



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Caroline de Arruda Signorini

Condições de Otimalidade em Cálculo das Variações no Contexto Não-Suave

São José do Rio Preto

2017

Caroline de Arruda Signorini

Condições de Otimalidade em Cálculo
das Variações no Contexto Não-Suave

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Matemática Aplicada, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP - Proc. 2014/24271-6

Orientador: Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

São José do Rio Preto

2017

Signorini, Caroline de Arruda.

Condições de otimalidade em cálculo das variações no contexto não-suave / Caroline de Arruda Signorini. -- São José do Rio Preto, 2017
127 f. : il.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Otimização matemática.
4. Cálculo das variações. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
II. Título.

CDU – 517.91.01

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Caroline de Arruda Signorini

Condições de Otimalidade em Cálculo
das Variações no Contexto Não-Suave

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Matemática Aplicada, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
Professor Titular
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Roberto Andreani
Professor Adjunto
UNICAMP - Campinas

São José do Rio Preto, 7 de março de 2017.

*Dedico à minha
família.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades e pelas pessoas que pude conhecer.

À minha mãe e meu pai, Patricia e Antonio Carlos, pelo amor; por sempre terem me oferecido o melhor que podiam e me incentivado nos estudos e na superação das difíceis etapas da vida; por minha educação.

Ao Nenê, meu amigo e irmão-cão, pelas recepções animadas, pelos felizes momentos juntos, pelo carinho e companhia.

Ao Bruno, meu querido namorado, que me apoia e alegra ainda que nos meus momentos mais ínfimos; que confia e me encoraja a superar meus medos; por estar à disposição quando preciso, sempre paciente e compreensivo.

A meus amigos e amigas, Guilherme, Renan, Juliana, Kamila e Amanda, pelos momentos juntos, pelas experiências e sorrisos, pela união e amizade.

A meus amigos do Ibilce, Ana Livia, Frederick, Wender, Liliam, Raul, Carlos, Samuel, Sabrina, Moisés, Alisson, Otávio, Eliton, Heloísa, Willian, Junior e Rafael, entre outros, pela amizade, conselhos e apoio.

Aos professores, Hermes, Waldemar, Cláudio, Flávia, Évelin, Sílvia, Weber, Juliana, Ermínia e Gorete, entre outros, pelos ensinamentos matemáticos e de vida.

A meu orientador, Valeriano, pela paciência e dedicação para o desenvolvimento deste trabalho.

À Comissão Examinadora, Geraldo, Roberto, Sílvia e Washington, pela disponibilidade.

À FAPESP pelo apoio financeiro por meio do processo 2014/24271-6.

*“Tempo perdido é uma das
ilusões do mundo”.*

**Bruno Caldeira Carlotti de
Souza**

Resumo

Nosso principal propósito neste trabalho é o estudo de condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de Cálculo das Variações no contexto não-suave. Este estudo partirá da formulação básica suave, passando por problemas com restrições Lagrangianas, até o caso em que consideramos Lagrangianas não-suaves e soluções absolutamente contínuas. Neste caminho, abordaremos um importante avanço na teoria de Cálculo das Variações: os resultados de existência e regularidade de soluções. Além das condições necessárias, analisaremos as condições suficientes através de um conceito de convexidade generalizada, o qual denominamos E-pseudoinvexidade.

Palavras-chave: Cálculo das Variações, Lagrangianas não-suaves, Condições de otimalidade, Soluções absolutamente contínuas, Existência e regularidade de soluções, Convexidade generalizada.

Abstract

Our main purpose in this work is the study of necessary and sufficient optimality conditions for Calculus of Variations problems in the nonsmooth context. This study will comprehend the smooth basic formulation, constrained problems (with Lagrangian restrictions), non-smooth Lagrangians and absolutely continuous solutions. Moreover, we will approach an important advance in Calculus of Variations theory: the existence and regularity of solutions. In addition to necessary conditions, we will analyze sufficient conditions through a generalized convexity concept, which we called E -pseudoinvexity.

Keywords: *Calculus of variations, Nonsmooth Lagrangians, Optimality conditions, Absolutely continuous solutions, Existence and regularity of solutions, Generalized convexity.*

Sumário

Introdução	11
1 A teoria clássica do Cálculo Variacional e extremais Lipschitz	14
1.1 O problema clássico e condições necessárias de primeira e segunda ordens	14
1.1.1 A equação de Euler e a condição de Legendre	16
1.1.2 Duas variações do problema básico	20
1.2 Extremais não suaves	21
1.2.1 Regularidade Lipschitz, suficiência por convexidade e a condição necessária de Weierstrass	24
2 Soluções absolutamente contínuas	27
2.1 Existência e regularidade de soluções e condições necessárias de otimalidade . .	27
2.2 Condições suficientes por pseudoinvexidade	42
3 A regra dos multiplicadores	47
3.1 A regra de multiplicadores clássica	47
3.2 Uma regra de multiplicadores moderna	50
3.3 Condições suficientes por E-pseudoinvexidade	51
3.4 Mais alguns teoremas de multiplicadores	58
4 Lagrangianas não-suaves	62
4.1 O Problema Lipschitz de Bolza	62
4.2 Condições suficientes por convexidade	87
4.3 Condições suficientes por E-pseudoinvexidade no contexto não-suave	90
4.4 Condições de Tonelli-Morrey Generalizadas	97

Conclusões	100
Referências	103
A ANEXO - Pré-requisitos	104
A.1 Integral de Lebesgue e funções absolutamente contínuas	104
A.2 Cones	107
A.3 Funções e conjuntos convexos	109
A.4 Multifunção e seleção mensuráveis	111
A.5 Semicontinuidade de funcionais integrais	115
A.6 Alguns resultados de Otimização	116
A.7 Análise não-suave	117
A.8 Alguns resultados de Análise funcional	122
Lista de Símbolos e Índice Remissivo	125

Introdução

O Cálculo das Variações é um dos ramos clássicos da Matemática. Seu início é impreciso. Alguns dizem que se inicia no momento em que Euler, estudando o trabalho de Lagrange, adotou o presente nome, embora este não seja, em verdade, o real momento de inserção do assunto. Poderíamos atribuir seu início a um dos problemas mais antigos na Matemática: a desigualdade isoperimétrica. Uma variante desta desigualdade é conhecida como o problema de Dido.¹ Várias provas desta desigualdade foram encontradas desde o tempo de Zenodorus, em torno de 200 a.c. Algumas outras tentativas de prova são atribuídas a Euler, Galileu, Legendre e Ricatti. Uma prova de acordo com os padrões modernos é devida a Weierstrass e foi estendida ou mostrada com diferentes ferramentas por Carathéodory, Hurwitz, Lebesgue e Tonelli, entre outros.

Outro importante problema considerado como ponto de partida da teoria foi o trabalho de Fermat na ótica geométrica. Este trabalho, também conhecido como Princípio de Tempo Mínimo de Fermat, foi utilizado em 1662 para mostrar como um raio de luz era refratado na interface entre dois meios óticos de densidades distintas. A análise de Fermat pode ser vista como mais apropriada para datar o início de Cálculo das Variações pelo fato de ele ter utilizado métodos de cálculo para minimizar o tempo de passagem do raio de luz através dos dois meios. Em 1696, John Bernoulli adaptou seu método para resolver o Problema da Braquistócrona. Apresentaremos este problema no Capítulo 1, Exemplo 1.5.

O Cálculo Variacional, também conhecido como Cálculo das Variações, tem uma longa história de interação com outras ramificações da Matemática, como a geometria e as equações diferenciais, e da Física, particularmente a mecânica. Recentemente, o Cálculo Variacional vem encontrando aplicações em outros campos, como economia, engenharia e recursos renováveis. Grande parte da matemática subjacente à Teoria do Controle, por exemplo, pode ser

¹ Para mais detalhes sobre o Problema de Dido, ver Troutman [25], p. 32, Problema 1.5; e p. 258, Exemplo 2*.

considerada parte do Cálculo Variacional.²

Em se tratando da teoria clássica do Cálculo Variacional, podemos estudar condições necessárias e suficientes de otimalidade em textos introdutórios ao assunto, como os livros de van Brunt [26], Leitão [19] e Leitmann [18].

Ainda que a teoria clássica do Cálculo das Variações tenha origem no século XVII, importantes questões, como as regras de multiplicadores para os problemas com restrições e o teorema de existência de soluções, somente foram elucidadas no século passado, devido ao desenvolvimento nos estudos de Análise Funcional e Cálculo Não-suave.

Problemas com restrições são tratados nos livros de Clarke [5], Pinch [21], Hestenes [14] e Troutman [25], entre outros, com especial atenção ao primeiro, visto que aborda uma regra de multiplicadores redefinida para um problema com restrição Lagrangiana abstrata. Já a questão da existência e regularidade de soluções podemos encontrar nos livros de Clarke [5] e Dacorogna [6]. Problemas de Cálculo das Variações no contexto não-suave são tratados no livro de Clarke [5].

É conhecido que, geralmente, as condições necessárias de otimalidade para problemas variacionais são suficientes por meio da convexidade dos dados envolvidos, como podemos ver em Clarke [5]. Isso também ocorre quando utilizados certos conceitos convexidade generalizada: em Arana-Jiménez, Osuna-Gómez, Ruiz-Garzón, Rojas-Medar [1], são abordados problemas variacionais com restrições de desigualdade e multiplicadores estão envolvidos na definição; já em Rojas-Jara [24], onde são abordados problemas variacionais com restrições de igualdade, foram obtidas condições suficientes sem a presença dos multiplicadores na definição. Em Pinch [21], encontramos outros modos de se obter condições suficientes para problemas em Cálculo das Variações: um deles é por meio de campos de extremais, onde temos a Condição Integral de Weierstrass; ou também através de semi-campos, onde temos a Condição de Jacobi (nesta situação, o melhor resultado que podemos encontrar é um extremal mínimo local forte).

Neste trabalho, temos por objetivo principal o estudo de condições de otimalidade tanto necessárias quanto suficientes para problemas de Cálculo das Variações no contexto não-suave, partindo de sua formulação básica até os casos com restrições. Este estudo será baseado no livro do Clarke [5], sempre se atentando a detalhes importantes e buscando aprofundamentos em outras fontes presentes nas Referências deste trabalho (citadas ao longo do texto).

² As informações deste e dos outros dois parágrafos acima foram retiradas dos livros Dacorogna [6], Goldstine [12], Pinch [21] e Troutman [25].

No Capítulo 1, estudaremos as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (Equação de Euler) e de segunda ordem (Condição de Legendre) da teoria clássica e consideraremos a extensão do conjunto de funções admissíveis dos problemas para funções Lipschitz contínuas.

No Capítulo 2, abordaremos a importante questão de existência de soluções através do Teorema de Tonelli, e, por meio de convexidade e hipóteses de crescimento, examinaremos a regularidade de soluções. Também apresentaremos a pseudoinvexidade: tal conceito de convexidade generalizada estabelece que a equação de Euler também é uma condição suficiente de otimalidade, estendendo para o contexto de Cálculo das Variações o conceito introduzido na Programação Matemática por Hanson [13].

Na formulação com restrições, abordada no Capítulo 3, estudaremos a regra de multiplicadores clássica, a qual envolve uma condição de qualificação do tipo posto completo da matriz jacobiana da função restrição. Uma regra de multiplicadores “moderna” será estudada para o problema que contém uma inclusão em lugar de uma equação, sendo, portanto, um tipo de restrição Lagrangiana mais geral.

Além disto, no Capítulo 4, trataremos o problema de Bolza, trabalhando com Lagrangianas não-suaves e um conjunto de condições necessárias de otimalidade envolvendo a inclusão de Euler, o que nos exigirá o uso de ferramentas da Análise Não-suave.

Ademais, nos Capítulos 3 e 4, introduziremos a E-pseudoinvexidade (Euler-pseudoinvexidade): um conceito de convexidade generalizada para problemas variacionais através do qual as condições de transversalidade e a equação/inclusão de Euler tornam-se suficientes para otimalidade global. Tal conceito de convexidade generalizada possui a peculiaridade de ser o mais geral possível, no sentido de que todo problema variacional em que as soluções estacionárias são ótimas necessariamente são E-pseudoinvexos. Os resultados de E-pseudoinvexidade foram obtidos através do estudo e adaptação dos artigos de Oliveira et al. [8–10], o que confere um caráter de originalidade a este trabalho.

Após os quatro primeiros capítulos, encontramos as conclusões deste trabalho, as referências utilizadas, além de um anexo de pré-requisitos contendo os principais conceitos e resultados de Análise Convexa, Análise Funcional, Cálculo Não-suave e Teoria de Seleção Mensurável, entre outros assuntos, os quais foram necessários no desenvolvimento deste texto. Ao final desta dissertação, contamos com o Índice Remissivo com a notação usada.

A teoria clássica do Cálculo Variacional e extremais Lipschitz

Nosso objetivo neste capítulo é “preparar terreno” para uma análise mais aprofundada de problemas de Cálculo Variacional, estudando a teoria clássica, que envolve suavidade dos dados, e a admissão de extremais não-suaves.

1.1 O problema clássico e condições necessárias de primeira e segunda ordens

O estudo dos problemas clássicos do Cálculo das Variações perdura por três séculos, mas o interesse neles não diminuiu, haja visto suas diversas aplicações em áreas como Engenharia, Economia, Mecânica, Equações Diferenciais e Recursos Renováveis.

Basicamente, um problema variacional é um problema de otimização que consiste em *minimizar* um funcional integral do tipo

$$J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt$$

sob uma classe de funções x definidas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ predeterminado.

No **custo** correspondente a x , denotado por $J(x)$, definido acima, a **Lagrangiana** Λ , onde

$$\begin{aligned} \Lambda : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\longmapsto \Lambda(t, x, v) \end{aligned}$$

é uma função de três variáveis, denotadas por (t, x, v) , as quais interpretamos como tempo, estado e velocidade, respectivamente. Nesta seção, trataremos o caso em que essas variáveis são *unidimensionais* e todas as funções envolvidas são *suaves*: supomos que a aplicação Λ é duas vezes continuamente diferenciável e consideramos como candidatas à solução apenas funções $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pertencentes a $C^2[a, b]$, isto é, funções x contínuas cujas derivadas de primeira e segunda ordens, x' e x'' , existem e são contínuas no aberto (a, b) , além de admitirem extensões contínuas no fechado $[a, b]$. Com isso, garantimos que a aplicação $J(x)$ está bem definida no espaço $C^2[a, b]$.

Assim, dados os valores $A, B \in \mathbb{R}$, consideramos o **problema básico** do Cálculo das Variações:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a } x &\in C^2[a, b], \\ x(a) &= A, x(b) = B. \end{aligned} \tag{PB}$$

A seguir, algumas definições e nomenclatura que utilizaremos ao longo deste trabalho.

Definição 1.1. Dizemos que $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função admissível** para o problema (PB) se satisfaz as condições de contorno $x(a) = A$, $x(b) = B$ e pertence ao espaço $C^2[a, b]$.

Definição 1.2. Uma **solução**, um **minimizador** ou **mínimo global** de (PB) é uma função admissível x_* tal que $J(x_*) \leq J(x)$ para qualquer outra função admissível x .

Dizemos que uma função x_* admissível para (PB) fornece um **mínimo local fraco** se, para algum $\varepsilon > 0$, tem-se $J(x_*) \leq J(x)$ para todo x admissível numa **vizinhança fraca** de x_* , isto é, satisfazendo $\|x - x_*\|_\infty < \varepsilon$ e $\|x' - x'_*\|_\infty < \varepsilon$, onde

$$\|v\|_\infty = \max \{|v(t)| : t \in [a, b]\}, \quad v \in C[a, b].$$

Dizemos que uma função x_* admissível para (PB) fornece um **mínimo local forte** para o problema se existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x_*) \leq J(x)$ para toda função admissível x numa **vizinhança**

forte de x_* , isto é, que satisfaz $\|x - x_*\|_\infty \leq \varepsilon$. Note que todo mínimo local forte é, automaticamente, um mínimo local fraco.

Uma nomenclatura bastante utilizada na teoria é a de **Lagrangiana autônoma**, a qual se refere ao funcional Λ quando ele não depende explicitamente da variável t .

Notação: A fim de obter uma notação mais clara, denotaremos por Λ_x e Λ_v as derivadas parciais de primeira ordem da Lagrangiana $\Lambda(t, x, v)$ com respeito às variáveis x e v , respectivamente.

1.1.1 A equação de Euler e a condição de Legendre

Nesta seção, apresentaremos as condições necessárias clássicas que uma solução do problema (PB) deve satisfazer. O resultado seguinte é análogo à Regra de Fermat, a qual diz que uma aplicação diferenciável f atinge seu mínimo num ponto x somente se $f'(x) = 0$.

Teorema 1.3 (Euler, 1744). *Se x_* é uma solução de (PB), então x_* deve satisfazer a equação de Euler:*

$$\frac{d}{dt} [\Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t))] = \Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Demonstração: Ver Clarke [5], pp. 289–290, Teorema 14.2. $\square$

Independente de ser solução ou não do problema, a função $x \in C^2[a, b]$ que satisfaz a equação de Euler é chamada **extremal**. Note que a equação de Euler é uma condição necessária de primeira ordem, a qual também é válida para mínimo local fraco, definido anteriormente.

O seguinte resultado é uma consequência da equação de Euler para o caso em que a Lagrangiana é autônoma.

Proposição 1.4. *Se x_* é um mínimo local fraco para (PB), onde Λ é autônoma, então x_* satisfaz a condição de Erdmann: existe uma constante h de modo que*

$$x'_*(t) \Lambda_v(x_*(t), x'_*(t)) - \Lambda(x_*(t), x'_*(t)) = h \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver Clarke [5], pp. 290–291, Proposição 14.4. $\square$

A Condição Erdmann é obtida da equação de Euler por meio de manipulações algébricas. Ela também é conhecida como Fórmula de Beltrami (ver Komzisk [15], p. 10, equação (1.1)).

Exemplo 1.5. (O Problema da Braquistócrona) *Este problema é um dos mais importantes da história do Cálculo Variacional. Como já mencionado, segundo Hestenes [14], p. 54, o estudo mais sistemático da teoria teve seu início com a análise da Braquistócrona, palavra do grego brachystos (mínimo) chronos (tempo).¹ Ele foi formulado por Galileu em 1638, quem acreditava que a solução era um arco de circunferência. Anos mais tarde, em 1696, foi descrita a primeira resolução correta deste problema, a qual é atribuída a John (ou Johann) Bernoulli, que utilizou do conhecido Princípio de Tempo Mínimo de Fermat de 1662, como consta em Goldstine [12], p. vii. De acordo com Dacorogna [6], John foi seguido de seu irmão James (ou Jakob) Bernoulli e dos matemáticos Leibniz e Newton.*

O Problema da Braquistócrona consiste em encontrar a curva em um plano que minimize o tempo gasto por uma partícula que a percorre apenas sob o efeito da gravidade, partindo de um ponto mais alto e não diretamente acima do ponto de chegada. Matematicamente, podemos enunciar este problema da seguinte maneira: dados $P_0 = (t_0, x_0)$ e $P_1 = (t_1, x_1)$ pontos distintos em um plano vertical, onde P_0 está acima de P_1 , qual é a curva x unindo esses dois pontos de maneira que um corpo de massa m partindo de P_0 a percorra sob influência somente da gravidade alcançando P_1 no menor tempo possível?²

Neste caso, P_0 é um ponto acima de P_1 em relação ao eixo vertical do plano. É claro que se $t_0 = t_1$, a curva procurada é uma reta. Consideremos o caso em que $t_0 \neq t_1$. Baseado em conceitos da Física Elementar, o problema representa uma conversão de energia potencial em energia cinética.

A energia potencial de um corpo em qualquer ponto (t, x) do plano, durante o movimento, é dada por

$$E_p = mg(x_0 - x),$$

onde m é a massa do corpo e g é a aceleração da gravidade. Já a energia cinética é dada por

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2,$$

quando assumimos que v é a velocidade do corpo num determinado ponto (t, x) . Como a energia total (potencial + cinética) se encontra em equilíbrio em qualquer ponto durante o movimento,

¹ Retirado de Leitão e Baumeister [19], p. 23, 1.2.7 A Braquistócrona.

² Adaptado de Leitão e Baumeister [19], p. 23, 1.2.7 A Braquistócrona.

então

$$E_c = E_p \iff \frac{1}{2}mv^2 = mg(x_0 - x),$$

e daí, obtemos uma expressão para a velocidade

$$v = \sqrt{2g(x_0 - x)}.$$

Note que a orientação do eixo vertical x é adotada na direção da força gravitacional, para baixo.

Por outro lado, também sabemos que

$$v = \frac{ds}{d\tau},$$

onde s é o comprimento de curva percorrido durante o tempo τ . Sendo assim, escrevemos o tempo necessário para percorrer o comprimento da curva x como

$$\tau = \int_{P_0}^{P_1} d\tau = \int_{P_0}^{P_1} \frac{1}{v} ds.$$

E, usando a expressão de comprimento de curva, obtemos

$$\tau = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2g(x_0 - x)}} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{x_0 - x}} dt.$$

Logo, podemos escrever este como um problema variacional:

$$\text{minimizar } \tau(x) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{x_0 - x}} dt$$

$$\text{sujeito a } x \in C^2[t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

onde denotamos x' por v .

Sendo o termo $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ uma constante, podemos desconsiderá-lo em nossos cálculos. Como a Lagrangiana é autônoma, segue da condição de Erdmann que existe uma constante c_0 tal que

$$v \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{x_0 - x}} \right] - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{x_0 - x}} = c_0 \implies v^2 = \frac{1 - c_0^2(x_0 - x)}{c_0^2(x_0 - x)}.$$

Aqui devemos ter $c_0 \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos um absurdo. Dessa forma,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1 - c_0^2(x_0 - x)}{c_0^2(x_0 - x)} \implies dt = \frac{\sqrt{c_0^2(x_0 - x)}}{\sqrt{1 - c_0^2(x_0 - x)}} dx.$$

Integrando a última igualdade, obtemos

$$t = c_1 + \int \sqrt{\frac{c_0^2(x_0 - x)}{1 - c_0^2(x_0 - x)}} dx.$$

Fazendo a substituição trigonométrica $x_0 - x = \frac{1}{c_0^2} \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)$ na equação acima e reescrevendo a expressão de x em relação à nova variável τ , obtemos

$$t = c_1 + \frac{1}{2c_0^2}(\tau - \sin(\tau)) \quad \text{e} \quad x = x_0 - \left[\frac{1}{c_0} \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^2 = x_0 - \frac{1}{2c_0^2}(1 - \cos(\tau)).$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $(t_0, x_0) = (0, 0)$, de modo a obter a curva parametrizada por

$$t = c_1 + \frac{1}{c_0}(\tau - \sin(\tau)) \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{c_0}(1 - \cos(\tau)),$$

cuja imagem é uma cicloide.³

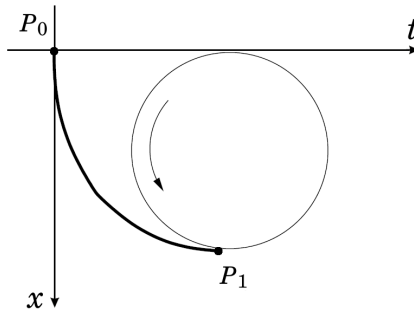


Figura 1.1: Cicloide: solução do Problema da Braquistócrona.

□□□

³ Figura adaptada de Leitão [19], p. 20, Figura 1.4.

Fortalecemos agora a hipótese de regularidade sobre a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v)$, assumindo que $\Lambda \in C^3$, para enunciar a condição necessária de segunda ordem atribuída ao matemático Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Teorema 1.6 (Condição necessária de Legendre, 1786). *Seja x_* um mínimo local fraco para o problema (PB). Então*

$$\Lambda_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver Clarke [5], pp. 293–294, Teorema 14.7. □

1.1.2 Duas variações do problema básico

Há certos problemas variacionais que não predeterminam as condições de contorno inicial ou final. Em tais situações, essa versatilidade dá origem a conclusões adicionais nas condições necessárias. Essas conclusões, conhecidas por **condições de fronteira**, possuem informação sobre os valores inicial e/ou final de uma função admissível x .

Seja $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação continuamente diferenciável. Consideramos o seguinte problema, o qual é conhecido como o *problema de tempo livre*:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in C^2[a, b], \quad x(a) = A. \end{aligned} \tag{PTL}$$

A função dada ℓ corresponde a um termo de custo extra que depende do valor de $x(b)$, que agora não é prescrito.

Teorema 1.7. *Se x_* é um mínimo local fraco do problema (PTL), então x_* é um extremal para Λ e satisfaz a seguinte condição de fronteira:*

$$-\Lambda_v(b, x_*(b), x'_*(b)) = \ell'(x_*(b)).$$

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 303, Teorema 14.19. □

Note que, pelo teorema acima, há uma conservação de informação: a condição de fronteira fornecida pelo resultado compensa a não prescrição do valor de $x_*(b)$.

Uma outra variação do problema básico consiste em adicionar a (PB) uma restrição integral de igualdade. Obtemos assim, o conhecido **problema isoperimétrico**:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in C^2[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \\ & \int_a^b \Psi(t, x(t), x'(t)) dt = 0. \end{aligned} \tag{PI}$$

Observe que, neste caso, é conhecida uma situação semelhante no Cálculo, para a qual é aplicada a Regra dos Multiplicadores atribuída ao matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) a fim de obter sua solução (na verdade, essa teoria foi introduzida pelo alemão Leonhard Euler (1707 – 1783) na mesma monografia em que estabeleceu a nossa conhecida equação de Euler)⁴. Feita esta observação, veremos que o próximo resultado possui um aspecto familiar.

Teorema 1.8. *Seja $x_* \in C^2[a, b]$ um mínimo local fraco para o problema (PI), onde Λ e Ψ são de classe C^2 . Então existe um multiplicador $(\eta, \lambda) \neq 0$, com $\eta = 0$ ou 1, tal que x_* é um extremal para a Lagrangiana aumentada $\eta\Lambda + \lambda\Psi$.*

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 304, Teorema 14.21. □

Vale ressaltar aqui que a Lagrangiana aumentada $\eta\Lambda + \lambda\Psi$ não é a mesma aplicação utilizada em Programação Não-Linear, embora ambas possuem mesma nomenclatura.

1.2 Extremais não suaves

Uma questão natural que surge após o estudo da teoria clássica do Cálculo da Variações é se sempre é satisfatório considerar *apenas* soluções suaves para problema básico. Em meados do século XIX, notou-se que teoria clássica já não era aplicável a certos problemas: a necessidade de ir além das funções continuamente diferenciáveis se tornou cada vez mais visível.

No próximo capítulo, veremos que a própria existência de soluções é um ímpeto para a admissão de arcos não-suaves. A necessidade também se tornou aparente nas aplicações físicas (bolhas de sabão, por exemplo, geralmente possuem quinas e dobras (vincos)).

⁴ Ver Clarke [5], p. 304, *The isoperimetric problem*.

Exemplo 1.9. *Este problema ilustra a necessidade de estender a classe de funções admissíveis:*

$$\text{minimizar } J(x) = \int_{-1}^1 x(t)^2 [x'(t) - 1]^2 dt$$

$$\text{sujeito a } x(-1) = 0, x(1) = 1.$$

Note que:

- $J(x) \geq 0$ para todo $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$;
- Não existe solução nas classes de funções $C^2[-1, 1]$ nem $C^1[-1, 1]$;

De fato; consideramos funções admissíveis que estão na classe $C^1[-1, 1]$, isto é, aplicações $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis tais que $x(-1) = 0$, $x(1) = 1$. Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe $\tau \in (-1, 1)$ de modo que

$$x'(\tau) = \frac{x(1) - x(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 0}{1 + 1} = \frac{1}{2} > 0.$$

Assim, pela Lei de Conservação do Sinal, existe uma vizinhança $V \subset (-1, 1)$ de τ tal que $x'(\tau) > 0$ para todo $t \in V$ (visto que x' é uma função contínua em $(-1, 1)$). Note que x se anula no máximo uma vez em V : caso contrário, existiriam $t_1, t_2 \in V$ com $t_1 \neq t_2$ e $x(t_1) = x(t_2) = 0$. Novamente pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existiria $\omega \in (t_1, t_2)$ com $x'(\omega) = 0$. Mas como uma vizinhança em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto, que, por sua vez, é conexo, teríamos $(t_1, t_2) \subset V$, implicando $\omega \in V$, o que gera um absurdo. Agora, dada uma bola aberta $B(\frac{1}{2}, r)$ em $\mathbb{R}$, com $0 < r < \frac{1}{4}$, pela continuidade de x' , existe $\delta > 0$ tal que

$$x'(B(\tau, \delta)) \subset B(x'(\tau), r) = B\left(\frac{1}{2}, r\right) \not\ni 1.$$

Desta forma, segue que $U = V \cap B(\frac{1}{2}, r)$ é uma vizinhança de τ na qual x se anula no máximo uma vez e que $x' \neq 1$. Sendo assim, $J(x) > 0$ para qualquer $x \in C^1[-1, 1]$. Além disso, notamos que o ínfimo de J sobre as funções admissíveis em $C^1[-1, 1]$ é 0, o qual não é atingido nesta classe: consideramos a sequência de funções admissíveis da forma $x_n(t) = \left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Temos x_n é de classe $C^1[-1, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a aplicação $\hat{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$ para $t \in [-1, 1]$ q.t.p. é tal que $J(\hat{x}) = 0$ mas $\hat{x} \notin C^1[-1, 1]$.

- Há uma solução suave por partes para este problema.

Com efeito, a aplicação contínua e suave por partes definida por

$$x_*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \\ t & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que possui um bico em $t = 0$, é tal que

$$J(x_*) = \int_{-1}^1 x_*(t)^2 [x'_*(t) - 1]^2 dt = \int_{-1}^1 0^2 [0 - 1]^2 dt + \int_{-1}^1 t^2 [1 - 1]^2 dt = 0$$

e, portanto, é uma solução para este problema. □□□

Estimulada por essas considerações, a teoria do problema básico foi estendida para o contexto de *funções suaves por partes*. Tendo em mente a teoria de medida e integração de Lebesgue, consideraremos funções no espaço

$$\text{Lip}[a, b] := \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : x \text{ é Lipschitz contínua}\},$$

o qual coincide com o espaço $\text{AC}^\infty[a, b]$ das funções absolutamente contínuas (ver Anexo, Exemplo A.3). cujas derivadas existem em quase todo ponto (q.t.p.) e são essencialmente limitadas (ver Anexo, Exemplo A.1).

