

Amanda Prina de Oliveira

Estruturas *shrimp* e propriedades dinâmicas no
modelo dissipativo do acelerador de Fermi

Rio Claro
2014

Amanda Prina de Oliveira

Estruturas *shrimp* e propriedades dinâmicas no modelo dissipativo do acelerador de Fermi

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel

**Rio Claro
2014**

Aluno, Nome C.

Estruturas *shrimp* e propriedades dinâmicas no modelo dissipativo do acelerador de Fermi

52 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Departamento de Física.

1. Palavra-chave

2. Palavra-chave

3. Palavra-chave

I. Universidade de Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Departamento de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Nome

Prof. Dr.
Nome

Prof. Dr.
Nome do Orientador

*Dedico esta dissertação aos
meus pais Valdevino e Darcy e
aos meus avós Olívio e Celina.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família pelo apoio, agradeço ao meu orientador Edson Denis Leonel pela oportunidade, confiança e incentivo para realizar esse trabalho e à PROPG/REITORIA pela bolsa de estudos. Aos meus amigos.

Resumo

Neste trabalho investigamos algumas propriedades dinâmicas de dois modelos descritos por mapeamentos discretos: (i) mapa quadrático com perturbação paramétrica e; (ii) modelo do acelerador de Fermi concentrando particularmente na dinâmica dissipativa. No caso (i) e com a introdução de uma perturbação paramétrica o espaço de parâmetros é bidimensional permitindo assim um estudo de suas estruturas periódicas. Por outro lado o modelo do acelerador de Fermi descrito em (ii) consiste de uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas sendo uma delas fixa e outra movendo-se periodicamente no tempo. A partícula sofre colisões com ambas paredes, que assumiremos serem inelásticas. Isso implica em uma perda fracional de energia a cada choque. O são observadas nela. Mostramos que as estruturas periódicas presentes no espaço de parâmetros é bidimensional e estruturas periódicas também modelo do acelerador de Fermi obedecem a uma regra de organização descrita por uma equação diofantina.

Palavras-chave: Modelo Fermi-Ulam, espaço de parâmetros, estruturas *shrimp*.

Abstract

Some dynamical properties are investigated in this work considering two models described by discrete mappings: (i) a quadratic map under a parametric perturbation and; (ii) a Fermi accelerator model focusing particularly in the dissipative dynamics. In case (i) and with the introduction of a parametric perturbation the parameter space becomes two-dimensional allowing us to study periodic structures present in such space. On the other hand, the Fermi accelerator model described in case (ii), consists of a classical particle confined to bounce between two rigid walls. One of them is fixed and the other one is assumed to move periodically in time. Inelastic collisions are considered leading the particle to suffer a fractional loss of energy upon collision. The parameter space is also two-dimensional and periodic structures are observed. We show that the organization of such structures is described by a diophantine equation.

Keywords: Fermi-Ulam model, parameter space, shrimp structures.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico das funções $f(x) = x^2 - c$ e $g(x) = x$. A intersecção das duas curvas identifica os pontos fixos.	7
2.2	Diagrama de órbita para o mapa quadrático.	11
2.3	Expoente de Lyapunov λ em função do número de iterações n para o mapa quadrático calculado para 5 condições iniciais diferentes escolhidas aleatoriamente no intervalo $x_0 \in [-2,2]$. O valor de c foi mantido constante $c = -1,8$ e o valor médio obtido para o expoente de Lyapunov foi $\bar{\lambda} = 0,404(2)$	13
2.4	Espaço de parâmetros ϵ versus c no qual a escala de cores representa o maior expoente de Lyapunov. As estruturas periódicas observadas em meio ao caos são conhecidas como <i>shrimps</i>	15
2.5	Espaço de parâmetros construído com a escala de cores correspondendo ao período das órbitas periódicas. A mesma estrutura geral da Fig. 2.4 é observada. Órbitas com período superior a 20 foram consideradas como sendo caóticas e são representadas pela cor negra.	15
2.6	Espaço de parâmetros ϵ versus c no qual a escala de cores representa o período das órbitas periódicas. Órbitas com período superior a 200 foram consideradas como sendo caóticas e são representadas pela cor amarela.	16
2.7	Espaço de parâmetros	17
2.8	Espaço de parâmetros	18
2.9	Árvore de períodos do espaço de parâmetros para o mapa quadrático.	20
3.1	Ilustração do modelo Fermi-Ulam.	22
3.2	Figura ilustrando o referencial inercial e o não inercial (')	24

3.3	Ilustração para colisões indiretas.	25
3.4	Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle utilizado foi $\varepsilon = 0.005$ e 400 condições iniciais diferentes iteradas 1000 vezes.	31
3.5	Convergência do expoente de Lyapunov calculado para 5 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,004$, $\alpha = \beta = 1$	34
3.6	Atrator caótico observado no modelo Fermi-Ulam completo, dissipativo. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,004$, $\beta = 0,93$ e 200 condições iniciais. . . .	35
3.7	Convergência do expoente de Lyapunov para 5 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,0035$, $\alpha = \beta = 0,94$	37
3.8	Espaço de parâmetros com sequência de estruturas <i>shrimps</i> do modelo Fermi-Ulam completo, para o caso dissipativo. As estruturas foram construídas com escala de cores correspondendo ao período das órbitas periódicas.	38
4.1	Espaço de fases do modelo Fermi-Ulam simplificado. O parâmetro de controle utilizado foi $\varepsilon = 0,005$, com 144 condições iniciais com $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ e $V_0 \in [0, 01, 0, 25]$. Cada condição inicial foi iterada 1000 vezes.	42
4.2	Expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado Fermi-Ulam, com 5 condições iniciais, parâmetro de controle $\varepsilon = 0,005$, velocidade $V_0 = 0,01$ e ϕ	43
4.3	Espaço de parâmetros com a estrutura <i>shrimp</i> no modelo Fermi-Ulam simplificado construída com escala de cor correspondendo ao máximo expoente de Lyapunov. Consideramos uma janela de 1000 x 1000 e iterado 10^5 vezes cada divisão. Usando como condição inicial $\phi_0 = 2,80$ e $V_0 = 0,01$	44
4.4	Espaço de parâmetros com a estrutura <i>shrimp</i> no modelo Fermi-Ulam simplificado construída com escala de cor correspondendo ao período das órbitas periódicas. Utilizamos aqui uma janela de 700 x 700 e iterado 10^5 vezes cada par de parâmetros considerando $\phi_0 = 2,80$ e $V_0 = 0,01$	44
4.5	Sequência de <i>shrimps</i> convergindo para uma estrutura de período 9.	45
4.6	Espaço de parâmetros com escala de cor representando o período das órbitas periódicas do modelo Fermi-Ulam simplificado	46

4.7	Árvore de períodos do espaço de parâmetros (caixa A) para o modelo Fermi-Ulam simplificado.	47
4.8	Árvore de períodos do espaço de parâmetros para o modelo simplificado Fermi-Ulam. Ampliação da região entre os <i>shrimps</i> de período 24 e 33.	47

Lista de Tabelas

2.1	Sequência dinâmica do mapa definido na Eq. (2.2) para $x_0 = 0,01$ e $c = 0,30$. .	6
-----	---	---

Sumário

1	Introdução	1
2	Mapa Quadrático	4
2.1	Mapa	5
2.2	Pontos Fixos e Órbitas Periódicas	6
2.2.1	Diagrama de Órbita	10
2.3	Expoentes de Lyapunov	10
2.4	Perturbação Paramétrica	13
2.4.1	<i>Shrimps</i>	14
2.5	Conclusões parciais	19
3	Modelo Fermi-Ulam	21
3.1	Modelo	22
3.1.1	Colisões Sucessivas	23
3.1.2	Colisões Indiretas	25
3.2	Caso Não Dissipativo	28
3.2.1	Matriz Jacobiana	28
3.2.2	Espaço de fases	30
3.2.3	Expoentes de Lyapunov	30
3.3	Caso Dissipativo	34
3.3.1	Matriz Jacobiana	35
3.3.2	Expoente de Lyapunov	36
3.4	<i>Shrimps</i>	36

3.5	Conclusões parciais	38
4	Modelo Fermi-Ulam: uma versão de paredes fixas	39
4.1	O Modelo	39
4.2	O Mapa	40
4.3	Matriz Jacobiana	41
4.4	Espaço de Fases	41
4.5	<i>Shrimps</i>	42
4.6	Conclusões parciais	48
5	Conclusões e Perspectivas	49
	Referências Bibliográficas	51

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica é considerada hoje em dia um assunto interdisciplinar, sendo originalmente uma ramificação da física. Tudo começou em meados de 1600, quando Newton inventou as equações diferenciais (1), descobriu as leis de movimento e gravitação universal e as combinou para explicar as leis de Kepler dos movimentos planetários. Especificamente, Newton resolveu o problema de dois corpos - o problema de calcular o movimento da Terra ao redor do Sol - com a lei da atração gravitacional entre eles. Matemáticos e físicos tentaram expandir os métodos analíticos de Newton para o problema dos três corpos, mas esse problema tornou-se muito difícil de resolver. Depois de algum tempo o problema dos três corpos era essencialmente impossível de resolver, no sentido de obter fórmulas explícitas para descrever o movimento dos três corpos. Nesse ponto a situação parecia sem esperança.

A quebra de pensamento veio com o trabalho de Poincaré no final dos anos 1800 (2). Ele introduziu um novo ponto de vista que enfatizava as questões qualitativamente e não quantitativamente como era usual na época. Por exemplo, ao invés de perguntar pela exata posição dos planetas em todos os instantes, ele perguntou: “É o sistema solar estável para sempre, ou alguns planetas eventualmente escaparão para o infinito?” (3). Poincaré desenvolveu aproximações geométricas poderosas para analisar essas questões. Essas aproximações surgiram com aplicações que iriam além da mecânica celeste. Poincaré foi também a primeira pessoa a enxergar a possibilidade de caos, no qual um sistema determinístico exibe um comportamento dinâmico que depende sensivelmente das condições iniciais.

Os estudos sobre caos voltaram na metade do século passado. Com a invenção de compu-

tadores nos anos de 1950 a dinâmica voltou a ser estudada com mais ênfase. O computador permitiu experimentos com equações que antes eram impossíveis de se resolver. Tais experimentos levaram a descoberta por Lorenz (4) em 1963 do movimento caótico em atratores estranhos. Ele estudou alguns fenômenos atmosféricos e descobriu que as soluções para suas equações nunca retornavam para o equilíbrio ou para um estado periódico. Ao contrário, elas continuavam oscilando num molde irregular e não periódico. Se ele começasse suas simulações a partir de duas condições iniciais próximas, o resultado do comportamento se tornaria totalmente diferente. Ele também mostrou que existiam estruturas no caos. Quando plotados em 3 dimensões, as soluções de suas equações tinham a forma de asas de borboleta, surgindo daí uma nova teoria física e matemática, a teoria do caos.

Antes da teoria de Lorenz, em 1939 surgiu um projeto chamado Manhattan, que consistia em um projeto científico com vários profissionais de áreas diferentes. Existiam dois cientistas, Enrico Fermi e Stanislaw Ulam, que conviveram no mesmo ambiente científico. Em 1949, Enrico Fermi (5), na tentativa de explicar a aceleração dos raios cósmicos que viajavam no meio interestelar, propôs um modelo interativo com campos magnéticos oscilantes. Em 1961 Ulam (6) propôs um modelo dinâmico em que uma partícula colide elasticamente (sem perdas de energia) com uma parede rígida que oscila periodicamente com o tempo. Estas por sua vez exercem assim o papel dos raios cósmicos e dos campos magnéticos oscilantes, respectivamente. Para que a dinâmica se repita indefinidamente, é introduzida uma parede rígida a uma certa distância da parede móvel, esta por sua vez reinjeta a partícula para um próximo choque. Esse modelo ficou conhecido como modelo Fermi-Ulam.

Nesse trabalho iremos estudar o modelo Fermi-Ulam para os casos conservativo e dissipativo e algumas propriedades serão discutidas, particularmente aquelas obtidas na presença de dissipação. No caso dissipativo encontraremos estruturas no espaço de parâmetros que são conhecidas como estruturas *shrimps* (7).

A organização da dissertação se dá da seguinte forma. No capítulo 2 discutimos o mapa quadrático (8), as expressões dos pontos fixos serão obtidas, a estabilidade das órbitas são caracterizadas, o cálculo do expoente de Lyapunov é explicitado e por fim mostramos as estruturas *shrimps* com as regras de organização. O capítulo 3 trata do modelo Fermi-Ulam,

especificamente o modelo completo, nele é mostrado a construção do mapa para os dois tipos de colisões existentes. É mostrado o caso conservativo e dissipativo, ambos com os cálculos das matrizes Jacobianas e expoente de Lyapunov e finalmente as estruturas *shrimps*. O capítulo 4 é dedicado às discussões da versão simplificada do modelo do acelerador de Fermi onde são apresentadas as aproximações feitas nesse caso, o mapa, a matriz Jacobiana, espaços de fases e expoentes de Lyapunov, bem como as estruturas *shrimps* e suas regras de organização no espaço de parâmetros. Por fim, as conclusões e perspectivas são discutidas no capítulo 5.

Capítulo 2

Mapa Quadrático

Nessa seção, discutiremos algumas propriedades do mapa quadrático. O mapeamento serviu como um estudo inicial sobre *shrimps*. Antes porém, obtivemos as expressões dos pontos fixos, caracterizamos a estabilidade das órbitas, discutimos o cálculo do expoente de Lyapunov e por fim as estruturas *shrimps* propriamente. Mostraremos que o mapa quadrático pode ser obtido através de uma transformação de variáveis feita no mapa logístico. O principal objetivo é, através da introdução de uma perturbação paramétrica no mapa quadrático, caracterizar a distribuição de estruturas periódicas conhecidas como *shrimp*, que aparecem imersas em uma região caótica do espaço de parâmetros.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção [2.1](#) apresentamos os procedimentos para obtenção do mapa quadrático através do mapa logístico, além da descrição do diagrama de órbita. Na seção [2.2](#) os pontos fixos e órbitas periódicas foram encontrados e uma classificação quanto a estabilidade foi feita. O diagrama de órbita também é mostrado aqui. Na seção [2.3](#) o expoente de Lyapunov foi calculado com o objetivo de caracterizar quais parâmetros tornam a evolução do sistema caótica. Na seção [2.4](#) uma alteração no mapa foi proposta e um novo parâmetro que controla uma não linearidade foi introduzido, estabelecendo uma perturbação paramétrica. Encontramos também as estruturas *shrimps*.

2.1 Mapa

Uma forma de obter o mapa quadrático é fazendo uma transformação linear do tipo $y = ax + b$ no mapa logístico, definido como

$$y_{n+1} = Ry_n(1 - y_n). \quad (2.1)$$

onde R é um parâmetro de controle.

Esta equação foi descrita pelo biólogo Robert May em 1976 (9) como um modelo populacional, com y_n sendo o número de indivíduos da n -ésima geração, e R como uma taxa de crescimento da população.

Substituindo a transformação, obtemos

$$\begin{aligned} ax_{n+1} + b &= R(ax_n + b)(1 - ax_n - b), \\ &= R(-a^2x_n^2 - 2abx_n + ax_n - b^2 + b), \\ x_{n+1} &= -Rax_n^2 - Rx_n(2b - 1) + \frac{b}{a}(-bR + R - 1). \end{aligned}$$

Fazendo $b = \frac{1}{2}$ e $a = -\frac{1}{R}$, chegamos na expressão que define o mapa quadrático

$$x_{n+1} = x_n^2 - c, \quad (2.2)$$

onde $c = \frac{2R-R^2}{4}$ é uma constante arbitrária $c \in [-2; 0,25]$. No intervalo de $c \in [-2; 0,25]$ e considerando $x_0 = 0$, a evolução da variável x dada pelo mapa 2.2 converge sempre para um atrator que pode ser caótico ou não. Para valores de c fora desse intervalo e para a condição inicial $x_0 = 0$, o mapa diverge, com $x \rightarrow \infty$. A tabela 2.1 mostra a evolução da dinâmica do mapeamento usando $x_0 = 0,01$ e $c = 0,30$.

