



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/11

Métodos de ressonância no super-espço aplicados ao modelo de O’Raifeartaigh

Carlos Roberto Senise Junior

Orientador

Maria Cristina Batoni Abdalla Ribeiro

Co-orientador

Daniel Luiz Nedel

Março de 2011

Agradecimentos

A maior dificuldade em agradecer é que invariavelmente nos esquecemos de alguém que foi importante por algum motivo, em maior ou menor grau. Então, antes de passar às especificidades, gostaria de agradecer a todas as pessoas que de alguma forma fizeram parte de minha vida em algum curto ou longo período de tempo: muito obrigado!

Agradeço à Profa. Maria Cristina Batoni Abdalla Ribeiro pela orientação, conversas, conselhos e também pela ajuda em “áreas” além da Física, que me auxiliou a superar alguns obstáculos e continuar em frente.

À “Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior”, CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores e funcionários do IFT por estes sete anos de convivência e aprendizado.

Gostaria de fazer um agradecimento especial a duas pessoas que foram absolutamente fundamentais para a realização desta tese: os Profs. Daniel Luiz Nedel e José Abdalla Helayël-Neto. Muito obrigado pela ajuda, discussões, paciência, hospedagem, atenção e compreensão. No quesito agradecimentos especiais, também incluo a Profa. Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro pela amizade e pelos conselhos.

Nestes anos de IFT, talvez a maior conquista que posso ter tido são as amizades verdadeiras e sinceras que fiz. É neste sentido que agradeço ao Tilles (grande parceiro!), Ricardo gaúcho, Edinho, Carolzinha, Leandro, Hiroshi, Julio, Fezão, Geová, Bufalo, Madias e John.

A Alex Lifeson, Geddy Lee e Neil Peart por toda a ajuda transcendental.

À Sociedade Esportiva Palmeiras.

Aos meus amigos dos encontros de quarta feira (e aos da Mirna também).

E, por último, mas com certeza mais importante, à minha namorada Mirna pelo amor, apoio, companheirismo, força, alegria, incentivo, ajuda e por me mostrar que “tudo posso” quando as vezes não acredito. Ao Bóris (saudade infinita...), aos meus irmãos Renato e Rodrigo, por serem o que são e por serem meus exemplos em muitas coisas e, à razão de tudo, aos professores que me ensinaram e ensinam as coisas mais importantes da vida: meus pais Carlos e Regina. Amo muito vocês todos!

Obrigado à Natureza por ser tão bela e misteriosa...

Resumo

A ação efetiva e o potencial efetivo são objetos fundamentais no estudo de quebra de simetrias. Em teorias de campo supersimétricas, o cálculo destes objetos propicia uma ferramenta para a análise de como a supersimetria é quebrada, e a relação desta quebra com outras simetrias, como a simetria R . Desta forma, o estudo de correções radiativas para a ação efetiva e o potencial efetivo em modelos que realizam a quebra de supersimetria, tal como o modelo de O’Raifeartaigh e suas generalizações, é de extrema importância quando deseja-se estudar o efeito das correções quânticas para o potencial clássico destes modelos e como estas correções modificam suas características clássicas. Desenvolver métodos de somar as contribuições de uma determinada classe de diagramas de Feynman para estes modelos é fundamental para a obtenção de resultados de caráter não perturbativo. Para o estudo de processos supersimétricos, tais métodos de ressonância podem ser desenvolvidos utilizando um formalismo claro, compacto e elegante, que é o formalismo de supercampos. Neste formalismo, os diagramas de Feynman e, assim, as correções radiativas, são calculados utilizando-se as técnicas de cálculo no super-espaço, que reduz drasticamente a quantidade de diagramas a serem calculados em um determinado processo.

Palavras Chaves: Supersimetria; quebra de supersimetria; super-espaço; supercampos; ação efetiva; potencial efetivo; métodos de ressonância.

Áreas do conhecimento: Física de Partículas e Campos.

Abstract

The effective action and the effective potential are fundamental objects in the study of symmetries breaking. In supersymmetric field theories, the calculation of these objects provides a tool for the analysis of how supersymmetry is broken, and the relation of these breaking with other symmetries, such as R symmetry. In this way, the study of radiative corrections for the effective action and the effective potential in models which accomplish the supersymmetry breaking, such as the O’Raifeartaigh model and its generalizations, is of extreme importance when one wishes to study the effect of quantum corrections for the classical potential of these models and how these corrections modify its classical features. Developing methods to sum up the contributions of a determined class of Feynman diagrams for these models is fundamental to obtain results of nonperturbative character. For the study of supersymmetric processes, such resummation methods can be developed using a clear, compact and elegant formalism, known as the superfield formalism. In this formalism, the Feynman diagrams and, henceforth, the radiative corrections, are calculated using the techniques of superspace calculus, which drastically reduce the amount of diagrams to be calculated in a determined process.

Sumário

1	Introdução	1
2	Formalismo de $SUSY$	6
2.1	Uma breve história da $SUSY$	6
2.2	Álgebra de $SUSY$	7
2.3	Super-espaço e supercampos	9
2.3.1	Supercampos quirais	11
2.4	Integração no super-espaço	14
2.4.1	O modelo de Wess-Zumino	15
3	Aspectos gerais de quebra de $SUSY$	17
3.1	Ações supersimétricas	17
3.2	Critério para quebra de $SUSY$	20
3.3	Quebra de $SUSY$ pelo termo F	21
3.4	O modelo de O’Raifeartaigh	22
4	Métodos de ressonância	28
4.1	A expansão delta linear (LDE)	28
4.1.1	Exemplo: O modelo de Gross-Neveu	30
4.2	O método de campo de fundo	32
5	LDE no modelo de O’Raifeartaigh	38
5.1	Introdução: LDE no modelo de Wess-Zumino	38
5.2	O potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh	41
5.2.1	O teorema de não-renormalização	45
5.2.2	Soluções otimizadas em ordem δ : FAC	48
5.2.3	Diagrama de vácuo	50
5.2.4	Soluções otimizadas em ordem δ : PMS	57
6	Método de campo de fundo no modelo de O’Raifeartaigh	59
6.1	Campos de fundo e regras de Feynman	59

6.2	O potencial efetivo em dois <i>loops</i>	62
6.2.1	Diagrama $\mathcal{G}_1^{(2)}$	62
6.2.2	Diagrama $\mathcal{G}_2^{(2)}$	63
6.2.3	Diagrama $\mathcal{G}_3^{(2)}$	64
6.2.4	Diagrama $\mathcal{G}_4^{(2)}$	65
6.2.5	Expressão renormalizada para o potencial efetivo em dois <i>loops</i>	67
7	Correção de dois <i>loops</i> usando a <i>LDE</i>	69
7.1	Diagrama de vácuo	70
7.2	Diagramas de um <i>loop</i> de ordem δ^1	70
7.3	Diagramas de um <i>loop</i> de ordem δ^2	71
7.4	Diagramas de dois <i>loops</i> de ordem δ^2	82
7.5	Regularização e renormalização	83
7.6	O potencial efetivo até ordem δ^2	85
8	Conclusões e perspectivas	88
A	Notação	91
A.1	Álgebra espinorial	91
A.2	Propriedades	94
B	Propriedades de $\mathbb{R}^{4/4}$, $\mathbb{C}^{4/2}$ e $\mathbb{C}^{*4/2}$	97
B.1	Integração e derivação	97
B.2	A função δ de Grassmann	99
C	Identities envolvendo as derivadas covariantes	101
C.1	Relações de comutação e anticomutação	101
C.2	Identities úteis para o cálculo de integrais	102
D	Integrais no super-espaço	104
D.1	Cálculo explícito de algumas integrais no super-espaço	109
D.1.1	Integral $\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta})$	109
D.1.2	Integral $\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta})$	110
D.1.3	Integral $\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta})$	111
D.1.4	Integral $\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta})$	112
D.1.5	Integral $\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta})$	112
E	Integrais no espaço dos momentos	114
E.1	Integrais de um <i>loop</i>	114
E.2	Integrais de dois <i>loops</i>	118

F	Ação efetiva e potencial efetivo	121
F.1	Ação efetiva	121
F.2	Potencial efetivo	125
	Referências	127

Capítulo 1

Introdução

A ação efetiva e o potencial efetivo são muito importantes no estudo de modelos em teoria quântica de campos (*TQC*), pois possibilitam o cálculo dos valores esperados no vácuo (*vev*) no estado de vácuo verdadeiro (físico), em um modelo com quebra espontânea de simetria. Este papel importante da ação efetiva e do potencial efetivo é conhecido desde 1973, com o trabalho de Coleman e Weinberg [1], que mostraram, em $D = 4$, que correções radiativas poderiam naturalmente induzir a quebra espontânea de simetria, possibilitando assim um mecanismo de geração dinâmica de massa.

A quebra espontânea de simetria é essencial na construção de modelos em *TQC* e, de fato, este mecanismo é fundamental na teoria eletrofraca [2], que é baseada em um *vev* não nulo para o campo escalar de Higgs fundamental, que acarreta em uma quebra espontânea da simetria eletrofraca, gerando assim massas para os bósons e férmions do modelo padrão (*MP*) das partículas elementares. Com o advento do acelerador Large Hadron Collider (*LHC*), espera-se poder testar de maneira mais profunda a natureza desta quebra de simetria e assim compreender melhor o mecanismo de geração de massas no *MP*.

Sabe-se que o *MP*, apesar de ter passado por todos os testes experimentais até hoje (na escala de energia na qual conseguimos testá-lo), com exceção de um, não é uma teoria completa das interações fundamentais da natureza. O teste experimental no qual o *MP* falha é conhecido como “oscilação de neutrinos” [3]. Hoje sabemos, através de detecções de neutrinos solares, atmosféricos e de supernovas, que os neutrinos oscilam de sabor e, para que isto ocorra, estes devem ter massas não nulas. Porém, no *MP*, os neutrinos não têm massa, o que claramente está em desacordo com os experimentos. Além disso, um argumento óbvio em favor da conclusão de que o *MP* não é uma teoria completa é o fato de que este não inclui a interação gravitacional, isto é, só é válido quando podemos desprezar efeitos gravitacionais no processo a ser considerado. Todavia, este é um problema de construção do modelo, pois desde o início ele foi desenvolvido de tal forma a não incluir a gravitação (apesar de várias tentativas de tentar fazê-lo). Existem outros problemas, talvez até mais intrigantes do ponto de vista teórico, que não possuem explicação dentro do aparato teórico de *MP*. Dois dos mais fundamentais são “o problema da hierarquia” e “a unificação das constantes de acoplamento”, relacionada com as

“teorias de grande unificação”.

O problema da hierarquia está relacionado com a massa do bóson de Higgs (m_H), que pode ser escrita como

$$m_H^2 = m_0^2 + \Lambda^2, \quad (1.1)$$

onde m_H é a massa física, m_0 é a massa nua, que aparece na Lagrangiana (massa clássica) e Λ é uma escala de energia que varia entre a escala eletrofraca ($\approx 10^2 \text{ GeV}$) e a escala de Planck ($\approx 10^{19} \text{ GeV}$) e representa uma divergência quadrática na correção da massa. O problema fundamental é que m_H é muito pequena em relação à Λ , fazendo com que a quantidade

$$\delta m^2 = \Lambda^2 = m_H^2 - m_0^2, \quad (1.2)$$

que descreve a diferença entre a massa com correções quânticas e a massa clássica, seja muito grande, de tal forma que a massa física seja muito sensível à escala de energia (ajuste fino). Pelo fato de m_H ser muito pequena, dizemos que o bóson de Higgs é um escalar leve (em relação à escala de energia). No *MP*, não existem escalares leves de forma natural, e estes são introduzidos “à mão”.

As teorias de grande unificação consistem na unificação das constantes de acoplamento do grupo de gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (grupo de gauge do *MP* antes da quebra da simetria eletrofraca) em uma ordem de energia muito alta, que supostamente ocorreu em algum momento no Universo primordial. Esta unificação das constantes de acoplamento é um fator indispensável quando procuramos explicar alguns aspectos importantes do Universo primordial, como quebra de simetrias, e também parece ser fundamental em uma futura teoria da gravitação quântica. O problema é que o valor das constantes de acoplamento depende da energia em que são medidas e do conteúdo de partículas do modelo e, levando-se em consideração apenas o *MP*, estas constantes não se unificam em escala de energia alguma.

Assim, existem algumas razões teóricas para acreditar que este cenário - o *MP* com quebra de simetria eletrofraca - é correto, mas incompleto, e deve estar incluso em uma teoria mais fundamental, que se manifestará em uma escala de energia maior do que a que conseguimos atingir atualmente (espera-se ter algum indício desta teoria mais fundamental com o considerável ganho em energia do *LHC*). Dentre vários modelos propostos como extensões do *MP*, um dos mais estudados e (acredita-se) com maior potencial de descoberta é o modelo padrão supersimétrico mínimo (*MPSM*), que é a extensão mínima do *MP* tal que este inclua a Supersimetria (*SUSY*) [4, 5, 6, 7], uma simetria entre bósons e férmions, e tem como característica fenomenológica fundamental a existência de um “parceiro supersimétrico” para cada partícula conhecida no *MP*, isto é, duplica o número de partículas conhecidas atualmente. No *MPSM*, alguns problemas insolúveis no *MP* são solucionados de maneira clara. Para o problema da hierarquia, por exemplo, como a *SUSY* é uma simetria que relaciona bósons e férmions e que garante o mesmo número destes, as contribuições quadraticamente divergentes provenientes de correções radiativas de bósons e férmions cancelam-se mutuamente, fazendo com que não seja necessário o ajuste fino citado anteriormente, além de que o *MPSM* possui escalares leves naturalmente. Da mesma forma, no *MPSM*, as constantes de acoplamento unificam-se em uma

escala de energia próxima de 10^{15} GeV , chamada de escala de unificação, denotada por M_X ou M_{GUT} . Porém, apesar de trazer uma nova maneira de tratar problemas antes insolúveis, teorias supersimétricas possuem alguns aspectos que ainda são objeto de estudo e que ainda não estão totalmente claros.

Desta forma, do ponto de vista fenomenológico, o estudo da *SUSY* e sua possível descoberta trará uma compreensão muito maior das interações entre as partículas fundamentais (as já conhecidas e as que “ainda iremos descobrir”) e os mecanismos que regem suas propriedades, o que de fato proporcionará um conhecimento além daquele adquirido com o *MP*. Por outro lado, do ponto de vista teórico, a *SUSY* vêm proporcionando, já a algumas décadas, um profundo avanço na compreensão de alguns aspectos em *TQC*, além de ser um aspecto fundamental da teoria de supercordas, que é a principal candidata à “teoria de tudo”, capaz de unificar a mecânica quântica e a teoria da relatividade geral.

Em uma teoria com *SUSY* exata, as partículas e suas parceiras supersimétricas são degeneradas em massa e, como comprovado por inúmeros experimentos, tal característica não é realizada na natureza pois, até o presente momento, nenhum superparceiro foi observado. Acredita-se que isto se deve ao fato destes serem muito massivos e inacessíveis com o nível de energia atingido nos experimentos atuais. Experimentos realizados até agora demonstram que o superparceiro do elétron, que tem massa de $0,511 \text{ MeV}$, deve ter uma massa pelo menos da ordem de 100 GeV e o superparceiro do glúon não massivo deve ter uma massa maior do que 200 GeV . Assim, a *SUSY* deve ser quebrada de alguma forma. A descoberta destas novas partículas é um dos principais objetivos do *LHC*.

Ao analisarmos especificamente o contexto de *TQC*, o estudo da *SUSY* trouxe importantes avanços na compreensão de aspectos relacionados à renormalizabilidade. Teorias supersimétricas possuem propriedades teóricas interessantes e que vêm sendo objeto de estudos há muitos anos. Uma propriedade fundamental no regime ultravioleta, que foi determinante para o desenvolvimento do *MPSM* e que está relacionada diretamente com a resolução do problema da hierarquia, é o fato de que teorias com *SUSY* exata não possuem divergências quadráticas nas correções radiativas [8].

Na construção de modelos supersimétricos mais realistas, é necessário que a *SUSY* seja quebrada, para que as partículas e seus respectivos parceiros supersimétricos tenham massas distintas. Existem modelos (*MPSM*, por exemplo) nos quais a *SUSY* é quebrada de maneira *soft*, isto é, conservando as propriedades ultravioletas da teoria com *SUSY* exata, porém sem quebra de simetria de gauge. Os parâmetros de quebra *soft* foram classificados por Girardello e Grisaru [9]: são essencialmente massas de gauginos (parceiros supersimétricos dos bósons de gauge), matrizes de massa para os escalares ou acoplamentos entre os escalares. Utilizando os conceitos de super-espço e supercampos [10, 11, 12], que é a maneira mais adequada e elegante de formular teorias supersimétricas, os parâmetros de quebra *soft* são descritos por inserções espúrias das variáveis de Grassmann anti-comutantes do super-espço, θ^2 e $\bar{\theta}^2$, na Lagrangiana.

As ferramentas fundamentais para estudar quebra de *SUSY* e correções radiativas em mo-

delos supersimétricos são a ação efetiva e o potencial efetivo. Estes podem ser diretamente calculados no super-espaço, através de diagramas de Feynman. Em teorias supersimétricas com um número $i = 1, 2, 3, \dots$ de supercampos quirais (Φ_i) , a ação efetiva é codificada em duas funções destes (e de seus conjugados $\bar{\Phi}_i$): o potencial de Kähler $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)$ e o superpotencial $W(\Phi_i)$ (e seu conjugado $\bar{W}(\bar{\Phi}_i)$). A função $W(\Phi_i)$ é holomórfica e, assim, altamente vinculada, o que é refletido em vários teoremas de não-renormalização para esta [13], trazendo resultados não perturbativos em alguns casos [14, 15]. Para a função $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)$, é somente requerido que esta seja real, ou seja, muito menos vinculada, de tal forma que receba correções em todas as ordens em teoria de perturbação. Justamente pelo fato de não haver teoremas de não-renormalização para esta função, é interessante entender suas correções quânticas em ordens mais altas e, além disso, o cálculo de $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)$ também é muito importante para aplicações fenomenológicas, pois contém a renormalização da função de onda dos supercampos quirais, e as massas físicas só podem ser determinadas quando o efeito da renormalização da função de onda é considerado.

Para modelos com quebra espontânea de $SUSY$, espera-se que as principais características da ação efetiva e do potencial efetivo permaneçam inalteradas, principalmente seu comportamento no regime ultravioleta (isto é, que a quebra seja realizada de maneira *soft*). Existem vários modelos que realizam esta quebra, alguns com uma ligação maior do que outros com a fenomenologia. Todavia, não existe um consenso de como a $SUSY$ deve ser realmente quebrada na natureza.

Em 1975, O’Raifeartaigh propôs um modelo [16], com três supercampos quirais, que realiza a quebra de $SUSY$. Este modelo tem uma relevante importância histórica, pois foi o primeiro modelo supersimétrico que implementou a quebra de $SUSY$ de maneira *soft*, porém, atualmente, os modelos que possuem maior relevância são generalizações do modelo de O’Raifeartaigh, onde as funções $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)$ e $W(\Phi_i)$ podem adquirir formas diversas. Tais modelos são muito estudados atualmente, devido ao fato de que possuem uma simetria global $U(1)$, chamada de simetria R , que, de acordo com o *teorema de Nelson-Seiberg* [17], possui um importante papel na quebra de $SUSY$. De acordo com este teorema, uma teoria com quebra de $SUSY$ deve possuir simetria R exata. Porém, na construção de modelos realistas, simetria R exata é problemática, pois proíbe massa para os gauginos. Logo, esta simetria deve ser quebrada. Por outro lado, a quebra espontânea também é problemática, pois produz um axion leve. Desta forma, a simetria R deve ser uma simetria aproximada, quebrada explicitamente, e isto está relacionado com um vácuo metaestável. Como o modelo de O’Raifeartaigh original não quebra esta simetria, modelos de O’Raifeartaigh generalizados que o fazem foram construídos [18, 19, 20]. Nestes modelos, a simetria R é quebrada pelo plano arbitrário da configuração de vácuo (*pseudomoduli*), que é carregado sob a simetria R , e adquire um *vev* não nulo através de correções radiativas ao potencial efetivo em um *loop* [21, 22].