Agora o problema básico ao qual nos referiremos nesta seção é o seguinte

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ &\text{sujeito a} && x \in \text{Lip}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B. \end{aligned} \tag{P}$$

Para esta extensão do problema, temos o seguinte resultado que estabelece condições necessárias de otimalidade.

Teorema 1.10 (du Bois-Raymond, 1879). *Suponha que os gradientes Λ_x e Λ_v existem e, assim como Λ , são funções contínuas de (t, x, v) . Seja $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ um mínimo local fraco para o problema básico (P). Então x_* satisfaz a **equação integral de Euler**: para alguma*

constante $c \in \mathbb{R}^n$, temos, para quase todo $t \in [a, b]$,

$$\Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t)) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, x_*(s), x'_*(s)) ds.$$

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 309, Teorema 15.2. □

Definição 1.11. Ainda no contexto do Teorema 1.10, definimos a função $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$p(t) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, x_*(s), x'_*(s)) ds.$$

Vejamos que a aplicação p pertence ao espaço $\text{Lip}[a, b]$ e satisfaz

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

A p denominaremos **variável coestado**⁵ ou, simplesmente, o coestado.

Note que, além de satisfazer a equação acima, a qual é um modo conveniente de escrever a equação integral de Euler do Teorema 1.10, o coestado também é adequado para expressar a condição de fronteira quando necessário: no cenário do Teorema 1.7, estendendo para $n > 1$, encontramos a condição

$$-p(b) = \nabla \ell(x_*(b)).$$

Outro caso que veremos é aquele em que a restrição final é dada por $x(b) \in E$, onde E é um conjunto dado. Nesta situação, a condição de transversalidade é

$$-p(b) \in N_E^L(x(b)).$$

1.2.1 Regularidade Lipschitz, suficiência por convexidade e a condição necessária de Weierstrass

Na maioria dos casos, a equação de Euler admite mais soluções no espaço $\text{Lip}[a, b]$ do que em $C^2[a, b]$. Essas circunstâncias evidenciam a necessidade de condições adicionais que auxiliam na redução do número de candidatos.

⁵ Na Mecânica clássica, referem-se a p como o *momento generalizado* ou *variável adjunta* e, em Controle ótimo, p é chamada o *coestado*, presente no importante Princípio do Máximo de Pontryagin. (Clarke [5], p. 310, *The costate*.)

A seguir, veremos resultados que desempenham um papel importante quando estendidos para problemas com restrições adicionais. Um deles é um teorema de regularidade: uma ferramenta importante que, sob determinadas hipóteses, estabelece certo nível de suavidade das soluções ainda que na formulação do problema essas sejam não-suaves, como no presente contexto, quando consideramos candidatas funções apenas Lipschitz contínuas.

Teorema 1.12. *Se a função $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ satisfaz a equação integral de Euler, onde a aplicação $v \mapsto \Lambda(t, x_*(t), v)$ é estritamente convexa para quase todo $t \in [a, b]$, então x_* pertence a $C^1[a, b]$.*

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 312, Teorema 15.5. □

Pode-se ir além e obter uma regularidade mais alta para a solução através da regularidade da Lagrangiana.

Teorema 1.13 (Condição de Hilbert-Weierstrass, 1875). *Se $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ satisfaz a equação integral de Euler, onde a Lagrangiana Λ é de classe C^m , com $m \geq 2$, e satisfaz*

$$\Lambda_{vv}(t, x_*(t), v) > 0 \quad \forall t \in [a, b], v \in \mathbb{R}^n,$$

então $x_ \in C^m[a, b]$.*

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 313, Teorema 15.7. □

Para além dos teoremas de regularidade está a condição suficiente que, neste caso, pode ser obtida através da convexidade da Lagrangiana.

Teorema 1.14. *Se $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ é admissível para (P) e satisfaz a equação integral de Euler, onde $\Lambda(t, x, v)$ é convexa em (x, v) para cada $t \in [a, b]$, então x_* é um mínimo global para (P).*

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 314, Teorema 15.9. □

Resta-nos ainda uma fundamental condição necessária da teoria clássica: a condição necessária de Weierstrass. Relembrando: uma função x_* fornece um **mínimo local forte** para o problema (P) se é admissível para (P) e se existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x_*) \leq J(x)$ para toda função admissível x que satisfaz $\|x - x_*\|_\infty \leq \varepsilon$.

Teorema 1.15 (Condição de Weierstrass, 1880). *Se a função $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ é um mínimo local forte para (P), então*

$$\Lambda(t, x_*(t), x'_*(t) + v) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b] \text{ q.t.p.}$$

Demonstração: Este teorema será provado em um cenário mais geral no Capítulo 4 deste trabalho por meio do Teorema 4.1. □

Sendo Λ diferenciável e convexa com respeito à variável v , a desigualdade do teorema é automaticamente satisfeita, de modo que a condição necessária de Weierstrass não fornece informação nova. Agora, se Λ é não-diferenciável ou falha em ser convexa em v , a aplicação do Teorema 1.15 proporciona informação significativa sobre as soluções.

Soluções absolutamente contínuas

2.1 Existência e regularidade de soluções e condições necessárias de otimalidade

Desde seu início até a virada do século XX, a teoria de Cálculo das Variações carecia de um componente decisivo: não havia teoremas de existência. Estes constituem um ingrediente essencial do método dedutivo para resolver problemas de otimização, abordagem a qual combina existência, condições necessárias rigorosas e exame de candidatos para chegar a uma solução.

Nesta seção, apresentaremos resultados da teoria de existência e regularidade em Cálculo das Variações que estendem o contexto do problema básico para funções absolutamente contínuas definidas num intervalo $[a, b]$, as quais constituem o espaço $\text{AC}[a, b]$ (ver Anexo, Definição A.3), em vez de estudar os espaços clássicos $C^2[a, b]$ ou $\text{Lip}[a, b]$. Aos elementos de $\text{AC}[a, b]$ denominaremos **arcos**.

Trataremos aqui o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \end{aligned} \tag{P'}$$

onde $\Lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a Lagrangiana e $A, B \in \mathbb{R}^n$ são vetores dados.

Tendo em vista o enfraquecimento da regularidade das funções candidatas à solução, veremos

a seguir algumas definições elementares estendidas para o presente contexto.

Definição 2.1. Dizemos que um arco x é **admissível** para o Problema (P') se satisfaz as condições de contorno e se $J(x)$ é bem definido e finito. Um arco admissível x_* é dito ser uma **solução** ou um **minimizador** se $J(x_*) \leq J(x)$ para qualquer outro arco admissível x .

Um arco admissível x_* fornece um **mínimo local fraco** se, para algum $\varepsilon > 0$, tem-se $J(x_*) \leq J(x)$ para todo arco admissível x satisfazendo $\|x - x_*\|_\infty \leq \varepsilon$ e $\|x' - x'_*\|_\infty \leq \varepsilon$. E dizemos que um arco admissível x_* fornece um **mínimo local forte** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x_*) \leq J(x)$ para todo arco admissível x que satisfaz $\|x - x_*\|_\infty \leq \varepsilon$.

O resultado abaixo, atribuído ao matemático italiano Leonida Tonelli (1885 – 1946), identifica sob quais hipóteses uma solução para (P') existe na classe dos arcos. A notação $\|\cdot\|$ utilizada abaixo se refere à norma euclidiana do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2 (Tonelli, 1915). Suponha que a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v)$ é contínua, convexa em v e coerciva de grau $r > 1$, isto é, para certas constantes $\alpha > 0$ e β , tem-se

$$\Lambda(t, x, v) \geq \alpha \|v\|^r + \beta \quad \forall (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Então o Problema (P') admite uma solução em $AC[a, b]$.

Demonstração: Primeiramente, notamos que existem arcos admissíveis x para o qual $J(x)$ é finito: por exemplo, tome x como sendo a reta que une os pontos (a, A) e (b, B) da condição de contorno. Como o funcional J é limitado inferiormente, haja vista a hipótese de coercividade, existe uma sequência minimizadora x_i de funções admissíveis para (P') , ou seja, uma sequência de funções admissíveis que satisfaz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J(x_i) = \inf (P') < +\infty.$$

Assim, pela coercividade de Λ e pela definição de ínfimo, para todo i suficientemente grande, temos

$$\int_a^b [\alpha \|x'_i\|_\infty^r + \beta] dt \leq \int_a^b \Lambda(t, x_i, x'_i) dt \leq \inf (P') + 1.$$

Isso implica que a sequência x'_i é limitada em $L^r[a, b]$, que é um espaço de Banach reflexivo, onde a bola unitária fechada é fracamente compacta (ver Anexo, Teoremas A.61 e A.62).

Deste modo, podemos deduzir a existência de subsequências de coordenadas que convergem fracamente em $L^r[a, b]$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que cada componente do vetor x'_i converge fracamente em $L^r[a, b]$. Seja v_* o vetor constituído desses limites. Vamos definir um elemento de $\text{AC}^r[a, b]$ da forma

$$x_*(t) = A + \int_a^t v_*(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Para cada $t \in [a, b]$, como $\phi(x'_i) = \int_a^b x'_i(s) \chi_{(a,t)}(s) ds$ é um funcional linear, a convergência fraca implica que

$$\int_a^t x'_i(s) ds = \int_a^b x'_i(s) \chi_{(a,t)}(s) ds \longrightarrow \int_a^b v_*(s) \chi_{(a,t)}(s) ds = \int_a^t v_*(s) ds,$$

onde $\chi_{(a,t)}$ é a função característica do intervalo (a, t) , donde deduzimos que $x_i(t)$ converge pontualmente para $x_*(t)$. Daí, $x_*(b) = B$ de modo que x_* é admissível para (P') .

Agora utilizamos a semicontinuidade da integral (a convexidade de Λ em v é essencial, visto que é exigida nas hipóteses do Teorema A.33) para concluir que

$$J(x_*) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} J(x_i) = \inf (P').$$

Como x_* é admissível para (P') , segue que x_* é um mínimo global. ■

Tendo em mente a teoria de existência, pretendemos usá-la no método dedutivo para encontrar soluções, passo no qual aplicamos as condições necessárias. Entretanto, ao analisar os resultados clássicos (como a condição necessária que estabelece a equação integral de Euler), encontramos uma grande dificuldade quando funções absolutamente contínuas estão envolvidas, pois a demonstração desses resultados recorre a teoremas não válidos para a presente situação. Além disso, a extensão a arcos pode ocasionar o conhecido *fenômeno de Lavrentiev*, no qual o ínfimo no problema básico sobre $\text{AC}[a, b]$ é estritamente menor que o ínfimo sobre $\text{Lip}[a, b]$.

Contudo, em diversos casos, podemos nos valer da existência e estabelecer condições necessárias enquanto descartamos o fenômeno de Lavrentiev. A seguir, um exemplo disto, o teorema atribuído aos matemáticos Leonida Tonelly e Charles Morrey, no qual é recuperada

a equação integral de Euler sob uma hipótese de “crescimento exponencial” da Lagrangiana.

Teorema 2.3 (Tonelli-Morrey). *Suponha que Λ admita gradientes Λ_x e Λ_v , os quais são contínuos em (t, x, v) , assim como o é Λ . Se, para todo conjunto limitado $S \subset \mathbb{R}^n$, existem uma constante c e uma função integrável $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\|\Lambda_x(t, x, v)\| + \|\Lambda_v(t, x, v)\| \leq c(\|v\| + |\Lambda(t, x, v)|) + d(t) \quad (*)$$

para todo $(t, x, v) \in [a, b] \times S \times \mathbb{R}^n$, então qualquer mínimo local fraco x_* do problema (P') satisfaz a equação de Euler na forma integral: para quase todo $t \in [a, b]$,

$$\Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t)) = c + \int_a^t \Lambda_x(s, x_*(s), x'_*(s)) ds.$$

Demonstração: Suponha que x_* seja um mínimo local fraco para o problema básico sobre a classe AC $[a, b]$. Então x_* é contínua e $x'_* \in L^1(a, b)$. Por hipótese, sabemos que Λ_x e Λ_v são funções contínuas em (t, x, v) . Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue¹, segue que a aplicação

$$f(t) = \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t)) - \int_a^t \Lambda_x(s, x_*(s), x'_*(s)) ds$$

está em $L^1(a, b)$. Seja $y \in \text{Lip}_0[a, b]$ satisfazendo $\|y\|_\infty + \|y'\|_\infty \leq 1$, onde

$$\text{Lip}_0[a, b] := \left\{ y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ é Lipschitz contínua e satisfaz } y(a) = y(b) = 0 \right\}.$$

Vamos mostrar que, para todo y nessas condições,

$$\int_a^b f(t)^T y'(t) dt = 0,$$

de maneira que a equação integral de Euler seja satisfeita para x_* . Notamos que isso é possível pois, dada $y \in \text{Lip}_0[a, b]$, tem-se y contínua e y' essencialmente limitada, de modo que existe $k > 0$ satisfazendo $\|y\|_\infty + \|y'\|_\infty \leq k$. Assim, a função $\tilde{y}$ dada por

$$\tilde{y}(t) = \frac{y(t)}{k}$$

¹ Ver Anexo, Teorema A.7

pertence a $\text{Lip}_0[a, b]$ e satisfaz $\|\tilde{y}\|_\infty + \|\tilde{y}'\|_\infty \leq 1$. Consequentemente,

$$0 = \int_a^b f(t)^T \tilde{y}'(t) dt = \int_a^b f(t)^T \frac{y'(t)}{k} dt,$$

o que implicaria

$$\int_a^b f(t)^T y'(t) dt = 0 \quad \forall y \in \text{Lip}_0[a, b].$$

A fim de mostrar essa igualdade através do Lema de du Bois-Raymond (ver Anexo, Exemplo A.35), tomamos $t \in [a, b]$ tal que $x'_*(t)$ e $y'(t)$ existem e que $\|y(t)\| + \|y'(t)\| \leq 1$ (isto é, para quase todo t) e definimos

$$g(t, s) = \Lambda(t, x_*(t) + sy(t), x'_*(t) + sy'(t)) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)), \quad s \in [0, 1].$$

Notamos que $g(t, 0) = 0$ para $t \in [a, b]$ q.t.p. e, como x_* é um mínimo local fraco, para s suficientemente pequeno, temos

$$\int_a^b g(t, s) dt \geq 0. \tag{2.1}$$

Por conveniência, passaremos a denotar

$$\Lambda^s(t) = \Lambda(t, x_*(t) + sy(t), x'_*(t) + sy'(t)),$$

$$\Lambda^0(t) = \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)),$$

$$\Lambda_x^s(t) = \Lambda_x(t, x_*(t) + sy(t), x'_*(t) + sy'(t)),$$

$$\Lambda_v^s(t) = \Lambda_v(t, x_*(t) + sy(t), x'_*(t) + sy'(t)).$$

Usando as desigualdades triangular e a de Cauchy, bem como a condição de Tonelli-Morrey (*) e o fato de que $x_* + sy \in B[x_*, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} g(t, s) \right| &= \left| \Lambda_x^s(t)^T y(t) + \Lambda_v^s(t)^T y'(t) \right| \\ &\leq \|\Lambda_x^s(t)\| \|y(t)\| + \|\Lambda_v^s(t)\| \|y'(t)\| \\ &\leq (\|\Lambda_x^s(t)\| + \|\Lambda_v^s(t)\|) (\|y(t)\| + \|y'(t)\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|A_x^s(t)\| + \|A_v^s(t)\| \\
&\leq c \left(\|x'_*(t) + sy'(t)\| + |A^s(t)| \right) + d(t) \\
&\leq c \left(s\|y'(t)\| + \|x'_*(t)\| + |A^0(t)| - |A^0(t)| + |A^s(t)| \right) + d(t) \\
&\leq c \left(1 + \|x'_*(t)\| + |A^0(t)| + |A^s(t) - A^0(t)| \right) + d(t) \\
&\leq c \left(1 + \|x'_*(t)\| + |A^0(t)| + |g(t, s)| \right) + d(t) \\
&= c |g(t, s)| + k(t)
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [a, b]$ e quase todo $s \in [0, 1]$, onde $k(t) = c(1 + \|x'_*(t)\| + |A^0(t)|) + d(t)$. Notamos que k é um elemento de $L^1(a, b)$, pois $x'_* \in L^1[a, b]$, A^0 é contínua e d está em $L^1[a, b]$ por hipótese. Agora, sabendo que $g(t, \cdot)$ é elemento de $\text{AC}[0, 1]$, pois $A_x(t, x_*(t), x'_*(t))$ e $A_v(t, x_*(t), x'_*(t))$ estão em L^1 e $y'(t)$ é integrável (visto que y é Lipschitz), a estimativa acima, juntamente com o Lema de Gronwall², nos fornece

$$\begin{aligned}
|g(t, s)| = |g(t, s) - g(t, 0)| &\leq \int_0^s \left\{ \exp \left(\int_w^s c \, dr \right) [c |g(t, 0)| + k(t)] \right\} dw \\
&= \int_0^s \exp [c(s - w)] k(t) dw = \frac{e^{cs} - 1}{c} k(t),
\end{aligned}$$

de modo que podemos majorar em $[0, 1]$ a expressão do lado direito por uma aplicação linear, obtendo $|g(t, s)| \leq sMk(t)$ para uma determinada contante M e para todo $s \in [0, 1]$ suficientemente pequeno. Em vista disso, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue³ e integração por partes para deduzir, com a ajuda da equação (2.1),

² Ver Teorema A.31.

³ Ver Teorema A.6.

que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{s \downarrow 0} \int_a^b \frac{g(t, s) - g(t, 0)}{s} dt = \int_a^b \frac{d}{ds} g(t, 0) dt = \int_a^b \left[\Lambda_x^0(t)^T y(t) + \Lambda_v^0(t)^T y'(t) \right] dt \\
&= \left(\int_a^t \Lambda_x^0(\tau) d\tau \right)^T y(t) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\int_a^t \Lambda_x^0(\tau) d\tau \right)^T y'(t) dt \\
&\quad + \int_a^b \Lambda_v^0(t)^T y'(t) dt \\
&= \int_a^b \left[\Lambda_v^0(t) - \left(\int_a^t \Lambda_x^0(\tau) d\tau \right)^T \right]^T y'(t) dt = \int_a^b f(t)^T y'(t) dt.
\end{aligned}$$

Notamos que ao substituir y por $-y$ a desigualdade permanece satisfeita; assim, conseguimos a igualdade

$$\int_a^b f(t)^T y'(t) dt = 0$$

para toda variação y Lipschitz, como queríamos mostrar. ■

A próxima definição, utilizada na teoria de regularidade, aborda uma forma localizada e enfraquecida de coercividade, estabelecendo que Λ possui um crescimento superlinear na variável v ao longo do vetor x_* .

Definição 2.4. Dizemos que Λ tem crescimento de Nagumo ao longo de x_* se existe uma função $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ com crescimento superlinear, ou seja, satisfazendo

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha} = +\infty$$

e tal que, para $t \in [a, b]$ e $v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\Lambda(t, x_*(t), v) \geq \theta(\|v\|).$$

Corolário 2.5. Sob as hipóteses do Teorema 2.3, se $\Lambda(t, x, v)$ é convexa em v e tem crescimento de Nagumo ao longo de x_* , então x_* é Lipschitz.

Demonstração: Segue, da hipótese, que a variável coestado $p(t) = \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t))$ em

quase todo ponto. Logo, da convexidade de Λ em v , temos

$$\begin{aligned}\Lambda(t, x_*(t), 0) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) &\geq \langle \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t)), 0 - x'_*(t) \rangle \\ &= \langle p(t), 0 - x'_*(t) \rangle \\ &= -p(t)^T x'_*(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}\end{aligned}$$

Usando esta desigualdade e a hipótese de crescimento de Nagumo, temos

$$\begin{aligned}\theta(\|x'_*(t)\|) &\leq \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \\ &\leq \Lambda(t, x_*(t), 0) + p(t)^T x'_*(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}\end{aligned}$$

Como Λ e x_* são contínuas, segue que $\Lambda(t, x_*(t), 0)$ é uma aplicação limitada, digamos

$$0 \leq |\Lambda(t, x_*(t), 0)| \leq M_1.$$

Notamos também que, pela definição da variável coestado,

$$0 \leq \|p(t)\| = \left| c + \int_a^b \Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t)) dt \right| \leq |c| + \int_a^b \|\Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t))\| dt \leq M_2$$

para quase todo $t \in [a, b]$. Assim, considerando $M = \max\{M_1, M_2\} + 1$, usamos a definição de limite no crescimento superlinear de θ : para tal $M > 0$, existe $k > 0$ tal que se $\|x'_*(t)\| > k$, então

$$\frac{\theta(\|x'_*(t)\|)}{\|x'_*(t)\|} > M, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.,}$$

implicando

$$\|x'_*(t)\| \leq \frac{M_1}{M - M_2}, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}$$

isto é, x'_* é essencialmente limitada e, portanto, x_* é Lipschitz. ■

Notamos que quando o problema básico (P') admite uma solução global x_* Lipschitz, o fenômeno de Lavrentiev não ocorre e as condições necessárias são satisfeitas, daí a importância da *regularidade Lipschitz*. Outra vantagem é o acesso aos resultados de regularidade elevada da teoria clássica, dos quais podemos deduzir a suavidade da solução.

O próximo resultado nos mostra que, sob hipóteses do tipo Tonelli, soluções para o problema

básico no Cálculo das Variações são Lipschitz quando a Lagrangiana é autônoma.

Teorema 2.6 (Clarke-Vinter). *Seja $x_* \in \text{AC}[a, b]$ um mínimo local forte para o Problema (P'), onde a Lagrangiana é contínua, autônoma, convexa em v e possui crescimento de Nagumo ao longo de x_* . Então x_* é Lipschitz.*

Demonstração: Seja x_* um mínimo local forte de (P'). Como $x_* \in \text{AC}[a, b]$, temos x_* é uniformemente contínua; assim, em particular para a constante $\varepsilon > 0$ da definição de mínimo local forte x_* , existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ (escolha de modo que $0 < \delta_0 < b - a$) tal que se $t, \tau \in [a, b]$ com $|t - \tau| \leq \delta_0$, então $\|x_*(t) - x_*(\tau)\| < \varepsilon$.

Tomando uma constante δ no intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de modo que $\delta_0 = \frac{(b-a)\delta}{1-\delta}$, temos

$$t, \tau \in [a, b], |t - \tau| \leq \frac{(b-a)\delta}{1-\delta} \implies \|x_*(t) - x_*(\tau)\| < \varepsilon.$$

Vamos dividir esta demonstração em 3 partes: **A**, **B** e **C**.

A. Consideremos qualquer função mensurável não-negativa $\alpha : [a, b] \rightarrow [1-\delta, 1+\delta]$ satisfazendo $\int_a^b \alpha(t)dt = b - a$. Para qualquer α com essas características, a relação

$$\tau(t) = a + \int_a^t \alpha(s)ds$$

define uma aplicação $\tau : [a, b] \rightarrow [a, b]$ injetora (visto que α é uma função não-negativa) e bi-Lipschitz (ver Definição A.3) com constante $k = \frac{1}{1-\delta} > 0$.

Nessas condições, a aplicação inversa $t : \text{Im}(\tau([a, b])) \rightarrow [a, b]$ satisfaz

$$\frac{d}{d\tau}t(\tau) = \frac{1}{\alpha[t(\tau)]}, \quad |t(\tau) - \tau| \leq \frac{(b-a)\delta}{1-\delta} \quad \text{q.t.p.}$$

A primeira relação segue diretamente de resultados de Cálculo. Agora, vamos justificar a desigualdade. Como τ é bi-Lipschitz com constante k , então

$$t_1, t_2 \in [a, b] \implies (1-\delta)(t_2 - t_1) \leq \tau(t_2) - \tau(t_1) \leq \frac{1}{1-\delta}(t_2 - t_1).$$

Daí

$$\begin{cases} t_2 - t_1 \leq \frac{1}{1-\delta} [\tau(t_2) - \tau(t_1)], \\ t_2 - t_1 \geq (1-\delta) [\tau(t_2) - \tau(t_1)] \geq -\frac{1}{1-\delta} [\tau(t_2) - \tau(t_1)], \end{cases}$$

o que implica

$$|t_2 - t_1| \leq \frac{1}{1-\delta} |\tau(t_2) - \tau(t_1)|.$$

Por outro lado, se $\tau_1, \tau_2 \in [a, b]$, então existem $t_1, t_2 \in [a, b]$ tais que $t(\tau_i) = t_i$, $i = 1, 2$.

Assim, pela relação acima,

$$\begin{aligned} |t(\tau_2) - t(\tau_1)| = |t_2 - t_1| &\leq \frac{1}{1-\delta} |\tau(t_2) - \tau(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{1-\delta} |\tau[t(\tau_2)] - \tau[t(\tau_1)]| = \frac{1}{1-\delta} |\tau_2 - \tau_1|. \end{aligned}$$

Portanto, $t(\tau)$ é Lipschitz com constante $k = \frac{1}{1-\delta}$. Agora, dado $\tau \in [a, b]$, temos $\tau = t(\tilde{\tau})$ para algum $\tilde{\tau} \in [a, b]$. Mas

$$\tilde{\tau} = \tau(t(\tilde{\tau})) = a + \int_a^{t(\tilde{\tau})} \alpha(s) ds = a + \int_a^{\tau} \alpha(s) ds$$

e

$$\begin{aligned} a + \int_a^{\tau} \alpha(s) ds &\leq a + (1+\delta)(\tau - a) = a + \tau - a + \delta(\tau - a) \\ &= \tau + \delta(\tau - a) \leq \tau + \delta(b - a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + \int_a^{\tau} \alpha(s) ds &\geq a + (1-\delta)(\tau - a) = a + \tau - a - \delta(\tau - a) \\ &= \tau - \delta(\tau - a) \geq \tau - \delta(b - a). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \tilde{\tau} - \tau \leq \delta(b - a) \\ \tilde{\tau} - \tau \geq -\delta(b - a) \end{cases} \Rightarrow |\tilde{\tau} - \tau| \leq \delta(b - a).$$

Logo,

$$|t(\tau) - \tau| = |t(\tau) - t(\tilde{\tau})| \leq \frac{1}{1-\delta} |\tau - \tilde{\tau}| \leq \frac{1}{1-\delta} \delta(b - a),$$

como queríamos mostrar.

Agora, definimos um arco $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $y(\tau) = x_*(t(\tau))$. Então y é admissível para o

problema (P') e satisfaz $\|y - x_*\|_\infty < \varepsilon$ pela escolha de δ . Sendo assim,

$$J(y) = \int_a^b \Lambda(y(\tau), y'(\tau)) d\tau \geq J(x_*),$$

visto que x_* é mínimo local forte e y está na ε -vizinhança de x_* . Aplicando a mudança de variáveis $\tau = \tau(t)$ na integral à esquerda e notando que $y'(\tau) = \frac{x'_*(t(\tau))}{\alpha(t(\tau))}$ q.t.p., obtemos

$$\int_a^b \Lambda(y(\tau), y'(\tau)) d\tau = \int_a^b \Lambda(y(\tau(t)), y'(\tau(t))) \tau'(t) dt = \int_a^b \Lambda\left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{\alpha(t)}\right) \alpha(t) dt \geq J(x_*).$$

Observe que a igualdade é satisfeita quando α é a função constante $\alpha_* \equiv 1$, de modo que podemos dizer que α_* é solução de um certo problema de minimização. Vamos formular mais explicitamente este problema introduzindo a seguinte aplicação:

$$\Phi(t, \alpha) = \Lambda\left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{\alpha}\right) \alpha.$$

Para cada $t \in [a, b]$, a função $\Phi(t, \cdot)$ é convexa no intervalo $(0, \infty)$. Agora, consideremos o funcional f dado por

$$f(\alpha) = \int_a^b \Phi(t, \alpha(t)) dt.$$

Então $f(\alpha)$ está bem definido quando α é mensurável e possui valores em $[1 - \delta, 1 + \delta]$, possivelmente como $+\infty$. Segue também que f é convexo e, conseqüentemente, contínuo em $(1 - \delta, 1 + \delta)$. Assim, para quase todo t , existe $\delta(t) \in (0, \delta)$ tal que

$$\Phi(t, 1) - 1 \leq \Phi(t, \alpha) \leq \Phi(t, 1) + 1 \quad \forall \alpha \in [1 - \delta(t), 1 + \delta(t)].$$

Segue de um corolário da Teoria de Seleção Mensurável (ver Corolário A.21) que podemos tomar $\delta(\cdot)$ uma função mensurável. Definimos S como sendo o subconjunto convexo de $X := L^\infty[a, b]$ cujos elementos α satisfazem $\alpha(t) \in [1 - \delta(t), 1 + \delta(t)]$ q.t.p.

Consideramos agora o problema de otimização:

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\alpha) = \int_a^b \Phi(t, \alpha(t)) dt \\ \text{sujeito a} & \alpha \in S, \\ & h(\alpha) = \int_a^b \alpha(t) dt - (b - a) = 0. \end{array} \right.$$

Os argumentos dados acima mostram que $\alpha_* \equiv 1$ soluciona (Q).

