UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

CAMPUS DE MARÍLIA

KLEIDSON ÊGLICIO CARVALHO DA SILVA OLIVEIRA

Uma lógica do poucos

MARÍLIA

2011

KLEIDSON ÊGLICIO CARVALHO DA SILVA OLIVEIRA

Uma lógica do poucos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília. Área de concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Orientadora: Dra. Maria Cláudia Cabrini Grácio

Co-orientador: Dr. Hércules de Araújo Feitosa

Marília

2011

Ficha catalográfica elaborada pelo
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação – UNESP – Campus de Marília

O48l

Oliveira, Kleidson Êglicio Carvalho da Silva.
Uma lógica do poucos / Kleidson Êglicio Carvalho da Silva Oliveira. – Marília, 2011.
98 f. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado - Filosofia) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2011

Bibliografia: f. 95-98
Orientador: Maria Cláudia Cabrini Grácio

1.Filosofia – Lógica. 2. Lógicas moduladas. 3. Lógica do muito. 4. Lógica do poucos. I. Autor. II. Título.

CDD 160

KLEIDSON ÊGLICIO CARVALHO DA SILVA OLIVEIRA

Uma lógica do poucos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília. Área de concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora em 09/09/2011.

BANCA

Prof[a]. Dr[a]. Maria Cláudia Cabrini Grácio – UNESP/MARÍLIA ____________________

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio – UNICAMP/CAMPINAS ____________________

Prof. Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini – UNESP/BAURU ____________________

Marília

2011

À minha avó Luzia e

Aos meus irmãos Herman e

Gladys.

Gostaria de fazer meus sinceros agradecimentos às pessoas que me apoiaram nesse trabalho, em especial:

- À orientadora e amiga, Dra. Maria Cláudia Cabrini Grácio, pela esplêndida orientação e paciência, sem a qual este trabalho não seria possível;

- Ao co-orientador, Dr. Hércules, e ao professor Mauri por me introduzir no mundo da Lógica pela participação no Grupo de Pesquisa SALCI, da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Bauru, e das contribuições feitas;

- Aos professores da Pós-Graduação em Filosofia, pelo aprendizado inestimável;

- Aos colegas de Pós-Graduação, em especial aos amigos Ana Claudia, Giovanni, Angela e Rafael, cujas conversas foram de grande importância para realização deste trabalho;

- Ao programa de Pós-Graduação em Filosofia da Unesp, *Campus* de Marília;

- À FAPESP, pela bolsa de estudos concedida;

- A Deus, por me dar forças e vida para continuar este projeto.

Muito Obrigado.

RESUMO

Em 1999, Grácio introduziu uma família de lógicas não-clássicas ─ as lógicas moduladas ─, cuja função é formalizar sentenças que expressam quantificações da linguagem natural, que não podem ser definidas em função dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem. Dentre as lógicas moduladas, destaca-se a lógica do muito, que formaliza expressões do tipo "muitos x satisfazem a sentença φ", por meio da sentença Gx φ(x), para G denominado o quantificador para "muitos". Nesta Dissertação, tendo como base o quantificador "muitos", propõe-se, em contrapartida, uma lógica para a noção de "poucos". Apresenta-se um sistema lógico axiomático e monotônico para a lógica do poucos, em cuja semântica se utiliza a estrutura matemática denominada família quase fechada inferiormente, para representar a noção intuitiva de "poucos". Demonstra-se que este sistema lógico é consistente, correto e completo. Analisam-se os aspectos duais entre a lógica do poucos construída e a lógica do muito, além de outros sistemas lógicos para o quantificador "poucos", a partir de novas intuições. Finalizando, apresentam-se algumas considerações e sugestões para pesquisas em continuidade ao trabalho iniciado nesta Dissertação.

Palavras-Chave: lógicas moduladas, lógica do muito, lógica do poucos.

ABSTRACT

In 1999, Grácio introduced a family of non-classical logics – modulated logics –, whose function is to formalize sentences that express quantification in natural language, which cannot be defined in terms of quantifiers of first order classical logic. Among the modulated logics, there is logic of many, that formalizes expressions like "many x satisfy the sentence φ", by the sentence Gx φ(x) to G referred to the quantifier "many". In this Dissertation, based on the quantifier "many", it is proposed, on the other hand, a logic to the notion of "few". It presents an axiomatic and monotonic logical system for the logic of the few, whose semantics is used in the mathematical structure called the family almost closed inferiorly, to represent the intuitive notion of "few." It is demonstrated that this logical system is consistent, sound and complete. We are analyze the dual aspects of logic of many and the logic of the few built, and other logical systems for the quantifier "few", from new insights. Finally, we present some considerations and suggestions for research in continuing the work begun in this Dissertation.

Key-words: modulated logics, logic of many, logic of the few.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A questão da quantificação é um tema de interesse de várias áreas do conhecimento, tais como a Lógica, a Linguística, a Matemática e a Computação. Na lógica clássica, tanto de primeira ordem como de ordens superiores, a quantificação é formalizada por meio de dois quantificadores denominados *quantificadores lógicos*: o quantificador existencial ($\exists$) e o quantificador universal ($\forall$). Apesar de possuir apenas estes dois, outros quantificadores podem ser definidos por meio deles, aumentando o escopo das formalizações possíveis nesta lógica.

Como universo para a interpretação dos símbolos não lógicos – constantes, de predicados e funcionais –, a estrutura semântica da lógica clássica de primeira ordem trata com conjuntos arbitrários e não-vazios de indivíduos, sobre os quais se avalia se um termo ou fórmula é satisfazível e se uma sentença é verdadeira. Nestas estruturas, para que uma sentença geral quantificada universalmente seja verdadeira, é necessário que toda sequência de indivíduos do universo a satisfaça na estrutura; para que uma sentença geral quantificada pelo existencial seja verdadeira, é necessário que pelo menos um indivíduo do universo a satisfaça na estrutura.

Baseada em uma sintaxe e uma semântica rica, é fato que a lógica clássica de primeira ordem trata de vários conceitos matemáticos importantes e formaliza muitas expressões das linguagens naturais. Entretanto, diversos autores, tanto da área da linguística como da lógica, têm mostrado que existem expressões que não podem ser formalizadas apenas com os dois quantificadores lógicos, bem como qualquer outro derivado diretamente deles. Um dos primeiros autores que escreveram sobre quantificadores de um modo diferente dos apresentados na lógica clássica de primeira ordem foi Andrzej Mostowski, em 1957. Desde então, muitos outros trabalhos surgiram sobre novos quantificadores. Neste contexto, autores como Rescher (1962), Keisler (1970), Sgro (1977), Barwise e Cooper (1981), Carnielli e Veloso (1997), Grácio (1999), Grácio e Feitosa (2005), dentre outros, são responsáveis por importantes contribuições que serviram para aumentar o entendimento e o escopo das possibilidades de expressão da lógica clássica de primeira ordem.

Em artigo publicado em 1957, Andrzej Mostowski apontou a existência de quantificadores matematicamente interessantes, denominados *quantificadores generalizados*, porém não definíveis em termos dos quantificadores lógicos. Desde então, diversos trabalhos deram continuidade aos estudos dedicados às questões levantadas por este autor. Mencionamos o artigo de Keisler (1970), sobre o quantificador “existem incontáveis muitos”; os trabalhos de Sgro (1977) e de Garavaglia (1978), sobre lógicas topológicas; o artigo de Rescher (1962), que apresenta axiomática e semântica de um quantificador para a noção de maioria; a publicação de Peterson (1979), sobre o relacionamento entre “poucos”, “muitos”, “todos” e ”alguns”, por meio de quadrados (no sentido do quadrado de Aristóteles); os trabalhos de Sette, Carnielli e Veloso (1999) e Carnielli e Veloso (1997), referentes à lógica do ultrafiltro, para a capturar a noção de “quase todos”; e a tese de Grácio (1999) sobre uma família de lógicas para formalizar algumas formas de raciocínio indutivo, como “muitos” e “uma ‘boa’ parte”.

Na linguística, os estudos sobre a quantificação nas teorias das linguagens naturais possuem um papel central. Bach *et alii* (1995) apontam que toda linguagem natural apresenta algum meio de fazer declarações gerais.

Tratando da questão da quantificação no âmbito da linguagem natural, Barwise e Cooper (1981) identificam a categoria sintática das expressões substantivas da linguagem natural e os quantificadores generalizados da lógica. Eles argumentam que os quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são insuficientes para tratar de todas as sentenças quantificadas em uma linguagem natural. Defendem, desse modo, que uma lógica para a linguagem natural não pode se restringir à lógica clássica de primeira ordem. Barwise e Cooper (1981) sugerem que uma lógica para a linguagem natural precisa apresentar quantificadores que expressem noções, como: muitos, poucos, quase todos, quase nenhum, maioria, minoria, entre outras.

Neste contexto, as lógicas moduladas, apresentadas em Grácio (1999) e Carnielli e Grácio (2008), construídas a partir de perspectivas presentes em Sette, Carnielli e Veloso (1999) e Carnielli e Veloso (1997) e que tratam da formalização de quantificadores generalizados como “maioria”, “muitos” e “uma boa parte”, contribuem para a compreensão e representação de quantificadores existentes na linguagem natural, não expressáveis na lógica clássica de primeira ordem.

As lógicas moduladas de Grácio (1999) constituem um conjunto de lógicas monotônicas não-clássicas, obtidas pela inclusão de quantificadores destinados a capturar as noções de “muitos”, “uma ‘boa’ parte” e “maioria” na linguagem da lógica clássica de primeira ordem. A lógica do muito, em sua semântica, introduz a estrutura matemática *família fechada superiormente própria*, para modelar a noção de “muitos”, e a lógica do plausível introduz em sua semântica a estrutura matemática de *pseudo-topologia*, para interpretar a noção de “para uma ‘boa’ parte”.

A lógica dos ultrafiltros de Veloso e Carnielli (1997), e Sette, Veloso e Carnielli (1999), que formaliza os conceitos de “quase todos” ou “geralmente”, apesar de ser anterior e motivadora à proposição das lógicas moduladas, pode ser considerada, por suas características, uma particularização das últimas.

Neste trabalho, propõe-se um sistema lógico para a formalização de um novo quantificador modulado, o quantificador “poucos”, destinado a representar expressões das linguagens naturais que contenham a noção de “poucos”. Para tal, parte-se da lógica do muito em uma tentativa de dualizá-la, para a criação desta nova lógica.

No primeiro Capítulo desta Dissertação, aborda-se o conceito de quantificadores, sua origem e algumas das várias definições que diferentes autores deram, tais como Mostowski (1957), Barwise & Cooper (1981), Keisler (1970), entre outros, a fim de obter melhor entendimento acerca dos quantificadores e compreender como cada autor considerou a função principal dos quantificadores, para se obter um maior aporte para o desenvolvimento desta proposta.

O segundo Capítulo trata da lógica dos ultrafiltros, criada por Sette, Carnielli e Veloso (1997), que apresenta uma formalização para o quantificador “quase todos”, através da noção dos ultrafiltros, uma vez que este sistema formal foi parte da motivação de Grácio (1999) ao criar a lógica do muito, a qual utiliza apenas parte dos axiomas propostos na definição do quantificador de ultrafiltros. Ainda neste Capítulo, são apresentadas as lógicas moduladas propostas por Grácio (1999), tanto sua estrutura geral como suas particularizações, com ênfase na lógica do muito. Este capítulo constitui a base e o diálogo mais estreito com o novo sistema lógico proposto neste trabalho, uma vez que parte da tentativa de dualização da lógica do muito.

No Capítulo três, propõe-se uma lógica para a noção de poucos, a qual denominamos *lógica do poucos*. Inicialmente, é apresentada a noção de “poucos” adotada, para a qual se construiu um sistema lógico axiomático monotônico e não-clássico. Introduz-se também a estrutura matemática denominada *família quase fechada inferiormente* que, na semântica da lógica do poucos, interpretará o quantificador poucos. Para a formalização da lógica do poucos, apresenta-se sua axiomática, com linguagem, axiomas e regras, bem como a definição de conceitos fundamentais.

Ainda no Capítulo 3, são demonstradas a correção e completude da lógica do poucos, relativa à semântica aqui introduzida, bem como exemplos da aplicabilidade desta lógica para formalizar expressões quantificadas por “poucos”. Continuando a exposição sobre a lógica do poucos, analisam-se os aspectos duais entre a lógica do muito e a lógica do poucos. Observam-se ainda, quais Universais de Barwise e Cooper (1981) são satisfeitos pela lógica do poucos e finaliza-se o capítulo com uma pequena discussão sobre os diferentes conceitos de poucos que poderiam ter sido utilizados para criação da lógica do poucos.

Ao final da Dissertação, apresentam-se algumas considerações com uma síntese deste trabalho, os resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1. Sobre Quantificadores

Neste capítulo, apresentam-se algumas definições para a noção de quantificadores, a fim de se obter um maior aporte para os desenvolvimentos posteriores, por meio das contribuições conceituais e históricas que esses trabalhos oferecem para a discussão e/ou proposta de quantificadores não-clássicos.

Existem muitas expressões da linguagem natural que indicam quantidade, mas que não podem ser formalizadas por meio dos quantificadores clássicos $\forall$ e $\exists$, tais como "muitos", "poucos", "maioria" e "metade", entre outras, assim como expressões de infinitude, como os prefixos numéricos de fórmulas como "Para um número infinito enumerável x, $\varphi(x)$" ou "Para um número infinito não-enumerável x, $\varphi(x)$".

De acordo com o livro *Filosofia de La Lógica* (2007), sob coordenação de María J. F. Sanz, situações como essas levaram Mostowski, em 1957, a propor uma teoria de quantificadores generalizados que estende a teoria da quantificação clássica e outras expressões do mesmo tipo.

Incentivado pela proposta de Mostowski, em 1966, Lindström apresentou novas contribuições sobre os quantificadores generalizados. Contudo, estes dois autores ofereceram uma caracterização puramente matemática dos quantificadores.

A partir dos trabalhos sobre uma semântica formal de Montague, em 1974, os requisitos para um tratamento científico da semântica das linguagens naturais tornaram-se possíveis.

Partindo dos trabalhos de Mostowski, Lindström e Montague, Barwise e Cooper, em 1981, elaboraram uma primeira aproximação dos quantificadores da linguagem natural associados a uma teoria dos quantificadores generalizados. A partir destes trabalhos iniciais, muitos outros foram elaborados e, assim, elementos teóricos sobre quantificadores generalizados cresceram muito entre os lógicos, computólogos e linguistas de orientação matemática, assim como entre os filósofos da lógica.

Ainda de acordo com Sanz (2007), a primeira caracterização geral para uma teoria dos quantificadores generalizados é que estes formam uma categoria sintática à parte. Deste modo, se uma sentença quantificada é verdadeira em um modelo, isto não implica que os quantificadores que aparecem nela são interpretados neste mesmo modelo. "A sentença será ou não verdadeira dependendo das condições de satisfação da fórmula dominada pelo quantificador, isto é, por como se comporta a matriz do quantificador no modelo em questão" (SANZ, 2007, p. 164-165).

Neste contexto, a teoria dos quantificadores generalizados considera que os quantificadores são relações entre os subconjuntos de um conjunto dado, o qual funciona como um universo de quantificação. Portanto, as fórmulas quantificadas com quantificadores do tipo "muitos" e "poucos" variam em consonância com a variação do tamanho do universo que se propõe (SANZ, 2007, p. 165).

As relações que se identificam com os quantificadores generalizados podem ser de qualquer aridade, mas os quantificadores da linguagem natural são sempre operadores binários.

De acordo com SANZ (2007, p. 165), alguns quantificadores da linguagem natural podem ser definidos do seguinte modo:

> "Todos = $\{\langle U, X\rangle : X = U\}$
> Algum = $\{\langle U, X\rangle : X \subseteq U \text{ e } X \neq \varnothing\}$
> Há ao menos **n** indivíduos = $\{X \subseteq U: |X| \geq \mathbf{n}\}$
> A Maioria = $\{\langle X, Y\rangle: X \subseteq U \text{ e } Y \subseteq U \text{ e } |X \cap Y| > |X - Y|\}$".

Para os seguidores de Barwise e Cooper, os quantificadores pertencem a uma categoria sintática específica: a categoria das NP (expressões substantivas). Neste contexto, um quantificador generalizado (NP) é constituído pela junção de um determinante (muitos, poucos, maioria, etc.) com uma expressão predicativa que denota um conjunto/domínio de referência (SANZ, 2007, p. 166).

O Dicionário Oxford de Filosofia (1994, p. 328) apresenta a definição de *quantificador:* "informalmente, um quantificador é a expressão que assinala a quantidade de vezes que um predicado é satisfeito numa classe de coisas (i.e., num 'domínio')".

Segundo esse dicionário, "ao investigarmos a dieta de uma classe de crianças, poderíamos descobrir que todas, algumas ou nenhuma comem bolo". Nesse dicionário, lê-se ainda que "'Alguns' e 'todos' são representados na lógica moderna por quantificadores. O ponto importante é que este tratamento afasta a ideia de que termos como 'algo', 'nada' e seus cognatos são uma espécie de nomes" (BLACKBURN, 1994, p. 328).

Esses dois quantificadores da lógica clássica são interdefiníveis, ou seja, de um deles pode-se definir o outro. Deve-se entender o quantificador existencial ($\exists$x)... como a afirmação que "existe pelo menos um indivíduo do domínio que satisfaz a proposição", isto é, "existe alguma coisa que é..." e o quantificador universal ($\forall$x) como a afirmação que "todos os indivíduos do domínio satisfazem a proposição", ou seja, "todas as coisas do domínio são..." (BLACKBURN, 1994, p. 328).

Ainda no dicionário Oxford (1994, p. 328), os autores afirmam que "os quantificadores 'muitos' e 'poucos' são menos comuns e que se pode definir quantificadores matemáticos, tais como 'mais da metade...' e 'exatamente um...'" (BLACKBURN, 1994, p. 328).

Em termos formais, o texto em questão afirma que um quantificador liga uma variável e transforma uma fórmula aberta com *n* variáveis livres diferentes, em outra fórmula com *n-1* variáveis livres diferentes. Quando não restam variáveis livres, tem-se uma fórmula fechada, i.e., uma sentença que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa, num domínio. Como exemplo, o dicionário apresenta a fórmula aberta Fx $\wedge$ Gx, a partir da qual se pode formar a fórmula fechada ($\exists$x)(Fx $\wedge$ Gx), que significa que algo é simultaneamente F e G. A única variável, x, livre na primeira fórmula, fica ligada nas três ocorrências da segunda fórmula.

O conceito de quantificador e de quantificação também podem ser encontrados no Dicionário de Lógica (1995):

> De acordo com os dicionários (*e.g.*, Dicionário brasileiro da língua portuguesa, São Paulo, Melhoramentos, 1975), o termo 'quantificação' significa 'ato de quantificar'; 'quantificar', por sua vez, corresponde a 'exprimir em quantidade'. (Note-se que os dicionários, de modo geral, não registram 'quantificador'. Esse termo, no entanto, é de uso comum na lógica) (HEGENBERG, 1995, p. 170).

Ainda, segundo o Dicionário de Lógica (1995, p. 170),

> Sumariamente, quantificadores são palavras ou expressões que se prestam para indicar que houve quantificação. Ao lado de numerais, a língua comum admite inúmeros quantificadores. Entre eles, todos, muitos, alguns, vários, cada, um punhado, diversos, um determinado, etc. A Lógica tem se concentrado em dois desses quantificadores: 'todos' e 'alguns' (embora, é

> claro, em estudos especializados, outros quantificadores tenham sido considerados).
> Vários símbolos têm sido adotados para indicar a quantificação universal (correspondente a 'todos') e a existencial – que, preferentemente, seria denominada quantificação particularizadora (correspondente a alguns). Aqui será usado o 'A' invertido $\forall$ e o 'E' rebatido $\exists$, respectivamente.

Para Hintikka e Sandu (1994), o problema sobre o que é um quantificador remete ao início da lógica moderna. Segundo os mesmos autores, esse problema deu início ao que se chama lógica da quantificação. As respostas para este problema estão relacionadas a inúmeras teorias diferentes. Frege e Peirce são dois pensadores que dissertaram acerca dos quantificadores, porém cada um desenvolveu uma Teoria de Quantificação diferente.

Para Charles Sanders Pierce, a Teoria da Quantificação era vista apenas como uma ferramenta que poderia ser usada pelos lógicos em seus trabalhos. Já para Friedrich L. Gottlob Frege, os quantificadores serviriam para a criação de uma linguagem universal da matemática, que estaria de acordo com o pensamento humano em geral e de acordo com a linguagem natural, mas que não sofreria das ambiguidades e outras imperfeições que esta última apresenta (HINTIKKA; SANDU, 1994, p. 113).

Hintikka e Sandu (1994) classificam os quantificadores em três categorias. Na primeira, eles vêem os quantificadores como um *predicado de alta-ordem*. Sob este ponto de vista, o quantificador existencial que se conhece é usado em sentenças como $(\exists x)\ S(x)$, que tem o significado de que o predicado simples S(x) não é vazio. Segundo os autores, esta categoria remete a Frege, e sua sistematização e desenvolvimento foram essenciais para o presente trabalho, uma vez que os quantificadores generalizados lhe pertencem.

Em uma segunda categoria, denominada *Interpretações Substitucionais dos Quantificadores,* uma sentença do tipo $(\exists x)\ S(x)$ tem a importância de explicar em termos de conjuntos as diferentes instâncias-substitutivas que podem ocorrer na fórmula com variável livre S(x).

Uma terceira categoria, denominada *Quantificadores como Incorporadores de funções-escolha,* diz que os quantificadores servem para codificar adequadamente a escolha de funções universais. Este tipo de pensamento sobre os quantificadores foi o que instigou

David Hilbert, nas décadas de 20 e 30 do século XX, a desenvolver um trabalho com a finalidade de implementar um tipo de cálculo especial.

A terceira categoria apresentada é a escolhida e estudada por Hintikka e Sandu (1994), já que, para eles, ela dá a ideia de dependência dos quantificadores, sem a qual não se poderia, por exemplo, expressar as dependências funcionais em uma linguagem quantificacional.

Feitas essas considerações iniciais, este capítulo aborda três enfoques sob os quais podem ser tratados os quantificadores: *Quantificadores como estruturas matemáticas, Quantificadores associados à linguagem natural* e *Quantificadores e o quadrado das oposições*, em uma discussão mais conceitual.

1.1 Quantificadores como estruturas matemáticas

Um dos primeiros trabalhos elaborados sobre quantificadores foi o de Mostowski (1957), intitulado "On a generalization of quantifiers". Nele o autor denomina *quantificadores generalizados* os "operadores que representam uma generalização natural dos quantificadores lógicos" (MOSTOWSKI, 1957, p. 12).