Iteração	x_n
0	0,01
1	0,30
2	0,39
$\vdots$	$\vdots$
20	$1,15 \times 10^{91}$
21	$1,32 \times 10^{182}$
22	∞

Tabela 2.1: Sequência dinâmica do mapa definido na Eq. (2.2) para $x_0 = 0,01$ e $c = 0,30$.

2.2 Pontos Fixos e Órbitas Periódicas

Em mapas uni-dimensionais, os pontos fixos x^* são obtidos a partir da solução da seguinte equação

$$x_{n+1} = x_n = x^*. \quad (2.3)$$

Isso implica que não há variação no valor de x_n para o seu sucessor em x_{n+1} .

Para encontrarmos os pontos fixos substituiremos a Eq. (2.3) no mapa quadrático da Eq. (2.2). Fazendo a substituição, encontramos

$$x^{*2} = x^* - c. \quad (2.4)$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^{*2} - x^* + c = 0$, obtemos duas raízes que correspondem aos dois pontos fixos

$$x_1^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad (2.5)$$

$$x_2^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}. \quad (2.6)$$

Outra forma de obtê-los é separando a Eq. (2.4) em $f(x) = x^2 - c$ e $g(x) = x$ e fazendo um gráfico para verificar quando as funções f e g se cruzam. A Fig. 2.1 mostra um exemplo dessa análise para $c = -0,6$. Os círculos indicados mostram a posição de intersecção das funções e define os pontos. Resolvendo analiticamente as Eqs. (2.5) e (2.6) para o mesmo valor de c , encontramos $x_1^* \cong 1,42$ e $x_2^* \cong -0,42$, conforme mostrado na Fig. 2.1.

Para analisarmos a estabilidade dos pontos fixos em mapas uni-dimensionais devemos

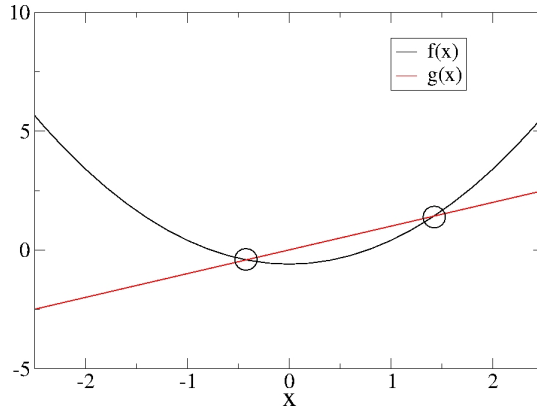


Figura 2.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2 - c$ e $g(x) = x$. A intersecção das duas curvas identifica os pontos fixos.

propor um ponto $x_n = x^* + \epsilon_n$, isto é, distante ϵ_n (com ϵ_n pequeno) do ponto fixo x^* e verificar se x_n se aproxima (ponto fixo assintoticamente estável) ou se afasta (ponto fixo instável) de x^* conforme a iteração n passa. Se $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$ o ponto fixo é dito ser assintoticamente estável, ao passo que se $|\epsilon_{n+1}| > |\epsilon_n|$ o ponto fixo é dito ser instável.

Sabemos que $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n)$. Expandindo $f(x^* + \epsilon_n)$ em Série de Taylor, encontramos

$$f(x^* + \epsilon_n) = f(x^*) + \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*} (x^* + \epsilon_n - x^*) + O^2(\epsilon_n),$$

mas $x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1} = f(x^*) + \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*} \epsilon_n + O^2(\epsilon_n)$, o que nos leva a

$$\epsilon_{n+1} = \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*} \epsilon_n + O^2(\epsilon_n), \quad (2.7)$$

já que $f(x^*) = x^*$.

Chamando $\gamma = \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*}$, a Eq. (2.7) para $n = 1$ fica $\epsilon_2 = \gamma \epsilon_1 = \gamma^2 \epsilon_0$, ou de forma geral

$$\epsilon_n = (\gamma)^n \epsilon_0. \quad (2.8)$$

Com isso, concluímos que para estudar a estabilidade dos pontos fixos x^* , devemos verificar se $|\gamma| < 1$ o que caracteriza um equilíbrio assintoticamente estável ou $|\gamma| > 1$ que caracteriza um equilíbrio instável.

Para o mapa quadrático, $\gamma = 2x^*$ e substituindo os respectivos pontos fixos x_1^* e x_2^* , encontramos

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_1^*}, \\ &= 2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \right), \\ &= 1 + \sqrt{1 - 4c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_2^*}, \\ &= 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \right), \\ &= 1 - \sqrt{1 - 4c}.\end{aligned}$$

Aplicando a condição de estabilidade $|\gamma_1| < 1$, temos

$$\begin{aligned}-1 &< \gamma_1 < 1, \\ -1 &< 1 + \sqrt{1 - 4c} < 1, \\ -2 &< \sqrt{1 - 4c} < 0,\end{aligned}$$

o que não faz nenhum sentido matemático, já que $\sqrt{1 - 4c}$ obrigatoriamente deve ser positivo.

Assim, concluímos que $|\gamma_1| > 1$ sempre que o ponto fixo $x_1^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ for instável.

Para classificar a estabilidade do segundo ponto fixo x_2^* , devemos olhar para γ_2 e fazermos a mesma análise, logo

$$\begin{aligned}-1 &< \gamma_2 < 1, \\ -1 &< 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1, \\ -3/4 &< c < 1/4.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que para $-3/4 < c < 1/4$, $|\gamma_2| < 1$ e o ponto fixo é assintoticamente estável. De forma complementar $|\gamma_2| > 1$ para c fora desse intervalo, o que leva a um ponto

fixo instável.

A mesma análise pode ser feita para encontrar órbitas periódicas com período dois, só que dessa vez resolvendo

$$x_{n+2} = x_n. \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.2) que descreve o mapa quadrático, obtemos

$$x_{n+1}^2 - c = x_n, \quad (2.10)$$

$$(x_n^2 - c)^2 - c = x_n, \quad (2.11)$$

$$x_n^4 - 2cx_n^2 - x_n + c(-1 + c) = 0, \quad (2.12)$$

o que corresponde a uma equação do quarto grau. Duas soluções já são conhecidas, que são os pontos fixos encontrados anteriormente nas Eqs. (2.5) e (2.6). As quatro soluções da Eq. (2.12) são

$$x_1^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad (2.13)$$

$$x_2^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad (2.14)$$

$$x_3^* = \frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2}, \quad (2.15)$$

$$x_4^* = \frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2}. \quad (2.16)$$

A estabilidade da órbita de período 2 dada pelos pontos x_3^* Eq. (2.15) e x_4^* Eq. (2.16) será caracterizada fazendo $|f^{2'}(x_n)|_{x_n=x^*} = |\gamma_{3,4}| < 1$, na qual $f^{2'}(x_n)$ é a derivada da segunda composição do mapa, isto é, $\frac{\partial}{\partial x_n}[f(f(x_n))] = \frac{\partial}{\partial x_n}f(f(x_n))\frac{\partial}{\partial x_n}f(x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n}f(x_{n+1})\frac{\partial}{\partial x_n}f(x_n)$. Com isso

$$\begin{aligned} \gamma_{3,4} &= \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_3^*} \left. \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_4^*} = 2x_3^* 2x_4^*, \\ &= 4 \left(\frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2} \right), \\ &= 4 + 4c. \end{aligned}$$

Calculando para quais valores de c , $|\gamma_{3,4}| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned} -1 &< \gamma_{3,4} < 1, \\ -1 &< 4 + 4c < 1, \\ -5/4 &< c < -3/4. \end{aligned}$$

Logo, a órbita de período 2 dada pelos pontos x_3^* e x_4^* é assintoticamente estável para $-5/4 < c < -3/4$ e instável para valores de c fora desse intervalo.

2.2.1 Diagrama de Órbita

De acordo com a Fig. 2.2 podemos ver a existência de comportamentos periódicos. A curva sólida no intervalo de $[-0,75, 0,25]$ indica uma órbita de período 1. Em $c = -0,75$, a órbita de período 1 perde a estabilidade e se bifurca numa órbita de período 2. Esse ponto é chamado de ponto de bifurcação de período. Quando são evoluídos, cada braço da órbita de período 2 se bifurca em um novo período 2 e cada um dos remanescentes se bifurca sucessivamente. Esse comportamento é descrito por uma equação do tipo $T = T_0 2^m$, onde T_0 é o período inicial da janela e m identifica a ordem da bifurcação. Essa é a primeira evidência clara da ocorrência de caos quando $m \rightarrow \infty$.

Essas bifurcações de período também serão mostradas na seção 2.4.1, além disso podemos ver algumas regiões escuras são comportamentos caóticos existentes no diagrama de órbita. Esses comportamentos podem ser encontrados pelo cálculo do expoente de Lyapunov (10), será mostrado na próxima seção 2.3.

2.3 Expoentes de Lyapunov

Uma ferramenta matemática muito utilizada na caracterização de caos em sistemas dinâmicos são os expoentes de Lyapunov (10). Eles são obtidos escolhendo duas condições iniciais próximas e evoluindo-as segundo as equações que regem o mapa, sempre medindo o afastamento entre elas ao longo das iterações.

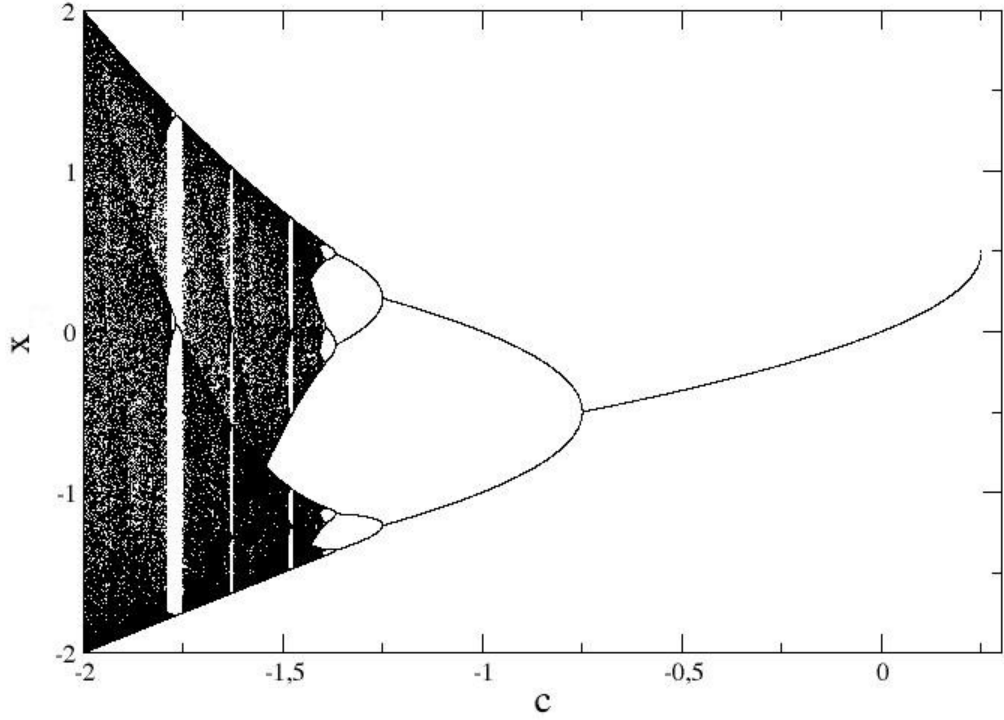


Figura 2.2: Diagrama de órbita para o mapa quadrático.

Inicialmente, admitimos que a dinâmica seja dada por um mapeamento do tipo

$$x_{n+1} = \tilde{F}(x_n) \quad (2.17)$$

para o qual $\tilde{F}$ seja uma função não linear qualquer da variável x . Utilizando uma condição inicial x_0 e uma condição inicial próxima $x_0 + \delta_0$ e iterando o mapa (2.17), após n iterações, teremos

$$\delta_n = |\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)|, \quad (2.18)$$

para o qual δ_n é a distância entre as órbitas e n identifica a n -ésima composição de $\tilde{F}(x_0)$.

Supondo que o afastamento da órbita seja exponencial, então

$$\delta_n \cong \delta_0 e^{\lambda n}. \quad (2.19)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação acima, temos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{\delta_n}{\delta_0} \right]. \quad (2.20)$$

Substituindo a Eq. (2.18) na Eq. (2.19) obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (2.21)$$

Tomando o limite quando $\delta_0 \rightarrow 0$ da Eq. (2.21) temos

$$e^{\lambda n} = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\tilde{F}^{(n)}(x_0 + \delta_0) - \tilde{F}^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (2.22)$$

Isolando λ

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \tilde{F}'^{(n)}(x_0) \right|. \quad (2.23)$$

Se λ for negativo ($\lambda < 0$), as órbitas serão regulares (periódicas ou quase periódicas); se λ for positivo ($\lambda > 0$), a órbita é dita caótica.

Considerando o caso em que $n \rightarrow \infty$ a expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov é dada por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(x_i)|. \quad (2.24)$$

Um sistema é dito caótico, ou sensível as condições iniciais, quando a distância entre elas diverge exponencialmente com o tempo (caracterizado por ao menos um expoente de Lyapunov λ positivo). Quando não houver divergência exponencial entre as condições iniciais dizemos que a órbita do sistema não é sensível as condições iniciais (conduzindo a uma dinâmica regular). A Fig. 2.3 mostra a evolução temporal do expoente de Lyapunov formalmente definido na Eq. (2.24) em função da iteração do mapa, no qual $f(x) = x^2 - c$ representa a equação que define o mapa quadrático. Na figura, podemos ver claramente que λ converge para um platô após um número suficientemente grande de iterações. O expoente foi calculado para 5 condições iniciais diferentes mantendo $c = -1,8$ e uma média entre os valores assintóticos foi feita chegando em $\bar{\lambda} = 0,404(2)$, o que indica uma região caótica. Aqui o valor 0,002 indica a incerteza na medida do valor médio.

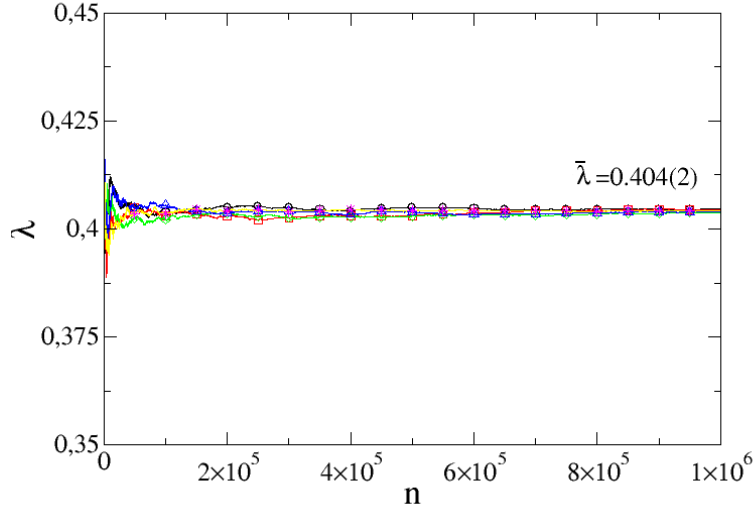


Figura 2.3: Expoente de Lyapunov λ em função do número de iterações n para o mapa quadrático calculado para 5 condições iniciais diferentes escolhidas aleatoriamente no intervalo $x_0 \in [-2, 2]$. O valor de c foi mantido constante $c = -1,8$ e o valor médio obtido para o expoente de Lyapunov foi $\bar{\lambda} = 0,404(2)$.

2.4 Perturbação Paramétrica

Nessa seção, introduziremos uma perturbação paramétrica $c \rightarrow c(1 + \epsilon \cos(\pi n))$ no mapa definido na Eq. (2.2) com o intuito de adicionar um novo parâmetro no sistema e tornar a dinâmica, que já era rica, mais rica, já que agora ϵ controla uma perturbação em c que depende da iteração. O novo mapa agora é definido como

$$x_{n+1} = x_n^2 - c(1 + \epsilon \cos(\pi n)), \quad (2.25)$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ é uma constante não negativa.