Assim, o cálculo de correções radiativas para estes modelos é muito importante, pois possibilita o estudo de como as simetrias são quebradas e de como elas se relacionam. Desta forma, a obtenção de resultados não perturbativos, que expressam a contribuição total de uma deter-

minada classe de diagramas de Feynman para o potencial efetivo, é de extrema importância. Existem alguns métodos que realizam esta tarefa, chamados de métodos de ressonância, tanto para teorias supersimétricas quanto para teorias não supersimétricas. Os dois mais tradicionais são o cálculo diagramático e o cálculo funcional [1, 23].

Usualmente, o cálculo do potencial efetivo em teorias supersimétricas é feito utilizando-se campos componentes, porém, o objetivo principal desta tese é utilizar dois métodos de ressonância, conhecidos por *expansão delta linear* e *método de campo de fundo*, diretamente no super-espaço para calcular correções radiativas para o potencial efetivo no modelo de O’Raifeartaigh. Ao estudar este modelo, o primeiro e mais simples com quebra de $SUSY$, observamos alguns aspectos necessários para que ocorra a quebra e como estes são realizados, levando à quebra de degenerescência das massas dos parceiros supersimétricos. Desta forma, ao aplicarmos as técnicas desenvolvidas nesta tese ao modelo original de O’Raifeartaigh, sua aplicação em outros modelos do tipo O’Raifeartaigh generalizados é uma consequência direta.

Visando este objetivo, no capítulo 2 definimos o que é a $SUSY$ do ponto de vista de simetrias do espaço-tempo e depois introduzimos os conceitos de super-espaço e supercampos, mostrando como a descrição de teorias supersimétricas se torna muito mais clara e compacta ao se usar estes conceitos. No capítulo 3, mostramos como construir ações supersimétricas gerais e como quebrar a $SUSY$, através de um critério específico. Logo após, apresentamos o modelo de O’Raifeartaigh, que será objeto central desta tese. No capítulo 4, introduzimos os dois métodos de ressonância de nosso interesse: a *expansão delta linear* e o *método de campo de fundo*. No capítulo 5, adaptamos o primeiro destes métodos para o uso no super-espaço e, feito isto, mostramos como usá-lo para calcular o potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh. No capítulo 6, aplicamos o segundo método de ressonância para calcular uma contribuição de dois *loops* para o potencial efetivo deste modelo. Mostramos também como calcular as integrais no super-espaço e as integrais no espaço dos momentos que aparecem nos cálculos. No capítulo 7, aplicamos novamente a *expansão delta linear* para obter um resultado de dois *loops* que corrige o resultado obtido no capítulo 6. Para isto, devemos resolver uma equação numericamente. O capítulo 8 é dedicado às conclusões e perspectivas futuras. Finalmente, ao longo dos apêndices A até F, mostramos as notações, relações e resultados de integrais presentes ao longo da tese, além de uma breve exposição dos conceitos de ação efetiva e potencial efetivo.

Capítulo 2

Formalismo de *SUSY*

2.1 Uma breve história da *SUSY*

A idéia de *SUSY* remonta à década de 70, quando, por motivações diversas, uma nova simetria entre bósons e férmions foi proposta. A noção de uma transformação de simetria entre bósons e férmions surgiu primeiramente em 1971, em conexão com a teoria de cordas, que à época era estudada visando-se explicar certas ressonâncias provenientes de processos hadrônicos [24]. Porém, esta transformação de simetria ocorria na “folha mundo” bidimensional da corda, e não no espaço-tempo (3+1)-dimensional. A *SUSY* como uma simetria espaço-temporal foi proposta e formulada inicialmente como uma álgebra de Lie graduada, por Gol’fand e Likhtman, ainda em 1971 [4]. Dois anos mais tarde, em 1973, Volkov e Akulov propuseram uma realização não linear de *SUSY*, e também a idéia de quebra espontânea desta simetria [5]. Até então a idéia de *SUSY* não era dada muita importância pela comunidade de físicos, pois não se vislumbrava uma aplicação concreta desta em algum fenômeno natural. Foi só em 1974, com os trabalhos de Wess e Zumino [6] e de Salam e Strathdee [10], que desenvolveram teorias de campo supersimétricas, que a noção de *SUSY* passou a atrair a atenção da comunidade.

Dado que, a partir de então, a construção de teorias de campo supersimétricas era plausível, questões tais como: quais os tipos de modelos possíveis, qual a álgebra mais geral possível, quais suas representações, como construir modelos fenomenológicos com *SUSY*, etc, tornaram-se objeto de intensa pesquisa. Tais questões foram elucidadas em 1975 por um trabalho importantíssimo de Haag, Lopuszanski e Sohnius [25], do qual falaremos com mais detalhes na seção 2.2.

Com relação à importância da *SUSY* em *TQC*, muitos resultados importantes foram atingidos no estudo das propriedades mais convergentes no regime ultravioleta de teorias de campo supersimétricas, principalmente no que tange ao cancelamento de *loops* bosônicos e fermiônicos, o que levou à solução do problema da hierarquia. Em particular, alguns teoremas de não-renormalização de termos do superpotencial foram provados [10, 12, 13].

Posteriormente, o problema de como construir modelos fenomenológicos com *SUSY* tor-

nou-se tema central de pesquisa. Teorias supersimétricas, devido às representações da álgebra de *SUSY*, exigem que se tenha o mesmo número de graus de liberdade físicos bosônicos e fermiônicos e, além disso, que cada bóson e seu superparceiro fermiônico (e vice versa) possuam a mesma massa. Como isto não é observado na natureza, claramente a *SUSY* deve ser uma simetria fortemente quebrada. O estudo de como realizar esta quebra e de, a partir daí, construir modelos fenomenológicos que possam descrever a natureza, levou ao *MPSM* [26]. Daí em diante, a busca pelos superparceiros em experimentos ao redor de todo o mundo começou. Experimentos como LEP, TEVATRON e várias outras colaborações experimentais buscaram incessantemente durante décadas por algum sinal de algum processo supersimétrico. Até o presente momento, nenhum sinal de *SUSY* foi detectado. Não obstante, isto não é interpretado como um fracasso para a idéia de *SUSY*, e sim como um sinal de que os parceiros supersimétricos são muito massivos. Para testar este fato, o *LHC*, o maior acelerador já construído, trará um ganho em energia capaz de sondar de forma mais profunda as interações fundamentais e, assim, (espera-se) obter algum sinal de processos supersimétricos.

Com o exposto acima, observa-se que a história da *SUSY* foi (e ainda é) construída com o esforço de vários cientistas, através de uma evolução não linear, com tentativas, erros e acertos, e que, se pudesse ser resumida, talvez a melhor forma seria dizendo que esta é uma história de experimentais buscando provar uma idéia teórica bela, rica e profunda.

2.2 Álgebra de *SUSY*

Para começar o estudo realizado nesta tese, devemos antes de tudo definir o que é *SUSY*, como construir uma teoria supersimétrica e qual o seu conteúdo de campos. Para isto, notemos que, em 1967, Coleman e Mandula provaram o seguinte teorema [27]:

Teorema de Coleman-Mandula

A álgebra mais geral de simetria da matriz S em um processo entre partículas elementares contém os geradores de translação P_m , os geradores do grupo de Lorentz M_{mn} (álgebra de Poincaré) e um número finito de geradores de simetrias internas B_l , tal que

$$\begin{aligned} [P_m, B_l] &= 0, \\ [M_{mn}, B_l] &= 0, \\ [B_l, B_p] &= i c_{lpk} B_k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Este teorema é um resultado rigoroso referente à relação entre simetrias contínuas internas, representadas por B_l (simetrias de gauge, por exemplo), e as simetrias espaço-temporais, representadas por P_m e M_{mn} . A prova deste teorema foge do escopo desta tese e, para o leitor

interessado, o reportamos à referência original. Cabe aqui observar que este teorema tem como ponto de partida três suposições:

- (1) A matriz S é baseada em uma teoria quântica de campos relativística no espaço-tempo quadridimensional;
- (2) Existe um número finito de partículas distintas associado a estados de uma partícula com uma dada massa;
- (3) Existe um *gap* de energia entre o vácuo e os estados de uma partícula.

Notemos que este teorema é baseado em uma álgebra de Lie construída com relações de comutação entre os geradores.

Com já citado anteriormente, em 1975, Haag, Lopuszanski e Sohnius [25] estenderam a álgebra (2.1), relaxando uma das condições: eles generalizaram a noção de álgebra de Lie ao incluir anticomutadores. Estas novas álgebras são chamadas de superálgebras ou álgebras de Lie graduadas. Para isto, é necessário incluir um gerador da parte ímpar (anticomutante) da álgebra. Denotamos este gerador por Q_α (e seu conjugado $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$), onde $\alpha(\dot{\alpha}) = 1, 2$ é um índice espinorial (notação no apêndice A), e dizemos que ele é o **gerador de SUSY**, pois a atuação deste nos estados é definida por:

$$Q |\text{bóson}\rangle = |\text{férmion}\rangle \quad , \quad Q |\text{férmion}\rangle = |\text{bóson}\rangle \quad . \quad (2.2)$$

Desta forma, com este novo gerador espinorial e permitindo relações de anticomutação, além das de comutação, a nova álgebra do espaço-tempo é chamada de **álgebra de SUSY** (ou álgebra de super-Poincaré) e é dada por:

$$\begin{aligned} [P_m, P_n] &= 0 \quad , \\ [M_{mn}, P_r] &= i (\eta_{mr} P_n - \eta_{nr} P_m) \quad , \\ [M_{mn}, M_{rs}] &= i (\eta_{mr} M_{ns} - \eta_{ms} M_{nr} + \eta_{ns} M_{mr} - \eta_{nr} M_{ms}) \quad , \\ [P_m, Q_\alpha] &= 0 \quad , \\ [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= 0 \quad , \\ [M_{mn}, Q_\alpha] &= i (\sigma_{mn})_\alpha^\beta Q_\beta \quad , \\ [M_{mn}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= i (\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \quad , \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \quad , \\ \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 0 \quad , \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m \quad , \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde a matriz σ_{mn} é definida no apêndice A. Esta álgebra é válida para teorias com apenas um gerador de *SUSY* ($\mathcal{N}=1$), e sua extensão para teorias com um número $\mathcal{N}$ maior de supersimetrias é direta [28, 29].

Com estas definições, podemos enunciar agora o teorema de Haag, Lopuszanski e Sohnius:

Teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius

A álgebra mais geral de simetria da matriz S , consistente com as suposições do teorema de Coleman-Mandula, é formada pela álgebra de $SUSY$ e por um número finito de geradores de simetrias internas B_i , tal que os geradores pares (comutantes) sejam a soma direta dos geradores de Poincaré e dos geradores das simetrias internas.

Assim, este teorema não altera as relações de comutação (2.1), apenas estende a álgebra de Poincaré para a álgebra de super-Poincaré, pelo simples fato de adicionar à primeira geradores fermiônicos que obedecem a relações de anticomutação. Esta é a única extensão possível da álgebra de Poincaré que respeita as simetrias espaço-temporais fundamentais observadas nas interações entre as partículas elementares.

Observando a álgebra de $SUSY$ (2.3), vemos que o gerador de translação P_m comuta com os geradores de $SUSY$ Q_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. O operador de massa P^2 é um operador de Casimir e, portanto, as representações irredutíveis de (2.3) possuem massas iguais.

Introduzimos agora o operador de número fermiônico N_F , tal que $(-)^{N_F}$ possua autovalor $+1$ para estados bosônicos e -1 para estados fermiônicos. Temos que $(-)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-)^{N_F}$. Para uma representação de dimensão finita (tal que o traço esteja bem definido):

$$\begin{aligned} Tr [(-)^{N_F} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] &= Tr [(-)^{N_F} (Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} + \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha)] \\ &= Tr [-Q_\alpha (-)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}} + Q_\alpha (-)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\beta}}] \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Substituindo $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m$:

$$\begin{aligned} Tr [(-)^{N_F} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}] &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m Tr [(-)^{N_F} P_m] \\ &= 0 , \end{aligned}$$

ou seja, para um momento fixo não nulo:

$$Tr (-)^{N_F} = 0 , \quad (2.4)$$

isto é, representações da álgebra de $SUSY$ contêm o mesmo número de bósons e férmions.

Logo, a álgebra de $SUSY$ é uma extensão da álgebra de Poincaré, e suas representações possuem estados de mesma massa e com números iguais de bósons e férmions. A $SUSY$ então, é uma extensão das simetrias do espaço-tempo, e na próxima seção introduziremos uma forma elegante e compacta de representar a álgebra (2.3).

2.3 Super-espaço e supercampos

Para formular uma teoria de campos supersimétrica em (3+1)-dimensões, precisamos re-presentar a álgebra (2.3) em termos de campos. Mas, antes de fazê-lo, definiremos o conceito de

super-espaço. Pontos no super-espaço são da forma $z^M = (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, $\mu = 0, \dots, 3$, $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$, onde x^m representa as coordenadas usuais do espaço-tempo e θ^α e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ são variáveis de Grassmann (anticomutantes), que são interpretadas como espinores de Weyl de duas componentes. Este espaço é denotado por $\mathbb{R}^{4/4}$.

Os geradores da álgebra de *SUSY* podem ser escritos usando-se estas variáveis (notação definida no apêndice A):

$$\begin{aligned} P_m &= -i\partial_m ; \\ M_{mn} &= -i(x_m\partial_n - x_n\partial_m) ; \\ Q_\alpha &= \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m ; \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha \partial_m . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analisemos agora as transformações produzidas pelos geradores de *SUSY* em $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$. Uma transformação de *SUSY* é escrita em termos dos geradores Q , $\bar{Q}$ e do parâmetro fermiônico global ε como

$$\delta_S = \varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon Q + \bar{\varepsilon} \bar{Q} . \quad (2.6)$$

Atuando com δ_S nas variáveis do super-espaço:

$$\delta_S x^m = i(\theta \sigma^m \bar{\varepsilon} - \varepsilon \sigma^m \bar{\theta}) , \quad \delta_S \theta^\alpha = \varepsilon^\alpha , \quad \delta_S \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} . \quad (2.7)$$

Assim, vemos que a atuação de δ_S nas variáveis do super-espaço gera translações. Portanto, podemos dizer que o super-espaço é o espaço onde a *SUSY* é manifesta, isto é, onde as transformações de *SUSY* geram translações de forma natural. Isto está de acordo com o que havíamos visto anteriormente, pelo teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius, que a álgebra de *SUSY* é uma extensão da álgebra de Poincaré, isto é, é uma extensão da álgebra do espaço-tempo, só que em um espaço ampliado pelas variáveis de Grassmann θ e $\bar{\theta}$, chamado de super-espaço.

Devemos agora construir funções no super-espaço, ou seja, funções das variáveis $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$. Chamamos estas funções de **supercampos**, e veremos que estes são uma ferramenta importante na descrição de teorias supersimétricas.

O formalismo de supercampos [10, 11, 12] é uma forma clara e compacta de representar a álgebra de *SUSY*. Sua forma simples permite a construção de ações com *SUSY* manifesta, possibilita trabalhar com diagramas de Feynman no super-espaço - que é o ponto principal desta tese - e, para o modelo a ser estudado posteriormente, pode ser construído em termos de campos componentes (isto nem sempre é válido, como no caso de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, $D = 4$, por exemplo).

Supercampos são funções no super-espaço e são escritos como uma série de potências das variáveis $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$. Estaremos interessados particularmente em um tipo de supercampo chamado de supercampo escalar, que de forma mais geral pode ser escrito como (notação no apêndice A):

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\zeta}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) \\ &\quad + \theta \sigma^m \bar{\theta} v_m(x) + \theta^2 \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2 \theta \psi(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 d(x) , \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ e $d(x)$ são campos escalares, $v_m(x)$ é um campo vetorial, $\phi_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha(x)$ são espinores de Weyl de mão esquerda e $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}(x)$ e $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)$ são espinores de Weyl de mão direita. Notemos que, nesta expansão, potências maiores de θ e $\bar{\theta}$ são nulas, pois estes são espinores de duas componentes e $\theta^n = \bar{\theta}^n = 0$, para $n \geq 3$. Vemos então que o supercampo escalar acima condensa todos os campos em uma única função no super-espaço. Porém, esta representação é altamente redutível e para obter-se uma representação completamente irreduzível deve-se impor certos vínculos a (2.8).

2.3.1 Supercampos quirais

Antes de definir supercampo quiral, devemos definir derivada covariante no super-espaço. O operador $\partial_m = ip_m$ comuta com os operadores Q e $\bar{Q}$, mas, as derivadas espinoriais ∂_α e $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}$ não o fazem. Assim, estas não possuem transformações covariantes por *SUSY*. Precisamos então definir um operador derivada que se transforme de forma covariante por *SUSY*. Este operador é dado por:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (2.9)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m. \quad (2.10)$$

Sua álgebra é:

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, Q_\beta\} &= \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m P_m, \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

No apêndice C, mostramos várias identidades envolvendo as derivadas covariantes, que serão muito úteis posteriormente.

Um **supercampo quiral** Φ é obtido através do seguinte vínculo covariante:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0. \quad (2.12)$$

Supercampos que satisfazem este vínculo são representações irreduzíveis da álgebra de *SUSY*. De maneira análoga, um **supercampo antiquiral** $\bar{\Phi}$ é obtido através do vínculo

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0, \quad (2.13)$$

e também é uma representação irreduzível da álgebra de *SUSY*. Devemos então descobrir a forma mais geral de escrever os supercampos que satisfazem (2.12) e (2.13). Para isto, definiremos novas coordenadas bosônicas:

$$\begin{aligned} y^m &= x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \\ \bar{y}^m &= x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^m &= (-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n)(x^m + i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^m \bar{\theta}^{\dot{\beta}}) = 0, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha &= (-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^m \partial_m) \theta^\alpha = 0.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Logo, qualquer função de y^m e θ^α (mas não de $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$) satisfaz

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(y, \theta) = 0, \quad (2.16)$$

e esta é a solução mais geral para o vínculo (2.12). Assim, a forma mais geral de escrever uma função das variáveis y^m e θ^α é

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y), \quad (2.17)$$

onde $\varphi(y)$ e $F(y)$ são campos escalares complexos e $\psi_\alpha(y)$ é um espinor de Weyl de mão esquerda. Comparando esta expressão com (2.8), nota-se que reduzimos consideravelmente o número de campos componentes necessárias para escrever um supercampo quiral. O espaço cujas coordenadas são (y^m, θ^α) é chamado de subespaço quiral e denotado por $\mathbb{C}^{4/2}$ e, assim, supercampos quirais podem ser escritos como funções das variáveis deste espaço. A expressão completa em termos das variáveis de $\mathbb{R}^{4/4}$ é dada por

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m} \Phi(x, \theta) \\ &= \Phi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta) \\ &= \varphi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\varphi(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta^2 F(x).\end{aligned}\quad (2.18)$$

De maneira análoga, um supercampo antiquiral que satisfaz (2.13) pode ser escrito como uma função de $\bar{y}^m$ e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ (mas não de θ^α), de tal forma que

$$D_\alpha \bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) = 0, \quad (2.19)$$

e, a forma mais geral de escrevê-lo é

$$\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) = \bar{\varphi}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + \bar{\theta}^2 \bar{F}(\bar{y}). \quad (2.20)$$

O espaço cujas coordenadas são $(\bar{y}^m, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ é chamado de subespaço antiquiral e denotado por $\mathbb{C}^{*4/2}$ e, assim, supercampos antiquirais podem ser escritos como funções das variáveis deste espaço. A expressão completa em termos das variáveis de $\mathbb{R}^{4/4}$ é dada por

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m} \bar{\Phi}(x, \bar{\theta}) \\ &= \bar{\Phi}(x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) \\ &= \bar{\varphi}(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\bar{\varphi}(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\bar{\varphi}(x) + \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}^2 \bar{F}(x).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Utilizando a representação em $\mathbb{C}^{4/2}$ para o supercampo quiral é fácil provar que qualquer produto de supercampos quirais também é um supercampo quiral e que, se $\Phi(y, \theta)$ é um supercampo quiral, então $\bar{\Phi}\Phi$ e $\Phi + \bar{\Phi}$ não o são (as mesmas considerações são válidas para supercampos antiquirais). Estes fatos serão fundamentais quando formos construir ações para os supercampos (anti)quirais no super-espaço.