Segundo essa definição, a classe dos quantificadores generalizados não exclui os quantificadores clássicos, mas amplia o rol de possibilidades de quantificadores.

Mostowski (1957) apresenta novos quantificadores e os utiliza para resolver alguns problemas da lógica clássica de primeira ordem. Cria, para tal, os conceitos de quantificadores limitados e de quantificadores ilimitados (ou somente quantificadores).

Definição 1.1.1 (MOSTOWSKI, 1957, p. 13) **"**Seja I um conjunto arbitrário, e seja φ uma função injetora de I em I dentro do conjunto I' (não necessariamente diferente de I). Um *quantificador limitado* de I é uma função Q que atribui um dos elementos ∇ (verdade) e Δ (falsidade) para cada função proposicional F em I com um argumento e que satisfaz a condição de invariância $Q(F) = Q(F\varphi)$, para cada F e cada permutação em I".

Definição 1.1.2 (MOSTOWSKI, 1957, p. 13) "Um *quantificador ilimitado* (ou somente quantificador) é uma função que atribui um quantificador QI limitado por I a cada conjunto I e que satisfaz a equação QI(F) = QI'(Fφ), para cada função proposicional F em I, com um argumento, e para cada mapeamento um a um de I em I'."

Apesar de introduzir os novos quantificadores generalizados, Mostowski (1957) deixou alguns problemas em aberto, entre eles, se seria possível um cálculo formal que pudesse demonstrar todas as sentenças que envolvem esses novos quantificadores.

Lindström (1966) apresentou outra conceituação referente a quantificadores generalizados em uma lógica de primeira ordem. Afirma:

> Um quantificador é uma classe Q de estruturas (relacionais) de tipo de similaridade $\tau \in \omega^n$, para algum $n > 0$, tal que Q é fechado sobre um isomorfismo. Cada quantificador Q corresponde a um símbolo quantificado **Q** e diferentes símbolos representam diferentes quantificadores. Quando τ é do tipo comum dos membros de Q, **Q** é considerado do tipo τ (LINDSTRÖM, 1966, p. 186).

A fim de formalizar uma lógica que tratasse desses quantificadores, o autor apresentou algumas definições.

Definição 1.1.3 (LINDSTRÖM, 1966, p. 186) Seja Q um conjunto de símbolos quantificados e τ um tipo de similaridade qualquer. A linguagem L_τ^Q é definida da seguinte maneira:

i. Uma sequência $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de variáveis (individuais);
ii. Para cada $i \in D\tau$, um predicado de constante $P_{i;}$
iii. O símbolo de identidade =;
iv. Os membros de Q;
v. Vírgulas e parênteses.

A noção de fórmula de L_τ^Q de Lindström (1966, p. 186) é definida por:

i. P_i, quando $i \in D\tau$, seguido por $\tau(i)$ ocorrências de variáveis é uma fórmula;
ii. $v_m = v_n$ é uma fórmula de para cada m e n;
iii. Se $Q \in \mathbf{Q}$, Q é do tipo de similaridade $\langle 1, 0, 2, 1\rangle$ e $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ são fórmulas, então: $Qv_k, v_m, v_n, v_r(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ é uma fórmula, e igualmente para símbolos quantificados de diferentes tipos;
iv. Nada mais é uma fórmula de L_τ^Q.

Lindström (1966) definiu uma *Q-fórmula* como uma fórmula com nenhum símbolo quantificado além dos membros de Q e uma sentença como uma fórmula sem ocorrências de variáveis livres, como usual.

1.2 Quantificadores associados à linguagem natural

Barwise e Cooper (1981) trataram dos quantificadores generalizados sob o aspecto da teoria da linguagem natural. Estes autores defendem que os quantificadores lógicos da lógica clássica de primeira ordem, a saber $\forall$ e $\exists$, são inadequados para tratar das proposições declarativas que envolvam quantificação por dois motivos básicos. Argumentam que existem sentenças que simplesmente não podem ser formalizadas por apenas esses dois quantificadores, e que a estrutura sintática de sentenças quantificadas no cálculo de predicados é diferente da estrutura sintática de sentenças quantificadas na linguagem natural.

Esses autores apresentam exemplos de expressões que não podem ser formalizadas usando apenas os quantificadores lógicos $\forall$ e $\exists$ como: “mais da metade”, ao enunciar “Mais da metade das flechas de John atingiu o alvo”; e “maioria”, ao enunciar “A maioria das flechas de John acertou o alvo”.

Segundo Barwise e Cooper (1981), sentenças como as anteriores não podem ser expressas em termos de $\forall$x(...x...) e $\exists$x(...x...). Isso não quer dizer que formalmente não se possam expressar essas sentenças, mas que a linguagem precisa ser mais rica para este fim.

Para conseguir expressar todas as sentenças em linguagem lógica, há duas opções distintas: ou se estende a linguagem pela inserção de novos quantificadores, que tenham a função de formalizar novas sentenças que antes não poderiam ser formalizadas com os dois quantificadores conhecidos ($\forall$ e $\exists$); ou se nega alguns dos fundamentos da lógica clássica de primeira ordem e se constrói uma nova, em que novas expressões possam ser formalizadas.

Na formalização de sentenças que contenham expressões como as exemplificadas, seria preciso apenas estender a lógica, não necessitando excluir ou negar nenhum de seus axiomas ou princípios.

No desenvolvimento do trabalho, Barwise e Cooper (1981) distinguem determinantes de quantificadores. Para eles, termos como “maioria” e “mais que a metade” não são, sozinhos, quantificadores; são determinantes. Um quantificador, segundo os autores, é a união de um determinante e alguma expressão de conjunto, como “aves”, “homens” “baleias”, “astronautas”, “mulheres da terceira idade”, etc.

Neste trabalho, adota-se uma visão distinta daquela dos trabalhos desses autores, uma vez que expressões do tipo “mais que a metade”, “muitos” e “maioria” representam por si só o que se denomina de quantificadores, assim como concebido por Grácio (1999).

Segundo Barwise e Cooper (1981), quantificadores não são necessariamente símbolos lógicos. Um exemplo que pode ser dado está na seguinte sentença: “Mais da metade dos inteiros não são primos”.

Esses autores sustentam que alguns determinantes não são símbolos lógicos pelo fato de a verdade ou falsidade da sentença não depender *a priori* da lógica, mas depender de qual medida adicional de conjuntos infinitos é usada, medida esta que deve ser incluída como parte do modelo, antes de estas sentenças terem algum valor de verdade estabelecido.

Em seu trabalho, Barwise e Cooper (1981) apresentam dez Universais referentes aos quantificadores. Segundo os autores, os Universais são “fatos que se conservariam para todas as linguagens humanas naturais e que as distinguiriam de outras linguagens logicamente possíveis” (Barwise, Cooper, 1981, p. 176). A seguir, apresentam-se os Universais e algumas definições para um melhor entendimento.

Universal 1: NP - Quantificador Universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 177): Toda linguagem natural tem elementos sintáticos, denominados *expressões substantivas* (NP), como substantivos, adjetivos, expressões adverbiais, etc., cuja função semântica é expressar quantificadores generalizados sobre o domínio de discurso.

Um universal não serve apenas para se saber o que é ou não verdade em todas as linguagens naturais, mas também para distinguir as linguagens naturais das demais.

Antes de se introduzir o segundo Universal, deve-se ter em mente que uma frase que ocorre em uma posição deslocada remete a fenômenos associados a regras semânticas relacionadas à ligação de variáveis por quantificadores e não por meio das regras de circulação, como seria explicado pela gramática transformacional proposta por Chomsky (1980), deste modo, entende-se que a análise apenas do determinante não é suficiente para se saber o significado completo do quantificador, deve-se analisar todo o escopo da NP.

Universal 2: Frase Deslocada Universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 178): Se uma linguagem permite frases que ocorram em uma posição deslocada associada com uma regra de vinculação de variável, então as últimas NPs ocorrem nesta posição.

Uma regra de vinculação de variável seria uma regra que ligaria os determinantes (muitos, poucos, maioria, etc.) às expressões substantivas, formando assim os quantificadores. É claro que em uma linguagem em que os determinantes por si só são considerados quantificadores, quando se deslocam os determinantes, deve-se deslocar também as expressões substantivas.

Para o próximo Universal, é necessário adotar os seguintes conceitos. A denotação ||Q||, de um quantificador Q, pode ser informalmente especificada como segue. Seja E o conjunto de entidades providas pelo modelo. Então,

$||\exists|| = \{X \subseteq E : X \neq \varnothing\}$

$||\forall|| = \{E\}$

||Finito|| = {X $\subseteq$ E : X é finito}

||Mais que a metade de N|| = {X $\subseteq$ E : X contém mais que a metade de N}

||Maioria de N|| = {X $\subseteq$ E : X contém maioria de N}.

Definição 1.2.1 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 178): Em um modelo M = (E, || ||), um quantificador Q *vive em* um conjunto A $\subseteq$ E se Q é um conjunto de subconjuntos de E com a propriedade que, para qualquer X $\subseteq$ E:

$$X \in Q \Leftrightarrow (X \cap A) \in Q.$$

Universal 3: Determinante Universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 179): Toda linguagem natural contém expressões básicas, chamadas determinantes, cuja função semântica é atribuir a denotações de substantivos de contagem comum (conjuntos) A, um quantificador que vive em A**.**

Tem-se que “maioria”, “muitos”, “poucos”, etc..., são exemplos de determinantes. Nas lógicas moduladas de Grácio (1999), expressões como “muitos” e “maioria” são tratadas como quantificadores, assim como “poucos” também será tratado, neste trabalho, como um quantificador.

Para o próximo Universal, uma definição referente ao conceito de “peneira” é apresentada no trabalho de Barwise e Cooper (1981).

Definição 1.2.2 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 179): Seja Q um quantificador em um modelo M = (E, || ||). Chama-se Q de *peneira* ou *próprio* quando Q é um subconjunto próprio não-vazio de P(E), onde P(E) = {X: X $\subseteq$ E}.

Esta é uma propriedade que se aplica para quantificadores como denotações de NPs, mas não para as próprias NPs, por isto, trata-se de uma propriedade semântica.

O quadro seguinte mostra as condições sobre as quais várias NP’s podem falhar ao denotar quantificadores próprios. Fixado um modelo M = (E, || ||), a primeira coluna indica, pelo “sim” ou “não”, se o quantificador jamais pode ser $\emptyset$. A segunda coluna indica se ele pode sempre ser P(E). As colunas 3 e 4 dão as condições para o quantificador ser próprio.

Quadro 1. Expressões NP e suas principais Condições

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
		Pode a NP denotar ∅?	**Quando denota uma peneira?**	**Descrição informal de (2)**	**Fácil ou difícil interpretar como uma não-peneira?**	**Determinante Fraco ou Forte[1]**
1.	Todo η	Não	$\|\| \eta \|\| \neq \emptyset$	Há alguns η	Difícil	Forte
2.	Algum η	Sim	$\|\| \eta \|\| \in \|\|$Algum η$\|\|$	Há alguns η	Fácil	Fraco
3.	Maioria η	Não	$\|\| \eta \|\| \neq \emptyset$	Há alguns η	Difícil	Forte
4.	Muitos η	Sim	$\|\| \eta \|\| \in \|\|$Muitos η$\|\|$	Há muitos η's	Fácil	Fraco
5.	Poucos η	Não	$\|\| \eta \|\| \notin \|\|$Poucos η$\|\|$	~(Há poucos η's)	Fácil	Fraco
6.	O único η	Não	Card($\|\|\eta\|\|$) = 1	Indefinido a menos que haja exatamente um η	Impossível	Forte
7.	Ambos η	Não	Card ($\|\| \eta \|\|$)= =2	Indefinido a menos que haja exatamente dois η	Impossível	Forte

Fonte: Barwise e Cooper (1981)

[1] Determinante forte ou fraco, definição 1.2.3.

De acordo com o Quadro 1, **O único η** (linha 6) e **ambos η** (linha 7) sempre denotam um quantificador próprio, quando eles denotam alguma coisa. Estes são casos especiais de um fenômeno geral que Barwise e Cooper (1981) tentaram capturar com o quarto Universal.

Universal 4: Restrição sobre Determinantes que criam NPs indefinidas (BARWISE; COOPER, 1981, p. 181): Seja D um determinante e ||D||(A) a família de conjuntos Q com a propriedade $X \in Q$ se e somente se $(X \cap A) \in Q$, tal que ||D||(A) é algumas vezes indefinido, então:

1. Sempre que ||D||(A) é definido, ||D||(A) é uma "peneira";
2. Há um determinante simples D^+ tal que $||D^+||(A)$ é sempre definido e sempre que ||D||(A) é definido, $||D||(A) = ||D^+||(A)$.

Isto sugere que o determinante parcial (determinante 6 do quadro 1) D funciona semanticamente como seu acabamento D^+ (o acabamento de O único η é tudo) com a importância que ambos, D e D^+, denotam "peneiras". O acabamento de η e ambos η é *todos*, o acabamento de nem um e nem outro não existe.

Novamente, antes de se introduzir o quinto Universal devem-se apresentar algumas definições necessárias para o seu entendimento.

Definição 1.2.3 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 182): Um determinante D é *positivamente forte* (ou *negativamente forte*, respectivamente) se para todo modelo $M = (E, || \ \ ||)$ e todo $A \subseteq E$, se o quantificador ||D||(A) é definido então $A \in ||D||(A)$ (ou $A \notin ||D||(A)$, respectivamente). Se D não é (positivamente ou negativamente) forte, então ele é fraco.

Definição 1.2.4 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 183): Um determinante D é *definitivo* se para todo modelo $M = (E, || \ \ ||)$ e todo A tal que ||D||(A) é definido, há um conjunto não vazio B, de maneira que ||D||(A) é a "peneira" $\{X \subseteq E \mid B \subseteq X\}$.

Definição 1.2.5 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 184): Um quantificador Q é *monotônico crescente* (mon ↑) se $X \in Q$ e $X \subseteq Y \subseteq E$ implica $Y \in Q$. Q é *monotônico decrescente* (mon ↓) se $X \in Q$ e $Y \subseteq X \subseteq E$ implica $Y \in Q$.

Universal 5: Monotonicidade da correspondência universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 186): Há um simples NP que expressa a mon ↓ do quantificador ~Q se, e somente se, há uma simples NP com um determinante não-cardinal fraco que expressa a mon ↑ do quantificador Q.

Este Universal sugere algumas relações entre determinantes.

Quadro 2. Exemplos de relações de monotonia entre algumas expressões NP.

Mon ↓ Q	Mon ↑ Q
Nenhum homem(ns)	Algum(ns) homem(ns) Um homem
Poucos homens	Muitos homens
Ninguém	Alguma pessoa

Passando para o Universal seguinte, tem-se que uma NP simples (ou expressão substantiva simples) pode ser analisada como um quantificador monotônico ou um conjunto de quantificadores monotônicos.

Universal 6: Monotonicidade Restrita (BARWISE; COOPER, 1981, p. 187): As NPs simples de qualquer linguagem natural expressam quantificadores monotônicos ou conjunções de quantificadores monotônicos.

Este Universal foi proposto para afastar muitos quantificadores logicamente possíveis como denotações de NP's simples. Um exemplo seria o caso de *um mesmo número de homens, um par de homens, três homens, todos, exceto um homem*. Barwise e Cooper (1981) entendem que é improvável que na linguagem natural algum determinante básico tenha um significado para *um par de*, *exatamente três* ou *todos, exceto um.*

Universal 7: Determinante forte restrito (BARWISE; COOPER, 1981, p. 188): Em linguagens naturais, determinantes positivamente fortes são monotônicos crescentes. Determinantes negativamente fortes são monotônicos decrescentes.

Este Universal dá a ideia do comportamento de determinantes fortes. Pode-se enunciar uma proposição para se ter uma ideia desse comportamento.

Proposição 1.2.6 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 186): Se D (determinante) é positivamente forte e monotônico crescente, então, para cada modelo $\mathtt{M} = (E, \| \ \|)$ e cada conjunto A, B, em $\mathtt{M}$:

$$B \in \|D\|(A \cap B).$$

Se D é negativamente forte e monotônico decrescente, então:

$$B \notin \|D\|(A \cap B).$$

O próximo Universal necessita por sua vez da definição de determinante persistente.

Definição 1.2.7 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 193): Um determinante D é *persistente* se para todo $\mathtt{M} = (E, \| \ \|)$, e todo $A \subseteq B \subseteq E$, se $X \in \|D\|(A)$, então $X \in \|D\|(B)$. (Por outro lado, D é *anti-persistente* se $A \subseteq B \subseteq E$ e $X \in \|D\|(B)$ implica $X \in \|D\|(A)$.

Universal 8: Determinante Persistente Universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 193): Todo determinante persistente da linguagem humana é mon $\uparrow$ e fraco.

Barwise e Cooper (1981) mostram em seu trabalho que não é difícil construir determinantes artificiais que fazem o oitavo Universal falhar. Se o oitavo Universal for verdadeiro, então ele fornece outra restrição sobre a classe das linguagens humanas entre a classe de todas as linguagens possíveis.

Para se analisar o penúltimo universal, é necessário definir o dual de um quantificador.

Definição 1.2.8 (BARWISE; COOPER, 1981, p. 197): O *dual* de um quantificador Q, em E, é o quantificador Q* definido por $Q^* = \{X \subseteq E \mid (E - X) \notin Q\}$, i.e., $Q^* = {\sim}(Q{\sim}) = ({\sim}Q){\sim}$. Se $Q = Q^*$, então Q é chamado *auto-dual*.

Universal 9: Restrição ao negar quantificadores auto-duais e mon ↓ (BARWISE; COOPER, 1981, p. 198): Se uma linguagem tem uma construção sintática cuja função semântica é negar um quantificador, então esta construção não será usada com NPs que expressam quantificadores auto-duais ou mon ↓.

Por meio desse Universal, pode-se dualizar uma sentença como “Mais que a metade de N” com a sentença “Pelo menos metade de N”.

Se ||D|| é uma interpretação do determinante, então é possível definir ||D’||(A) = ||D*||(A). Como um exemplo, ||alguns’|| = ||todo|| e ||todo*|| = ||alguns||.

Apesar de não poderem explicar porque o décimo universal é verdadeiro, como não foram achados contra-exemplos, Barwise e Cooper (1981) elaboraram o seguinte.

Universal 10: Quantificador Dual Universal (BARWISE; COOPER, 1981, p. 198): Se uma linguagem natural tem um determinante básico para cada D e D’, então esses são semanticamente equivalentes a “alguns” e “todo”.

Uma aparente exceção a este Universal é o par “1”, “1”(quantificador de número cardinal 1, apenas uma unidade). Isso porque “1” é auto-dual. A exceção é aparente porque quando o “1” é definido ele é semanticamente equivalente a ambos, alguns e todo.

Outro estudioso que se interessou pela temática sobre quantificação foi Johan Van Benthem (1984). Em seu trabalho intitulado “*Questions about Quantifiers*”, considera que quantificadores generalizados são designados como segue.

Definição 1.2.9 *Quantificadores generalizados* são dados por “Qualquer função Q que atribua a cada conjunto E uma relação binária Q_E entre subconjuntos de E” (BENTHEM, 1984, p. 445).

Essa definição não designa realmente todas as funções que tratam de quantificação. Para isto, ele atribuiu outras definições a serem seguidas pela função Q_E; uma delas é a Quantidade, que diz que “apenas o montante envolvido nos conjuntos deve importar” (BENTHEM, 1984, p. 445). Isto por sua vez será formalizado por: Q_EAB see $Q_{E'}$F[A]F[B], sendo F todas permutações de um conjunto E, A e B $\subseteq$ E e [A] o conjunto de indivíduos que formam a extensão do predicado “A” no modelo.

Outra definição a ser seguida pelo quantificador Q_E é a de conservatividade. O termo esquerdo da equação anterior em uma declaração quantificada tem papel especial, já que ele é que limita o "campo de ação". Assim:

Definição 1.2.10 (BENTHEM, 1984, p. 446) Para todo conjunto E, com A, B $\subseteq$ E, tem-se:

$$Q_E AB \Leftrightarrow Q_E A(B \cap A)$$

Entretanto, estas duas definições ainda não são suficientes para o que Benthem (1984) considera ser um quantificador. Então, uma terceira definição foi necessária. Esta seria, segundo o autor, a definição de Variedade:

Definição 1.2.11 "Para todo conjunto não-vazio E, existe A $\subseteq$ E tal que $Q_E EA$, mas também A' $\subseteq$ E sem que $Q_E EA'$ "(BENTHEM, 1984. p. 446).

Com essas definições, Benthem (1984) considerou ter apresentado uma forma geral aos quantificadores generalizados, de modo que fosse possível diminuir a classe de relações Q_E para algo mais intuitivo sobre o que se entende a respeito de quantificadores.

Ainda com ênfase na abordagem de quantificadores na linguagem natural, há o trabalho de Higginbotham (1995), que é um autor preocupado em discutir a diferença entre termos de massa e quantificadores de expressões substantivas de massa, como "mais ouro" e "um pouco de água". Além disso, ele difere entre quantificadores de contagem e quantificadores de massa, substantivos de contagem e substantivos de massa. Alguns exemplos de substantivos de massa são os seguintes:

(1) Este material é de ouro
(2) Esta é uma poça de água.

Ouro e água são substantivos de massa e têm extensão. Assim, um quantificador aplicado a estes substantivos, nos diz quanto – em que intensidade de massa – de ouro e água nós temos. Porém, intuitivamente, não é possível combinar quantificadores que têm a ver com números – contagem –, com substantivos de massa, como os exemplificados em (1) e (2), pois se têm expressões que não são próprias – ou bem formadas – na linguagem natural, como as seguintes:

(3) Um ouro é valioso.
(4) Uma água é uma poça.

Pergunta-se, então: por que não se pode contar ouro ou água?

Não é fácil responder a essa questão, mas é possível quantificar esses substantivos de massa, inserindo à frente deles algum outro substantivo ou expressão que se possa quantificar, como: "Tipo de ouro" e "Copo de água". Estas últimas expressões aceitam determinantes como "um", "dois", já que ambos ─ tipo e copo ─ são substantivos contáveis. Outros substantivos contáveis podem ser colocados à frente dos substantivos de massa para que se possa fazer a contagem. Exemplos: um tipo, amostra, taça, xícara, copo, entre outros.