B. Agora, aplicando a regra dos multiplicadores dada no Teorema A.34, obtemos um vetor não-nulo $\zeta = (\eta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ (com $\eta = 0$ ou 1) tal que

$$\eta f(\alpha) + \lambda h(\alpha) \geq \eta f(\alpha_*) \quad \forall \alpha \in S.$$

Segue do Teorema A.28 que $\eta = 1$. Reescrevendo a conclusão, temos a desigualdade

$$\int_a^b \left[\Lambda \left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{\alpha(t)} \right) \alpha(t) + \lambda \alpha(t) \right] dt \geq \int_a^b [\Lambda(x_*(t), x'_*(t)) + \lambda] dt \quad \forall \alpha \in S.$$

Deduzimos do Teorema A.28, que, para quase todo t , a função

$$\alpha \mapsto \theta_t(\alpha) := \Lambda \left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{\alpha(t)} \right) \alpha(t) + \lambda \alpha(t)$$

atinge um mínimo sobre o intervalo $[1 - \delta(t), 1 + \delta(t)]$ no ponto interior $\alpha \equiv 1$. Fixado um valor de t , o gradiente generalizado de $\partial_C \theta_t(1)$ deve conter o ponto 0. Do Cálculo não-suave (ver Proposição A.56), existe $\zeta(t)$ pertencente ao interior do subdiferencial em $x'_*(t)$ da função convexa $v \mapsto \Lambda(x_*(t), v)$ satisfazendo

$$\Lambda(x_*(t), x'_*(t)) + \lambda - \langle x'_*(t), \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{q.t.p.} \quad (2.2)$$

C. O último passo desta demonstração é mostrar, usando (2.2), que $x'_*(t)$ é essencialmente limitada. Seja $t \in [a, b]$ tal que $x'_*(t)$ existe e que a equação (2.2) permaneça válida. Usando a

desigualdade do subgradiente e a equação (2.2), temos

$$\begin{aligned}
 \Lambda \left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|} \right) - \Lambda(x_*(t), x'_*(t)) &\geq \left\langle \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|} - x'_*(t), \zeta(t) \right\rangle \\
 &= \left(\frac{1}{1 + \|x'_*(t)\|} - 1 \right) \langle x'_*(t), \zeta(t) \rangle \\
 &= \left(\frac{1}{1 + \|x'_*(t)\|} - 1 \right) [\Lambda(x_*(t), x'_*(t)) + \lambda].
 \end{aligned}$$

Seja $M > 0$ uma constante tal que $|\Lambda(x_*(t), w)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$ e $w \in B[0, 1]$ (a bola unitária fechada do $\mathbb{R}^n$) – isto é válido pois Λ e x_* são contínuas por hipótese. Então, pela hipótese de crescimento de Nagumo de Λ , segue que

$$\begin{aligned}
 |\theta(\|x'_*(t)\|)| &\leq |\Lambda(x_*(t), x'_*(t))| \\
 &\leq (1 + \|x'_*(t)\|) \left[\Lambda \left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|} \right) - \left(\frac{1}{1 + \|x'_*(t)\|} - 1 \right) \lambda \right] \\
 &= (1 + \|x'_*(t)\|) \Lambda \left(x_*(t), \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|} \right) - \left(\frac{(1 + \|x'_*(t)\|)}{1 + \|x'_*(t)\|} - (1 + \|x'_*(t)\|) \right) \lambda \\
 &\leq (1 + \|x'_*(t)\|) M + \|x'_*(t)\| |\lambda| = M + \|x'_*(t)\| (M + |\lambda|).
 \end{aligned}$$

E, por fim, analogamente ao que foi feito no Corolário 2.5, a superlinearidade de θ implica que x'_* é essencialmente limitada e, portanto, x_* é Lipschitz. ■

Como consequência do Teorema de Clarke–Vinter, temos o seguinte corolário que estabelece tanto condição necessária de otimalidade quanto regularidade Lipschitz do mínimo local.

Corolário 2.7. *Seja Λ contínua, autônoma e, com respeito à variável v , convexa e diferenciável. Seja x_* um mínimo local forte para o problema*

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\
 \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[a, b], \quad x(t) \in S, \quad x'(t) \in C, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,
 \end{aligned}$$

onde S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ é um cone. Então, para alguma constante h , o arco

x_* satisfaz a **condição de Erdmann**:

$$\langle x'_*(t), \Lambda_v(x_*(t), x'_*(t)) \rangle - \Lambda(x_*(t), x'_*(t)) = h \text{ q.t.p.}$$

Além disso, se Λ possui crescimento de Nagumo ao longo de x_* , então x_* é Lipschitz.

Note que neste último corolário obtemos a condição de Erdmann como uma condição necessária numa situação em que a equação de Euler não pode ser afirmada devido às restrições adicionadas ou pelo simples fato de não termos assumido inicialmente x_* ser Lipschitz.

Exemplo 2.8. *Ilustramos agora o uso dos teoremas de existência e regularidade e também seu papel no estudo de problemas de fronteira em EDOs.*

Consideramos a seguinte versão do problema básico (P') , com $n = 1$:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \int_0^T \left[\frac{x(t)^4}{4} - \frac{x(t)^2}{2} + \frac{x'(t)^2}{2} \right] dt \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \text{AC}[0, T], \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 0. \end{aligned}$$

A Lagrangiana é dada por

$$\Lambda(t, x, v) = \Lambda(x, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

Como Λ é polinomial nas duas variáveis, ela é contínua. Notamos que $\Lambda(x, \cdot)$ é convexa (pois é soma de funções convexas) e $\Lambda(x, v)$ é coerciva de grau 2. Assim, pelo Teorema de Tonelli, existe uma solução x_* para (P') . Segue do Teorema 2.6 que x_* é Lipschitz, visto que Λ é autônoma.

Um modo alternativo a aplicar o Teorema de Clarke-Vinter é o seguinte: temos

$$\begin{aligned} \frac{|A_x| + |A_v|}{1 + |v| + |\Lambda(x, v)|} &= \frac{|x^3 - x| + |v|}{1 + |v| + |\Lambda(x, v)|} \leq \frac{|v| + |x|^3 + |x|}{1 + |v|} \\ &\leq \frac{|v|}{1 + |v|} + \frac{|x|^3 + |x|}{1 + |v|} \leq \frac{|v|}{|v|} + \frac{|x|^3 + |x|}{1} \\ &= 1 + |x|^3 + |x|, \end{aligned}$$

o que implica

$$|A_x| + |A_v| \leq (1 + |x|^3 + |x|) (1 + |v| + |A(x, v)|),$$

de modo que a hipótese estrutural do Teorema 2.3 é satisfeita, visto que o termo $1 + |x|^3 + |x|$ é limitado sempre que x pertence a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Isso nos permite recorrer ao Corolário 2.5 a fim de concluir que a solução x_* é Lipschitz.

Em ambos os casos, a função x_* satisfaz a equação integral de Euler. Pelo Teorema 1.13, deduzimos que $x_* \in C^\infty[0, T]$ (x_* é Lipschitz, A é de classe C^∞ e convexa em relação a v , donde $A_{vv} > 0$). Sendo assim, podemos escrever a equação de Euler em sua forma diferencial:

$$\frac{d}{dt} A_v(x_*(t), x'_*(t)) = A_x(x_*(t), x'_*(t)) \implies x''(t) = x(t) (x(t)^2 - 1).$$

Em suma, há uma solução x_* do problema de fronteira

$$x''(t) = x(t) (x(t)^2 - 1), \quad x \in C^\infty[0, T], \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad (2.3)$$

a qual também resolve o problema (P').

Contudo, claramente vemos que a função nula é solução de (2.3), e gostaríamos de saber quando há uma *solução não-trivial*. Este certamente será o caso se a função nula, a qual, evidentemente, é extremal para A , admite um ponto conjugado⁴ no intervalo $(0, T)$. Nesse caso, a condição necessária de Jacobi implica $x_* \not\equiv 0$.

A equação de Jacobi (correspondente à função nula) é

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{dt} [P(t) u'(t)] + Q(t) u(t) \\ &= -\frac{d}{dt} [A_{vv}(t) u'(t)] + \left[A_{xx}(t) - \frac{d}{dt} A_{xv}(t) \right] u(t) = -u''(t) - u(t). \\ \therefore u''(t) + u(t) &= 0. \end{aligned}$$

Essa equação nos fornece $u(t) = c_0 \sin(t)$, com $c_0 \in \mathbb{R}$. Assim, um ponto conjugado é $\tau = \pi$. Com isso, concluímos que existe uma solução não trivial de (2.3) quando $T > \pi$.

□□□

⁴ Ver Clarke [5], pp. 298 - 300, *Conjugate points*.

2.2 Condições suficientes por pseudoinvexidade

Nesta seção, apresentaremos resultados que, perante certas condições, caracterizam a suficiência da equação de Euler para otimalidade global de um arco admissível para o problema (P'). Para isto, supomos que a Lagrangiana Λ é de classe C^2 e que a condição de Tonelli-Morrey, dada por (*) seja satisfeita, isto é, para todo conjunto limitado $S \subset \mathbb{R}^n$, existem uma constante c e uma função integrável $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que, para todo $(t, x, v) \in [a, b] \times S \times \mathbb{R}^n$,

$$\|\Lambda_x(t, x, v)\| + \|\Lambda_v(t, x, v)\| \leq c(\|v\| + |\Lambda(t, x, v)|) + d(t).$$

Definição 2.9. Uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **estacionária** para o problema (P') se satisfaz as restrições de (P') e a equação de Euler

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} \Lambda(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [a, b].$$

Definição 2.10. Dizemos que (P') é um problema **pseudoinvexo** se, para cada par de funções admissíveis x, y tais que $J(y) < J(x)$, existe uma função $\gamma = \gamma(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\gamma(a) = \gamma(b) = 0 \tag{2.4}$$

e

$$\int_a^b [\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(x, y)(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(x, y)(t)] dt < 0. \tag{2.5}$$

Note que esta definição estende para o contexto de Cálculo das Variações o conceito de pseudoinvexidade em Programação Matemática apresentado por Hanson em [13].

O seguinte resultado nos auxiliará na demonstração do teorema que caracteriza a suficiência da equação de Euler sob hipóteses de pseudoinvexidade.

Lema 2.11. Seja x uma função admissível de (P'). Se não existe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo (2.4) e (2.5) simultaneamente, então x é uma função estacionária.

Demonstração: Consideremos o seguinte problema variacional auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \Phi(\gamma) &= \int_a^b \phi(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt \\ \text{sujeito a } \gamma &\in \text{AC}[a, b], \quad \gamma(a) = 0, \quad \gamma(b) = 0, \end{aligned} \quad (\text{PA}')$$

onde

$$\phi(t, \sigma, \theta) = \Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \sigma + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \theta.$$

Notamos que $\gamma_* \equiv 0$ é admissível para (PA'). Vamos mostrar que γ_* é solução ótima. Para isso, suponha, por contradição, que existe $\gamma \in \text{AC}[a, b]$ admissível, com $\Phi(\gamma) < \Phi(\gamma_*) = 0$. Desta maneira, $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ e

$$\int_a^b \left[\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \right] dt = \int_a^b \phi(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt < 0,$$

ou seja, γ satisfaz as condições (2.4) e (2.5), o que contradiz a hipótese. Portanto $\gamma_* \equiv 0$ é solução ótima de (PA'). Pelo Teorema 2.3, existe um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{\sigma, \theta} \phi(t, \gamma(t), \gamma'(t)), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}$$

Como

$$\phi_\sigma(t, \gamma(t), \gamma'(t)) = \Lambda_x(t, x(t), x'(t)) \quad \text{e} \quad \phi_\theta(t, \gamma(t), \gamma'(t)) = \Lambda_v(t, x(t), x'(t)),$$

temos

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x, v} \Lambda(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.},$$

implicando em x ser estacionária, como queríamos mostrar. ■

Teorema 2.12. *O problema (P') é pseudoinvexo se, e somente se, toda função estacionária é um mínimo global.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Por contradição, suponha que (P') não é pseudoinvexo. Então existe um par de funções admissíveis x, y com $J(y) < J(x)$ para o qual não existe γ satisfazendo as condições (2.4) e (2.5). Pelo Lema 2.11, temos x é estacionária. Como $J(y) < J(x)$, x não é

solução ótima, o que contradiz a hipótese de que toda função estacionária é uma solução ótima. Portanto, (P') é pseudoinvexo.

($\Rightarrow$) Seja $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função estacionária. Suponha, por contradição, que existe um y admissível tal que $J(y) < J(x)$. Consideramos a aplicação $\gamma = \gamma(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ da hipótese de pseudoinvexidade de (P') . Pela equação de Euler satisfeita por x , temos

$$\int_a^b p'(t)^T \gamma(t) dt + \int_a^b p(t)^T \gamma'(t) dt = \int_a^b [\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t)] dt.$$

Segue da desigualdade de (2.5) que

$$\int_a^b [\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t)] dt < 0.$$

Assim,

$$\int_a^b p'(t)^T \gamma(t) dt + \int_a^b p(t)^T \gamma'(t) dt < 0,$$

de modo que, usando integração por partes e a condição (2.4), obtemos

$$0 > p(t)^T \gamma(t) \Big|_a^b = p(b)^T \gamma(b) - p(a)^T \gamma(a) = 0,$$

um absurdo. Portanto, não existe função admissível y tal que $J(y) < J(x)$, ou seja, x é solução ótima. ■

O exemplo abaixo é uma ilustração do conceito de pseudoinvexidade para problemas variacionais.

Exemplo 2.13. *Consideremos o seguinte problema variacional:*

$$\text{minimizar } J(x) = \int_0^1 (1 - e^{-x(t)^2}) dt$$

$$\text{sujeito a } x \in \text{AC}[0, 1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Primeiramente, note que a Lagrangiana é de classe C^2 e satisfaz

$$|\Lambda_x(t, x, v)| + |\Lambda_v(t, x, v)| = 2xe^{-x^2} \leq |v| + \left|1 - e^{-x^2}\right| + 1 = (|v| + |\Lambda(t, x, v)|) + d(t),$$

onde $d(t) = 1$. Além disso, temos $J(x) \geq 0$ sempre, com igualdade apenas quando o expoente é nulo.

Veja também que este problema é pseudoinvexo visto que, dados x, y arcos admissíveis tais que $J(x) < J(y)$, existe $\gamma(x, y)(t) = -y(t)$ de modo que $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ e

$$\int_0^1 [\Lambda_x(t, y(t), y'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, y(t), y'(t))^T \gamma'(t)] dt = \int_0^1 2y(t)^2 e^{-y(t)^2} dt < 0,$$

tendo em mente que $y \neq 0$, pois $J(y) > 0$. Assim, pelo Teorema 2.12, toda função estacionária para este problema é mínimo global.

A equação de Euler para este problema é

$$2x_*(t)e^{-x_*(t)^2} = 0, \quad t \in [0, 1],$$

o que implica em $x_* \equiv 0$ ser a única função estacionária do problema. Veja que

$$J(x_*) = 1 - e^{-x_*(t)^2} = 1 - e^0 = 0;$$

disto concluímos que, de fato, $x_* \equiv 0$ é mínimo global para este problema.

□□□

Observação 2.14. Note que pseudoinvexidade é um conceito de convexidade generalizada. Para verificar isto, considere o problema básico

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \text{AC}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \end{aligned}$$

de modo que a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v)$ seja convexa em (x, v) , além de satisfazer as hipóteses do Teorema 2.3. Dado um par de funções admissíveis x, y tais que $J(y) < J(x)$, podemos tomar a função $\gamma = \gamma(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = y(t) - x(t)$ de modo a obter

$$\gamma(a) = y(a) - x(a) = A - A = 0, \quad \gamma(b) = y(b) - x(b) = B - B = 0,$$

além de

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left[\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \right] dt \\
&= \int_a^b \nabla_{x,y} \Lambda(t, x(t), x'(t))^T \left(\gamma(t), \gamma'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \nabla_{x,y} \Lambda(t, x(t), x'(t))^T \left(y(t) - x(t), y'(t) - x'(t) \right) dt \\
&\leq \int_a^b \left[\Lambda(t, y(t), y'(t)) - \Lambda(t, x(t), x'(t)) \right] dt \\
&= J(y) - J(x) < 0,
\end{aligned}$$

isto é, a Definição 2.10 é satisfeita. Por conseguinte, o problema convexo é pseudoinvexo.

□□□

A regra dos multiplicadores

3.1 A regra de multiplicadores clássica

A fim de apresentar a regra de multiplicadores clássica no contexto de Cálculo das Variações, trataremos do conhecido *Problema de Lagrange*, o qual consiste do problema básico (P') com a adicional restrição pontual de igualdade $\varphi(t, x(t), x'(t)) = 0$, onde $\varphi : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Sendo assim, consideremos o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \\ & \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.} \end{aligned} \tag{PR}$$

Notamos que este problema é bem mais complexo que o problema básico, visto que adicionamos infinitas restrições: uma para cada t num subconjunto de $[a, b]$ com medida positiva.

Teorema 3.1. *Seja x_* de classe C^1 por partes e um mínimo local fraco para o problema (PR), onde φ e Λ são continuamente diferenciáveis. Além disso, suponha que seja satisfeita a seguinte condição de posto: a matriz Jacobiana $D_v \varphi(t, x_*(t), x'_*(t))$ tem posto $k \leq n$ para todo $t \in [a, b]$, onde, se x_* tem uma de suas possíveis finitas quinas em $\tau \in (a, b)$, então essa condição deve valer para ambas derivadas laterais $x'_*(\tau+)$ e $x'_*(\tau-)$ em vez de $x'_*(\tau)$. Nessas condições, existem*

$\eta \in \{0, 1\}$, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ tais que

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

e de modo que x_* satisfaz a **equação de Euler**:

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} [\eta \Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle] (t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 540, Corolário 25.16. □

Note que o teorema acima estabelece a forma integral da equação de Euler expressa através do coestado p para a Lagrangiana aumentada $\eta \Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle$.

Reforçamos o comentário feito no Capítulo 1: aqui, a Lagrangiana aumentada $\eta \Lambda + \lambda \Psi$ não é a mesma aplicação utilizada em Programação Não-Linear, embora ambas possuem mesma nomenclatura.

O exemplo a seguir revela um contexto no qual problemas de Lagrange podem surgir: funcionais Λ que dependem das derivadas de grau superior da variável de estado. Tais problemas são comuns quando se trata de elasticidade.

Exemplo 3.2. Seja $x_* \in C^3[0, 1]$ uma solução para o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_0^1 \Lambda(t, x(t), x'(t), x''(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[0, 1], \quad x' \in \text{AC}[0, 1], \\ & x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad x'(0) = v_0, \quad x'(1) = v_1. \end{aligned}$$

Suponha que a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v, w)$ é de classe C^2 . Vamos mostrar que x_* satisfaz a Equação de Euler de segunda ordem

$$-\frac{d^2}{dt^2} \Lambda_w(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) + \frac{d}{dt} \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) = \Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t))$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Introduzimos uma nova variável de estado y juntamente da restrição $y - x' = 0$. Então consideramos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} \quad \tilde{J}(x, y) = \int_0^1 \tilde{\Lambda}(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt \\
& \text{sujeito a} \quad x, y \in \mathbf{AC}[0, 1] \\
& \quad (x(0), y(0)) = (x_0, v_0), \quad (x(1), y(1)) = (x_1, v_1), \\
& \quad \tilde{\varphi}(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) = 0, \quad t \in [a, b],
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\Lambda} : [a, b] \times \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{\varphi} : [a, b] \times \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^k$, com $k = n$, são dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) &= \Lambda(t, x(t), x'(t), x''(t)), \\
\tilde{\varphi}(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) &= y(t) - x'(t).
\end{aligned}$$

Notamos que

$$D_{v,w} \tilde{\varphi}(t, x, y, v, w) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ colunas}},$$

isto é, $D_{v,w} \tilde{\varphi}(t, x, y, v, w)$ tem posto completo. Com isso, podemos aplicar o Teorema 3.1, o qual nos garante a existência de um multiplicador $\eta \in \{0, 1\}$, arcos $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

$$(\eta, p(t), q(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

e de modo que x_* satisfaz a equação de Euler

$$(p'(t), q'(t), p(t), q(t)) = \nabla_{x,y,v,w} \left[\eta \tilde{\Lambda} + \langle \lambda(t), \tilde{\varphi} \rangle \right] (t, x_*(t), y_*(t), x'_*(t), y'_*(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \eta \Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)), & p(t) &= \eta \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) - \lambda(t), \\
q'(t) &= \lambda(t), & q(t) &= \eta \Lambda_w(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)).
\end{aligned}$$

Observe que se $\eta = 0$, teríamos $p = q \equiv 0$, uma contradição. Logo, $\eta = 1$. Sendo assim, lembrando que Λ_v e Λ_w são de classe C^1 , temos

$$\begin{aligned} \Lambda_x(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) &= p'(t) = \frac{d}{dt} \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) - \lambda'(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) - q''(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Lambda_v(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)) - \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_w(t, x_*(t), x'_*(t), x''_*(t)), \end{aligned}$$

ou seja, x_* satisfaz a equação de Euler de segunda ordem.

□□□

3.2 Uma regra de multiplicadores moderna

Veremos agora uma regra de multiplicadores mais geral que a do Teorema 3.1, a qual reduz a regularidade assumida sobre a solução, estabelece outras condições necessárias além da equação de Euler e ainda oferece a possibilidade de tratar outros tipos de restrições pontuais, tais como $\varphi(t, x, x') \leq 0$. Para isso, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[a, b], \quad (x(a), x(b)) \in E, \\ & \varphi(t, x(t), x'(t)) \in \Phi, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.} \end{aligned} \tag{PR'}$$

onde $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $\Phi \subset \mathbb{R}^k$ são conjuntos fechados.

Teorema 3.3. *Seja $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ um mínimo local forte para o problema (PR'), onde as funções φ e Λ são continuamente diferenciáveis. Suponha a seguinte qualificação de restrição (ou condição de posto) em uma vizinhança forte de x_* : para algum $\varepsilon > 0$,*

$$\left. \begin{aligned} t \in [a, b], \quad \|x - x_*(t)\| \leq \varepsilon, \\ \varphi(t, x, v) \in \Phi, \quad \lambda \in N_{\Phi}^L(\varphi(t, x, v)), \\ D_v \langle \lambda, \varphi \rangle(t, x, v) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \lambda = 0.$$

Então existem η igual a 0 ou 1, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ com

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b], \quad \lambda(t) \in N_{\Phi}^L(\varphi(t, x_*(t), x'_*(t))) \quad \text{q.t.p.}$$

de forma que x_* satisfaz a **equação de Euler**:

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} [\eta\Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle] (t, x_*(t), x'_*(t)) \text{ q.t.p.,}$$

a **condição de Weierstrass**: para quase todo t ,

$$v \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t, x_*(t), v) \in \Phi \implies \eta\Lambda(t, x_*(t), v) - \eta\Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v - x'_*(t) \rangle,$$

bem como a **condição de transversalidade**:

$$(p(a), -p(b)) \in N_E^L(x_*(a), x_*(b)).$$

Demonstração: Ver Clarke [5], pp. 540, Corolário 25.15. □

Observe que o teorema acima exige em sua hipótese que x^* seja Lipschitz. Em algumas situações, isso pode ser garantido pela própria restrição de Lagrange, visto que a limitação de x' é consequência da condição $\varphi(t, x(t), x'(t)) \in \Phi$.

Veja também que a hipótese de qualificação de restrição do Teorema 3.3 equivale à condição de posto completo caso $\Phi = \{0\}$ ou à condição de Independência Linear Positiva (ou PLI, em inglês) se $\Phi = \mathbb{R}_-^k$.

3.3 Condições suficientes por E-pseudoinvexidade

Nesta parte de problemas com restrições, também trabalhamos com condições suficientes via convexidade generalizada. Alguns textos que abordam convexidade generalizada no contexto de Cálculo das Variações são Arana-Jiménez, Osuna-Gómez, Ruiz-Garzón e Rojas-Medar [1] e Rojas-Jara [24]. O primeiro texto é um artigo que aborda problema com restrição de desigualdade porém utiliza multiplicadores na definição. Já o segundo, é uma dissertação de mestrado no qual são abordados problemas com restrição de igualdade apenas sem utilizar multiplicadores em sua definição.

A seguir, apresentaremos E-pseudoinvexidade (Euler-pseudoinvexidade), por meio da qual a condição de transversalidade e a equação de Euler são suficientes para otimalidade global. Nesta definição, não utilizamos multiplicadores e abordamos um contexto mais geral de problema com restrição do que os trabalhados nestes dois textos.

Definição 3.4. Dizemos que $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **função estacionária** para o problema (PR') se x é admissível para (PR') e se existem $\eta \in \{0, 1\}$, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma aplicação mensurável limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisfazendo a equação de Euler e a condição de transversalidade do Teorema 3.3. Se x é estacionária com $\eta = 1$, dizemos, então, que x é **estacionária normal**.

Definição 3.5. O problema (PR') é dito ser **E-pseudoinverso** se, para cada par x, y de arcos admissíveis tais que $J(y) < J(x)$, existe uma função $\gamma = \gamma(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$(\gamma(a), \gamma(b)) \in T_E^C(x(a), x(b)), \quad (3.1)$$

$$\int_a^b \left[\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \right] dt < 0 \quad (3.2)$$

e

$$\varphi_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \varphi_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \in T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t))) \quad \text{q.t.p.} \quad (3.3)$$

Veja que a E-invexidade é uma generalização do conceito de pseudoinvexidade apresentado no Capítulo 2.

Os seguintes resultados foram obtidos de maneira legítima através do estudo e adaptação dos artigos de Oliveira, Silva, Rojas-Medar [9, 10].

Teorema 3.6. Se (PR') é E-pseudoinverso, então todo arco estacionário normal x é um mínimo global de (PR').

Demonstração: Dado um arco estacionário normal x , suponha, por contradição, que existe um outro arco y admissível para (PR') de modo que $J(y) < J(x)$. Assim, existe um arco $\gamma = \gamma(x, y)$ de $[a, b]$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo (3.1) – (3.3). Como $\eta = 1$ e $\lambda(t) \in N_\Phi^L(\varphi(t, x(t), x'(t)))$ para quase todo $t \in [a, b]$, segue de (3.2) e (3.3) que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\eta \Lambda_x(t, x(t), x'(t)) + \lambda(t)^T \varphi_x(t, x(t), x'(t)) \right]^T \gamma(t) dt \\ & + \int_a^b \left[\eta \Lambda_v(t, x(t), x'(t)) + \lambda(t)^T \varphi_v(t, x(t), x'(t)) \right]^T \gamma'(t) dt < 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_a^b \nabla_{x,v} [\eta \Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle] (t, x(t), x'(t))^T (\gamma(t), \gamma'(t)) dt < 0.$$

Usando a equação de Euler, integração por partes e a relação (3.1) na desigualdade acima, obtemos

$$0 > \int_a^b [p'(t)^T \gamma(t) + p(t)^T \gamma'(t)] dt = p(t)^T \gamma(t) \Big|_a^b \geq 0$$

uma contradição. Concluimos, deste modo, que x é um mínimo global de (PR').

■

A fim de provarmos uma recíproca generalizada do teorema anterior, enunciamos o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 3.7. *Seja x um arco admissível para (PR') de modo que $D_v \varphi(t, x(t), x'(t))$ tenha posto completo. Suponha que, para toda função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$(\gamma(a), \gamma(b)) \in T_E^C(x(a), x(b)),$$

e

$$\varphi_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \varphi_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \in T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t))) \quad \text{q.t.p.}$$

tenha-se

$$\int_a^b [\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t)] dt \geq 0.$$

Nestas condições, x é uma função estacionária.

Demonstração: Consideremos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & F(\gamma) = \int_a^b f(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & \gamma \in \text{AC}[a, b], \quad (\gamma(a), \gamma(b)) \in U, \\ & g(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \in S, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}, \end{aligned} \tag{PRA'}$$

onde

$$f(t, \sigma, \theta) = \Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \sigma + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \theta,$$

$$g(t, \sigma, \theta) = \varphi_x(t, x(t), x'(t))^T \sigma + \varphi_v(t, x(t), x'(t))^T \theta,$$

$$U = T_E^C(x(a), x(b)) \quad \text{e} \quad S = T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t))).$$

Notamos que os conjuntos U e S são fechados.¹ Vejamos também que, por hipótese, $\gamma_* \equiv 0$ é

¹ Ver Teorema A.48.

um mínimo global para o problema variacional auxiliar (PRA'), com $F(\gamma_*) = 0$. Além disso, para algum $\varepsilon > 0$, temos: se $t \in [a, b]$, $\|\sigma - \gamma_*(t)\| \leq \varepsilon$, $g(t, \sigma, \theta) \in S$, $\alpha \in N_S^L(g(t, \sigma, \theta))$ e $D_\theta \langle \alpha, g \rangle(t, \sigma, \theta) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= D_\theta \langle \alpha, g \rangle(t, \sigma, \theta) = D_\theta [\alpha^T \varphi_x(t, x(t), x'(t)) \sigma + \alpha^T \varphi_v(t, x(t), x'(t)) \theta](t, \sigma, \theta) \\ &= \varphi_v(t, x(t), x'(t))^T \alpha \end{aligned}$$

implica $\alpha = 0$, visto que $\varphi_v(t, x(t), x'(t)) = D_v \varphi(t, x(t), x'(t))$ possui posto completo por hipótese. Com isso, estamos nas condições de aplicar o Teorema 3.3, obtendo a existência de η igual a 0 ou 1, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável limitada $\lambda(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ com

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b], \quad \lambda(t) \in N_S^L(g(t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t))) \quad \text{q.t.p.,}$$

de modo que γ_* satisfaz a equação de Euler

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{\sigma, \theta} [\eta f + \langle \lambda(t), g \rangle](t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t)) \quad \text{q.t.p.,}$$

bem como a condição de transversalidade:

$$(p(a), -p(b)) \in N_U^L(\gamma_*(a), \gamma_*(b)).$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma, \theta} [\eta f + \langle \lambda(t), g \rangle](t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t)) &= \nabla_{x, v} [\eta \Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle](t, x(t), x'(t)), \\ N_S^L(g(t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t))) &= N_S^L(0) = N_{T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t)))}^L(0) = [T_{T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t)))}^L(0)]^\Delta \\ &= [T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t)))]^\Delta = N_\Phi^L(\varphi(t, x(t), x'(t))), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N_U^L(\gamma_*(a), \gamma_*(b)) &= N_U^L(0) = N_{T_E^C(x(a), x(b))}^L(0) = [T_{T_E^C(x(a), x(b))}^L(0)]^\Delta \\ &= [T_E^C(x(a), x(b))]^\Delta = N_E^L(x(a), x(b)), \end{aligned}$$

concluimos que x é uma função estacionária. ■

Teorema 3.8. *Se todo arco estacionário x é um mínimo global de (PR') e $D_v \varphi(t, x(t), x'(t))$ tem posto completo, então (PR') é E-pseudoinvexo.*

Demonstração: Por contradição, suponha que (PR') não seja E-pseudoinvexo. Então existe um par de arcos admissíveis x, y tais que $J(y) < J(x)$ e para o qual toda $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo (3.1) e (3.3) tem-se

$$\int_a^b \left[\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \right] dt \geq 0.$$

Assim, pela proposição anterior, x é uma função estacionária. Porém, como $J(y) < J(x)$, o arco x não pode ser um mínimo global, contradizendo a hipótese de que todo arco estacionário é um mínimo global de (PR') . Portanto, o problema (PR') é E-pseudoinvexo. ■

Exemplo 3.9. Consideremos o seguinte problema de Cálculo das Variações:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_0^1 [1 - e^{-x(t)}] dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in C^1[0, 1], \quad (x(0), x(1)) \in \{(0, 0)\} \\ & -x(t) \in (-\infty, 0], \quad t \in [0, 1] \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Veja que Λ é continuamente diferenciável e côncava (não-convexa).