Podemos escrever as derivadas covariantes em função das coordenadas de $\mathbb{C}^{4/2}$ e de $\mathbb{C}^{*4/2}$:

$$\text{Em } \mathbb{C}^{4/2} : D_\alpha = \partial_\alpha + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}; \quad (2.22)$$

$$\text{Em } \mathbb{C}^{*4/2} : D_\alpha = \partial_\alpha, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - 2i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (2.23)$$

e, da mesma forma, os geradores de Q e $\bar{Q}$ em $\mathbb{C}^{4/2}$:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - 2i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \theta_\beta \frac{\partial}{\partial y^m}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, uma transformação de *SUSY* da forma (2.6) aplicada a um supercampo quiral resulta em

$$\begin{aligned} \delta_S \Phi(y, \theta) &= \delta_S \left[\varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y) \right] \\ &= \left(\varepsilon^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + \bar{\varepsilon}_{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\beta}}} - 2i\bar{\varepsilon}_{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} \theta_\beta \frac{\partial}{\partial y^m} \right) \left[\varphi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F \right] \\ &= \sqrt{2}\varepsilon\psi + (-2i\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m \partial_m \varphi + 2\varepsilon F) \theta + \sqrt{2}i\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m \theta^2 \partial_m \psi \\ &= \sqrt{2}\varepsilon\psi + \theta (2i\sigma^m \bar{\varepsilon} \partial_m \varphi + 2\varepsilon F) + \sqrt{2}i\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m \theta^2 \partial_m \psi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mas, como δ_S é um operador linear:

$$\delta_S \Phi = (\delta_S \varphi) + \sqrt{2}\theta(\delta_S \psi) + \theta\theta(\delta_S F). \quad (2.26)$$

Logo, igualando as potências em θ em (2.25) e (2.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta_S \varphi &= \sqrt{2}\varepsilon\psi, \\ \delta_S \psi &= i\sqrt{2}(\sigma^m \bar{\varepsilon}) \partial_m \varphi + \sqrt{2}\varepsilon F, \\ \delta_S F &= i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m \partial_m \psi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

As equações acima realizam as relações (2.2) em termos de campos. Podemos ver que, através da ação de δ_S , os campos bosônicos φ e F são levados ao campo fermiônico ψ e este, por sua vez, é levado a uma combinação dos outros dois. Logo, usando o formalismo de supercampos, realizamos de maneira compacta e elegante a álgebra de *SUSY* em termos de campos, onde bósons são transformados em férmions e vice versa.

2.4 Integração no super-espaço

Até aqui, mostramos como a *SUSY* estende as simetrias espaço-temporais e como a representamos em termos de campos usando o formalismo de supercampos. Porém, nada foi dito a respeito de como construir modelos supersimétricos, isto é, como construir uma teoria de campos no super-espaço partindo de um princípio fundamental, a ação. Nesta seção, mostraremos como calcular integrais em $\mathbb{R}^{4/4}$, $\mathbb{C}^{4/2}$ e $\mathbb{C}^{*4/2}$ e, a partir daí, construiremos a ação mais simples possível, descrita pelo modelo supersimétrico mais simples possível em $D = 4$, o modelo de Wess-Zumino [30]. Mais adiante, no capítulo 3, mostraremos como construir ações mais gerais e, a partir destas, como construir modelos que realizam a quebra de *SUSY*, em particular o modelo no qual estaremos interessados, o modelo de O’Raifeartaigh. Algumas propriedades e resultados referentes ao tipo de integração que definiremos abaixo são mostrados no apêndice B.

Começamos definindo a integral de uma função em $\mathbb{C}^{4/2}$ e $\mathbb{C}^{*4/2}$, ou seja, uma integral sobre as variáveis (anti)quirais do super-espaço:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta f(y, \theta) &= \int d^2\theta [A(y) + \theta B(y) + \theta^2 F(y)] \equiv F(y) , \\ \int d^2\bar{\theta} \bar{f}(\bar{y}, \bar{\theta}) &= \int d^2\bar{\theta} [\bar{A}(\bar{y}) + \bar{\theta} \bar{B}(\bar{y}) + \bar{\theta}^2 \bar{F}(\bar{y})] \equiv \bar{F}(\bar{y}) ,\end{aligned}\quad (2.28)$$

onde (apêndice B):

$$\begin{aligned}d^2\theta &= -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta_\alpha , \\ d^2\bar{\theta} &= -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} .\end{aligned}\quad (2.29)$$

Podemos também escrever os resultados das integrais acima de outra forma:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta f &= \frac{1}{4} [(\partial^\alpha \partial_\alpha) f] |_{\theta=\bar{\theta}=0} , \\ \int d^2\bar{\theta} \bar{f} &= \frac{1}{4} [(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) \bar{f}] |_{\theta=\bar{\theta}=0} .\end{aligned}\quad (2.30)$$

Assim, vemos que a integração de uma função na representação (anti)quiral seleciona a componente que multiplica $(\bar{\theta}^2) \theta^2$. A prova de que se f é quiral ($\bar{D}_{\dot{\alpha}} f = 0$), então $\int d^4x \int d^2\theta f$ é supersimétrica, é feita no apêndice B, e este resultado é de fundamental importância na construção de ações que sejam manifestamente supersimétricas.

Definimos agora a integral de uma função em $\mathbb{R}^{4/4}$, ou seja, uma integral sobre todas as variáveis do super-espaço:

$$\int d^4\theta g(x, \theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta [A(x) + \theta B(x) + \dots + \theta^2 \bar{\theta}^2 D(x)] \equiv D(x) , \quad (2.31)$$

onde

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} = \frac{1}{16} d\theta^\alpha d\theta_\alpha d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} . \quad (2.32)$$

Podemos escrever o resultado de (2.31) como

$$\int d^4\theta g = \frac{1}{16} \int d\theta^\alpha d\theta_\alpha d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} g = \frac{1}{16} [(\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) g] |_{\theta=\bar{\theta}=0}. \quad (2.33)$$

Desta forma, vemos que a integração de uma função com respeito às variáveis de $\mathbb{R}^{4/4}$ seleciona a componente que multiplica $\theta^2 \bar{\theta}^2$. Notemos também que, das eqs. (2.30) e (2.33), integração e derivação possuem o mesmo papel ao atuarem em funções no super-espaço.

De posse destas relações, podemos agora construir nosso primeiro modelo supersimétrico, a partir de uma ação no super-espaço.

2.4.1 O modelo de Wess-Zumino

Como citado anteriormente, qualquer produto de supercampos (anti)quirais $(\bar{\Phi}) \Phi$ também é um supercampo (anti)quiral, porém, o produto $\bar{\Phi}\Phi$ não o é. Logo, o produto de supercampos (anti)quirais é uma função no subespaço $(\mathbb{C}^{*4/2}) \mathbb{C}^{4/2}$, mas o produto $\bar{\Phi}\Phi$ deve ser uma função em todo o super-espaço $\mathbb{R}^{4/4}$. Assim, com o exposto acima, a integração de qualquer produto de supercampos (anti)quirais deve ser realizada sobre $(d^2\bar{\theta}) d^2\theta$ e a integração de $\bar{\Phi}\Phi$ deve ser realizada sobre $d^4\theta$. É fácil mostrar que

$$\begin{aligned} S_L &= \int d^4x \int d^2\theta \xi \Phi + \int d^4x \int d^2\bar{\theta} \xi \bar{\Phi} \\ &= \xi \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} [(\partial^\alpha \partial_\alpha) \Phi] |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \frac{1}{4} [(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) \bar{\Phi}] |_{\theta=\bar{\theta}=0} \right\} \\ &= \xi \int d^4x (F + \bar{F}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

gera termos lineares,

$$\begin{aligned} S_K &= \int d^4x \int d^4\theta \bar{\Phi}\Phi \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{16} [(\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) \bar{\Phi}\Phi] |_{\theta=\bar{\theta}=0} \right\} \\ &= \int d^4x (-\partial_m \varphi \partial^m \bar{\varphi} - i\psi \sigma^m \partial_m \bar{\psi} + F\bar{F}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

gera termos cinéticos,

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{m}{2} \int d^4x \int d^2\theta \Phi^2 + \frac{m}{2} \int d^4x \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}^2 \\ &= \frac{m}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} [(\partial^\alpha \partial_\alpha) \Phi^2] |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \frac{1}{4} [(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) \bar{\Phi}^2] |_{\theta=\bar{\theta}=0} \right\} \\ &= m \int d^4x \left(\varphi F + \bar{\varphi} \bar{F} - \frac{1}{2} \psi \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \bar{\psi} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

gera termos de massa e

$$S_Y = \frac{g}{3!} \int d^4x \int d^2\theta \Phi^3 + \frac{g}{3!} \int d^4x \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}^3$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g}{3!} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} [(\partial^\alpha \partial_\alpha) \Phi^3] |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \frac{1}{4} [(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) \bar{\Phi}^3] |_{\theta=\bar{\theta}=0} \right\} \\
&= \frac{g}{2} \int d^4x (\varphi^2 F + \bar{\varphi}^2 \bar{F} - \psi\psi\varphi - \bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\varphi})
\end{aligned} \tag{2.37}$$

gera termos de interação de Yukawa. Nas expressões acima, ξ , m e g são constantes reais não nulas.

Fazendo $S = S_L + S_K + S_M + S_Y$ e calculando as equações de movimento para F e $\bar{F}$, obtemos:

$$F = -\xi - m\bar{\varphi} - \frac{g}{2}\bar{\varphi}^2, \quad \bar{F} = -\xi - m\varphi - \frac{g}{2}\varphi^2. \tag{2.38}$$

Daí, vemos que as equações de movimento para F e $\bar{F}$ são algébricas, isto é, os campos escalares F e $\bar{F}$ não possuem dinâmica (não são campos físicos, ou seja, não introduzem novos graus de liberdade) e, substituindo as equações (2.38) em S , obteremos uma ação para o bóson φ e o férmion ψ . O campo F é chamado de **campo auxiliar**, e é introduzido no supercampo Φ para igualar os graus de liberdade bosônicos (2 : φ , F) e fermiônicos (2 : ψ_α , $\alpha = 1, 2$), além de ser necessário para que a álgebra feche fora da camada de massa. O campo auxiliar F terá um papel importantíssimo em modelos com quebra de *SUSY*, como veremos no próximo capítulo.

Desta forma, a ação no super-espaço

$$S = \int d^8z \bar{\Phi}\Phi + \left[\int d^6z \left(\xi\Phi + \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3!}\Phi^3 \right) + h.c. \right], \tag{2.39}$$

com $d^8z = d^4x d^4\theta$, $d^6z = d^4x d^2\theta$ e $d^6\bar{z} = d^4x d^2\bar{\theta}$, gera uma ação para um modelo com um campo escalar complexo φ e um campo fermiônico ψ , que são os campos componentes físicos do supercampo Φ e, lembrando das transformações (2.27), dizemos que estes dois campos são **parceiros supersimétricos**. Nesta expressão e ao longo do texto *h.c.* significa hermitiano conjugado e, em termos dos campos componentes, a ação (2.39) é dada pela soma das expressões (2.34)-(2.37), com F e $\bar{F}$ substituídos por suas equações de movimento (2.38). Este modelo, com a ação dada por (2.39), é chamado de **modelo de Wess-Zumino**, e é o modelo supersimétrico mais simples possível em $D = 4$.

Vemos assim como de fato o formalismo de supercampos é muito útil na construção de teorias supersimétricas, pois permite escrever de forma compacta (eq. (2.39)) uma ação que em componentes possui uma forma bem mais extensa. Além disso, a ação (2.39) é manifestamente supersimétrica e, como veremos, generalizações desta ação permitem que tratemos modelos mais complexos quanticamente, obtendo da ação propagadores e regras de Feynman para as interações, o que torna possível trabalhar com gráficos de Feynman diretamente no super-espaço para calcular correções quânticas. Veremos como fazer isso nos capítulos subsequentes.

Capítulo 3

Aspectos gerais de quebra de *SUSY*

No capítulo 2, mostramos como descrever teorias supersimétricas em termos de supercampos, construindo uma ação no super-espaço. O modelo que usamos para mostrar isto, o modelo de Wess-Zumino, possui uma ação com *SUSY* manifesta e, de fato, esta simetria não é quebrada, de forma que os campos φ e ψ possuem a mesma massa m . Todavia, conforme dito na introdução desta tese, um modelo supersimétrico que busque descrever a natureza, deve ter *SUSY* quebrada, fazendo com que a degenerescência das massas dos superparceiros seja quebrada. Neste capítulo, mostraremos um critério para que isto ocorra, partindo da álgebra de *SUSY*, e de como realizá-lo usando-se os campos da teoria. Porém, antes disto, vamos mostrar como construir ações supersimétricas mais gerais, usando o que foi estudado até agora.

3.1 Ações supersimétricas

Em nível clássico, não há restrições quanto à forma da ação no super-espaço. Porém, quanticamente, a teoria só será renormalizável se sua ação tiver termos que sejam no máximo um polinômio de terceiro grau nos supercampos. Isto é fácil de ser observado, pois as dimensões canônicas de massa dos elementos que aparecem na ação são

$$\begin{aligned} [d^4 x] &= -4 , \\ [d^2 \theta] = [d^2 \bar{\theta}] &= 1 , \\ [d^8 z] &= -2 , \\ [d^6 z] = [d^6 \bar{z}] &= -3 , \\ [\Phi] = [\bar{\Phi}] &= 1 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim, da ação do modelo de Wess-Zumino (2.39), por exemplo, vemos que as dimensões de massa das constantes que multiplicam os termos linear, quadrático e trilinear, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} [\xi] &= 2 , \\ [m] &= 1 , \end{aligned}$$

$$[g] = 0. \quad (3.2)$$

Se tivéssemos termos com grau maior do que 3 nos supercampos, suas constantes multiplicativas deveriam ter dimensão de massa negativa, o que tornaria a teoria não renormalizável. Desta forma, a ação renormalizável mais geral possível com um número $i = 1, 2, 3, \dots$ de supercampos quirais é dada por [28, 29, 31]:

$$\begin{aligned} S &= \int d^8z K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i) + \int d^6z W(\Phi_i) + \int d^6\bar{z} \bar{W}(\bar{\Phi}_i) \\ &= \int d^8z \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left[\int d^6z \left(\xi_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) + h.c. \right] \\ &= S_{kin} + S_{int}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nesta expressão, a função $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i) = \bar{\Phi}_i \Phi_i$ é chamada de **potencial de Kähler**, e o único vínculo imposto sobre este é que seja real; a função $W(\Phi_i) = \xi_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$ é chamada de **superpotencial**, e possui o vínculo de ser holomórfica, ou seja, é uma função apenas das variáveis de $\mathbb{C}^{4/2}$. No modelo de Wess-Zumino, onde só há um supercampo Φ : $K(\Phi, \bar{\Phi}) = \bar{\Phi} \Phi$ e $W(\Phi) = \xi \Phi + \frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{1}{3!} g \Phi^3$. Note que é o superpotencial que dita a forma possível da ação e, além disso, como veremos, esta função está profundamente relacionada com os tipos de correções quânticas possíveis, devido à sua natureza holomórfica. Em termos dos campos componentes, a ação acima é

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left\{ i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i - \bar{\varphi}_i \square \varphi_i + \bar{F}_i F_i \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\xi_k + m_{ik} \varphi_i + \frac{1}{2} g_{ijk} \varphi_i \varphi_j \right) F_k - \frac{1}{2} (m_{ij} + g_{ijk} \varphi_k) \psi_i \psi_j + h.c. \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esta ação é invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} \delta_S \varphi_i &= \sqrt{2} \varepsilon \psi_i, \\ \delta_S \psi_i &= i \sqrt{2} (\sigma^m \bar{\varepsilon}) \partial_m \varphi_i + \sqrt{2} \varepsilon F_i, \\ \delta_S F_i &= i \sqrt{2} \bar{\varepsilon} \bar{\sigma}^m \partial_m \psi_i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

o que está de acordo com (2.27). Logo, ambas as ações, (3.3) e (3.4), são invariantes por transformações de *SUSY*, porém, novamente salientamos a forma muito mais condensada e elegante, além de manifestamente supersimétrica, da primeira.

Para tornar o estudo das características do modelo mais fácil, definimos:

$$\begin{aligned} W_i(\varphi) &\equiv \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi_i} = \xi_i + m_{ij} \varphi_j + \frac{1}{2} g_{ijk} \varphi_j \varphi_k, \\ W_{ij}(\varphi) &\equiv \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = m_{ij} + g_{ijk} \varphi_k, \\ W_{ijk}(\varphi) &\equiv \frac{\partial^3 W(\varphi)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j \partial \varphi_k} = g_{ijk}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

de tal forma que a ação em componentes possa ser escrita como

$$S = \int d^4x \left\{ i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i - \bar{\varphi}_i \square \varphi_i + \bar{F}_i F_i + \left[W_k(\varphi) F_k - \frac{1}{2} W_{ij}(\varphi) \psi_i \psi_j + h.c. \right] \right\} . \quad (3.7)$$

Como vimos anteriormente, os campos auxiliares podem ser eliminados através de suas equações de movimento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{F}_i} = 0 \implies F_i = -\bar{W}_i(\bar{\varphi}) , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = 0 \implies \bar{F}_i = -W_i(\varphi) . \quad (3.8)$$

Como esperado, as equações de movimento para F e $\bar{F}$ são equações algébricas, o que mostra que estes campos não possuem dinâmica. Substituindo (3.8) em (3.7):

$$S = \int d^4x \left\{ i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i - \bar{\varphi}_i \square \varphi_i - \frac{1}{2} [W_{ij}(\varphi) \psi_i \psi_j + h.c.] - V(\varphi, \bar{\varphi}) \right\} , \quad (3.9)$$

onde a função dos campos φ e $\bar{\varphi}$,

$$V(\varphi, \bar{\varphi}) = W_i(\varphi) \bar{W}_i(\bar{\varphi}) = \bar{F}_i F_i = \left| \xi_i + m_{ij} \varphi_j + \frac{1}{2} g_{ijk} \varphi_i \varphi_j \right|^2 , \quad (3.10)$$

é chamada de **potencial escalar**. Notemos que a função $W_{ij}(\varphi) = m_{ij} + g_{ijk} \varphi_k$ contém tanto os termos de massa fermiônicos quanto os termos de interação de Yukawa, de tal forma que podemos escrever:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{1}{2} [W_{ij}(\varphi) \psi_i \psi_j + \bar{W}_{ij}(\bar{\varphi}) \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j] . \quad (3.11)$$

Assim, temos uma maneira fácil de analisar os termos de massa fermiônicos. As equações de movimento para ψ e $\bar{\psi}$ são:

$$\begin{cases} i\sigma^m \partial_m \bar{\psi}_i - W_{ij}(\varphi) \psi_j = 0 , \\ i\bar{\sigma}^m \partial_m \psi_i - \bar{W}_{ij}(\bar{\varphi}) \bar{\psi}_j = 0 . \end{cases}$$

Daí, vemos que a matriz de massa fermiônica é

$$(M_F)_{ij} = W_{ij}(\langle \varphi \rangle) , \quad (3.12)$$

avaliada no *vev* do campo escalar φ .