É importante lembrar que, quando se associam os substantivos de massa a uma medida específica, se podem ocultar os substantivos de contagem a sua frente, como em "três cervejas". Apesar de não possuir um substantivo de contagem à frente, quando se lê ou se ouve a expressão "três cervejas", associa-se imediatamente à expressão "três garrafas de cerveja", ou seja, o substantivo de contagem "garrafa" para que a expressão "três cervejas" possa ser contável está oculto/subentendido. Este caso não acontece com todos os substantivos de massa, já que nem sempre existe uma medida padrão que associe o substantivo de massa a um de contagem, como em "três sais".

No caso de não se utilizarem substantivos contáveis à frente de substantivos de massa, deve-se substituir os quantificadores de contagem pelos quantificadores de massa, como: muito, pouco, algum, quase todo, etc. Eliminam-se, assim, expressões desnecessárias ou que não correspondem exatamente ao que se deseja argumentar, ou mesmo quando não se consegue atribuir exatamente um número cardinal ao substantivo em questão e, ainda sim, se pretende dar uma noção sobre a quantidade existente.

Desse modo, Higginbotham (1995) definiu dois tipos de forma que um quantificador pode assumir.

"Um quantificador pode ser chamado de quantificador de massa ou contagem e depende de ele poder ocorrer em substantivos destas mesmas categorias" (HIGGINBOTHAM, 1995, p. 385).

Assim, para definir os quantificadores de massa, todos eles devem ter formas universais ocultas em seu entendimento. Por outro lado, para quantificar estes objetos, é preciso seguir algumas definições:

> Seja D um conjunto não-vazio, que será o domínio de quantificação. Um quantificador restrito Q sobre D é interpretado por uma função f_Q de pares ordenados de subconjuntos de D em valores de verdade. Quantificadores, como o próprio nome sugere, importam-se apenas sobre quantas coisas estão sobre o predicado sobre o qual estão em construção, e também satisfazem a condição de Mostowski, onde os quantificadores respeitam permutações de domínio sobre os quais estão definidos. Formalmente, a condição diz que se α é uma permutação ou automorfismo de D, então para todo conjunto A e B de D:
>
> $$f_Q(A,B) = f_Q(\alpha(A), \alpha(B))$$
>
> Se S é um conjunto, então |S| é o número cardinal de S. Se A e B são subconjuntos de D, pode-se associar com eles o diagrama cardinal, a quádrupla
>
> $$c_1 = |A \cap B|,\ c_2 = |A \cap -B|,\ c_3 = |-A \cap B|,\ c_4 = |-A \cap -B|$$
>
> (HIGGINBOTHAM, 1995, p. 397).

Nas expressões acima apresentadas por Higginbotham, A e B são subconjuntos de D – domínio de quantificação –, c_1 representa o número cardinal associado à conjunção dos conjuntos A e B; c_2 representa o cardinal associado à conjunção de A e do complementar de B; c_3 representa o número cardinal associado à conjunção de B e do complementar de A; e c_4 representa o número cardinal associado à conjunção dos complementares de A e B.

Para *k*, *n*, *r* e *s* inteiros positivos, de acordo com Higginbotham (1995), podemos interpretar os seguintes quantificadores por:

Todos	____	$c_2 = \varnothing$
Alguns	____	$c_1 \neq \varnothing$
Maioria	____	$c_1 > c_2$
Muitos_1	____	$c_1 > n$
Muitos_2	____	$c_1/c_1+c_2 > r$
Poucos_1	____	$c_1 < k$
Poucos_2	____	$c_1/c_1+c_2 < s$

Após estas primeiras interpretações, Higginbotham (1995) construiu um *Diagrama Booleano* de pares ordenados de elementos M e Γ (que representam os subconjuntos do domínio de quantificação), análogos ao *diagrama cardinal* para apresentar algumas outras definições sobre quantificadores, aumentando o número de interpretações de “muitos”, “poucos”, “maioria”, etc., e conclui o que segue acerca dos quantificadores:

(1) Nenhum quantificador que envolve número cardinal pode ocorrer no sistema de massa (onde só existem substantivos de massa).

(2) Uma noção de medida é necessária para expressar o significado de todos os quantificadores de massa (por isto, é criado o *diagrama cardinal*).

(3) É possível desenvolver uma álgebra e significado para os quantificadores de massa, de modo que eles possam satisfazer a *condição de Mostowski* e ainda haver uma analogia direta entre os quantificadores de massa e os quantificadores de contagem.

Esta terceira conclusão vem do fato de que o domínio da quantificação generalizada é inseparável do conceito de número, pois mesmo nas situações em que não utilizamos o número em si, mas palavras como “maioria”, “muitos” e “poucos”, há subjacente o conceito de número. Para entender melhor estes termos pode-se utilizar a geometria, como proposto por Rescher e Gallagher (1965), em que o quantificador “maioria” pode ser visto do seguinte modo: A Maioria de A é B diz que a maioria da região marcada “A” também é marcada como “B”. Assim, se alguém quiser ir da região que é “A e B” para a região “A e não B” irá para uma região menor do que aquela em que estava anteriormente.

Deste modo, existem algumas definições de “muito”, “pouco” e “maioria”, de acordo com o cardinal de um conjunto. Esta é uma maneira bem diferente da que se imagina a formalização do quantificador “poucos”, que é apresentada neste trabalho, e diferente também da formalização do quantificador “muitos”, apresentado em Grácio (1999), mas que mostra as diferentes formas de tratar os quantificadores.

Na seção seguinte, será analisado o quadrado das oposições e sua importância para os estudos relativos às relações entre os quantificadores.

1.3 Quantificadores e o quadrado das oposições

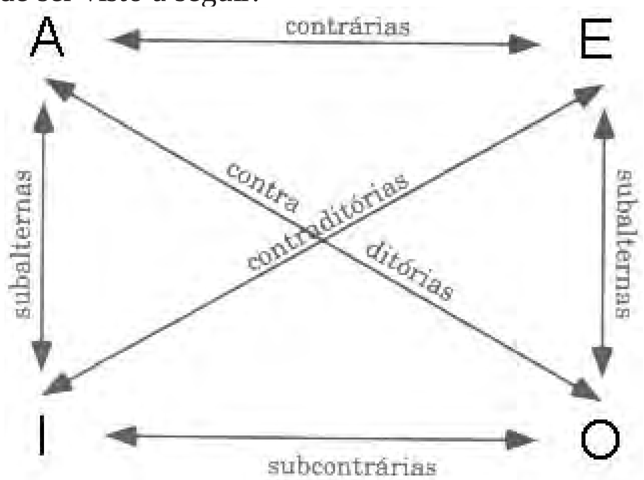
A seguir, analisa-se o significado das palavras “poucos”, “muitos” e “maioria”, de acordo com a concepção de Peterson (1979), que faz uma correspondência com o quadrado das oposições, de Aristóteles.

Vários motivos podem ser explicitados para o tratamento desses termos, entre eles os motivos puramente lógicos, uma vez que o cálculo de predicados de primeira ordem não consegue formalizar as inferências que contêm esses termos. Motivos relativos à linguagem natural podem ser também alegados, já que o estudo de tais expressões seria importante para uma aproximação da representação semântica, a partir da aproximação da descrição linguística desses termos.

Sintaticamente, “poucos”, “muitos” e “maioria” têm a função de quantificadores, como visto até agora. Aborda-se, então, o significado destes termos e a ligação entre eles.

A fim de analisar o significado desses quantificadores, verifica-se o que acontece com a negação de expressões que contenham esses termos. Usa-se então o quadrado das oposições, de Aristóteles, que é perspicaz na introdução de conceitos fundamentais que contenham oposição e contrariedade.

Um esquema básico do quadrado das oposições entre as proposições categóricas, de Aristóteles, pode ser visto a seguir.



Em que:

A = Todo S é P.

E = Nenhum S é P (Todo S é não P).

I = Algum S é P.

O = Algum S é não P.

As formas A e E são consideradas proposições “universais” e as formas I e O, “particulares”. O interessante no quadrado das oposições é sua forma de cantos opostos, seja pela qualidade do enunciado (afirmativo ou negativo), seja pela quantidade (universal ou particular). Tem-se que uma proposição p *contradiz* uma proposição q do quadrado se, e somente se, as duas possuírem valores de verdade diferentes. Uma proposição p é *contrária* a uma proposição q se ambas puderem ser falsas ao mesmo tempo, mas não ambas verdadeiras. Quando as proposições p e q podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo, mas não ambas falsas, diz-se que são *sub-contrárias*.

Assim, no quadrado de Aristóteles, A e O são contraditórias, A e E são contrárias e I e O são sub-contrárias.

Para se abordar as noções de “poucos”, “muitos” e “maioria”, por meio de um quadrado de oposições, é necessário analisar, inicialmente, outros recursos desse quadrado. Primeiro, a existência é relevante, ou seja, não se está falando de proposições ou sentenças vazias de elementos que as satisfaçam. Segundo, o vínculo do universal ao particular somente pode ser assegurado se o quantificador das formas particulares for interpretado em sentido amplo, ou seja, “algum” deverá ser interpretado como “um ou mais”. Isto se faz necessário para que proposições do tipo A impliquem proposições do tipo I, e proposições do tipo E impliquem sentenças do tipo O. Assim, “todas as pessoas são mentirosas” implica que “uma ou mais pessoas são mentirosas”.

Agora, analisam-se os termos “poucos” e “muitos”. Trata-se “poucos” com posição análoga a “todos”, ao se utilizarem recursos do quadrado de Aristóteles. O que seria então negar uma expressão do tipo “poucos S são P”? Seria algo como “muitos S são P”? Essas duas expressões representam uma contradição entre elas? Dir-se-á que sim. Têm-se, então, proposições contraditórias. E as contrárias? Diz-se que uma proposição é contrária ao tipo “poucos S são P” se ela for do tipo “poucos S são não P”.

Pergunta-se: o que “poucos S são P” implica? Analise-se, então, se implica “Muitos S são não P”. Logo, nesta condição, tem-se o seguinte quadrado das oposições:

A: Poucos S são P	E: Poucos S são não P
I: Muitos S são não P	O: Muitos S são P

Esse esquema de construção do quadrado contendo expressões como “poucos” e “muitos” é adotada para conseguir as relações originais de contradição, contrariedade e subalternação (ou implicação) contidas no quadrado de Aristóteles. A seguir, um exemplo de aplicação deste quadrado.

A: poucos políticos são honestos. E: poucos políticos são não honestos.
I: muitos políticos são não honestos. O: muitos políticos são honestos.

Verifique-se, agora, se as formas A, E, I e O têm as características das originais do quadrado de oposições, de Aristóteles.

No caso particular da noção de poucos, A e E não podem ser ambas verdadeiras, pois se “poucos são”, entende-se como “apenas poucos, e não mais”, portanto não pode ser verdade também que “poucos não são”. Ambas também podem ser falsas, pois pode acontecer o caso de não serem “poucos são” e “poucos são não”. Assim, A e E podem ser ditas contrárias.

Analisando a subalternação, é possível afirmar claramente que se “poucos políticos são honestos”, então seu complementar em relação ao universo é grande e, portanto, “muitos são não”, isto é, “muitos políticos são não honestos”. Do mesmo modo, se “poucos políticos são não honestos”, também se pode dizer que “muitos políticos são honestos”, assim a subalternação de A para I e de E para O acontece.

Agora, a sub-contrariedade: Será que as formas I e O podem ser ambas verdadeiras? Sim, basta não entender “muitos” como “maioria”. Assim, se existem políticos suficientes (mais de 100, por exemplo), pode-se dizer que muitos são honestos e muitos são não honestos, sem apresentar inconsistência.

Para completar o quadrado com seus recursos, as formas A e O (e E e I) devem ser contraditórias. Isto acontece porque a expressão “não muitos” possui o significado de “poucos” e negar “não poucos” significa “poucos”, no sentido de “poucos ou mais” e não “somente poucos”. Para melhor compreensão, pode-se reescrever as formas A e O. A forma A fica do tipo “não muitos políticos são honestos”, que possui a mesma interpretação semântica de “poucos políticos são honestos”. Desse modo, “não muitos políticos são honestos” da forma A, contradiz a forma O: “muitos políticos são honestos”. Para as formas E e I a análise é análoga.

É importante lembrar que as formas A e E devem ser do tipo “poucos” e as formas do tipo I e O, do tipo “muitos”, uma vez que o inverso da relação de implicação não ocorre.

Completado o quadrado e reafirmados seus recursos, coloca-se outro quantificador como “maioria” nesse quadrado das oposições. Considere-se o seguinte:

Se “poucos S são P”, então isso implica que “a maioria de S é não P” (Do mesmo modo que “poucos S são não P” implica que “a maioria S é P”). Aplicando isto e substituindo “poucos S são não P” por “a maioria S é não P” e “poucos S são P” por “a maioria S é não P”, e invertendo o quadrado (colocando A em E, e I em O), obtém-se:

A: A maioria de S é P	E: A maioria de S é não P
I: Muitos S são P	O: Muitos S são não P

Reescrevendo a expressão “maioria” por “maior parte”, a fim de se traduzir cardinalmente esta noção, reapresenta-se este quadrado, acrescentando também a noção de qualidade e quantidade:

	Afirmativo	**Negativo**
Quase Universal	A A maior parte de S é P	E A maior parte de S é não P
Mais do que Particular	I Muitos S são P	O Muitos S são não P

Este quadrado é interessante, pois, apesar de mostrar apenas os quantificadores “maioria” e “muitos”, subentende-se que “maioria” tem uma ligação com “poucos”, podendo assim ser substituído quando for necessário sem perda do valor semântico.

1.3.1 Relacionamento entre os “quadrados”

Nesta seção, relaciona-se o quadrado original de Aristóteles, contendo “todo” e “alguns” com o quadrado criado anteriormente, contendo “maioria” e “muitos”. Para isso, tem-se a seguinte sequência de implicações: “Todo S é P” implica que “A maioria S é P” que implica “muitos s são P” que, por sua vez, implica que “alguns S são P”. Todas as implicações estão inseridas na figura seguinte.

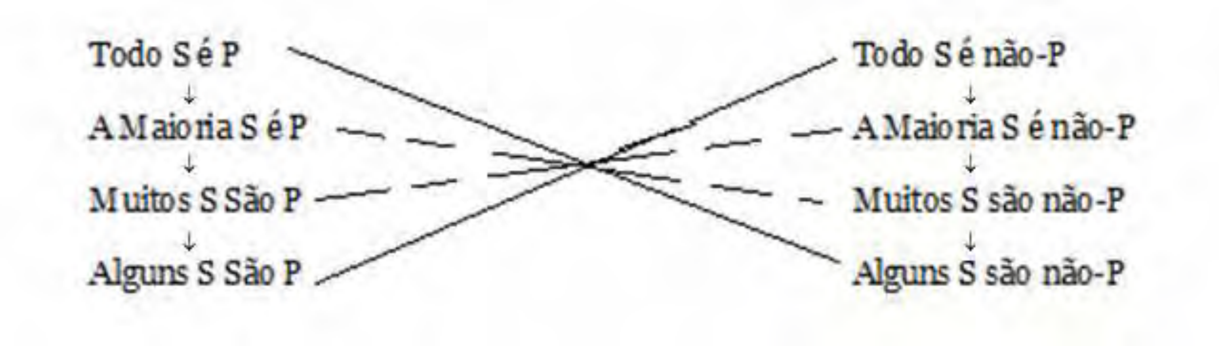


Figura 1. Relações entre proposições que expressam quantificações

Constata-se que o quadrado criado contendo “maioria” e “muitos” ocorre dentro do quadrado de Aristóteles.

A seguir, aborda-se outro tipo de negação, que não seja por contradição ou contrariedade: a negação quantificacional.

Para negar uma proposição com um quantificador, basta colocar a expressão “não” à frente da frase e escolher outro quantificador qualquer que não seja aquele que esteja sendo negado. Por exemplo:

$$\text{Não (Todo S é P)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Alguns} \\ \text{Muitos} \\ \text{Maioria} \end{array} \right\} \text{S é P}$$

Em relação a esses quantificadores de negação, é importante observar que o “poucos” não pode ser usado como um deles. Exemplo: caso se afirme que “muitas mulheres são bonitas”, então se negaria com “poucas mulheres são bonitas”, o que seria o mesmo que dizer que “a maioria das mulheres não é bonita”. Essa última proposição, comparada com a primeira, leva a uma contradição, ou seja, não é mais uma negação quantificacional, mas uma negação que leva a uma contradição, diferente da que se está querendo mostrar, a aplicação do “poucos” muda a estrutura da negação de uma maneira muito diferente dos outros quantificadores. Isto significa que “poucos” é algo a mais do que um quantificador de negação, ele consegue contradizer a proposição inicial.

Verifique-se, pois, se a negação de alguns quantificadores implica em outros quantificadores. Por exemplo: a negação do quantificador “todos” implica na existência dos quantificadores “alguns não”, “muitos não” e “a maioria não”, ou o que acontece é o contrário? A negação dos quantificadores “alguns não”, “muitos não” e “a maioria não” implica no quantificador “todos”?

Examinem-se os esquemas que seguem:

$$\text{Nem Todos} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Alguns}\\ \text{Muitos}\\ \text{Maioria}\end{array}\right\} \text{Não}$$

Figura (2)

Considerando a figura (2) com respeito à alternativa “maioria”: a negação de “todos”, no caso, “nem todos” não implica que “a maioria não é”. Por exemplo: se a frase “nem todos os políticos são mentirosos” for considerada verdadeira, não significa que “a maioria não é mentirosa”; se houver apenas um político que não seja mentiroso, então a frase “nem todos os políticos são mentirosos” será verdadeira; mas a proposição “a maioria dos políticos não é mentirosa” é falsa (o exemplo é o mesmo, substituindo maioria por muitos).

$$\text{Não} \left\{\begin{array}{l}\text{Alguns}\\ \text{Muitos}\\ \text{Maioria}\end{array}\right\} \text{Não} \longrightarrow \text{Todos}$$

Figura (3)

Considerando agora a figura (3): se a frase “não é o caso que a maioria dos políticos não é mentirosa” for considerada verdadeira, então a frase “a maioria dos políticos é mentirosa” também será verdadeira, o que não implica que “todos os políticos são mentirosos", pois uma única exceção fará com que essa frase seja falsa (mesmo exemplo, substituindo maioria por muitos).

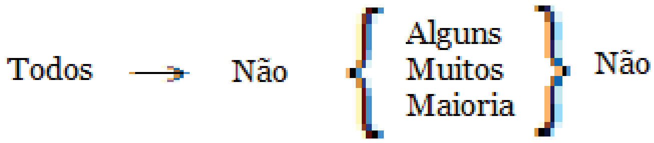


Figura (4)

Analisando a figura (4): será que "todos" implica "não é o caso que a maioria não é"? Considere-se o mesmo exemplo: "todos os políticos são mentirosos" implica que "não é o caso que a maioria dos políticos não é mentirosa"? Imagine-se que o contrário seja verdade: "a maioria dos políticos não é mentirosa", isso negaria a proposição "todos políticos são mentirosos". Assim, "não é o caso que a maioria não é" pode ser visto como "a maioria é"; e que "todos são" implica "a maioria é", como analisado previamente.

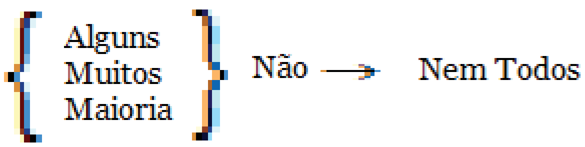


Figura (5)

Por último, analisando a figura (5), tem-se o seguinte exemplo: "A maioria dos políticos não é mentirosa", essa frase não pode ser verdadeira quando "nem todos os políticos são mentirosos" é falsa. Pois, caso esta última seja falsa, então a verdadeira seria "todos os políticos são mentirosos", o que implicaria que "a maioria dos políticos é mentirosa", que é contrária à frase inicial. Assim, "a maioria não é" implica "nem todos são". O mesmo acontece substituindo "maioria" por "muitos", nas figuras (4) e (5).

O único quantificador que pode ser apresentado nos exemplos sem que ocorra nenhuma discordância é o "algum não". Este quantificador implica o "nem todos", que implica "algum não".

Uma última implicação: “todos são” implica “não é o caso que alguns não são”. Se “todos os políticos são mentirosos”, então “não é o caso que alguns políticos não são mentirosos”, pois isto significa que “alguns políticos são mentirosos”, o que pode ser implicado diretamente do quadrado original de Aristóteles.

No próximo capítulo são apresentadas as lógicas moduladas, introduzidas por Grácio (1999), e, inicialmente, a lógica dos ultrafiltros, elaborada por Sette, Carnielli e Veloso (1999), que, apesar de ter sido precursora na investigação que conduziu às lógicas moduladas, faz parte deste conjunto de lógicas como um caso particular.

CAPÍTULO 2. Lógicas Moduladas

A Tese de doutorado de Grácio (1999) estabeleceu um novo conjunto de lógicas, as lógicas moduladas. Para tanto, todas essas lógicas apresentam alguns aspectos em comum, que as caracterizam como tal. Aqui são apresentados, de maneira breve, os axiomas necessários para se considerar uma lógica como modulada e, logo após, a lógica dos ultrafiltros, que, embora anterior e motivadora das lógicas moduladas, pode ser considerada uma particularização das mesmas, e três lógicas apresentadas por Grácio (1999).

Seja L a lógica clássica de primeira ordem com igualdade e Q um novo quantificador usado para estendê-la. Denomina-se o quantificador Q de *modulado* quando respeitar as condições que seguem. Nessas condições, $L(Q)$ é a lógica clássica de primeira ordem estendida pelo quantificador modulado Q.

Em Grácio (1999), os axiomas de $L(Q)$ são os mesmos de L, com os axiomas da identidade, aos quais são adicionados os seguintes axiomas específicos para o quantificador Q:

(Ax1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx\, \varphi(x) \leftrightarrow Qx\, \psi(x))$

(Ax2) $Qx\, \varphi(x) \rightarrow Qy\, \varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$

(Ax3) $Qx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$

(Ax4) $\forall x\, \varphi(x) \rightarrow Qx\, \varphi(x)$.

Todos esses axiomas estão presentes nos sistemas apresentados nas próximas seções.

As regras de dedução do sistema $L(Q)$ são as regras usuais de L: *Modus Ponens* (MP) e Generalização (Gen).

Conforme Grácio (1999, p. 161),

> As fórmulas de $L(Q)$ são aquelas de L acrescidas das fórmulas geradas pela cláusula seguinte: se φ é uma fórmula em $L(Q)$, então $Qx\, \varphi$ é uma fórmula

> de L(Q). A noção de variável livre e ligada numa fórmula é estendida ao quantificador Q, isto é, se x é livre em φ, então x ocorre ligada em Qx φ.