De posse de um mapa com dois parâmetros de controle, podemos construir o que é conhecido na literatura como espaço de parâmetros. Desde o artigo pioneiro de Gallas (7), muito esforço e especial atenção tem sido dado na construção e caracterização de estruturas presentes no espaço de parâmetros em modelos teóricos (11; 12; 13) e experimentais (14).

2.4.1 *Shrimps*

Em um de seus trabalhos, Lorenz (15) dedicou esforços a compreender estruturas espaciais intrigantes e ricas que aparecem no espaço de parâmetros e atualmente são conhecidas como *shrimps*. De acordo com Gallas (7) e (16),

“Shrimps são formados por um conjunto regular de janelas adjacentes centrado em torno do par principal de intersecção super estável de arcos parabólicos. Um shrimp é um mosaico duplamente infinito de domínios de estabilidade composto por um domínio principal, acrescido de todos os domínios de estabilidade decorrentes de dois períodos adjacentes de duplicação por cascata, juntamente com os seus correspondentes domínios de caos.”

Podemos ver na Fig. 2.4 um exemplo de espaço de parâmetros que possui *shrimp*, construído através de uma grade de 400x400 pares (c, ϵ) evoluídos 10^5 vezes e calculando o expoente de Lyapunov através de uma média das últimas 10^4 iterações, a fim de eliminar os efeitos de transiente. O expoente de Lyapunov corresponde a escala de cores da figura e o caos é caracterizado pela cor azul. A Fig. 2.4 mostra um domínio principal definido pelo *shrimp* de maior tamanho, a partir do qual uma família de *shrimps* segue um dos arcos parabólicos e outra família segue o outro arco.

Os *shrimps* também podem ser encontrados medindo outros observáveis na escala de cores. A Fig. 2.5, por exemplo, mostra o espaço de parâmetros considerando na escala de cores uma contagem do período das órbitas periódicas e a mesma estrutura geral pode ser observada.

De acordo com a Fig. 2.6, 8 caixas determinam regiões distintas que foram ampliadas nas Figs. 2.7 e 2.8 podemos perceber que existe uma regra de organização das estruturas *shrimps*. Na Fig. 2.7a a faixa utilizada foi $c \in [-0,893, -0,885]$ e $\epsilon \in [0,4335, 0,439]$. Podemos perceber que os períodos se organizam de cima para baixo com $36 \rightarrow 32 \rightarrow 28 \rightarrow 32 \rightarrow 20$. Na Fig. 2.7b a faixa de parâmetros utilizada foi $c \in [-0,898, -0,89]$ e $\epsilon \in [0,429, 0,4345]$ e os períodos se organizaram de $32 \rightarrow 28 \rightarrow 24 \rightarrow 28 \rightarrow 16$. Na caixa da Fig. 2.7c a faixa foi $c \in [-0,906, -0,896]$ e $\epsilon \in [0,4232, 0,4287]$. As estruturas se organizaram da seguinte forma $28 \rightarrow 24 \rightarrow 20 \rightarrow 22 \rightarrow 18$. Na Fig. 2.7d a faixa de parâmetros utilizada foi $c \in [-0,912, -0,9]$ e $\epsilon \in [0,417, 0,425]$ e os períodos se organizaram de $18 \rightarrow 26 \rightarrow 22 \rightarrow$

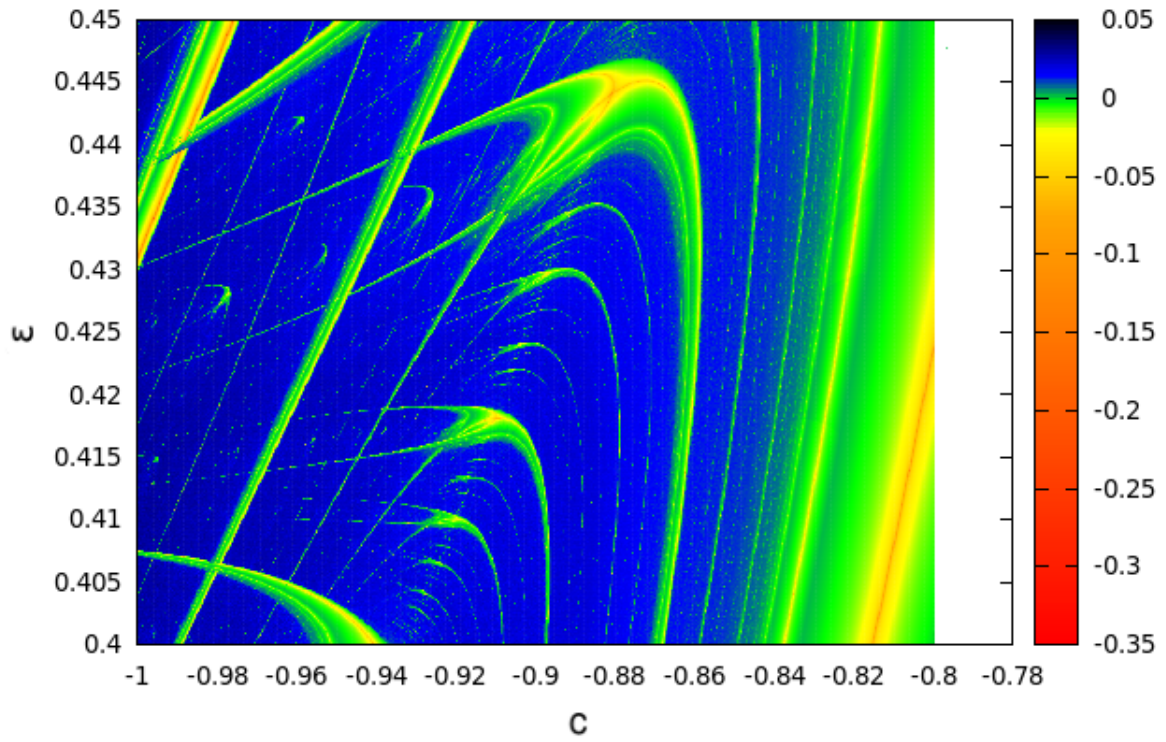


Figura 2.4: Espaço de parâmetros ϵ versus c no qual a escala de cores representa o maior expoente de Lyapunov. As estruturas periódicas observadas em meio ao caos são conhecidas como *shrimps*.

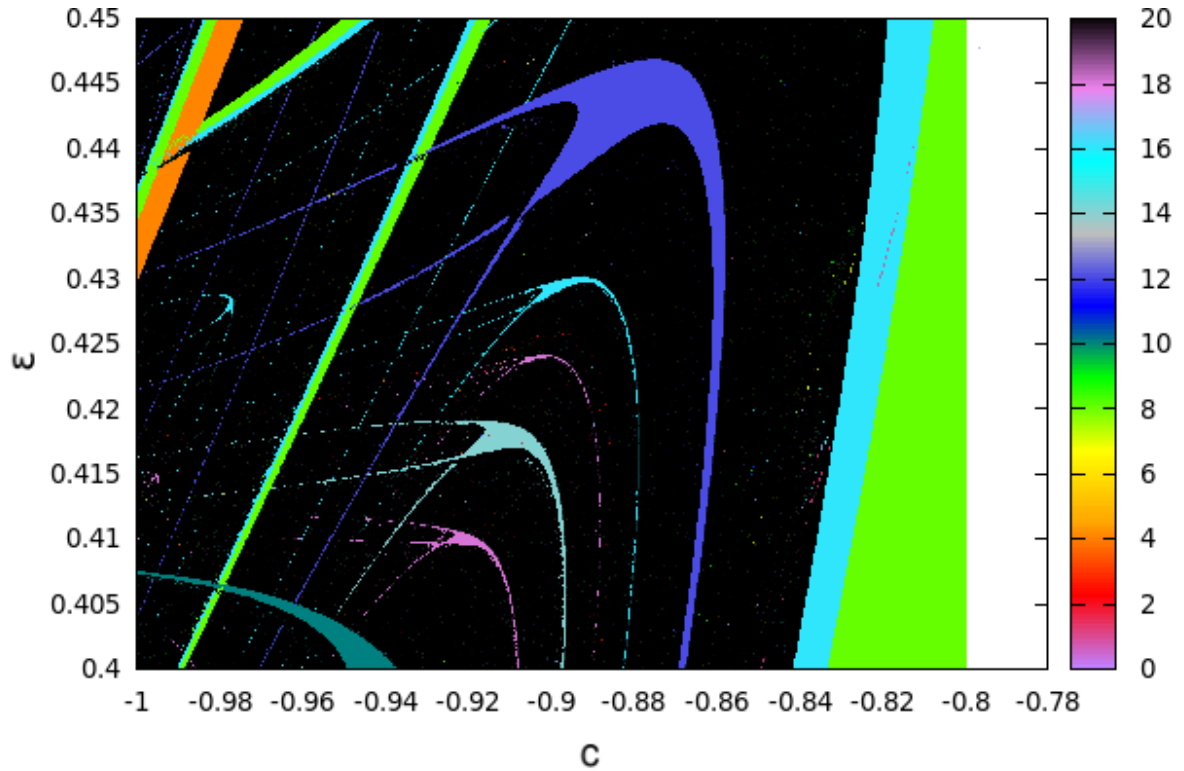


Figura 2.5: Espaço de parâmetros construído com a escala de cores correspondendo ao período das órbitas periódicas. A mesma estrutura geral da Fig. 2.4 é observada. Órbitas com período superior a 20 foram consideradas como sendo caóticas e são representadas pela cor negra.

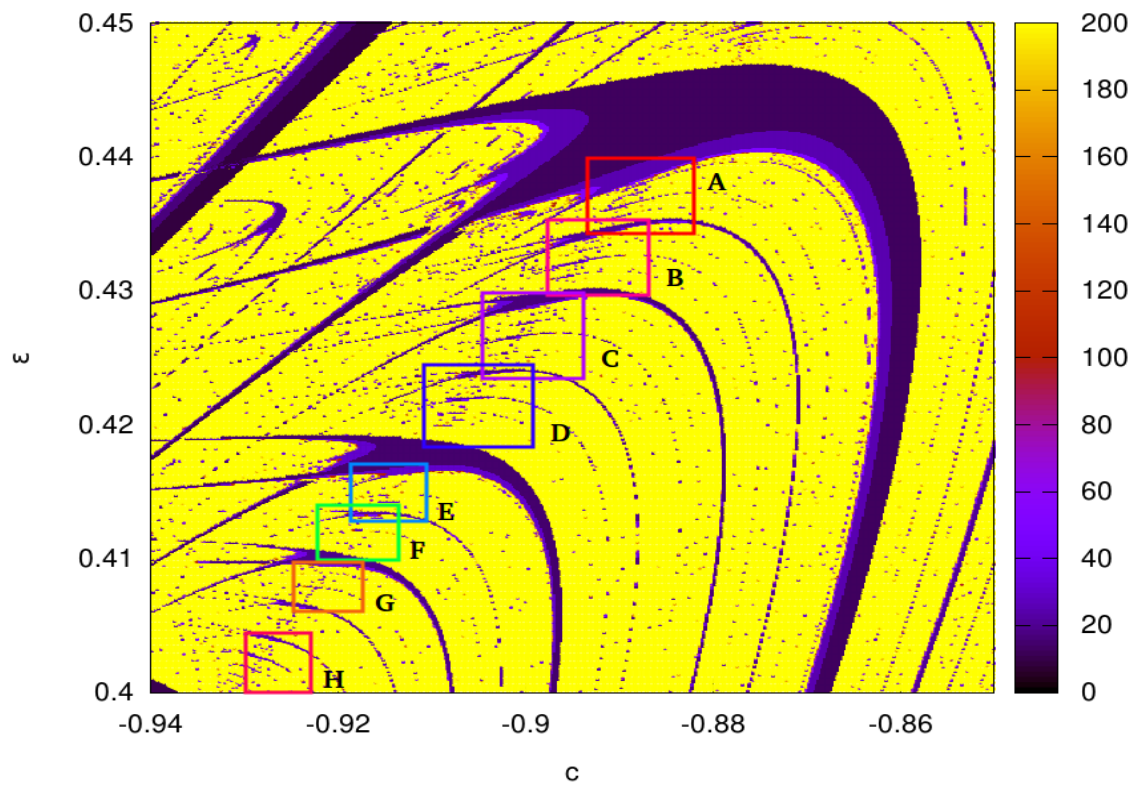


Figura 2.6: Espaço de parâmetros ϵ versus c no qual a escala de cores representa o período das órbitas periódicas. Órbitas com período superior a 200 foram consideradas como sendo caóticas e são representadas pela cor amarela.

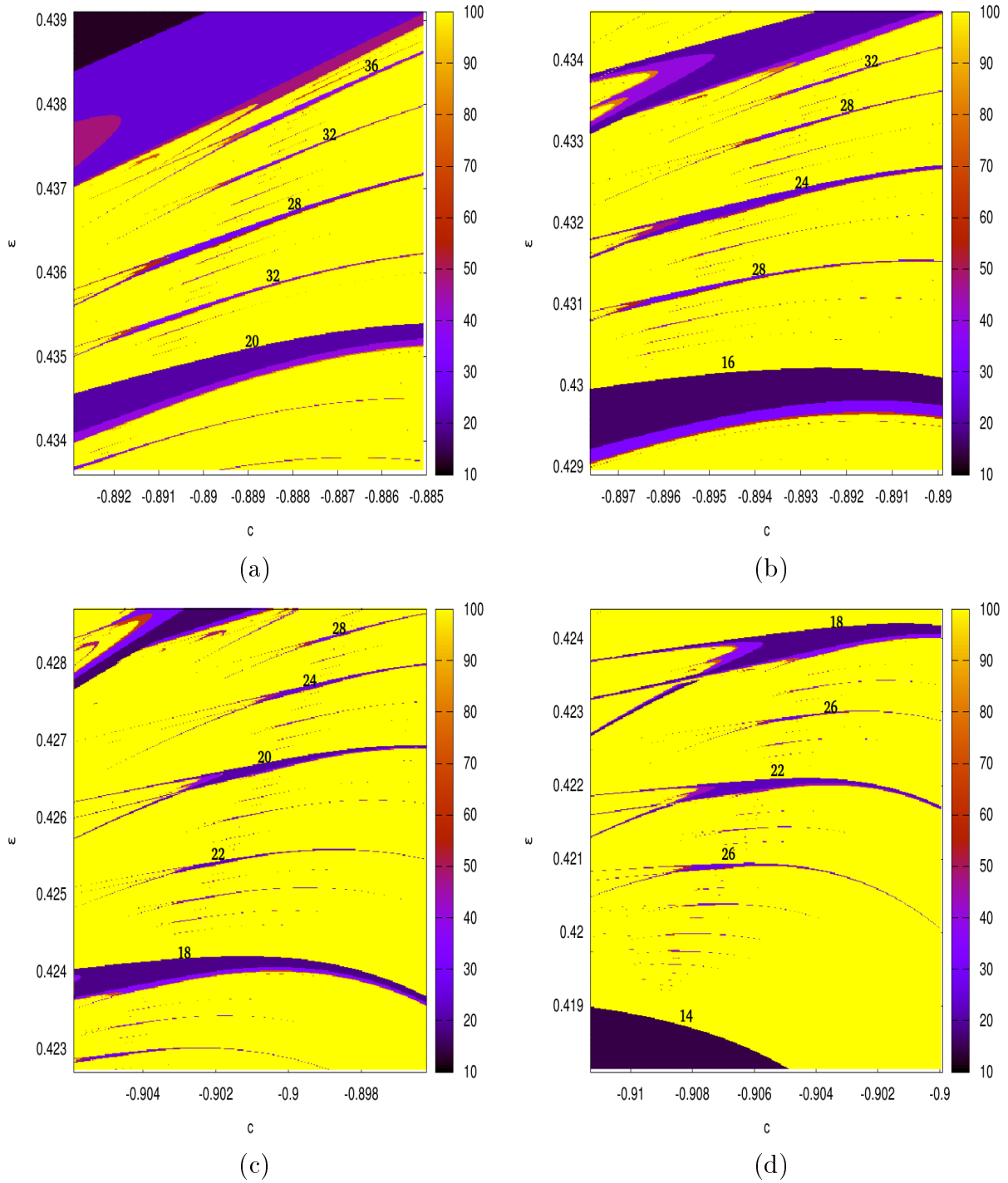


Figura 2.7: Maximização das caixas na figura 2.6. (a) Maximização da caixa A. (b) Maximização da caixa B. (c) Maximização da caixa C. (d) Maximização da caixa D.

