a seguir realizam o cálculo de \mathbf{u}^{n+1} e p^{n+1} no tempo $t_{n+1} = t_n + \delta t$. Considera-se então as equações

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + conv(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re}[\nabla^2 \mathbf{u}^n] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}^n \quad (4.16)$$

como aproximações discretas no tempo para as equações (4.7) e (4.8), respectivamente; onde $conv(\mathbf{u}\mathbf{u})^n$ e \mathbf{f}^n são aproximações explícitas para $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$ e \mathbf{f} em $t = t_n$.

A equação (4.17), a seguir, descreve uma aproximação discreta no tempo para (4.12), similar a equação (4.16)

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} + conv(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{1}{Re}[\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^n] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}^n \quad (4.17)$$

onde faz-se $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$ e $\tilde{p}^{n+1} = p^n$. Da decomposição (4.9), tem-se

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla \psi \Rightarrow \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi,$$

como $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$, atualiza-se a velocidade fazendo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1} \quad (4.18)$$

que, acompanhado da equação (4.15), resulta na equação de poisson

$$\cancel{\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}} \stackrel{0}{=} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla^2 \psi^{n+1} \Rightarrow \nabla^2 \psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (4.19)$$

calculadas $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ e ψ^{n+1} , a partir das equações (4.17) e (4.19), respectivamente, calcula-se \mathbf{u}^{n+1} por (4.18).

Por fim, para obter a expressão que calcula p^{n+1} , substitui-se (4.18) em (4.17)

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} + conv(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{1}{Re}[\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^n] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}^n \quad (4.20)$$

em seguida, subtrai-se esta expressão de (4.16), que resulta em

$$\nabla \left(p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1} - \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} \right) = \vec{0} \Rightarrow p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t}. \quad (4.21)$$

O termo convectivo na equação do momento gera uma restrição para o passo temporal δt , que é baseada na condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) [19], que determina

$$\delta t_{CFL} \leq \min\{\delta t_{CFL_x}, \delta t_{CFL_y}\}, \quad (4.22)$$

onde

$$\delta t_{CFL_x} = \frac{\delta x}{|u_{max}|} \text{ e } \delta t_{CFL_y} = \frac{\delta y}{|v_{max}|}. \quad (4.23)$$

Aqui, as velocidades u_{max} e v_{max} representam, respectivamente, os valores máximos que as componentes do vetor velocidade u e v alcançam nas direções x e y . Assim, o passo temporal admitido nas simulações precisa respeitar a restrição (4.22). De outro modo, a

forma explícita da integração temporal da equação do momento faz com que o seu termo viscoso gere a restrição de estabilidade parabólica δt_{visc} descrita por

$$\delta t_{visc} = \beta \frac{Re}{2} \left[\frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta y)^2} \right]^{-1} = \beta \frac{Re}{4} (\delta m)^2. \quad (4.24)$$

Assim, o passo temporal da formulação explícita é obtido da equação (4.25)

$$\delta t = F_0 \min\{F_{visc}\delta t_{visc}, F_{CFL}\delta t_{CFL}\} \quad (4.25)$$

onde F_0 , F_{visc} e F_{CFL} são fatores de controle do passo no tempo, no intervalo $]0, 1]$ para ter estabilidade.

Portanto, o algoritmo computacional da formulação explícita é descrito pelos seguintes passos:

1º: inicialização das variáveis \tilde{p} , um campo de pressão tentativo, e $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$, um campo de velocidade intermediário, a partir da equação (4.12), por Euler Explícito;

2º: resolver a equação de Poisson (4.19) com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ em contornos rígidos e entradas de fluidos}$$

e

$$\psi = 0, \text{ nas saídas de fluidos.}$$

3º: atualizar a velocidade final a partir de (4.18);

4º: atualizar o campo de pressão por (4.21).

O código feito a partir dos passos descritos neste trabalho pode ser visto em https://colab.research.google.com/drive/1DZ_7s3AocHZDGrT1KG0LgDRQ0ety6T2o?usp=sharing. Vale ressaltar que este código pode ser adaptado para outros casos, exigindo poucas alterações.