A seguir, Grácio (1999, p. 161) denota por “φ(t/x) o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável x em φ pelo termo t. Por simplicidade, quando não houver perigo de confusão, escreve-se apenas φ(t) em vez de φ(t/x).”

Grácio (1999) apresenta alguns rudimentos da teoria dos modelos para que as lógicas moduladas admitam a propriedade de Ultraprodutos. Mostra, ainda, um contra-exemplo para o problema da interpolação, seguindo os passos de Sgro (1977). O problema da interpolação é formulado em Grácio (1999, p. 167) da seguinte maneira:

> Sejam φ e ψ sentenças de L(Q) tais que $\varphi \models \psi$. Temos, então, que existe uma sentença θ de L(Q) tal que $\varphi \models \theta$, $\theta \models \psi$ e, com exceção da igualdade, todos os símbolos (relações, funções e constantes) que ocorrem em θ ocorrem em φ e ψ. A sentença θ é denominada um **interpolante** de φ e ψ.

Utilizando o Lema de Sgro (1977, p. 188) após fazer uma construção das sentenças φ e ψ e dos modelos modulados $\langle A, q_1\rangle$ e $\langle A, q_2\rangle$, Grácio (1999) constrói um contra-exemplo para o problema da interpolação, que pode ser utilizado em qualquer uma das lógicas moduladas. Ainda nesse trabalho, Grácio (1999) apresenta considerações referentes à contribuição das lógicas moduladas para a questão do raciocínio indutivo.

Em continuidade à tese de Grácio (1999), diversos trabalhos têm sido desenvolvidos, dentre eles citam-se Grácio, Feitosa e Nascimento (2006), no artigo intitulado *“Muitos”: Formalizando um Conceito Impreciso*, em que são mostrados alguns limites do modelo proposto para interpretar "muitos" em um contexto formal e há uma discussão sobre este assunto. Citem-se ainda Feitosa, Grácio e Nascimento (2008), em *Linguagem e inferência indutiva em sistemas dedutivos*, que trata da relação entre linguagem e inferência, e enfatiza a indução ou inferência indutiva quando não é possível obter uma dedução precisa. Também é importante citar Grácio, Feitosa e Nascimento (2008), em *Sobre os quantificadores generalizados*, que trata sobre os quantificadores que não podem ser definidos a partir dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem. Ainda sobre quantificadores generalizados, temos o trabalho de Silvestrini (2005), intitulado *Tableux e Indução na Lógica do Plausível;* o trabalho de Mariana Matulovic da Silva (2008), intitulado *A lógica do muito em um sistema de Tablôs.* Podemos também citar os trabalhos: de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), com o título *Algebraic elements for the notion of 'many';* e Feitosa, Nascimento e Grácio (2010), intitulado *A propositional version for the plausible*, que traz uma versão proposicional para a lógica do plausível apresentada por Grácio (1999).

Com base nesta axiomática geral, Grácio (1999) e Carnielli e Grácio (2008) estabelecem a lógica do muito, que se propõe a modelar matematicamente a noção de “muitos”; a lógica da maioria, destinada a formalizar a noção de “maioria”; a lógica do plausível, que tem por objetivo formalizar a noção de “para uma ‘boa’ parte”, acrescentando, na sintaxe de L, novos axiomas específicos para cada quantificador proposto.

A seguir, são apresentadas a lógica dos ultrafiltros, a lógica da maioria e a lógica do plausível, de maneira sucinta, pois não fazem parte do tema central deste trabalho, e a lógica do muito, de maneira mais cuidadosa, por ser inspiração desta pesquisa.

2.1 Lógica dos ultrafiltros

A lógica dos ultrafiltros teve como propositores A. M. Sette e W. A. Carnielli. Apesar de ter sido elaborada antes do trabalho de Grácio (1999) e lhe servir de inspiração, também pode ser considerada como uma particularização de lógica modulada. A lógica dos ultrafiltros tem uma interpretação semântica de um novo quantificador “quase sempre”, dada por uma estrutura de ultrafiltro próprio.

Um exemplo clássico de raciocínio que pode ser formalizado por esta lógica é a proposição “quase todos os pássaros voam”. Quando se fala sobre conjuntos, pode-se substituir a expressão “quase todos” por “quase tão grande quanto”, dando uma impressão de quase totalidade de um conjunto qualquer. Desse modo, considerando o exemplo dos pássaros, tem-se “o conjunto dos pássaros que voam é quase tão grande quanto o conjunto dos pássaros” (GRÁCIO, 1999, p. 48)

Para se verificar que subconjuntos X e Y de um conjunto universo B são “quase tão grandes quanto B”, deve-se ter o seguinte (SETTE; CARNIELLI; VELOSO, 1999):

(1) se X é grande e $X \subseteq Y$, então Y também é grande;

(2) se X e Y são ambos grandes, então $X \cap Y$ é necessariamente grande;

(3) ou X é grande ou X^c é grande.

A condição (2) pode não ser muito intuitiva em um primeiro momento, mas é preciso lembrar que se trata de subconjuntos X e Y que contenham “quase todos” os elementos de um mesmo universo B. Assim, eles têm “quase todos” elementos em comum e, então, necessariamente, sua intersecção é grande.

Com relação ao quantificador generalizado “quase todos”, sua interpretação pode ser capturada pelo conceito de filtro próprio maximal, já que “ultrafiltros estão também conectados com a noção de medida, considerando que o que é deixado do lado de fora de um ultrafiltro tem ‘medida zero’” (SETTE; CARNIELLI; VELOSO, 1999, p. 135).

Para formalizar a lógica dos ultrafiltros, estende-se a lógica clássica de primeira ordem L (com símbolos para predicados, funções, constantes e fechado sob os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e sob os quantificadores $\exists$ e $\forall$), pela inclusão de um novo quantificador generalizado ∇. Denota-se a lógica dos ultrafiltros por $L(\nabla)$.

Segundo Sette, Carnielli e Veloso (1999), as fórmulas e sentenças de $L(\nabla)$ são as mesmas de L e mais aquelas geradas a partir da seguinte cláusula: se φ é uma fórmula de $L(\nabla)$, então $\nabla x\ \varphi$ é uma fórmula de $L(\nabla)$. Os axiomas de $L(\nabla)$, propostos por Sette, Carnielli e Veloso (1999), são os mesmos de L e mais os seguintes axiomas de ultrafiltro:

(Ax1) $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \nabla x\ \psi(x))$

(Ax2) $(\nabla x\ \varphi(x) \wedge \nabla x\ \psi(x)) \rightarrow \nabla x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(Ax3) $\nabla x\ \varphi(x) \vee \nabla x\ \neg\varphi(x)$

(Ax4) $\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$.

Dada uma interpretação com universo A e φ, ψ fórmulas, com exatamente uma variável livre x, então, para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A : \psi[a]\}$, os axiomas (Ax1) a (Ax4), intuitivamente, afirmam que (SETTE; CARNIELLI; VELOSO, 1999):

(Ax1) se [φ] contém quase todos indivíduos de A e [φ] é um subconjunto de [ψ], então [ψ] também contém quase todos indivíduos de A;

(Ax2) se [φ] contém quase todos os indivíduos de A e [ψ] contém quase todos os indivíduos de A, então [φ] e [ψ] contém quase todos os indivíduos de A;

(Ax3) [φ] ou seu complementar contém quase todos os indivíduos de A;

(Ax4) se [φ] contém quase todos os indivíduos, então existe algum indivíduo que satisfaz φ.

As regras de inferência do sistema $L(\nabla)$ são as mesmas de L, nominalmente:

- *Modus Ponens* (MP): de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ deduzimos ψ;
- Generalização (Gen): de φ deduzimos $\forall x\, \varphi$.

Sette, Carnielli e Veloso (1999) apresentam uma semântica para a lógica dos ultrafiltros, denominada *estrutura dos ultrafiltros*. Esta estrutura é constituída pela estrutura clássica, $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$, dotada de um ultrafiltro próprio, F^U, sobre o universo U de A.

A noção de *satisfação* das fórmulas em cada estrutura de ultrafiltro, $\mathcal{A}^F = (\mathcal{A}, F^U)$, é definida da mesma forma presente na lógica clássica de primeira ordem quando o quantificador ∇ não ocorre na fórmula. Quando o quantificador ∇ ocorre, a satisfação da sentença $\nabla x\, \varphi(\bar{y}, x)\, [\bar{a}]$ é definida por:

$$\mathcal{A}^F \vDash \nabla x\, \varphi(\bar{y}, x)\, [\bar{a}] \Leftrightarrow \{ b \in U : \mathcal{A}^F \vDash \varphi(\bar{y}, x)\, [\bar{a}, b] \} \in F^U.$$

Os autores demonstram que os teoremas da dedução, da correção e da completude são válidos nesse novo sistema, por meio de pequenas adaptações da demonstração clássica e de algumas construções de ultrafiltros. Outros teoremas válidos são os teoremas da compacidade e de Löwenheim-Skolem.

Carnielli e Veloso (1997) afirmam que o sistema desenvolvido anteriormente formaliza também um tipo de raciocínio genérico. Para tanto, associam o quantificador ∇ ao advérbio geralmente, e definem um *objeto genérico* como sendo aquele que possui a propriedade que ‘quase todos’ os objetos possuem.

Em continuidade, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos sobre propriedades, desdobramentos e interfaces da lógica dos ultrafiltros, entre eles, citamos: *On “Almost All” and some presuppositions,* de Paulo A.S. Veloso (1999), que trata dos problemas referentes ao sistema lógico para o tratamento preciso de sentenças envolvendo “quase todos” e analisa suas ideias subjacentes; Veloso (1998), intitulado *On a Logic for ‘Almost All’ and ‘Generic’*, que apresenta uma explicação de alguns aspectos para argumentos que usam expressões como “genérico” e “típico” em função do quantificador “quase todos”; Carnielli e Veloso (2004), intitulado *Logics for qualitative reasoning,* que apresenta alguns sistemas de lógica com quantificadores generalizados para os "modificadores", que expressam imprecisão, como "geralmente", "raramente", "mais", "muitos", etc.

Em uma abordagem formal, um *elemento genérico* para uma fórmula $\varphi(x)$, com uma variável livre única x, é um indivíduo $g \in U$, tal que:

$$A^F \vDash \nabla x\, \varphi(x) \Leftrightarrow A^F \vDash \varphi(x)\,[g].$$

Para formalizar o raciocínio genérico por meio da lógica dos ultrafiltros, precisa-se de um tipode similaridade τ e uma nova constante *c* que não apareça em τ.

Em Carnielli e Veloso (1997), é definido o axioma da generalidade, $\gamma(c/\psi(x))$, da constante c para a fórmula $\psi(x)$ de $L(\nabla)$, como a sentença $\nabla x\, \psi(x) \leftrightarrow \psi(c)$ de $L^{\tau[c]}(\nabla)$. A *condição de generalidade* sobre c para um conjunto Ψ de fórmulas de $L(\nabla)$ – com uma única variável livre x – é definida como o conjunto $\gamma(c/\,\Psi) = \{\ \gamma(c/\psi(x)) : \psi(x) \in \Psi\}$ (GRÁCIO, 1999, p. 71).

Cite-se um dos exemplos apresentados no artigo de Carnielli e Veloso (1997) sobre a aplicabilidade deste sistema em situações em que ocorre o raciocínio genérico:

> De ‘a maioria dos cisnes são brancos’, conclui-se que ‘um cisne genérico é branco’.
>
> O tipo τ tem um predicado unário W [branco] e Σ [conjunto de sentenças] tem $\nabla x\, W(x)$.
>
> Considerando uma nova constante s (para um cisne genérico), a extensão genérica $\Sigma[s]$ tem o axioma da generalidade $\nabla x\, W(x) \leftrightarrow W(s)$. Logo $\Sigma[s] \vdash W(s)$.

> Note que, se b não é um cisne branco, em $\Sigma[s] \cup \{\neg W(b)\}$, tem-se ambos $\neg W(b)$ e $W(s)$, tal que $\neg b \equiv s$ (este cisne não branco não é um cisne genérico) (CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 43).

A seguir, apresenta-se outra particularização das lógicas moduladas, a lógica da maioria.

2.2 A Lógica da maioria

Nesta seção, constam os pontos principais da lógica da maioria, presente na tese de doutorado de Grácio (1999), a partir das ideias de Rescher (1962).

2.2.1 Conceitos subjacentes à formalização de "maioria"

A noção de maioria não pode ser formalizada na lógica clássica de primeira ordem, e, sendo um conceito interessante acerca de qualquer conjunto de indivíduos, alguns pesquisadores se dedicaram à sua formalização.

O conceito de maioria está presente em sentenças do tipo "a maioria das aves voa". Neste contexto, o termo maioria indica que a quantidade de indivíduos que tem certa propriedade é maior do que a quantidade de indivíduos que não possuem esta propriedade. Assim, se for necessário decidir se uma ave genérica voa, decide-se que ela voa, dado que "a maioria das aves voa".

Desse modo, a noção de maioria está associada:

> À noção de proposição mais provável entre os indivíduos do universo e esta, à noção de tamanho de conjuntos. Consideramos que a maioria dos indivíduos satisfaz uma proposição φ quando o conjunto formado pelos indivíduos que a satisfazem é maior que aquele formado pelos que não a satisfazem (GRÁCIO, 1999, p. 77).

Segundo Grácio (1999, p. 78), as noções sobre maioria estão "relacionadas à noção de comparação entre subconjuntos de um conjunto universo, por meio de seus tamanhos".

Assim, ainda de acordo com Grácio (1999), para que dois subconjuntos X e Y de um mesmo universo U contenham a maioria dos elementos de U, eles devem seguir as seguintes noções:

1. se X é grande, então seu complementar X^c, com respeito a U, é considerado pequeno;
2. se X é grande e $X \subseteq Y$, então Y também é grande;
3. se X é grande, então $X \neq \emptyset$;
4. U é grande;
5. se X, Y são grandes, então $X \cap Y \neq \emptyset$.

Denotando por $|X|$ o número cardinal associado com subconjunto X, diz-se que X é grande se, e somente se, o cardinal de X é maior do que o cardinal de X^C, ou seja, $|X| > |X^C|$. Ainda, há uma definição que pode ajudar no entendimento sobre conjuntos grandes. Diz-se que X é *dominado por* Y (denotamos por $X \twoheadrightarrow Y$), se existe uma função injetiva de X em Y.

Por meio do conceito de dominação entre conjuntos, pode-se dar uma ordenação para os números cardinais:

(a) $|X| \geq |Y|$ se, e somente se, $Y \twoheadrightarrow X$;

(b) $|X| = |Y|$ se, e somente se, $X \twoheadrightarrow Y$ e $Y \twoheadrightarrow X$.

Pela definição de adição de números cardinais (Cantor, 1887), tem-se que a + b é o único cardinal c tal que se X e Y são conjuntos com $|X| = a$, $|Y| = b$ e $X \cap Y = \emptyset$, então $|X \cup Y| = c$.

A seguir, citam-se algumas propriedades da aritmética que, de acordo com Grácio (2009, p. 79), foram importantes para a criação da lógica da maioria.

(i) propriedades básicas de adição (Cantor 1887);

(ii) para quaisquer conjuntos X e Y, não necessariamente disjuntos, $|X| + |Y| \geq |X \cup Y|$;

(iii) seja χ_0 o número cardinal do conjunto dos números naturais. Para todo cardinal a $\geq \chi_0$ e para todo cardinal finito n, tem-se: a + n = a. Em particular, $\chi_0 + n = \chi_0$;

(iv) para todo cardinal a, a + 1 = a se, e somente se, a $\geq \chi_0$;

(v) $\chi_\alpha + \chi_\alpha = \chi_\alpha$ (Hessenberg 1906);

(vi) $\chi_\alpha + \chi_\beta = \chi_{\max(\alpha,\beta)}$.

Se X é qualquer subconjunto de um universo U, tem-se que $U = X \cup X^c$. Assim, em termos de frequênciais, X é a proposição mais provável se, e somente se, $|X| > |X^C|$.

A seguir, apresenta-se a axiomática do quantificador (M), presente em Grácio (1999), proposta pela primeira vez por Rescher (1962).

2.2.2 Axiomática de *L*(M)

Se *L* é a lógica de primeira ordem com identidade, a lógica da maioria *L*(M) é apresentada por Grácio (1999) do seguinte modo.

Os axiomas de *L*(M) são os axiomas de *L* acrescidos dos seguintes axiomas do quantificador M (maioria):

(Ax1) $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Mx\, \varphi(x) \rightarrow Mx\, \psi(x))$;

(Ax2) $Mx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$;

(Ax3) $Mx\, \varphi(x) \rightarrow \neg\, Mx\, (\neg\, \varphi(x))$;

(Ax4) $\forall x\, \varphi(x) \rightarrow Mx\, \varphi(x)$;

(Ax5) $(Mx\, \varphi(x) \wedge Mx\, \psi(x)) \rightarrow \exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$;

(Ax6) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Mx\, \varphi(x) \leftrightarrow Mx\, \psi(x))$;

(Ax7) Mx $\varphi(x) \rightarrow$ My $\varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

Segundo Grácio (1999), dada uma interpretação com universo A e as fórmulas φ e ψ com exatamente uma variável livre, então, para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A : \psi(a)\}$, os axiomas (Ax1) a (Ax6), intuitivamente, afirmam que:

(Ax1) se a maioria dos indivíduos pertence a $[\varphi]$ e $[\varphi] \subset [\psi]$, então também $[\psi]$ é constituído pela maioria;

(Ax2) se a maioria dos indivíduos pertence a $[\varphi]$, então $[\varphi]$ não é vazio;

(Ax3) se a maioria dos indivíduos pertence a $[\varphi]$, então $[\neg\varphi]$ não é constituído pela maioria;

(Ax4) se $[\varphi]$ contém todos os indivíduos, então $[\varphi]$ também contém a maioria;

(Ax5) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm a maioria dos indivíduos, então sua interseção não é vazia;

(Ax6) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm os mesmos indivíduos, então $[\varphi]$ contém a maioria dos indivíduos se, e somente se $[\psi]$ também contém a maioria.

Segundo Grácio (1999), o Ax7 representa o axioma da substituição de variáveis para o quantificador M.

As regras de inferência do sistema L(M) são as mesmas de L, nominalmente:

- *Modus Ponens* (MP): de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ infere-se ψ;
- Generalização (Gen): de φ infere-se $\forall x\, \varphi$.

Segundo Grácio (1999), as noções sintáticas usuais, como demonstração, teorema, consequência lógica, consistência, etc., para L(M) são definidas de modo análogo às definidas na lógica clássica.

Com base nesta sintaxe, as fórmulas de L(M) são as mesmas de L acrescidas daquelas geradas pelo que segue: se φ é uma fórmula de L(M), então Mx φ é uma fórmula de L(M).

Vários exemplos podem ser formalizados via lógica da maioria. Sejam B(x), C(x), D(x) e E(x) símbolos de predicados de L(M) que expressam, respectivamente, "x é adulto", "x trabalha", "x gosta de doces" e "x gosta de futebol". Considerando o universo de paulistanos, podem-se formalizar algumas sentenças, como:

"A maioria dos paulistanos é adulta e trabalha" por Mx (H(x) $\wedge$ C(x));

"Se todos os paulistanos gostam de doces, então a maioria dos paulistanos gosta de doce" por $\forall$x D(x) $\rightarrow$ Mx D(x);

"Se todo paulistano que gosta de doce, também gosta de futebol, então se a maioria dos paulistanos gosta de doces, a maioria dos paulistanos gosta de futebol" por $\forall$x (D(x) $\rightarrow$ E(x)) $\rightarrow$ (Mx D(x) $\rightarrow$ Mx E(x)).

A semântica da lógica da maioria possui uma estrutura clássica $A = \langle A, \{R^{A}{}_{i}\}_{i\in I}, \{f^{A}{}_{j}\}_{j\in J}, \{c^{A}{}_{k}\}_{k\in K}\rangle$

na qual **A** é o conjunto universo, R_i é uma relação T_0-ária definida em **A**, para i $\in$ I, f_j é uma função j-ária de $\mathbf{A}^n$ em **A**, supondo-se T_1(j) = n, para j $\in$ J e c_k é uma constante de **A**, para k $\in$ K.

Define-se a relação de satisfação das fórmulas de L(M), na estrutura A, recursivamente, da maneira usual, com o acréscimo da seguinte cláusula:

• sejam φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\}\cup\{y_1, ..., y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ uma sequência de elemetos de A. Então

$$A \models \mathrm{M}x\,\varphi[\underline{a}] \text{ see } |\{b \in \mathbf{A} : A \models \varphi[b;\underline{a}]\}| > |\{b \in \mathbf{A} : A \models \neg\varphi[b;\underline{a}]\}|$$

Grácio (1999) demonstrou que a lógica da maioria é correta, entretanto não é completa, com base nos teoremas demonstrados por Mostowski (1957).

2.3 A lógica do plausível

Nesta seção, aborda-se, de modo sucinto, a lógica do plausível proposta em Grácio (1999).

2.3.1 Ideias gerais para formalização do "plausível"

Nesta seção, apresenta-se a lógica construída por Grácio (1999) para formalizar expressões do tipo "há suficientes x tais que $\varphi(x)$" ou "para uma 'boa' parte de x, $\varphi(x)$". Para a autora, o termo "boa parte" significa, no contexto, um conjunto considerado suficiente de evidências, que não necessariamente é um conjunto grande.

Uma das influências de Grácio (1999), ao formalizar este conceito pode ser vista em Popper (1975), que declara que se age muitas vezes segundo um conjunto de proposições acreditadas e, para que uma proposição seja acreditada, "basta, na maioria dos casos, certo grau bem baixo de certeza". (Popper, 1975, p. 82).

Segundo Grácio (1999), proposições plausíveis são aquelas nas quais se acredita, independente do número de proposições favoráveis em um conjunto universo. Apesar de essas proposições expressarem a forma mais "vaga" de raciocínio indutivo, elas representam argumentos próximos aos usados em inferência estatística, "na qual o conjunto de evidências (amostra) considerado suficiente para o estabelecimento das inferências é pequeno, em relação ao conjunto universo" (Grácio, 1999, p. 133).

O conceito que a autora formalizou não está ligado à cardinalidade do conjunto de confirmações ou evidências, mas está associado à noção de "suficiência de evidências" atribuída à proposição. Para isso, é utilizada a classificação dada em Carnap (1950), em que se está preocupado apenas em observar a presença ou ausência da plausibilidade de uma proposição.

Pode-se citar como exemplo de sentença plausível: “uma ‘boa’ parte dos pássaros voa”. Uma vez que é estabelecida a plausibilidade dessa proposição, as conclusões não são afetadas pela quantidade de evidências dessa proposição. Assim, se houver um pássaro genérico, deve-se inferir que ele voa.