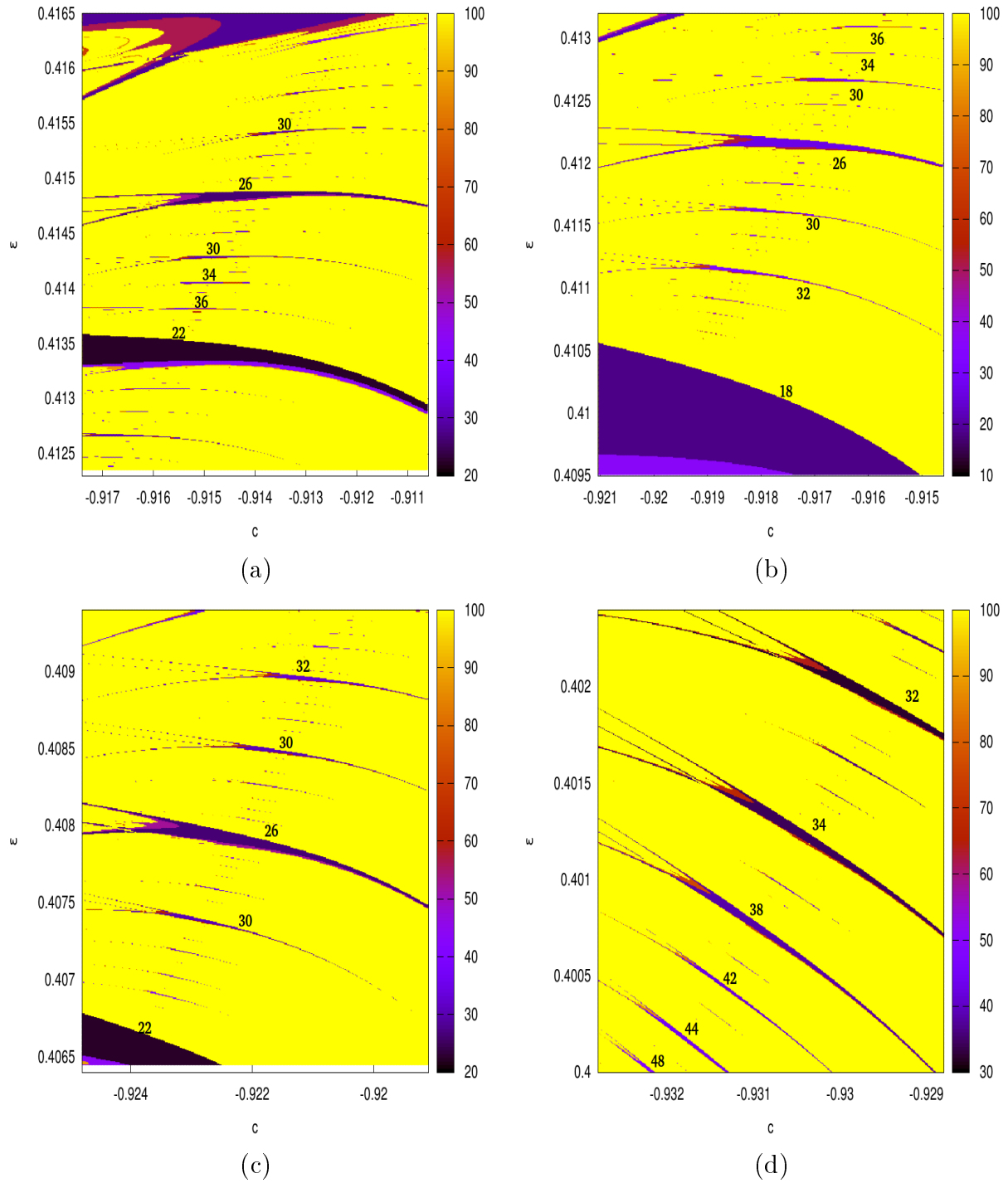


Figura 2.8: Maximização das caixas na figura 2.6. (a) Maximização da caixa E. (b) Maximização da caixa F. (c) Maximização da caixa G. (d) Maximização da caixa H.

$26 \rightarrow 14$. Na caixa da Fig. 2.8a a faixa foi $c \in [-0,918, -0,910]$ e $\epsilon \in [0,412, 0,4165]$. As estruturas se organizaram da seguinte forma $30 \rightarrow 26 \rightarrow 30 \rightarrow 34 \rightarrow 36 \rightarrow 22$. Na Fig. 2.8b a faixa de parâmetros utilizada foi $c \in [-0,921, -0,914]$ e $\epsilon \in [0,4095, 0,4135]$ e os períodos se organizaram de $36 \rightarrow 34 \rightarrow 30 \rightarrow 26 \rightarrow 30 \rightarrow 32 \rightarrow 18$. Na caixa da Fig. 2.8c a faixa foi $c \in [-0,926, -0,918]$ e $\epsilon \in [0,4063, 0,4095]$. As estruturas se organizaram da seguinte forma $32 \rightarrow 30 \rightarrow 26 \rightarrow 30 \rightarrow 22$. Finalmente, na Fig. 2.8d a faixa de parâmetros utilizada foi $c \in [-0,934, -0,9288]$ e $\epsilon \in [0,4, 0,4025]$ e os períodos se organizaram de $32 \rightarrow 34 \rightarrow 38 \rightarrow 42 \rightarrow 44 \rightarrow 48$.

Os períodos dos *shrimps* encontrados foram organizados numa árvore de períodos conforme mostrado na Fig. 2.9.

2.5 Conclusões parciais

Como fechamento deste capítulo concluímos que no mapa quadrático com perturbação paramétrica existem estruturas periódicas chamadas *shrimps*. Essas estruturas formam sequências de *shrimps* que se organizam de acordo com uma regra matemática que ainda não conseguimos determinar. Como perspectiva desse trabalho pretendemos encontrar essa regra de organização.

Capítulo 3

Modelo Fermi-Ulam

Baseado na proposta de Enrico Fermi (5), que tentava explicar a aceleração dos raios cósmicos na presença de campos magnéticos oscilantes, Stanislaw Ulam (6) propôs um modelo dinâmico na tentativa de modelar as ideias de Fermi. O sistema consistia de uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas, colidindo entre elas, sendo que uma delas move-se periodicamente no tempo e a outra fixa. Por simplicidade, a partícula é assumida como sendo de massa unitária. As paredes possuem massa muito maiores que a da partícula de modo que no momento das colisões não ocorre mudança na posição e velocidade das mesmas. O modelo é ilustrado na Fig. 3.1. A parede móvel oscila em torno da origem com amplitude ε' e está a uma distância ℓ da parede fixa. O movimento da parede móvel é descrito por $x_w = \varepsilon' \cos(\omega t)$, onde ε' é a amplitude de oscilação da parede móvel e ω é a frequência angular de oscilação. A partícula está na ausência de quaisquer campos de forças externas. Isso implica que a partícula se move com velocidade constante entre os choques. Nosso objetivo é determinar as estruturas *shrimps* no espaço de parâmetros. Elas só podem ser observadas em sistemas dissipativos. Dessa forma introduzimos dois coeficientes de restituição no sistema, $\alpha \in [0,1]$ e $\beta \in [0,1]$, eles fornecem uma perda fracional de energia a cada choque, que é a condição necessária para a existência de atratores. Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 apresentamos o modelo Fermi-Ulam completo e detalhamos a dinâmica do mesmo. Mostramos também a construção do mapa para as colisões do tipo sucessivas e indiretas. Apresentamos na seção 3.2 o caso não dissipativo. Obtivemos os coeficientes da matriz Jacobiana e seu determinante, construímos o espaço de fases para

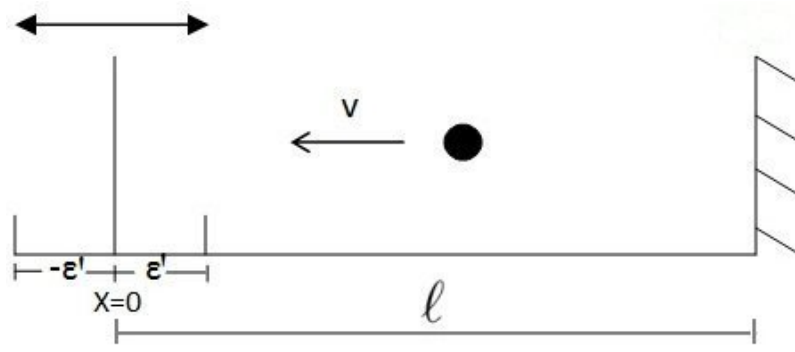


Figura 3.1: Ilustração do modelo Fermi-Ulam.

esse caso e calculamos o expoente de Lyapunov. Investigamos o modelo dissipativo na seção 3.3 e calculamos a matriz Jacobiana com o correspondente determinante. Apresentamos a convergência do expoente de Lyapunov para este caso e por fim encontramos as estruturas *shrims* para o caso completo do modelo de Fermi-Ulam dissipativo.

3.1 Modelo

A dinâmica do modelo pode ser descrita utilizando um mapeamento discreto nas variáveis velocidade e instante de colisão (tempo). Partiremos do princípio de que a partícula já colidiu com a parede móvel num instante $t = t_n$. Então, para este instante, $x_w(t_n) = x_p(t_n)$, onde x_p é a posição da partícula no instante t_n e x_w representa a posição da parede no mesmo instante. Esse é um princípio físico, que indica que tanto a parede quanto a partícula estão no mesmo lugar, no mesmo instante de tempo, caso contrário não será possível identificar o choque.

Existem dois tipos de colisões as serem consideradas, lembrando que a zona de colisão é o intervalo de $x \in [-\varepsilon', \varepsilon']$, ou seja, é a amplitude de oscilação onde a parede móvel oscila em torno de $x = 0$. Os tipos de colisões são:

- **Colisões Sucessivas:** ocorrem quando a partícula colide com a parede móvel e antes de sair da zona de colisão, sofre outras colisões;
- **Colisões Indiretas:** ocorrem quando a partícula abandona a zona de colisão, colide com a parede fixa e retorna à zona de colisão.

3.1.1 Colisões Sucessivas

Partindo da ideia que já houve a colisão no instante t_n , então $x_w(t_n) = x_p(t_n)$. A posição da parede móvel na próxima colisão será

$$x_w(t_{n+1}) = \varepsilon' \cos [\omega(t_n + t_c)], \quad (3.1)$$

ao passo que a posição da partícula na próxima colisão

$$x_p(t_{n+1}) = x_p(t_n) + v_n(t_c). \quad (3.2)$$

Portanto a condição, $x_p(t_{n+1}) = x_w(t_{n+1})$ conduz à seguinte equação transcendental

$$g(t_c) = \varepsilon' \cos \omega[(t_n + t_c)] - \varepsilon' \cos(\omega t_n) + v_n(t_c), \quad (3.3)$$

onde t_c é obtida numericamente da menor solução de $g(t_c) = 0$ com $t_c \in (0, \frac{2\pi}{\omega}]$. Assim: $t_{n+1} = t_c + t_n$.

A velocidade da partícula após a colisão é obtida considerando a conservação da energia e momentum no referencial da parede móvel, que é assumida como estando instantaneamente em repouso no instante do choque. Para isso, faremos uma mudança de referencial [3.2](#)

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' \quad (3.4)$$

onde $\vec{R}$ corresponde à posição da partícula medida pelo referencial inercial, $\vec{r}$ corresponde à posição da parede móvel medida pelo referencial inercial e $\vec{r}'$ corresponde à posição da partícula medida pelo referencial não inercial.

Derivando a equação acima obtemos

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}'. \quad (3.5)$$

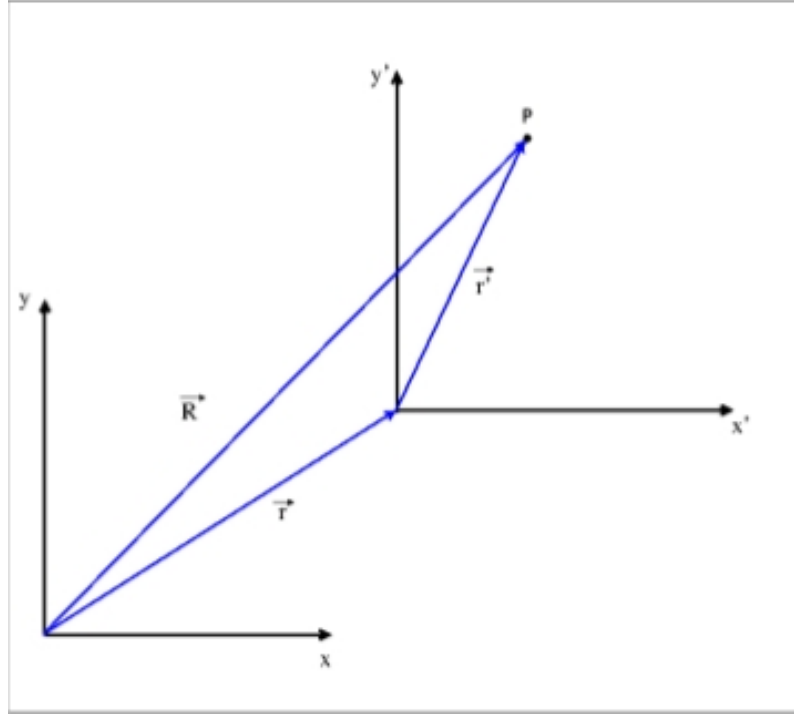


Figura 3.2: Figura ilustrando o referencial inercial e o não inercial ($'$)

A velocidade da partícula no referencial da parede móvel é dada por

$$\vec{v}' = \vec{V} - \vec{v}.$$

A lei da reflexão considerada diz que

$$v'_{depois} = -\beta v'_{antes},$$

o que leva a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_w &= -\beta(v_n - v_w), \\ v_{n+1} &= -\beta v_n + (1 + \beta)v_w, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde v_w representa a velocidade da parede móvel, que é obtida derivando a posição x_w em relação ao tempo. Portanto, $v_w = -\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1})$.

É conveniente descrever a dinâmica usando variáveis adimensionais, ou seja $\frac{v_n}{\omega l} = V_n$, $\frac{\epsilon'}{l} = \epsilon$ e $\omega t_n = \phi_{n+1}$. O mapa para as colisões sucessivas será

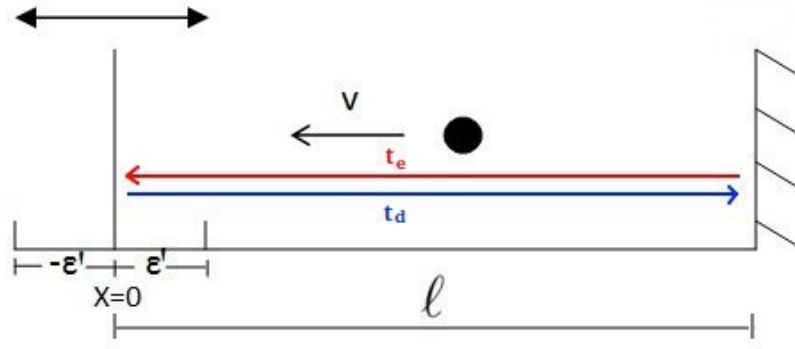


Figura 3.3: Ilustração para colisões indiretas.

$$T_S : \begin{cases} V_{n+1} = -V_n\beta - (1 + \beta)\varepsilon \sin \phi_{n+1}, \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \phi_c] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (3.7)$$

onde ϕ_c é obtido da solução de $G(\phi_c) = 0$, onde $G(\phi_c)$ assume a forma

$$G(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \varepsilon \cos \phi_n - V_n \phi_c. \quad (3.8)$$

Se $G(\phi_c)$ não admitir raiz para $\phi_c \in (0, 2\pi]$, podemos concluir que a partícula abandonou a zona de colisão sem sofrer colisões múltiplas. Neste caso, a partícula viaja em direção à parede fixa com a qual sofre uma colisão e retorna para um próximo choque com a parede móvel. Este caso caracteriza os choques indiretos.