Seja $x_* \in \text{Lip}[0, 1]$ um mínimo local forte para o problema acima (basta tomar, por exemplo, $x_* \equiv 0$). Temos

$$\left. \begin{aligned} t \in [a, b], \quad \varphi(t, x, v) = x \in \Phi, \\ \lambda \in N_{\Phi}^L(\varphi(t, x, v)), \\ \lambda = D_v \langle \lambda, \varphi \rangle(t, x, v) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \lambda = 0,$$

onde $\Phi = (-\infty, 0]$ e $|x - x_*(t)| = |x| \leq \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ o raio da vizinhança forte de x_* . Segue do Teorema 3.3 e da Definição 3.4 que x_* é uma função estacionária, isto é, existem $\eta \in \{0, 1\}$, um arco $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função mensurável limitada $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b], \quad \lambda(t) \in N_{\Phi}^L(\varphi(t, x_*(t), x'_*(t))) \quad \text{q.t.p.},$$

onde

$$N_{\Phi}^C(\varphi(t, x_*(t), x'_*(t))) = N_{(-\infty, 0]}^C(-x_*(t)) = \begin{cases} [0, +\infty), & x_*(t) = 0, \\ \{0\}, & -x_*(t) < 0, \end{cases}$$

de forma que x_* satisfaz a equação de Euler:

$$\begin{aligned} (p'(t), p(t)) &= \nabla_{x,v} [\eta \Lambda + \langle \lambda(t), \varphi \rangle] (t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.} \\ &= (\eta e^{-x(t)} - \lambda(t), 0) \end{aligned}$$

bem como a condição de transversalidade:

$$(p(a), -p(b)) \in N_E^L(x_*(a), x_*(b)) = N_{\{(0,0)\}}^L(0, 0) = \mathbb{R}^2.$$

Assim,

$$0 = \frac{d}{dt} p(t) = \eta e^{-x(t)} - \lambda(t) \implies \eta e^{-x(t)} = \lambda(t) \quad \text{q.t.p.}$$

Como $p(t) = 0$ q.t.p., devemos ter $\eta = 1$, de forma que $\lambda(t) = e^{-x(t)}$ q.t.p. Com isto, $\lambda(t) > 0$ q.t.p., o que implica $x_*(t) = 0$ q.t.p.

Agora, uma função $x_*(t)$ que é admissível e satisfaz $x_*(t) = 0$ q.t.p. é um mínimo global deste problema, pois $J(x_*) = 0 \leq J(x) = \int_0^1 [1 - e^{-x(t)}] dt$ para qualquer outra função x admissível.

Desta maneira, o Teorema 3.8 nos garante que este problema é E-pseudoinvexo. De fato, sejam x, y funções admissíveis tais que $J(x) < J(y)$. Tome a aplicação $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma(t) = -y(t)$. Veja que γ assim definida satisfaz

$$(\gamma(0), \gamma(1)) \in \{(0, 0)\} = T_{\{(0,0)\}}^C(0, 0) = T_E^C(y(0), y(1)),$$

$$\int_0^1 [\Lambda_x(t, y(t), y'(t)) \gamma(t) + \Lambda_v(t, y(t), y'(t)) \gamma'(t)] dt = \int_0^1 [-e^{-y(t)} y(t)] dt < 0,$$

pois $0 \leq J(x) < J(y)$ (implicando $y(t) > 0$ q.t.p.), e

$$\varphi_x(t, y(t), y'(t)) \gamma(t) + \varphi_v(t, y(t), y'(t)) \gamma'(t) = -\gamma(t) = y(t) \in T_{\Phi}^C(\varphi(t, y(t), y'(t))),$$

que são, respectivamente, as condições (3.1), (3.2) e (3.3) da Definição 3.5, onde

$$T_{\Phi}^C(\varphi(t, y(t), y'(t))) = T_{(-\infty, 0]}^C(-y(t)) = \begin{cases} (-\infty, 0] = \Phi, & y(t) = 0, \\ \mathbb{R}, & -y(t) < 0. \end{cases}$$

□□□

Observação 3.10. *Vejam os que a E-pseudoinvexidade do problema com restrições é um tipo de convexidade generalizada. Consideremos o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a } x &\in \text{AC}[a, b], (x(a), x(b)) \in E, \\ \varphi(t, x(t), x'(t)) &\in \Phi, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}, \end{aligned}$$

onde a Lagrangiana Λ é convexa em (x, v) , a aplicação restrição φ é da forma $C^T x + D^T v$, onde C e D são matrizes em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, e os conjuntos E, Φ são convexos.² Sejam x, y arcos admissíveis tais que $J(y) < J(x)$. Tendo em mente a Proposição A.14, existe uma função $\gamma = \gamma(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(t) = y(t) - x(t)$ satisfazendo

$$(\gamma(a), \gamma(b)) = (y(a), y(b)) - (x(a), x(b)) \in T_E^C(x(a), x(b)) = T_E(x(a), x(b)),$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\Lambda_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \Lambda_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \nabla_{x,y} \Lambda(t, x(t), x'(t))^T (\gamma(t), \gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b \nabla_{x,y} \Lambda(t, x(t), x'(t))^T (y(t) - x(t), y'(t) - x'(t)) dt \\ &\leq \int_a^b \left[\Lambda(t, y(t), y'(t)) - \Lambda(t, x(t), x'(t)) \right] dt \\ &= J(y) - J(x) < 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \varphi_x(t, x(t), x'(t))^T \gamma(t) + \varphi_v(t, x(t), x'(t))^T \gamma'(t) \\ &= \nabla_{x,v} \varphi(t, x(t), x'(t))^T (\gamma(t), \gamma'(t)) \\ &= \nabla_{x,v} \varphi(t, x(t), x'(t))^T (y(t) - x(t), y'(t) - x'(t)) \\ &= \varphi(t, y(t), y'(t)) - \varphi(t, x(t), x'(t)) \in T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t))) \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

onde $T_\Phi^C(\varphi(t, x(t), x'(t))) = T_\Phi(\varphi(t, x(t), x'(t)))$. Logo, o problema convexo é E-pseudoinvexo.

□□□

² Estas exigências são baseadas em Clarke [5], pp. 541-542, hipóteses do 25.17 Teorema.

3.4 Mais alguns teoremas de multiplicadores

Como no caso das geodésicas, existem outros problemas em que se exige aos candidatos à solução sua restrição a uma superfície S descrita por uma igualdade funcional $\Psi(x) = 0$. Estudaremos tal caso através do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a } x &\in \text{AC}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) \in E_1, \\ x(t) &\in S = \{u \in \mathbb{R}^n : \Psi(u) = 0\}, \quad t \in [a, b], \end{aligned} \tag{PR''}$$

onde $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é de classe C^2 , com $1 \leq k < n$, Λ é de classe C^1 e E_1 é fechado.

Tendo em vista a condição inicial de contorno, notamos que o problema só possui sentido se $\Psi(A) = 0$. Isso implica uma redução evidente: um arco x satisfaz a condição inicial e permanece na superfície S se, e somente se, satisfaz

$$\frac{d}{dt} \Psi(x(t)) = D\Psi(x(t))^T x'(t) = 0 \text{ q.t.p.}$$

De fato, se $x(t) \in S$, então $\psi(x(t)) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, ou seja, $\psi(x(\cdot)) \equiv 0$, implicando $\frac{d}{dt} \psi(x(t)) = 0$ para quase todo $t \in [a, b]$; por outro lado, se $\frac{d}{dt} \psi(x(t)) = 0$ q.t.p., então $\psi(x(t)) = \text{const.}$ q.t.p., mas como ψ e x são contínuas e $\psi(x(a)) = 0$, devemos ter $\psi(x(t)) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Com isso, podemos substituir a restrição sobre a variável estado pela condição de Lagrange $\varphi(x, x') = 0$, onde $\varphi(x, v) := D\Psi(x)v$. Assim, aplicamos o Teorema 3.3, assumindo que a matriz $D_v \varphi(x, v) = D\Psi(x)$ possui posto máximo k em pontos de S . Entretanto, há uma complicação: dado um arco admissível x para (PR'') e

$$p(t) = \nabla \langle \lambda, \Psi \rangle(x(t)),$$

de modo que $\lambda \in \mathbb{R}^k$ é um vetor não nulo, pode-se verificar que, tomando $\eta = 0$, as condições necessárias obtidas do Teorema 3.3 são satisfeitas, de modo que elas não fornecem informação nova (visto que são satisfeitas por um arco admissível qualquer).

Para excluir a trivialidade apresentada acima, tomamos $\eta = 1$ e introduzimos uma hipótese extra, a *condição de compatibilidade*:

$$N_S^L(x) \cap N_{E_1}^L(x) = \{0\} \quad \forall x \in E_1 \cap S.$$

Teorema 3.11. *Seja $x_* \in \text{Lip}[a, b]$ um mínimo local forte para o problema (PR''), sob as hipóteses de posto e compatibilidade acima descritas. Definimos $\varphi(x, v) = D\Psi(x)v$. Então existem um arco p e uma função mensurável limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ tais que x_* satisfaz a equação de Euler:*

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} [\Lambda + \langle \lambda, \varphi \rangle] (t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.},$$

a condição de Weierstrass: para quase todo $t \in [a, b]$,

$$v \in \mathbb{R}^n, D\Psi(x_*(t))^T v = 0 \implies \Lambda(t, x_*(t), v) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v - x'_*(t) \rangle,$$

assim como a condição de transversalidade:

$$-p(b) \in N_{E_1}^L(x_*(b)).$$

Demonstração: Como observado anteriormente, a restrição de estado $\psi(x(t)) = 0$ é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = \varphi(x(t), x'(t)) = 0 \quad \text{q.t.p.},$$

onde $\varphi(x, v) = D\psi(x)^T v$. Do fato de $D\psi(x)$ ter posto completo k em pontos de S segue que $D\psi(x)$ permanece com posto completo numa vizinhança forte de x_* .³ Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$\lambda \in \mathbb{R}^k, D_v \langle \lambda, \varphi \rangle(x, v) = \varphi_v(x, v)^T \lambda = D\psi(x)^T \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

em uma vizinhança forte de x_* . Em particular, essa implicação vale se $t \in [a, b]$, $\|x - x_*(t)\| \leq \varepsilon$, $\varphi(t, x, v) \in \Phi$ e $\lambda \in N_\Phi^L(\varphi(t, x, v))$. Ou seja, a condição de posto do Teorema 3.3 é satisfeita. Nestas condições, o Teorema 3.3 garante a existência de $\eta \in \{0, 1\}$, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável e limitada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ com

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b], \quad \lambda(t) \in N_\Phi^L(\varphi(t, x_*(t), x'_*(t))) \quad \text{q.t.p.}$$

de modo que x_* satisfaz as respectivas condições necessárias (equação de Euler, condições

³ Ver Observação A.69.

de Weierstrass e de transversalidade). Mostremos que, neste caso, devemos ter $\eta = 1$. Por contradição, supomos $\eta = 0$. Assim, a equação de Euler implica

$$p(t) = \nabla \langle \lambda, \psi \rangle (x_*(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

e a condição de transversalidade fica

$$-p(b) = \nabla \langle \bar{\lambda}, \psi \rangle (x_*(b)) \in N_{E_1}^L(x_*(b))$$

para algum *essential cluster point*⁴ $\bar{\lambda}$ de $\lambda(\cdot)$ em b . Veja que, como $x_*(b) \in S$ e ψ é de classe C^2 , o Teorema A.43 nos garante que vale

$$D\psi(x_*(b))^T \bar{\lambda} \in N_S(x_*(b)),$$

de modo que, tendo em mente o Teorema A.55, a condição de compatibilidade implica $D\psi(x_*(b))^T \bar{\lambda} = 0$. Com isso, segue da condição de posto que $\bar{\lambda} = 0$, logo $p(b) = 0$, e, portanto, a condição de não-trivialidade do Teorema 3.3 não é satisfeita, uma contradição. ■

Corolário 3.12. *O Teorema 3.11 permanece válido quando E_1 é um conjunto unitário $\{x_1\}$.*

Demonstração: Primeiramente, pela Proposição A.10, existe um raio $r > 0$ de modo que o conjunto

$$\hat{E}_1 := [x_1 + N_S(x_1)] \cap B(x_1, r)$$

é tal que $\hat{E}_1 \cap S = \{x_1\}$. Assim, obtemos (localmente) o mesmo problema ao substituímos a restrição final por $x(b) \in \hat{E}_1$ (desta forma, teremos $x(b) \in \hat{E}_1 \cap S = E_1 = \{x_1\}$).

Como $N_S(x_1)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $T_S(x_1) \cap N_S(x_1) = \{0\}$, então

$$N_{\hat{E}_1}(x_1) = N_S(x_1)^\Delta = T_S(x_1),$$

de modo que a condição de compatibilidade é satisfeita. Sendo assim, o Teorema 3.11 pode ser aplicado. ■

⁴ Uma definição para este conceito (porém com uma nomenclatura distinta) pode ser encontrada em Arutyunov e Karamzin [2], p. 2517, Definição 3.1

Observe que em ambas formas da regra de multiplicadores, clássica e moderna, é exigida uma certa regularidade da solução x_* : suave por partes ou Lipschitz, respectivamente. Por meio do próximo teorema, veremos que é possível obter um resultado análogo sem tal exigência através de uma hipótese estrutural adicional sobre a Lagrangiana.

Para isto, vamos considerar o seguinte *Problema Isoperimétrico*:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \text{AC}[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \\ & \int_a^b \Psi(t, x(t), x'(t)) dt = 0, \end{aligned} \tag{PI}$$

onde $\Psi : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Teorema 3.13. *Seja $x_* \in \text{AC}[a, b]$ um mínimo local forte para o problema (PI), onde Ψ e Λ são continuamente diferenciáveis. Suponha a seguinte hipótese estrutural de crescimento de Λ : para algum $\varepsilon > 0$, existem uma constante $c \in \mathbb{R}$ e uma função integrável $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\|D_x(\Lambda, \Psi)(t, x, x'_*(t))\| \leq \|(\Lambda, \Psi)(t, x, x'_*(t))\| + d(t)$$

para quase todo $t \in [a, b]$ e para todo $x \in B(x_*(t), \varepsilon)$. Então existem η igual a 0 ou 1, um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^k$, com $(\eta, \lambda) \neq 0$, tais que x_* satisfaz a **equação de Euler**:

$$(p'(t), p(t)) = \nabla_{x,v} [\eta\Lambda + \langle \lambda, \Psi \rangle](t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

e a **condição de Weierstrass**: para quase todo $t \in [a, b]$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$(\eta\Lambda + \langle \lambda, \Psi \rangle)(t, x_*(t), v) - (\eta\Lambda + \langle \lambda, \Psi \rangle)(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v - x'_*(t) \rangle.$$

Demonstração: Ver Clarke [5], p. 455, Corolário 22.18.

□

Lagrangianas não-suaves

Abordaremos neste capítulo um contexto não compreendido pela teoria clássica do Cálculo das Variações: o estudo de problemas que envolvem Lagrangianas não-suaves. Esta questão moderna decorre de novas aplicações em economia, engenharia, mecânica e pesquisa operacional.

4.1 O Problema Lipschitz de Bolza

Consideremos o seguinte problema conhecido como *o Problema de Bolza*:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && J(x) = \ell_0(x(a)) + \ell_1(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\
 &\text{sujeito a} && x \in \text{AC}([a, b]; \mathbb{R}^n), \\
 &&& x(a) \in C_0, \quad x(b) \in C_1, \quad x'(t) \in V(t) \quad \text{q.t.p.},
 \end{aligned}
 \tag{PLB}$$

onde $\ell_0, \ell_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são localmente Lipschitz, C_0, C_1 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ e a multifunção $V : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é mensurável a conjuntos fechados e convexos de $\mathbb{R}^n$.

O seguinte resultado fornece, sob certas circunstâncias, condições necessárias para que um arco admissível seja um mínimo forte para (PLB).

Teorema 4.1. *Seja x_* um arco admissível e mínimo local forte para (PLB). Supomos que a Lagrangiana $\Lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável em relação a t e Lipschitz com respeito a (x, v) próximo a x_* no seguinte sentido: existe uma função integrável $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$|\Lambda(t, x, v) - \Lambda(t, y, w)| \leq k(t) (\|x - y\| + \|v - w\|) \quad (\text{HL})$$

para quase todo t , para todo $x, y \in B(x_(t), \varepsilon)$ e $v, w \in V(t)$.¹ Exigimos também a Hipótese de Interioridade: existe uma constante positiva δ tal que*

$$B(x'_*(t), \delta) \subset V(t) \quad \text{q.t.p.}$$

*Sob essas condições, existe um arco p satisfazendo a **inclusão de Euler**:*

$$p'(t) \in \text{co} \{ \omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \} \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}, \quad (\text{E})$$

*juntamente com a **condição de Weierstrass**: para quase todo t ,*

$$\Lambda(t, x_*(t), v) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v - x'_*(t) \rangle \quad \forall v \in V(t) \quad (\text{W})$$

*e as **condições de transversalidade e de fronteira**:*

$$\begin{cases} p(a) \in \partial_L \ell_0(x_*(a)) + N_{C_0}^L(x_*(a)) \\ -p(b) \in \partial_L \ell_1(x_*(b)) + N_{C_1}^L(x_*(b)). \end{cases} \quad (\text{T})$$

Observe que a Hipótese Lipschitz (LH) vale se V é uniformemente limitada e Λ é localmente Lipschitz. Assim, o teorema acima se aplica, em particular, para um *mínimo local fraco* x_* na classe $\text{Lip}[a, b]$ e para Lagrangiana localmente Lipschitz, tomando $V(t)$ da forma $B(x'_*(t), \delta)$. Desta maneira, a Hipótese de Interioridade vale automaticamente.

Note também que a diferenciabilidade de Λ não é assumida. Ressaltamos que o subdiferencial limite² $\partial_L \Lambda$ é tomado com respeito às variáveis (x, v) para cada t fixado. Como sabemos, quando Λ é continuamente diferenciável em (x, v) , o conjunto $\partial_L \Lambda$ é composto unicamente pelo gradiente. Nesse caso, (E) é equivalente à forma integral da equação de Euler

¹ (HL): Hipótese Lipschitz.

² Ver Anexo, Definição A.52.

expressa em termos do coestado p , isto é,

$$p'(t) = \nabla_x \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)), \quad p(t) = \nabla_v \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)).$$

A seguir, alguns resultados e redução de hipóteses, as quais são feitas sem perda de generalidade, além da inclusão de uma hipótese temporária, que nos auxiliarão na demonstração do Teorema 4.1.

Proposição 4.2. *Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável em t e localmente Lipschitz em (x, v) com*

$$\partial_L f(t, x, v) \subset k(t) B[0, 1] \quad \forall (t, x, v),$$

onde k é integrável. Sejam q_i , p_i , x_i e v_i sequências de funções mensuráveis com valores em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$q_i \rightharpoonup q \text{ em } L^1(a, b), \quad p_i(t) \rightarrow p(t) \text{ q.t.p.}, \quad x_i(t) \rightarrow x(t) \text{ q.t.p.}, \quad v_i(t) \rightarrow v(t) \text{ q.t.p.}$$

e, para cada i e quase todo t , satisfazendo $\|q_i(t)\| \leq k(t)$. Para certas constantes $c \leq d$, suponhamos que

$$q_i(t) \in \text{co}\{\omega : (\omega, p_i(t)) \in [c, d] \partial_L f(t, x_i(t), v_i(t)) + \varepsilon_i B[0, 1]\}, \quad t \in \Omega_i \text{ q.t.p.},$$

onde $\varepsilon_i \downarrow 0$, e Ω_i é uma sequência de subconjuntos mensuráveis de $[a, b]$ tais que $m(\Omega_i) \rightarrow b - a$. Então temos, no limite,

$$q(t) \in \text{co}\{\omega : (\omega, p(t)) \in [c, d] \partial_L f(t, x(t), v(t))\} \text{ q.t.p.}$$

(A notação $\rightharpoonup$ se refere à convergência fraca, e $[c, d] \partial_L f$ se refere ao conjunto $\{r\xi : r \in [a, b], \xi \in \partial_L f\}$.)

Demonstração: Primeiramente, definimos a multifunção $\Gamma : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\Gamma(t, x, v, p, \varepsilon) = \text{co}\{\omega : (\omega, p) \in [c, d] \partial_L f(t, x, v) + |\varepsilon| B[0, 1]\}.$$

Assim, temos

$$q_i(t) \in \Gamma(t, x_i(t), v_i(t), p_i(t), \varepsilon_i), \quad t \in \Omega_i \text{ q.t.p.}$$

Se o Teorema do Fecho Fraco (ver Teorema A.30) puder ser aplicado, com $Q = [a, b] \times \mathbb{R}^{3n+1}$ e $r_i = 0$, então obteremos exatamente a conclusão desejada. Verifiquemos, então, que o teorema se aplica, primeiramente mostrando que $\Gamma(t, \cdot)$ tem gráfico fechado.

Seja $(x_j, v_j, p_j, \varepsilon_j, q_j)$ uma sequência de pontos no gráfico de $\Gamma(t, \cdot)$ convergindo para $(x, v, p, \varepsilon, q)$. Então

$$q_j \in \Gamma(t, x_j, v_j, p_j, \varepsilon_j) = \text{co}\{\omega : (\omega, p_j) \in [c, d] \partial_L f(t, x_j, v_j) + |\varepsilon_j| B[0, 1]\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema de Carathéodory (ver Proposição A.13), para cada $j \in \mathbb{N}$, existem vetores $\omega_j^0, \omega_j^1, \dots, \omega_j^n$ e constantes não-negativas $\lambda_j^0, \lambda_j^1, \dots, \lambda_j^n$ com $\sum_{m=0}^n \lambda_j^m = 1$ tais que q_j é a combinação convexa

$$q_j = \sum_{m=0}^n \lambda_j^m \omega_j^m,$$

sendo que cada ω_j^m satisfaz

$$(\omega_j^m, p_j) \in r_j^m \zeta_j^m + \varepsilon_j B[0, 1]$$

para algum $r_j^m \in [c, d]$, $\zeta_j^m \in \partial_L f(t, x_j, v_j)$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Por hipótese, temos

$$\partial_L f(t, x, v) \subset k(t) B[0, 1], \quad \forall (t, x, v),$$

onde k é integrável; isto é, a multifunção $(x, v) \mapsto \partial_L f(t, x, v)$ é limitada para cada $t \in [a, b]$. Com isso, podemos supor que, tomando subsequências, todas as sequências de dados acima convergem quando $j \rightarrow \infty$. Do fato de $(x, v) \mapsto \partial_L f(t, x, v)$ possuir gráfico fechado (ver Definição A.52), obtemos, no limite,

$$q = \sum_{m=0}^n \lambda^m \omega^m,$$

onde λ^m são os coeficientes da combinação convexa e cada ω^m satisfaz

$$(\omega^m, p) \in r^m \zeta^m + \varepsilon B[0, 1]$$

para algum $r^m \in [c, d]$, $\zeta^m \in \partial_L f(t, x, v)$. Logo, o ponto $(x, v, p, \varepsilon, q)$ pertence ao gráfico de $\Gamma(t, \cdot)$, de modo que a hipótese (a) do Teorema do Fecho Fraco é satisfeita.

Verifiquemos, agora, a hipótese (b) que diz respeito à mensurabilidade. Como as seguintes

multifunções são mensuráveis³, $\Gamma_1, \Gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dadas por

$$\Gamma_1(t) = [c, d] \partial_L f(t, x(t), v(t)) + |\varepsilon(t)| B[0, 1] \quad \text{e} \quad \Gamma_2(t) = \mathbb{R}^n \times \{p(t)\},$$

a multifunção $\Gamma_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$\Gamma_3(t) = \{\omega : (\omega, p(t)) \in [c, d] \partial_L f(t, x(t), v(t)) + |\varepsilon(t)| B[0, 1]\},$$

a qual satisfaz $\Gamma_3(t) = \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$, é mensurável (ver Corolário A.24). Sendo assim, pela Proposição A.26, a aplicação

$$F(t) = \max \{\langle z, \omega \rangle : (\omega, p(t)) \in [c, d] \partial_L f(t, x(t), v(t)) + |\varepsilon(t)| B[0, 1]\}$$

é mensurável para quaisquer funções mensuráveis $x(t), v(t), p(t), \varepsilon(t)$ e $z \in \mathbb{R}^n$, como queríamos mostrar.

Por último, observamos que a hipótese (c) do Teorema do Fecho Fraco resulta diretamente das suposições aqui feitas.

■

Redução de hipóteses. Aqui descreveremos certas hipóteses que podem ser adicionadas sem perda de generalidade através de simples reformulações. Primeiramente, podemos afirmar que as hipóteses e conclusões do Teorema 4.1 não são afetadas caso definimos

$$\Lambda(t, x, v) := \Lambda(t, \pi_t^1(x), \pi_t^2(v)),$$

onde π_t^1 e π_t^2 denotam a projeção de x em $B(x_*(t), \varepsilon)$ e de v em $V(t)$ respectivamente. Veja que a otimalidade do arco x_* é preservada por essa modificação, assim como as conclusões do teorema.

Agora, como

$$\{\pi_t^1(x)\} = \{y \in B(x_*(t), \varepsilon) : d_{B(x_*(t), \varepsilon)}(x) = \|x - y\|\}$$

³ Segue das Proposições A.57 e A.22 para Γ_1 , e Corolário A.25 para Γ_2 , sabendo que p é contínua e o gráfico de Γ_2 é fechado.

e

$$\{\pi_t^2(v)\} = \{w \in V(t) : d_{V(t)}(v) = \|v - w\|\}$$

para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$, segue que $t \mapsto \pi_t^1(x)$ e $t \mapsto \pi_t^2(v)$ são mensuráveis (ver Anexo, Proposições A.20, A.27 e A.23). Sendo $\Lambda(t, x, v)$ mensurável em t e contínua em (x, v) , obtemos a mensurabilidade de $t \mapsto \Lambda(t, \pi_t^1(x), \pi_t^2(v))$ para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$.

Sabendo que as projeções π_t^1 e π_t^2 são globalmente Lipschitz, tendo em vista o Teorema A.64 e a Proposição A.65 do Anexo, pela hipótese (HL) temos: dados $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |\Lambda(t, x, v) - \Lambda(t, y, w)| &= |\Lambda(t, \pi_t^1(x), \pi_t^2(v)) - \Lambda(t, \pi_t^1(y), \pi_t^2(w))| \\ &\leq k(t) (\|\pi_t^1(x) - \pi_t^1(y)\| + \|\pi_t^2(v) - \pi_t^2(w)\|) \\ &\leq k(t) (\|x - y\| + \|v - w\|) \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [a, b]$, isto é, com a redefinição acima para a Lagrangiana, a condição Lipschitz (HL) é válida *globalmente*.

Sendo ℓ_0 localmente Lipschitz por hipótese, existe $\delta_0 > 0$ de modo que ℓ_0 é Lipschitz em $B(x_*(a), \delta_0)$ com constante $k_0 > 0$. Assim, redefinindo

$$\ell_0(x) := \ell_0(\pi_0^3(x)),$$

onde $\pi_0^3(x)$ é a projeção de x em $B(x_*(a), \delta_0)$, tem-se que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\ell_0(x_*(a)) - \ell_0(x)| = |\ell_0(x_*(a)) - \ell_0(\pi_0^3(x))| \leq k_0 \|x_*(a) - \pi_0^3(x)\|,$$

o que implica

$$\ell_0(x_*(a)) - k_0 \delta_0 \leq \ell_0(x_*(a)) - k_0 \|x_*(a) - \pi_0^3(x)\| \leq \ell_0(x),$$

ou seja, ℓ_0 é limitada inferiormente. E, como a projeção π_0^3 é globalmente Lipschitz,⁴ obtemos a globalidade Lipschitz da aplicação ℓ_0 modificada. Analogamente, podemos redefinir a aplicação $\ell_1(x) := \ell_1(\pi_1^4(x))$, onde $\pi_1^4(x)$ é a projeção de x em $B(x_*(b), \delta_1)$ e $\delta_1 > 0$ é tal que ℓ_1 é o raio da vizinhança de $x_*(b)$ na qual ℓ_1 é Lipschitz com constante $k_1 > 0$. Com isso, a ℓ_1 redefinida também é limitada inferiormente e globalmente Lipschitz.

⁴ Ver Teorema A.64 e Proposição A.65.