Segundo Grácio (1999, p. 134), a noção de plausibilidade possui algumas propriedades estruturais: se duas proposições são plausíveis, sua conjunção e sua disjunção também são plausíveis; se todos os indivíduos do universo satisfazem uma proposição, então esta proposição é plausível.

Para a sintaxe da lógica do plausível, insere-se um novo quantificador — o *quantificador do plausível* (P) — na linguagem usual da lógica de primeira ordem, dado por

$$Px\ \varphi(x),$$

a qual representa a proposição “para uma ‘boa’ parte de x, $\varphi(x)$” ou “há suficientes x tais que $\varphi(x)$”.

Assim, a lógica do plausível é a extensão da lógica clássica de primeira ordem L, obtida pela inclusão do quantificador P na linguagem de L.

> A Lógica do Plausível pode ser considerada, no que concerne à noção de crença, um enfoque alternativo à Lógica Modal S4, dado que ela oferece um maior nível de especificidade por levar em conta as evidências em favor da proposição sem, entretanto, se prender à noção de cardinalidade ou de conjunto grande. A Lógica do Plausível pode, também, ser considerada uma versão alternativa da Lógica Auto-epistêmica para o cálculo de predicados. No sistema em Moore (1985), o operador L é adicionado à linguagem proposicional; fórmulas da forma Lp são interpretadas como “p é acreditado”. Interpretando a proposição “p é acreditado” por “p é plausível”, o quantificador P, em termos intuitivos, faz o papel de L no cálculo dos predicados da seguinte maneira: Px $\varphi(x)$ é análogo a $L[\forall x\ \varphi(x)]$ (Grácio, 1999, p. 134).

2.3.2 A Axiomática de $\mathcal{L}$(P)

Seja $\mathcal{L}$ é a lógica de primeira ordem com identidade. A lógica do plausível, denotada por $\mathcal{L}$ (P), é construída do seguinte modo.

Os axiomas de $\mathcal{L}$(P) são os axiomas de $\mathcal{L}$ acrescidos dos seguintes axiomas para o quantificador P (plausível):

(Ax1) $(Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x)) \rightarrow Px\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(Ax2) $(Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x)) \rightarrow Px\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$

(Ax3) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Px\ \varphi(x)$

(Ax4) $Px\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$

(Ax5) $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Px\ \varphi(x) \leftrightarrow Px\ \psi(x))$

(Ax6) $P\ x\ \varphi(x) \rightarrow P\ y\ \varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

Dado as fórmulas φ e ψ, com exatamente uma variável livre, de um universo A, para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A : \varphi(a)\}$ e $[\psi]= \{a \in A : \psi(a)\}$, os axiomas (Ax1) a (Ax5), intuitivamente, afirmam que:

(Ax1) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm uma ‘boa’ parte dos indivíduos, então a intersecção de $[\varphi]$ e $[\psi]$ também contém uma ‘boa’ parte dos indivíduos;

(Ax2) se $[\varphi]$ e $[\psi]$ contêm uma ‘boa’ parte dos indivíduos, então a união de $[\varphi]$ e $[\psi]$ também contém uma ‘boa’ parte dos indivíduos;

(Ax3) Se $[\varphi]$ contém todos os indivíduos do universo, então uma ‘boa’ parte dos indivíduos pertence a $[\varphi]$;

(Ax4) se $[\varphi]$ contém uma ‘boa’ parte dos indivíduos, então $[\varphi]$ não é vazio;

(Ax5) se [φ] e [ψ] contêm os mesmos indivíduos, então [φ] contém uma ‘boa’ parte dos indivíduos se, e somente se, [ψ] também contém ‘boa’ parte dos indivíduos.

As regras de inferência do sistema L(P) são *Modus Ponens* e *Generalização*.

As noções sintáticas para L(P), tais como sentença, teorema, demonstração, consequência lógica, consistência, etc., são definidas de modo análogo às definidas na lógica clássica.

> As fórmulas de L(P) são as mesmas de L(P) mais aquelas geradas pela cláusula seguinte: se φ é uma fórmula de L(P), então Px φ é uma fórmula de L(P). A noção de variável livre e ligada numa fórmula é estendida ao quantificador P, isto é, toda ocorrência de x em Px φ é ligada (GRÁCIO, 1999, p. 143).

A substituição de variáveis por termos é feita do seguinte modo:

> Denotamos por φ (t/x) o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável x em φ pelo termo t. Por conveniência, quando não houver perigo de confusão, denotamos o resultado das substituições apenas por φ(t) (GRÁCIO, 1999, p. 144).

Por exemplo, várias sentenças podem ser formalizadas via lógica do plausível. Sejam H(x), C(x), D(x) e E(x) símbolos de predicados de L(P) que expressam, respectivamente, “x é adulto”, “x trabalha”, “x gosta de doces” e “x gosta de futebol”. Considerando o universo de paulistanos, podem-se formalizar algumas sentenças, como:

“Uma ‘boa’ parte dos paulistanos é adulta e trabalha”, por Px (H(x) $\wedge$ C(x)).

“Se uma ‘boa’ parte dos paulistanos é adulta e uma ‘boa’ parte dos paulistanos gosta de doces, então uma ‘boa’ parte dos paulistanos é adulta ou gosta de doces”, por Px H(x) $\wedge$ Px D(x) $\rightarrow$ Px (H(x) $\vee$ D(x)).

“Se todos paulistanos gostam de futebol, então uma ‘boa’ parte dos paulistanos gosta de futebol”, por $\forall$x E(x) $\rightarrow$ Px E(x).

Define-se a semântica para as fórmulas de $L(P)$ da seguinte maneira. Seja $\tau = \langle I, J, K, T_0, T_1 \rangle$ um tipo de similaridade e $\mathcal{A} = \langle A, \{R^{\mathcal{A}}{}_i\}_{i\in I}, \{f^{\mathcal{A}}{}_j\}_{j\in J}, \{c^{\mathcal{A}}{}_k\}_{k\in K} \rangle$ uma estrutura clássica de primeira ordem de tipo τ. Uma *Estrutura topológica reduzida* $\mathcal{A}^{\mathfrak{I}}$ de tipo τ para $L(P)$ é composta por $\mathcal{A}$ acrescida de uma topologia reduzida $\mathfrak{I}^A$ sobre A. Em termos formais,

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{I}} = \langle A, \{R^{A}{}_i\}_{i\in I}, \{f^{A}{}_j\}_{j\in J}, \{c^{A}{}_k\}_{k\in K}, \mathfrak{I}^A \rangle = \langle \mathcal{A}, \mathfrak{I}^A \rangle$$

na qual A é o conjunto universo, R_i é uma relação T_0 -ária definida em A, para $i \in I$, f_j é uma função j-ária de A^n em A, supondo-se $T_1(j) = n$, para $j \in J$, c_k é uma constante de A, para $k \in K$ e $\mathfrak{I}^A$ é uma topologia reduzida sobre A.

Define-se a relação de satisfação das fórmulas de $L(P)$, na estrutura $\mathcal{A}^{\mathfrak{I}}$, recursivamente, da maneira usual, com o acréscimo da seguinte cláusula:

- sejam φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\}\cup\{y_1, ..., y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ uma sequência de termos de A. Então

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{I}} \vDash Px\,\varphi[\underline{a}] \text{ se e somente se } \{b \in A: \mathcal{A}^{\mathfrak{I}} \vDash \varphi[b;\underline{a}]\} \in \mathfrak{I}^A$$

Grácio (1999) demonstra que este sistema lógico é consistente, correto e completo.

2.4 A Lógica do muito

Considerando que a lógica do muito é o sistema motivador para este trabalho, apresenta-se esta lógica de modo mais detalhado que as anteriores.

Antes de se tratar propriamente da lógica do muito, é preciso abordar alguns conceitos usados em sua criação.

2.4.1 Família fechada superiormente

A seguir é apresentada a definição de uma estrutura matemática que tenta capturar a primeira intuição que temos ao tratar de sentenças que contém o quantificador “muitos”. Vê-se, porém, que algumas alterações são necessárias para a intuição completa de uma estrutura matemática que capture a intuição de “muitos” como proposta por Grácio (1999).

Definição 2.4.1.1 (GRÁCIO, 1999, p. 107): Uma *família fechada superiormente* F sobre um conjunto universo A é uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:
(i) se B $\in F$ e B $\subseteq$ C, então C $\in F$;
(ii) A $\in F$.

A seguir, tem-se um exemplo de conjunto que atende as condições para ser uma *família fechada superiormente*.

Proposição 2.4.1.2 (GRÁCIO, 1999, p. 107): O conjunto das partes de A, P(A), é uma família fechada superiormente sobre A.
Demonstração: Para todos B, C $\subseteq$ A, se B $\in P$(A) e B $\subseteq$ C, então C $\in P$(A). Além disso, A $\in P$(A). Logo, P(A) é uma família fechada superiormente sobre A. ■

A seguir, têm-se as condições para que uma família fechada superiormente seja própria ou imprópria.

Definição 2.4.1.3 (GRÁCIO, 1999, p. 108): Uma família fechada superiormente F é chamada de *imprópria* se $F = P$(A).

Proposição 2.4.1.4 (GRÁCIO, 1999, p. 108): Uma família fechada superiormente F sobre A é *própria* se $\varnothing \notin F$.

Para a formalização do conceito de “muitos”, Grácio (1999) utiliza a definição de Família Fechada Superiormente Própria.

2.4.2 Formalizando logicamente o quantificador “muitos”

A lógica do muito, uma das lógicas moduladas introduzidas por Grácio (1999), é caracterizada pela inclusão de um novo quantificador, o qual não pode ser definido a partir dos quantificadores da lógica de primeira ordem ($\forall$ e $\exists$), destinado à formalização do conceito de “muitos”, quantificador presente na linguagem natural.

A lógica do muito tem por intuito formalizar expressões como: “muitos brasileiros gostam de refrigerante”, “muitas garotas ‘amadurecem’ mais rapidamente que os garotos”, “muitos carros usam gasolina como combustível”, etc. Tais expressões referem-se a um “conjunto grande de evidências”, mas que não precisa necessariamente ser interpretado como a “maioria” do universo e nem significa que a expressão “muitos” se refere a uma quantidade específica de pessoas/objetos que possuem uma propriedade.

Para essa formalização, Grácio (1999) introduz um novo quantificador G na linguagem clássica de primeira ordem. Assim, uma expressão da forma “Gx $\varphi(x)$” significa que “para muitos x, $\varphi(x)$”.

Se L é a lógica de primeira ordem com identidade, a lógica do muito $L(G)$ é construída do seguinte modo:

Os axiomas de $L(G)$ são os axiomas de L acrescidos dos seguintes axiomas do quantificador G:

(Ax1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Gx\, \varphi(x) \leftrightarrow Gx\, \psi(x))$

(Ax2) $Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gy\, \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$

(Ax3) $\forall x\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, \varphi(x)$

(Ax4) $Gx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$

(Ax5) $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, \psi(x))$.

Os dois primeiros axiomas têm a função de adequar o modelo proposto para esta lógica. Os axiomas Ax3, Ax4 e Ax5 são específicos para a lógica do muito e possuem as seguintes características intuitivas:

Ax3 – Se todos indivíduos do universo satisfazem a sentença φ, então φ é verdadeira para muitos indivíduos;

Ax4 – Se muitos indivíduos do universo satisfazem a sentença φ, então existe algum indivíduo que satisfaz φ;

Ax5 – Se todos os indivíduos do universo que satisfazem φ também satisfazem ψ, então se muitos indivíduos satisfazem φ, muitos indivíduos satisfazem ψ.

Por exemplo, várias sentenças podem ser formalizadas via lógica do muito. Sejam B(x), C(x), D(x) e E(x) símbolos de predicados de L(G) que expressam, respectivamente, "x é homem", "x é criança", "x gosta de doces" e "x gosta de futebol". Considerando o universo de paulistanos, podem-se formalizar algumas sentenças, como:

"Se todos paulistanos gostam de futebol, então muitos paulistanos gostam de futebol" por $\forall x\ E(x) \rightarrow Gx\ E(x)$;

"Se muitos paulistanos são homens, então algum paulistano é homem" por $Gx\ B(x) \rightarrow \exists x\ B(x)$;

"Se todo paulistano que gosta de doce, também gosta de futebol, então se muitos paulistanos gostam de doce, muitos paulistanos gostam de futebol" $\forall x\ (D(x) \rightarrow E(x)) \rightarrow (Gx\ D(x) \rightarrow Gx\ E(x))$;

"Muitos paulistanos são crianças ou não são crianças" por $Gx\ (C(x) \vee \neg C(x))$;

As regras de inferência de L(G) são as mesmas de L.

2.4.3 Semântica da lógica do muito

A lógica do muito é composta por uma estrutura de primeira ordem $\mathcal{A}$, com universo A, dotada por uma família própria de conjuntos fechados superiormente $\mathcal{F}$ e denotada por $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$.

$$\text{Define-se } \mathcal{A}^{\mathcal{F}} = \langle A, \{R^{\mathcal{A}}_i\}_{i \in I}, \{f^{\mathcal{A}}_j\}_{j \in J}, \{c^{\mathcal{A}}_k\}_{k \in K}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle = \langle \mathcal{A}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$$

Seja φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ uma sequência do domínio de A. Então

$$\mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash \text{Gx se e somente se } \{b \in A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash \varphi[b, \bar{a}]\} \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}.$$

Esta semântica apresenta o significado de que muitos indivíduos x têm (ou satisfazem) a propriedade $\varphi(x)$ na estrutura $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ se, e somente se, o conjunto de elementos $a \in A$ que satisfaz a propriedade φ está na família própria de conjuntos fechados superiormente $\mathcal{F}$.

2.4.4 Teoremas de $\mathcal{L}$(G)

Nesta seção são apresentados alguns teoremas demonstrados por Grácio (1999, p. 112-114) para a lógica do muito. As demonstrações destes teoremas serão comparadas com as apresentadas nos teoremas da lógica do poucos, presentes no próximo capítulo.

Teorema 2.4.4.1 (Grácio, 1999, p. 112): As seguintes sentenças são teoremas:

(i) $Gx\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

(ii) $Gx\,\varphi(x) \wedge Gx\,\psi(x) \rightarrow Gx\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$

(iii) $\neg Gx\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$

(iv) $Gx\,\varphi(x) \vee Gx\,\psi(x) \rightarrow Gx\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$.

Demonstração:

(i) $Gx\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$:

1. $\varphi \vee \neg\varphi$	Teorema de L(G)
2. $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	Gen 1
3. $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	Ax3
4. $Gx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	MP 3, 2

(ii) $Gx\, \varphi(x) \wedge Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$:

1. $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	Ax5
2. $\forall x\, (\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	Ax5
3. $\forall x(\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Teorema de L(G)
4. $\forall x(\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Teorema de L(G)
5. $Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP 1, 3
6. $Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP 2, 4
7. $(Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Regra do $\wedge$ 5, 6
8. $(Gx\, \varphi(x) \wedge Gx\, \psi(x)) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$	CPC[2] 7

(iii) $\neg Gx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$:

1. $\neg\exists x\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Teorema de L(G)
2. $Gx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Ax2
3. $(Gx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))) \rightarrow (\neg \exists x\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Gx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$	CPC em 2
4. $\neg\exists x\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg\, Gx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	MP 2, 3
5. $\neg\, Gx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$	MP 1, 2

(iv) $Gx\, \varphi(x) \vee Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$:

1. $\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Gx\, \varphi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Ax1
2. $\forall x\, (\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Gx\, \psi(x) \rightarrow Gx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Ax1

[2] Teorema do Cálculo Proposicional Clássico.

3. $\forall x(\varphi(x) \to (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Teorema de L(G)
4. $\forall x(\psi(x) \to (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Teorema de L(G)
5. $Gx\ \varphi(x) \to Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP 1, 3
6. $Gx\ \psi(x) \to Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP 2, 4
7. $(Gx\ \varphi(x) \to Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Gx\ \psi(x) \to Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$	Regra do $\wedge$ 5, 6
8. $(Gx\ \varphi(x) \vee Gx\ \psi(x)) \to Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	CPC 7 ■

Grácio (1999) demonstrou que a lógica do muito é consistente maximal, correta e completa.

Apresentadas as lógicas moduladas, inicia-se o cerne desse trabalho, que é a investigação de uma nova lógica para dualizar alguns aspectos da lógica do muito vista neste capítulo.

CAPÍTULO 3. Uma formalização para o quantificador “poucos”

Barwise e Cooper (1981) quase não abordam ou comentam sobre o significado da expressão “poucos”, apenas afirmam que ela, por si só, não representa um quantificador, mas um determinante. Isso porque não se pode diferenciar expressões do tipo “poucas flechas de John” de “pouco de todas as coisas”. Porém, neste trabalho, a expressão “poucos”, por si só, será considerada um quantificador, posto que se tem sempre um universo de discurso definido.

Apesar de não ocorrer uma definição precisa para “poucos” ou “muitos”, os estudos de Peterson (1979) esclarecem como a oposição entre estes termos funciona. Uma frase como “poucos S são P” seria oposta a outra do tipo “muitos S são P”. Além disso, este tipo de oposição geraria necessariamente uma contradição. O fato de gerar uma contradição decorre da hipótese conceitual de que “muitos S são P” tem o mesmo significado que “poucos S são não-P”. Assim, se “muitos x têm a propriedade y”, então pode-se afirmar que “não poucos x têm a propriedade y”. Este fato é muito importante por ser ponto de discordância entre alguns autores.

Neste trabalho, considera-se a relação entre os quantificadores “muitos” e “poucos” de maneira um pouco diferente da adotada por Peterson (1979). Um conjunto “não tem poucos” elementos se, e somente se, tiver “muitos” elementos ou for vazio. Do mesmo modo, um conjunto tem “poucos” elementos se, e somente se, não tem “muitos” elementos e não for vazio.

3.1 Noções preliminares

Neste capítulo, apresenta-se a formalização de um tipo de raciocínio indutivo usado quando houver proposições do tipo “poucos”. Mais especificamente, trata-se de algum “comportamento incomum” entre os indivíduos de um universo, ou um “comportamento não frequente”, posto que não seja usual para os indivíduos daquele universo. Em geral, não se tem uma quantidade exata, mas uma quantidade vaga, sustentada pelas evidências. A formalização de sentenças do tipo “poucos” também foi abordada por Golzio (2011), porém, no campo proposicional.

Na sua tese de doutorado, Grácio (1999) formalizou argumentos indutivos, como "muitos" para a "lógica do muito", introduzida como um caso da família das lógicas moduladas, também definida na tese.

Nesta Dissertação, propõe-se a formalização de um novo quantificador com aspectos duais ao quantificador "muitos" de Grácio (1999), denominado quantificador "poucos".

De maneira análoga à usada por Grácio (1999) para a noção de "muitos", a noção de "poucos", introduzida nesta Dissertação para a formalização no contexto lógico, é uma noção abstrata, vaga e mais flexível do que seria a noção de "minoria". O conceito de "minoria" está sempre associado ao conceito de "menor parte", ao passo que a noção de "poucos" não se atém à noção de cardinal, pois está associada à noção de um *conjunto pequeno de evidências*, é uma noção relativa, não absoluta, de modo dual ao usado por Grácio (1999). Por motivo semelhante, na linguagem natural, difere-se "poucos" de "quase nenhum".

Apesar de quantificadores como "muitos", "maioria" e "quase todos" terem sido estudados em vários trabalhos, os quantificadores com sentido dual a eles, como "poucos", "minoria" e "quase nenhum", ainda não possuem formalização e pouco foram abordados na literatura.

Assim como Grácio (1999) adotou a noção de "muitos", adota-se uma noção mais subjetiva para o quantificador "poucos", em que, para o estudo deste quantificador, trata-se da noção de poucos como significando um *"conjunto pequeno de evidências",* que não possui uma noção de cardinalidade usual, ou menor parte, mas que tenha algumas regras específicas. Por exemplo: ao afirmar que "poucos brasileiros possuem doutorado", tem-se associada a ideia de um conjunto pequeno de evidências favoráveis à propriedade de ter doutorado entre os brasileiros. Do mesmo modo, afirmar que "poucos brasileiros pilotam aviões" refere-se a outro conjunto de brasileiros, também pequeno, ou seja, os brasileiros que pilotam aviões. É importante salientar que os conjuntos de brasileiros que possuem doutorado e de brasileiros que pilotam aviões não são, necessariamente, do mesmo tamanho. Como dificilmente se conhece todo o universo de referência, o número de indivíduos que atende às sentenças anteriores não representa, necessariamente, menos da metade dos indivíduos do universo. Outras proposições podem ser declaradas para representar o comportamento incomum de indivíduos expresso por "poucos", tais como "poucos países são socialistas". Apesar de estar associado a um conjunto pequeno de evidências, observa-se que a natureza e universo de referência desta proposição são distintos dos exemplos dados, mas também esta é baseada na noção de conjunto pequeno e não representativo de uma propriedade usual no universo.

Desse modo, concorda-se com Grácio (1999, p. 104): “a noção de grandeza do conjunto não é única e nem rígida, mas relativa a uma dada proposição e à certeza exigida pelas circunstâncias”. Assim, é possível haver mais de uma interpretação de conjunto “pequeno” no mesmo sistema.

Aponta-se que a noção de poucos, aqui tratada, está atrelada à existência de pelo menos um indivíduo que satisfaça a proposição em que é aplicada. Como pelo menos um indivíduo do universo em questão deverá ter a qualidade requerida, então não se trata de situações em que o universo de discurso seja vazio. Como a noção de “poucos” a ser formalizada é abstrata, identificam-se a seguir algumas propriedades que devem ser consideradas no seu tratamento.

Dada uma sentença φ, indica-se $[\varphi]$ o conjunto dos indivíduos do universo de discurso que satisfazem φ, observa-se que:

(a) Se o conjunto de indivíduos que satisfaz φ também satisfaz ψ, e existem indivíduos que satisfazem φ (isto é, $[\varphi]$ está contido em $[\psi]$ e $[\varphi]$ é não vazio), então se poucos indivíduos satisfazem ψ, então são poucos os indivíduos que satisfazem φ.

(b) Se poucos indivíduos satisfazem a sentença φ, então existe alguém que satisfaz φ.

(c) O conjunto universo não tem poucos indivíduos.

Considerando estas três propriedades para sentenças do tipo “poucos”, define-se uma estrutura matemática baseada nessas propriedades, para captar a noção inicial de poucos, que é denominada *família fechada inferiormente*. Entretanto, esta estrutura não está totalmente adequada à noção que se pretende associar ao quantificador “poucos” e, desse modo, será apresentada uma nova estrutura — *família quase fechada inferiormente* —, que mais se aproxima desta proposta.