4.3 Discretização das Equações

O objetivo de uma técnica de discretização é transformar as equações diferenciais parciais (4.7)–(4.8) em um sistema de equações algébricas correspondente. Sob condições adequadas, a solução desse sistema cria um conjunto de valores associado à solução das equações originais em alguma região predeterminada. O processo de discretização é dividido em duas etapas: a discretização do domínio Ω e das equações. Na primeira etapa é fornecida uma representação numérica do domínio, incluindo as posições dos pontos onde se deseja avaliar a solução, conhecida também como malha computacional. Na segunda etapa, a discretização das equações fornece equações de diferenças que relaciona as variáveis dependentes nos pontos do domínio discretizado.

4.3.1 Aproximação para as Derivadas por Diferenças Finitas

Para aproximar as derivadas das funções incógnitas em relação à variável temporal e espacial presentes nas equações de Navier-Stokes utiliza-se a técnica de Diferenças Finitas [12]. Seja ϕ uma função de uma variável real, logo

- Diferença progressiva para a primeira derivada:

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} - \frac{h}{2}\phi''(\xi), \quad x < \xi < x+h.$$

- Diferença regressiva para a primeira derivada:

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x-h)}{h} - \frac{h}{2}\phi''(\xi), \quad x-h < \xi < x.$$

- Diferença central para a primeira derivada:

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}\phi'''(\xi), \quad x-h < \xi < x+h.$$

- Diferença central para a segunda derivada:

$$\phi''(x) = \frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\phi^{(4)}(\xi), \quad x-h < \xi < x+h.$$

O último termo em cada uma das igualdades acima é intitulado erro de truncamento local associado. Nas referências [12, 18] é encontrado um estudo mais profundo sobre o assunto.

Para resolver o conjunto de equações diferenciais parciais (4.7)–(4.8) usando a técnica de diferenças finitas é usada a mesma estratégia de aproximar derivadas por diferenças, mas sobre uma malha composta por células deslocadas. Dessa forma, a pressão é avaliada no centro das células computacionais e as componentes do vetor velocidade (u, v) são discretizadas nas faces das células. Uma representação da malha composta por células deslocadas com a posição de discretização das variáveis envolvidas nos modelos é apresentada na Figura 4.2.

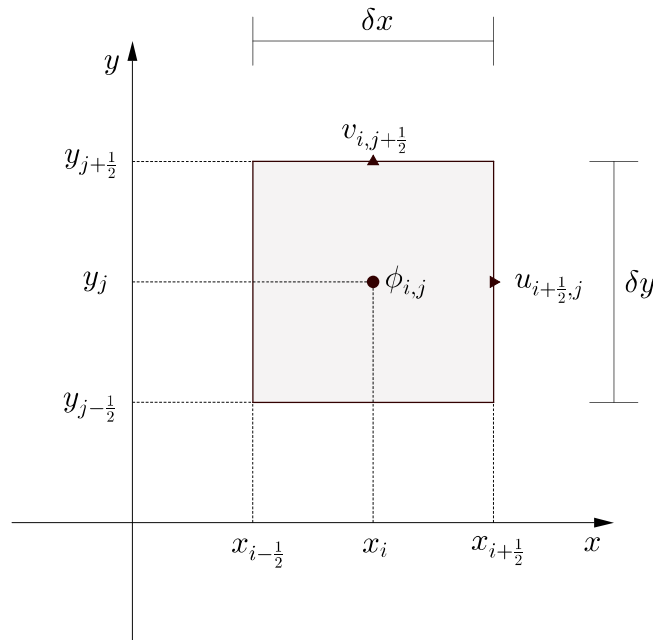


Figura 4.2: Representação da célula deslocada utilizada pela metodologia numérica.

4.3.2 Termos Convectivos

Os termos convectivos presentes nas equações da quantidade de movimento envolvem componentes de velocidade em pontos não definidos na discretização. É possível calculá-los por meio da expressão

$$\frac{\text{conv}(\mathbf{u}\mathbf{u})_{i+1,j}^n - \text{conv}(\mathbf{u}\mathbf{u})_{i,j}^n}{\delta x} = \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^n \bar{\mathbf{u}}_{i+1,j}^n - \mathbf{u}_{i,j}^n \bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n}{\delta x}, \quad (4.26)$$

tendo em vista o primeiro termo convectivo da equação da quantidade de movimento na direção x e de maneira análoga para os demais termos. Para aproximar os valores $\bar{\mathbf{u}}_{i+1,j}^n$ e $\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n$ é calculada a média aritmética dos valores de \mathbf{u} nos pontos vizinhos, aqueles definidos na discretização, e os valores de $\mathbf{u}_{i+1,j}^n$ e $\mathbf{u}_{i,j}^n$ são obtidos por meio do uso de esquemas de convecção.