Para o setor bosônico, definimos

$$\begin{aligned} V_{ij} &\equiv \frac{\partial^2 V(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = W_{ijk}(\varphi) W_k(\varphi) = -g_{ijk} F_k , \\ V_j^i &\equiv \frac{\partial^2 V(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}_i \partial \varphi_j} = \bar{W}_{jk}(\bar{\varphi}) W_{ki}(\varphi) , \\ V_i{}^j &\equiv \frac{\partial^2 V(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_i \partial \bar{\varphi}_j} = W_{ik}(\varphi) \bar{W}_{kj}(\bar{\varphi}) , \\ V^{ij} &\equiv \frac{\partial^2 V(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}_i \partial \bar{\varphi}_j} = \bar{W}_{ik}(\bar{\varphi}) \bar{W}_{kj}(\bar{\varphi}) = -g_{ijk} \bar{F}_k , \end{aligned} \quad (3.13)$$

de tal forma que o termo de massa para os bósons possa ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MB} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_i & \varphi_i \end{pmatrix} (M_s^2)_{ij} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \bar{\varphi}_j \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_i & \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_j^i & V^{ij} \\ V_{ij} & V_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \bar{\varphi}_j \end{pmatrix} .\end{aligned}\quad (3.14)$$

Daí, vemos que a matriz de massa bosônica é

$$(M_s^2)_{ij} = \begin{pmatrix} V_j^i & V^{ij} \\ V_{ij} & V_i^j \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=\langle\varphi\rangle} = \begin{pmatrix} \bar{W}_{jk}(\langle\bar{\varphi}\rangle)W_{ki}(\langle\varphi\rangle) & \bar{W}_{ijk}(\langle\bar{\varphi}\rangle)\bar{W}_k(\langle\bar{\varphi}\rangle) \\ W_{ijk}(\langle\varphi\rangle)W_k(\langle\varphi\rangle) & W_{ik}(\langle\varphi\rangle)\bar{W}_{kj}(\langle\bar{\varphi}\rangle) \end{pmatrix} , \quad (3.15)$$

avaliada no *vev* do campo escalar φ .

Sendo agora as massas dos escalares denotadas por m_0 e as massas dos espinores denotadas por $m_{1/2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum m_0^2 = Tr(M_s^2)_{ii} &= V_i^i(\langle\varphi\rangle) + V_i^i(\langle\varphi\rangle) \\ &= \bar{W}_{ik}(\langle\bar{\varphi}\rangle)W_{ki}(\langle\varphi\rangle) + W_{ik}(\langle\varphi\rangle)\bar{W}_{ki}(\langle\bar{\varphi}\rangle) \\ &= 2 \sum m_{1/2}^2 .\end{aligned}\quad (3.16)$$

Esta igualdade demonstra uma importante relação presente em teorias supersimétricas, que é conhecida por regra do supertraço, e dada por:

Regra do supertraço

$$sTr M^2 = \sum_{J=0}^{1/2} (-1)^{2J} (2J+1) m_J^2 = 0 . \quad (3.17)$$

Esta regra mostra que o traço graduado, tendo o spin J como peso, do quadrado da matriz de massa, tomado sobre todos os supermultipletos quirais, é nulo. Este resultado é muito forte, pois é válido, em nível de árvore, mesmo para teorias com quebra espontânea de *SUSY*. Para uma teoria com *SUSY* exata, todos os membros de um supermultiplete são degenerados em massa, o que não ocorre quando esta simetria é quebrada, o que de fato é o que desejamos que aconteça. Veremos adiante como a análise feita acima se aplica para o modelo de O’Raifeartaigh, com quebra espontânea de *SUSY*, mas, antes, mostraremos um critério para que esta seja quebrada.

3.2 Critério para quebra de *SUSY*

Iremos agora, finalmente, estabelecer um critério para quebra de *SUSY*. Da relação de anticomutação $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m$, proveniente da álgebra de *SUSY* (2.3), temos, multiplicando por $\bar{\sigma}^{n\dot{\beta}\alpha}$, que:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \bar{\sigma}^{n\dot{\beta}\alpha} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\sigma}^{n\dot{\beta}\alpha} P_m = 2Tr[\sigma^m \bar{\sigma}^n] P_m = -4P^n ,$$

onde usamos a relação (A.38). Para $n = 0$:

$$-4P^0 = -4H = \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \bar{\sigma}^{0\dot{\beta}\alpha} ,$$

onde H é a Hamiltoniana da teoria. Assim, das relações para $\bar{\sigma}^0$ dadas no apêndice A:

$$H = \frac{1}{4} (Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2) . \quad (3.18)$$

Qualquer estado de uma teoria que é invariante sob uma dada simetria é aniquilado pelos geradores desta simetria. Particularmente, se o estado fundamental (vácuo) $|0\rangle$ é supersimétrico, ele é aniquilado pelos geradores de *SUSY* Q e $\bar{Q}$, ou seja,

$$\begin{cases} Q_\alpha |0\rangle = 0 \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0 \end{cases} \implies \delta_S |0\rangle = (\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) |0\rangle = 0 . \quad (3.19)$$

Em geral, para um autoestado $|\Omega\rangle$ da Hamiltoniana, temos, de (3.18), que;

$$\frac{1}{4} \langle \Omega | (Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2) | \Omega \rangle = \langle \Omega | H | \Omega \rangle = E , \quad (3.20)$$

ou seja, o espectro da Hamiltoniana é semi positivo definido. Concluimos, então, que a energia de um estado de vácuo supersimétrico deve ser zero. Por outro lado, se a *SUSY* for espontaneamente quebrada, a energia do vácuo é positiva definida. Portanto:

$$\begin{aligned} \langle 0 | H | 0 \rangle = 0 & : \text{ *SUSY* exata ;} \\ \langle 0 | H | 0 \rangle > 0 & : \text{ *SUSY* quebrada .} \end{aligned}$$

Desta forma, temos um critério para quebra de *SUSY* baseado apenas na relação de anticomutação dos geradores desta simetria. Mas, necessitamos de um critério que reflita esta quebra em termos dos campos da teoria, pois nosso objetivo é construir teorias de campo supersimétricas. Mostraremos na próxima seção como fazer isto.

3.3 Quebra de *SUSY* pelo termo F

Para uma teoria supersimétrica com ação mais geral possível, apresentada na seção 3.1, a configuração de vácuo físico corresponde ao mínimo do potencial escalar $V(\varphi, \bar{\varphi})$ e, se o vácuo for supersimétrico, ele corresponde ao mínimo global com valor nulo. A *SUSY* é espontaneamente quebrada se e somente se um dos geradores Q_α , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ não aniquilar o vácuo, forçando-o a ter energia positiva. Em termos dos campos da teoria, a quebra espontânea de *SUSY* ocorre devido a algum campo da teoria que possui *vev* não invariante sob transformações de *SUSY*:

$$\begin{aligned} \delta_S \langle \varphi_i \rangle &= \sqrt{2} \varepsilon \langle \psi_i \rangle \neq 0 , \text{ ou} \\ \delta_S \langle \psi_i \rangle &= i\sqrt{2} (\sigma^m \bar{\varepsilon}) \partial_m \langle \varphi_i \rangle + \sqrt{2} \varepsilon \langle F_i \rangle \neq 0 , \text{ ou} \\ \delta_S \langle F_i \rangle &= i\sqrt{2} \bar{\varepsilon} \sigma^m \partial_m \langle \psi_i \rangle \neq 0 . \end{aligned}$$

Porém, como o estado de vácuo deve ser invariante por transformações de Poincaré (não possui direção privilegiada e possui quadrimomento nulo), a única das relações acima que obedece a esta invariância é

$$\delta_S \langle 0 | \psi_i | 0 \rangle = \sqrt{2}\varepsilon \langle 0 | F_i | 0 \rangle \neq 0 . \quad (3.21)$$

Logo, podemos estabelecer o seguinte critério para quebra espontânea de *SUSY*:

Critério para quebra espontânea de *SUSY*

$$\langle 0 | F_i | 0 \rangle = \Lambda_S^2 \neq 0 , \quad \Lambda_S: \text{escala de quebra de } SUSY . \quad (3.22)$$

A escala de quebra de *SUSY* Λ_S é muito importante quando se deseja construir modelos supersimétricos fenomenológicos. Como F possui dimensão de massa 2, Λ_S é identificada como uma escala de massa (energia).

Com este critério, notamos que, como $V(\varphi, \bar{\varphi}) = \bar{F}_i F_i$, configurações nas quais $F_i = 0, \forall i$, correspondem ao mínimo absoluto do potencial. Tais configurações ($\langle F_i \rangle = 0$) definem o estado de vácuo supersimétrico. Se não existirem soluções para $F_i = 0, \forall i$, **a *SUSY* é espontaneamente quebrada**. Este tipo de quebra espontânea de *SUSY* é chamado de **quebra pelo termo F** ou **mecanismo de O’Raifeartaigh** [16]. Resumindo:

- A condição necessária e suficiente para a quebra espontânea de *SUSY* é que os geradores Q e $\bar{Q}$ não aniquilem o vácuo;
- A energia do vácuo é sempre positiva após a quebra;
- A quebra pelo termo F ocorre quando este campo adquire um *vev* não nulo.

O próximo passo será analisar como a quebra espontânea de *SUSY* afeta um modelo com ação manifestamente supersimétrica. Faremos isso na próxima seção, onde introduzimos o modelo central desta tese, o modelo de O’Raifeartaigh.

3.4 O modelo de O’Raifeartaigh

Iremos agora apresentar um modelo que realiza a quebra espontânea de *SUSY*. Tal modelo, o modelo de O’Raifeartaigh, é uma teoria de campo supersimétrica construída com supercampos quirais. Na ref. [16], O’Raifeartaigh demonstrou que são necessários pelo menos três supercampos quirais diferentes para a obtenção de um modelo que forneça a quebra espontânea de *SUSY*. Aqui, denotaremos estes três supercampos por Φ_0, Φ_1 e Φ_2 , de tal forma que

$$\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m} \left(\varphi_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta^2 F_i(y) \right) , \quad i = 0, 1, 2 . \quad (3.23)$$

O modelo de O’Raifeartaigh é caracterizado pelo potencial de Kähler canônico, isto é, $K(\Phi_i, \bar{\Phi}_i) = \bar{\Phi}_i \Phi_i = \bar{\Phi}_0 \Phi_0 + \bar{\Phi}_1 \Phi_1 + \bar{\Phi}_2 \Phi_2$, e pelo superpotencial

$$W(\Phi_i) = \xi \Phi_0 + m \Phi_1 \Phi_2 + g \Phi_0 \Phi_1^2, \quad (3.24)$$

de tal forma que a ação seja dada por

$$S = \int d^8 z \bar{\Phi}_i \Phi_i + \left[\int d^6 z (\xi \Phi_0 + m \Phi_1 \Phi_2 + g \Phi_0 \Phi_1^2) + h.c. \right]. \quad (3.25)$$

Notemos que o superpotencial possui um termo trilinear da forma $g \Phi_0 \Phi_1^2$, e este é o termo de maior potência nos supercampos, logo, esta ação é renormalizável. Em termos dos campos componentes, (3.25) é dada por

$$S = \int d^4 x \{ i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i - \bar{\varphi}_i \square \varphi_i + \bar{F}_i F_i + [\xi F_0 + m(\varphi_1 F_2 + F_1 \varphi_2 - \psi_1 \psi_2) + g(2\varphi_0 \varphi_1 F_1 + F_0 \varphi_1 \varphi_1 - 2\varphi_1 \psi_0 \psi_1 - \varphi_0 \psi_1 \psi_1) + h.c.] \}. \quad (3.26)$$

De (3.8), temos que

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{\partial \bar{W}(\bar{\varphi}_i)}{\partial \bar{\varphi}_0} = -\bar{W}_0(\bar{\varphi}_i) = -\xi - g \bar{\varphi}_1^2, \\ F_1 &= -\frac{\partial \bar{W}(\bar{\varphi}_i)}{\partial \bar{\varphi}_1} = -\bar{W}_1(\bar{\varphi}_i) = -m \bar{\varphi}_2 - 2g \bar{\varphi}_0 \bar{\varphi}_1, \\ F_2 &= -\frac{\partial \bar{W}(\bar{\varphi}_i)}{\partial \bar{\varphi}_2} = -\bar{W}_2(\bar{\varphi}_i) = -m \bar{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Destas expressões, vemos que $F_1 = 0$ é resolvido por $\varphi_2 = -\frac{2g}{m} \varphi_0 \varphi_1$, mas, $F_0 = 0$ e $F_2 = 0$ são inconsistentes com esta solução, pois $F_2 = 0$ implica em $\varphi_1 = 0$ (com $m \neq 0$) e, substituindo em $F_0 = 0$, resulta em $\xi = 0$. Assim, não existe nenhum conjunto de soluções no qual $F_i = 0$, $\forall i$, portanto, a *SUSY* é espontaneamente quebrada pelo termo F . O potencial escalar é dado por

$$V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) = W_i(\varphi_i) \bar{W}_i(\bar{\varphi}_i) = \bar{F}_i F_i = |\xi + g \varphi_1^2|^2 + |m \varphi_2 + 2g \varphi_0 \varphi_1|^2 + m^2 |\varphi_1|^2. \quad (3.28)$$

A configuração de vácuo físico corresponde ao mínimo deste potencial. Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)}{\partial \varphi_0} &= 2g \varphi_1 (m \bar{\varphi}_2 + 2g \bar{\varphi}_0 \bar{\varphi}_1), \\ \frac{\partial V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)}{\partial \varphi_1} &= 2g \varphi_1 (\xi + g \bar{\varphi}_1^2) + 2g \varphi_0 (m \bar{\varphi}_2 + 2g \bar{\varphi}_0 \bar{\varphi}_1) + m^2 \bar{\varphi}_1, \\ \frac{\partial V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)}{\partial \varphi_2} &= m (m \bar{\varphi}_2 + 2g \bar{\varphi}_0 \bar{\varphi}_1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Igualando estas expressões a zero, obtemos que

$$\langle \varphi_0 \rangle \text{ indeterminado (degenerescência)}, \quad \langle \varphi_2 \rangle = -\frac{2g}{m} \langle \varphi_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle. \quad (3.30)$$

Temos uma degenerescência no campo φ_0 , isto é, podemos atribuir valores arbitrários a este campo. Chamamos esta degenerescência de direção plana, ou pseudomódulo. Na região de mínimo, o potencial escalar assume a forma

$$V(\langle\varphi_1\rangle, \langle\bar{\varphi}_1\rangle) = |\xi + g\langle\varphi_1\rangle|^2 + m^2 |\langle\varphi_1\rangle|^2, \quad (3.31)$$

ou, se exigirmos que $\langle\varphi_1\rangle$ seja real:

$$V(\langle\varphi_1\rangle) = (\xi + g\langle\varphi_1\rangle)^2 + m^2 \langle\varphi_1\rangle^2. \quad (3.32)$$

Assim, como esta é a configuração de vácuo, $\langle\varphi_1\rangle$ deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial V(\langle\varphi_1\rangle)}{\partial \langle\varphi_1\rangle} = 2\langle\varphi_1\rangle (m^2 + 2\xi g + 2g^2 \langle\varphi_1\rangle^2) = 0. \quad (3.33)$$

Temos então duas fases possíveis:

- Fase simétrica: $\langle\varphi_1\rangle = 0$; $m^2 + 2\xi g > 0$.

Nesta fase temos que:

$$V(\langle\varphi_1\rangle = 0) = \xi^2 > 0, \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V(\langle\varphi_1\rangle)}{\partial \langle\varphi_1\rangle^2} \right|_{\langle\varphi_1\rangle=0} = 2(m^2 + 2\xi g) > 0 \implies \langle\varphi_1\rangle = 0 \text{ é ponto de mínimo}. \quad (3.35)$$

- Fase não simétrica: $\langle\varphi_1\rangle_{\pm} = \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{-(m^2 + 2\xi g)}{2}}$; $m^2 + 2\xi g < 0$.

Nesta fase temos que:

$$V(\langle\varphi_1\rangle_{\pm}) = -\frac{m^2}{2g^2} \left(\frac{m^2}{2} + 2\xi g \right) > 0, \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V(\langle\varphi_1\rangle)}{\partial \langle\varphi_1\rangle^2} \right|_{\langle\varphi_1\rangle_{\pm}} = -4(m^2 + 2\xi g) > 0 \implies \langle\varphi_1\rangle_{\pm} \text{ é ponto de mínimo}. \quad (3.37)$$

Estas duas fases possuem diferenças consideráveis, e iremos analisá-las. O potencial escalar (3.31) possui uma simetria $U(1)$ global: $\langle\varphi_1\rangle \rightarrow e^{i\alpha} \langle\varphi_1\rangle$. Para $\langle\varphi_1\rangle$ real:

$$V(\langle\varphi_1\rangle) = (\xi + g\langle\varphi_1\rangle)^2 + m^2 \langle\varphi_1\rangle^2 = \xi^2 + (m^2 + 2\xi g) \langle\varphi_1\rangle^2 + g^2 \langle\varphi_1\rangle^4. \quad (3.38)$$

Logo, a quebra espontânea da simetria $U(1)$ global ocorre se e somente se o fator $(m^2 + 2\xi g)$ for negativo. Este caso corresponde à fase não simétrica acima (daí a denominação). Para $(m^2 + 2\xi g) > 0$, correspondente à fase simétrica, não há quebra da simetria $U(1)$.

Da ação original do modelo, (3.25) ou (3.26), vemos que todos os campos componentes dos supercampos Φ_0 , Φ_1 e Φ_2 possuem a mesma massa m . Pelo fato das equações (3.27) não poderem ser simultaneamente nulas, a $SUSY$ é espontaneamente quebrada e, assim, as massas tomam valores diferentes para os campos componentes. Iremos agora mostrar como a degenerescência nas massas dos campos bosônicos e fermiônicos é quebrada. Para isto, consi-

deraremos a fase simétrica, ou seja, o regime no qual $(m^2 + 2\xi g) > 0$ e $\langle \varphi_1 \rangle = 0$ ($\langle \varphi_1 \rangle_{\pm}$ são imaginários puros). Neste caso, $\langle \varphi_1 \rangle = 0$ é a posição do mínimo absoluto do potencial escalar: $V(\langle \varphi_1 \rangle = 0) = \xi^2$. Das equações (3.29) para o mínimo de $V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)$, devemos ter:

$$\langle \varphi_0 \rangle \text{ indeterminado (degenerescência)} , \quad \langle \varphi_1 \rangle = 0 , \quad \langle \varphi_2 \rangle = 0 . \quad (3.39)$$

Destas relações e de (3.27), os valores dos vev's dos campos auxiliares são:

$$\langle F_0 \rangle = -\xi , \quad \langle F_1 \rangle = 0 , \quad \langle F_2 \rangle = 0 . \quad (3.40)$$

Assim, pelo critério (3.22), a *SUSY* é espontaneamente quebrada pelo valor $\langle F_0 \rangle = -\xi = \Lambda_S^2$, onde Λ_S é a escala de massa (energia) na qual ocorre a quebra. Vemos também que o parâmetro ξ deve ser negativo.

De (3.11) e (3.26), os termos de massa fermiônicos são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MF} &= -\frac{1}{2}(m_{ij} + g_{ijk}\langle \varphi_k \rangle)(\psi_i \psi_j + \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j) \\ &= -m(\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) - 2g\langle \varphi_0 \rangle(\psi_1 \psi_1 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1) . \end{aligned}$$

Como $\langle \varphi_0 \rangle$ é arbitrário, podemos escolher $\langle \varphi_0 \rangle = 0$ e, portanto:

$$\mathcal{L}_{MF} = -m(\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) . \quad (3.41)$$

Sendo Ψ o espinor de Dirac dado por (notação no apêndice A):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{1\alpha} \\ \bar{\psi}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} , \quad \bar{\Psi} = (\psi_2^\alpha , \bar{\psi}_{1\dot{\alpha}}) , \quad (3.42)$$

o termo de massa fermiônico (3.41) se torna:

$$\mathcal{L}_{MF} = -m\bar{\Psi}\Psi . \quad (3.43)$$

Logo, o espectro de massa fermiônico após a quebra é:

- 1 espinor de Weyl ψ_0 não massivo: **goldstino**;
- 2 espinores de Weyl, ψ_1 e ψ_2 , que combinam-se em um espinor de Dirac Ψ de massa m .