Agora, considere o conjunto

$$\hat{C} := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \text{proj}_{\hat{B}}(x) \text{ para algum } x \in C_0, \text{ onde } \hat{B} = B(x_*(a), \varepsilon) \cap C_0 \right\}.$$

Redefinimos C_0 por

$$C_0 := \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = y - \text{proj}_{\hat{C}}(0) \text{ para algum } y \in \hat{C} \right\}.$$

Note que esta é a translação de $\hat{C}$ para a origem. Deste modo, C_0 é compacto⁵ e contém a origem. Redefinimos também o conjunto C_1 , apenas o transladando para a origem (assim ele permanece fechado):

$$C_1 := \left\{ w - \text{proj}_{C_1}(0) : w \in C_1 \right\}.$$

Além disso, também podemos tomar $k(t) \geq 1$ de modo que nada será alterado. Por fim, vamos considerar $[a, b] = [0, 1]$ e $x_* \equiv 0$. Isto é possível pois existe uma bijeção entre os intervalos $[a, b]$ e $[0, 1]$, a saber $[0, 1] \ni \tau \mapsto a + \tau(b - a) \in [a, b]$. Ademais, consideremos os dois problemas:

$$(P_{a,b}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & J(x) = \ell_0(x(a)) + \ell_1(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} & x \in \text{AC}[a, b] : x(a) \in C_0, \quad x(b) \in C_1, \\ & x'(t) \in V(t) \text{ q.t.p.} \end{array} \right.$$

e

$$(P_{0,1}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar} & I(y) = \ell_0(y(0)) + \ell_1(y(1)) + \int_0^1 \Psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)) d\tau \\ \text{sujeito a} & y \in \text{AC}[0, 1] : y(0) \in C_0, \quad y(1) \in C_1, \\ & y'(\tau) \in Y(\tau) \text{ q.t.p.,} \end{array} \right.$$

onde, dado τ no intervalo $[0, 1]$,

$$\tau = \frac{t - a}{b - a} \text{ para algum } t \in [a, b],$$

$$\Psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)) := \Lambda\left(a + \tau(b - a), x(a + \tau(b - a)), \frac{x'(a + \tau(b - a))}{b - a}\right)(b - a)$$

⁵ De fato, $\hat{C} = \hat{B}$ é a interseção de um fechado e um compacto em $\mathbb{R}^n$, por isso é compacto. Sendo C_0 apenas a translação desse conjunto, ele também é compacto.

e

$$Y(\tau) := (b - a) V(a + \tau(b - a)).$$

Assim, dado $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ admissível para o problema $P_{a,b}$, existe uma aplicação correspondente $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $y(\tau) := x(a + \tau(b - a))$ que é admissível para o problema $P_{0,1}$. Além disso, neste caso, $J(x) = I(y)$ e $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$. Finalmente, devemos transladar o conjunto $V(t)$ para a origem, de modo a obter $0 = x'_*(t) \in V(t)$ para quase todo $t \in [0, 1]$. Para isso, fazemos

$$V(t) := \{v - \text{proj}_{V(t)}(0) : v \in V(t)\}, \quad t \in [0, 1].$$

A última redução que fazemos é a seguinte:

Proposição 4.3. *É suficiente provar o teorema substituindo $V(t)$ por*

$$V_\eta(t) := \left\{ v \in V(t) \cap B\left(0, \frac{1}{\eta}\right) : v + \eta B(0, 1) \subset V(t) \right\}$$

para qualquer $\eta > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração: Primeiramente, observamos que a função $x_* \equiv 0$ permanece admissível e ótima para o problema quando V é substituído por V_η com $\eta < \delta$, tendo em vista a Hipótese de Interioridade e que $V_\eta(t) \subset V(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Se o teorema é provado com a redução de hipóteses acima, então existe uma sequência de arcos p_i satisfazendo as conclusões do teorema para V_{η_i} em vez de V , onde $\eta_i \downarrow 0$. Assim, segue das Proposições A.45 e A.53 juntamente da inclusão de Euler que

$$\| (p'_i(t), p_i(t)) \| \leq k(t) \quad \text{q.t.p.}$$

Como

$$\|p_i(t)\| \leq \| (p'_i(t), p_i(t)) \|, \quad t \in [0, 1],$$

temos

$$\min_{t \in [0, 1]} \|p_i(t)\| = \int_0^1 \min_{t \in [0, 1]} \|p_i(t)\| ds \leq \int_0^1 k(s) ds = \text{const.},$$

isto é, $\min_{t \in [0, 1]} \|p_i(t)\|$ é limitado superiormente independentemente do índice i . Deste modo, $\{p_i\}$ é limitada em $C[0, 1]$, bem como equicontínua. Pelo Teorema de Ascoli (ver Teorema A.67) e

pela compacidade fraca no espaço $L^1[0, 1]$ (ver Proposição A.19), podemos tomar subsequências (sem reindexar), encontrando um arco p tal que $p'_i \rightarrow p'$ fracamente e $p_i(t) \rightarrow p(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, tendo em vista a Proposição A.19 e o fato de que $\|p'_i\|_\infty \leq k(t)$ q.t.p.

Observe que p satisfaz a condição de transversalidade (T). De fato, sabemos que ℓ_0 é Lipschitz em $x_*(0)$ com constante K_0 . Logo, pelas Proposições A.45 e A.53, temos

$$\partial_L \ell_0(x_*(0)) \subset \partial_C \ell_0(x_*(0)) \subset B(0, K_0).$$

Assim, $\partial_L \ell_0(x_*(0))$ é limitado, além de ser fechado por definição; portanto, $\partial_L \ell_0(x_*(0))$ é compacto. Sendo $N_{C_0}^L(x_*(0))$ um conjunto fechado por definição, segue da Proposição A.68 que a soma $\partial_L \ell_0(x_*(0)) + N_{C_0}^L(x_*(0))$ é um conjunto fechado. O mesmo raciocínio de aplica à aplicação ℓ_1 e ao cone normal limite sobre C_1 em $(x_*(1))$. E mais, p satisfaz (W) para $V(t)$ (basta fazer $i \rightarrow \infty$ para ver que $V_{n_i}(t)$ tende a $V(t)$, $t \in [0, 1]$). Aplicando a Proposição 4.2 com $f = \Lambda$, $c = d = 1$ e $q_i = p'_i$, segue que p satisfaz a inclusão de Euler (E).

■

O último passo antes de demonstrar o Teorema 4.1 é incluir a **Hipótese temporária**

$$C_1 = \mathbb{R}^n, \tag{TH}$$

de maneira que não há restrição explícita sobre $x(1)$.

Demonstração do Teorema 4.1:

Esta prova é um trabalho custoso, seu desenvolvimento exige o uso de resultados de Análise funcional e Cálculo não-suave. Para uma melhor estruturação a dividimos em 5 partes: **A**, **B**, **C**, **D** e **E**.

A. Utilizando penalização, definimos uma sequência de problemas dissociados convergindo apropriadamente para o problema (PLB). Dada uma sequência $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de números positivos tendendo ao infinito, introduzimos as funções⁶

$$\ell_1^i(y) = \min_{\beta \in \mathbb{R}^n} \{ \ell_1(\beta) + n_i \|y - \beta\|^2 \}. \tag{4.1}$$

⁶ Estas aproximações de Moreau-Yosida para ℓ_1 são as inf-convoluções quadráticas, as quais podem ser encontradas em Clarke [5], §7.4.

Notamos que

$$\ell_1^i(y) \leq \ell_1(\beta) + n_i \|y - \beta\|^2$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}^n$, em particular,

$$\ell_1^i(y) \leq \ell_1(y).$$

Além disso, como ℓ_1 é globalmente Lipschitz com constante K_1 , temos

$$\ell_1(\beta) \geq \ell_1(y) - K_1 \|y - \beta\|,$$

logo

$$\ell_1^i(y) \geq \min_{\beta \in \mathbb{R}^n} \{ \ell_1(y) - K_1 \|y - \beta\| + n_i \|y - \beta\|^2 \} = -\frac{(-K_1)^2 - 4n_i \ell_1(y)}{4n_i} = \ell_1(y) - \frac{K_1^2}{4n_i},$$

de modo que

$$\ell_1^i \leq \ell_1 \leq \ell_1^i + \frac{c}{n_i},$$

onde $c = K_1^2/4$ é uma constante independente de i . Definimos também

$$\Lambda_i(t, x, v) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2 \},$$

o que dissocia x e v . A condição Lipschitz (LH), que agora supomos valer globalmente, implica que a aplicação $u \mapsto \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2$ é contínua para cada $t \in [0, 1]$ e $x, v \in \mathbb{R}^n$; além disso, essa aplicação é coerciva: de fato, por (LH) temos

$$\begin{aligned} \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2 &\geq \Lambda(t, 0, v) - k(t) \|u\| + n_i k(t) \|u - x\|^2 \\ &= \Lambda(t, 0, v) + k(t) (n_i \|u - x\|^2 - \|u\|). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} n_i \|u - x\|^2 - \|u\| &= n_i \langle u - x, u - x \rangle - \|u\| \\ &= n_i (\|u\|^2 - 2\langle u, x \rangle + \|x\|^2) - \|u\| \\ &= \|u\|^2 \left(n_i - 2n_i \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} + n_i \frac{\|x\|^2}{\|u\|^2} - \frac{1}{\|u\|} \right) \\ &= \|u\|^2 \left(n_i - 2n_i \frac{\|x\| \cos \theta}{\|u\|} + n_i \frac{\|x\|^2}{\|u\|^2} - \frac{1}{\|u\|} \right), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \left[\Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2 \right] \\ \geq \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \left[\Lambda(t, 0, v) + k(t) \|u\|^2 \left(n_i - 2n_i \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} + n_i \frac{\|x\|^2}{\|u\|^2} - \frac{1}{\|u\|} \right) \right] = +\infty, \end{aligned}$$

isto é, $u \mapsto \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2$ é coerciva. Consequentemente, temos garantida a existência do mínimo global dessa aplicação (ver Teorema A.37). Deste modo, a função Λ_i está bem definida.

Sendo $u \mapsto \Lambda(t, u, v)$ contínua, o mínimo sobre $u \in \mathbb{R}^n$ coincide com o *ínfimo* para u com coordenadas racionais. Assim, Λ_i é o ínfimo enumerável de funções LB-mensuráveis, visto que, para cada u , a aplicação

$$(t, x, v) \mapsto \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2$$

é mensurável em t e contínua em (x, v) . Disto segue que a própria Λ_i é LB-mensurável (ver Teorema A.5), de modo que o seguinte funcional está bem definido:

$$J_i(x) := \ell_0(x(0)) + \ell_1^i(x(1)) + \int_0^1 \Lambda_i(t, x(t), x'(t)) dt.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Lambda_i(t, x(t), x'(t)) dt &= \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, x'(t)) + n_i k(t) \|u - x\|^2 \} dt \\ &\geq \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, x'(t)) \} dt + n_i \int_0^1 k(t) \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \|u - x\|^2 \} dt \\ &\geq \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, x'(t)) \} dt; \end{aligned}$$

como $\ell_1^i \geq \ell_1 - \frac{c}{n_i}$ por definição da aplicação ℓ_1^i e a sequência $\left\{ \frac{c}{n_i} \right\}_i$ é convergente (e, portanto, é limitada por uma certa constante $\tilde{c}$), temos

$$\ell_1^i \geq \ell_1 - \tilde{c} \geq \tilde{c}_0,$$

para alguma constante $\tilde{c}_0$, visto que ℓ_1 é limitada inferiormente por hipótese. Então, pela

Hipótese Lipschitz (HL), integrabilidade de Λ e limitação inferior de ℓ_0 e ℓ_1^i , obtemos

$$\begin{aligned}
J_i(x) &= \ell_0(x(0)) + \ell_1^i(x(1)) + \int_0^1 \Lambda_i(t, x(t), x'(t)) dt \\
&\geq \ell_0(x(0)) + \ell_1^i(x(1)) + \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, x'(t)) \} dt \\
&\geq \ell_0(x(0)) + \ell_1^i(x(1)) + \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, x(t), x'(t)) + k(t) \|u - x(t)\|^2 \} dt \\
&= \ell_0(x(0)) + \ell_1^i(x(1)) + \int_0^1 \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \geq c_0,
\end{aligned}$$

ou seja, J_i é limitado inferiormente por alguma constante c_0 que independe do índice i .

Agora, definimos I_i como sendo o ínfimo de $J_i(x)$ sobre o conjunto dos arcos x tais que

$$(x(0), x') \in S := \left\{ (x(0), x') : x(0) \in C_0, x'(t) \in V_\eta(t) \text{ q.t.p.}, \|x(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \int_0^1 \|x'(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Desta forma, se x é um arco tal que $(x(0), x') \in S$, então

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^1 \|x'(t)\| dt \leq \varepsilon, \quad t \in [0, 1].$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
c_0 \leq I_i &\leq J_i(0) = \ell_0(0) + \ell_1^i(0) + \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \Lambda(t, u, 0) + n_i k(t) \|u\|^2 \} dt \\
&\leq \ell_0(0) + \ell_1(0) + \int_0^1 \Lambda(t, 0, 0) dt = J(0).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja y_i um arco satisfazendo $(y_i(0), y'_i) \in S$ além de $J_i(y_i) \leq I_i + n_i^{-1}$ (a existência de tal função é garantida pela definição de ínfimo).

Lema 4.4. *Existe uma função mensurável w_i tal que $w_i(t)$ é, quase sempre, um ponto no qual o mínimo da definição de $\Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t))$ é atingido:*

$$\Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t)) = \Lambda(t, w_i(t), y'_i(t)) + n_i k(t) \|w_i(t) - y_i(t)\|^2 \text{ q.t.p.}$$

Para provar isto, consideremos a multifunção $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Gamma(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : \Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t)) = \Lambda(t, w, y'_i(t)) + n_i k(t) \|w - y_i(t)\|^2\}.$$

Assim, $\Gamma(t) \neq \emptyset$ para quase todo t , visto que o mínimo que define Λ_i é atingido. Notamos também que, pela continuidade em w , o conjunto $\Gamma(t)$ é fechado (basta tomar uma sequência de pontos de $\Gamma(t)$ convergente e aplicar a continuidade na variável w). Como Λ_i é LB-mensurável e y_i é um arco, a aplicação $t \mapsto \Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t))$ é mensurável. Desta forma, existe uma função $g(t, w)$, definida por

$$g(t, w) = \Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t)) - \Lambda(t, w, y'_i(t)) - n_i k(t) \|w - y_i(t)\|^2,$$

que é mensurável em t e contínua em w , além de satisfazer

$$\Gamma(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : g(t, w) = 0\}.$$

Nessas condições, Γ é mensurável⁷ e a valores fechados, de modo a admitir uma seleção mensurável (ver Corolário A.21), o que implica na afirmação deste lema.

□

Lema 4.5. *A igualdade $\lim_{i \rightarrow \infty} I_i = J(0)$ é válida.*

De fato, seja w_i a função fornecida pelo Lema 4.4. Pela definição de Λ_i , sabemos que

$$\Lambda_i(t, x, v) \leq \Lambda(t, u, v) + n_i k(t) \|u - x\|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n;$$

em particular, se $u = x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\Lambda_i(t, x, v) \leq \Lambda(t, x, v).$$

Pela equação que define w_i e pela Hipótese Lipschitz (HL), lembrando que $n_i > 0$ e $k(t) \geq 1$,

⁷ Ver Proposição A.23, considerando $\Omega = [a, b]$, $\varphi = g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c = d \equiv 0$, $P(t) = \mathbb{R}^n$ e $Q(t) = \emptyset$ para todo $t \in [a, b]$.

segue que

$$\begin{aligned}
 \|w_i(t) - y_i(t)\|^2 &= \frac{\Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t)) - \Lambda(t, w_i(t), y'_i(t))}{n_i k(t)} \\
 &\leq \frac{\Lambda(t, y_i(t), y'_i(t)) - \Lambda(t, w_i(t), y'_i(t))}{n_i k(t)} \\
 &\leq \frac{k(t) [\|y_i(t) - w_i(t)\| + \|y'_i(t) - y'_i(t)\|]}{n_i k(t)} = \frac{\|y_i(t) - w_i(t)\|}{n_i}
 \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, 1]$, o que implica

$$\|y_i(t) - w_i(t)\| \leq n_i^{-1} \text{ q.t.p.}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 I_i + n_i^{-1} &\geq J(y_i) = \ell_0(y_i(0)) + \ell_1^i(y_i(1)) + \int_0^1 \Lambda_i(t, y_i(t), y'_i(t)) dt \\
 &= \ell_0(y_i(0)) + \ell_1^i(y_i(1)) + \int_0^1 [\Lambda(t, w_i(t), y'_i(t)) + n_i k(t) \|y_i(t) - w_i(t)\|^2] dt \\
 &\geq \ell_0(y_i(0)) + \ell_1(y_i(1)) - \frac{c}{n_i} + \int_0^1 [\Lambda(t, y_i(t), y'_i(t)) - k(t) \|y_i(t) - w_i(t)\|] dt \\
 &\geq \ell_0(x_*(0)) + \ell_1(x_*(1)) + \int_0^1 \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) dt - \frac{c}{n_i} - \int_0^1 k(t) \|y_i(t) - w_i(t)\| dt \\
 &\geq J(x_*) - \frac{c}{n_i} - \|k\|_1 n_i^{-1} = J(0) - \frac{c + \|k\|_1}{n_i}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} I_i = J(0)$, tendo em vista (4.2).

□

Podemos ver o problema definindo I_i relativo aos pares $(x(0), x')$ no espaço métrico completo $\mathbb{R}^n \times L^1$ que satisfazem as condições do conjunto S definido anteriormente. O Lema 4.5 implica que o par $(0, 0)$ é ε_i^2 -ótimo para o problema (ver Definição A.38), isto é, seu custo é um valor na ε_i^2 -vizinhança do ínfimo, para alguma sequência positiva ε_i tendendo a 0. De fato, queremos mostrar que

$$J_i(0, 0) \leq \inf_{(\alpha, v) \in S} \{J(\alpha, v)\} + \varepsilon_i^2,$$

mas isso é equivalente a

$$J_i(0) \leq \inf \{ J_i(x) : x \text{ satisfaz a equação (2)} \} + \varepsilon_i^2 = I_i + \varepsilon_i^2.$$

Sabemos pelo Lema 4.5 que

$$I_i - J(0) \geq -\varepsilon_i^2,$$

logo,

$$J_i(0) \leq J(0) \leq I_i + \varepsilon_i^2,$$

como queríamos mostrar.

Assim sendo, aplicamos o Teorema de Ekeland (ver Teorema A.42)⁸ a fim de garantir a existência de um elemento $(x_i(0), x'_i) \in S$ satisfazendo

$$\|x_i(0)\| + \int_0^1 \|x'_i(t)\| dt \leq \varepsilon_i, \quad (4.3)$$

o qual minimiza sobre S o funcional $\tilde{J}_i$ definido por

$$\begin{aligned} \tilde{J}_i(x(0), x') = & \ell_0(x(0)) + \varepsilon_i \|x(0) - x_i(0)\| + \ell_1^i(x(1)) \\ & + \int_0^1 \min_{u \in \mathbb{R}^n} [\Lambda(t, u, x'(t)) + n_i k(t) \|u - x(t)\|^2 + \varepsilon_i \|x'(t) - x'_i(t)\|] dt. \end{aligned}$$

Como $\|x'_i\|_1 \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ para cada i e $\varepsilon_i \downarrow 0$, podemos tomar uma subsequência, sem reescrever os índices, de modo que $x'_i(t) \rightarrow 0$ q.t.p.

Assim, veja que

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|x'_i\|_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} (\|x_i\|_{AC} - \|x_i(0)\|),$$

e, como $\|x_i(0)\| \rightarrow 0$ por (4.3), segue que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i\|_{AC} = 0$, isto é, $x_i(t) \rightarrow 0$ q.t.p.

⁸ Neste caso, $E = \mathbb{R}^n \times L^1(0, 1)$ com a métrica $d((\alpha, v), (\beta, w)) = \|\alpha - \beta\|_{\mathbb{R}^n} + \|v - w\|_{L^1}$, onde $(\alpha, v), (\beta, w) \in E$; a aplicação $f = J_i$ é semicontínua inferior (pelo Teorema A.39 conseguimos a semicontinuidade inferior do integrando Λ_i); e tomamos $\lambda = \varepsilon_i$, $\varepsilon = \varepsilon_i^2$, $z = (x_i(0), x'_i)$ e $u = (0, 0)$. Com isso, a equação (4.3) segue do item A.42(b) e a minimização do funcional $J_i(x)$ segue do item A.42(c).

B. Agora fixamos i e reformulamos a otimalidade de x_i para $\tilde{J}_i$ em uma maneira mais proveitosa, a qual nos permitirá identificar um arco p_i “próximo” de satisfazer as condições necessárias. Seja u_i uma função mensurável tal que o mínimo

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} [\Lambda(t, u, x'_i(t)) + n_i k(t) \|u - x_i(t)\|^2]$$

é atingido em $u_i(t)$ para quase todo t . Assim, como no Lema 4.5, temos $\|u_i(t) - x_i(t)\| \leq n_i^{-1}$ q.t.p., implicando $u_i(t) \rightarrow 0$.

Seja β_i um ponto no qual é atingido o mínimo em (4.1) quando $y = x_i(1)$, ou seja,

$$\ell_1^i(x_i(1)) = \ell_1(\beta_i) + n_i \|x_i(1) - \beta_i\|^2.$$

Então, pela Regra de Fermat (ver Proposição A.46) e pela Proposição A.54, segue que

$$\begin{aligned} 0 \in \partial_C \left\{ \ell_1(\beta) + n_i \|x_i(1) - \beta\|^2 \right\}(\beta_i) &\subset \partial_C \ell_1(\beta_i) + \partial_C \left\{ n_i \|x_i(1) - \beta\|^2 \right\}(\beta_i) \\ &= \partial_C \ell_1(\beta_i) - 2n_i(x_i(1) - \beta_i). \end{aligned}$$

Logo, existe $\zeta_i \in \partial_C \ell_1(\beta_i)$ tal que $0 = \zeta_i - 2n_i(x_i(1) - \beta_i)$, ou seja,

$$\beta_i = -\frac{\zeta_i}{2n_i} + x_i(1) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,$$

visto que ζ_i está num conjunto limitado (pois ℓ_1 é Lipschitz), n_i é uma sequência de números positivos tendendo a infinito e que $x_i(1) \rightarrow 0$. Com isso, podemos escrever $\beta_i \rightarrow x_*(1) = 0$.

Agora definimos um arco p_i de modo que

$$p'_i(t) = 2n_i k(t) (x_i(t) - u_i(t)), \quad p_i(1) = -2n_i (x_i(1) - \beta_i).$$

Tendo em mente as observações acima, podemos escolher $\beta_i \in \mathbb{R}^n$ de modo a obter

$$-p_i(1) \in \partial_P \ell_1(\beta_i). \tag{4.4}$$

Mais adiante precisaremos da seguinte igualdade

$$n_i k \|u - x\|^2 = n_i k \|u_i - x_i\|^2 - \langle p'_i, u - u_i \rangle + \langle p'_i, x - x_i \rangle + n_i k \|(x - x_i) - (u - u_i)\|^2,$$

a qual pode ser verificada através de simples manipulações algébricas.

Definimos o funcional de custo $\Phi : L^\infty \times \mathbb{R}^n \times L^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} \Phi(u, \alpha, v) := & \ell_0(\alpha) + \varepsilon_i \|\alpha - x_i(0)\| - \langle p_i(0), \alpha \rangle + n_i \|x(1) - \beta_i\| + \langle p_i(1), x(1) \rangle \\ & + \int_0^1 \left[\Lambda(t, u(t), v(t)) - \langle p_i(t), v(t) \rangle - \langle p'_i(t), u(t) \rangle + \varepsilon_i \|v(t) - x'_i(t)\| \right] dt \\ & + 2n_i \int_0^1 k(t) \left[\|u(t) - u_i(t)\|^2 + \|x(t) - x_i(t)\|^2 \right] dt \end{aligned}$$

onde

$$x(t) = \alpha + \int_0^t v(s) ds.$$

Dessa forma, através de manipulações algébricas envolvendo a igualdade acima e integração por partes, vemos que a otimalidade de $(x_i(0), x'_i)$ para $\tilde{J}_i$ se traduz no seguinte: para determinada constante c_i , vale

$$\Phi(u, \alpha, v) \geq \tilde{J}_i(x_i(0), x'_i) + c_i$$

para qualquer (u, α, v) satisfazendo

$$\alpha \in C_0, \quad \|\alpha\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad v(t) \in V_\eta(t) \quad \text{q.t.p.}, \quad \int_0^1 \|v(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.5)$$

com igualdade quando $(u, \alpha, v) = (u_i, x_i(0), x'_i)$. Logo, $\Phi(u, \alpha, v)$ é minimizada sob as restrições (4.5) em $(u_i, x_i(0), x'_i)$.

Note que

$$\begin{aligned} n_i \|x(1) - \beta_i\| + \langle p_i(1), x(1) \rangle &= n_i \langle x(1) - \beta_i, x(1) - \beta_i \rangle - 2n_i \langle (x_i(1) - \beta_i), x(1) \rangle \\ &= n_i [\|x(1)\|^2 - 2 \langle x(1), \beta_i \rangle + \|\beta_i\|^2 - 2 \langle x_i(1), x(1) \rangle + 2 \langle \beta_i, x(1) \rangle] \\ &= n_i [\|x(1)\|^2 + \|\beta_i\|^2 - 2 \langle x_i(1), x(1) \rangle] \\ &= n_i [\|x(1) - x_i(1)\|^2 - \|x_i(1)\|^2 + \|\beta_i\|^2]. \end{aligned}$$

Segue então que o funcional modificado $\Psi(u, \alpha, v)$ definido por

$$\begin{aligned}\Psi(u, \alpha, v) := & \ell_0(\alpha) + \varepsilon_i \|\alpha - x_i(0)\| - \langle p_i(0), \alpha \rangle + n_i \|x(1) - x_i(1)\|^2 \\ & + \int_0^1 \left[\Lambda(t, u(t), v(t)) - \langle p_i(t), v(t) \rangle - \langle p'_i(t), u(t) \rangle + \varepsilon_i \|v(t) - x'_i(t)\| \right] dt \\ & + 2n_i \int_0^1 k(t) \left[\|u(t) - u_i(t)\|^2 + \|x(t) - x_i(t)\|^2 \right] dt\end{aligned}$$

é minimizado relativo às restrições (4.5) em $(u_i, x_i(0), x'_i)$, tendo em vista que, para todo (u, α, v) satisfazendo as condições (4.5),

$$\begin{aligned}\Psi(u, \alpha, v) &= \Phi(u, \alpha, v) - n_i (\|\beta_i\|^2 - \|x_i(1)\|^2) \\ &\geq \Phi(u_i, x_i(0), x'_i) - n_i (\|\beta_i\|^2 - \|x_i(1)\|^2) \\ &= \Psi(u_i, x_i(0), x'_i).\end{aligned}$$

C. O próximo passo consiste de uma análise variacional (para i ainda fixo) do mínimo do funcional Ψ acima definido. Primeiramente, fixamos $u = u_i$ e $v = x'_i$. Assim, a aplicação $\alpha \mapsto \Psi(u_i, \alpha, x'_i)$ atinge um mínimo local em $x_i(0)$ (para i suficientemente grande de modo que $\|x_i(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, visto que $x_i(0) \rightarrow 0$) relativo à restrição $\alpha \in C_0$. A condição necessária correspondente é

$$p_i(0) \in \partial_L [\ell_0 + I_{C_0}](x_i(0)) + \varepsilon_i B[0, 1], \quad (4.6)$$

visto que

$$0 \in \partial_L \Psi(x_i(0)) + N_{C_0}^L(x_i(0)) \subset \partial_L \ell_0(x_i(0)) + \varepsilon_i B - \{p_i(0)\} + \partial_L I_{C_0}(x_i(0)).$$

Mais adiante, obteremos a partir dessa condição, juntamente da inclusão (4.4), a condição de transversalidade (T).

Agora, exploramos o mínimo de $\Psi(u_i, x_i(0), v)$ na variável v para obter um precursor da condição de Weierstrass. Veja que a restrição sobre v em (4.5) é fraca para i suficientemente grande. Vamos mostrar que, para quase todo t ,

$$\langle p_i(t), v \rangle - \Lambda(t, u_i(t), v) - \varepsilon_i \|v - x'_i(t)\| \leq \langle p_i(t), x'_i(t) \rangle - \Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) \quad v \in V_\eta(t). \quad (4.7)$$

Suponhamos, por contradição, que (4.7) não vale. Então existe $r > 0$ e um subconjunto $A \subset [0, 1]$ de medida positiva m tal que, para alguma função mensurável w definida em A e com valores em $V_\eta(t)$, temos

$$\langle p_i(t), w(t) \rangle - \Lambda(t, u_i(t), w(t)) - \varepsilon_i \|w(t) - x'_i(t)\| \geq \langle p_i(t), x'_i(t) \rangle - \Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) + r, \quad t \in A \quad \text{q.t.p.}$$

ou, equivalentemente,

$$\Lambda(t, u_i(t), w(t)) + \varepsilon_i \|w(t) - x'_i(t)\| - \langle p_i(t), w(t) \rangle \leq \Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) - \langle p_i(t), x'_i(t) \rangle - r, \quad t \in A \quad \text{q.t.p.}$$

Ressaltamos que $\mu(A) = m$ (medida de A) pode ser tomado suficientemente pequeno. Se as funções $x, v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são tais que

$$v(t) = \begin{cases} w(t), & t \in A \\ x'_i(t), & t \notin A \end{cases}$$

e

$$x(t) = x_i(0) + \int_0^t v(s) ds,$$

então temos

$$\begin{aligned} \|x - x_i\|_{AC} &= \|x(0) - x_i(0)\| + \|v - x'_i\|_1 = 0 + \int_0^1 \|v(t) - x'_i(t)\| dt \\ &= \int_A \|w(t) - x'_i(t)\| dt + \int_{[0,1] \setminus \{A\}} \|x'_i(t) - x'_i(t)\| dt \\ &\leq \int_A K dt + \int_{[0,1] \setminus \{A\}} 0 dt = Km \end{aligned}$$

para constante $K = \frac{2}{\eta}$ independente de m , visto que $w(t), x'_i(t) \in V_\eta(t) \subset B\left(0, \frac{1}{\eta}\right)$ para quase todo t . Assim,

$$\begin{aligned} \Psi(u_i, x_i(0), v) - \Psi(u_i, x_i(0), x'_i) &= \int_0^1 [\Lambda(t, u_i(t), v(t)) + \varepsilon_i \|v(t) - x'_i(t)\| - \langle p_i(t), v(t) \rangle] dt \\ &\quad - \int_0^1 [\Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) - \langle p_i(t), x'_i(t) \rangle] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A [\Lambda(t, u_i(t), w(t)) + \varepsilon_i \|w(t) - x'_i(t)\| - \langle p_i(t), w(t) \rangle \\
&\quad - \Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) + \langle p_i(t), x'_i(t) \rangle] dt \\
&\leq \int_A (-r) dt = -r \operatorname{med}(A) = -r m < 0
\end{aligned}$$

Além disso, se m é suficientemente pequeno, ou seja, se tomamos A tal que

$$\int_A \|w(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} - \int_{[0,1] \setminus A} \|x'_i(t)\| dt,$$

de modo que

$$\int_0^1 \|v(t)\| dt = \int_A \|w(t)\| dt + \int_{[0,1] \setminus A} \|x'_i(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

então v satisfaz a restrição (4.5), contradizendo a otimalidade de $(u_i, x_i(0), x'_i)$ e concluindo este argumento.

Levando em conta a propriedade $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e a Proposição A.2, temos

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_i(t)\|^2 &\leq \left(\|x(0) - x_i(0)\| + \int_0^1 \|x'(s) - x'_i(s)\| ds \right)^2 \\
&\leq 2\|x(0) - x_i(0)\|^2 + 2 \left(\int_0^1 \|x'(s) - x'_i(s)\| ds \right)^2 \\
&= 2\|x(0) - x_i(0)\|^2 + 2\|x' - x'_i\|_1^2 \\
&\leq 2\|x(0) - x_i(0)\|^2 + 2\|x' - x'_i\|_2^2 \\
&= 2\|x(0) - x_i(0)\|^2 + 2 \int_0^1 \|x'(s) - x'_i(s)\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Com isso, o funcional de custo $\Psi^+ : L^\infty \times \mathbb{R}^n \times L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned}
\Psi^+(u, \alpha, v) := & \ell_0(\alpha) + \varepsilon_i \|\alpha - x_i(0)\| - \langle p_i(0), \alpha \rangle + 6n_i \|\alpha - x_i(0)\|^2 \\
& + \int_0^1 [\Lambda(t, u(t), v(t)) - \langle p_i(t), v(t) \rangle - \langle p'_i(t), u(t) \rangle + \varepsilon_i \|v(t) - x'_i(t)\|] dt \\
& + 2n_i \int_0^1 k(t) \|u(t) - u_i(t)\|^2 dt + 6n_i \int_0^1 k(t) \|v(t) - x'_i(t)\|^2 dt
\end{aligned}$$

também atinge um mínimo relativo às restrições (4.5) em $(u_i, x_i(0), x'_i)$.