Para a criação da lógica do poucos, introduz-se na linguagem usual da lógica clássica de primeira ordem um novo quantificador generalizado denotado por P, de maneira que:

$$Kx\ \varphi(x)$$

tenha o significado de “para poucos x, $\varphi(x)$”.

Assim como para a noção de “muitos” em Grácio (1999), a noção de “poucos” deve ser considerada uma noção intermediária entre a noção de “existe” e “todos”. Ela se diferencia da noção de “minoria” e “quase nenhum”, pois o conjunto que não satisfaz uma sentença sobre o escopo dos quantificadores “minoria” ou “quase nenhum” é, necessariamente, um conjunto grande, ao passo que para o quantificador “poucos”, o conjunto que não satisfaz uma proposição sobre seu escopo não é, necessariamente, um conjunto grande.

Se todos os indivíduos de um universo satisfazem uma sentença, então se pode dizer que muitos a satisfazem, mas não se deseja dizer que poucos a satisfazem. Segundo se entende, se muitos indivíduos satisfazem certa propriedade, então não são poucos que satisfazem essa mesma propriedade. Imagine-se um diálogo entre dois alunos sobre as aulas do dia anterior em que o primeiro faltou. O primeiro aluno pergunta: - Quantos alunos compareceram ontem? O segundo responde: - Muitos alunos estiveram presentes. Claramente, não se conclui que estariam poucos alunos presentes naquelas aulas.

Na próxima seção, são apresentadas algumas definições e propriedades para a formalização do conceito de poucos no ambiente lógico e que permitem a criação de uma lógica do poucos.

3.2 Família quase fechada inferiormente

Inicialmente, apresenta-se a definição de uma família fechada inferiormente sobre um universo A.

Definição 3.2.1 Uma *família fechada inferiormente I* sobre um conjunto A é uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

(i) Se $B \subseteq C$ e $C \in I$, então $B \in I$;

(ii) $\varnothing \in I$.

O Conjunto das partes do Universo, isto é, o conjunto constituído por todos os subconjuntos do Universo, inclusive o próprio Universo e o vazio, é uma família fechada inferiormente sobre A, como podemos facilmente observar pela proposição seguinte.

Proposição 3.2.2 O conjunto P(A) é uma família fechada inferiormente sobre A.

Demonstração: Se um conjunto C $\in P$(A) e B $\subseteq$ C, então B $\in P$(A). Além disso, $\varnothing \in P$ (A).

Intuitivamente, pode-se dizer que o conjunto das partes do universo é a maior família fechada inferiormente sobre A, mas observa-se que ela não captura a noção de poucos pretendida neste trabalho, pois se P(A) tiver poucos elementos, qualquer conjunto, menor que este, também teria poucos elementos, o que acarretaria que a noção de "poucos" seria trivial. Além disto, temos que $\varnothing \in P$ (A), e esta não é uma propriedade que se pretende conservar na intuição de "poucos" estabelecida, onde não se considera que uma sentença que não é satisfeita por ninguém, satisfaça poucos.

Como a família fechada inferiormente não captura a noção de "poucos" esperada, apresenta-se algumas propriedades para se estabelecer uma maior proximidade à intuição desejada.

Definição 3.2.3 Uma família fechada inferiormente I é chamada de *imprópria* se $I = P$ (A). Todas as outras famílias fechadas inferiormente sobre A são chamadas de *próprias*.

Abaixo, tem-se uma propriedade que todas famílias fechadas inferiormente próprias possuem.

Proposição 3.2.4 Uma família fechada inferiormente I sobre A é *própria* se, e somente se, A $\notin I$.

Demonstração: Se A $\notin I$, então $I \neq P$ (A) e, portanto, I é uma família fechada inferiormente própria sobre A. Reciprocamente, se A $\in I$, então, pela definição de família fechada inferiormente, $I = P$ (A). ■

Intuitivamente, diz-se que uma família fechada inferiormente é própria se o Universo não pertence à família.

Para se determinar a lógica do poucos, é preciso, entretanto, introduzir uma nova condição na família fechada inferiormente própria, pois esta ainda não se adéqua à intuição de que "se poucos indivíduos satisfazem uma sentença, então existe alguém que a satisfaz", portanto, define-se a seguir a *Família quase fechada inferiormente*.

Definição 3.2.5 Uma *Família quase fechada inferiormente* sobre um conjunto universo A é uma coleção não-vazia *I* de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

(i) Se $B \neq \emptyset$, $B \subseteq C$ e $C \in I$, então $B \in I$;

(ii) $\emptyset \notin I$;

(iii) $A \notin I$.

Para a formalização do conceito de "poucos", utiliza-se na semântica da lógica do poucos o conceito de *família quase fechada inferiormente*.

3.3 Uma lógica quantificacional para "poucos"

Seja L a linguagem da lógica de primeira ordem clássica $\mathcal{L}$ com símbolos para predicados, funções e constantes usuais e que seja fechada para os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e para os quantificadores $\exists$ e $\forall$.

Para se gerar a lógica do poucos, denotada por $\mathcal{L}$(K), estende-se a linguagem L para a linguagem L(K), pela inclusão de um novo quantificador generalizado para "poucos", denotado por K.

As fórmulas de $\mathcal{L}$(K) são as mesmas fórmulas de $\mathcal{L}$, mais aquelas geradas pela seguinte cláusula:

- se $\varphi(x)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$(K), então $Kx\, \varphi(x)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$(K).

As definições de variável livre e ligada numa fórmula são idênticas para o quantificador K, isto é, toda ocorrência de x em $Kx\, \varphi(x)$ é ligada.

O resultado da substituição de todas as ocorrências de uma variável livre x em φ pelo termo t é denotado por $\varphi(t/x)$. Quando não houver problema em identificar a substituição, denota-se apenas por $\varphi(t)$.

Os axiomas de $\mathcal{L}$(K) são todos os axiomas de $\mathcal{L}$, incluindo os axiomas da identidade, acrescidos dos seguintes axiomas para o quantificador K:

(Ax1) $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Kx\ \varphi(x) \leftrightarrow Kx\ \psi(x))$

(Ax2) $Kx\ \varphi(x) \rightarrow Ky\ \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$

(Ax3) $Kx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$

(Ax4) $Kx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \neg\varphi(x)$

(Ax5) $(\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x)) \rightarrow (Kx\ \psi\ (x) \rightarrow Kx\ \varphi(x))$.

Os dois primeiros axiomas são necessários para a proposta de dualização da lógica do muito. Os axiomas Ax_3, Ax_4 e Ax_5 são específicos para a lógica do poucos, e possuem as seguintes caracterizações intuitivas:

Ax3 – Se poucos indivíduos satisfazem uma sentença φ , então existem indivíduos que satisfazem φ.

Ax4 – Se poucos indivíduos satisfazem a sentença φ, então existe alguém que não satisfaz a sentença φ.

Ax5 – Se todos os indivíduos do universo que satisfazem φ também satisfazem ψ, e se o conjunto de indivíduos que satisfazem φ é não-vazio, então se poucos indivíduos satisfazem ψ, também poucos indivíduos satisfazem φ.

As regras de inferência de L(K) são *Modus Ponens* e Generalização.

As noções sintáticas usuais, como sentença, demonstração, teorema, consequência lógica, consistência, etc., para L(K), são definidas de modo análogo às definidas na lógica clássica.

Algumas situações podem ser consideradas e formalizadas com a lógica do poucos; por exemplo:

Sejam S(x), H(x) e C(x) símbolos de predicados de L(K) que expressam “x come salmão”, “x é campeão de judô”, e “x é louco”, respectivamente. Considerando o universo dos paulistanos, pode-se considerar as seguintes sentenças:

“Poucos paulistanos comem salmão”, por $Kx\, S(x)$.

“Poucos paulistanos são campeões de judô ou são loucos”, por $Kx\, (H(x) \vee C(x))$;

“Não são poucos paulistanos que são loucos e não são poucos paulistanos que não são loucos” por $\neg Kx\, C(x) \wedge \neg Kx\, \neg C(x)$.

“Se todos os paulistanos comem salmão, então não são poucos os que comem salmão”, por $\forall x\, S(x) \to \neg Kx\, S(x)$.

Teorema 3.3.1 As fórmulas abaixo são teoremas de L(K):

(1) $\neg Kx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

(2) $Kx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x) \to Kx\, \varphi(x)$

(3) $Kx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \psi(x) \to Kx\, \psi(x)$

(4) $(Kx\, (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (Kx\, \varphi(x) \vee Kx\, \psi(x))$

(5) $\neg Kx\, (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$

(6) $((Kx\, (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge \exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \to (Kx\, \varphi(x) \wedge Kx\, \psi(x))$.

Demonstração:

(1)

1. $\varphi \vee \neg\varphi$	Teorema de L
2. $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	Gen 1
3. $Kx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \to \exists x\, \neg(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	Ax4
4. $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \to \neg\, Kx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	CPC em 3
5. $\neg\, Kx\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	MP 2, 4

(2)

1. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x)$	pp[3]
2. $\exists x\ \varphi(x)$	CPC 1
3. $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)$	CPC
4. $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x))$	Gen 3
5. $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x)$	CPC 2, 4
6. $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x) \rightarrow (Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow Kx\ \varphi(x))$	Ax 5
7. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow Kx\ \varphi(x)$	MP 5, 6
8. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	CPC 1
9. $Kx\ \varphi(x)$	MP 7, 8
10. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x) \rightarrow Kx\ \varphi(x)$	TD[4] 1-9

(3)

1. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \psi(x)$	pp
2. $\exists x\ \psi(x)$	CPC 1
3. $\psi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)$	CPC
4. $\forall x\ (\psi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x))$	Gen 3
5. $\forall x\ (\psi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \psi(x)$	CPC 2, 4
6. $\forall x\ (\psi(x) \rightarrow \varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \psi(x) \rightarrow (Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow Kx\ \psi(x))$	Ax 5
7. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow Kx\ \psi(x)$	MP 5, 6
8. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	CPC 1
9. $Kx\ \psi(x)$	MP 7, 8
10. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\ \psi(x) \rightarrow Kx\ \psi(x)$	TD 1-9

(4)

1. $Kx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$	pp

[3] Premissa Provisória
[4] Teorema da Dedução (Teorema 3.3.3)

2. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \exists x\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$	Ax 3
3. $\exists x\,(\varphi(x) \vee \psi(x))$	MP 1, 2
4. $\exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)$	Teorema de *L* 3
5. $\exists x\,\varphi(x)$	pp
6. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\,\varphi(x)$	CPC 1, 5
7. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\,\varphi(x) \rightarrow Kx\,\varphi(x)$	Teorema *L*(K)
8. $Kx\,\varphi(x)$	MP 6, 7
9. $Kx\,\varphi(x) \vee Kx\,\psi(x)$	CPC 8
10. $(Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (Kx\,\varphi(x) \vee Kx\,\psi(x))$	TD 1-9
5’. $\exists x\,\psi(x)$	pp
6’. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\,\psi(x)$	CPC 1, 5
7’. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\,\psi\,(x) \rightarrow Kx\,\psi(x)$	Teorema *L*(K)
8’. $Kx\,\psi(x)$	MP 6’, 7’
9’. $Kx\,\varphi(x) \vee Kx\,\psi(x)$	CPC 8’
10’. $(Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (Kx\,\varphi(x) \vee Kx\,\psi(x))$	TD 1-4, 5’-9’

(5)

1. $\neg\exists x\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Teorema de *L*
2. $Kx\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	Ax3
3. $\neg\exists x\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Kx\,(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$	CPC 2
4. $\neg Kx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$	MP 1, 3

(6)

1. $Kx\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$	pp
2. $\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$	CPC 1
3. $\exists x\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\psi(x)$	Teorema de *L* 2
4. $\exists x\,\varphi(x)$	CPC 3

5. Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x))$	CPC 1
6. Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x)$	CPC 4, 5
7. Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x) \rightarrow$ Kx $\varphi(x)$	Teorema L(K)
8. Kx $\varphi(x)$	MP 6, 7
9. $\exists x\, \psi(x)$	CPC 3
10. Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \psi(x)$	CPC 5, 9
11. Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \exists x\, \psi(x) \rightarrow$ Kx $\psi(x)$	Teorema L(K)
12. Kx $\psi(x)$	MP 10, 11
13. Kx $\varphi(x) \wedge$ Kx $\psi(x)$	CPC 8, 12
14. ((Kx $(\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge \exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))) \rightarrow$ (Kx $\varphi(x) \wedge$ Kx $\psi(x))$	TD 1-13.

Teorema 3.3.2 O cálculo de predicados L(K) é consistente.

Demonstração: Assim como Grácio (1999), serão seguidos os passos utilizados por Mendelson (1987), numa demonstração usual do teorema da consistência do cálculo de predicados.

Seja L_p o cálculo proposicional clássico, define-se h: $L(K) \rightarrow L_p$ como uma função esquecimento.

Deste modo, para cada fórmula φ de L(K), obtém-se a fórmula h(φ) de L_p ao se apagar em φ todos os termos, parênteses e os quantificadores ($\forall$, $\exists$ e K). Feito isto, a expressão h(φ) será uma fórmula do cálculo proposicional clássico, em que os símbolos relacionais fazem o papel das variáveis proposicionais.

Assim, é possível demonstrar por indução, sobre o comprimento das fórmulas de L(K), que:

$$h(\neg\varphi) = \neg h(\varphi)$$

$$h(\varphi \rightarrow \psi) = h(\varphi) \rightarrow h(\psi) \text{ e}$$

$$h(\forall x\, \varphi) = h(\exists x\, \varphi) = h(\text{K}x\, \varphi) = h(\varphi).$$

Feito isto, verifica-se que caso φ seja um axioma de L(K), então h(φ) é uma tautologia de L_p.

Além disso, constata-se que: (MP) se h(φ) e h($\varphi \rightarrow \psi$) são tautologias, então h(ψ)

também é uma tautologia. Para completar a demonstração, verifica-se (Gen) que se h(φ) é uma tautologia, então h($\forall x\varphi$) = h(φ) é uma tautologia.

Portanto, se φ é um teorema de L(K) então h(φ) é uma tautologia de L_p.

Agora, se L(K) é inconsistente, então $\varphi \wedge \neg\varphi$ é um teorema L(K) e pela função h, segue que h($\varphi \wedge \neg\varphi$) = h($\varphi$) $\wedge$ $\neg$h(φ) é uma tautologia, o que é um absurdo. Logo, L(K) é consistente. ■

Teorema 3.3.3 (Teorema da Dedução): Seja $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ um conjunto de fórmulas de L(K) e $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ uma dedução em que x ocorre livre em φ. Se nesta dedução de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ a regra Gen não é aplicada a nenhuma fórmula φ_i que depende de φ para a obtenção de $\forall x_i\varphi_i$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

A demonstração do Teorema da dedução para a lógica do poucos é idêntica a utilizada nas lógicas moduladas.

3.4 Semântica para L(K)

Seguindo os passos de Grácio (1999), define-se a semântica para as fórmulas de L(K) da seguinte maneira. Seja $\tau = \langle I, J, K, T_0, T_1\rangle$ um tipo de similaridade e $\mathcal{A} = \langle A, \{R^{\mathcal{A}}_i\}_{i\in I}, \{f^{\mathcal{A}}_j\}_{j\in J}, \{c^{\mathcal{A}}_k\}_{k\in K}\rangle$ uma estrutura clássica de primeira ordem de tipo de similaridade τ. Uma *Estrutura de família quase fechada inferiormente* será uma estrutura de tipo τ para L(K) construída sobre $\mathcal{A}$ com o acréscimo de uma *família quase fechada inferiormente* $I^{\mathcal{A}}$ sobre A. Em termos formais, tem-se:

$$\mathcal{A}^{I} = \langle A, \{R^{\mathcal{A}}_d\}_{d\in D}, \{f^{\mathcal{A}}_j\}_{j\in J}, \{c^{\mathcal{A}}_q\}_{q\in Q}, I^{\mathcal{A}}\rangle = \langle \mathcal{A}, I^{\mathcal{A}}\rangle,$$

em que A é o conjunto universo, cada $R^{\mathcal{A}}_d$, com $d \in D$ e aridade $T_0(d) = m$, é uma relação de aridade m sobre A; cada $f^{\mathcal{A}}_j$, $j \in J$ e $T_1(j) = n$, é uma função de A^n em A; cada $c^{\mathcal{A}}_q$, para $q \in Q$, é um membro de A; e $I^{\mathcal{A}}$ é uma *família quase fechada inferiormente* definida sobre A.

Todos os símbolos funcionais, relacionais e constantes individuais têm a mesma *interpretação* de $\mathcal{L}$(K) em $\mathcal{A}$. Define-se a relação de satisfação das fórmulas de $\mathcal{L}$(K), na estrutura $\mathcal{A}^{I}$, recursivamente, da maneira usual, com o acréscimo da seguinte cláusula:

• sejam φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ uma sequência de elemetos de A. Então

$$\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \varphi[\bar{a}] \text{ se e somente se } \{b \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[b, \bar{a}]\} \in I^{A}.$$

Em particular, $\mathcal{A}^{I} \vDash \varphi\, [\bar{b}]$ denota que $\mathcal{A}^{I} \vDash_s \varphi$, quando as variáveis livres da fórmula φ ocorrem no conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$, $s(z_i) = b_i$ e $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$. Dado que $A \neq \varnothing$, então $\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \varphi[\bar{a}]$ se e somente se $\mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[\bar{a}]$ quando x não ocorre livre em φ. Em particular, para uma sentença $Kx\, \psi(x)$:

$$\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \psi(x) \text{ se e somente se } \{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \psi(a)\} \in I^{A}.$$

3.5 Correção e completude de $\mathcal{L}$(K)

Nesta seção, mostra-se que a lógica do poucos é correta e completa em relação à *estrutura de família quase fechada inferiormente*.

Teorema 3.5.1 Se φ é um teorema de $\mathcal{L}$(K), então é válido.

Demonstração: Demonstra-se a validade dos axiomas específicos para o quantificador P, uma vez que os axiomas da lógica clássica de primeira ordem, assim como as regras *Modus Ponens* e Generalização já foram demonstrados no contexto da lógica clássica de primeira ordem.

(Ax_1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (Kx\, \varphi(x) \leftrightarrow Kx\, \psi(x))$:

Fixe-se uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A e tome-se $J = \{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\}$ e $Q = \{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \psi[a; \bar{b}]\}$. Considere-se que $\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I}$

$\vDash$ Kx φ(x) [$\underline{b}$]. Logo, J = Q e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \in I^{A}$. Portanto, $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \psi[a; \bar{b}]\} \in I^{A}$, de onde $\mathcal{A}^{I} \vDash$ Kx ψ(x) [$\bar{b}$].

Analogamente, prova-se que se $\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash$ Kx ψ(x) [$\bar{b}$], então $\mathcal{A}^{I} \vDash$ Kx φ(x) [$\bar{b}$].

Logo, para toda estrutura $\mathcal{A}^{I}$, tem-se que:

$$\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Kx\, \varphi(x) \leftrightarrow Kx\, \psi(x)).$$

(Ax_2) Kx φ(x) $\rightarrow$ Ky φ(y), quando y é livre para x em φ(x).

Fixando uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A e suponha-se que $\mathcal{A}^{I} \vDash$ Kx φ(x) [$\underline{b}$]. Dado que y é livre para x em φ(x), então $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} = \{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[y/x]\, [a; \bar{b}]\}$. Portanto, $\mathcal{A}^{I} \vDash$ Ky φ[y/x] [$\bar{b}$].

Portanto, para toda estrutura $\mathcal{A}^{I}$, tem-se que:

$$\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \varphi(x) \rightarrow Ky\, \varphi(y),$$

quando y é livre para x em φ(x).

(Ax_3) Kx φ(x) $\rightarrow \exists$x φ(x).

Por absurdo, suponha-se a existência de uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em $\mathcal{A}$ de maneira que o axioma (Ax3) não seja válido, isto é, $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x))\, [\bar{b}]$.

Como $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x))\, [\bar{b}]$ see $\mathcal{A}^{I} \vDash (Kx\, \varphi(x))[\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(\exists x\, \varphi(x))[\bar{b}]$ see $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \in I^{A}$ e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} = \varnothing$.

Portanto, pela definição de *família quase fechada inferiormente*, existe uma contradição. Assim, como não existe uma *estrutura de família quase fechada inferiormente*

$\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A tal que $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x))[\bar{b}]$, então vale o (Ax_3).

(Ax_4) $Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x)$

Novamente, por absurdo, supondo que exista uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A de modo que o axioma (Ax_4) não seja verdadeiro, ou seja, $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, (Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x))\, [\bar{b}]$.

Mas, $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, (Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x))\, [\bar{b}]$ see $\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \varphi(x))\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, (\exists x\, \neg\varphi(x))\, [\bar{b}]$ see $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \in I^{A}$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, \varphi(x)\, [\bar{b}]$ e see $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \in I^{A}$ e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} = A$.

Portanto, pela definição de *família quase fechada inferiormente*, há novamente uma contradição. Logo, não existe uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A tal que $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, (Kx\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x))\, [\bar{b}]$.

(Ax_5) $(\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x)\,) \rightarrow (Kx\, \psi(x) \rightarrow Kx\, \varphi(x))$.

Do mesmo modo, supondo que exista uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ em A de modo que o axioma (Ax_5) não seja válido, isto é, $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(\, \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x)) \rightarrow (Kx\, \psi\, (x) \rightarrow Kx\, \varphi(x))\,)\, [\bar{b}]$.

Mas, $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg(\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \exists x\, \varphi(x) \rightarrow (Kx\, \psi\, (x) \rightarrow Kx\, \varphi(x)))[\underline{b}]$ see $\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \exists x\, \varphi(x)\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, (Kx\, \psi\, (x) \rightarrow Kx\, \varphi(x))\, [\bar{b}]$ see $\mathcal{A}^{I} \vDash \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \exists x\, \varphi(x)\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash Kx\, \psi\, (x)\, [\bar{b}]$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\, Kx\, \varphi(x)\, [\bar{b}]$ see $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \subseteq \{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \psi[a; \bar{b}]\}$ e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \neq \varnothing$

e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \psi[a; \bar{b}]\} \in I^{\mathcal{A}}$ e $\{a \in A : \mathcal{A}^{I} \vDash \varphi[a; \bar{b}]\} \notin I^{\mathcal{A}}$.

Logo, pela definição *família quase fechada inferiormente*, há uma contradição. Portanto, não existe uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ e uma sequência $\bar{b}$ em A tal que $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\,(\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x)) \wedge \exists x\,\varphi(x)) \to (Kx\,\psi(x) \to Kx\,\varphi(x)))$ $[\bar{b}]$.