3.1.2 Colisões Indiretas

Nesse caso, a partícula sofre apenas uma colisão com a parede móvel e retorna à parede fixa, onde é refletida, sofrendo assim outra colisão com a parede móvel. Será levado em consideração o tempo que a partícula gasta para realizar esse percurso. Para isso, tomamos o ponto inicial dessa trajetória em $x_w(t_n)$. Então, $x_w(t_n) = x_p(t_n) = \varepsilon' \cos(\omega t_n)$. De acordo com a Fig. 3.3, ela viaja para a direita no intervalo de tempo t_d , colide com a parede fixa, viaja para a esquerda no intervalo de tempo t_e e entra na zona de colisão. O exato instante do choque será designado por t_c . Como há choque com a parede fixa, o coeficiente de restituição α será considerado na construção do mapa.

A equação que descreve o tempo de viagem para a direita é dado por

$$t_d = \frac{l - \varepsilon' \cos \omega t_n}{v_n}, \quad (3.9)$$

e a equação que descreve o movimento para a esquerda é

$$t_e = \frac{l - \epsilon'}{\alpha v_n}. \quad (3.10)$$

Quando a partícula entra na zona de colisão, sua posição será $x_p = \varepsilon' - \alpha v_n t$, logo

$$x_w(t_{n+1}) = x_p(t_{n+1}). \quad (3.11)$$

ou ainda para a seguinte equação

$$\epsilon' \cos [\omega(t_n + t_d + t_e + t_c)] = \epsilon' - \alpha v_n t_c. \quad (3.12)$$

O instante da colisão será determinado quando a posição da partícula for a mesma da parede móvel. Podemos definir a função $f(t_c)$ como

$$f(t_c) = \epsilon' \cos [\omega(t_n + t_e + t_d + t_c)] - \epsilon' + \alpha v_n t_c. \quad (3.13)$$

o instante do choque é obtido quando $f(t_c) = 0$ para $t_c \in [0, \frac{2\pi}{\omega})$.

Da lei de reflexão, temos

$$v'_{p(depois)} = -\beta v'_{p(antes)},$$

o que leva a

$$v_{n+1} = \beta \alpha v_n + (1 + \beta) v_w. \quad (3.14)$$

Considerando a expressão da velocidade da parede móvel, temos que

$$v_{n+1} = \beta\alpha v_n - (1 + \beta)\varepsilon' \sin(\omega t_{n+1}). \quad (3.15)$$

O tempo t_{n+1} é dado por $t_{n+1} = t_n + t_e + t_d + t_c$, o que leva o mapeamento a ser escrito usando variáveis adimensionais como

$$T_I : \begin{cases} V_{n+1} = \beta\alpha V_n - (1 + \beta)\varepsilon \sin \phi_{n+1} \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \phi_e + \phi_d + \phi_c] \pmod{2\pi} \end{cases}. \quad (3.16)$$

O mapeamento que descreve a dinâmica pode ser escrito em uma forma compacta para englobar ambas as colisões indiretas e sucessivas, de modo que

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - (1 + \beta)\varepsilon \sin \phi_{n+1} \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n^*] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (3.17)$$

onde as variáveis V_n^* e ΔT_n^* correspondem ao tipo de colisão ocorrida. Quando a colisão for sucessiva $V_n^* = -\beta V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_c$, com ϕ_c obtido de $G(\phi_c) = 0$ onde será dada por

$$G(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c = 0, \quad (3.18)$$

cuja solução é obtida quando $\phi_c \in (0, 2\pi]$.

Para as colisões indiretas, as variáveis são $V_n^* = \alpha\beta V_n$ e $\Delta T_n^* = \phi_d + \phi_e + \phi_c$ com ϕ_c obtido da solução de $F(\phi_c) = 0$, onde

$$F(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_{n+1}) - \varepsilon + \alpha V_n \phi_c = 0, \quad (3.19)$$

cuja solução é obtida quando $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

Os termos auxiliares ϕ_d e ϕ_e são dados por

$$\phi_d = \frac{1 - \varepsilon \cos(\phi_n)}{V_n} \quad \text{e} \quad \phi_e = \frac{(1 - \varepsilon)}{\alpha V_n}.$$

3.2 Caso Não Dissipativo

Nesta seção vamos discutir dinâmica do caso conservativo do modelo Fermi-Ulam. As colisões da partícula com a parede são consideradas elásticas e assim não há perda fracional de energia. Com isso a velocidade é constante e não muda em módulo entre os choques.

Considerando o mapa descrito em (3.17), para recuperarmos o caso conservativo, $\alpha = \beta = 1$ e o mapa agora será reescrito da seguinte forma

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon \sin \phi_{n+1} \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n^*] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (3.20)$$

onde, V_n^* e ΔT_n^* correspondem ao tipo de colisão ocorrida.

3.2.1 Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana será utilizada para calcular os expoentes de Lyapunov (10), sendo escrita da seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Considerando o mapa definido por (3.20) e considerando o tipo de colisão ocorrida, temos para as colisões sucessivas os coeficientes da matriz como sendo

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ J_{21} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ J_{22} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}. \end{aligned}$$

Podemos obter $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ derivando implicitamente a Eq. (3.18), onde encontramos

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{\phi_c}{-V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \epsilon \sin \phi_n}{-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - V_n}.$$

O determinante é dado por

$$\det J = \frac{V_n + \epsilon \sin \phi_n}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}, \quad (3.22)$$

e isso implica que a medida preservada do espaço de fases é

$$d\mu = (V + \epsilon \sin \phi) dV d\phi.$$

Para as colisões indiretas, os coeficientes da matriz Jacobiana são dados por

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ J_{12} &= \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ J_{21} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ J_{22} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}. \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial \phi_d}{\partial V_n} = \frac{-1+\epsilon \cos \phi_n}{V_n^2}$, $\frac{\partial \phi_d}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \sin \phi_n}{V_n}$, $\frac{\partial \phi_e}{\partial V_n} = \frac{-1+\epsilon}{V_n}$ e $\frac{\partial \phi_e}{\partial \phi_n} = 0$.

Os termos $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são encontrados derivando implicitamente a Eq. (3.19) e são dados por

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c + \epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left(\frac{\epsilon(1+\cos \phi_n)-2}{V_n^2} \right)}{V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left(1 + \frac{\epsilon \sin \phi_n}{V_n} \right)}{V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}.$$

O determinante da matriz Jacobiana para este caso é

$$\det J = \frac{V_n + \epsilon \sin \phi_n}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}, \quad (3.23)$$

que tem a mesma forma da expressão obtida para os choques sucessivos.

3.2.2 Espaço de fases

A evolução dinâmica do sistema é dado a partir de uma sequência de estados. Assim, dada uma condição inicial (estado) (V_0, ϕ_0) , esta evolui para (V_1, ϕ_1) , depois para (V_2, ϕ_2) e assim sucessivamente. A sequência desses pares recebe o nome de órbita e ao conjunto de todas as órbitas possíveis dá-se o nome de espaço de estados ou espaço de fases. O espaço de fase pode exibir estruturas de formas diversas, contendo arranjos e organizações diferentes. Nessa seção mostraremos o espaço de fases do modelo Fermi-Ulam conservativo. A Fig. 3.4 mostra o espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam considerando um parâmetro de controle $\epsilon = 0,005$ e 400 condições iniciais evoluídas a partir do mapa (3.17). A grade de condições iniciais foi construída para a fase $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ e foi dividida em 10 incrementos igualmente espaçados, assim como a velocidade V_0 , o intervalo para V_0 foi $[0,001, 0,25)$. Cada condição inicial foi iterada 5000 vezes.

Podemos perceber, analisando o espaço de fases, a presença de uma rica estrutura, onde curvas invariantes do tipo *spanning* coexistem com ilhas de estabilidade e mares de caos. As curvas invariantes são assim chamadas por serem invariantes por iteradas. Elas são observadas num regime de altas energias e a curva invariante de mais baixa energia limita o mar de caos. É possível observar que essas curvas separam um caos global de um caos local caracterizando uma transição de regime caótico (acima da curva) para globalmente caótico (abaixo da curva). As ilhas de estabilidade são caracterizadas por comportamentos periódicos ou quase periódicos. Uma condição inicial dada dentro de uma ilha de estabilidade jamais entrará na região de caos e vice-versa. O mesmo ocorre com a curva invariante de modo que uma órbita no mar de caos não pode cruzá-la.

3.2.3 Expoentes de Lyapunov

Como descrito na seção 2.3, o expoente de Lyapunov é um importante indicador de caos em um sistema dinâmico. Ele consiste em verificar se o afastamento de duas condições iniciais muito próximas é exponencial ou não. Se $\lambda \leq 0$, dizemos que a órbita é regular e não há perda de previsibilidade. Se o afastamento for exponencial, $\lambda > 0$, a órbita é dita ser caótica. Além disso, o expoente de Lyapunov será um parâmetro importante para encontrar as estruturas

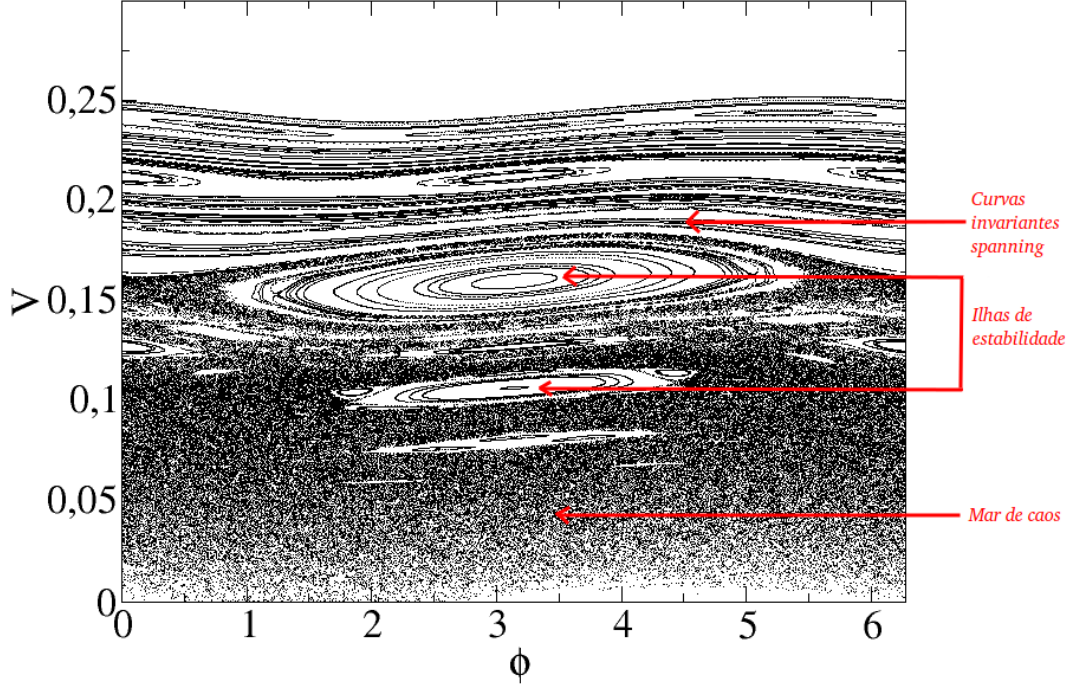


Figura 3.4: Espaço de fase para o modelo Fermi-Ulam conservativo. O parâmetro de controle utilizado foi $\varepsilon = 0.005$ e 400 condições iniciais diferentes iteradas 1000 vezes.

shrimps, já apresentadas na seção 2.4.1.

Nessa seção iremos mostrar o procedimento para o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas bidimensionais, pois na seção 2.3 o cálculo de expoente de Lyapunov mostrado foi para o mapa quadrático, que é um mapa unidimensional, portanto mais simples e direto.

Para mapas bidimensionais, como o modelo Fermi-Ulam, o expoente de Lyapunov é dado por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i| \quad j = 1, 2 \quad , \quad (3.24)$$

onde Λ_j^i identifica os autovalores da matriz M escrita como

$$M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i),$$

$$M = J_n(V_n, \phi_n) J_{n-1}(V_{n-1}, \phi_{n-1}) \dots J_1(V_1, \phi_1) J_0(V_0, \phi_0) \quad (3.25)$$

onde J representa a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada ao longo da órbita. O produto direto de matrizes da Eq. (3.25) pode ser um grande desafio particularmente, acarretando em uma ocorrência numérica chamada de *overflow*. Para evitar esse produto e encontrarmos

os autovalores, vamos utilizar um algoritmo chamado de *Algoritmo de Triangularização* (10). O algoritmo consiste em reescrever a matriz J como o produto de duas matrizes, sendo uma triangular T e outra ortogonal θ , de modo que

$$J = \theta T. \quad (3.26)$$

A matriz ortogonal considerada será

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

e a matriz T , sendo uma triangular superior é escrita como

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Sabendo que uma matriz é dita ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa ($\theta^{-1} = \theta^T$) e o produto da matriz inversa por ela mesma resulta na matriz identidade I , reescrevemos a matriz M como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1 \theta_0 \theta_0^{-1} J_0. \quad (3.29)$$

Aplicando a matriz inversa na Eq. (3.26), temos

$$\theta^{-1} J = T, \quad (3.30)$$

e pela Eq. (3.29), chamamos os produtos $J_1 \theta_0 = \tilde{J}_1$ e $\theta_0^{-1} J_0 = T_0$, reescrevendo-a, temos

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \tilde{J}_1 T_0. \quad (3.31)$$

Escrevendo a Eq. (3.30) na forma de matriz para encontrarmos os autovalores, temos que

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} T_{11} = J_{11} \cos \theta_0 + J_{21} \sin \theta_0, \\ T_{22} = -J_{12} \sin \theta_0 + J_{22} \cos \theta_0. \end{cases} \quad (3.33)$$

A partir da equação de matrizes (3.32) podemos encontrar a relação de θ_0 em função de J , onde

$$\begin{aligned} -\sin \theta_0 J_{11} + \cos \theta_0 J_{21} &= 0, \\ \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} &= \frac{J_{21}}{J_{11}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Podemos escrever as razões trigonométricas de acordo com o teorema de Pitágoras, de modo que

$$\sin(\theta) = \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \quad (3.35)$$

Substituindo a Eq. (3.35) na Eq. (3.33), encontramos uma expressão para cada autovalor,

$$T_{11} = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \quad T_{22} = \frac{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \quad (3.36)$$

O expoente de Lyapunov agora é calculado por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^i| \quad j = 1, 2. \quad (3.37)$$

Encontrada a expressão para calcular os expoentes de Lyapunov, podemos agora calculá-los numericamente para o modelo Fermi-Ulam. A Fig. 3.5 mostra a convergência do expoente de Lyapunov para 5 condições iniciais escolhidas no mar de caos para o parâmetro de controle $\varepsilon = 0,004$. Para n suficientemente grande temos que $\bar{\lambda} = 0,78(2)$, onde o 0,02 corresponde ao desvio padrão da média dos expoentes.