Os termos de massa bosônicos são:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MB} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_i & \varphi_i \end{pmatrix} (M_s^2)_{ij} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \bar{\varphi}_j \end{pmatrix} \\ &= -\xi g (\varphi_1^2 + \bar{\varphi}_1^2) - m^2 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) . \end{aligned}$$

Fazendo $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + iB)$ (A e B reais):

$$\mathcal{L}_{MB} = -\frac{1}{2} (m^2 + 2\xi g) A^2 - \frac{1}{2} (m^2 - 2\xi g) B^2 - m^2 |\varphi_2|^2 . \quad (3.44)$$

Assim, o espectro de massa bosônico após a quebra é:

- 1 campo complexo φ_0 não massivo;
- 1 campo complexo φ_2 de massa m ;
- 2 campos reais, A e B , de massas $m_A = \sqrt{m^2 - 2g\Lambda_S^2}$ e $m_B = \sqrt{m^2 + 2g\Lambda_S^2}$.

Notemos que o escalar complexo φ_1 possui massa m no limite supersimétrico $\Lambda_S \rightarrow 0$, porém, com a quebra de $SUSY$, este separa-se em dois escalares reais de massas m_A e m_B , com uma diferença de $(\text{massa})^2 = \delta m^2 = 4g\Lambda_S^2$.

Vemos que realmente a degenerescência das massas desaparece quando ocorre a quebra espontânea de $SUSY$, enquanto que os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos permanecem iguais (6 para cada). Isto foi obtido classicamente, analisando-se apenas o mínimo do potencial clássico (nível de árvore). A regra do supertraço (3.17) para o modelo de O’Raifeartaigh em nível de árvore fica:

$$\begin{aligned}
sTr M^2 &= \sum_{J=0}^{1/2} (-1)^{2J} (2J+1) m_J^2 \\
&= 2m_{\varphi_2}^2 + m_A^2 + m_B^2 - 2m_{\psi_1}^2 - 2m_{\psi_2}^2 \\
&= 2m^2 + (m^2 - 2g\Lambda_S^2) + (m^2 + 2g\Lambda_S^2) - 2m^2 - 2m^2 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Assim, a regra do supertraço continua válida, mesmo com a quebra espontânea de $SUSY$, como já fora citado anteriormente.

Portanto, apresentamos o modelo de O’Raifeartaigh, mostramos suas características e como ele realiza a quebra espontânea de $SUSY$ classicamente. Este modelo, apesar de possuir características interessantes do ponto de vista fenomenológico, possui um férmion não massivo, o goldstino φ_0 , que não é detectado em nenhum experimento. Porém, generalizações do modelo de O’Raifeartaigh possuem características que são alvo de muito interesse na pesquisa atual. No *MPSM*, os termos que quebram $SUSY$ são introduzidos “à mão”, isto é, ocorre uma quebra explícita, através de termos espúrios que induzem a quebra *soft*. Esta quebra deve ser induzida por um mecanismo mediador, pois a regra do supertraço vincula, em nível de árvore, algumas massas dos superparceiros a serem menores do que das partículas “ordinárias” [32, 33]. Assim, há um grande interesse em modelos supersimétricos de baixa energia renormalizáveis com quebra espontânea de $SUSY$, que são generalizações do modelo de O’Raifeartaigh no setor onde a quebra ocorre, chamado de setor “escondido” [21]. Além disso, modelos do tipo O’Raifeartaigh podem aparecer naturalmente e dinamicamente no limite de baixas energias de teorias de gauge supersimétricas, como *QCD supersimétrica* [19, 21]. Um outro resultado importante, obtido por Witten [34], é que qualquer teoria de gauge supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ massiva possui vácuo supersimétrico, então, teorias com vácuo não supersimétrico devem ser quirais ou não massivas [19], como os modelos do tipo O’Raifeartaigh com falso vácuo (vácuo metaestável). Portanto, o estudo do modelo de O’Raifeartaigh e suas generalizações é fundamental na compreensão de

como a *SUSY* é quebrada e de como esta quebra é transmitida para o *MPSM*, além de trazer também novos resultados de um ponto de vista mais teórico.

No que segue, estaremos interessados em correções quânticas para o potencial escalar do modelo de O’Raifeartaigh. Apresentaremos dois métodos de ressonância no super-espço, a *expansão delta linear* e o *método de campo de fundo* e, usando-os, mostraremos como obter resultados de um *loop* e dois *loops* para este modelo.

Capítulo 4

Métodos de ressonância

Quando calculamos correções quânticas graficamente, estamos fazendo uma expansão perturbativa na constante de acoplamento da teoria. Quanto maior o número de *loops* do diagrama a ser calculado, maior é a ordem na constante de acoplamento, devido ao fato de esta aparecer nas regras de Feynman para os vértices (interações) da teoria. Geralmente, quando a constante de acoplamento é pequena, como na *Eletrodinâmica Quântica (QED)*, podemos calcular a teoria até altas ordens em teoria de perturbação, porém, se a constante de acoplamento for grande, como na *Cromodinâmica Quântica (QCD)* em baixas energias, não podemos usar o método perturbativo, pois cada correção (*loop*) será maior do que a anterior. Além disso, existem alguns problemas de *TQC* em aberto que são fundamentalmente não perturbativos, como o problema do confinamento dos *quarks* em *QCD*. Desta forma, é essencial desenvolver métodos não perturbativos para o cálculo de correções quânticas.

Uma maneira de desenvolver métodos não perturbativos é tomar uma determinada classe com um número infinito de diagramas com características em comum e encontrar uma forma de somar as contribuições de todos estes diagramas, obtendo um resultado em todas as ordens na constante de acoplamento. A este tipo de procedimento dá-se o nome de **método de ressonância**. O mais tradicional resultado de ressonância é o potencial de Coleman-Weinberg [1], que é a soma de todos os diagramas de um *loop*, e pode ser obtido através de um cálculo diagramático [1] ou funcional [23]. Nem sempre é possível e, mesmo que seja possível, em alguns casos é muito difícil realizar esta tarefa. Estudaremos aqui dois métodos de ressonância. Nas duas próximas seções os apresentaremos, depois mostraremos exemplos bem simples de sua aplicação e, no capítulo seguinte, os aplicaremos para o modelo de O’Raifeartaigh, em uma abordagem desenvolvida totalmente no super-espço.

4.1 A expansão delta linear (*LDE*)

A **expansão delta linear (*LDE*)** [35] é um método de ressonância que vêm sendo aplicado, há alguns anos, em vários problemas de *TQC*. Este método reproduz facilmente o potencial de Coleman-Weinberg, e já foi utilizado no estudo de diversos modelos, em várias áreas, como

teorias de gauge e matéria condensada, mostrando ser uma ferramenta poderosa na derivação de novos resultados não perturbativos [36, 37]. Sua aplicação no modelo de Gross-Neveu [38] trouxe resultados importantes no estudo da quebra de simetria quiral [39]. A eficiência e a convergência do método foram provadas em [36, 40], onde a *LDE* foi aplicada gerando alguns dos resultados analíticos mais precisos para a obtenção da temperatura crítica no estudo de condensados de Bose-Einstein.

A principal característica da *LDE* é que ela consiste em um tratamento perturbativo tradicional, juntamente com um processo de otimização e, assim, para obter um resultado não perturbativo, é necessário apenas trabalhar com poucos diagramas e usar técnicas de renormalização perturbativa.

Dada uma densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$ qualquer, somamos e subtraímos um termo que contenha um parâmetro arbitrário μ , com dimensão de massa, de tal forma que a densidade de Lagrangiana original não se modifique. Em seguida, definimos a seguinte Lagrangiana interpolada:

$$\mathcal{L}^\delta = \delta \mathcal{L}(\mu) + (1 - \delta) \mathcal{L}_0(\mu), \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de Lagrangiana completa do sistema e $\mathcal{L}_0$ é a parte livre. O parâmetro δ está refeito a $0 \leq \delta \leq 1$ e notamos que, quando $\delta = 1$ temos a teoria original e quando $\delta = 0$ temos a teoria livre, que pode ser resolvida exatamente. O parâmetro δ é usado para fazer teoria de perturbação convencional em $\mathcal{L}^\delta$, ao invés da constante de acoplamento original da teoria. O parâmetro de massa μ aparece em $\mathcal{L}_0$ e $\delta \mathcal{L}_0$. A dependência em μ de $\mathcal{L}_0$ é absorvida nos propagadores e $\delta \mathcal{L}_0$ é tratado como uma interação quadrática, logo, as regras de Feynman da teoria são alteradas, pois os propagadores dependerão de μ e os vértices serão proporcionais a $\delta \mu$.

Vamos agora definir a estratégia do método. Após fazer teoria de perturbação convencional em $\mathcal{L}^\delta$, usando δ como constante perturbativa, tomamos $\delta = 1$. Até este estágio, usamos teoria de perturbação tradicional e os resultados são puramente perturbativos. Porém, as quantidades calculadas até uma determinada ordem em δ (série truncada) dependem explicitamente de μ , que não é um parâmetro original da teoria. Portanto, é necessário eliminar esta dependência, que não existiria se fosse possível calcular a teoria em todas as ordens (resultado exato). Existem dois métodos para isso. O primeiro é o **princípio da mínima sensibilidade (PMS)** [41], que consiste no seguinte: como μ não pertence à teoria original, requeremos que uma quantidade física, como o potencial efetivo $\mathcal{V}^{(k)}(\mu)$, calculado perturbativamente até ordem δ^k , deve ser calculado em um ponto onde ele é menos sensível ao parâmetro μ . Então, de acordo com o *PMS*, $\mu = \mu_0$ é a solução da equação

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}^{(k)}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0, \delta=1} = 0. \quad (4.2)$$

Após este procedimento, o valor ótimo μ_0 será uma função dos campos e acoplamentos originais da teoria. Então, substituímos μ_0 no potencial efetivo $\mathcal{V}^{(k)}$ e obtemos um resultado não perturbativo, pois os propagadores dependem de μ .

O segundo método para eliminar a dependência em μ é o “**fastest apparent convergence criterion**” (FAC) [41]. Este método requer que, para qualquer coeficiente em ordem k da expansão perturbativa

$$\mathcal{V}^{(k)}(\mu) = \sum_{i=0}^k c_i(\mu) \delta^i, \quad (4.3)$$

a seguinte relação seja satisfeita:

$$[\mathcal{V}^{(k)}(\mu) - \mathcal{V}^{(k-1)}(\mu)]|_{\delta=1} = 0. \quad (4.4)$$

Novamente, a solução μ_0 da equação acima será uma função dos campos e acoplamentos originais, e quando substituirmos $\mu = \mu_0$ em $\mathcal{V}^{(k)}(\mu)$ obtemos um resultado não perturbativo. A equação (4.4) é equivalente a tomar o k -ésimo coeficiente de (4.3) e igualá-lo a zero ($c_k = 0$). Se estivermos interessados em um resultado em ordem δ^k , $\mathcal{V}^{(k)}(\mu)$ por exemplo, pelo FAC, basta encontrar a solução da equação $c_{k+1}(\mu)|_{\mu=\mu_0} = 0$ e substituí-la em $\mathcal{V}^{(k)}(\mu)$. Na referência [36] encontra-se uma lista de diversas aplicações do método.

4.1.1 Exemplo: O modelo de Gross-Neveu

Daremos agora um exemplo simples de como a *LDE* é aplicada em *TQC*. Calcularemos o potencial efetivo para o modelo de Gross-Neveu [38] em ordem δ . Este é um modelo de N férmions com interação quártica em (1+1)-dimensões, e é interessante no estudo de alguns aspectos importantes em teorias de campo, como quebra de simetria quiral discreta, transmutação dimensional e liberdade assintótica. A *LDE* foi aplicada a este modelo em [42], onde o resultado para N grande foi reproduzido. Resultados importantes para N finito foram derivados em [43], onde mostrou-se a ocorrência de um ponto tricrítico. Uma aplicação do método também foi realizada para o modelo (2+1)-dimensional em [44].

A Lagrangiana original do modelo é

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^a \partial_m \gamma^m \psi^a + \frac{g}{2N} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2, \quad (4.5)$$

onde $a = 1, 2, \dots, N$, γ^m são as matrizes de Dirac, que em (1+1)-dimensões são $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^2$ e $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma^1$, g é a constante de acoplamento e $\bar{\psi}^a \psi^a = \bar{\psi}^1 \psi^1 + \bar{\psi}^2 \psi^2 + \dots + \bar{\psi}^N \psi^N$. Este modelo apresenta a simetria quiral

$$\begin{aligned} \psi^a &\rightarrow \gamma_5 \psi^a, \\ \bar{\psi}^a &\rightarrow -\bar{\psi}^a \gamma_5. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aplicando a *LDE*, primeiramente adicionamos e subtraímos um termo de massa, obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + \mu \bar{\psi}^a \psi^a - \mu \bar{\psi}^a \psi^a \\ &= i\bar{\psi}^a \partial_m \gamma^m \psi^a - \mu \bar{\psi}^a \psi^a + \frac{g}{2N} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2 + \mu \bar{\psi}^a \psi^a \\ &= \mathcal{L}_0(\mu) + \mathcal{L}_{int}(\mu), \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\mu) &= i\bar{\psi}^a \partial_m \gamma^m \psi^a - \mu \bar{\psi}^a \psi^a, \\ \mathcal{L}_{int}(\mu) &= \frac{g}{2N} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2 + \mu \bar{\psi}^a \psi^a.\end{aligned}\quad (4.8)$$

A Lagrangiana interpolada é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\delta &= \delta \mathcal{L}(\mu) + (1 - \delta) \mathcal{L}_0(\mu) \\ &= i\bar{\psi}^a \partial_m \gamma^m \psi^a - \mu \bar{\psi}^a \psi^a + \frac{\delta g}{2N} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2 + \delta \mu \bar{\psi}^a \psi^a.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Introduzimos agora um campo auxiliar σ , através da substituição

$$\mathcal{L}^\delta \rightarrow \mathcal{L}^\delta - \frac{\delta N}{2g} \left(\sigma - \frac{g}{N} \bar{\psi}^a \psi^a \right)^2, \quad (4.10)$$

que possibilita a realização de uma expansão em $1/N$. Esta nova Lagrangiana ainda possui simetria quiral, pois a transformação em σ é $\sigma \rightarrow -\sigma$. Resolvendo as equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$\sigma = \frac{g}{N} \bar{\psi}^a \psi^a, \quad (4.11)$$

que é uma equação de vínculo.

Assim, a Lagrangiana interpolada, com o campo auxiliar, é:

$$\mathcal{L}^\delta = i\bar{\psi}^a \partial_m \gamma^m \psi^a - \mu \bar{\psi}^a \psi^a - \frac{\delta N}{2g} \sigma^2 + \delta \sigma \bar{\psi}^a \psi^a + \delta \mu \bar{\psi}^a \psi^a. \quad (4.12)$$

Nesta expressão, o termo $-\mu \bar{\psi}^a \psi^a$ é um termo de massa (propagador) e o termo $\delta \mu \bar{\psi}^a \psi^a$ é uma interação (vértice) com peso δ . O propagador do campo σ carrega um fator $1/\delta N$ e cada *loop* de férmion contém um fator N .

Em geral, quando calculamos o potencial efetivo, não nos preocupamos com os diagramas de vácuo, pois estes não dependem dos campos e geralmente são eliminados na normalização do gerador funcional. Porém, na *LDE*, os diagramas de vácuo dependem de μ e, então, não podemos desconsiderá-los, pois este parâmetro dependerá dos campos originais da teoria após a otimização. Assim, na *LDE*, é necessário calcular os diagramas de vácuo ordem a ordem.

A figura 4.1 mostra a representação diagramática do potencial efetivo até ordem δ , onde as linhas tracejadas representam o propagador de σ .

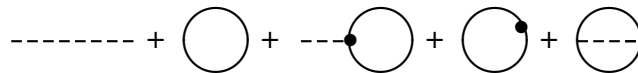


Figura 4.1: Potencial efetivo para o modelo de Gross-Neveu até ordem δ .

O segundo e quarto diagramas representam as contribuições de vácuo em ordem δ^0 e ordem δ^1 , respectivamente. Os quatro primeiros diagramas são de ordem N^1 enquanto que o último é

de ordem N^0 . Assim, para $N \rightarrow \infty$, a soma diagramática acima é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}_{eff}(\sigma_c)}{N} = & \frac{\delta}{2g} \sigma_c^2 + i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln(p^2 - \mu^2) - 2i\delta \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\mu \sigma_c}{(p^2 - \mu^2)} \\ & + 2i\delta \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\mu^2}{(p^2 - \mu^2)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde σ_c é o campo clássico. Esta expressão corresponde ao potencial clássico ($\sigma_c^2/2g$) mais as correções de um *loop* para o vácuo e para a função de Green de um ponto, em ordem δ .

Aplicando o *PMS* (o mesmo resultado seria alcançado usando-se o *FAC*) em ordem δ e tomando $\delta = 1$, impomos

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}(\sigma_c)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0} = 0, \quad (4.14)$$

obtendo

$$\mu_0 = \sigma_c. \quad (4.15)$$

Substituindo este valor otimizado em (4.13), o potencial efetivo avaliado em $\mu = \mu_0$ é

$$\frac{\mathcal{V}_{eff}(\sigma_c)}{N} = \frac{1}{2g} \sigma_c^2 + i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left(1 - \frac{\sigma_c^2}{p^2 + i\varepsilon} \right), \quad (4.16)$$

que corresponde ao potencial efetivo do modelo de Gross-Neveu no limite $N \rightarrow \infty$ [45], e representa o potencial de Coleman-Weinberg, ou seja, a soma de todos os diagramas de um *loop* da teoria.

Este resultado mostra a eficiência e simplicidade do método. Reproduzimos uma soma infinita de uma determinada classe de diagramas (todos os diagramas de um *loop*) trabalhando com um número muito pequeno de diagramas, representados na figura 4.1, obtendo assim um resultado não perturbativo, usando um método perturbativo.

4.2 O método de campo de fundo

Iremos agora introduzir o outro método de ressonância que iremos utilizar para o cálculo do potencial efetivo no super-espaço. O **método de campo de fundo** [46] é um método que inicialmente foi muito utilizado para a quantização de teorias de gauge, sem perder invariância de gauge explícita. Com o passar dos anos, este método foi sendo aplicado para o cálculo da ação efetiva e do potencial efetivo [47], assim como para o cálculo da matriz S [48].

Para apresentar o método, adotaremos uma teoria escalar no espaço-tempo usual, porém, os resultados obtidos aqui possuem completa analogia quando aplicados ao super-espaço, objeto de nosso estudo posterior.

Começamos utilizando o gerador funcional de todas as funções de Green e a ação efetiva, definidos no apêndice F. Substituindo (F.9) em (F.1), obtemos:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\Gamma[\varphi_c] + \int d^4 x \varphi_c(x) J(x) \right] \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi] + \int d^4 x \varphi(x) J(x) \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Vamos agora aplicar o *método de campo de fundo*. Este consiste em expandir o campo quântico $\varphi(x)$ em torno de seu valor clássico $\varphi_c(x)$, da forma

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_c(x) . \quad (4.18)$$

Substituindo em (4.17):

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\Gamma[\varphi_c] + \int d^4x \varphi_c(x) J(x) \right] \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi + \varphi_c] + \int d^4x (\varphi(x) + \varphi_c(x)) J(x) \right] \right\} ,$$

ou:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Gamma[\varphi_c] \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi + \varphi_c] - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} \right] \right\} . \quad (4.19)$$

Expandindo o funcional $S[\varphi + \varphi_c]$ em uma série de Taylor funcional em torno de φ_c , obtemos:

$$S[\varphi + \varphi_c] = S[\varphi_c] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \frac{\delta^n S[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) , \quad (4.20)$$

onde $\delta^n S[\varphi_c] / \delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)$ são as funções de vértice clássicas, que dependem de φ_c .