Assim, se φ é um teorema de $\mathcal{L}$(K), então φ é válida e $\mathcal{L}$(K) é correta relativa à estrutura $\mathcal{A}^{I}$. ■

Antes de se começar a desenvolver a completude da lógica do poucos, é necessário enunciar um teorema para essa demonstração.

Teorema 3.5.2 Se B é uma coleção não vazia de subconjuntos de A tal que $\varnothing \notin$ B e A $\notin$ B, então B pode ser estendido a uma *família quase fechada inferiormente*.

Demonstração: Seja B $\subset \mathcal{P}$(A) tal que $\varnothing \notin$ B e A $\notin$ B. Definamos I = {C $\in \mathcal{P}$(A) : $\varnothing \neq$ C $\subseteq$ D para algum D $\in$ B}.

Então I é uma *família quase fechada inferiormente*, pois:

(i) $\varnothing \notin I$, por definição;

(ii) A $\notin I$, por definição e pela hipótese sobre B.

(iii) Seja E $\in I$, C $\neq \varnothing$ e C $\subseteq$ E. Como E $\in I$, então E $\subseteq$ D para algum D $\in$ B. Desde que C $\subseteq$ E e E $\subseteq$ D, então C $\subseteq$ D com D $\in$ B. Logo, C $\in I$. ■

A seguir, estabelece-se a demonstração do Teorema da Completude para $\mathcal{L}$(K).

Definição 3.5.3 (Conjunto de testemunhas) Seja Σ um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$(K) e C um conjunto de constantes da linguagem de $\mathcal{L}$(K). C é um conjunto de testemunhas para Σ em $\mathcal{L}$(K) se para toda fórmula φ(x) em $\mathcal{L}$(K), com no máximo uma variável livre, tem-se que $\Sigma \vdash$

$\exists x\ \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$ para alguma constante $c \in C$. Diz-se que Σ *tem testemunhas* em L(K) se há um conjunto C de testemunhas para Σ em L(K).

Lema 3.5.4 Seja T um conjunto consistente de sentenças de L(K), C um conjunto de novas constantes, de modo que a cardinalidade de C seja a mesma de L(K), e considere-se a linguagem L'(K) que estende a linguagem de L(K) pelo acréscimo das constantes de C. Então o conjunto T pode ser estendido para um conjunto consistente T* de sentenças L'(K), de maneira que T* tenha C como conjunto de testemunhas.

A demonstração segue de acordo com Coniglio (1999).

Demonstração: Seja a cardinalidade da linguagem de L(K) igual a α, isto é, $|L(K)| = \alpha$. Para cada $\beta < \alpha$, seja c_β um símbolo de constante que não ocorre em L(K), de maneira que se $\beta < \gamma < \alpha$, então $c_\beta \neq c_\gamma$. Agora, seja $C = \{c_\beta : \beta < \alpha\}$ e L'(K) a linguagem obtida de L(K) pelo acréscimo do conjunto C com novas constantes. Deste modo, tem-se que $| L'(K) | = | L(K) | = \alpha$.

Como a linguagem é tem cardinalidade α, pode-se bem ordenar as fórmulas de L'(K) com no máximo uma variável livre em uma lista $\varphi_\mu(x)$, com $\mu < \alpha$.

Por recursão transfinita, define-se uma lista crescente de conjuntos de sentenças T_μ de L(K) tal que:

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_\mu \subseteq \ldots \text{, para } \mu < \alpha$$

e uma sequência de constantes de C, d_μ, para $\mu < \alpha$, do seguinte modo:

(i) $T_0 = T$;

(ii) se μ é um ordinal sucessor, ou seja, $\mu = \rho + 1$, então:

$$T_\mu = T_\rho \cup \{\exists x_\rho \varphi_\rho \rightarrow \varphi_\rho(d_\rho)\},$$

em que x_ρ é a variável livre de φ_ρ quando φ_ρ tem variável livre; caso não tenha, então $x_\rho = x_0$. A constante d_ρ é a menor constante de C diferente de d_γ, para cada $\gamma < \rho$;

(iii) se μ é um ordinal limite, então $T_\mu = \cup_{\rho<\mu} T_\rho$.

Verifica-se, por indução transfinita, que T_μ é consistente para todo $\mu < \alpha$:

(i) T_0 é consistente por hipótese;

(ii) Seja $T_\mu = T_\rho \cup \{\exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \rightarrow \varphi_\rho(d_\rho)\}$ e T_ρ consistente. Supondo T_μ inconsistente, o resultado seria:

1. $T_\rho \vdash \neg(\exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \rightarrow \varphi_\rho(d_\rho))$	T_μ inconsistente
2. $T_\rho \vdash \exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \wedge \neg\varphi_\rho(d_\rho)$	Transformação Tautológica em 1
3. $T_\rho \vdash \forall x_\rho(\exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \wedge \neg\varphi_\rho(d_\rho))$	Generalização em 2
4. $T_\rho \vdash \forall x_\rho(\exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \wedge \neg\varphi_\rho(x_\rho))$	Substituição de d_ρ por x_ρ em 3
5. $T_\rho \vdash \exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \wedge \forall x_\rho \neg\varphi_\rho(x_\rho)$	Distribuição do $\forall$ em 4
6. $T_\rho \vdash \exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho) \wedge \neg \exists x_\rho \varphi_\rho(x_\rho))$	Definição do $\exists$ em 5.

Isto faz T_ρ inconsistente, o que contradiz a hipótese. Logo, T_μ é consistente.

(iii) Sejam μ um ordinal limite e T_ρ consistente para todo $\rho < \mu$. Por absurdo, suponha-se que $\cup_{\rho<\mu} T_\rho$ é inconsistente. Daí, obtém-se $\cup_{\rho<\mu} T_\rho \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Contudo, pelo caráter finito de uma demonstração, existe algum $\lambda < \mu$, tal que T_λ é inconsistente. Isto faz T_ρ inconsistente, o que contradiz a hipótese inicial. Portanto, $\cup_{\rho<\mu} T_\rho$ é consistente.

Se $T^* = \cup_{\mu<\alpha} T_\mu$, então T^* é consistente, como provado no item anterior, $T \subseteq T^*$ e, por construção, C é um conjunto de testemunhas para T^*. ■

Lema 3.5.5 Seja T um conjunto consistente de sentenças de L(K) e C um conjunto de testemunhas para T em L(K). Então, T tem um modelo dado pela *estrutura de família quase fechada inferiormente* A^I tal que todo elemento de A é uma interpretação de uma constante de C.

A demonstração segue de acordo com Coniglio (1999).

Demonstração: Observe-se que:

(1) se C é um conjunto de testemunhas para T em L(K) e $T \subseteq T'$, então C também é um

conjunto de testemunhas para T';

(2) se $T \subseteq T'$ e $\mathcal{A}^{I} \vDash T'$, então $\mathcal{A}^{I} \vDash T$.

Portanto, pode-se supor que T seja maximal.

Agora, Dados c, d $\in$ C, define-se $c \sim d \Leftrightarrow T \vdash c = d$.

A relação ~ é uma relação de equivalência.

Considerando a linguagem L(K), define-se a *estrutura de família quase fechada inferiormente canônica* $\mathcal{A}^{I} = \langle A, \{R^{A}{}_{d}\}_{d\in D}, \{f^{A}{}_{j}\}_{j\in J}, \{c^{A}{}_{q}\}_{q\in Q}, I^{A}\rangle$ tal que $\mathcal{A}^{I} \vDash T$ e todo elemento de A é a interpretação de uma constante de C. Resultado:

(i) $A = \{[c] : c \in C\}$ e $[c] = \{d \in C : c \sim d\}$;

(ii) se $d \in D$, $r = T_0(d)$, então $R^{A}{}_{d}([c]_1, ..., [c]_r)$ see $R_d(c_1, ..., c_r) \in T$ ou, pela maximalidade de T, $T \vdash R_d(c_1, ..., c_r)$;

(iii) se $j \in J$, $r = T_1(j)$, então $f^{A}{}_{j}([c]_1, ..., [c]_r) = [c]_s$ see $f_j(c_1, ..., c_r) = c_s \in T$ ou, equivalentemente, $T \vdash f_j(c_1, ..., c_r) = c_s$;

(iv) para cada $c \in C$ coloca-se $c^{A} = [c]$;

(v) para a determinação de I^{A}, define-se para cada fórmula $\varphi(\bar{v})$, com um conjunto $\bar{v} = \{v_1, ..., v_n\}$ de variáveis livres:

$$\varphi(\bar{v})^{T} = \{([c]_1, ..., [c]_n) \in A^n : T \vdash \varphi(c_1, ..., c_n)\}$$

e considerando as fórmulas $\psi(x)$, com uma única variável livre,

$$B^{T} = \{\psi(x)^{T} \subseteq A : T \vdash Kx\, \psi(x)\}.$$

Em vista do axioma (Ax_3) de $\mathcal{L}$(K) e pelo Teorema 3.5.2, $B^{T} \subseteq \mathcal{P}(A)$ e pode ser estendida a uma *família quase fechada inferiormente* I^{A}.

Seja $I^{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ a *família quase fechada inferiormente* gerada por B^{T}.

Observa-se que (ii) – (iv) estão bem definidas:

(ii) $R^{\mathcal{A}}_d$ $([c]_1, ..., [c]_r)$ não depende dos representantes $c_1, ..., c_r$. Pelo axioma da igualdade, obtém-se:

$$\vdash (R_d(c_1, ..., c_r) \wedge (c_1 = d_1) \wedge ... \wedge (c_r = d_r)) \rightarrow R_d (d_1, ..., d_r))$$

e, então, $T \vdash R_d(c_1, ..., c_r) \wedge (c_1 = d_1) \wedge ... \wedge (c_r = d_r)) \rightarrow R_d(d_1, ..., d_r)$.

Portanto, a relação ~ é uma congruência relativa aos R_d, para $d \in D$, ou seja, $R^{\mathcal{A}}_d$ $([c]_1, ..., [c]_r)$ está bem definida;

(iii) dado que $\vdash f_j(c_1, ..., c_r) = f_j (c_1, ..., c_r)$, então $\vdash \exists x (f_j(c_1, ..., c_r) = x)$ e, então, $T \vdash \exists x (f_j(c_1, ..., c_r) = x)$, ou seja, como T é maximal, $\exists x (f_j(c_1, ..., c_r) = x) \in T$. Desde que C é um conjunto de testemunhas para T, então existe $c \in C$ tal que $T \vdash f_j (c_1, ..., c_r) = c$. Portanto, $f^{\mathcal{A}}_j$ está definida para toda r-upla $([c]_1, ..., [c]_r) \in A^r$. Agora $f^{\mathcal{A}}_j$ está bem definida:

$$\vdash (f_j(c_1, ..., c_r) = c_s) \wedge (c_1 = d_1) \wedge ... \wedge (c_r = d_r)) \rightarrow f_j(d_1, ..., d_r) = c_s.$$

Logo, $T \vdash (f_j(c_1, ..., c_r) = c_s) \wedge (c_1 = d_1) \wedge ... \wedge (c_r = d_r) \rightarrow f_j(d_1, ..., d_r) = c_s$ e, portanto, ~ é uma congruência relativa aos f_j, para $j \in J$, ou seja, $f^{\mathcal{A}}_j$ está bem definida;

(iv) seja d uma constante qualquer de $\mathcal{L}(K)$ (não necessariamente uma testemunha). Então, $\vdash \exists x (x = d)$. Como C é um conjunto de testemunhas para T, então existe $c \in C$ tal que $T \vdash c = d$. A constante c pode não ser única, mas [c] é, dado que $\vdash (c = d) \wedge (d = c') \rightarrow (c = c')$ e, portanto, $T \vdash (c = d) \wedge (d = c') \rightarrow (c = c')$.

O próximo passo é verificar, por indução sobre o comprimento das sentenças de T, que:

$$\mathcal{A}^{I} \vDash \varphi \text{ se e somente se } T \vdash \varphi.$$

(a) Caso base: Se φ é uma sentença atômica da forma $t_1 = t_2$. Então, $\mathcal{A}^{I} \vDash t_1 = t_2$ see $\mathcal{A}^{I} \vDash [c]_1 = [c]_2$, tal que $[c]_1 = t_1$ e $[c]_2 = t_2$ (*), see $T \vdash c_1 = c_2$ see $T \vdash t_1 = t_2$. A passagem (*) segue do fato de C ser um conjunto de testemunhas para T e de que dado um termo t sem variáveis livres, existe $c \in C$ tal que $t = c \in T$ ou $T \vdash t = c$. Como $\vdash t = t$ e $\vdash t = t \rightarrow \exists x(t = x)$, então, $T \vdash t = t \rightarrow \exists x(t = x)$ e, por *Modus Ponens* (MP), $T \vdash \exists x(t = x)$. Pela definição de testemunhas, $T \vdash \exists x(t = x) \rightarrow (t = c)$ e, por MP, $T \vdash t = c$.

(b) Se φ é uma sentença atômica da forma $R_d(t_1, ..., t_r)$, então:

$\mathcal{A}^I \vDash R_d(t_1, ..., t_r)$ see $R^{\mathcal{A}}{}_d([c]_1, ..., [c]_r)$ see $T \vdash R_d(c_1, ..., c_r)$ see $T \vdash R_d(t_1, ..., t_r)$.

(c) Se φ é uma sentença da forma $\psi \wedge \sigma$, então $\mathcal{A}^I \vDash \psi \wedge \sigma$ see $\mathcal{A}^I \vDash \psi$ e $\mathcal{A}^I \vDash \sigma$ see, pela hipótese de indução, $T \vdash \psi$ e $T \vdash \sigma$ see, por definição, $T \vdash \psi \wedge \sigma$.

(d) Se φ é uma sentença da forma $\neg\psi$, então $\mathcal{A}^I \vDash \neg\psi$ see $\mathcal{A}^I \nvDash \psi$ see, pela hipótese de indução, $T \nvdash \psi$ see $\psi \notin T$ see, pela hipótese da maximalidade, $\neg\psi \in T$ see $T \vdash \neg\psi$.

(e) Se φ é uma sentença da forma $\exists x\, \psi(x)$, então $\mathcal{A}^I \vDash \exists x\, \psi(x)$ se existe $[c] \in A$ tal que $\mathcal{A}^I \vDash \psi([c])$. Logo $\mathcal{A}^I \vDash \psi(c)$, dado que $[c]$ é a interpretação de c. Portanto, pela hipótese de indução, $T \vdash \psi(c)$ o que implica que $T \vdash \exists x\, \psi(x)$, pois $T \vdash \psi(c) \rightarrow \exists x\, \psi(x)$.

Reciprocamente, se $T \vdash \exists x\, \psi(x)$, então há $c \in C$ tal que $T \vdash \exists x\, \psi(x) \rightarrow \psi(c)$, pela hipótese sobre C. Portanto, $T \vdash \psi(c)$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{A}^I \vDash \psi(c)$ e, então, $\mathcal{A}^I \vDash \exists x\, \psi(x)$, pois $\vdash \psi(c) \rightarrow \exists x\, \psi(x)$.

(f) Se φ é uma sentença da forma $Kx\, \varphi(x)$, então $\mathcal{A}^I \vDash Kx\, \varphi(x)$ see $\{[c] \in A : \mathcal{A}^I \vDash \varphi([c])\} \in I^{\mathcal{A}}$ see, pela hipótese de indução, $\{[c] \in A : T \vdash \varphi(c)\} \in I^{\mathcal{A}}$ see[5] $(\varphi(x))^T \in B^T$ see $T \vdash Kx\, \varphi(x)$. ■

Teorema 3.5.6 (Teorema da Completude estendida) Seja T um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}(K)$. Então, T é consistente se, e somente se, T tem modelo.

A demonstração segue de acordo com Coniglio (1999).

[5] A ida se deve a (v) p. 80.

Demonstração: Considerando que T tenha um modelo e seja $\mathcal{A}^{I}$ um modelo de T. Supondo que T não seja consistente. Então T $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ e, daí, $\mathcal{A}^{I} \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$ o que é uma contradição. Logo, T é consistente.

Reciprocamente, supondo que T seja consistente. Pelo Lema 3.5.4, existe uma extensão T* de T na linguagem estendida $L^{I}(K)$ tal que T* tem um conjunto C de testemunhas. Pelo Lema 3.5.5, T* tem um modelo $\mathcal{A}^{I}$. Seja $\mathcal{B}$ a redução de $\mathcal{A}^{I}$ para a linguagem L, isto é, $\mathcal{B}$ é $\mathcal{A}^{I}$ sem as constantes de C. Como as constantes não ocorrem nas sentenças de T, tem-se $\mathcal{B} \vDash$ T. ■

Teorema 3.5.7 (Teorema da Completude). Uma sentença φ de $\mathcal{L}(K)$ é um teorema se, e somente se, φ é válida.

Demonstração: O Teorema 3.5.1 é a demonstração da implicação da esquerda para a direita. Mostrando a recíproca, isto é, se φ é válida, então φ é um teorema.

Supondo que φ não seja um teorema, então $\neg\varphi$ é consistente com $\mathcal{L}(K)$. Logo, pelo Teorema 3.5.6, existe uma *estrutura de família quase fechada inferiormente* $\mathcal{A}^{I}$ tal que $\mathcal{A}^{I} \vDash \neg\varphi$, portanto, φ não é válida, o que é uma contradição. Portanto, φ é um teorema. ■

Como $\mathcal{L}(K)$ conserva o teorema da completude, conclui-se que os teoremas de Löwenheim-Skolem e da compacidade podem ser adaptados para $\mathcal{L}(K)$.

Na próxima seção, são apresentadas algumas outras definições possíveis para o quantificador "poucos" e as implicações na construção de uma lógica para suas formalizações. Em seguida, faz-se uma comparação entre o quantificador poucos, aqui proposto, e o quantificador "muitos" de Grácio (1999).

3.6 Analisando o quantificador "poucos"

Nessa parte final, desejamos fazer uma pequena reflexão conceitual sobre o quantificador “poucos”.

3.6.1 Outras noções para o quantificador “poucos”

Analisam-se, nesta seção, três outras noções possíveis para o quantificador “poucos”. Embora, considere-se que ainda outras noções possam ser associadas a este quantificador, cada uma com intuição e contraposição diferente ao quantificador “muitos”, as três apresentadas a seguir apresentam-se de forma mais interessante para a construção de um novo sistema.

No primeiro caso, considere-se uma noção de poucos como estritamente oposta à noção de “muitos”, utilizada por Grácio (1999), isto é, ao contrário do quantificador proposto para “poucos” neste capítulo, vale que sentenças vazias satisfazem “poucos”. Assim, nesta situação, tem-se que se nenhum indivíduo satisfaz uma sentença, esta sentença é satisfeita por “poucos” indivíduos.

Nesta situação, para o quantificador “poucos”, não valeria o axioma (Ax3) $Kx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$, proposto na Seção 3.3. Então, algumas propriedades desejadas para a noção de “poucos”, poderiam ser assim enunciadas:

(a) Se o conjunto de indivíduos que satisfaz uma proposição φ satisfaz ψ, i.e., $[\varphi]$ está contido em $[\psi]$, então se poucos indivíduos satisfazem ψ, poucos indivíduos satisfazem φ.
(b) O conjunto universo não tem poucos indivíduos.

Assim, nessa intuição de “poucos”, não estaria garantida a existência de um indivíduo para satisfazer qualquer sentença nos axiomas e nos teoremas. Destaca-se, porém, que outras propriedades apontadas para o quantificador “poucos”, nas seções anteriores, seriam mantidas, como a de estar associada a conjuntos de indivíduos que apresentem um “comportamento incomum”, no sentido de que não é o comportamento usual no universo.

Observa-se, entretanto, que também essa proposta para a formalização da noção de “poucos” não é uma lógica modulada, pois o axioma (Ax3) $Qx\ (\varphi(x)) \rightarrow \exists x\ (\varphi(x))$ de $L(Q)$ não está presente, uma vez que o vazio contém poucos indivíduos.

Não se optou por essa noção de "poucos" neste trabalho por se julgar anti-intuitiva a propriedade de que se nenhum indivíduo satisfaz uma proposição, então poucos a satisfazem. Como exemplo, apresenta-se a seguinte situação: se alguém disser "poucos indivíduos se inscreveram no evento", com certeza alguém se inscreveu no evento.

Considere-se agora outra possibilidade para a noção de "poucos", mais associada ao ambiente matemático de teoria dos conjuntos, ao atender à questão da inclusão, ou subalternação, de conjuntos: se uma sentença satisfaz muitos indivíduos, então ela também satisfaz poucos. Esta noção de "poucos" gera um sistema distinto ao proposto nesta Dissertação. Com base nesta noção para "poucos", se todos os indivíduos do universo satisfazem determinada sentença, então "muitos" a satisfazem e, por conseguinte, poucos indivíduos a satisfazem.

Considera-se que essa noção para "poucos", associada à noção de subalternação de conjuntos, deve ser entendida como "poucos ou mais", comparando com "todos" e "alguns" do quadrado das oposições de Aristóteles. Assim, nesta situação, o quantificador "poucos" teria os seguintes aspectos:

(a) Se todos os indivíduos do universo satisfazem determinada proposição, então poucos também a satisfazem.
(b) Se poucos indivíduos satisfazem determinada proposição, então existe alguém que satisfaz essa proposição.

Denominando por K* um quantificador que atenda essas condições, temos que o sistema gerado para este quantificador seria um caso particular das lógicas moduladas:

(Ax1) $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (K^*x\ (\varphi(x)) \leftrightarrow K^*x\ (\psi(x)))$;

(Ax2) $K^*x\ (\varphi(x)) \rightarrow K^*y\ (\varphi(y))$, se y é livre para x em φ (x);

(Ax3) $K^*x\ (\varphi(x)) \rightarrow \exists x\ (\varphi(x))$;

(Ax4) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow K^*x\ \varphi(x)$.

Tem-se, assim, como mencionado, que se muitos indivíduos satisfazem determinada proposição, então poucos também o satisfazem. Observa-se que esta noção de "poucos" geraria um sistema com o mesmo conjunto de axiomas construído para o quantificador "muitos", proposto por Grácio (1999).

Com essa noção de poucos não há como dualizar o quantificador "muitos", uma vez que formalmente, ela comporta-se como o próprio quantificador "muitos". Considera-se que esta noção de "poucos" seja de uso mais complicado, pelo fato de não se poder representar uma proposição que satisfaça "poucos" indivíduos, mas não satisfaz "muitos".