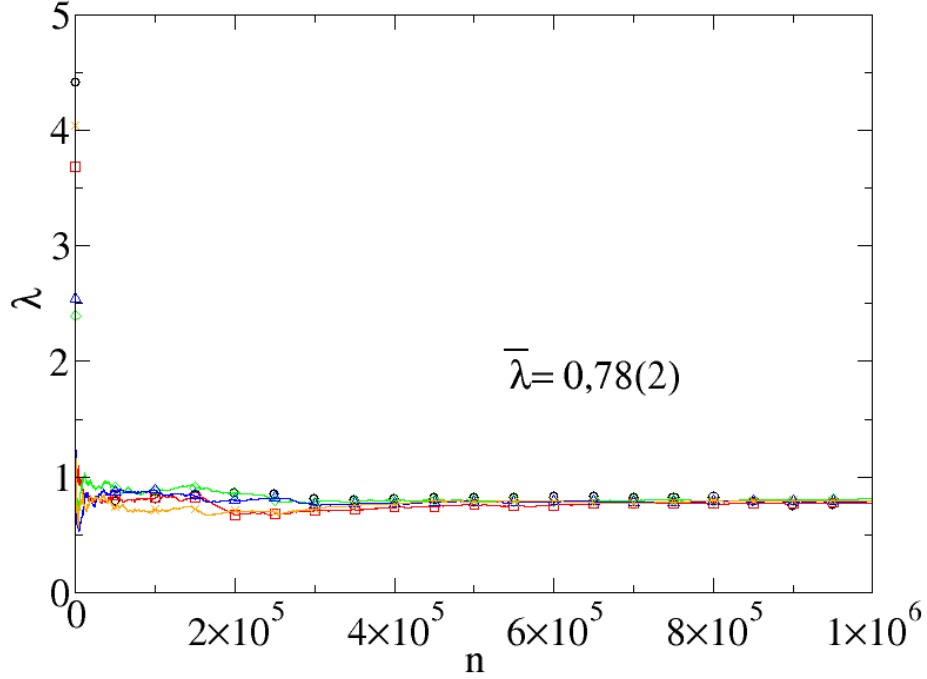


Figura 3.5: Convergência do expoente de Lyapunov calculado para 5 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,004$, $\alpha = \beta = 1$.

3.3 Caso Dissipativo

Nessa seção discutiremos um pouco o caso dissipativo do modelo Fermi-Ulam. O caso dissipativo é fundamental para que possamos encontrar as estruturas *shrimps*, um dos objetivos desse trabalho. Nesse caso as colisões ocorridas são do tipo inelásticas e consequentemente os coeficientes de restituição das paredes fixa α e móvel β serão diferentes de 1. Entretanto consideraremos $\alpha = \beta$.

Na Fig. 3.6 podemos perceber que a estrutura mista do espaço de fases observada no modelo não dissipativo foi destruída quando a dissipação foi introduzida. Para os parâmetros de controle utilizados nesse caso ocorreu o surgimento de um atrator caótico. Por outro lado, se os parâmetros de controle forem mudados, é possível encontrar um outro tipo de atrator, chamado de ponto fixo periódico (17; 18).

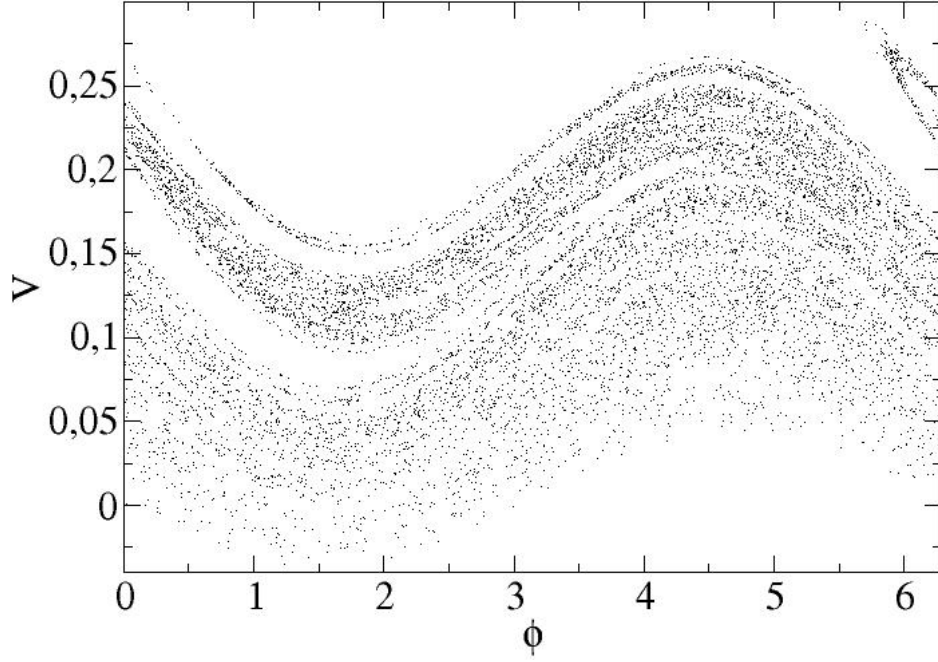


Figura 3.6: Atrator caótico observado no modelo Fermi-Ulam completo, dissipativo. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,004$, $\beta = 0,93$ e 200 condições iniciais.

3.3.1 Matriz Jacobiana

Os coeficientes da matriz Jacobiana para colisões sucessivas são

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -\beta - (1 + \beta)\varepsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -(1 + \beta)\varepsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}.\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são obtidas derivando implicitamente a função $G(\phi_c)$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{-\phi_c}{V_n + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) - \varepsilon \sin \phi_n}{-\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) - V_n}.$$

O determinante da matriz é dado por

$$\det(J) = \beta^2 \frac{V_n + \varepsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}. \quad (3.38)$$

Os coeficientes da matriz Jacobiana para colisões indiretas são escritos como

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \alpha\beta - (1 + \beta)\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -(1 + \beta)\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{-(1 - \epsilon \cos \phi_n)}{V_n^2} - \frac{(1 - \epsilon)}{\alpha V_n^2} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\epsilon \sin \phi_n}{V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}.\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$ são obtidas derivando implicitamente a função $F(\phi_c)$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} = \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[\frac{1 - \epsilon \cos \phi_n}{V_n^2} + \frac{1 - \epsilon}{\alpha V_n^2} \right] + \alpha \phi_c}{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \alpha V_n} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[1 + \frac{\epsilon \sin \phi_n}{V_n} \right]}{-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) + \alpha V_n}.$$

O determinante da matriz Jacobiana é dado por

$$\det(J) = \alpha^2 \beta^2 \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}. \quad (3.39)$$

Podemos concluir que os resultados das equações (3.38) e (3.39) mostram que a área no espaço de fases sofre uma contração quando a dissipação é introduzida. Se $\alpha = \beta = 1$ recuperamos os resultados do determinante para o caso não dissipativo.

3.3.2 Expoente de Lyapunov

Considerando os cálculos na seção 3.2.3, podemos encontrar a convergência do expoente de Lyapunov positivo para 5 condições iniciais distintas escolhidas ao longo do atrator caótico, conforme mostrado na Fig. 3.7.

3.4 *Shrimps*

Como descrito na seção 2.4.1, *shrimps* (16) são formados por um conjunto regular de janelas adjacentes centrado em torno do par principal de intersecção super estável de arcos parabólicos. Um *shrimp* é um mosaico duplamente infinito de domínios de estabilidade com-

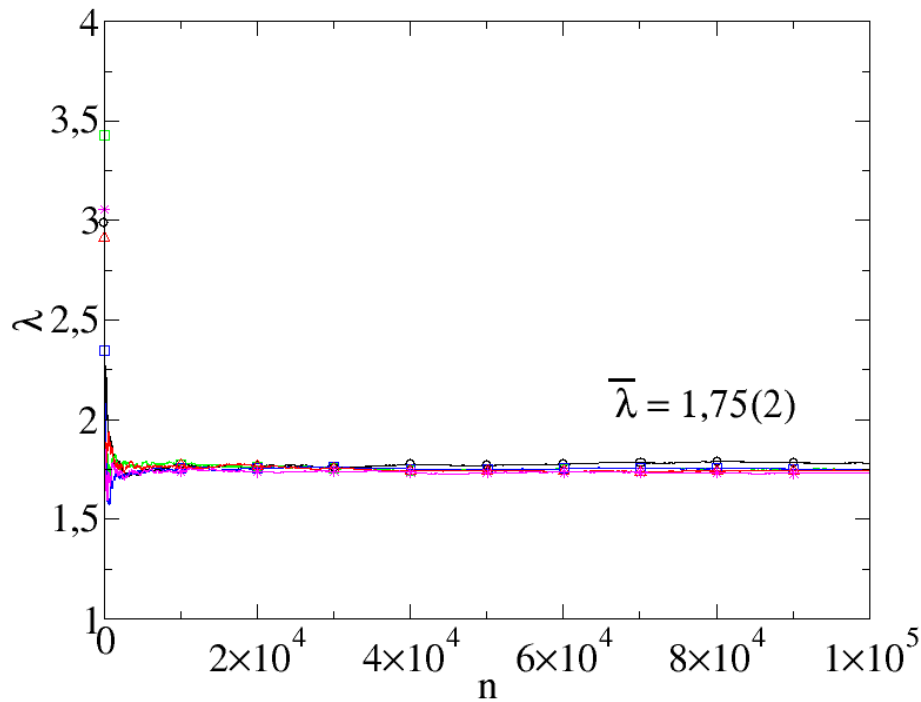


Figura 3.7: Convergência do expoente de Lyapunov para 5 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle usados foram $\varepsilon = 0,0035$, $\alpha = \beta = 0,94$.

postos por um domínio principal, acrescido de todos os domínios de estabilidade decorrentes de dois períodos adjacentes de duplicação por cascata, juntamente com os seus correspondentes domínios de caos. Sabemos também que os *shrims* são encontrados em sistemas dissipativos, tudo indica que essas estruturas são auto afins, ou seja, se uma região no intervalo no espaço de parâmetros for ampliada, para que se obtenha uma figura igual a anterior é necessário que se aumente os eixos com fatores de escala diferentes. Nesse trabalho não foi medida essa estrutura auto afim.

Na Fig. 3.8 podemos perceber que existe uma estrutura de período 4 seguida por uma sequência de bifurcação e essa sequência cresce por um fator de 1 ($4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$). No caso do modelo completo não foi encontrada uma equação que descreva todas as sequências de *shrims*, pois todas as sequências medidas crescem com fator 1 (19). A faixa de parâmetros utilizada foi $\alpha \in [0,66,0,72]$ e $\varepsilon \in [0,3,0,38]$. A escala de cores utilizada identifica o período das órbitas, com intervalo $[0,500]$. Órbitas com período superior a 500 foram consideradas como caóticas e são representadas pela cor amarela. Foi utilizada uma janela de 500×500 e cada par foi iterado 10^5 vezes. O tempo computacional gasto na construção da Fig. 3.8 utilizando compilador Fortran com representação numérica de dupla precisão

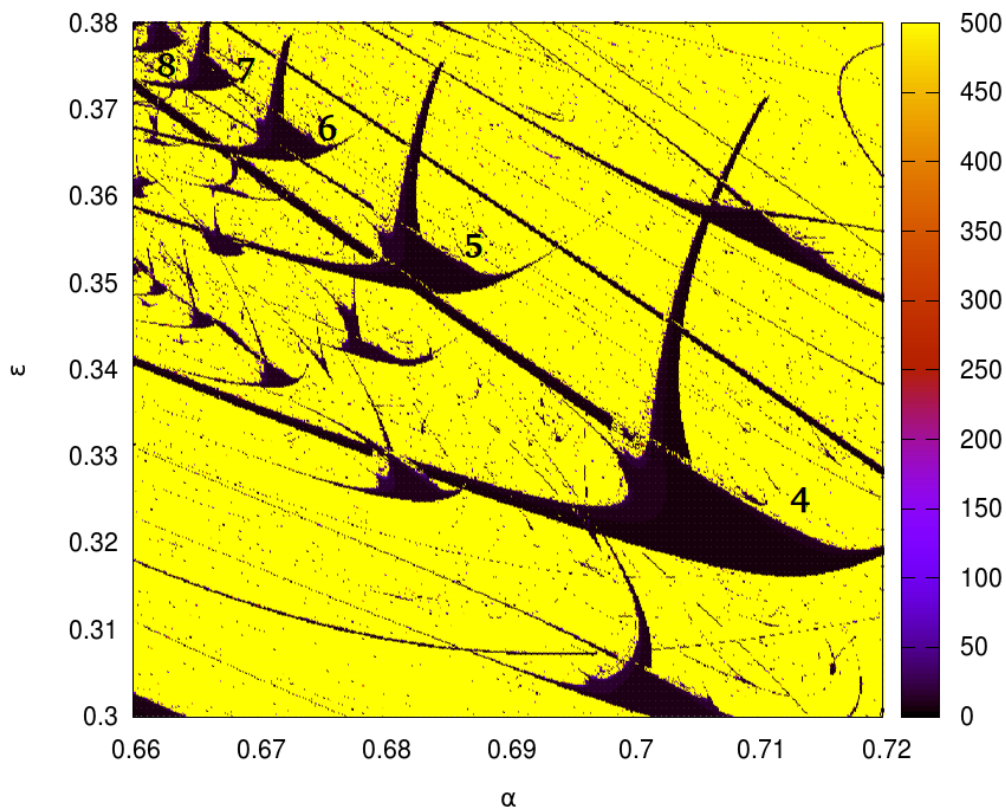


Figura 3.8: Espaço de parâmetros com sequência de estruturas *shrimps* do modelo Fermi-Ulam completo, para o caso dissipativo. As estruturas foram construídas com escala de cores correspondendo ao período das órbitas periódicas.

executados em um cluster com processadores Intel[®] XEON quad core foi da ordem de 15.000 horas de processamento. Baseado nisso, utilizamos no próximo capítulo o modelo Fermi-Ulam simplificado. Nesse modelo não é preciso resolver equações transcendentais, o esforço computacional é menor, ele mantém a não linearidade do problema.

3.5 Conclusões parciais

Neste capítulo estudamos o modelo Fermi-Ulam completo. Nossos resultados por simulação de larga escala permitiram observar as estruturas *shrimps* no espaço de parâmetros. Os mesmos se organizam em uma sequência de *shrimps* e os períodos crescem por um fator 1.

Capítulo 4

Modelo Fermi-Ulam: uma versão de paredes fixas

Nesse capítulo apresentaremos o modelo Fermi-Ulam considerando uma versão de paredes fixas e discutiremos os resultados obtidos para o caso dissipativo. Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1 apresentamos o modelo Fermi-Ulam simplificado e a dinâmica do modelo é explicada. Na seção 4.2 mostramos o mapa do modelo. Calculamos na seção 4.3 a matriz Jacobiana e o determinante. Na seção 4.4 construímos o espaço de fases para esse caso e é mostrada a convergência o expoente de Lyapunov para cinco condições iniciais distintas. Finalmente, na seção 4.5 encontramos as estruturas *shrims* para o caso dissipativo do modelo de Fermi-Ulam simplificado.

4.1 O Modelo

A solução numérica de equações transcendentais como descritas no capítulo anterior, em particular as equações (3.18) e (3.19) se tornam demasiadamente longas e exigem um grande esforço computacional, principalmente na obtenção das estruturas *shrims* presentes no espaço de parâmetros. Existe na literatura (20; 21) uma versão do modelo que evita a solução de equações transcendentais. É uma versão simplificada que considera ambas as paredes fixas, o que permite a imediata determinação do instante das colisões. Entretanto para manter a não linearidade do modelo, considera-se que após o choque com uma das paredes, por exem-

plo aquela localizada em $x = 0$, a partícula sofre uma mudança de energia/velocidade como se a parede estivesse em movimento. Essa aproximação mantém a essência do modelo e ao mesmo tempo permite a obtenção de resultados analíticos com menor esforço, assim como aceleram enormemente as simulações computacionais.

No modelo simplificado do acelerador de Fermi considera-se que as duas paredes estão fixas, uma em $x = 0$ e a outra em $x = 1$, já considerando variáveis adimensionais. Ao colidir com uma das paredes (com a parede em $x = 0$, por exemplo), a partícula sofre uma troca de energia e momentum como se a parede estivesse se movendo. As soluções das equações transcendentais no modelo completo fornecem o momento em que a partícula colide com a parede móvel. Uma vez que a parede em $x = 0$, no modelo simplificado, é assumida como sendo fixa, as equações produzidas no ato da colisão não são mais transcendentais, admitindo agora soluções analíticas explícitas e reduzindo-se significativamente o tempo das simulações numéricas.