Neste trabalho utiliza-se o esquema CUBISTA [2] para aproximar os termos convectivos.

Considere o termo $\text{conv}(\mathbf{u}\mathbf{u})_{i,j}^n$, o procedimento é feito da seguinte maneira:

Seja o termo $\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n$ descrito pela expressão

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n = \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2}. \quad (4.27)$$

Se $\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n > 0$, define-se

$$u_D = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n, \quad u_U = \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \quad \text{e} \quad u_R = \mathbf{u}_{i-\frac{3}{2},j}^n, \quad (4.28)$$

e, se $\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^n < 0$,

$$u_D = \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n, \quad u_U = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad \text{e} \quad u_R = \mathbf{u}_{i+\frac{3}{2},j}^n \quad (4.29)$$

onde D , U e R designam, respectivamente, os pontos imediatamente para onde segue o escoamento (*downstream*), na direção de onde vem o escoamento (*upstream*) e o imediatamente depois, na mesma direção (*remote upstream*).

Seja $\hat{u} = \frac{u_U - u_R}{u_D - u_R}$, logo,

$$\mathbf{u}_{i,j}^n = \begin{cases} \frac{1}{4}(7u_U - 3u_R), & \text{se } 0 < \hat{u} < \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{8}(3u_D + 6u_U - u_R), & \text{se } \frac{3}{8} < \hat{u} < \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{4}(3u_D + u_U), & \text{se } \frac{3}{4} < \hat{u} < 1, \\ u_U, & \text{se } \hat{u} \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4.30)$$

O valor $\mathbf{u}_{i+1,j}^n$ é calculado analogamente, bem como para os demais componentes dos termos convectivos.

4.3.3 Equações Discretizadas

A partir do conceito de malha deslocada, a discretização espacial das equações da continuidade e da quantidade de movimento são executadas pelo método de diferenças centradas de segunda ordem, e o termo convectivo pelo esquema de alta ordem CUBISTA.

Seja $\mathcal{C}_{i,j}$ uma célula computacional, como mostra a Figura 4.2, com centro (x_i, y_j) . Desta forma, a velocidade \mathbf{u} é calculada na face vertical à direita e a velocidade \mathbf{v} na face horizontal superior. As demais propriedades são calculadas no centro da célula computacional.

- Equação da continuidade, discretizada no centro da célula $\mathcal{C}_{i,j}$:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\partial y} = 0 \quad (4.31)$$

- Equação da quantidade de movimento em relação a x , discretizada entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i+1,j}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} + \frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial y} = - \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}_{i+1,j} - \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}}{\delta x} \right] + \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x^2} + \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{\delta y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f x^n, \end{aligned} \quad (4.32)$$

- Equação da quantidade de movimento em relação a y , discretizada entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i,j+1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} + \frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{v}\mathbf{v})}{\partial y} = - \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}_{i+1,j} - \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}}{\delta y} \right] + \\ & \frac{1}{Re} \left[\frac{\mathbf{v}_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x^2} + \frac{\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{\delta y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f y^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Isolando os termos $\tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j}$ e $\tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2},j}$, nas equações (4.32)–(4.33), é possível reescrevê-las como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left[-\frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{u})}{\partial x} - \frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial y} - \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}_{i+1,j} - \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}}{\delta x} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{Re} \left[\frac{\mathbf{u}_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x^2} + \frac{\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{\delta y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f x^n \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left[-\frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial x} - \frac{\partial(\mathbf{v}\mathbf{v})}{\partial y} - \left[\frac{\tilde{\mathcal{P}}_{i+1,j} - \tilde{\mathcal{P}}_{i,j}}{\delta y} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{Re} \left[\frac{\mathbf{v}_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x^2} + \frac{\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{\delta y^2} \right] + \frac{1}{Fr^2} f y^n \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Os termos $\frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{u})}{\partial x}$, $\frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial y}$, $\frac{\partial(\mathbf{u}\mathbf{v})}{\partial x}$ e $\frac{\partial(\mathbf{v}\mathbf{v})}{\partial y}$, denotados neste trabalho por $conv(\mathbf{u}\mathbf{u})$, $conv(\mathbf{u}\mathbf{v})$, $conv(\mathbf{v}\mathbf{u})$ e $conv(\mathbf{v}\mathbf{v})$, respectivamente, representam os termos convectivos não-lineares que são discretizados no espaço pelo esquema CUBISTA.