Tomando $\alpha = x_i(0)$ e $v = x'_i$ em Ψ^+ , a obtenção de um mínimo relativo a $u \in L^\infty$ por meio de seleções mensuráveis implica que $u_i(t)$ minimiza livremente o integrando em Ψ^+ para quase todo t . Isto, por sua vez, resulta no seguinte

$$p'_i(t) \in \partial_P [\Lambda(t, \cdot, x'_i(t))] (u_i(t)) \quad \text{q.t.p.}$$

de modo que, pelo Corolário A.51,

$$\|p'_i(t)\| \leq k(t) \quad \text{q.t.p.} \quad (4.8)$$

Quando a restrição sobre v em (4.5) é fraca, segue, do Teorema A.29, que, para quase todo t , o mínimo com respeito a $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times V_\eta(t)$ do integrando em Ψ é atingido em $(u_i(t), x'_i(t))$; isto implica, aplicando a Regra da soma proximal (ver Teorema A.54), numa versão intermediária da inclusão de Euler:

$$(p'_i(t), p_i(t)) \in \partial_L \Lambda(t, u_i(t), x'_i(t)) + \{0\} \times \varepsilon_i B[0, 1], \quad t \in \Omega_i \quad \text{q.t.p.} \quad (4.9)$$

onde $\Omega_i := \left\{ t \in [0, 1] : x'_i(t) \in \text{int } V_\eta(t) \right\}$. Tendo em mente a Hipótese de Interioridade e que $x'_i(t) \rightarrow 0$ para quase todo t , vemos que a medida de Ω_i tende a 1 conforme $i \rightarrow \infty$.

D. Neste quarto passo, vamos fazer i tender ao infinito, obtendo as condições necessárias do Teorema 4.1. Como ℓ_1 é globalmente Lipschitz com constante K_1 e $k(t)$ é mensurável, por (4.4) e (4.8), temos $\|p_i(1)\| \leq K_1$ e $\|p'_i(t)\| \leq k(t)$ q.t.p., de modo que

$$\begin{aligned} \|p_i(0)\| &= \|p_i(1)\| - \int_0^1 \|p'_i(t)\| dt \\ &\leq \|p_i(1)\| + \int_0^1 \|p'_i(t)\| dt \\ &\leq K_1 + \int_0^1 k(t) dt = \text{const.} \end{aligned}$$

visto que k é integrável por hipótese. Com isso, $\|p_i(0)\|$ é uniformemente convergente. Nestas condições, a Proposição A.32 nos garante que, através de subsequências e sem reindexar, p_i converge uniformemente para um arco p e p'_i converge fracamente em $L^1(0, 1)$ para p' .

Sendo assim, passamos o limite em (4.4) e (4.6), e vemos que o arco p satisfaz a condição de transversalidade (T) para $C_1 = \mathbb{R}^n$ (neste caso, $N_{C_1}^L = (x_*(1)) = N_{C_1}^L = (0) = \{0\}$). Lembrando que u_i e x'_i convergem para 0 para quase todo t e que $\varepsilon_i \downarrow 0$, temos, por (4.7),

$$\langle p(t), v \rangle - \Lambda(t, 0, v) \leq \langle p(t), 0 \rangle - \Lambda(t, 0, 0) \quad \forall v \in V_\eta(t),$$

isto é,

$$\langle p(t), v \rangle - \Lambda(t, x_*(t), v) \leq \langle p(t), x'_*(t) \rangle - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \forall v \in V_\eta(t),$$

a qual é a condição de Weierstrass (W) procurada. Por fim, aplicamos a Proposição 4.2 em conjunto com (4.9), fazendo $q_i = p'_i$, $x_i = u_i$, $v_i = x'_i$ e $c = d = 1$, de modo a obter a inclusão de Euler (E).

E. Finalmente, o último passo desta demonstração é a remoção da Hipótese Temporária. Faremos isso usando penalização exata. Mostremos que, para certo $K > 0$ suficientemente grande, x_* soluciona o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J_K(x) := \ell_0(x(0)) + \ell_1(x(1)) + K d_{C_1}(x(1)) + \int_0^1 \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad & x \in AC[0, 1], \quad x(0) \in C_0, \quad \|x - x_*\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x'(t) \in V_\eta(t) \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Por contradição, supomos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um arco x_j admissível para este problema com $J_j(x_j) \leq J_j(x_*) = J(x_*)$ (lembrando que $x_*(1) \in C_1$ por hipótese). Sendo $J_j(x_j)$ limitado inferiormente, segue que $d_{C_1}(x_j(1)) \rightarrow 0$. Seja σ_j o ponto em C_1 mais próximo a $x_j(1)$, isto é, $d_{C_1}(x_j(1)) = \|\sigma_j - x_j(1)\|$. Assim, como $V_\eta(t) + \eta B[0, 1] \subset V(t)$ por definição, para j suficientemente grande para que $d_{C_1}(x_j(1)) \leq \eta$, o arco

$$y_j(t) := x_j(t) + t(\sigma_j - x_j(1))$$

é admissível para o problema (PLB), visto que satisfaz

$$y_j(0) = x_j(0) \in C_0, \quad y_j(1) = \sigma_j \in C_1, \quad y'_j(t) = x'_j(t) + \sigma_j - x_j(1) \in V(t) \quad \text{q.t.p.}$$

Agora, tendo em mente que a Hipótese Lipschitz (HL) é válida globalmente e que ℓ_1 é Lipschitz

com constante K_1 , temos

$$\begin{aligned}
J(y_j) &= \ell_0(y_j(0)) + \ell_1(y_j(1)) + \int_0^1 \Lambda(t, y_j(t), y_j'(t)) dt \\
&= \ell_0(x_j(0)) + \ell_1(\sigma_j) + \int_0^1 \Lambda(t, x_j(t) + t(\sigma_j - x_j(1)), x_j'(t) + \sigma_j - x_j(1)) dt \\
&\leq \ell_0(x_j(0)) + \ell_1(x_j(1)) + K_1 \|\sigma_j - x_j(1)\| \\
&\quad + \int_0^1 [\Lambda(t, x_j(t), x_j'(t)) + k(t)(t\|\sigma_j - x_j(1)\| + \|\sigma_j - x_j(1)\|)] dt \\
&\leq \ell_0(x_j(0)) + \ell_1(x_j(1)) + \int_0^1 \Lambda(t, x_j(t), x_j'(t)) dt + \left(K_1 + \int_0^1 k(t) dt\right) \|\sigma_j - x_j(1)\|,
\end{aligned}$$

assim,

$$J(y_j) \leq J(x_j) + K d_{C_1}(x_j(1)) = J_K(x_j).$$

Então, para $j > K$,

$$J(y_j) \leq J(x_j) + K d_{C_1}(x_j(1)) \leq J(x_j) + j d_{C_1}(x_j(1)) = J_j(x_j) < J(x_*),$$

o que contradiz a otimalidade de x_* para o problema (PLB).

Veja agora que o problema penalizado definido acima satisfaz a Hipótese Temporária, de modo que podemos aplicar o teorema (já demonstrado sob esta hipótese adicional) para deduzir a existência de um arco p satisfazendo a inclusão de Euler, a condição de Weierstrass (para V_η , usando a Proposição 4.3) e a condição de transversalidade correspondente ao custo penalizado:

$$\begin{aligned}
p(0) &\in \partial_L \ell_0(x_*(0)) + N_{C_0}^L(x_*(0)), \\
-p(1) &\in \partial_L (\ell_1 + K d_{C_1})(x_*(1)).
\end{aligned}$$

Mas como

$$\begin{aligned}
-p(1) &\in \partial_L (\ell_1 + K d_{C_1})(x_*(1)) \subset \partial_L \ell_1(x_*(1)) + K \partial_L d_{C_1}(x_*(1)) \\
&\subset \partial_L \ell_1(x_*(1)) + N_{C_1}^L(x_*(1))
\end{aligned}$$

pela Regra de Soma dos Subdiferenciais Proximais (ver Teorema A.54) e pela identidade $N_S^L(x) = \partial_L I_S(x)$ (ver Proposição A.55), obtemos a condição de transversalidade original (T), concluindo a demonstração. ■

Agora, no Problema de Bolza, suponha que ℓ_1 é suave, C_0 é um conjunto unitário e $C_1 = \mathbb{R}^n$. Assim, $x(a)$ está determinado e $x(b)$ é livre, de modo que a primeira parte de (T) não nos fornece informação alguma, visto que o cone normal a um ponto é todo o espaço. A segunda parte estabelece $-p(b) = \nabla \ell_1(x_*(b))$, uma vez que o cone normal ao espaço todo é $\{0\}$. Com isso, restabelecemos a condição de transversalidade clássica encontrada no Teorema 1.7.

Vejamos que a formulação dos custos e condições de contorno é mais geral no Problema de Bolza. No que se refere aos conjuntos C_0 e C_1 , o Teorema 4.1 expressa as condições de transversalidade aproximadas de forma inteiramente geométrica com vetores normais.

A seguir, um exemplo ilustrando a utilidade de enfraquecer as hipóteses de regularidade sobre a Lagrangiana.

Exemplo 4.6. *Consideramos o problema de encontrar, no plano real, o caminho de tempo mínimo entre os pontos $(0,0)$ e $(2,2)$, onde a velocidade de deslocamento é constante igual a v_0 no semi-espaço à esquerda $t < 1$, e constante igual a v_1 no semi-espaço à direita $t > 1$. Podemos escrever este problema da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \int_0^2 \vartheta(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} dt \\ &\text{sujeito a} \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 2, \end{aligned}$$

onde

$$\vartheta(t) = \begin{cases} v_0^{-1} & \text{se } t < 1 \\ v_1^{-1} & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Notamos que a Lagrangiana é descontínua porém mensurável na variável t .

Suponha que $x_* \in \text{Lip}[0, 2]$ é uma solução do problema. Analisando este problema dividindo-o em dois, onde cada parte corresponde a uma metade do intervalo $[0, 2]$, concluímos que x_* deve ser afim por partes em seu domínio $[0, 2]$, com uma possível “quina” em $t = 1$.

Consideramos a aplicação integrável $k : [0, 2] \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(t) = |\vartheta(t)|$. Observe que a função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(v) = \sqrt{1 + v^2}$ é Lipschitz contínua, visto que

$$|f'(v)| = \left| \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} \right| = \frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{1 + v^2}} < 1 \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

de forma que, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f(v) - f(w)| = \left| \sqrt{1+v^2} - \sqrt{1+w^2} \right| \leq |f'(z)| |v - w| < |v - w| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}.$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned} |\Lambda(t, x, v) - \Lambda(t, y, w)| &= |\vartheta(t)\sqrt{1+v^2} - \vartheta(t)\sqrt{1+w^2}| = |\vartheta(t)| |\sqrt{1+v^2} - \sqrt{1+w^2}| \\ &< |\vartheta(t)| |v - w| \leq |\vartheta(t)| |v - w| + |\vartheta(t)| |x - y| \\ &= |\vartheta(t)| (|x - y| + |v - w|) = k(t) (|x - y| + |v - w|) \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, 2]$, para todo $x, y, v, w \in \mathbb{R}$, isto é, a hipótese (HL) é satisfeita. Além disso, temos $C_0 = \{0\}, C_1 = \{2\}$ são conjuntos fechados, $V(t) = \mathbb{R}$ é uma multifunção mensurável a conjunto fechado e convexo de $\mathbb{R}^n$ (aqui temos $n = 1$) e, ainda vale a Hipótese de Interioridade, pois, para qualquer $\delta > 0$, temos $B(x'_*(t), \delta) \subset V(t) = \mathbb{R}$ para quase todo $t \in [0, 2]$. Nessas condições, podemos aplicar o Teorema 4.1, obtendo a existência de um arco $p : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(p'(t), p(t)) = \left(0, \frac{\vartheta(t)x'_*(t)}{\sqrt{1+x'_*(t)^2}} \right) \quad \text{q.t.p.}, \quad (4.10)$$

$$\vartheta(t)\sqrt{1+v^2} - \vartheta(t)\sqrt{1+x'_*(t)^2} \geq p(t)^T (v - x'_*(t)) \quad \text{q.t.p.}, \quad (4.11)$$

além de

$$p(a) \in N_{\{0\}}(x_*(0)) = \mathbb{R}, \quad -p(b) \in N_{\{2\}}(x_*(2)) = \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Como a aplicação p é contínua, a equação (4.10) implica

$$p(1) = \frac{\vartheta(1-) x'_*(1-)}{\sqrt{1+x'_*(1-)^2}} = \frac{\vartheta(1+) x'_*(1+)}{\sqrt{1+x'_*(1+)^2}},$$

isto é,

$$\frac{v_0}{v_0 \sqrt{1+v_0^2}} = \frac{v_1}{v_1 \sqrt{1+v_1^2}}$$

donde

$$|v_0| = |v_1|,$$

tendo em mente que, sendo x' a variável velocidade, $x'_*(t) = \vartheta(t)$. Assim, aplicando as condições de contorno, obtemos a função afim por partes

$$x_*(t) = \begin{cases} v_0 t, & t < 1 \\ v_1(t+2), & t > 1, \end{cases}$$

onde $|v_0| = |v_1|$. Geometricamente, denotando por θ_0 e θ_1 os ângulos de incidência do caminho com a reta $t = 1$, a relação encontrada acima é equivalente a

$$\frac{\sin \theta_0}{v_0} = \frac{\sin \theta_1}{v_1},$$

que é a conhecida *Lei de Snell* da refração. Isto não é uma coincidência, pois o *Princípio de Fermat* na Ótica afirma que os raios de luz propagando em meios não-homogêneos seguem caminhos que minimizam o tempo.

□□□

4.2 Condições suficientes por convexidade

Geralmente, as condições necessárias são suficientes quando o problema é convexo. O seguinte resultado ilustra isto para o Problema de Bolza e estende o Teorema 1.14.

Teorema 4.7. *Seja $x_* \in \text{AC}[a, b]$ admissível para o problema*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } J(x) = \ell_0(x(a)) + \ell_1(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ &\text{sujeito a } x(a) \in C_0, \quad x(b) \in C_1, \end{aligned}$$

onde as funções ℓ_0, ℓ_1 e os conjuntos C_0, C_1 são convexos, e suponha que $\Lambda(t, x, v)$ é mensurável em t e convexa em (x, v) . Se existe um arco p satisfazendo a inclusão de Euler (E) e a condição de transversalidade (T) do Teorema 4.1, então x_* é um minimizador global.

Demonstração: Como $\Lambda(t, \cdot, \cdot)$ é convexa, então $\partial_L \Lambda$ coincide com o subdiferencial da Análise Convexa e a inclusão de Euler estabelece $(p'(t), p(t)) \in \partial \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t))$ q.t.p. Além disso, a condição de Weierstrass (W) é satisfeita (segue da própria definição de subgradiente).

Assim, pela desigualdade do subgradiente, temos

$$\Lambda(t, x, x') \geq \Lambda(t, x_*, x'_*) + (p', p)^T (x - x_*, x' - x'_*) \quad \text{q.t.p.}$$

para qualquer arco x admissível para o problema, implicando

$$J(x) \geq \ell_0(x(a)) + \ell_1(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) + p(t)^T [x(t) - x_*(t)] \Big|_a^b > -\infty,$$

isto é, $J(x)$ está bem definido.

Como os conjuntos C_0, C_1 e as funções ℓ_0, ℓ_1 são convexos, a condição de transversalidade fornece a existência de vetores

$$\nu_0 \in N_{C_0}(x_*(a)), \quad \nu_1 \in N_{C_1}(x_*(b)),$$

$$\zeta_0 \in \partial \ell_0(x_*(a)), \quad \zeta_1 \in \partial \ell_1(x_*(b))$$

tais que

$$p(a) = \zeta_0 + \nu_0, \quad -p(b) = \zeta_1 + \nu_1, \quad (4.13)$$

onde os cones normais e os subdiferenciais são considerados no sentido da Análise Convexa.

Assim, tendo em mente a caracterização de vetores normais a um conjunto convexo, a desigualdade do subgradiente (ver Definição A.40) e as igualdades em (4.13), temos

$$\begin{aligned} J(x) - J(x_*) &= \ell_0(x(a)) - \ell_0(x_*(a)) + \ell_1(x(b)) - \ell_1(x_*(b)) \\ &\quad + \int_a^b [\Lambda(t, x(t), x'(t)) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t))] dt \\ &\geq \langle \zeta_0, x(a) - x_*(a) \rangle + \langle \zeta_1, x(b) - x_*(b) \rangle \\ &\quad + \int_a^b (p', p)^T (x - x_*, x' - x'_*) dt \\ &= \langle p(a) - \nu_0, x(a) - x_*(a) \rangle - \langle p(b) + \nu_1, x(b) - x_*(b) \rangle \\ &\quad + \langle p(b), x(b) - x_*(b) \rangle - \langle p(a), x(a) - x_*(a) \rangle \\ &= \langle -\nu_0, x(a) - x_*(a) \rangle - \langle \nu_1, x(b) - x_*(b) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

isto é, x_* é mínimo global. ■

A seguir, uma aplicação do Teorema 4.7.

Exemplo 4.8. *Consideramos o problema*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad J(x) = \int_0^3 [x'(t)^2 + 4x(t)] dt \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \text{AC}[0, 3], \quad x(0) = x(3) = 0, \quad x'(t) \geq -2 \quad \text{q.t.p..} \end{aligned}$$

Aplicando a teoria da Regra de Multiplicadores, encontramos uma solução continuamente diferenciável em $(0, 3)$ dada por

$$x_*(t) = \begin{cases} -2t & \text{se } t \leq \tau, \\ (t-3)^2 + c(t-3) & \text{se } t \geq \tau, \end{cases}$$

com $\tau = 3 - \sqrt{6}$ e $c = 2(\sqrt{6} - 1)$.

Vamos mostrar como a convexidade pode ser explorada a fim de confirmar a otimalidade global de x_* para este problema. Pela Regra de Multiplicadores, existe uma certa função limitada $\lambda(t) \geq 0$ q.t.p. de modo que x_* é um extremal para a Lagrangiana aumentada

$$A + \lambda\varphi = v^2 + 4x - \lambda(t)(v + 2).$$

Sendo essa função convexa em (x, v) , segue do Teorema 4.7 que

$$\begin{aligned} \int_0^3 [x'^2 + 4x - \lambda(t)(x' + 2)] dt &\geq \int_0^3 [x_*'^2 + 4x_* - \lambda(t)(x_*' + 2)] dt \\ &= \int_0^3 [x_*'^2 + 4x_*] dt, \end{aligned}$$

para qualquer arco x satisfazendo as condições de contorno, visto que, em quase todo ponto, $\lambda(t) = 0$ sempre que $x_*'(t) + 2 \neq 0$.

Suponha agora que x também satisfaz $x'(t) \geq -2$ q.t.p. (assim, x se torna admissível para o problema). Então, como $\lambda(t) \geq 0$ q.t.p., deduzimos

$$\int_0^3 [x'^2 + 4x] dt \geq \int_0^3 [x_*'^2 + 4x_*] dt,$$

confirmando x_* como uma solução ótima do problema.

□□□

4.3 Condições suficientes por E-pseudoinvexidade no contexto não-suave

Nesta seção, traremos o conceito de problema E-pseudoinvexo para o cenário não-suave dos problemas variacionais. Veremos que a inclusão de Euler e a condição de transversalidade do Teorema 4.1, juntamente da E-pseudoinvexidade (Euler-pseudoinvexidade), são condições suficientes para otimalidade global.

Definição 4.9. Uma aplicação $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **função estacionária** para o problema (PLB) se x é admissível para (PLB) e se existe um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições (E) e (T) do Teorema 4.1.

Definição 4.10. Dizemos que o problema (PLB) é **E-pseudoinvexo** se, para cada par x, y de arcos admissíveis tais que $J(y) < J(x)$ e para cada tripla $(\zeta, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{AC}[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com

$$\zeta'(t) \in \text{co}\{\omega : (\omega, \zeta(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x(t), x'(t))\}, \quad t \in [a, b] \text{ q.t.p.}, \quad (4.14)$$

e

$$(\alpha_0, \alpha_1) \in \partial_L \ell_0(x(a)) \times \partial_L \ell_1(x(b)), \quad (4.15)$$

existe uma aplicação absolutamente contínua $\gamma = \gamma(x, y, \zeta, \alpha_0, \alpha_1) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\gamma(a) \in T_{C_0}^C(x(a)), \quad \gamma(b) \in T_{C_1}^C(x(b)), \quad (4.16)$$

e

$$\int_a^b [\zeta'(t)^T \gamma(t) + \zeta(t)^T \gamma'(t)] dt + \gamma(a)^T \alpha_0 + \gamma(b)^T \alpha_1 < 0. \quad (4.17)$$

Note que esta definição estende a de pseudoinvexidade apresentada no Capítulo 2 para o contexto não-suave, onde as condições (4.16 – 4.17) generalizam (3.1 – 3.2), respectivamente, do contexto de problemas com restrições.

Os seguintes resultados de E-invexidade são originais. Eles foram obtidos através do estudo e adaptação do artigo de Oliveira, Silva [8].

A seguir, um resultado que estabelece a E-pseudoinvexidade como condição suficiente para que uma função estacionária para (PLB) seja um mínimo global do problema.

Teorema 4.11. *Se (PLB) é E-pseudoinvexo, então toda função estacionária x é um mínimo global.*

Demonstração: Suponha que x seja uma função estacionária não-ótima para (PLB). Então existe um arco y admissível para (PLB) tal que $J(y) < J(x)$. Como x é uma função estacionária, existe uma aplicação $p \in \text{AC}[a, b]$ satisfazendo

$$\begin{aligned} p'(t) &\in \text{co}\{\omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x(t), x'(t))\}, \quad t \in [a, b] \text{ q.t.p.}, \\ p(a) &\in \partial_L \ell_0(x(a)) + N_{C_0}^L(x(a)), \\ -p(b) &\in \partial_L \ell_1(x(b)) + N_{C_1}^L(x(b)). \end{aligned}$$

Deste modo, existem $\alpha_0 \in \partial_L \ell_0(x(a))$, $\nu_0 \in N_{C_0}^L(x(a))$, $\alpha_1 \in \partial_L \ell_1(x(b))$ e $\nu_1 \in N_{C_1}^L(x(b))$ tais que $p(a) = \alpha_0 + \nu_0$ e $-p(b) = \alpha_1 + \nu_1$. Assim, para $\zeta(t) = p(t)$, α_0 e α_1 acima definidos, pela hipótese de E-pseudoinvexidade, existe um arco $\gamma = \gamma(x, y, \zeta, \alpha_0, \alpha_1) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições (4.16) – (4.17). Usando o Teorema fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue (ver Teorema A.7), a condição (4.16) e a definição de ν_0 e ν_1 , temos

$$\begin{aligned} 0 &> \int_a^b [p'(t)^T \gamma(t) + p(t)^T \gamma'(t)] dt + \gamma(a)^T \alpha_0 + \gamma(b)^T \alpha_1 \\ &= p(t)^T \gamma(t) \Big|_a^b + \gamma(a)^T (p(a) - \nu_0) + \gamma(b)^T (-p(b) - \nu_1) \\ &= p(b)^T \gamma(b) - p(a)^T \gamma(a) + \gamma(a)^T p(a) - \gamma(a)^T \nu_0 - \gamma(b)^T p(b) - \gamma(b)^T \nu_1 \\ &= -\gamma(a)^T \nu_0 - \gamma(b)^T \nu_1 \geq 0, \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto, x é mínimo global. ■

O teorema abaixo estabelece como condição necessária a E-pseudoinvexidade para que uma função estacionária seja um mínimo global do problema (PLB).

Teorema 4.12. *Se toda função estacionária de (PLB) é um mínimo global, então o problema (PLB) é E-pseudoinvexo.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que (PLB) não seja invexo. Então existe um par x, y de funções admissíveis com $J(y) < J(x)$ e uma tripla $(\zeta, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{AC}[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo (4.14 – 4.15) de modo que, para todo arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumpra (4.16), a desigualdade (4.17) não é válida.

Agora, consideremos o problema auxiliar

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad F(\gamma) = h_0(\gamma(a)) + h_1(\gamma(b)) + \int_a^b f(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt \\
 &\text{sujeito a} \quad \gamma \in \text{AC}([a, b]; \mathbb{R}^n), \\
 &\quad \gamma(a) \in T_{C_0}^C(x(a)), \quad \gamma(b) \in T_{C_1}^C(x(b)), \quad \gamma'(t) \in S(t) \quad \text{q.t.p.},
 \end{aligned} \tag{PLBA}$$

onde $h_0, h_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $S : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ são dadas por

$$h_0(z) = \alpha_0^T z, \quad h_1(z) = \alpha_1^T z, \quad f(t, \sigma, \theta) = \zeta'(t)^T \sigma + \zeta(t)^T \theta, \quad S(t) = \mathbb{R}^n.$$

Note que $\gamma_* \equiv 0$ é um mínimo global para (PLBA), visto que nossa suposição implica que $F(\gamma) \geq 0 = F(\gamma_*)$ para toda função γ admissível. Veja também que, para todo $\sigma, \bar{\sigma}, \theta, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^n$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
 |f(t, \sigma, \theta) - f(t, \bar{\sigma}, \bar{\theta})| &= |\zeta'(t)^T \sigma + \zeta(t)^T \theta - \zeta'(t)^T \bar{\sigma} - \zeta(t)^T \bar{\theta}| \\
 &\leq |\zeta'(t)^T (\sigma - \bar{\sigma})| + |\zeta(t)^T (\theta - \bar{\theta})| \\
 &\leq \|\zeta'(t)\| \|\sigma - \bar{\sigma}\| + \|\zeta(t)\| \|\theta - \bar{\theta}\| \\
 &\leq (\|\zeta(t)\| + \|\zeta'(t)\|) (\|\sigma - \bar{\sigma}\| + \|\theta - \bar{\theta}\|) \\
 &= g(t) (\|\sigma - \bar{\sigma}\| + \|\theta - \bar{\theta}\|),
 \end{aligned}$$

onde $g(t) = \|\zeta(t)\| + \|\zeta'(t)\|$ é uma aplicação integrável por hipótese. Ou seja, a Hipótese Lipschitz (HL) é satisfeita. É claro que h_0, h_1 são localmente Lipschitz, visto que são lineares, a multifunção $S(t) = \mathbb{R}^n$ é mensurável a valores fechados e convexos e a Hipótese de Interioridade

$$B(\gamma'_*(t), \delta) = B(0, \delta) \subset S(t) = \mathbb{R}^n$$

é válida qualquer que seja o valor de $\delta > 0$ e $t \in [a, b]$. Sendo assim, estamos em condições de aplicar o Teorema 4.1 e obter a existência de um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$p'(t) \in \text{co} \{ \omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L f(t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t)) \} \quad t \in [a, b] \text{ q.t.p.}$$

e

$$\begin{cases} p(a) \in \partial_L h_0(\gamma_*(a)) + N_{T_{C_0}^C(x(a))}^L(\gamma_*(a)), \\ -p(b) \in \partial_L h_1(\gamma_*(b)) + N_{T_{C_1}^C(x(b))}^L(\gamma_*(b)). \end{cases}$$

Mas como

$$\partial_L f(t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t)) = \partial_L [\zeta'(t)^T \sigma + \zeta(t)^T \theta](t, \gamma_*(t), \gamma'_*(t)) = \{(\zeta'(t), \zeta(t))\},$$

$$\partial_L h_0(\gamma_*(a)) = \partial_L h_0(0) = \partial_L [\alpha_0^T z](0) = \alpha_0,$$

$$\partial_L h_1(\gamma_*(b)) = \partial_L h_1(0) = \partial_L [\alpha_1^T z](0) = \alpha_1,$$

$$\begin{aligned} N_{T_{C_0}^C(x(a))}^L(\gamma_*(a)) &= N_{T_{C_0}^C(x(a))}^L(0) = [T_{T_{C_0}^C(x(a))}^C(0)]^\Delta \\ &= [T_{C_0}^C(x(a))]^\Delta = N_{C_0}^L(x(a)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{T_{C_1}^C(x(b))}^L(\gamma_*(b)) &= N_{T_{C_1}^C(x(b))}^L(0) = [T_{T_{C_1}^C(x(b))}^C(0)]^\Delta \\ &= [T_{C_1}^C(x(b))]^\Delta = N_{C_1}^L(x(b)), \end{aligned}$$

então

$$p'(t) \in \text{co} \{ \omega : (\omega, p(t)) = (\zeta'(t), \zeta(t)) \} \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.},$$

o que implica $p(t) = \zeta(t)$ e $p'(t) = \zeta'(t)$ para $t \in [a, b]$ q.t.p., e

$$\begin{cases} p(a) \in \{\alpha_0\} + N_{C_0}^L(x(a)) \subset \partial_L \ell_0(x(a)) + N_{C_0}^L(x(a)), \\ -p(b) \in \{\alpha_1\} + N_{C_1}^L(x(b)) \subset \partial_L \ell_1(x(b)) + N_{C_1}^L(x(b)). \end{cases}$$

Isto é, p satisfaz a inclusão de Euler e a condição de transversalidade para o arco admissível x , de modo que x é uma função estacionária. Logo, por hipótese, x é um mínimo global, contradizendo a existência de uma aplicação y admissível tal que $J(y) < J(x)$.

Concluimos, assim, que o problema (PLB) é E-pseudoinvexo.

■

Exemplo 4.13. *A fim de ilustrar os resultados acima, consideremos o seguinte Problema de Bolza:*

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= 2x(0) + x(2) + \int_0^2 [1 - |x(t) - 1| + 2x(t) + 3tx'(t)] dt \\ \text{sujeito a } x &\in \text{AC}([0, 2]; \mathbb{R}), \\ x(0) &\in [0, 2], \quad x(2) \in [0, 3], \quad x'(t) \in [0, 3t + 2] \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Neste caso, os custos $\ell_0(z) = 2z$ e $\ell_1(z) = z$ são localmente Lipschitz, a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v) = 1 - |x - 1| + 2x + 3tv$ é mensurável em t e satisfaz a Hipótese Lipschitz (HL), visto que

$$\begin{aligned} |\Lambda(t, x, v) - \Lambda(t, y, w)| &= |1 - |x - 1| + 2x + 3tv - 1 + |y - 1| - 2y - 3tw| \\ &\leq | - |x - 1| + |y - 1| | + 2|x - y| + 3t|v - w| \\ &\leq | -x + 1 + y - 1 | + 2|x - y| + 6|v - w| \\ &\leq 6(|x - y| + |v - w|) \end{aligned}$$

para todo $x, y, v, w \in \mathbb{R}$. Além disto, a multifunção $V(t) = [0, 3t + 2]$ é mensurável em t a valores fechados e convexos de $\mathbb{R}$, e os conjuntos $C_0 = [0, 2]$ e $C_1 = [0, 3]$ são fechados em $\mathbb{R}$.