A partir de agora, por questões de simplicidade, adotaremos as notações:

$$\int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \frac{\delta^n S[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) = S_n[\varphi_c] \varphi^n , \quad (4.21)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} = \Gamma_1[\varphi_c] , \quad \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} = \varphi \Gamma_1[\varphi_c] . \quad (4.22)$$

De (4.20) e (4.21), podemos escrever (4.19) como:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Gamma[\varphi_c] \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi_c] + \frac{1}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\varphi_c] \varphi^n - \varphi (\Gamma_1[\varphi_c] - S_1[\varphi_c]) \right] \right\} . \quad (4.23)$$

Da equação acima, podemos calcular $\Gamma[\varphi_c]$ perturbativamente, em ordens de $\hbar$. Para isto, fazemos a substituição $\varphi = \hbar^{1/2} \varphi$, tal que possamos escrever:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\Gamma[\varphi_c] - S[\varphi_c]) \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} S_n[\varphi_c] \varphi^n - \hbar^{-1/2} \varphi (\Gamma_1[\varphi_c] - S_1[\varphi_c]) \right] \right\} . \quad (4.24)$$

Notemos que, na equação acima, a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ aparece apenas através da combinação $\Gamma[\varphi_c] - S[\varphi_c] \equiv \bar{\Gamma}[\varphi_c]$. O funcional $\bar{\Gamma}[\varphi_c]$ é uma série de potências em $\hbar$:

$$\bar{\Gamma}[\varphi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}[\varphi_c] . \quad (4.25)$$

Este funcional representa todas as correções quânticas para a ação clássica $S[\varphi_c]$. Portanto, podemos dizer que a ação efetiva é ação clássica mais todas as suas correções quânticas. Os

diagramas de Feynman que contribuem para $\bar{\Gamma}^{(n)}[\varphi_c]$ possuem exatamente n loops e, desta forma, chamamos (4.25) de expansão em *loops* para a ação efetiva.

Substituindo agora (4.25) em (4.24), obtemos:

$$\exp \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \bar{\Gamma}^{(n)}[\varphi_c] \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{l}{2}-1}}{l!} S_l[\varphi_c] \varphi^l - \sum_{p=1}^{\infty} \hbar^{-\frac{1}{2}+p} \varphi \bar{\Gamma}_1^{(p)}[\varphi_c] \right] \right\}. \quad (4.26)$$

A equação acima é usada para fazer teoria de perturbação em potências de $\hbar$. O funcional que aparece na exponencial do lado direito representa a ação de uma teoria onde o termo quadrático $\frac{1}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2$ define o propagador e os outros termos definem as interações. Expandindo os expoentes de ambos os lados em potências de $\hbar$ obtemos a série perturbativa com $\hbar$ como parâmetro perturbativo. Cada termo desta série é representado por diagramas de Feynman, **com o propagador e os vértices como funções do campo clássico φ_c** .

Depois de feita a expansão, os termos

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \hbar^{-\frac{1}{2}+p} \varphi \bar{\Gamma}_1^{(p)}[\varphi_c]$$

geram apenas diagramas redutíveis de uma partícula (*IPR*). Eles cancelam os diagramas *IPR* provenientes dos outros termos da expansão e, assim, o lado direito de (4.26) contém apenas diagramas irredutíveis de uma partícula (*IPI*). Portanto, dizemos que a ação efetiva é o gerador funcional dos diagramas *IPI*.

Vamos inicialmente calcular a contribuição de um *loop* ($n = 1$) para a ação efetiva. De (4.26), vemos que esta possui apenas termos independentes de $\hbar$ e é dada por:

$$\exp \{ i \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi_c] \} = \int \mathcal{D}\varphi \left(\frac{i}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 \right). \quad (4.27)$$

Como o lado direito é uma integral Gaussiana, obtemos:

$$\exp \{ i \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi_c] \} = \det^{-1/2} S_2[\varphi_c]. \quad (4.28)$$

Portanto:

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi_c] = \frac{i}{2} \ln \det S_2[\varphi_c] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2[\varphi_c]. \quad (4.29)$$

Usando este resultado, escrevemos a ação efetiva na aproximação de um *loop* como:

$$\Gamma^{(1)}[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \frac{i}{2} \hbar \text{Tr} \ln S_2[\varphi_c]. \quad (4.30)$$

A quantidade $S_2[\varphi_c]$ representa o núcleo de um operador diferencial, que depende do campo clássico φ_c . Portanto, calcular a contribuição de um *loop* para a ação efetiva é equivalente ao problema de calcular determinantes de operadores diferenciais. Este determinante, por sua vez,

é representado diagramaticamente pelo diagrama de vácuo de um *loop*. Por exemplo, para a teoria escalar com a ação

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi - V(\varphi) \right), \quad (4.31)$$

$S_2[\varphi_c]$ é dado por:

$$\begin{aligned} S_2[\varphi_c] &= \left. \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(x')} \right|_{\varphi=\varphi_c} \\ &= \left. \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(x')} \left[\int d^4y \left(\frac{1}{2} \partial_m \varphi(y) \partial^m \varphi(y) - V(\varphi(y)) \right) \right] \right|_{\varphi=\varphi_c} \\ &= \left. \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(x')} \left[\int d^4y \left(-\frac{1}{2} \varphi(y) \square \varphi(y) - V(\varphi(y)) \right) \right] \right|_{\varphi=\varphi_c} \\ &= \left. \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta \varphi(x')} \left[\int d^4y \left(-\frac{1}{2} \varphi(y) \square \varphi(y) - V(\varphi(y)) \right) \right] \right\} \right|_{\varphi=\varphi_c} \\ &= \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} [-\square_{x'} \varphi(x') - V'(\varphi(x'))] |_{\varphi=\varphi_c} \\ &= -[\square_x + V''(\varphi_c(x))] \delta^4(x - x'). \end{aligned} \quad (4.32)$$

O traço do logaritmo deste operador, de acordo com (4.30), nos dá a contribuição de um *loop* para a ação efetiva, que é representada pelo diagrama abaixo:

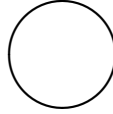


Figura 4.2: Diagrama de vácuo representando $\frac{i}{2} Tr \ln S_2[\varphi_c]$.

Consideremos agora a aproximação de dois *loops*. De (4.26), temos que:

$$\exp \left\{ i \left(\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi_c] + \hbar \bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi_c] \right) \right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 + \frac{\hbar^{1/2}}{3!} S_3[\varphi_c] \varphi^3 + \frac{\hbar}{4!} S_4[\varphi_c] \varphi^4 - \hbar^{1/2} \varphi \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c] \right] \right\}. \quad (4.33)$$

No que segue, usaremos as seguintes notações:

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \left(\frac{i}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 \right) (\dots)}{\int \mathcal{D}\varphi \left(\frac{i}{2} S_2[\varphi_c] \varphi^2 \right)}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \langle (S_3[\varphi_c] \varphi^3) (S_3[\varphi_c] \varphi^3) \rangle &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \delta \varphi_c(x_2) \delta \varphi_c(x_3)} \\ &\quad \times \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(y_1) \varphi(y_2) \varphi(y_3) \rangle \\ &\quad \times \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(y_1) \delta \varphi_c(y_2) \delta \varphi_c(y_3)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \langle S_4[\varphi_c] \varphi^4 \rangle &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{\delta^4 S[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \delta \varphi_c(x_2) \delta \varphi_c(x_3) \delta \varphi_c(x_4)} \\ &\quad \times \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\langle (\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c] \varphi) (\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c] \varphi) \rangle = \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]}{\delta \varphi(x_1)} \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle \frac{\delta \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]}{\delta \varphi(x_2)}. \quad (4.37)$$

Notemos que

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = iG(x, y|\varphi_c) , \quad (4.38)$$

onde $G(x, y|\varphi_c)$ é a função de Green dependente do campo clássico φ_c e que satisfaz

$$\int d^4z S_2(x, z|\varphi_c)G(z, y|\varphi_c) = \delta^4(x - y) , \quad (4.39)$$

ou, de maneira compacta:

$$S_2[\varphi_c]G[\varphi_c] = 1 \implies G[\varphi_c] = S_2^{-1}[\varphi_c] . \quad (4.40)$$

Ou seja, $G[\varphi_c]$ é o propagador, que depende de φ_c .

Usando estas definições e expandindo ambos os lados de (4.33) até primeira ordem em $\hbar$, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi_c] &= \frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3[\varphi_c]\varphi^3) (S_3[\varphi_c]\varphi^3) \rangle + \frac{1}{4!} \langle S_4[\varphi_c]\varphi^4 \rangle \\ &\quad + \frac{i}{2} \langle \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]\varphi \rangle \langle \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]\varphi \rangle . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Consideremos o último termo do lado direito da equação acima. Usando a forma explícita de $\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]$ obtida em (4.29), temos que:

$$\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c] = \frac{i}{2} Tr S_2^{-1}[\varphi_c] S_3[\varphi_c] = \frac{i}{2} Tr G_2[\varphi_c] S_3[\varphi_c] . \quad (4.42)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \langle \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]\varphi \rangle \langle \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi_c]\varphi \rangle &= \frac{1}{8} S_3[\varphi_c] G[\varphi_c] G[\varphi_c] G[\varphi_c] S_3[\varphi_c] \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)\delta\varphi_c(x_2)\delta\varphi_c(x_3)} \\ &\quad \times G(x_1, x_2|\varphi_c) G(x_3, y_3|\varphi_c) G(y_1, y_2|\varphi_c) \\ &\quad \times \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(y_1)\delta\varphi_c(y_2)\delta\varphi_c(y_3)} . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Esta expressão é representada pelo seguinte diagrama *IPR*:

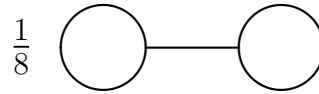


Figura 4.3: Contribuição do último termo para $\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi_c]$.

Ao calcularmos os outros dois termos do lado direito de (4.41), uma das contribuições será exatamente igual a (4.43), mas com o sinal oposto, fazendo com que o diagrama *IPR* da figura 4.3 seja cancelado. A contribuição de dois *loops* para a ação efetiva é, então, dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi_c] &= -\frac{1}{8} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{\delta^4 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)\delta\varphi_c(x_2)\delta\varphi_c(x_3)\delta\varphi_c(x_4)} \\ &\quad \times G(x_1, x_2|\varphi_c) G(x_3, x_4|\varphi_c) \\ &\quad - \frac{1}{12} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)\delta\varphi_c(x_2)\delta\varphi_c(x_3)} \\ &\quad \times G(x_1, y_1|\varphi_c) G(x_2, y_2|\varphi_c) G(x_3, y_3|\varphi_c) \\ &\quad \times \frac{\delta^3 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(y_1)\delta\varphi_c(y_2)\delta\varphi_c(y_3)} . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Diagramaticamente, esta expressão é representada como:

$$-\frac{1}{8} \text{ (two circles joined at a point)} - \frac{1}{12} \text{ (circle with a vertical line through the center)}$$

Figura 4.4: Representação diagramática de $\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi_c]$.

Portanto, utilizando o *método de campo de fundo*, tanto a contribuição de um *loop* (4.29) quanto a contribuição de dois *loops* (4.44) para a ação efetiva são dadas por diagramas de vácuo *1PI* conexos, com massa (propagadores) e acoplamentos (interações) dependentes do campo. Assim, dado que a massa e o acoplamento são funções do campo, ao realizarmos a soma diagramática até uma determinada ordem, estaremos de fato obtendo um resultado não perturbativo, o que demonstra a utilidade do método.

Veremos nos próximos capítulos como aplicar os dois métodos apresentados neste capítulo no super-espço, para o modelo de O’Raifeartaigh. Mostraremos algumas modificações necessárias e algumas sutilezas provenientes do formalismo de supercampos.

Capítulo 5

LDE no modelo de O’Raifeartaigh

Neste capítulo, mostraremos como adaptar os métodos de ressonância apresentados no capítulo anterior ao super-espço. As técnicas de cálculo de diagramas de Feynman no super-espço (superdiagramas) são usadas para o cálculo de correções quânticas de maneira clara e elegante, sendo assim uma linguagem altamente efetiva e que preserva a *SUSY* de maneira manifesta em todas as etapas do cálculo. Utilizando a *LDE*, mostraremos como calcular o potencial de Coleman-Weinberg, ou seja, a soma de todos os diagramas de um loop, que é um resultado não perturbativo, para o modelo de O’Raifeartaigh apresentado no capítulo 3.

5.1 Introdução: *LDE* no modelo de Wess-Zumino

Iremos nesta seção desenvolver a *LDE* para aplicações no super-espço. O método foi inicialmente aplicado no super-espço para o modelo de Wess-Zumino [49], e faremos aqui, inicialmente, uma breve introdução às suas características principais, tendo este modelo como base.

Para modelos supersimétricos com supercampos quirais e antiquirais, precisamos introduzir dois parâmetros de massa, μ e $\bar{\mu}$, em contraste com o que fizemos para o modelo de Gross-Neveu, onde foi necessária a introdução de apenas um parâmetro de massa. Após o cálculo dos diagramas, para eliminar a dependência do potencial efetivo nestes parâmetros, podemos utilizar o *PMS* ou o *FAC* como métodos de otimização, de tal forma que tenhamos duas equações (para μ e $\bar{\mu}$) similares a (4.2) ou uma equação similar a (4.4), no super-espço. Como, após a otimização, os parâmetros μ e $\bar{\mu}$ serão funções dos acoplamentos e dos (**super**)campos originais, devemos considerar desde o princípio que estes sejam supercampos quirais e antiquirais, respectivamente, de tal forma que μ seja inserido na parte holomórfica do superpotencial ($W(\Phi)$) e $\bar{\mu}$ seja inserido na parte antiholomórfica do superpotencial ($\bar{W}(\bar{\Phi})$). Assim como no modelo de Gross-Neveu, não podemos desprezar os diagramas de vácuo, pois estes dependem dos parâmetros de massa. Por outro lado, diagramas de vácuo são identicamente nulos no super-

espaço [28, 29, 31], pelo fato de estes serem proporcionais a integrais do tipo

$$\int d^4\theta f(x) , \quad (5.1)$$

onde $f(x)$ é uma função apenas das variáveis do espaço-tempo usual. Esta integral é identicamente nula, pois é uma integral nas variáveis de $\mathbb{R}^{4/4}$ de uma função que não depende de θ e $\bar{\theta}$ (ver apêndice B), o que faz com que os diagramas de vácuo se anulem. Porém, no caso da *LDE* no super-espaço, os diagramas de vácuo são proporcionais a μ e $\bar{\mu}$, que por sua vez são supercampos e assim proporcionais a θ e $\bar{\theta}$. Logo, com a *LDE*, os diagramas de vácuo no super-espaço não se anulam e devemos considerá-los até a otimização.

Vamos ao método no super-espaço. A Lagrangiana interpolada para o modelo de Wess-Zumino é (sem o termo linear, que pode ser eliminado por um reescalonamento do supercampo):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\delta &= \delta \mathcal{L}(\mu, \bar{\mu}) + (1 - \delta) \mathcal{L}_0(\mu, \bar{\mu}) \\ &= \int d^4\theta \bar{\Phi} \Phi + \int d^2\theta \left(\frac{M}{2} \Phi^2 + \frac{\delta g}{3!} \Phi^3 - \frac{\delta \mu}{2} \Phi^2 \right) \\ &\quad + \int d^2\bar{\theta} \left(\frac{\bar{M}}{2} \bar{\Phi}^2 + \frac{\delta g}{3!} \bar{\Phi}^3 - \frac{\delta \bar{\mu}}{2} \bar{\Phi}^2 \right) , \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde m é o parâmetro de massa original, $M = m + \mu$ e $\bar{M} = m + \bar{\mu}$. Temos agora duas novas interações, uma quiral e outra antiquiral, proporcionais a $\delta\mu$ e $\delta\bar{\mu}$, respectivamente, e também os propagadores terão dependência em μ e $\bar{\mu}$. Desta forma, as regras de Feynman para o modelo de Wess-Zumino, que são bem conhecidas na literatura [28, 29, 31], são alteradas para (notação definida nos apêndices B e C):

- 1. Propagadores:

$$\begin{aligned} \langle \Phi \bar{\Phi} \rangle &= -\frac{i}{k^2 + |M|^2} \delta_{12}^4 , \\ \langle \Phi \Phi \rangle &= \frac{iM}{k^2(k^2 + |M|^2)} \frac{1}{4} D_1^2(k) \delta_{12}^4 , \\ \langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle &= \frac{i\bar{M}}{k^2(k^2 + |\bar{M}|^2)} \frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4 ; \end{aligned} \quad (5.3)$$

- 2. Vértices:

$$\bullet = i\delta\lambda \int d^4\theta , \quad \circ = i\delta\bar{\lambda} \int d^4\theta ,$$

$$\text{---}\times\text{---} = -i\delta \int \mu d^4\theta ,$$

$$\text{---}\otimes\text{---} = -i\delta \int \bar{\mu} d^4\theta .$$

- 3. A cada vértice quirral (antiquirral) com n linhas internas, estão associados $(n - 1)$ fatores $-\frac{1}{4}\bar{D}^2$ ($-\frac{1}{4}D^2$) agindo em $(n - 1)$ linhas internas. Todas as linhas externas (Φ ou $\bar{\Phi}$) aparecem sem fator algum.
- 4. A cada loop independente com momento k é associada uma integral

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} . \quad (5.4)$$

- 5. Aos momentos externos, associamos o fator global

$$\left[\prod_{p_{ext}} \int \frac{d^4 p_{ext}}{(2\pi)^4} \right] (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{ext} p_{ext} \right) . \quad (5.5)$$

- 6. Considerar os fatores de simetria usuais para os diagramas.

Do gerador funcional na presença das fontes quirral J e antiquirral $\bar{J}$ (com $\hbar=1$),

$$\tilde{Z}[J, \bar{J}] = \exp \left[i S_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{J}} \right) \right] \exp \left[\frac{i}{2} (J, \bar{J}) G^{(M, \bar{M})} \begin{pmatrix} J \\ \bar{J} \end{pmatrix} \right] , \quad (5.6)$$

podemos escrever a ação efetiva como

$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = -\frac{i}{2} \ln \left[sDet \left(G^{(M, \bar{M})} \right) \right] - i \ln \tilde{Z}[J, \bar{J}] - \int d^6 z J(z) \Phi(z) - \int d^6 \bar{z} \bar{J}(z) \bar{\Phi}(z) , \quad (5.7)$$

onde $G^{(M, \bar{M})}$ é o propagador matricial e $sDet \left(G^{(M, \bar{M})} \right)$ é o superdeterminante de $G^{(M, \bar{M})}$, que, em geral, é igual a um; o que não ocorre no nosso caso, pois $G^{(M, \bar{M})}$ depende de μ e $\bar{\mu}$. Devido também à dependência em μ e $\bar{\mu}$, o gerador dos diagramas de vácuo, $\tilde{Z}[0, 0]$, não é identicamente igual a um. Definimos o gerador funcional normalizado como $Z_N = \frac{\tilde{Z}[J, \bar{J}]}{\tilde{Z}[0, 0]}$, e escrevemos a ação efetiva da forma

$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = -\frac{i}{2} \ln[sDet(G)] - i \ln \tilde{Z}[J_0, \bar{J}_0] + \Gamma_N[\Phi, \bar{\Phi}] , \quad (5.8)$$

onde as fontes J_0 e $\bar{J}_0$ são definidas pelas equações

$$\left. \frac{\delta W[J, \bar{J}]}{\delta J(z)} \right|_{J=J_0} = \left. \frac{\delta W[J, \bar{J}]}{\delta \bar{J}(z)} \right|_{\bar{J}=\bar{J}_0} = \left. \frac{\delta \tilde{Z}[J, \bar{J}]}{\delta J(z)} \right|_{J=J_0} = \left. \frac{\delta \tilde{Z}[J, \bar{J}]}{\delta \bar{J}(z)} \right|_{\bar{J}=\bar{J}_0} = 0 . \quad (5.9)$$

Em (5.8), os dois primeiros termos representam os diagramas de vácuo e $\Gamma_N[\Phi, \bar{\Phi}]$ é a contribuição usual para a ação efetiva.