- Equação de Poisson, dada por (4.19), para determinar o potencial auxiliar ψ , discretizada por diferenças centradas:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\delta x^2)} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\delta y^2)} \right]^{n+1} &= \left[\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right]^{n+1} + \\ &+ \left[\frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right]^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

- Correção da velocidade, feita por (4.18), discretizada por diferenças centradas:

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta x}, \quad (4.37)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta y}. \quad (4.38)$$

- Atualização do campo de pressão (4.21):

$$p_{i,j}^{n+1} = \tilde{p}_{i,j}^{n+1} + \frac{\psi_{i,j}^{n+1}}{\delta t}. \quad (4.39)$$

4.4 Solução Numérica para um Escoamento em um Canal Bidimensional

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir da implementação do Método da Projeção para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido, cuja solução analítica no caso Newtoniano foi descrita nas seções 3.1.2, no estado estacionário, e 3.2.4, no estado transiente.

Para a verificação da metodologia numérica, utiliza-se os seguintes valores para as constantes de referência e demais parâmetros:

- Amplitude do canal: $H = 1$;
- Comprimento do canal: 2;
- Densidade: 1350;
- Viscosidade cinemática: 0.3;
- Gradiente de pressão constante: -0.0027 ;
- Número de Reynolds: $Re = \frac{30}{9}$.

As condições de contorno são aquelas descritas na subseção (4.2.1). Para fazer a verificação do código é feita uma análise de convergência da solução numérica para a solução analítica considerando três tipos de malhas, M_1 , M_2 e M_3 , com os seus respectivos espaçamentos espaciais, apresentados na Tabela 4.1

Tabela 4.1: Número de células e espaçamento das malhas espaciais com o espaçamento δt_{CFL} calculado e o espaçamento δt utilizado.

Malha	Número de células	Espaçamento	δt_{CFL}	δt
M_1	10×5	$\delta x = \delta y = 0.2$	1.6	0.0266
M_2	20×10	$\delta x = \delta y = 0.1$	0.8	0.0066
M_3	40×20	$\delta x = \delta y = 0.05$	0.4	0.0016

Para fazer a análise da ordem de convergência é necessário calcular o erro. Porém, como visto em [23], métodos de diferenças finitas não produzem uma função $\hat{f}(x)$ como

uma aproximação de $f(x)$. Eles produzem um conjunto de valores F_i nos pontos da malha x_i . Desta forma, a norma- p utilizada neste caso é dada por

$$\|E_\varsigma\|_p = \left(\Delta x \Delta y \sum_i \sum_j |e_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.40)$$

No contexto deste trabalho, podemos reescrever a norma (4.40) como

$$\|E_\varsigma\|_2 = \left(\Delta y \sum_j |e_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.41)$$

onde ς é o espaçamento da malha espacial $\varsigma = \delta x = \delta y$ e $|e_{ij}|^2$ é o erro absoluto.

A ordem de convergência espacial do método numérico é então definida por

$$\Lambda = \frac{\log \left(\frac{E_\varsigma}{E_{\frac{\varsigma}{2}}} \right)}{\log 2}. \quad (4.42)$$

As Tabelas 4.2 e 4.3 a seguir apresentam os erros, número de iterações e tempo de conclusão para cada uma das malhas, e a ordem de convergência, respectivamente.

Tabela 4.2: Erro, número de iterações e tempo de conclusão para cada malha.

Malha	Erro	Iterações	Tempo
M_1	0.0001	187	1.2s
M_2	2.9773×10^{-5}	750	28.0s
M_3	7.6765×10^{-6}	3000	5min32s

Tabela 4.3: Ordem de convergência para cada malha.