Note que $\Lambda(t, x, v)$ não é diferenciável nem convexa em x . Observe também que $x(t) \geq 0$ para todo x admissível.

Agora, suponha que x_* seja uma função estacionária. Então existe um arco $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a inclusão de Euler

$$p'(t) \in \text{co} \left\{ \omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \right\} \quad \text{q.t.p.},$$

onde

$$\partial_L \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) = \begin{cases} \{3\} \times \{3t\} & \text{se } 0 \leq x_*(t) < 1, \\ \{1\} \cup \{3\} \times \{3t\} & \text{se } x_*(t) = 1, \\ \{1\} \times \{3t\} & \text{se } x_*(t) > 1. \end{cases}$$

Assim, $p(t) = 3t$ para $0 \leq t \leq 2$, de modo que $p'(t) = 3$. Além disso, p satisfaz as condições de

transversalidade e de fronteira

$$p(0) \in \partial_L \ell_0(x_*(0)) + N_{C_0}^L(x_*(0)) = \begin{cases} (-\infty, 2] & \text{se } x_*(0) = 0, \\ \{2\} & \text{se } x_*(0) \in (0, 2), \\ [2, +\infty) & \text{se } x_*(0) = 2, \end{cases}$$

e

$$-p(2) \in \partial_L \ell_1(x_*(2)) + N_{C_1}^L(x_*(2)) = \begin{cases} (-\infty, 1] & \text{se } x_*(2) = 0, \\ \{1\} & \text{se } x_*(2) \in (0, 3), \\ [1, +\infty) & \text{se } x_*(2) = 3. \end{cases}$$

Como $p(0) = 0$ e $-p(2) = -6$, segue que $x_*(0) = x_*(2) = 0$. Veja que, pela admissibilidade de x_* , temos $x'_*(t) \in [0, 3t + 2]$, isto é, $x'_*(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2]$. Visto que $x \in \text{AC}[0, 2]$, segue que há somente uma função estacionária para este problema: $x_* \equiv 0$. Veja que x_* é mínimo global, pois $J(x) \geq 0 = J(x_*)$ para todo arco admissível x . Então, pelo Teorema 4.12, este problema deve ser E-pseudoinvexo.

De fato, considere funções admissíveis x, y com $J(y) < J(x)$ e uma tripla $(\zeta, \alpha_0, \alpha_1)$ satisfazendo

$$\zeta'(t) \in \text{co}\{\omega : (\omega, \zeta(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x(t), x'(t))\} = \begin{cases} \{3\} \times \{3t\} & \text{se } 0 \leq x(t) < 1, \\ \{1\} \cup \{3\} \times \{3t\} & \text{se } x(t) = 1, \\ \{1\} \times \{3t\} & \text{se } x(t) > 1, \end{cases}$$

para quase todo $t \in [0, 2]$, e

$$(\alpha_0, \alpha_1) \in \partial_L \ell_0(x(0)) \times \partial_L \ell_1(x(2)) = \{2\} \times \{1\},$$

de modo que $\zeta(t) = 3t$ e $\zeta'(t) = 3$ para $0 \leq t \leq 2$, e $(\alpha_0, \alpha_1) = (2, 1)$. Note que como x é admissível e $J(x) > J(y) \geq 0$, temos $x \neq 0$, $x(0) \geq 0$ e $x'(t) \geq 0$, o que implica $x(2) > 0$. Tendo isto em mente, podemos tomar a aplicação absolutamente contínua $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(t) = -\alpha_0 \zeta(t)$, a qual satisfaz

$$\gamma(0) = 0 \in T_{C_0}^C(x(0)) = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } x(0) = 0, \\ \mathbb{R} & \text{se } x(0) \in (0, 2), \\ (-\infty, 0] & \text{se } x(0) = 2, \end{cases}$$

$$\gamma(2) = -12 \in T_{C_1}^C(x(2)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } x(2) \in (0, 3), \\ (-\infty, 0] & \text{se } x(2) = 3, \end{cases}$$

além de

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\zeta'(t)^T \gamma(t) + \zeta(t)^T \gamma'(t) \right] dt + \gamma(0)^T \alpha_0 + \gamma(2)^T \alpha_1 &= \int_0^2 \left[3 \cdot (-6t) + 3t \cdot (-6) \right] dt + 0.2 + (-12) \cdot 1 \\ &= \int_0^2 -36t dt - 12 = -84 < 0. \end{aligned}$$

Portanto, este problema é E-pseudoinvexo.

□□□

Observação 4.14. Dizemos que a E-pseudoinvexidade é um tipo de convexidade generalizada. De fato, considere o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \ell_0(x(a)) + \ell_1(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\ \text{sujeito a } x &\in \text{AC}([a, b]; \mathbb{R}^n), \\ x(a) &\in C_0, \quad x(b) \in C_1, \quad x'(t) \in V(t) \quad \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Além das hipóteses iniciais, suponha que as funções $\ell_0, \ell_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e os conjuntos $C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n$ são convexos. Suponha também que a Lagrangiana $\Lambda(t, x, v)$ é convexa em (x, v) . Assim, os subdiferenciais limite de ℓ_0, ℓ_1 e Λ em qualquer ponto coincidem com o subdiferencial da Análise Convexa neste mesmo ponto. Agora, sejam x, y arcos admissíveis com $J(y) < J(x)$ e a tripla $(\zeta, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{AC}[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de modo que

$$\zeta'(t) \in \text{co}\{ \omega : (\omega, \zeta(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x(t), x'(t)) = \partial \Lambda(t, x(t), x'(t)) \}, \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.},$$

e

$$(\alpha_0, \alpha_1) \in \partial_L \ell_0(x(a)) \times \partial_L \ell_1(x(b)) = \partial \ell_0(x(a)) \times \partial \ell_1(x(b)).$$

Tendo em mente a Proposição A.14 e a desigualdade do subgradiente da Definição A.40, podemos tomar a aplicação absolutamente contínua $\gamma = \gamma(x, y, \zeta, \alpha_0, \alpha_1) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = [y(t) - x(t)]$, obtendo

$$\gamma(a) \in T_{C_0}^C(x(a)) = T_{C_0}(x(a)), \quad \gamma(b) \in T_{C_1}^C(x(b)) = T_{C_1}(x(b)),$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left[\zeta'(t)^T \gamma(t) + \zeta(t)^T \gamma'(t) \right] dt + \gamma(a)^T \alpha_0 + \gamma(b)^T \alpha_1 \\
&= \int_a^b \left(\zeta'(t), \zeta(t) \right)^T \left(y(t) - x(t), y'(t) - x'(t) \right) dt + [y(a) - x(a)]^T \alpha_0 + [y(b) - x(b)]^T \alpha_1 \\
&\leq \int_a^b \left[\Lambda(t, y(t), y'(t)) - \Lambda(t, x(t), x'(t)) \right] dt + \ell_0(y(a)) - \ell_0(x(a)) + \ell_1(y(b)) - \ell_1(x(b)) \\
&= J(y) - J(x) < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, todo problema convexo é E-pseudoinvexo, como queríamos mostrar.

□□□

4.4 Condições de Tonelli-Morrey Generalizadas

Nesta seção, estudamos o seguinte Problema de Bolza:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} \quad J(x) = \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t)) dt \\
& \text{sujeito a} \quad x \in \text{AC}[a, b], \quad (x(a), x(b)) \in E,
\end{aligned} \tag{PLB'}$$

onde a função de custo final ℓ é localmente Lipschitz e o conjunto $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado.

No seguinte teorema, será definida uma hipótese estrutural nova sobre a Lagrangiana a fim de induzir uma extensão das condições necessárias clássicas. Em contraste ao Teorema 4.1, o qual postula regularidade Lipschitz de Λ com relação a um mínimo local dado (uma hipótese de “solução específica”), as novas hipóteses são adequadas de modo a não fazer uma referência específica ao arco minimizante.

Ressaltamos que, a seguir, as notações $\partial_P \Lambda$ e $\partial_L \Lambda$ se referem aos subdiferenciais da função $\Lambda(t, x, v)$ tomados com respeito às variáveis (x, v) . Lembremos que um arco x é dito ser **admissível** para o problema se satisfaz as restrições de contorno e se a integral em $J(x)$ é bem definida e finita.

Teorema 4.15. *Seja x_* um arco admissível mínimo local forte para o problema (PLB'), onde $\Lambda(t, x, v)$ é a valores finitos e LB mensurável em t e (x, v) .⁹ Além disso, suponha que a*

⁹ Notamos que, em contraste com as sessões anteriores, Λ não necessariamente será localmente Lipschitz.

Lagrangiana Λ satisfaz a condição de Tonelli-Morrey generalizada: para todo subconjunto limitado S de $\mathbb{R}^n$, existem uma constante c e uma função integrável d tais que

$$\frac{\|\zeta\|}{1 + \|\psi\|} \leq c(\|v\| + |\Lambda(t, x, v)|) + d(t) \quad \forall (\zeta, \psi) \in \partial_P \Lambda(t, x, v)$$

para quase todo $t \in [a, b]$ e para todo $(x, v) \in S \times \mathbb{R}^n$. Então existe um arco p que satisfaz a **inclusão de Euler**:

$$p'(t) \in \text{co}\{\omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t))\} \quad t \in [a, b] \text{ q.t.p.}$$

juntamente com a **condição de Weierstrass**: para quase todo t ,

$$\Lambda(t, x_*(t), v) - \Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq \langle p(t), v - x'_*(t) \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

e a **condição de transversalidade e de fronteira**:

$$(p(a), -p(b)) \in \partial_L \ell(x_*(a), x_*(b)) + N_E^L(x_*(a), x_*(b)).$$

Além disso, se Λ é autônoma, então a **condição de Erdmann** vale: existe uma constante h tal que

$$\langle p(t), x'_*(t) \rangle - \Lambda(x_*(t), x'_*(t)) = h, \quad t \in [a, b] \text{ q.t.p.}$$

Demonstração: Ver Clarke [5], pp. 533-535, Exemplo 25.13.

□

Observação: A hipótese estrutural generalizada de Tonelli-Morrey estende a clássica expressada por (*) no Teorema 2.3, mesmo para Lagrangianas suaves. Tendo em mente que qualquer ponto $(\zeta, \psi) \in \partial_P \Lambda(t, x, v)$ é da forma $(\Lambda_x(t, x, v), \Lambda_v(t, x, v))$, suponha que a Condição de Tonelli-Morrey (*) seja válida. Então, para todo subconjunto limitado $S \subset \mathbb{R}^n$, existem uma constante c e uma função integrável $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\|\zeta\|}{1 + \|\psi\|} \leq \frac{\|\Lambda_x(t, x, v)\|}{1 + \|\Lambda_v(t, x, v)\|} \leq \|\Lambda_x(t, x, v)\| + \|\Lambda_v(t, x, v)\| \leq c(\|v\| + |\Lambda(t, x, v)|) + d(t)$$

para todo $(t, x, v) \in [a, b] \times S \times \mathbb{R}^n$. Assim, vemos que a condição de Tonelli-Morrey generalizada do Teorema 4.15 vale.

Notamos também que a Condição de Erdmann estabelecida no Teorema 4.15 não requer convexidade em v , como exigido no Corolário 2.7.

Há um princípio que estabelece uma conexão estreita entre condições necessárias e a regularidade da solução: geralmente, a partir da regularidade da solução, podemos estabelecer as condições necessárias; reciprocamente, determinadas as condições necessárias, é possível deduzir regularidade a partir delas. Veremos uma ilustração desse princípio no seguinte corolário.

Corolário 4.16. *Sob as hipóteses do Teorema 4.15, suponha também que Λ possui crescimento de Nagumo ao longo de x_* e é limitada superiormente em subconjuntos limitados. Então x_* é Lipschitz.*

Demonstração: O Teorema 4.15 fornece um arco p que satisfaz a condição de Weierstrass. Seja M uma cota (limite) superior para os valores

$$\Lambda \left(t, x_*(t), \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|} \right), \quad t \in [a, b].$$

Então, tomando $v = \frac{x'_*(t)}{1 + \|x'_*(t)\|}$ na desigualdade de Weierstrass, segue

$$\Lambda(t, x_*(t), x'_*(t)) \leq M + \|p(t)\| \|x'_*(t)\| \quad \text{q.t.p.}$$

Pela hipótese de crescimento de Nagumo, temos

$$\theta(\|x'_*(t)\|) \leq M + \|p(t)\| \|x'_*(t)\| \quad \text{q.t.p.}$$

Como $\|p(t)\|$ é limitada e θ tem crescimento superlinear, então x'_* é essencialmente limitada. ■

Conclusões

Neste trabalho, vimos que estender a classe de funções candidatas à solução do problema básico para o conjunto das funções absolutamente contínuas foi um grande passo para que se pudesse desenvolver a teoria de existência em Cálculo das Variações. Com este estudo, vimos também que exigindo condições de crescimento sobre a Lagrangiana pode-se obter resultados de regularidade de soluções.

Estudamos os problemas variacionais com restrições, onde abordamos uma regra de multiplicadores moderna, a qual abrange restrições Lagrangianas abstratas.

Um dos pontos de mais destaque nesta dissertação é o estudo de problemas variacionais não-suaves, por abordar um contexto mais geral (e complexo) do que aqueles estudados em textos mais comuns de Cálculo das Variações, o caso suave.

Outro tópico interessante no presente trabalho é a introdução da E-pseudoinvexidade, conceito de convexidade generalizada para problemas variacionais obtido originalmente no desenvolvimento deste trabalho. Por meio da E-pseudoinvexidade, as condições de transversalidade e a de Euler (equação no caso suave, ou inclusão no caso não-suave) são suficientes para otimalidade global.

Referências

- [1] ARANA-JIMÉNEZ, M., OSUNA-GÓMEZ, R., RUIZ-GARZÓN, G., AND ROJAS-MEDAR, M. On variational problems: Characterization of solutions and duality. *J. Math. Anal. Appl.* 311, 1 (2005), 1–12.
- [2] ARUTYUNOV, A. V., AND KARAMZIN, D. Y. On some continuity properties of the measure lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 53, 4 (2015), 2514–2540.
- [3] BERGE, C. *Topological Spaces including treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity*. Oliver & Boyd Ltd, Alva.
- [4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] CLARKE, F. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, vol. 264 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, London, 2013.
- [6] DACOROGNA, B. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, London.
- [7] DE BARRA, G. *Measure Theory and Integration*, 2 ed. Woodhead Publishing Limited, 2003.
- [8] DE OLIVEIRA, V. A., AND SILVA, G. N. New optimality conditions for nonsmooth control problems. *J. Global Optim.* 57, 4 (2013), 1465–1484.
- [9] DE OLIVEIRA, V. A., SILVA, G. N., AND ROJAS-MEDAR, M. A. A class of multiobjective control problems. *Optim. Control Appl. Meth.* 30 (2009), 77–86.

-
- [10] DE OLIVEIRA, V. A., SILVA, G. N., AND ROJAS-MEDAR, M. A. KT-invexity in optimal control problems. *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 4790–4797.
 - [11] FOLLAND, G. B. *Real analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
 - [12] GOLDSTINE, H. H. *A History of the Calculus of Variations from 17th through the 19th century*. Springer-Verlag, New York.
 - [13] HANSON, M. A. On sufficiency of the kuhn-tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 80 (1981), 545–550.
 - [14] HESTENES, M. R. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. John Wiley & Sons, Inc., 1966.
 - [15] KOMZSIK, L. *Applied Calculus of Variations for Engineers*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
 - [16] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
 - [17] LAGES, E. L. *Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$* . Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
 - [18] LEITMANN, G. *The calculus of variations and optimal control: An introduction*, vol. 4 of *Mathematical concepts and methods in science and engineering*. Springer Science + Business Media, LLC, 1981.
 - [19] LEITÃO, A., AND BAUMEISTER, J. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*, 1 ed. IMPA, 2008.
 - [20] MUNKRES, J. R. *Topology*, 2 ed. Prentice Hall, 2000.
 - [21] PINCH, E. R. *Optimal Control and the Calculus of Variations*. Oxford University Press Inc., New York, 1993.
 - [22] RIBEIRO, A. A., AND KARAS, E. W. *Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, 2013.

- [23] ROBERTSON, A. P., AND ROBERTSON, W. *Topological Vector Spaces*, 2 ed. Cambridge University Press, London.
- [24] ROJAS-JARA, R. Condições suficientes de otimalidade em cálculo variacional. Master's thesis, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, 2013.
- [25] TROUTMAN, J. L. *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity*, 2 ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York Inc., 1996.
- [26] VAN BRUNT, B. *The Calculus of Variations*. Springer, New York, 2010.
- [27] VINTER, R. B. *Optimal Control*. Birkhäuser, Boston, 2000.

ANEXO - Pré-requisitos

A.1 Integral de Lebesgue e funções absolutamente contínuas

Definição A.1. (Espaços de Lebesgue, Clarke [5], pp. 7 e 8, Exemplo 1.9 - adaptado).
 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ um função Lebesgue mensurável. Escrevemos dx para a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. A integral (de Lebesgue)

$$\int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

é, então, bem definida, possivelmente como $+\infty$ (aqui, $\|v\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^m$). Quando ela é finita, dizemos que f é integrável (em Ω). A classe das funções f integráveis é denotada por $L^1(\Omega)$. Mais geralmente, para qualquer $p \in [0, \infty)$, denotamos por $L^p(\Omega)$, ou por $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, o conjunto de todas funções f tais que $\|f\|^p$ é integrável, e escrevemos

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por fim, o caso $p = \infty$. Dizemos que a função f é **essencialmente limitada** se, para alguma constante M , tem-se $\|f(x)\| \leq M$ q.t.p. . A abreviação “q.t.p.” significa “quase todo ponto”, que, neste contexto, quer dizer que a desigualdade é válida exceto para pontos x num subconjunto de Ω com medida nula. Definimos $L^\infty(\Omega)$ como sendo a classe de funções

mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ que são essencialmente limitadas, com a norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{M : \|f(x)\| \leq M, \ x \in \Omega \text{ q.t.p.}\}.$$

Como o ínfimo sobre o conjunto vazio é $+\infty$, vemos que $\|f\|_\infty = +\infty$ quando f não é essencialmente limitada. Assim, para $p \in [1, \infty]$, podemos dizer que uma função mensurável f pertence a $L^p(\Omega)$ se, e somente se, $\|f\|_p < \infty$.

Proposição A.2. (Folland [11], p. 186, Proposição 6.12) *Se a medida de um conjunto X , denotada por $\mu(X)$, é finita ($< \infty$) e $0 < p < q \leq \infty$, então temos $L^p(X) \supset L^q(X)$ e $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ para toda aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ em $L^q(X)$.*

Definição A.3. (Funções absolutamente contínuas, Clarke [5], pp. 8 e 9, Exemplo 1.13 - adaptado). *Seja $[a, b]$ um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **absolutamente contínua** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para cada coleção finita $\{[a_i, b_i]\}_i$ de subintervalos de $[a, b]$ disjuntos, temos*

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_i \|x(b_i) - x(a_i)\| < \varepsilon.$$

Assim, uma função absolutamente contínua x é contínua e satisfaz a seguinte propriedade: existe uma função $v \in L^1(a, b)$ tal que

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (**)$$

Neste caso, a teoria de integração nos garante que x é diferenciável em quase todo ponto em (a, b) com

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v(t), \quad t \in (a, b) \text{ q.t.p.}$$

Por esta característica, as funções absolutamente contínuas constituem uma classe usual na qual a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias é desenvolvida, e possuem um papel importante no estudo de Cálculo das Variações (como podemos ver na Seção 2.1).

O espaço vetorial das funções absolutamente contínuas em $[a, b]$ é denotado por $AC[a, b]$, o qual é munido da norma

$$\|x\|_{AC} = \|x(a)\| + \int_a^b \|x'(t)\| dt.$$

Mais geralmente, para $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $AC^p[a, b]$ a classe das funções absolutamente contínuas x que admitem representação da forma $(**)$ com $v \in L^p(a, b)$. A norma em $AC^p[a, b]$ é dada por

$$\|x\|_{AC} = \|x(a)\| + \|x'\|_{L^p(a, b)}.$$

Uma função x sobre $[a, b]$ é dita ser **Lipschitz** (ou *Lipschitz contínua*) se existe uma constante positiva K tal que

$$\|x(s) - x(t)\| \leq K \|s - t\| \quad \forall s, t \in [a, b].$$

Observe que tal função x é absolutamente contínua, com derivada x' (em quase todo ponto) que satisfaz $\|x'(t)\| \leq M$ q.t.p. Assim, uma função Lipschitz pertence a $AC^\infty[a, b]$. Reciprocamente, um elemento x de $AC^\infty[a, b]$ satisfaz a condição Lipschitz acima com $K = \|x'\|_{L^\infty(a, b)}$.

Uma aplicação $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **bi-Lipschitz** se existe $K \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{K} |s - t| \leq \|f(s) - f(t)\| \leq K |s - t| \quad \forall s, t \in [a, b].$$

Definição A.4. (Leitão e Baumeister [19], p. 140, Definição 7.4.2 - adaptado)

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada **contínua por partes** quando existe uma partição $a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b$ tal que, para todo $i = 0, \dots, n$, a restrição $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ possui uma extensão contínua ao intervalo $[a, b]$.

Uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada **continuamente diferenciável por partes** ou é dita ser de **classe C^1 por partes** quando existe uma partição $a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b$ tal que, para todo $i = 0, \dots, n$, a restrição $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ possui uma extensão continuamente diferenciável ao intervalo $[a, b]$.

Teorema A.5. (Barra [7], p. 39, Teorema 14) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas num conjunto mensurável. Então*

- a.* $\sup_{1 \leq i \leq n} f_i$ é mensurável para cada n .
- b.* $\inf_{1 \leq i \leq n} f_i$ é mensurável para cada n .
- c.* $\sup f_n$ é mensurável.
- d.* $\inf f_n$ é mensurável.
- e.* $\limsup f_n$ é mensurável.
- f.* $\liminf f_n$ é mensurável.

Teorema A.6. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Folland [11], p. 54, Teorema 2.24) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em L^1 tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. e que existe uma aplicação $g \in L^1$ não negativa tal que $\|f_n\| \leq g$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^1$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.*

Teorema A.7. (Teorema fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue, Folland [11], p. 119, Teorema 3.35) *Se $-\infty < a < b < \infty$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a.* F é absolutamente contínua em $[a, b]$.
- b.* $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ para algum elemento $f \in L^1(a, b)$.
- c.* F é diferenciável q.t.p. em $[a, b]$, $F' \in L^1(a, b)$ e $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.

A.2 Cones

Definição A.8. (Definições em Clarke [5], pp. 20 e 21) *Um **cone** K num espaço vetorial é um conjunto não vazio tal que se $v \in K$ e $t > 0$, então $tv \in K$, isto é, K é fechado sob multiplicação por um escalar positivo. Assim, um subespaço é um cone. Note que um cone fechado necessariamente contém o elemento neutro 0.*

*Seja S um subconjunto de um espaço vetorial X . O **cone tangente** a S num ponto $x \in S$, denotado por $T_S(x)$, consiste em todos os pontos $v \in X$ que podem ser expressos na forma*

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - x}{t_i},$$

onde $\{x_i\}$ é uma subsequência em S convergindo para x e $\{t_i\}$ é uma sequência de escalares positivos decrescendo para 0. Ao conjunto $T_S(x)$ também nos referimos como o cone tangente de Bouligand. Note que $T_S(x)$ é um cone fechado.

O **cone normal** $N_S(x)$ a S em x é o subconjunto do espaço dual definido por

$$N_S(x) := \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \ \forall v \in T_S(x)\}.$$

Também podemos obter o cone normal através do cone tangente por polaridade. O **polar** de qualquer subconjunto A de X é definido e denotado por

$$A^\Delta := \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in A\}.$$

Assim, segue diretamente da definição que $N_S(x)$ é um cone fechado em X^* e que

$$N_S(x) = T_S(x)^\Delta.$$

Além disso, veja que

$$x \in \text{int } S \implies T_S(x) = X, \ N_S(x) = \{0\}.$$

Proposição A.9. (Clarke [5], p. 21, Exercício 1.38)

- a. Seja K um cone fechado em X . Mostre que $T_K(0) = K$.
- b. Seja L um subespaço fechado de X . Mostre que, para qualquer $x \in L$, temos

$$T_L(x) = L \text{ e } N_L(x) = \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, x \rangle = 0 \ \forall x \in L\}.$$

- c. Sejam A e E subconjuntos dos espaços normados X e Y respectivamente, e seja (x, y) um ponto de $A \times E$. Mostre que

$$T_{A \times E}(x, y) = T_A(x) \times T_E(y), \ N_{A \times E}(x, y) = N_A(x) \times N_E(y).$$

Proposição A.10. (Clarke [5], p. 23, Proposição 1.43) Seja $x \in S$, onde S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então $T_S(x) \cap N_S(x) = \{0\}$ e $x + r\xi \notin S$ para qualquer $\xi \in N_S(x)$ não nulo e para todo $r > 0$ suficientemente pequeno. De modo mais geral, existe $r > 0$ tal que

$$S \cap [x + N_S(x)] \cap B(x, r) = \{x\}.$$

Definição A.11. (Normais proximal e limite, Definições em Clarke [5], p. 240, 244)

Seja S um subconjunto não-vazio do espaço $\mathbb{R}^n$. Um vetor $\zeta \in \mathbb{R}^n$ é um **normal proximal** ao conjunto S no ponto $x \in S$ se, e somente se, existe $\sigma = \sigma(x, \zeta) \geq 0$ tal que

$$\langle \zeta, u - x \rangle \leq \sigma \|u - x\|^2 \quad \forall u \in S.$$

O conjunto $N_S^P(x)$ de todos ζ como acima define o **cone normal proximal** a S em x .

Definimos o **cone normal limite** $N_S^L(x)$ por

$$N_S^L(x) := \left\{ \zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i : \zeta_i \in N_S^P(x_i), \quad x_i \rightarrow x, \quad x_i \in S \right\}.$$

Veja que o cone $N_S^P(x)$ sempre é convexo (por definição), porém, pode não ser fechado; já o cone $N_S^L(x)$ sempre é fechado (por construção), porém pode não ser convexo.

A.3 Funções e conjuntos convexos

Definição A.12. (Definições em Clarke [5], pp. 27 e 29) Uma **combinação convexa** de finitos pontos $x_1, x_2, \dots, x_m$ em um espaço vetorial normado X (com $m \geq 2$) é um elemento x da forma

$$x = \sum_{i=1}^m t_i x_i,$$

onde os coeficientes t_i são números não-negativos que somam um: $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m t_i = 1$. Um conjunto C é **convexo** se, e somente se, toda combinação convexa de pontos de C pertence a C .

Seja $S \subset X$. O **envoltório convexo** de S , denotado por $\text{co } S$, é o menor conjunto convexo de X contendo S . Assim, $\text{co } S$ é a interseção de todos conjuntos convexos contendo S . Também podemos descrever $\text{co } S$ como sendo o conjunto de todas combinações convexas geradas por S :

$$\text{co } S = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i : m \geq 1, \quad x_i \in S, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}.$$

Proposição A.13. (Teorema de Carathéodory, Clarke [5], p. 29, Proposição 2.6) Seja S um subconjunto de um espaço normal X de dimensão finita n . Considere $x \in \text{co } S$. Então existe um subconjunto A de S contendo no máximo $n + 1$ pontos tais que x é a combinação convexa dos pontos de A .

Proposição A.14. (Clarke [5], p. 30, Proposição 2.9) *Sejam S um conjunto convexo num espaço vetorial X e $x \in S$. Então $T_S(x)$ é convexo, $S \subset \{x\} + T_S(x)$ e vale*

$$T_S(x) = \text{cl} \left\{ \frac{u-x}{t} : t > 0, u \in S \right\} \text{ e } N_S(x) = \{ \zeta \in X^* : \langle \zeta, u-x \rangle \leq 0 \ \forall u \in S \}.$$

Definição A.15. (Definições em Clarke [5], p. 31) *Seja X um espaço vetorial normado e X^* seu espaço dual. Denotamos $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup +\infty$. O **domínio efetivo** de uma função f a valores estendidos, denotado por $\text{dom } f$, é o conjunto*

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < \infty\}.$$

*A função f é dita ser **própria** quando $\text{dom } f \neq \emptyset$. O **epígrafo** de f é definido por*

$$\text{epi } f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Seja Σ um subconjunto não-vazio de X^ . A **função suporte** de Σ é a aplicação H_Σ de X em $\mathbb{R}_\infty$ definida por*

$$H_\Sigma(x) = \sup_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma, x \rangle.$$

*Seja S um subconjunto de X . Sua **função indicadora** $I_S : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ é a aplicação dada por*

$$I_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in S, \\ +\infty, & \text{se } x \in X \setminus S. \end{cases}$$

*Seja E um conjunto munido de uma topologia. Uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ é dita ser **semicontínua inferior** (abreviado sci) se, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{u \in E : f(u) \leq c\}$ é fechado. Uma função f tal que $-f$ é semicontínua inferior é chamada **semicontínua superior**.*

Definição A.16. (Definição em Clarke [5], p. 210) *Seja S um subconjunto fechado e não-vazio de um espaço de Banach X . A **função distância** associada ao conjunto S é definida por*

$$d_S(x) = \inf_{y \in S} \|y - x\|,$$

a qual é uma função globalmente Lipschitz com constante 1.

Proposição A.17. (Clarke [5], p. 31, Proposição 2.12) *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma função semicontínua inferior. Se $x \in \text{dom } f$, então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x tal que $f(u) > f(x) - \varepsilon$ para todo $u \in V$. Se $f(x) = \infty$, então, para qualquer $M \in \mathbb{R}$, existe uma vizinhança V de x tal que $f(u) > M$ para todo $u \in V$.*

A.4 Multifunção e seleção mensuráveis

Definição A.18. (Definições de Clarke [5], pp. 114, 115 e 118) *Escrevemos $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ para denotar uma **multifunção** Γ que leva pontos de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

*Dizemos que uma multifunção $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é **mensurável** se Ω é mensurável e se o conjunto*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

é (Lebesgue) mensurável para todo subconjunto fechado V de $\mathbb{R}^n$.