A partir daí, podemos calcular o potencial efetivo com a *LDE* e, após a otimização, obter resultados não perturbativos. Como a idéia era apresentar o modelo de Wess-Zumino como uma introdução à *LDE* no super-espço, mostrando suas principais características e sutilezas quando usada no formalismo de supercampos, não mostraremos aqui os detalhes dos cálculos para este modelo. Para isto, direcionamos o leitor à referência [49], onde o potencial de Coleman-Weinberg mais uma correção de dois loops foram calculados.

5.2 O potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh

Como citado anteriormente, dado que até o presente momento não há nenhuma evidência experimental em favor da *SUSY* exata, esta deve ser quebrada. Para que as características no regime ultravioleta das teorias com *SUSY* exata permaneçam válidas, devemos quebrá-la espontaneamente [16, 50] ou explicitamente, mas de maneira *soft* [9]. Superdiagramas de Feynman também podem ser utilizados no caso de teorias com quebra de *SUSY*. Os propagadores neste caso adquirem uma forma muito mais complexa do que no caso sem quebra, além de que as manipulações com as derivadas covariantes no cálculo dos superdiagramas também tornam-se muito mais extensas. Todavia, toda a forma clara e elegante dos cálculos no caso sem quebra é preservada no caso com quebra, além do que o número de diagramas necessários nos cálculos continua sendo muito menor do que usando-se campos componentes, sendo estas então as duas maiores motivações para o trabalho desenvolvido a partir de agora.

A Lagrangiana do modelo de O’Raifeartaigh é dada por

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta (\xi \Phi_0 + m \Phi_1 \Phi_2 + g \Phi_0 \Phi_1^2) + h.c. \right] , \quad i = 0, 1, 2 . \quad (5.10)$$

Como estaremos interessados nas contribuições não perturbativas de todos os campos do modelo, devemos implementar a *LDE* com os parâmetros de massa matriciais μ_{ij} e $\bar{\mu}_{ij}$. Adicionando e subtraindo estes parâmetros na Lagrangiana de um modelo de O’Raifeartaigh geral, com ação dada por (3.3), obtemos:

$$\mathcal{L}(\mu, \bar{\mu}) = \mathcal{L}_0(\mu, \bar{\mu}) + \mathcal{L}_{int}(\mu, \bar{\mu}) , \quad (5.11)$$

com

$$\mathcal{L}_0(\mu, \bar{\mu}) = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta \left(\xi_i \Phi_i + \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j \right) + h.c. \right] , \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}_{int}(\mu, \bar{\mu}) = - \left[\int d^2\theta \left(\frac{1}{3!} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k - \frac{1}{2} \mu_{ij} \Phi_i \Phi_j \right) + h.c. \right] , \quad (5.13)$$

onde $M_{ij} = m_{ij} + \mu_{ij}$ e $i, j, k = 0, 1, 2$ são índices simétricos.

Quando estudamos a quebra de *SUSY* no super-espço, termos de quebra explícita do tipo *soft* [9] aparecem naturalmente, através de inserções espúrias explícitas das variáveis de Grassmann θ e $\bar{\theta}$ na Lagrangiana. Dada uma ação supersimétrica no super-espço, acoplamos aos supercampos quânticos, de uma maneira manifestamente supersimétrica, alguns supercampos externos (espúrios). Se estes supercampos tiverem valores fixos, como θ^2 ou $\bar{\theta}^2$, por exemplo, a *SUSY* é quebrada explicitamente. No nosso caso, termos de quebra *soft* aparecem automaticamente, devido ao fato de que μ_{ij} e $\bar{\mu}_{ij}$ são supercampos e, assim, dependem das variáveis de Grassmann:

$$\mu_{ij} = \lambda_{ijk} \varphi_k = \lambda_{ijk} (\rho_k + \theta^2 \chi_k) = \lambda_{ijk} \rho_k + \lambda_{ijk} \chi_k \theta^2 = \rho_{ij} + b_{ij} \theta^2 . \quad (5.14)$$

Desta forma,

$$M_{ij} = m_{ij} + \mu_{ij} = (m_{ij} + \rho_{ij}) + b_{ij}\theta^2 = a_{ij} + b_{ij}\theta^2 . \quad (5.15)$$

Com as expressões acima para μ_{ij} e M_{ij} podemos escrever a Lagrangiana interpolada (4.1) da forma

$$\mathcal{L}^\delta = \mathcal{L}_0^\delta + \mathcal{L}_{int}^\delta , \quad (5.16)$$

onde a Lagrangiana livre é

$$\mathcal{L}_0^\delta = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta \left(\xi_i \Phi_i + \frac{1}{2} a_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{2} b_{ij} \theta^2 \Phi_i \Phi_j \right) + h.c. \right] , \quad (5.17)$$

e a Lagrangiana de interação é escrita como:

$$\mathcal{L}_{int}^\delta = - \left[\int d^2\theta \left(\frac{\delta}{3!} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k - \frac{\delta}{2} \mu_{ij} \Phi_i \Phi_j \right) + h.c. \right] . \quad (5.18)$$

A Lagrangiana de interação agora possui termos de quebra *soft* proporcionais às componentes de μ_{ij} . Tais termos são tratados perturbativamente em δ , como todas as outras interações.

Como estamos interessados no modelo de O’Raifeartaigh (5.10), que devemos recobrar quando $\delta = 1$, fazemos as escolhas

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi ; \\ M_{01} = a_{01} = \rho_{01} = a ; \\ M_{11} = b_{11}\theta^2 = b\theta^2 ; \\ M_{12} = a_{12} = m_{12} + \rho_{12} = m + \rho = M ; \\ g_{011} = g , \end{cases} \quad (5.19)$$

e todos os outros ξ_i e M_{ij} iguais a zero. Com isto, obtemos:

$$\mathcal{L}_0^\delta = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta \left(\xi \Phi_0 + M \Phi_1 \Phi_2 + a \Phi_0 \Phi_1 + \frac{1}{2} b \theta^2 \Phi_1^2 \right) + h.c. \right] , \quad (5.20)$$

$$\mathcal{L}_{int}^\delta = - \left[\int d^2\theta \left(\delta g \Phi_0 \Phi_1^2 - \delta \rho \Phi_1 \Phi_2 - \delta a \Phi_0 \Phi_1 - \frac{\delta}{2} b \theta^2 \Phi_1^2 \right) + h.c. \right] . \quad (5.21)$$

Os novos propagadores podem ser derivados de (5.20), invertendo-se a parte quadrática. Estes irão possuir dependência explícita nas inserções espúrias θ e $\bar{\theta}$, provenientes das componentes de μ e $\bar{\mu}$.

O gerador funcional (euclidiano) é dado por:

$$Z[J, \bar{J}] = C \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} e^{-S[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}]} , \quad (5.22)$$

onde C é uma constante de normalização e

$$S[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}] = \int d^4x \left(\mathcal{L}^\delta + \int d^2\theta J_i \Phi_i + \int d^2\bar{\theta} \bar{J}_i \bar{\Phi}_i \right) . \quad (5.23)$$

Aqui, $J = (J_0, J_1, J_2)$ e $\bar{J} = (\bar{J}_0, \bar{J}_1, \bar{J}_2)$ são as fontes externas quiral e antiquiral, respectivamente. A teoria livre é determinada pelo funcional $Z_0 = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} e^{-S_0[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}]}$, onde

$S_0[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}]$ é obtida substituindo $\mathcal{L}_0^\delta$ por $\mathcal{L}^\delta$ em (5.23). Agora, vamos usar a seguinte propriedade: dado um supercampo quiral Φ , podemos transformar uma integral em $d^2\theta$ em uma integral em $d^4\theta$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta \Phi &= \int d^2\theta \frac{1}{16\Box} 16\Box \Phi \\
&= \int d^2\theta \frac{1}{16\Box} \bar{D}^2 D^2 \Phi \\
&= \int d^2\theta \left(-\frac{1}{4} \bar{D}^2 \right) \left(-\frac{D^2}{4\Box} \right) \Phi \\
&= \int d^4\theta \left(-\frac{D^2}{4\Box} \right) \Phi .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Com isto, podemos escrever $S_0[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}]$ como:

$$\begin{aligned}
S_0[\Phi, \bar{\Phi}; J, \bar{J}] &= \int d^8z \left[\bar{\Phi}_0 \Phi_0 + \bar{\Phi}_1 \Phi_1 + \bar{\Phi}_2 \Phi_2 \right. \\
&\quad + \left(M \Phi_1 \frac{D^2}{4\Box} \Phi_2 + a \Phi_0 \frac{D^2}{4\Box} \Phi_1 + \frac{b}{2} \theta^2 \Phi_1 \frac{D^2}{4\Box} \Phi_1 + h.c. \right) \\
&\quad \left. - \left(\Phi_0 \frac{D^2}{4\Box} J_0 + \Phi_1 \frac{D^2}{4\Box} J_1 + \Phi_2 \frac{D^2}{4\Box} J_2 + h.c. \right) \right] .
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Assim, o gerador funcional livre assume a forma

$$Z_0[J, \bar{J}] = C' \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^8z \left(\Omega^t \mathcal{P} \Omega + \Omega^t \Theta + \Theta^t \Omega \right) \right] , \tag{5.26}$$

com

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \end{pmatrix} , \quad \Theta = -\frac{1}{4\Box} \begin{pmatrix} D^2 J \\ \bar{D}^2 \bar{J} \end{pmatrix} . \tag{5.27}$$

A matriz $\mathcal{P}$ é uma matriz 6×6 definida por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{1}_3 & \mathcal{A}^\dagger \end{pmatrix} , \tag{5.28}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b\theta^2 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix} \frac{D^2}{4\Box} . \tag{5.29}$$

Integrando (5.26), a forma final de $Z_0[J, \bar{J}]$ é:

$$Z_0[J, \bar{J}] = C'' \exp \left[\frac{1}{2} \int d^8z \Theta^t \mathcal{P}^{-1} \Theta \right] , \tag{5.30}$$

com

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ V' & U^\dagger \end{pmatrix} , \tag{5.31}$$

onde

$$\begin{aligned} U &= -\mathcal{A}^\dagger (\mathbf{1}_3 - \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger)^{-1} , \\ V &= (\mathbf{1}_3 - \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A})^{-1} , \\ V' &= (\mathbf{1}_3 - \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger)^{-1} . \end{aligned} \quad (5.32)$$

De fato, notamos que a matriz $\mathcal{P}^{-1}$ (5.31) possui dependência nas variáveis θ e $\bar{\theta}$, devido à forma da matriz $\mathcal{A}$ (5.29) (e também de $\mathcal{A}^\dagger$). Assim, os propagadores também irão ser funções destas variáveis, e daí sua forma muito mais complexa em relação aos propagadores de modelos sem quebra de *SUSY*, como (5.3) por exemplo. As técnicas necessárias para tratar esta dependência explícita foram desenvolvidas em [51], e as usaremos para os nossos cálculos. Os vértices são encontrados derivando-se o gerador funcional com relação às fontes (anti)quirais, de acordo com as regras de derivação funcional no super-espaço apresentadas no apêndice B.

As regras de Feynman são dadas por:

- 1. Propagadores:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 \bar{\Phi}_0 \rangle &= (k^2 + |M|^2) A(k) \delta_{12}^4 + |a|^2 |b|^2 B(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_0 \bar{\Phi}_1 \rangle &= \bar{a} b C(k) \frac{1}{16} D_1^2 \bar{D}_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_0 \bar{\Phi}_2 \rangle &= -M \bar{a} A(k) \delta_{12}^4 + M \bar{a} |b|^2 B(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle &= E(k) \delta_{12}^4 + |b|^2 B(k) \frac{1}{16} D_1^2 \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \rangle &= -M \bar{b} F(k) \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_2 \bar{\Phi}_2 \rangle &= (k^2 + |a|^2) A(k) \delta_{12}^4 + |M|^2 |b|^2 B(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_0 \Phi_0 \rangle &= -|a|^2 \bar{b} C(k) \frac{1}{4} D_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle &= \bar{a} A(k) \frac{1}{4} D_1^2 \delta_{12}^4 - \bar{a} |b|^2 B(k) \frac{1}{4} \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_0 \Phi_2 \rangle &= -\bar{M} \bar{a} \bar{b} C(k) \frac{1}{4} D_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle &= \bar{b} F(k) \frac{1}{4} \bar{\theta}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle &= \bar{M} A(k) \frac{1}{4} D_1^2 \delta_{12}^4 - \bar{M} |b|^2 B(k) \frac{1}{4} D_1^2 \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \Phi_2 \Phi_2 \rangle &= -|M|^2 \bar{b} C(k) \frac{1}{4} D_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 , \end{aligned} \quad (5.33)$$

com

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{k^2 (k^2 + |M|^2 + |a|^2)} , \\ B(k) &= \frac{1}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2) [(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2]} , \\ C(k) &= \frac{1}{k^2 [(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2]} , \end{aligned}$$

$$E(k) = \frac{1}{k^2 + |M|^2 + |a|^2} ,$$

$$F(k) = \frac{1}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2} .$$

- 2. Vértices:

$$\begin{aligned} \text{vértice } \Phi_0 \Phi_1^2 & : 2\delta g \int d^4\theta ; \\ \text{vértice } \Phi_1 \Phi_2 & : -\delta\rho \int d^4\theta ; \\ \text{vértice } \Phi_0 \Phi_1 & : -\delta a \int d^4\theta ; \\ \text{vértice } \Phi_1 \Phi_1 & : -\delta b \int d^4\theta \theta^2 . \end{aligned} \quad (5.34)$$

- 3. A cada vértice quiral (antiquiral) com n linhas internas, estão associados $(n - 1)$ fatores $-\frac{1}{4}\bar{D}^2 (-\frac{1}{4}D^2)$ agindo em $(n - 1)$ linhas internas. Todas as linhas externas (Φ ou $\bar{\Phi}$) aparecem sem fator algum.
- 4. A cada loop independente com momento k é associada uma integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} . \quad (5.35)$$

- 5. Aos momentos externos, associamos o fator global

$$\left[\prod_{p_{ext}} \int \frac{d^4p_{ext}}{(2\pi)^4} \right] (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{ext} p_{ext} \right) . \quad (5.36)$$

- 6. Considerar os fatores de simetria usuais para os diagramas.

As regras de Feynman para os vértices possuem peso δ , como esperávamos.

Agora, com as regras acima, estamos prontos para calcular o potencial efetivo com a *LDE*, isto é, fazer teoria de perturbação tendo o parâmetro δ como constante perturbativa. Porém, antes disso, vamos provar um teorema de fundamental importância para o cálculo de correções quânticas. Ele restringirá de maneira drástica a forma que estas correções poderão ter, e trará consequências diretas para o estudo da renormalização para o modelo de O’Raifeartaigh.

5.2.1 O teorema de não-renormalização

Iremos agora enunciar o teorema de não-renormalização [13], e em seguida prová-lo de maneira bem genérica:

Teorema de não-renormalização

Toda contribuição perturbativa para a ação efetiva é escrita como uma única integral em $\int d^4\theta$, ou seja, sobre as variáveis de $\mathbb{R}^{4/4}$.

Prova:

Para provar este teorema, consideramos um superdiagrama (*IPI*) com um número L de *loops*. De maneira genérica, teorias com *SUSY* exata terão propagadores e vértices da forma (5.3), (5.4) (sem dependência em $\theta, \bar{\theta}$), enquanto que teorias com *SUSY* quebrada terão propagadores e vértices da forma (5.33), (5.34) (com dependência em $\theta, \bar{\theta}$). Assim, em ambos os casos, cada vértice é integrado sobre $d^4\theta$ e cada linha possui um certo número de derivadas D e $\bar{D}$ agindo em uma função $\delta_{12}^4 = \delta^4(\theta_1 - \theta_2)$. Dentro deste superdiagrama, consideremos um *loop* arbitrário com um número n de vértices. Sua contribuição é proporcional a

$$\int d^4\theta_1 \int d^4\theta_2 \dots \int d^4\theta_n [D \dots \bar{D} \delta_{12}^4] [D \dots \bar{D} \delta_{23}^4] \dots [D \dots \bar{D} \delta_{n1}^4] , \quad (5.37)$$

com um certo número de derivadas D e $\bar{D}$ agindo nestas funções. Integrando por partes, podemos transferir todas as derivadas covariantes agindo em δ_{12}^4 para δ_{23}^4 ou δ_{n1}^4 , ou ainda para linhas externas ao *loop*. Feito isto, podemos fazer a integral sobre $d^4\theta_2$, removendo assim a função δ_{12}^4 e substituindo θ_2 por θ_1 em todos os fatores. Fazendo isto $(n - 1)$ vezes, a contribuição deste *loop* será proporcional a uma única função delta de Grassmann, e a contribuição de todo o supergráfico será da forma

$$\prod_A \int d^4\theta_A \int d^4\theta_1 f(\theta_1, \theta_A) \{D \dots D \delta_{n1}^4\} \big|_{\theta_n=\theta_1} , \quad (5.38)$$

onde o índice A enumera os vértices externos ao *loop*. Usando as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m P_m , \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 , \end{aligned}$$

qualquer produto de fatores D e $\bar{D}$ pode ser reduzido a uma expressão com no máximo quatro destes fatores e, como

$$\delta_{n1}^4 = \delta^4(\theta_n - \theta_1) = (\theta_n - \theta_1)^2 (\bar{\theta}_n - \bar{\theta}_1)^2 , \quad (5.39)$$

são necessários exatamente dois fatores D e dois fatores $\bar{D}$ para que (5.38) seja diferente de zero. Assim, temos que

$$\frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \delta_{n1}^4 \bigg|_{\theta_n=\theta_1} = 1 . \quad (5.40)$$

Portanto, toda a contribuição do *loop* será reduzida a uma única integral nas variáveis $\theta, \bar{\theta}$.

Realizando este procedimento para todos os *loops*, reduzimos a contribuição de todo o supergráfico para uma única integral em $d^4\theta$, da forma

$$\prod_i \int d^4p_i \int d^4\theta F(p_i, \theta) , \quad (5.41)$$

onde p_i são os momentos externos independentes. *c.q.d.*

Portanto, a forma mais geral da ação efetiva é:

$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = \sum_n \prod_{i=1}^n \int d^4 p_i \int d^4 \theta \mathcal{T}_n(p_1, \dots, p_n) G_i(\Phi, \bar{\Phi}, D^\alpha \Phi, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{\Phi}, \dots), \quad (5.42)$$

onde $\mathcal{T}_n$ são funções invariantes por translação no espaço-tempo de Minkowski e F_i são funções locais dos supercampos externos $\Phi, \bar{\Phi}$ e de suas derivadas covariantes.

Várias consequências interessantes decorrem do teorema de não-renormalização. Por exemplo, através dele, é fácil observar que, para uma teoria com *SUSY* exata, os diagramas de vácuo se anulam, pois não há uma função do tipo $G_i(\Phi, \bar{\Phi}, D^\alpha \Phi, \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{\Phi}, \dots)$ em (5.42), logo a integral em $d^4 \theta$ é nula, corroborando o que já havíamos afirmado em (5.1). Mostraremos outras consequências abaixo, na forma de corolários:

Corolário 5.1: *As contribuições quânticas para o mínimo absoluto do potencial efetivo para configurações classicamente supersimétricas são nulas em teoria de perturbação.*

Prova: Como vimos no capítulo 3, configurações classicamente supersimétricas devem possuir energia de vácuo nula. Vimos também que, neste caso, os *vev*'s de todos os campos auxiliares F_i devem ser nulos, para que o mínimo do potencial escalar também o seja. De acordo com o teorema de não-renormalização, as correções quânticas perturbativas para o potencial efetivo, que é a parte da ação efetiva independente dos momentos, podem ser apenas da forma

$$\int d^4 \theta G(\langle \Phi \rangle, \langle \bar{\Phi} \rangle, \langle D^\alpha \Phi \rangle, \langle \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{\Phi} \rangle, \dots), \quad (5.43)$$

onde G é uma função dos supercampos e de suas derivadas covariantes na configuração classicamente supersimétrica. Porém, nestas configurações, os campos auxiliares são nulos e os campos espinoriais não podem possuir *vev* não nulo. Ou seja, todos os *vev*'s no argumento de G são independentes de θ e $\bar{\theta}$ e, logo, G também é. Desta forma, a integral (5.43) se anula.

c.q.d.