Malhas	Ordem de convergência
M_1 e M_2	1.8550
M_2 e M_3	1.9555

Pode-se dizer, com base nas Tabelas 4.2 e 4.3 que os valores são satisfatórios. O erro foi diminuindo da malha menos refinada para a mais refinada, o que era esperado. O número de iterações aumentou, consideravelmente, motivo pelo qual não foi possível refinar ainda mais a malha, ao tentar com uma malha ainda mais fina de 80×40 , por exemplo, o número de iterações subiu para 12000 e o tempo de conclusão para aproximadamente 4 horas – o que também era esperado, conhecendo as limitações do ambiente de execução. Em uma máquina convencional, não seria possível realizar o teste com esta malha. Por outro lado, analisando a ordem de convergência, é visto que mesmo considerando a malha M_1 que é a mais grossa, com a M_2 , a ordem de convergência já se aproximou de dois. Mas quando consideramos a M_2 e M_3 que é a mais refinada, o resultado foi ainda mais satisfatório, se aproximando ainda mais de dois, o que era esperado pois os métodos utilizados para a discretização das equações são de ordem dois.

A seguir, são apresentados os gráficos gerados pela implementação numérica. O gráfico (4.3) apresenta o perfil de velocidade para as três malhas, M_1 , M_2 e M_3 , apresentando o perfil de velocidade parabólico já mostrado na parte analítica deste trabalho 3.1.2.