*O **domínio efetivo** $\text{dom } \Gamma$ da multifunção $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é definido por*

$$\text{dom } \Gamma := \{x \in \Omega : \Gamma(x) \neq \emptyset\}.$$

*Dizemos que Γ é **a valores fechados** se $\Gamma(x)$ é um conjunto fechado para cada $x \in \Omega$.*

*Por uma **seleção mensurável** de Γ entende-se como sendo uma função mensurável $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(x) \in \Gamma(x)$ para quase todo $x \in \Omega$.*

*O **gráfico** de uma multifunção Γ é o conjunto*

$$\text{gr } \Gamma = \{(x, \gamma) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : \gamma \in \Gamma(x)\}.$$

Proposição A.19. (Clarke [5], p. 112, Proposição 6.17) *Seja $k(\cdot) \in L^1(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Então o conjunto*

$$K = \{f \in L^1(\Omega) : \|f(x)\| \leq k(x), \ x \in \Omega \text{ q.t.p.}\}$$

é compacto e sequencialmente compacto na topologia fraca em $L^1(\Omega)$.

Proposição A.20. (Clarke [5], p. 114, Exercício 6.20) *Suponha que $\Gamma = \{\gamma(x)\}$ para cada x . Mostre que a multifunção Γ é mensurável se, e somente se, a função γ é mensurável.*

Corolário A.21. (Seleções mensuráveis, Clarke [5], p. 116, Corolário 6.23) *Seja $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção mensurável a valores fechados. Então existe uma função mensurável $\gamma : \text{dom } \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\gamma(x) \in \Gamma(x), \quad x \in \text{dom } \Gamma \quad \text{q.t.p.}$$

Proposição A.22. (Clarke [5], p. 116, Exercício 6.24) *Sejam $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ multifunções mensuráveis a valores fechados. Mostre que $\Gamma + G$ é mensurável.*

Proposição A.23. (Clarke [5], p. 117, Proposição 6.25) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

- *A aplicação $x \mapsto \varphi(x, p, q)$ é mensurável em Ω para cada $(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell$.*
- *A aplicação $(p, q) \mapsto \varphi(x, p, q)$ é contínua para cada $x \in \Omega$.*

Sejam $P, Q : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ multifunções mensuráveis a valores fechados, e $c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\Gamma(x) = \{p \in P(x) : c(x) \leq \varphi(x, p, q) \leq d(x) \text{ para algum } q \in Q(x)\}$$

é mensurável.

Corolário A.24. (Clarke [5], p. 117, Corolário 6.26) *A interseção de duas multifunções mensuráveis a valores fechados $\Gamma_1, \Gamma_2 : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é mensurável.*

Corolário A.25. (Clarke [5], p. 118, Corolário 6.27) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mensurável. Se $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\text{gr } \Gamma$ é fechado, então Γ é mensurável.*

Proposição A.26. (Clarke [5], p. 118, Proposição 6.29) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mensurável e $G : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção cujos valores são conjuntos compactos, convexos e não-vazios. Seja $H_{G(x)}(\cdot)$ a função suporte do conjunto $G(x)$. Então G é mensurável se, e somente se, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, a função $x \mapsto H_{G(x)}(p)$ é mensurável sobre Ω .*

Proposição A.27. (Clarke [5], p. 119, Exercício 6.30) *Seja $G : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ mensurável e a valores fechados. Se $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é mensurável, mostre que a função $x \mapsto d_{G(x)}(u(x))$ é mensurável em $\text{dom } G$.*

Teorema A.28. (Clarke [5], p. 119, Teorema 6.31) *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\varphi(x, p)$ é mensurável na variável x e contínua na variável p . Seja $P : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ mensurável e a valores fechados. Considere Σ como sendo o conjunto de funções $p \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ que satisfazem*

$$p(x) \in P(x), \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.,}$$

e para o qual a integral

$$\int_{\Omega} \varphi(x, p(x)) dx$$

está bem definida, possivelmente como $+\infty$. Se Σ é não-vazio, então a integral

$$\int_{\Omega} \sup_{p \in P(x)} \varphi(x, p) dx$$

está bem definida, como sendo um número finito ou $+\infty$, e temos

$$\int_{\Omega} \sup_{p \in P(x)} \varphi(x, p) dx = \sup_{p(\cdot) \in \Sigma} \int_{\Omega} \varphi(x, p(x)) dx,$$

onde ambos os lados podem valer $+\infty$.

Teorema A.29. (Clarke [5], p. 120, Teorema 6.32) *Sejam Ω , φ , P e Σ como descritos no Teorema A.28, e seja $\bar{p} \in \Sigma$ tal que a integral*

$$\int_{\Omega} \varphi(x, \bar{p}(x)) dx$$

é finita. Suponha que, para algum $\delta > 0$, temos

$$p(\cdot) \in \Sigma, \quad \int_{\Omega} \|p(x) - \bar{p}(x)\| dx \leq \delta \implies \int_{\Omega} \varphi(x, p(x)) dx \geq \int_{\Omega} \varphi(x, \bar{p}(x)) dx.$$

Então, para quase todo $x \in \Omega$, temos $\varphi(x, p) \geq \varphi(x, \bar{p}(x))$ para todo $p \in P(x)$.

Teorema A.30. (Fecho Fraco, Clarke [5], p. 128, Teorema 6.39) *Seja $[a, b]$ um intervalo em $\mathbb{R}$ e Q um subconjunto fechado de $[a, b] \times \mathbb{R}^\ell$. Seja $\Gamma(t, u)$ uma multifunção de Q aos subconjuntos fechados e convexos de $\mathbb{R}^n$. Suponha que*

a. *Para cada $t \in [a, b]$, o conjunto*

$$G(t) = \{(u, z) : (t, u, z) \in Q \times \mathbb{R}^n, \quad z \in \Gamma(t, u)\}$$

é fechado e não-vazio;

b. Para toda função mensurável u sobre $[a, b]$ satisfazendo $(t, u(t)) \in Q$ q.t.p., e todo $p \in \mathbb{R}^n$, a função suporte

$$t \mapsto H_{\Gamma(t, u(t))}(p) = \sup \{ \langle p, v \rangle : v \in \Gamma(t, u(t)) \}$$

é mensurável;

c. Para toda função integrável k , temos $\Gamma(t, u) \subset B(0, k(t))$ para todo $(t, u) \in Q$.

Seja u_i uma sequência de funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com $(t, u_i(t)) \in Q$ q.t.p. e convergindo para u_* em quase todo ponto. Considere também $z_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sequência de funções satisfazendo $\|z_i(t)\| \leq k(t)$ q.t.p., de modo que suas componentes convirjam fracamente em $L^1(a, b)$ para as componentes de z_* . Suponha que, para certos subconjuntos mensuráveis Ω_i de $[a, b]$ satisfazendo $\lim_{i \rightarrow \infty} m(\Omega_i) = b - a$, temos

$$z_i(t) \in \Gamma(t, u_i(t)) + B(0, r_i(t)), \quad t \in \Omega_i \quad \text{q.t.p.},$$

onde r_i é uma sequência de funções não-negativas convergindo em $L^1(a, b)$ para 0. Então temos, no limite, $z_*(t) \in \Gamma(t, u_*(t))$, $t \in [a, b]$ q.t.p.

Teorema A.31. (Lema de Gronwall, Clarke [5], p. 130, Teorema 6.41) Se a aplicação absolutamente contínua $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\|x'(t)\| \leq \gamma(t)\|x(t)\| + \beta(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.},$$

onde $\gamma, \beta \in L^1(a, b)$, com γ não-negativa, então, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\|x(t) - x(a)\| \leq \int_a^t \exp \left(\int_s^t \gamma(r) dr \right) [\gamma(s)\|x(a)\| + \beta(s)] ds.$$

Proposição A.32. (Clarke [5], p. 131, Exercício 6.42) Seja $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sequência de funções absolutamente contínuas com $\|p_i(a)\|$ uniformemente limitada, e tal que, para certas funções γ, β em $L^1(a, b)$, temos, para cada i ,

$$\|p'_i(t)\| \leq \gamma(t)\|p_i(t)\| + \beta(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{q.t.p.}$$

Então existe uma função absolutamente contínua $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma subsequência p_{i_j} tais que

$$p_{i_j} \rightarrow p \text{ uniformemente em } [a, b], \quad p'_{i_j} \rightarrow p' \text{ fracamente em } L^1(a, b),$$

onde as convergências são consideradas a cada componente.

A.5 Semicontinuidade de funcionais integrais

(Parte de Clarke [5], §6.3, pp. 124 e 125.)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Considere o seguinte funcional integral

$$J(x, v) = \int_{\Omega} F(t, x(t), v(t)) dt$$

e a restrição

$$(t, x(t)) \in Q, \quad t \in \Omega \text{ q.t.p.},$$

onde a aplicação $F : \Omega \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e o subconjunto $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}^\ell$ são dados.

Hipóteses:

(H1) F é semicontínua inferior em (x, v) e convexa com relação a v ;

(H2) Para toda função mensurável $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ satisfazendo $(t, x(t)) \in Q$ q.t.p., e para toda aplicação mensurável $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, a função $t \mapsto F(t, x(t), v(t))$ é mensurável;

(H3) Existem $\alpha \in L^1(\Omega)$ e $\beta \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tais que

$$F(t, x, v) \geq \alpha(t) + \langle \beta(t), v \rangle \quad \forall (t, x) \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^n;$$

(H4) Q é fechado em $\Omega \times \mathbb{R}^\ell$.

Teorema A.33. (Clarke [5], p. 125, Teorema 6.38) *Seja x_i uma sequência de funções mensuráveis sobre Ω satisfazendo $(t, x_i(t)) \in Q$ q.t.p. e convergindo para um limite x_* em quase todo ponto. Seja v_i uma sequência de funções mensuráveis convergindo fracamente em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ para v_* , onde $r > 1$. Então*

$$J(x_*, v_*) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} J(x_i, v_i).$$

A.6 Alguns resultados de Otimização

Teorema A.34. (Kuhn-Tucker, Clarke [5], pp. 182 e 183, Teorema 9.4 - adaptado)

Seja x_* uma solução do problema

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \quad x \in S,$$

onde X é um espaço de Banach, S é convexo, as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas, e $h_j : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é afim. Aqui, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ e $h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$. Suponha que f, g e h são continuamente diferenciáveis numa vizinhança de x_* . Então existe $(\eta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de não-trivialidade

$$(\eta, \gamma, \lambda) \neq 0,$$

as condições de positividade e de folga complementar

$$\eta = 0 \text{ ou } 1, \quad \gamma \geq 0, \quad \langle \gamma, g(x_*) \rangle = 0,$$

além da condição de minimização

$$[\eta f + \langle \gamma, g \rangle + \langle \lambda, h \rangle](x) \geq [\eta f + \langle \gamma, g \rangle + \langle \lambda, h \rangle](x_*) = \eta f(x_*) \quad \forall x \in S.$$

Proposição A.35. (Lema de du Bois-Raymond, Clarke [5], p. 184, Exemplo 9.5 - adaptado) Se $\theta \in L^1(a, b)$ é uma aplicação tal que

$$\int_a^b \theta(t) \varphi'(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in \text{Lip}_0[a, b],$$

onde $\text{Lip}_0[a, b]$ é o conjunto de funções Lipschitz contínuas sobre $[a, b]$ que se anulam em a e b , então θ é constante.

Definição A.36. (Ribeiro e Karas [22], p. 37, Definição 2.5) Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é **coerciva** quando $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, ou seja, quando, para todo $M > 0$, existe $r > 0$ tal que $f(x) > M$ sempre que $\|x\| > r$.

Teorema A.37. (O enunciado e uma demonstração deste resultado podem ser encontrados em Ribeiro e Karas [22], p. 37, Teorema 2.6) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e coerciva. Então f tem um minimizador global.*

Definição A.38. (Definição em Vinter [27], p. 111, §3.3) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma função semicontínua inferior, um ponto $x_0 \in \text{dom } f$ e um escalar $\varepsilon > 0$. Então x_0 é um ε -**minimizador** (ou ε -**ótimo**) para f se*

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

Teorema A.39. (Berge [3], p. 116, Teorema 2) *Sejam X e Y espaços topológicos. Se a função real $\phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ e a multifunção $\Gamma : X \rightsquigarrow Y$ são semicontínuas superior, de modo que, para cada x , tem-se $\Gamma(x) \neq \emptyset$, então a função real M definida por*

$$M(x) = \max \{ \phi(x, y) \mid y \in \Gamma(x) \}$$

é semicontínua superior.

A.7 Análise não-suave

Definição A.40. (Definições em Clarke [5], p. 59) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma função, onde X é um espaço normado, e seja x um ponto em $\text{dom } f$. Um elemento $\zeta \in X^*$ é chamado **subgradiente** de f em x (no sentido da análise convexa) se satisfaz a desigualdade do subgradiente:*

$$f(y) - f(x) \geq \langle \zeta, y - x \rangle, \quad y \in X.$$

Quando a desigualdade do subgradiente acima é válida, diz-se que a função afim

$$y \mapsto f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$$

suporta f em x ; isto significa que essa função afim se encontra abaixo de f e se iguala a f no ponto x .

O conjunto de todos subgradientes de f em x é denotado por $\partial f(x)$ e é denominado **subdiferencial** de f em x . Segue da definição que $\partial f(x)$ é um conjunto convexo o qual é

fechado para a topologia fraca*. Também segue da definição que f atinge um mínimo em x se, e somente se, $0 \in \partial f(x)$ (note que esta é uma versão da Regra de Fermat).

Proposição A.41. (Clarke [5], p. 61, Exercício 4.5) *Seja $x \in S$, onde S é um subconjunto convexo do espaço normado X . Mostre que $\partial I_S(x) = N_S(x)$.*

Teorema A.42. (Teorema de Ekeland, Clarke [5], p. 83, Teorema 5.19) *Sejam (E, d) um espaço métrico completo e $f : E \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma função própria, semicontínua inferior e limitada inferiormente. Se $\varepsilon > 0$ e $u \in E$ satisfaz $f(u) \leq \inf_E f + \varepsilon$, então, para todo $\lambda > 0$, existe $z \in E$ tal que*

- a. $f(z) \leq f(u)$,
- b. $d(u, z) \leq \lambda$,
- c. $f(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, z) > f(z) \quad \forall w \in E, \quad w \neq z$.

Teorema A.43. (Clarke [5], p. 93, Teorema 5.35) *Sejam X e Y espaços de Banach, e seja S dado por $S = \{u \in X : F(u) = 0\}$, onde $F : X \rightarrow Y$ é continuamente diferenciável numa vizinhança de $x \in S$. Se $F'(x)$ é sobrejetora, então $T_S(x)$ e $N_S(x)$ são os seguintes subespaços lineares:*

$$T_S(x) = \{v \in X : \langle F'(x), v \rangle = 0\}, \quad N_S(x) = F'(x)^* Y^*$$

e vale $T_S(x) = N_S(x)^\Delta$, $N_S(x) = T_S(x)^\Delta$, onde $F'(x)^*$ é o adjunto do operador $F'(x)$ e Y^* é o espaço dual de Y .

Definição A.44. (Definições em Clarke [5], pp. 194 e 196) *Seja X um espaço de Banach e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **Lipschitz de constante K numa vizinhança de $x \in X$** (ou localmente Lipschitz em x); isto é, para certo $\varepsilon > 0$, temos*

$$|f(y) - f(z)| \leq K \|y - z\| \quad \forall y, z \in B(x, \varepsilon).$$

A **derivada direcional generalizada** de f em x na direção v , denotada por $f^\circ(x; v)$, é definida por

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

onde $y \in X$ e t é um escalar positivo.

O **gradiente generalizado** de f em x , denotado por $\partial_C f(x)$, é o único subconjunto compacto fracamente e convexo de X^* cuja função suporte é $f^\circ(x; \cdot)$. Assim, temos

$$\zeta \in \partial_C f(x) \iff f^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \quad \forall v \in X,$$

$$f^\circ(x; v) = \max \{ \langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial_C f(x) \} \quad \forall v \in X.$$

Proposição A.45. (Clarke [5], p. 196, Proposição 10.5) *Seja f localmente Lipschitz em x com constante K . Então $\partial_C f(x) \subset B_*(0, K)$.*

Proposição A.46. (Clarke [5], p. 197, Exercício 10.7 - adaptado) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Prove a Regra de Fermat para ∂_C : se f possui mínimo ou máximo local em x , então $0 \in \partial_C f(x)$.*

Definição A.47. (Clarke [5], p. 212, Definição 10.32) *Seja x um ponto em S . Os **cones tangente e normal generalizados** a S em x são definidos por*

$$T_S^C(x) := \{v \in X : d_S^\circ(x; v) = 0\},$$

$$N_S^C(x) := T_S^C(x)^\Delta = \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in T_S^C(x)\}.$$

Teorema A.48. (Clarke [5], p. 213, Teorema 10.34) *Seja $x \in S$. Então*

- a. $T_S^C(x)$ é um cone convexo e fechado contido em $T_S(x)$;*
- b. $N_S^C(x)$ é um cone convexo e fechado* contendo $N_S(x)$;*
- c. Temos $N_S^C(x) = \text{cl}^* \{ \lambda \zeta : \lambda \geq 0, \zeta \in \partial_C d_S(x) \}$ e $T_S^C(x) = N_S^C(x)^\Delta$.*

Definição A.49. (Definição de Clarke [5], p. 215) *Um conjunto S é dito ser **regular** em um ponto $x \in S$ se $T_S(x) = T_S^C(x)$. Note que quando S é regular em x , temos, por polaridade,*

$$N_S^C(x) = T_S^C(x)^\Delta = T_S(x)^\Delta = N_S(x).$$

Definição A.50. (Definições em Clarke [5], p. 227 - adaptado) *Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ e um ponto $x \in \text{dom } f$. Dizemos que $\zeta \in \mathbb{R}^n$ é um **gradiente proximal** de f em x se, para algum $\sigma = \sigma(x, \zeta) \geq 0$ e para alguma vizinhança $V = V(x, \zeta)$ de x , temos*

$$f(y) - f(x) + \sigma \|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y \in V.$$

Esta é conhecida como desigualdade do gradiente proximal. Aqui, usamos a notação $\langle \zeta, y - x \rangle$ em vez de $\zeta^T(y - x)$.

*A coleção de todos subgradientes proximais ζ descritos como acima (que pode ser vazia) constitui o **subdiferencial proximal** de f em x , e é denotado por $\partial_P f(x)$.*

Corolário A.51. (Clarke [5], p. 231, Corolário 11.7) *Sejam U um subconjunto convexo e aberto em $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ semicontínua inferior e $K \geq 0$. Mostre que*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq K \|y - x\| \quad \forall x, y \in U \iff \|\zeta\| \leq K \quad \forall \zeta \in \partial_P f(x) \quad \forall x \in U.$$

Definição A.52. (Clarke [5], p. 232, Definição 11.10) *O **subdiferencial limite** $\partial_L f(X)$ é definido por*

$$\partial_L f(x) := \left\{ \zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i : \zeta_i \in \partial_P f(x_i), \quad x_i \rightarrow x, \quad f(x_i) \rightarrow f(x) \right\}.$$

Segue desta definição que $\partial_P f(x) \subset \partial_L f(x)$ e que, por construção, o gráfico da multifunção $x \mapsto \partial_L f(x)$ é fechado, isto é,

$$\zeta_i \in \partial_L f(x_i), \quad x_i \rightarrow x, \quad \zeta_i \rightarrow \zeta \implies \zeta \in \partial_L f(x).$$

Proposição A.53. (Clarke [5], p. 233, Proposição 11.12) *Seja f localmente Lipschitz em x . Então $\emptyset \neq \partial_L f(x) \subset \partial_C f(x)$. Se f é C^1 numa vizinhança de x , temos $\partial_L f(x) = \{f'(x)\}$. Se f é convexa, temos $\partial_L f(x) = \partial f(x)$.*

Teorema A.54. (Regra da Soma Proximal, Clarke [5], p. 234, Teorema 11.16) *Sejam as funções $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ semicontínuas inferior, considere um ponto $x \in \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$*

e um elemento $\zeta \in \partial_P(f_1 + f_2)(x)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existem $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon)$, com $|f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ ($i = 1, 2$), tais que

$$\zeta \in \partial_P f_1(x_1) + \partial_P f_2(x_2) + B(0, \varepsilon).$$

Se ao menos uma das funções é localmente Lipschitz em x , temos

$$\partial_L(f_1 + f_2)(x) \subset \partial_L f_1(x_1) + \partial_L f_2(x_2).$$

Proposição A.55. (Clarke [5], pp. 240, 241 e 245, Teorema 11.36 e Proposições 11.26, 11.28 e 11.34 - adaptados) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in S$. Então:*

- a.* $N_S^P(x) \subset N_S(x)$;
- b.* $N_S^P(x) = \partial_P I_S(x)$;
- c.* $N_S^L(x) = \partial_L I_S(x)$;
- d.* $N_S(x) \subset N_S^L(x) \subset N_S(x)^C \subset \overline{\text{co}} N_S^L(x)$, com igualdade se, e somente se, S é regular em x .

Proposição A.56. (Clarke [5], p. 279, Exercício 13.23) *Seja $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Fixe $v_* \in \mathbb{R}^n$ e defina*

$$f(\alpha) = \Lambda\left(\frac{v_*}{\alpha}\right) \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Mostre que f é convexa em $(0, +\infty)$ e que se $\gamma \in \partial f(1)$, então existe um elemento $\zeta \in \partial \Lambda(v_)$ tal que $\gamma = \Lambda(v_*) - v_*^T \zeta$.*

Proposição A.57. (Clarke [5], p. 279, Exercício 13.24) *Este exercício estabelece a mensurabilidade das multifunções $\partial_L f(x)$ e $\partial_C f(x)$. Consideramos a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- $t \mapsto f(t, x)$ é mensurável para cada $x \in \mathbb{R}^n$.*
- $x \mapsto f(t, x)$ é localmente Lipschitz para cada $t \in \mathbb{R}$. A notação $\partial_L f(t, x)$ abaixo (por exemplo) se refere ao subdiferencial limite da função $f(t, \cdot)$ avaliada em x , para t fixo. O objetivo é provar*

Proposição. *Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Então as multifunções*

$$t \mapsto \partial_L f(t, u(t)) \quad \text{e} \quad t \mapsto \partial_C f(t, u(t))$$

são mensuráveis.

A.8 Alguns resultados de Análise funcional

Definição A.58. (Definições em Kreyszig [16], p. 104 - 107.) *Um **funcional linear** f é um operador linear com domínio num espaço vetorial X e contradomínio no corpo de escalares $\mathbb{K}$ de X . Assim,*

$$f : X \rightarrow \mathbb{K},$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

O conjunto de todos funcionais lineares definidos num espaço vetorial X é denotado por X^ e denominado **espaço dual (algébrico) de X** .*

Definição A.59. (Definição em Munkres [20], p. 264) *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de X é dita ser uma **sequência de Cauchy** em (X, d) se, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro N tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{sempre} \quad \text{que } n, m \geq N.$$

*O espaço métrico (X, d) é dito ser **completo** se toda sequência de Cauchy em X converge.*

Definição A.60. (Definição em Clarke [5], p. 75) *Um espaço normado X é dito ser um **espaço de Banach** se é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy $\{x_i\} \subset X$ possui limite em X .*

Teorema A.61. (Clarke [5], p. 99, Teorema 5.47) *Um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, sua bola unitária fechada é fracamente compacta.*

Teorema A.62. (Clarke [5], p. 106, Teorema 6.4) *Se $1 < p < \infty$, o espaço de Banach $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Definição A.63. (Definição em Brezis [4], p. 132) *Um **espaço de Hilbert** é um espaço vetorial H equipado com um produto escalar de modo que H é completo para a norma induzida.*

Teorema A.64. (Projeção sobre um conjunto fechado e convexo, Brezis [4], p. 132, Teorema 5.2 - adaptado) *Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um conjunto convexo e fechado. Então, para todo $f \in H$, existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = d_K(f).$$

E mais, u é caracterizado pela propriedade

$$u \in K \quad e \quad \langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

*O elemento u acima é denominado **projeção** de f sobre K e é denotado por*

$$u = P_K f \quad \text{ou} \quad u = \text{proj}_K(f).$$

Proposição A.65. (Brezis [4], p. 134, Proposição 5.3) *Seja $K \subset H$ um subconjunto fechado convexo não-vazio. Então P_K satisfaz*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in H.$$

Definição A.66. (Definição em Munkres [20], p. 278) *Se (Y, d) é um espaço métrico, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X, Y)$ (espaço das funções contínuas do espaço topológico X em Y) é dito ser **pontualmente limitado** sob d se, para cada $a \in X$, o subconjunto*

$$\mathcal{F}_a \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

de Y é limitado sob d .

Definição A.67. (Teorema de Ascoli, versão clássica, Munkres [20], p. 278, Teorema 45.4) *Sejam X um espaço compacto e $(\mathbb{R}^n, d)$ o espaço euclidiano com a métrica euclideana. Equipe $C(X, \mathbb{R}^n)$ a topologia uniforme correspondente. O subespaço topológico $\mathcal{F}$ de $C(X, \mathbb{R}^n)$ tem fecho compacto se, e somente se, $\mathcal{F}$ é equicontínuo e pontualmente limitado sob d .*

Proposição A.68. (Robertson [23], p. 53, Lema 7) *Num espaço convexo:*

- a. qualquer múltiplo escalar de um conjunto compacto é compacto;*
- b. qualquer soma finita de conjuntos compacto é compacto;*
- c. a soma de um conjunto compacto e um conjunto fechado é compacto.*

Observação A.69. (Texto retirado de Lima [17], Seção 4, p. 102 - adaptado) *Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, de classe C^1 , é uma função semicontínua inferior. Isto quer dizer que se f tem posto r num ponto $x \in U$, então existe uma vizinhança V de x tal que f tem posto maior ou igual a r em todos os pontos de V . Com efeito, existe um determinante menor $r \times r$ da matriz $Jf(x)$ que é não-nulo. Por continuidade, este menor é não-nulo em todos os pontos de uma vizinhança V de x , de modo que o posto de f é maior ou igual a r em todos os pontos de V .*

□□□

Lista de Símbolos e Índice Remissivo

$AC[a, b]$, 106

$AC^p[a, b]$, 106

H_Σ , 110

I_S , 110

$L^p(a, b)$, 104

$N_S(x)$, 108

$N_S^C(x)$, 119

$N_S^L(x)$, 109

$N_S^P(x)$, 109

$P_K f$, 123

$T_S(x)$, 107

$T_S^C(x)$, 119

$\text{co } S$, 109

$\text{dom } \Gamma$, 111

$\text{dom } f$, 110

$\text{epi } f$, 110

$\text{proj}_K(f)$, 123

$\partial f(x)$, 117

$\partial_C f(x)$, 119

$\partial_L f(x)$, 120

$\partial_P f(x)$, 120

$d_S(x)$, 110

$f^\circ(x; v)$, 118

Arco, 27

Cicloide, 19

Combinação convexa, 109

Condição

de compatibilidade, 58

de Erdmann, 16, 98

de fronteira, 20, 24, 63, 98

de Hilbert-Weierstrass, 25

de Legendre, 20

de transversalidade, 24, 51, 59, 63, 98

de Weierstrass, 26, 51, 59, 61, 63, 98

Condições

de contorno, 15

Cone, 107

normal, 108

generalizado, 119

limite, 109

proximal, 109

tangente, 107

generalizado, 119

Conjunto

convexo, 109

polar, 108

regular, 119

Crescimento

-
- de Nagumo, 33
 - superlinear, 33
 - Derivada direcional generalizada, 118
 - Desigualdade do subgradiente, 117
 - Domínio efetivo, 110, 111
 - Envoltório convexo, 109
 - Epígrafo, 110
 - Equação
 - de Euler, 16, 48, 51, 59, 61, 63
 - integral de Euler, 23, 30
 - Espaço
 - de Hilbert, 122
 - métrico completo, 122
 - Extremal, 16
 - Fenômeno de Lavrentiev, 29
 - Função
 - absolutamente contínua, 105
 - admissível, 15, 28, 97
 - bi-Lipschitz, 106
 - coerciva, 116
 - distância, 110
 - essencialmente limitada, 104
 - estacionária, 42, 52, 90
 - normal, 52
 - indicadora, 110
 - Lipschitz contínua, 106
 - localmente Lipschitz, 118
 - própria, 110
 - semicontínua
 - inferior (sci), 110
 - superior (scs), 110
 - suporte, 110
 - Gradiente
 - generalizado, 119
 - proximal, 120
 - Inclusão de Euler, 63, 98
 - Lagrangiana, 15
 - autônoma, 16, 35, 98
 - Lema
 - de du Bois-Raymond, 116
 - de Gronwall, 114
 - Mínimo
 - global, 15
 - local
 - forte, 15, 25, 28
 - fraco, 15, 28
 - Minimizador, 15
 - Multifunção, 111
 - a valores fechados, 111
 - mensurável, 111
 - Ponto
 - ε -ótimo, 117
 - ε -minimizador, 117
 - Problema
 - da Braquistócrona, 17
 - de Bolza, 62, 97
 - de Lagrange, 47
 - E-pseudoinvexo, 52, 90
 - isoperimétrico, 21, 61

- pseudoinvexo, [42](#)
- variacional, [14](#)
- Projeção sobre um conjunto, [123](#)
- Regra de multiplicadores
 - clássica, [47](#)
 - moderna, [50](#)
- Restrição de Lagrange, [51](#)
- Seleção mensurável, [111](#)
- Sequência de Cauchy, [122](#)
- Solução, [15](#)
- Subdiferencial, [117](#)
 - limite, [120](#)
 - proximal, [120](#)
- Teorema
 - de Clarke-Vinter, [35](#)
 - da Convergência Dominada de Lebesgue, [107](#)
 - de Ascoli, [123](#)
 - de Carathéodory, [109](#)
 - de du Bois-Raymond, [23](#)
 - de Kuhn-Tucker, [116](#)
 - de regularidade, [25](#)
 - de Tonelli, [28](#)
 - de Tonelly-Morrey, [30](#)
 - do fecho fraco, [113](#)
 - Fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue, [107](#)
- Variável coestado, [24](#)