4.2 O Mapa

Considerando que o modelo assume paredes fixas e que o choque inelástico com coeficiente de restituição $\alpha \in [0,1]$ ocorre apenas na parede localizada em $x = 0$, o tempo entre os choques, já considerando as variáveis adimensionais é $\Delta t = \frac{2}{V_n}$. Assim o mapa é dado por

$$T_{SIMP} : \begin{cases} V_{n+1} = |\alpha V_n - (1 + \alpha)\varepsilon \sin \phi_{n+1}| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \frac{2}{V_n}] \pmod{2\pi} \end{cases} . \quad (4.1)$$

No modelo completo em algumas circunstâncias a partícula pode mover-se para a esquerda após uma colisão com a parede móvel. Esse tipo de choque leva às colisões sucessivas. Entretanto no modelo simplificado tais choques não são permitidos, dado que ambas as paredes são fixas. Para evitar os choques múltiplos no modelo simplificado quando a velocidade da partícula se torna negativa após o choque, a partícula é reinjetada de volta em direção à parede localizada em $x = 1$ com mesma velocidade. Esse procedimento é realizado a partir do módulo introduzido do lado direito da equação que define a velocidade no mapeamento

(4.1). Se a velocidade é positiva após o choque, o módulo não afeta a dinâmica.

4.3 Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana é dada pela Eq. (3.21) e os coeficientes da matriz para o caso do modelo simplificado são

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \alpha - (1 + \alpha)\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -(1 + \alpha)\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{-2}{V_n^2}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1.\end{aligned}$$

Com isso o determinante da matriz é dado por

$$\text{Det}(J) = \pm 1. \quad (4.2)$$

O sinal do determinante será determinado de acordo com o valor dentro do módulo na Eq. (4.1), se $\alpha V_n - (1 + \alpha)\epsilon \sin \phi_{n+1} > 0$, então o sinal dentro será (+1), caso contrário será (-1).

4.4 Espaço de Fases

Para construirmos o espaço de fases do modelo simplificado não dissipativo, ou seja $\alpha = 1$, iteramos a Eq. (4.1) utilizando 144 condições iniciais divididas em 12 incrementos igualmente espaçados e iteradas 1000 vezes cada uma (esta combinação de condições iniciais foram escolhidas para que o espaço de fases ficasse mais fácil de se observar, ou seja, com menos pontos plotados, mas qualquer outra combinação poderia também ser usada). Os intervalos utilizados foram $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ e $V_0 \in [0, 0.1, 0.25]$, assim como foi utilizado na seção 3.2.2 no espaço de fases para o modelo completo. A Fig. 4.1 mostra o espaço de fases para o modelo Fermi-Ulam simplificado.

Comparando a Fig. 4.1 com a Fig. 3.4, podemos perceber que o modelo simplificado

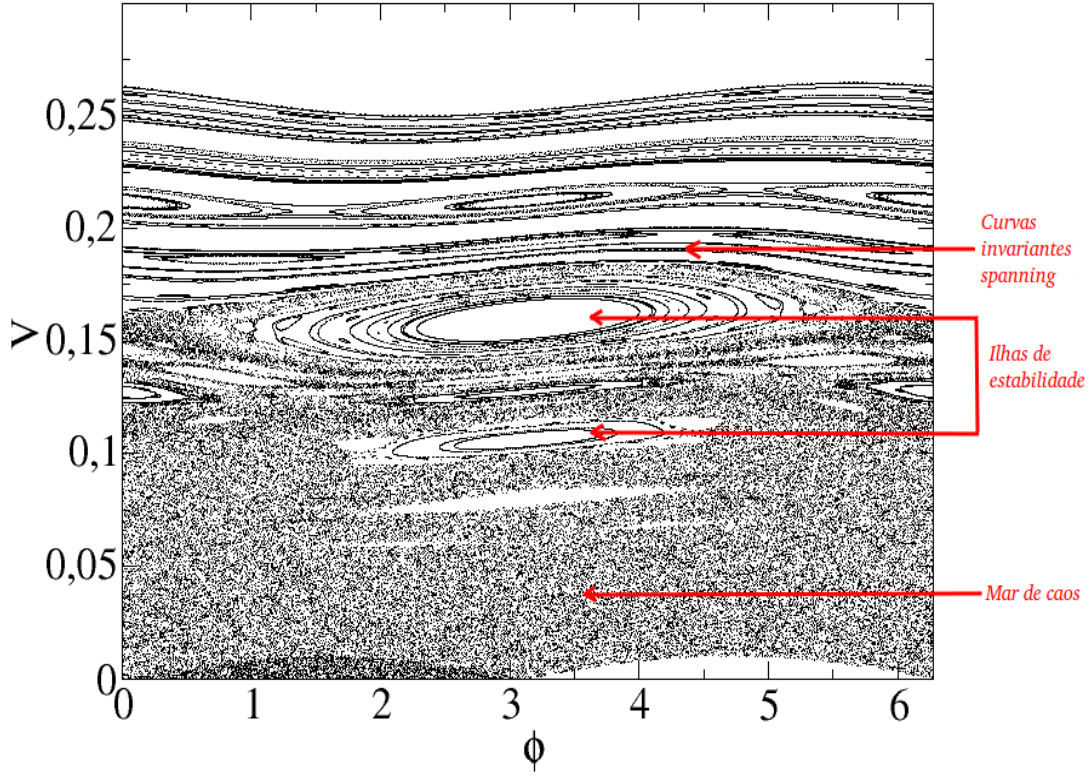


Figura 4.1: Espaço de fases do modelo Fermi-Ulam simplificado. O parâmetro de controle utilizado foi $\varepsilon = 0,005$, com 144 condições iniciais com $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ e $V_0 \in [0, 01, 0,25]$. Cada condição inicial foi iterada 1000 vezes.

apresenta um espaço de fases muito semelhante ao do modelo completo, contendo ilhas de estabilidade, mar de caos e as curvas invariantes do tipo *spanning*. Os choques com velocidades negativas são proibidos no modelo simplificado e isso fica evidenciado pela região mais escura na parte inferior esquerda do espaço de fases, região esta afetada diretamente pelo módulo introduzido na equação de V_{n+1} . A partir do conhecimento dos elementos da matriz Jacobiana, podemos calcular os expoentes de Lyapunov. Na Fig. 4.2 calculamos o expoente de Lyapunov para 5 condições iniciais distintas, com parâmetro de controle $\varepsilon = 0,005$, velocidade inicial $V_0 = 0,01$ e ϕ variando em torno de 2,80. O expoente de Lyapunov médio obtido foi $\bar{\lambda} = 1,5(1)$, onde o 0,1 é a incerteza obtida pelo cálculo do desvio padrão da média.

4.5 *Shrimps*

Como falado nas seções 2.4.1 e 3.4 as estruturas *shrimps* são características de sistemas dissipativos. A Fig. 4.3 mostra o espaço de parâmetros obtido para o modelo simplificado

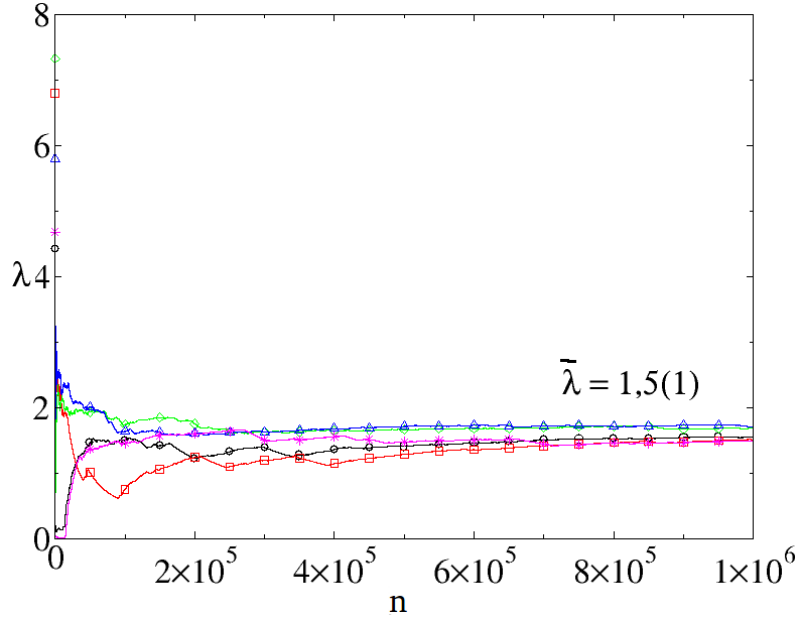


Figura 4.2: Expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado Fermi-Ulam, com 5 condições iniciais, parâmetro de controle $\varepsilon = 0,005$, velocidade $V_0 = 0,01$ e ϕ .

do acelerador Fermi-Ulam. A escala de cores identifica o valor numérico dos expoentes de Lyapunov.

Por outro lado, a Fig. 4.4 mostra o mesmo espaço de parâmetros obtido na Fig. 4.3, entretanto considerando a escala de cores como identificação do período de cada órbita.

De acordo com as Figs. 4.3 e 4.4 podemos perceber uma grande semelhança entre elas. Em particular estamos interessados nas regiões periódicas no espaço de parâmetros e determinar como ocorre a organização das estruturas *shrims* e possíveis leis de formação. Sendo assim, investigaremos as estruturas *shrims* caracterizando seus períodos.

De acordo com a Fig. 4.5, as estruturas *shrims* aparecem em uma sequência organizada. A Fig. 4.4 foi obtida para a faixa $\varepsilon \in [0,75,1]$ e $\alpha \in [0,2,0,5]$. Podemos perceber existe que uma estrutura aparentemente complicada nas vizinhanças da região S. A Fig. 4.5 corresponde à ampliação da caixa marcada em S, evidenciando a complexidade da estrutura. Neste estágio de ampliação já podemos ver vários *shrims* organizados em sequência. Ampliando a caixa A da Fig. 4.5, podemos perceber ainda mais nitidamente que outras sequências de *shrims* cada vez mais microscópicos vão surgindo, conforme mostrado na Fig. 4.6a para a faixa de $\varepsilon \in [0,91,0,914]$ e $\alpha \in [0,3355,0,3445]$. As caixas marcadas em (a) com as letras B, C e D são as regiões ampliadas e devidamente mostradas na Figs. 4.6b, 4.6c e 4.6d respectivamente. A faixa

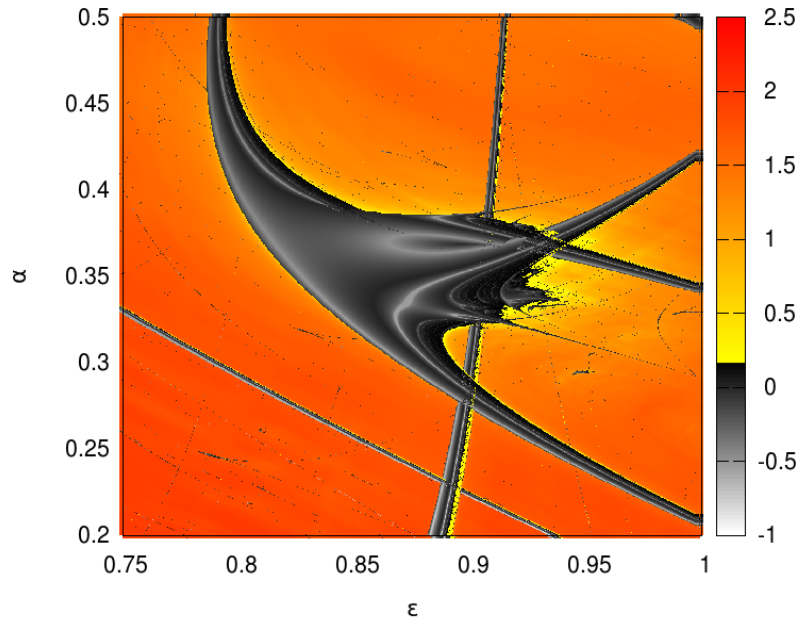


Figura 4.3: Espaço de parâmetros com a estrutura *shrimp* no modelo Fermi-Ulam simplificado construída com escala de cor correspondendo ao máximo expoente de Lyapunov. Consideramos uma janela de 1000 x 1000 e iterado 10^5 vezes cada divisão. Usando como condição inicial $\phi_0 = 2,80$ e $V_0 = 0,01$.

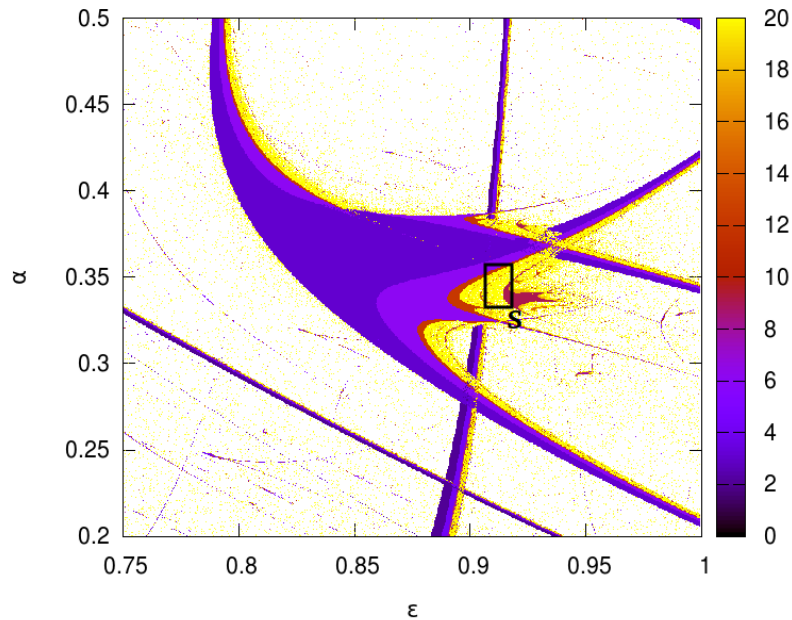


Figura 4.4: Espaço de parâmetros com a estrutura *shrimp* no modelo Fermi-Ulam simplificado construída com escala de cor correspondendo ao período das órbitas periódicas. Utilizamos aqui uma janela de 700 x 700 e iterado 10^5 vezes cada par de parâmetros considerando $\phi_0 = 2,80$ e $V_0 = 0,01$.