Para G o quantificador "muitos" de Grácio (1999) e K* o quantificador "poucos", e assumindo que a recíproca da contrária seja válida para um sistema lógico que contenha estes dois quantificadores, tem-se que:

1. $Gx\, \varphi(x) \rightarrow K^*x\, \varphi(x)$
2. $\neg K^*x\, \varphi(x) \rightarrow \neg Gx\, \varphi(x)$

Tem-se que (1) é verdadeira se, e somente se (2) é verdadeira.

Como um exemplo para explicitar os problemas de um sistema construído para esta segunda noção de "poucos", considere-se as seguintes sentenças: "Muitos brasileiros vivem na região sudeste" e "Não são poucos brasileiros que vivem na região sudeste". Estas duas sentenças parecem razoavelmente intuitivas, uma vez que ambas parecem verdadeiras, porém considerando as duas, tem-se que, se "muitos brasileiros vivem na região sudeste" então "poucos brasileiros vivem na região sudeste", pois $Gx\, \varphi(x) \rightarrow K^*x\, \varphi(x)$ e, por outro lado, tem-se que "Não são poucos brasileiros que vivem na região sudeste" implica que "Não são muitos brasileiros que vivem na região sudeste", pois $\neg K^*x\, \varphi(x) \rightarrow \neg Gx\, \varphi(x)$. Desse modo, tem-se que "muitos brasileiros vivem na região sudeste" e "não são muitos brasileiros que vivem na região sudeste", são sentenças verdadeiras, ao se assumir que as duas iniciais são verdadeiras, o que seria uma contradição, uma vez que "muitos" indivíduos satisfizerem uma proposição, tem-se que "muitos" também não a satisfazem.

Tentar encontrar uma situação onde "poucos" indivíduos satisfazem determinada sentença implica que "muitos" não satisfazem essa sentença, tem-se que se "muitos" satisfazem, então “poucos” não a satisfazem, contrariando o conceito inicial de que sempre que “muitos” indivíduos satisfazem uma determinada sentença, “poucos” também a satisfazem. Por este motivo, por não se encontrar uma oposição entre “poucos” e “muitos”, esta noção de “poucos” não foi a adotada nesta Dissertação.

Uma terceira noção de “poucos”, diferente das duas anteriores apresentadas nesta seção, é uma tentativa de construir uma axiomática para o quantificador “poucos” fazendo com que a lógica do poucos, proposta nas seções anteriores, seja uma lógica modulada, porém com dificuldade na oposição entre “muitos” e “poucos”.

Nesta situação, considere-se que a noção de “poucos” apresente as seguintes propriedades:

(a) Se o conjunto de indivíduos que satisfaz uma proposição φ satisfaz ψ, i.e., $[\varphi]$ está contido em $[\psi]$, e existem indivíduos que satisfazem φ, então se poucos indivíduos satisfazem ψ, poucos indivíduos satisfazem φ.
(b) Se poucos indivíduos satisfazem uma proposição φ, então existe alguém que satisfaz φ.
(c) Se todos os indivíduos satisfazem uma proposição φ, então poucos satisfazem a proposição φ.
(d) Se muitos indivíduos satisfazem uma proposição φ, então não são poucos que a satisfazem.

Para diferenciar esta noção da anterior, conclui-se que “muitos” não implica “poucos”, ou seja, apesar de, se todos indivíduos satisfazem uma proposição, tem-se que “muitos” satisfazem e “poucos” satisfazem, não se tem que se “muitos” satisfazem, então “poucos” satisfazem.

Para essa intuição de “poucos”, denominando por K’ o seu quantificador e G o quantificador da lógica do muito de Grácio (1999), os axiomas seriam:

(Ax1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (K'x\, \varphi(x) \leftrightarrow K'x\, \psi(x))$;

(Ax2) $K'x\, \varphi(x) \rightarrow K'y\, \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$;

(Ax3) $K'x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$;

(Ax4) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow K'x\ \varphi(x)$;

(Ax5) $(\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \exists x\ \varphi(x)) \rightarrow (K'x\ \psi(x) \rightarrow K'x\ \varphi(x))$.

(Ax6) $Gx\ \varphi(x) \rightarrow \neg K'x\ \varphi(x)$

Assim, por conta do Ax6 que afirma que "se muitos indivíduos satisfazem uma proposição, então, não são poucos que a satisfazem", este sistema lógico também não seria uma lógica modulada.

Para esta terceira noção e formalização para "poucos", ao reunir em um único sistema lógico, a lógica do muito e os axiomas Ax1 a Ax6 acima apresentados, por conta do axioma Ax3 "$\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Gx\ \varphi(x)$" da lógica do muito, tem-se que se todos os indivíduos satisfazem uma proposição, então "poucos" satisfazem e "poucos" não satisfazem, assim como, "muitos" satisfazem e "muitos" não satisfazem, pois a partir do axioma Ax3 da lógica do muito e do axioma (Ax6) acima apresentado, temos que $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \neg K'x\ \varphi(x)$. Mas, pelo (Ax4) acima, tem-se que se todos indivíduos satisfazem uma proposição, então poucos a satisfazem, e portanto, "poucos" a satisfazem e "poucos" não a satisfazem. Para obter que "muitos" satisfazem e "muitos" não satisfazem, basta considerar a recíproca da contrária do axioma (Ax6) apresentada para esse conceito de "poucos".

Portanto, se for considerada a segunda ou a terceira noção e consequente formalização de "poucos", haveria problemas, como "muitos" e "'muitos' não", e "poucos" e "'poucos' não". Ainda, além de não se ter o dual do quantificador "poucos", se obteria um sistema considerado menos intuitivo que o proposto nesta Dissertação. Quanto à primeira noção, em que o vazio possui "poucos" elementos, considera-se que ela pode ser algo a ser estudado posteriormente, quando a preocupação com a intuição desse quantificador não estiver no contexto.

3.6.2 Oposição entre "muitos" e "poucos"

Compara-se, inicialmente, a lógica do poucos, proposta na Seção 3.3, com a lógica do muito, de Grácio (1999), apresentada no Capítulo 2.

Primeiramente, é possível afirmar que o quantificador "poucos", desenvolvido, não é dual ao quantificador "muitos", no sentido proposto por Barwise e Cooper (1981), pois, enquanto se tem: "se todos indivíduos satisfazem uma certa sentença, então muitos também a satisfazem", pela lógica do muito, (Ax3), não se tem o seu dual na lógica do poucos: "se nenhum indivíduo satisfaz uma sentença, então poucos também a satisfazem" uma vez que se construiu uma lógica dependente da existência de indivíduos, admitindo ser esse o senso comum, pois ao falar que existem poucas pessoas em uma sala de aula, tem-se em mente que existe alguém, ou seja, a sala não está vazia.

Assim, seguindo a linha de Peterson (1979), uma proposição ou sentença do tipo "poucos S são P" é contraditória a uma do tipo "muitos S são P", considerando, claro, que a proposição ou sentença tratada não tenha um conjunto vazio de elementos que a satisfaçam. Assim, do mesmo modo que no quadrado das oposições, construído no Capítulo 1 desta Dissertação, uma sentença do tipo "poucos S são P" implicaria que "muitos S são não P". Portanto, pelo Ax3 da lógica do poucos, se "poucos S são P", então "existe S que é P". Em termos formais, se poderia escrever o seguinte:

$$Kx\,\varphi(x) \rightarrow (Gx\,\neg\varphi(x) \wedge \exists x\,\varphi(x)) \qquad (1)$$

Analisando o que acontece se "muitos" indivíduos não satisfazem uma determinada sentença, não se pode dizer que seria equivalente a "não são muitos" que satisfazem essa mesma sentença, isto pode ser visto em Grácio (1999, p. 174), "intuitivamente, se uma proposição não pertence ao conjunto de crenças, não necessariamente sua negação pertence a tal conjunto".

Fazendo, agora, a recíproca da contrária da forma anterior, tem-se a implicação do que acontece quando há "muitos" indivíduos satisfazendo uma proposição ou sentença.

De (1) tem-se

$$(\neg Gx\,\neg\varphi(x) \vee \neg\exists x\,\varphi(x)) \rightarrow \neg Kx\,\varphi(x) \qquad (2)$$

Portanto, se não são "muitos" indivíduos que não satisfazem determinada sentença, ou se não existem indivíduos que satisfazem essa sentença, tem-se que "não são poucos" que a satisfazem.

Agora, considerando que “poucos S são não P” implica que “muitos S são P”, e utilizando o Ax3 da lógica do poucos, tem-se que “poucos S são não P” implica “existe S que é não P”. Em termos formais, pode-se escrever:

$$Kx\,\neg\varphi(x) \rightarrow (Gx\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\neg\varphi(x)) \qquad (3)$$

Fazendo a recíproca da contrária de (3):

$$(\neg Gx\,\varphi(x) \vee \neg\exists x\,\neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Kx\,\neg\varphi(x) \qquad (4)$$

Disso, temos:

$$(\neg Gx\,\varphi(x) \vee \forall x\,\varphi(x)) \rightarrow \neg Kx\,\neg\varphi(x) \qquad (5)$$

Assim, se não são “muitos” indivíduos que satisfazem determinada sentença ou se todos satisfazem, temos que não são “poucos” que não satisfazem essa sentença.

Outra maneira de comparar o quantificador “muitos” com o quantificador “poucos” é utilizando a forma intuitiva com a qual a lógica do poucos foi construída. Deste modo, considera-se que, quando uma proposição é satisfeita por “poucos” indivíduos, então existem indivíduos que a satisfazem, mas ela não é satisfeita por muitos, ou seja, tem-se:

$$Kx\,\varphi(x) \rightarrow (\neg Gx\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\varphi(x)) \qquad (6)$$

Em que, quando se faz a recíproca da contrária, se chega na sentença:

$$(Gx\,\varphi(x) \vee \neg\exists x\,\varphi(x)) \rightarrow \neg Kx\,\varphi(x) \qquad (7)$$

Agora, da mesma forma intuitiva, quando uma proposição não é satisfeita por “poucos” significa que ela é satisfeita por “muitos” ou por nenhum. Deste modo:

$$\neg Kx\,\varphi(x) \rightarrow (Gx\,\varphi(x) \vee \neg\exists x\,\varphi(x)) \qquad (8)$$

Fazendo a recíproca da contrária de (8):

$$(\neg Gx\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\varphi(x)) \rightarrow Kx\,\varphi(x) \qquad (9)$$

Então, de (6) e (9), e de (7) e (8) tem-se:

$$Kx\,\varphi(x) \leftrightarrow (\neg Gx\,\varphi(x) \wedge \exists x\,\varphi(x)) \qquad (10)$$

$$\neg Kx\ \varphi(x) \leftrightarrow (Gx\ \varphi(x) \vee \neg\exists x\ \varphi(x)) \qquad (11)$$

Julga-se que estas duas formas ─ (10) e (11) ─ são as que melhor expressam o comportamento entre “muitos” e “poucos”, sem contradições como as que acontecem ao se utilizar o trabalho de Peterson (1979) para aplicar o novo sistema.

3.6.3 Algumas considerações sobre os Universais de Barwise e Cooper

Analisa-se, agora, os Universais de Barwise e Cooper (1981), a fim de verificar quais deles são satisfeitos pelo quantificador “poucos”, criado. Lembre-se que os Universais são “fatos que se conservariam para todas as linguagens humanas naturais e que as distinguiriam de outras linguagens logicamente possíveis” (Barwise, Cooper, 1981, p. 176). Assim, será aceitável que alguns dos Universais não sejam satisfeitos pelo quantificador “poucos”. Além disto, é preciso enfatizar que, neste trabalho, se consideram as expressões “poucos”, “muitos”, “maioria”, etc., como quantificadores, por se definir, antecipadamente, o universo de discurso, enquanto Barwise e Cooper (1981) consideram um quantificador como a junção de um determinante (poucos, muitos, maioria, etc.) e uma NP (expressão substantiva). Apresentam-se, a seguir, somente os Universais que tratam de quantificadores, e não dos específicos para NPs.

O primeiro Universal que trataria realmente deste quantificador seria o **Universal 4: sobre Determinantes que criam NPs indefinidas** (BARWISE; COOPER, 1981, p. 181), mas como se tem sempre o universo de discurso previamente estabelecido e o quantificador não é uma junção de um determinante com uma NP, sempre as NPs serão definidas nesta análise, e, portanto, o determinante $||K||(A)$ sempre está definido.

O Universal 5, que trata da monotonicidade de um quantificador, já tem uma tabela com o quantificador “poucos” e, portanto, pode-se dizer que o quantificador K, proposto, é monotônico decrescente. Analisando o Quadro 1 do Capítulo 1, também é possível afirmar que o quantificador “poucos” K, ou no caso o determinante “poucos” K, é fraco, assim como o quantificador “muitos”, pela análise de Barwise e Cooper (1981), também é fraco, porém, “muitos” é monotônico crescente.

Pela Definição 1.2.7. (p. 19), e pela *família quase fechada inferiormente* e pela *família fechada superiormente própria*, de Grácio (1999), observa-se, facilmente, que o quantificador “muitos” é persistente e o quantificador “poucos” é anti-persistente. Assim, o Universal 8 refere-se ao quantificador “muitos” e não ao “poucos”, pois, como já visto, “muitos” é monotônico crescente e fraco.

Dadas as definições do quantificador “muitos”, de acordo com Grácio (1999), e as do quantificador “poucos”, deste trabalho, lembre-se mais uma vez que, de acordo com a Definição 1.2.8. (p. 20), o quantificador “poucos” não é dual do quantificador “muitos”.

Estes são os Universais que podem ser considerados ao se tratar do quantificador “poucos”. Uma análise mais precisa surgiria se o conceito de quantificador aqui empregado fosse idêntico ao usado por Barwise e Cooper (1981).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Grácio (1999) apresentou uma família de lógicas que estendem a lógica clássica de primeira ordem por meio da inclusão de novos quantificadores, que buscam formalizar as noções usuais de expressões como "maioria", "muitos" e "uma 'boa' parte". Além disto, mostrou que a lógica dos ultrafiltros apresentada por Sette, Carnielle e Veloso (1999) também faz parte do conjunto de lógicas intitulado lógicas moduladas.

Neste trabalho, apresentam-se algumas considerações acerca de quantificadores, por meio de autores que trabalharam com este tema, e fundamentalmente fez-se a proposta de formalização de um novo quantificador generalizado a fim de capturar a noção de "poucos" da linguagem natural. Entretanto, para manter o conceito que se julga ser o mais intuitivo, o quantificador proposto não se configura como dual ao quantificador "muitos", mas tem aspectos relevantes de oposição a este, tais como a propriedade vista no capítulo anterior, que se "muitos indivíduos satisfazem uma certa proposição", então "não são poucos que a satisfazem".

Com o quantificador "poucos" K, proposto, pode-se formalizar proposições do tipo "poucos x satisfazem φ" através de Kx $\varphi(x)$. Tem-se que o sistema apresentado para este quantificador, a lógica do poucos, é monotônico, consistente, correto e completo.

Considera-se que, a partir deste novo quantificador proposto para a noção de poucos, pode-se estabelecer um novo conjunto de lógicas em oposição às lógicas moduladas. Além da lógica do poucos, em oposição à lógica do muitos, tem-se a *lógica da minoria*, em oposição à lógica da maioria; a *lógica do quase nenhum*, em oposição à lógica dos ultrafiltros; e a *lógica do improvável*, em oposição à lógica do plausível.

Todas estas lógicas podem, assim como aquelas sob o escopo das lógicas moduladas, pertencer a uma família de lógicas que apresenta um conjunto de axiomas comum a elas. Considerando L a lógica de primeira ordem com identidade, pode-se estender L com um novo quantificador D. Denotada esta extensão por L(D), além dos axiomas da lógica clássica de primeira ordem, com a igualdade, esta família de lógica apresentaria os seguintes axiomas para o quantificador D:

(Ax1) $\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Dx\, \varphi(x) \leftrightarrow Dx\, \psi(x))$;

(Ax2) Dx $\varphi(x) \rightarrow$ Dy $\varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$;

(Ax3) Dx $\varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$;

(Ax4) Dx $\varphi(x) \rightarrow \exists x\ \neg\varphi(x)$.

Assim, este seria o conjunto de axiomas comuns para a construção das lógicas da *minoria*, do *improvável* e do *quase nenhum*. Estas novas lógicas, em conjunto com a lógica do poucos, poderiam ser consideradas *lógicas paramoduladas* ou *quase-moduladas*.

Como sugestão de trabalhos futuros, em continuidade aos estudos aqui desenvolvidos, propõe-se:

- o estudo da lógica do improvável e da lógica do quase nenhum, bem como da adequação dos axiomas comuns acima propostos ao conjunto de lógicas em oposição às lógicas moduladas;
- o desenvolvimento das formalizações lógicas para cada tipo de interpretação de um quantificador da linguagem natural, como proposto na Seção 3.6.1 desta Dissertação;
- o desenvolvimento de *tableaux* para a lógica do poucos, como sequência dos trabalhos de Silvestrini (2005) e Silva (2008).

Como explicitado no princípio desta Dissertação, a questão da quantificação é de interesse de várias áreas do conhecimento. O quantificador "poucos", bem como a própria noção de "poucos", quase não foi abordada na literatura. As análises realizadas neste trabalho acerca deste quantificador são importantes para a Filosofia na medida em que consideram aspectos importantes e diferentes que uma sentença quantificada pode ter, e ao se criar um sistema consistente, correto e completo, está se atendendo aos critérios desejados para qualquer sistema lógico, aumentando o escopo de formalização de expressões da linguagem natural e da lógica como um todo.

REFERÊNCIAS

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, Providence, v. 4, p. 159-219, 1981.

BENTHEM, J. V. Question About Quantifiers. *The Journal of Symbolic Logic*, Poughkeepsie, v. 49, n. 2, p. 443-466, 1984.

BLACKBURN, S. *Dicionário Oxford de Filosofia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. p. 328-329. 1997.

CARNAP, R. *Logical foundations of probability*. London: Routledge and Kegan Paul, 1950.

CARNIELLI, W.A.; VELOSO, P.A.S. Ultrafilter logic and generic reasoning. In: KURT GÖDEL COLLOQUIUM, 5, 1997, Berlin. *Proceedings*... Berlin: Springer-Verlag, 1997. p.34-53.

CARNIELLI, W. A.; GRÁCIO, M. C. C. Modulated logics and flexible reasoning. *Logic and Logical Philosophy*, v. 17, p. 211-249, 2008.

CHOMSKY, N. On Binding. *Linguistic Inquiry*, Cambridge, 1980, p. 1-46.

CONIGLIO, M. E. Um curso de Teoria de Modelos. *Notas de Aula*. Campinas, v. 1, p. 1 - 53, 1999. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/teoriademodelos.pdf>. Acesso em: 18 jun 2011.

FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. Sobre os quantificadores generalizados. In: MARTINS, R. A.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H.; MARTINS, L. A.C. P. (Org.). *Filosofia e História da Ciência no Cone Sul*. Campinas: Associação de Filosofia e História da Ciência (AFHIC), 2008. p. 197-206.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. Algebraic elements for the notion of 'many'. *CLE e-Prints*, Campinas, v. 9, p. 1-22, 2009. Disponível em: < ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/e-prints/vol.9,n.1,2009.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2010.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. A propositional version for the plausible. *Principia*, Florianópolis, v. 1, p. 41-53, 2010.

GALLAGHER, N. A., RESCHER, N. Venn Diagrams for Plurative Syllogisms. *Philosophical Studies*. Tucson, v. 16, n. 4, p. 49-55. 1965.

GOLZIO, A. C. J. *Elementos algébricos para a noção de 'poucos' e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos*. 2011. 97 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia)-Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Câmpus Marília, Marília, 2011.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. 1999. 194 f. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência)-Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A. Lógicas Moduladas: implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, Marília, v. 4, p. 1-13, 2005.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Muitos: formalizando um conceito impreciso. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, Marília, v. 5, p. 20-28, 2006.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Linguagem e inferência indutiva em sistemas dedutivos. In: COELHO, J. G.; VINENTE, M. M. (Org). *Pensamento e Linguagem*: subjetividade, comunicação e arte. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008. p. 141-166.

HEGENBERG, L. *Dicionário de Lógica*. São Paulo: Pedagógica e Universitária. 1995.

HIGGINBOTHAM J. Mass and Count Quantifiers. *Quantification in Natural Language*, Dordrecht, p. 383-419, 1995.

HINTIKKA, J. SANDU, G. *What is a Quantifier?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

KAUFMANN, M. The quantifier "there exist uncountably many" and some of its relatives. In: BARWAISE, J.; FEFERMAN, S. *Model-theoretic logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1985. p. 123-176.

KEISLER, H. J. Logic with the quantifier "there exist uncountably many". *Annals of Mathematical Logic*, Amsterdam, v.1, p.1-93, 1970.

LINDSTRÖM, P. First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers. *Theoria*: a swedish journal of philosophy and psycology, [S.l.], v. 32, 1966. p. 186-195.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 3.ed. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.

MONTAGUE, R. *Formal Philosophy*: Selected Papers of Richard Montague. New Haven, CT: Yale University Press, 1974.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fund. Mathematical*, Warszawa, v.44, p.12-36, 1957.

PETERSON, P. L. On the logic of "few", "many", and "most". *Notre Dame Journal Logic*, Notre Dame, v.20, p.155-79, 1979.

POPPER, K. R. *Conhecimento objetivo*. São Paulo: EdUSP, 1975.

________. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo: EdUSP, 1975a.

RESCHER, N. Plurality-quantification. *The Journal of Symbolic Logic*, Poughkeepsie, v.27, p.373-4, 1962.

SANZ, M. J. F. (Org.). *Filosofía de La Lógica*. Madri: Editora Tecnos, 2007.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (Ed.) *Pratica*: Proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, 1999. p. 127-58.

SGRO, J. Completeness theorems for topological models. *Annals of Mathematical Logic*, v. 11, p.173-93, 1977.

SILVA, M. M. da. *A lógica do Muito em um sistema de tablôs*. 2008. 120 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia)-Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Câmpus Marília, Marília, 2008.

SILVESTRINI, L. H. C. *Tableaux e Indução na Lógica do Plausível*. 2005. 133 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia)-Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Câmpus Marília, Marília, 2005.

VELOSO, P. A. S. *On 'almost all' and some presuppositions*. Manuscrito (UNICAMP), Campinas, v. 22, n. 2, p. 469-505, 1999.

VELOSO, P. A. S. *On a logic for 'almost all' and generic reasoning*. Manuscrito (UNICAMP), Campinas, v. 25, n. 1, p. 191-271, 2002.

VELOSO, P. A. S.; CARNIELLI, W. Logics for qualitative reasoning. In: RAHMAN, S.; SYMONS, John. (Org.). *Logic, Epistemology and the Unity of Science*. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 487-526.