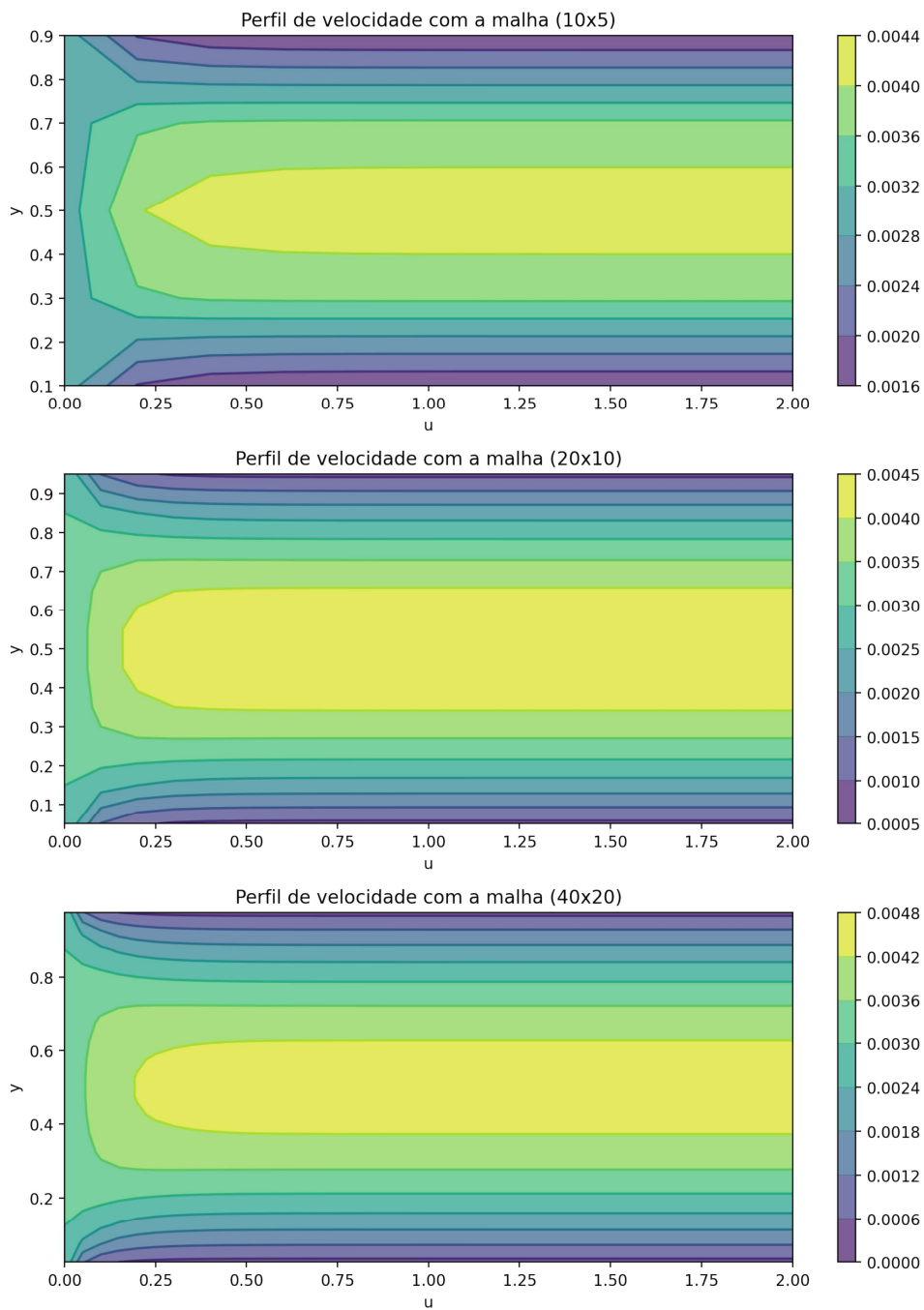


Figura 4.3: Perfil de velocidade numérico para cada uma das malhas.

Por outro lado, no gráfico (4.4) é feita a comparação dos resultados numéricos com o analítico, onde é possível observar que quanto mais refinada a malha, mais nos aproximamos na linha contínua que representa a solução exata, e mesmo com a malha mais grossa, o resultado é satisfatório.

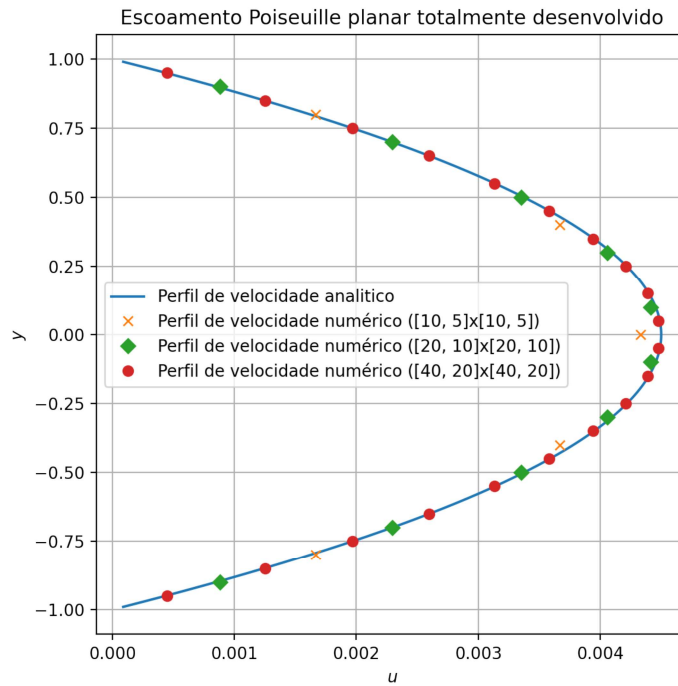


Figura 4.4: Perfil de velocidade analítico e numérico para o escoamento Poiseuille planar totalmente desenvolvido em cada uma das malhas.

E, para validar os resultados, o gráfico (4.5) mostra os erros obtidos na implementação numérica para cada uma das malhas, onde é possível observar a diminuição do erro conforme a malha é mais refinada.

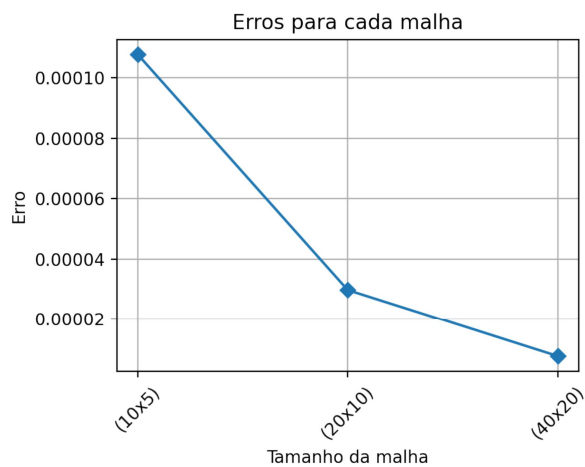


Figura 4.5: Erros obtidos na implementação numérica para cada uma das malhas adotadas.

Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentadas as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares, no estado estacionário e transiente, com fluido Newtoniano e não-Newtoniano.

Na parte teórica, a partir das simplificações das equações de Navier-Stokes e da geometria, obtemos a solução analítica para cada problema, ou seja, o perfil de velocidade de cada escoamento. Este processo foi feito para dois casos: com fluido Newtoniano e não-Newtoniano onde, para o caso não-Newtoniano, a viscosidade foi modelada pela Lei das Potências.

No contexto do modelo Lei das Potências, foi mostrada a solução analítica de cada problema e mostrado graficamente que o perfil de velocidade coincidia com o obtido no caso com o fluido Newtoniano, escolhidos os parâmetros m e n que permitiam que a solução fosse válida matematicamente.

Todos os problemas resolvidos na parte teórica no estado estacionário tiveram seu respectivo perfil de velocidade implementado, permitindo que fosse feita a simulação do comportamento de cada um, sendo possível analisar os efeitos do gradiente de pressão constante, aplicar diversas inclinações na placa, dentre outros parâmetros.

Para implementar o perfil de velocidade de cada escoamento e os demais gráficos apresentados neste trabalho, foram utilizados o GeoGebraTM e a linguagem de programação PythonTM. Principalmente na parte numérica, onde foi implementado o Método da Projeção, foi utilizada a plataforma Google Colab, que permite que seja executado um código PythonTM pelo navegador, sem precisar de nenhuma instalação na máquina, precisando apenas do acesso à internet, além de armazenar os códigos no Google Drive, gerando mais praticidade.

No estado transiente, a solução analítica foi obtida para quatro problemas, e os métodos usados nesta parte do trabalho são os métodos de Solução por Similaridade e Separação de Variáveis. Em consequência, foi possível analisar a diferença entre as duas técnicas para obtenção da solução e suas características. O Problema (3.2.1) foi resolvido pelo método de solução por similaridade, haja vista que o fluido considerado é semi-infinito e não atinge o estado estacionário, em $t = 0$ o fluido e a placa estão em repouso, ou seja, não há escoamento. Por outro lado, os demais problemas, foram resolvidos a partir da Separação de Variáveis.

Na parte numérica, o método numérico utilizado foi o Método da Projeção, que resolve as variáveis primitivas, velocidade e pressão, separadamente. As equações foram discretizadas em uma malha deslocada, pois foi considerado o sistema Cartesiano bidimensional, utilizando a técnica de diferenças finitas. Os passos para o algoritmo numérico, as equações discretizadas e a discretização do termo convectivo, realizada a partir do esquema

CUBISTA, foram descritas na seção 4.3. Os testes numéricos foram realizados utilizando três malhas, começando de uma malha mais grossa e indo até uma mais refinada. Para verificação dos resultados, foi comparado os resultados numéricos de cada malha com a solução analítica obtida na primeira parte do trabalho, o problema escolhido foi o 3.1.2. Foram calculados o erro, ordem de convergência, tempo e número de iterações para cada malha, gerando resultados satisfatórios até mesmo na malha mais grossa. Os gráficos dos perfis de velocidade, comparação com a solução analítica e erros são apresentados.