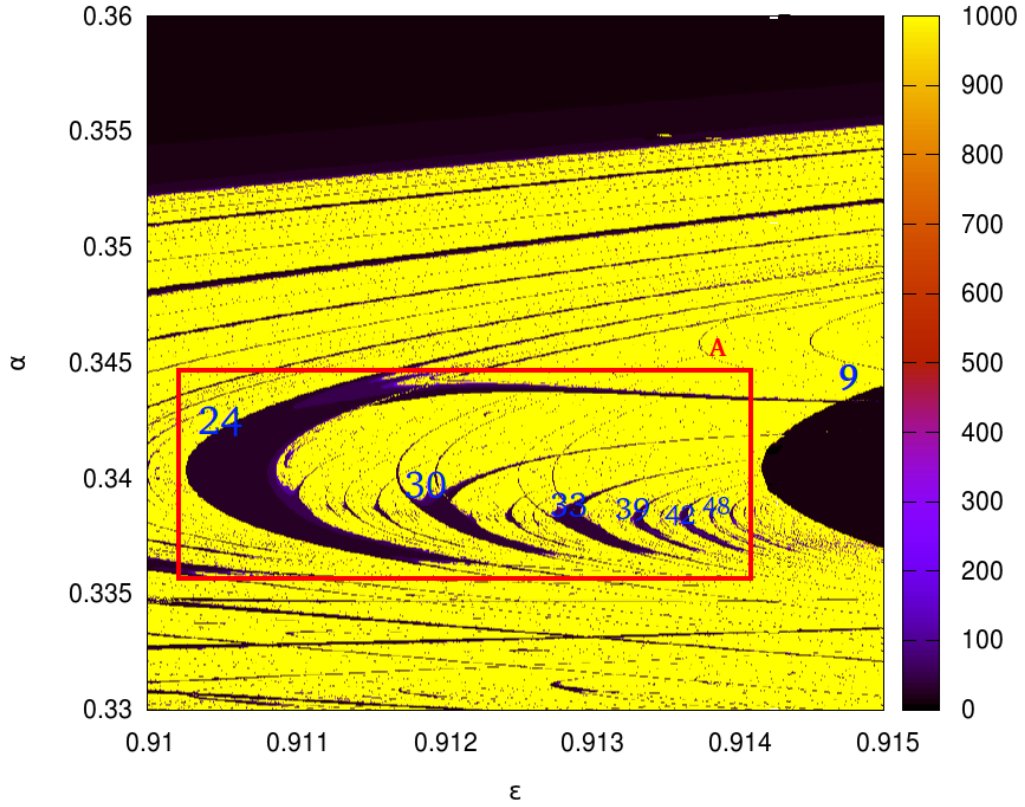


Figura 4.5: Sequência de *shrimps* convergindo para uma estrutura de período 9.

de parâmetros da Fig. 4.6b é $\varepsilon \in [0,911,0,9119]$ e $\alpha \in [0,3378,0,3395]$. Podemos perceber que os períodos se organizam da esquerda para a direita com $24 \rightarrow 45 \rightarrow 39 \rightarrow 42 \rightarrow 36 \rightarrow 42 \dots$. Por outro lado a Fig. 4.6c obtida para a faixa $\varepsilon \in [0,9122,0,9125]$ e $\alpha \in [0,338,0,3387]$ mostra também uma organização dada por períodos $30 \rightarrow 54 \rightarrow 51 \rightarrow 45 \rightarrow 42 \rightarrow 36$. Finalmente a Fig. 4.6d obtida para $\varepsilon \in [0,91245,0,91275]$ e $\alpha \in [0,338,0,3387]$ mostra uma sequência $36 \rightarrow 42 \rightarrow 39 \rightarrow 45 \rightarrow 48$. Os períodos medidos nas estruturas *shrimps* observadas no espaço de parâmetros foram dispostos em uma estrutura do tipo árvore de período, de acordo com a Fig. 4.7. Nessa mesma figura podemos ver a regra de organização que as estruturas seguem, essa regra de organização pode ser vista como equações diofantinas lineares (22; 23) do tipo $x = y + 6$, $y = x + 3$, $x = x_0 + 9$ e $y = y_0 + 9$.

Na Fig. 4.7, considerando o primeiro período (24) como x , seguindo a regra descrita acima ($y = x + 6$) encontramos agora o valor de y , caracterizado pelo segundo período (30), a partir dele temos a próxima equação, $y = x + 3$, novamente voltando para x (período 33). De acordo com a árvore mostrada na figura, todos os períodos posteriores seguem essas mesmas

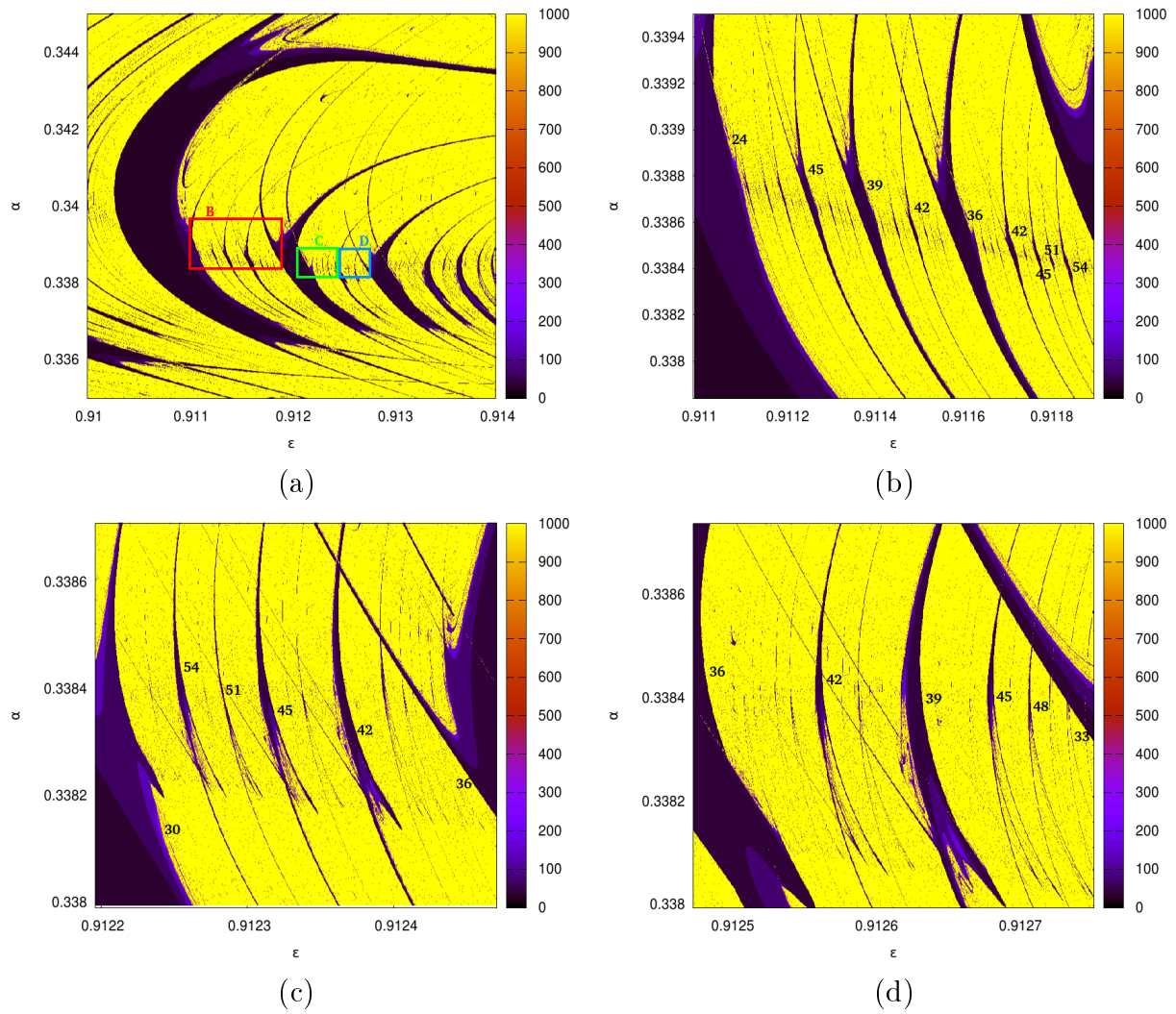


Figura 4.6: Espaço de parâmetros com escala de cor representando o período das orbitas periódicas do modelo Fermi-Ulam simplificado. (a) Maximização da caixa A. (b) Maximização da caixa B. (c) Maximização da caixa C. (d) Maximização da caixa D.

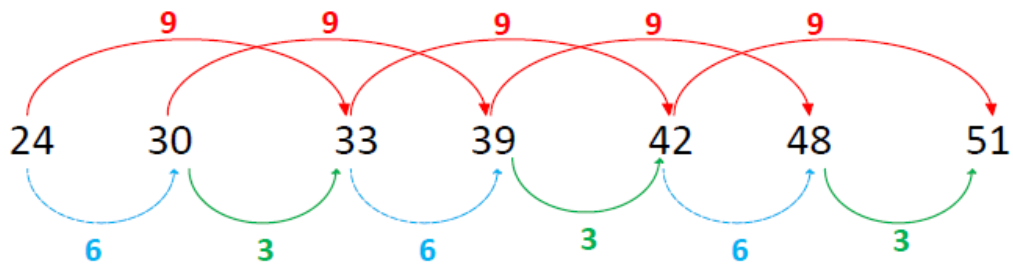


Figura 4.7: Árvore de períodos do espaço de parâmetros (caixa A) para o modelo Fermi-Ulam simplificado.

regras, sempre alternando entre x e y . Ainda na mesma figura, podemos observar que outra regra aparece. Partindo novamente do primeiro período da árvore (24), que agora é x_0 , a nova equação será $x = x_0 + 9$, encontrando o novo x caracterizado pelo período (33). Do mesmo modo, temos os valores de y . Começando do segundo período (30) que é o y_0 , temos $y = y_0 + 9$ encontrando o quarto período (39).

Ampliando essas sequências, podemos perceber que as estruturas menores aparecem e continuam se organizando seguindo a mesma regra.

Quando olhamos para estruturas menores, assim como na Fig. 4.8, observamos a seguinte organização com o mesmo padrão.

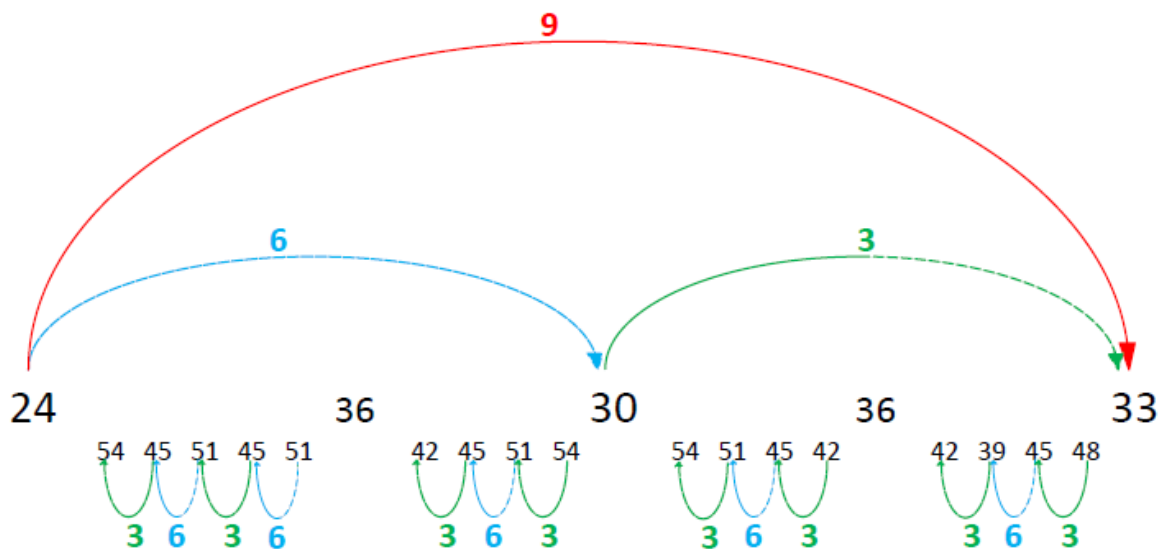


Figura 4.8: Árvore de períodos do espaço de parâmetros para o modelo simplificado Fermi-Ulam. Ampliação da região entre os *shrimps* de período 24 e 33.

Observamos também que a sequência de *shrimps* converge para uma estrutura maior de

período 9, como mostrado na Fig. 4.5.

4.6 Conclusões parciais

Neste capítulo estudamos o modelo Fermi-Ulam simplificado e encontramos as estruturas *shrimps* que se organizam no espaço de parâmetros seguindo algumas regras que são vistas como equações de diofantina. Foi possível perceber que, mesmo quando uma região do espaço de parâmetros é ampliada, as estruturas *shrimps* menores continuam respeitando a mesma regra.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos algumas propriedades do mapa quadrático e o modelo Fermi-Ulam. No mapa quadrático, foi mostrada a construção do mapa e o diagrama

de órbita foi obtido. Nele foi possível observar a existência de comportamentos periódico. Em $c = -0,75$, o ponto fixo de período 1 perde a estabilidade e se bifurca num comportamento de período 2, que se bifurcam sucessivamente até a ocorrência de caos. Esse comportamento é descrito por uma equação do tipo $T = T_0 2^m$, onde T_0 é o período inicial da janela e m identifica a ordem da bifurcação. Conforme conhecido na literatura, essa é a primeira evidência clara de caos quando $n \rightarrow \infty$. Ao introduzirmos uma perturbação paramétrica no mapa quadrático, as estruturas *shrimps* são observadas.

No modelo Fermi-Ulam completo investigamos o caso conservativo e dissipativo. No caso conservativo foi mostrada a construção do mapa para os dois tipos de colisões existentes. A matriz jacobiana foi determinada e o espaço de fases foi construído, evidenciando estruturas com ilhas de estabilidade, mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning*. Já no caso dissipativo vimos que a presença de dissipação afeta drasticamente a dinâmica do modelo. Ocorre a destruição do espaço de fases misto podendo ser substituído por um atrator caótico. Encontramos também as estruturas *shrimps* no espaço de parâmetros e percebemos que essas se organizam de forma que o seu período cresça com fator 1.

Quando o modelo Fermi-Ulam simplificado foi estudado, percebemos que este produz resultados muito semelhantes ao do modelo completo. Esta simplificação além de acelerar as simulações numéricas, mantém a não linearidade do problema e muitas de suas propriedades

dinâmicas são mantidas. Foi mostrada a semelhança com o espaço de fases do modelo simplificado com o modelo completo apresentando ilhas de estabilidades, mar de caos e as curvas invariantes do tipo spanning.

Ao variarmos os parâmetros de controle α e ε no caso dissipativo, construímos também o espaço de parâmetros e nele foi possível observar e caracterizar as estruturas *shrimps*. Ao investigarmos em detalhes o espaço de parâmetros construído com escala de cores correspondendo ao período das órbitas periódicas, percebemos que as estruturas se organizavam de acordo com uma regra linear. Essa regra é dada por uma equação diofantina do tipo: $x = y + 6$, $y = x + 3$, $x = x_0 + 9$ e $y = y_0 + 9$.

Em trabalhos futuros, pretendemos encontrar estruturas *shrimps* no espaço de parâmetros em outros modelos de aceleradores de Fermi e procurar por equações diofantinas quadráticas.

Referências Bibliográficas

- [1] STEWART, J. Cálculo (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006
- [2] POINCARÉ, H. Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste Vol. 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [3] PESSIS-PASTERNAK, G. Do caos à inteligência artificial. [S.l.]: Unesp, 1993.
- [4] LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the atmospheric sciences, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- [5] FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. Physical Review, APS, v. 75, n. 8, p. 1169, 1949.
- [6] ULAM, S. On some statistical properties of dynamical systems. In: Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. [S.l.: s.n.], 1961. v. 3, p. 315–320.
- [7] GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the hénon map. Physical Review Letters, v. 70, p. 2714–2717, 1993.
- [8] FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C.: Caos – Uma Introdução. Editora Blucher, 1994.
- [9] MAY, R. M. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, 1976, Nature, 261 (5560): 459.
- [10] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. Reviews of Modern Physics, v. 57, p. 617–656, Jul 1985.
- [11] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. 2008 Physical Review Letters. 101 054101

- [12] ALBUQUERQUE, H. A.; RUBINGER, R. M.; Rech, P. C. 2008 Physics Letters A 372 4793
- [13] CELESTINO, A.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. 2011 Physical Review Letters. 106 234101
- [14] STOOP, R.; BENNER, P.; UWATE, Y. 2010 Physical Review Letters. 105 074102
- [15] LORENZ, E. N. 2008 Physica D 237 1689
- [16] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows. Physical Review E, APS, v. 84, n. 1, p. 016216, 2011.
- [17] LEONEL, E. D.; CARVALHO, R. E. 2007 Physics Letters A 364 475
- [18] OLIVEIRA, D. F. M.; LEONEL, E. D. 2010 Physics Letters A 374 3016
- [19] OLIVEIRA, D. F. M.; LEONEL, E. D. Parameter space for a dissipative Fermi–Ulam model. 2011 New Journal of Physics. 13 123012.
- [20] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, A. M. “Regular and Chaotic Dynamics”, Applied Mathematical Sciences, vol 38 (New York: Springer) 1992.
- [21] KARLIS, A. K.; PAPACHRISTOU, P. K.; DIAKONOS, F. K.; CONSTANTOUDIS, V.; SCHMELCHER, P. Physical Review Letters. 97, 194102 2006.
- [22] DOMINGUES, H. H. Fundamentos de aritmética. São Paulo: Atual, 1991.
- [23] VIEIRA, J.C.C. Estudo numérico das bifurcações globais do sistema regulador de Watt. 2011. 39 p. Dissertação de mestrado em Física - Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, SC. 2011.