Referências

- [1] A.M. Afonso, M.A. Alves, and F.T. Pinho. Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 159:50–63, 2009.
- [2] M.A. Alves, P.J. Oliveira, and F.T. Pinho. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International journal for numerical methods in fluids*, 41:47–75, 2003.
- [3] M.A. Alves, F.T. Pinho, and P.J. Oliveira. Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien–Tanner fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101:55–76, 2001.
- [4] W. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora LTC, 8a. Edição, 2006.
- [5] R.E.S. Bretas. *Reologia De Polímeros Fundidos*. EDUFSCAR - São Carlos, 2000.
- [6] A.J. Chorin and J.E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 1992. 3rd ed.
- [7] L. Corrêa. *Metodologia para desenvolvimento de esquemas upwind de alta resolução*. SBMAC - Notas em Matemática Aplicada, v. 57, 2011.
- [8] C. M. Costa. *Caracterização reológica de fluidos complexos*. Rio de Janeiro. PUC - RJ, 2017.
- [9] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley – VCH, 1924.
- [10] D.O.A. Cruz and F.T. Pinho. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 132:28–35, 2005.
- [11] D.O.A. Cruz and F.T. Pinho. Fully-developed pipe and planar flows of multimode viscoelastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141:85–98, 2007.
- [12] J.A. Cuminato and M. Meneguette Jr. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnica de Diferenças Finitas*. Coleção Matemática Aplicada, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [13] S. Das and S. Chakraborty. Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid. *Anal. Chim. Acta*, 559:15–24, 2006.
- [14] P. Dutta and A. Beskok. Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: finite debye layer effects. *Anal. Chem.*, 73:1979–1986, 2001.

- [15] V. G. Ferreira. *Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos*. SBMAC - Notas em Matemática Aplicada, v. 15, 2012.
- [16] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Analytical solutions for channel flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids under slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 171–172:97–105, 2012.
- [17] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Analytical solutions for Newtonian and inelastic non-Newtonian flows with wall slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 175–176:76–88, 2012.
- [18] J.H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3rd edition, 2002.
- [19] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*. vol. I e II. Springer, 1991.
- [20] T. Shigechi G. Davaa and S. Momoki. Plane Couette-Poiseuille flow of Power-Law non-Newtonian fluids. *Reports of the Faculty of Engineering, Nagasaki University*, 30, 2000.
- [21] F. Irgens. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Springer, Cham, 2014.
- [22] V. Iório. *EDP: Um Curso de Graduação*. Coleção Universitária, IMPA, RJ, 2007.
- [23] R.J. Leveque. *Finite Difference Methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Siam - Philadelphia, 2007.
- [24] C. P. Livi. *Fundamentos de fenômenos de transporte: um texto para cursos básicos*. Rio de Janeiro. LTC, 2015.
- [25] M. A. Alves J.M. Nóbrega L.L. Ferrás, A. M. Afonso and F.T. Pinho. Analytical and numerical study of the electro-osmotic annular flow of viscoelastic fluids. *Journal of Colloid and Interface Science*, 420:152–157, 2014.
- [26] M. A. Alves J.M. Nóbrega L.L. Ferrás, A. M. Afonso and F.T. Pinho. Electro-osmotic and pressure-driven flow of viscoelastic fluids in microchannels: Analytical and semi-analytical solutions. *Physics of Fluids*, 28, 2016.
- [27] M. Mirzazadeh, M.P. Escudier, F. Rashidi, and S.H. Hashemabadi. Analytical solution of purely tangential flow for PTT viscoelastic fluid through concentric annulus. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 129:88–97, 2005.
- [28] P.J. Oliveira. An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid. *Acta Mechanica*, 158:157–167, 2002.
- [29] P.J. Oliveira and F.T. Pinho. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 387:271–280, 1999.
- [30] T.C. Papanastasiou, G.C. Georgiou, and A.N. Alexandrou. *Viscous Fluid Flow*. CRC Press LLC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2000.
- [31] F. T. Pinho. *Cálculo de escoamentos de fluidos não-Newtonianos em regime laminar: “Desenvolvimentos e aplicações recentes da metodologia dos volumes finitos”*. PhD thesis, Universidade do Porto, 2013.

-
- [32] A. T. McDonald R. W. Fox. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Editora Guanabara Dois S.A., 1981.
- [33] J.J. Van Schaftingen and M.J. Crochet. Analytical and numerical solution of the Poiseuille flow of a Johnson-Segalman fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 18:335–351, 1985.
- [34] J. Brighton W. Hughes and N. Winowich. *Shaum's Outline of Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Companies, 1999.
- [35] F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*. AMGH, Porto Alegre, 2011.
- [36] R. Fan Y. Chen, W. Li and X. Liu. Gpu optimization for high-quality kinetic fluid simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2021.
- [37] H. Wang Z. H. Ma and S. H. Pu. Gpu computing of compressible flow problems by a meshless method with space-filling curves. *Journal of Computational Physics*, 263:113–135, 2014.