Obviamente, existem correções quânticas não nulas para o potencial efetivo fora do mínimo.

Corolário 5.2: *Nenhum termo do superpotencial é renormalizado em teoria de perturbação.*

Prova: A prova segue trivialmente do teorema de não-renormalização e do corolário 5.1.

Mais especificamente, pelo corolário acima, os contratermos - adicionados à Lagrangiana após a renormalização - não podem possuir estrutura de termos do superpotencial. Por outro lado, existirão renormalizações da função de onda para os supercampos quirais. Assim, a renormalização da constante de acoplamento e da massa em cada termo do superpotencial deve ser cancelada pela correspondente renormalização da função de onda quiral. Como esta última é adimensional, possui no máximo uma dependência logarítmica na escala de massa da teoria, o que também deve ocorrer para as duas primeiras. Isto demonstra o comportamento “ameno” de teorias supersimétricas no regime ultravioleta, que não se modifica em teorias com quebra espontânea ou de maneira *soft* de *SUSY*.

Uma outra maneira de ver este corolário é notando que contribuições quânticas proporcionais a uma integral em $d^2\theta$ (ou $d^2\bar{\theta}$) podem ser reescritas como uma integral em $d^4\theta$, usando (5.24).

Portanto, o teorema de não-renormalização restringe severamente a forma da ação efetiva e do potencial efetivo e estabelece que, devido à estrutura holomórfica do superpotencial, termos provenientes deste não sofrem renormalização em teoria de perturbação.

5.2.2 Soluções otimizadas em ordem δ : *FAC*

Possuímos agora todas as ferramentas necessárias para estudar o modelo de O’Raifeartaigh perturbativamente, usando a *LDE*. Calcularemos o potencial efetivo até ordem δ e, a partir daí, utilizando o critério *FAC* para encontrar as soluções otimizadas, obteremos uma expressão para o potencial de Coleman-Weinberg. As correções quânticas para o potencial efetivo são calculadas em potências de δ , usando diagramas *IPI*. Mostraremos que, após o processo de otimização, a contribuição de ordem δ^0 (diagrama de vácuo) fornecerá a soma de todos os diagramas de um *loop*. Estes resultados foram derivados em [52], e os apresentaremos a seguir.

A representação diagramática para o potencial efetivo até ordem δ é mostrada na figura abaixo:

$$\bigcirc + \bigcirc \text{---} \Phi_0 + \bigcirc \text{---} \theta^2 + \bigcirc \text{---} \Phi_1 + \bigcirc \text{---} \Phi_0 \text{---} \Phi_1 + \bigcirc \text{---} \Phi_1 \text{---} \Phi_2 + h.c.$$

Figura 5.1: Potencial efetivo até ordem δ .

Como os propagadores são dependentes de θ e $\bar{\theta}$, os tadpoles não são identicamente nulos, como em teorias com *SUSY* exata. O primeiro diagrama é o diagrama de vácuo, de ordem δ^0 , que podemos escrever, usando as técnicas desenvolvidas em [53], como um supertraço. As expressões para os diagramas da figura acima, na ordem em que aparecem, são:

- Ordem δ^0 (diagrama de vácuo):

$$\mathcal{G}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{Tr} \ln[P^T K] \delta_{21}^4, \quad (5.44)$$

onde $d^4\theta_{12} = d^4\theta_1 d^4\theta_2$ e a notação Tr se refere ao traço sobre os multipletos quirais na base real definida pelo vetor $(\Phi^T, \bar{\Phi})^T$. A matriz P é definida pelos projetores quirais $P_+ = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box}$ e $P_- = \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\Box}$ como

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_- \\ P_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

e

$$K = \begin{pmatrix} (AP_- + B\frac{1}{\Box^{1/2}}\eta_-)\frac{D^2}{4\Box} & \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{1}_3 & (\bar{A}P_+ + \bar{B}\frac{1}{\Box^{1/2}}\bar{\eta}_+)\frac{\bar{D}^2}{4\Box} \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_- = \Box^{1/2}P_- \theta^2 P_-, \quad \bar{\eta}_+ = \Box^{1/2}P_+ \bar{\theta}^2 P_+, \quad (5.47)$$

é o operador quadrático da parte livre da Lagrangiana.

• Ordem δ^1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(1)\delta^1} &= -2\delta g \bar{b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \int d^4 \theta \bar{\theta}^2 \Phi_0 + h.c.; \\ \mathcal{G}_2^{(1)\delta^1} &= \frac{1}{2} \delta |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c.; \\ \mathcal{G}_3^{(1)\delta^1} &= 4\delta g \bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 \Phi_1 + h.c.; \\ \mathcal{G}_4^{(1)\delta^1} &= -\delta |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c.; \\ \mathcal{G}_5^{(1)\delta^1} &= -\delta \rho \bar{M} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c.. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Note que conseguimos escrever todas as expressões para os superdiagramas no super-espço proporcionais a uma única integral em $d^4\theta$, de acordo com o teorema de não-renormalização. No apêndice D mostraremos de forma explícita como as integrais no super-espço são calculadas.

Usando os resultados

$$\int d^4 \theta \bar{\theta}^2 \Phi_0 = \int d^2 \theta \Phi_0, \quad \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 = 1 \quad \text{e} \quad \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 \Phi_1 = \int d^2 \theta \theta^2 \Phi_1, \quad (5.49)$$

o potencial efetivo até ordem δ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}^{(1)} &= \mathcal{G}^{(1)\delta^0} + \sum_{i=1}^5 \mathcal{G}_i^{(1)\delta^1} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 \theta_{12} \delta_{12}^4 Tr \ln[P^T K] \delta_{12}^4 + \delta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \left\{ -2g \bar{b} \int d^2 \theta \Phi_0 + \frac{1}{2} |b|^2 + h.c. \right\} \\ &\quad + \delta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \left\{ 4g \bar{a} |b|^2 \int d^2 \theta \theta^2 \Phi_1 - |a|^2 |b|^2 - \rho \bar{M} |b|^2 + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Devemos agora encontrar os valores otimizados para os parâmetros a , b e ρ . Primeiramente, aplicaremos o *FAC*. Temos então que resolver a equação

$$c^1(\mu, \bar{\mu}) = 0 \quad (5.51)$$

em $\delta = 1$, onde $c^1(\mu, \bar{\mu})$ corresponde aos coeficientes que multiplicam δ^1 na expansão perturbativa do potencial efetivo. De fato, como separamos os parâmetros de massa M_{ij} em uma parte independente de θ (a_{ij}) e uma parte dependente de θ (b_{ij}), de (5.19), vemos que os parâmetros a serem otimizados são na verdade $a_{01} = a$, $b_{11} = b$ e $\rho_{12} = \rho$. Assim, de (5.50), vemos claramente que a solução de (5.51) é:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4g \int d^2\theta \theta^2 \Phi_1, & \bar{a}_0 &= 4g \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 \bar{\Phi}_1; \\ b_0 &= 4g \int d^2\theta \Phi_0, & \bar{b}_0 &= 4g \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}_0; \\ \rho_0 &= 0, & \bar{\rho}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Este resultado mostra que os parâmetros otimizados a_0 e b_0 são funções dos acoplamentos e campos originais da teoria, como esperávamos.

Como Φ_0 e Φ_1 são supercampos clássicos, resolvendo as integrais no super-espaço obtemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{a}_0 = 4g \langle \varphi_1 \rangle; \\ b_0 &= \bar{b}_0 = 4g \langle F_0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Substituindo estes valores em (5.50), todos os termos que multiplicam δ se anulam e, então:

$$\mathcal{V}_{eff}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12} \delta_{12}^4 \text{Tr} \ln[P^T K] \delta_{12}^4. \quad (5.54)$$

Portanto, após a otimização, resta apenas calcularmos o diagrama de vácuo, dado como o supertraço de um operador no super-espaço.

5.2.3 Diagrama de vácuo

Mostraremos agora em detalhes como calcular o diagrama de vácuo (5.54) no super-espaço, usando as mesmas técnicas desenvolvidas em [53].

A parte quadrática da Lagrangiana livre (5.20) é dada por:

$$\mathcal{L}_0^\delta = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta \left(M \Phi_1 \Phi_2 + a \Phi_0 \Phi_1 + \frac{1}{2} b \theta^2 \Phi_1^2 \right) + h.c. \right]. \quad (5.55)$$

Em notação matricial, esta expressão é escrita como

$$\mathcal{L}_0^\delta = \int d^4\theta \bar{\Phi} \Phi - \frac{1}{2} \int d^2\theta \Phi^T (A + B\theta^2) \Phi - \frac{1}{2} \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi} (\bar{A} + \bar{B}\bar{\theta}^2) \bar{\Phi}^T, \quad (5.56)$$

onde A e B são dados em (5.47) e

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} , \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_0 & \bar{\Phi}_1 & \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} . \quad (5.57)$$

Para trabalharmos diretamente no super-espaço, usando as inserções espúrias θ^2 e $\bar{\theta}^2$, introduzimos alguns operadores de muita utilidade, definidos em [53]:

$$\eta_{\pm} = \square^{1/2} P_{\pm} \theta^2 P_{\pm} , \quad \bar{\eta}_{\pm} = \square^{1/2} P_{\pm} \bar{\theta}^2 P_{\pm} , \quad (5.58)$$

onde

$$P_+ = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16 \square} , \quad P_- = \frac{D^2 \bar{D}^2}{16 \square} \quad (5.59)$$

são os projetores quirais e antiquirais, respectivamente. É importante notar que os produtos $\eta_+ \bar{\eta}_+$ e $\bar{\eta}_+ \eta_+$ e, similarmente, os produtos $\eta_- \bar{\eta}_-$ e $\bar{\eta}_- \eta_-$, não são iguais, como podemos ver de

$$\begin{aligned} \eta_+ \bar{\eta}_+ &= \frac{1}{16} \bar{D}^2 \theta^2 \bar{\theta}^2 D^2 , & \bar{\eta}_+ \eta_+ &= \square P_+ \theta^2 \bar{\theta}^2 P_+ ; \\ \eta_- \bar{\eta}_- &= \square P_- \theta^2 \bar{\theta}^2 P_- , & \bar{\eta}_- \eta_- &= \frac{1}{16} D^2 \theta^2 \bar{\theta}^2 \bar{D}^2 . \end{aligned} \quad (5.60)$$

Os operadores espúrios η_+ e $\bar{\eta}_+$ possuem propriedades algébricas interessantes. Eles geram uma álgebra de Clifford:

$$\{\eta_+, \bar{\eta}_+\} = \mathbf{1}_+ , \quad (5.61)$$

onde o operador $\mathbf{1}_+ = \eta_+ \bar{\eta}_+ + \bar{\eta}_+ \eta_+$ realiza o papel da identidade, pois

$$\eta_+ \mathbf{1}_+ = \mathbf{1}_+ \eta_+ = \eta_+ , \quad \bar{\eta}_+ \mathbf{1}_+ = \mathbf{1}_+ \bar{\eta}_+ = \bar{\eta}_+ . \quad (5.62)$$

Podemos considerar a combinação

$$A_+ = A_{11} \bar{\eta}_+ \eta_+ + A_{12} \bar{\eta}_+ + A_{21} \eta_+ + A_{22} \eta_+ \bar{\eta}_+ \quad (5.63)$$

como sendo uma matriz 2×2 :

$$A_+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{\eta_+} . \quad (5.64)$$

O traço de A_+ é dado por

$$\begin{aligned} tr A_+ &= \begin{pmatrix} tr A_{11} & tr A_{12} \\ tr A_{21} & tr A_{22} \end{pmatrix}_{\eta_+} \\ &= tr A_{11} \bar{\eta}_+ \eta_+ + tr A_{12} \bar{\eta}_+ + tr A_{21} \eta_+ + tr A_{22} \eta_+ \bar{\eta}_+ . \end{aligned} \quad (5.65)$$

Definimos também o projetor

$$\perp_+ = P_+ - \mathbf{1}_+ = P_+ - \eta_+ \bar{\eta}_+ - \bar{\eta}_+ \eta_+ , \quad (5.66)$$

que é perpendicular a qualquer operador A_+ da forma (5.64), isto é, $\perp_+ A_+ = A_+ \perp_+ = 0$.

Como η_- e $\bar{\eta}_-$ satisfazem à mesma álgebra de η_+ and $\bar{\eta}_+$, teremos equações similares a (5.64) - (5.66) para A_- , $tr A_-$ e $\perp_-$, substituindo η_+ e $\bar{\eta}_+$ por η_- e $\bar{\eta}_-$.

Com os operadores $P_{\pm}$, $\eta_{\pm}$ e $\bar{\eta}_{\pm}$, podemos reescrever (5.56) como

$$\mathcal{L}_0^{\delta} = \int d^4\theta \left\{ \bar{\Phi}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^T \left(AP_- + B\frac{1}{\square^{1/2}}\eta_- \right) \frac{D^2}{4\square}\Phi + \frac{1}{2}\bar{\Phi} \left(\bar{A}P_+ + \bar{B}\frac{1}{\square^{1/2}}\bar{\eta}_+ \right) \frac{\bar{D}^2}{4\square}\bar{\Phi}^T \right\}. \quad (5.67)$$

Desta expressão, podemos escrever a equação para o diagrama de vácuo como

$$\mathcal{G}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 Tr \ln[P^T K] \delta_{21}^4, \quad (5.68)$$

onde K é o operador quadrático da parte livre da Lagrangiana definido em (5.46) e P é a matriz definida em (5.45). Para calcular o diagrama de vácuo, reescrevemos a Lagrangiana $\mathcal{L}_0^{\delta}$ da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{\delta} &= \frac{1}{2} \int d^4\theta \begin{pmatrix} \Phi^T & \bar{\Phi} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi}^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4\theta \begin{pmatrix} \Phi^T & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\Phi\Phi} & K_{\Phi\bar{\Phi}} \\ K_{\bar{\Phi}\Phi} & K_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi}^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

De (5.45) e (5.46), escrevemos

$$P^T K = \begin{pmatrix} P_+ & K_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \\ K_{\Phi\Phi} & P_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ & C \\ \bar{C} & P_- \end{pmatrix}, \quad (5.70)$$

com

$$\begin{aligned} C &= \left(\bar{A}P_+ + \bar{B}\frac{1}{\square^{1/2}}\bar{\eta}_+ \right) \frac{\bar{D}^2}{4\square}, \\ \bar{C} &= \left(AP_- + B\frac{1}{\square^{1/2}}\eta_- \right) \frac{D^2}{4\square}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Agora, escrevendo $P^T K$ como

$$\begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C \\ \bar{C} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.72)$$

a expressão (5.68) para o diagrama de vácuo fica:

$$\mathcal{G}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \{ tr \ln P_+ + tr \ln P_- + Tr \ln[1 + Z] \} \delta_{21}^4, \quad (5.73)$$

com

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & C \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

De (5.73), vemos que podemos separar $\mathcal{G}^{(1)\delta^0}$ em três partes: uma contribuição de P_+ , uma contribuição de P_- e uma contribuição proporcional a C e $\bar{C}$.

A contribuição de P_+ é dada por:

$$\mathcal{G}_{P_+}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{tr} \ln P_+ \delta_{21}^4 . \quad (5.75)$$

Como $\delta_{21}^4 P_+ \delta_{21}^4 = -\delta_{21}^4 \frac{1}{k^2}$, obtemos que $\mathcal{G}_{P_+}^{(1)\delta^0} = 0$ e, identicamente, $\mathcal{G}_{P_-}^{(1)\delta^0} = 0$.

A contribuição do último termo em (5.73) é:

$$\mathcal{G}_C^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{Tr} \ln(1 + Z) \delta_{21}^4 . \quad (5.76)$$

Para calcular esta expressão, introduzimos um parâmetro contínuo $0 \leq \lambda \leq 1$, que multiplica os termos fora da diagonal de Z , isto é, λ multiplica C e $\bar{C}$, de tal forma que

$$\mathcal{G}_{C\lambda}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{Tr} \ln(1 + \lambda Z) \delta_{21}^4 \quad (5.77)$$

e

$$\mathcal{G}_C^{(1)\delta^0} = \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{C\lambda}^{(1)\delta^0} . \quad (5.78)$$

Derivando (5.77) com respeito a λ , obtemos:

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{C\lambda}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{Tr} [Z - \lambda Z^2 + \lambda^2 Z^3 - \lambda^3 Z^4 + \dots] \delta_{21}^4 . \quad (5.79)$$

Como

$$Z^2 = \begin{pmatrix} C\bar{C} & 0 \\ 0 & \bar{C}C \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

é bloco diagonal, temos que potências ímpares de Z são necessariamente não diagonais na base real dos multipletos quirais. O traço Tr nesta base é a soma dos traços na base complexa das partes bloco diagonais; assim, as potências ímpares de Z não contribuem, e (5.79) é escrita como

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{C\lambda}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{Tr} [-\lambda Z^2 - \lambda^3 Z^4 - \lambda^5 Z^6 - \dots] \delta_{21}^4 . \quad (5.81)$$

Integrando com respeito a λ , obtemos:

$$\mathcal{G}_C^{(1)\delta^0} = \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12}\delta_{21}^4 \text{tr} [\ln(P_+ - C\bar{C}) + \ln(P_- - \bar{C}C)] \delta_{21}^4 . \quad (5.82)$$

Agora, escrevendo

$$\begin{aligned} C\bar{C} &= \frac{\bar{A}A}{\square} P_+ + \frac{\bar{A}B}{\square^{3/2}} \eta_+ + \frac{\bar{B}A}{\square^{3/2}} \bar{\eta}_+ + \frac{\bar{B}B}{\square^2} \bar{\eta}_+ \eta_+ , \\ \bar{C}C &= \frac{A\bar{A}}{\square} P_- + \frac{B\bar{A}}{\square^{3/2}} \eta_- + \frac{A\bar{B}}{\square^{3/2}} \bar{\eta}_- + \frac{B\bar{B}}{\square^2} \eta_- \bar{\eta}_- , \end{aligned} \quad (5.83)$$

e usando (5.64), temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} P_- - \bar{C}C &= \perp_- \left(1 - \frac{A\bar{A}}{\square} \right) + \mathbf{1}_- - E_- , \\ P_+ - C\bar{C} &= \perp_+ \left(1 - \frac{\bar{A}A}{\square} \right) + \mathbf{1}_+ - E_+ , \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde

$$\begin{aligned} E_- &= \begin{pmatrix} \frac{A\bar{A}}{\square} & \frac{A\bar{B}}{\square^{3/2}} \\ \frac{B\bar{A}}{\square^{3/2}} & \frac{1}{\square} \left(A\bar{A} + \frac{B\bar{B}}{\square} \right) \end{pmatrix}_{\eta_-} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{\eta_-}, \\ E_+ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\square} \left(\bar{A}A + \frac{\bar{B}B}{\square} \right) & \frac{\bar{B}A}{\square^{3/2}} \\ \frac{\bar{A}B}{\square^{3/2}} & \frac{\bar{A}A}{\square} \end{pmatrix}_{\eta_+} = \begin{pmatrix} \delta^T & \beta^T \\ \gamma^T & \alpha^T \end{pmatrix}_{\eta_+}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Usando estas relações, (5.82) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_C^{(1)\delta^0} &= \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} \left\{ \ln \left[\perp_+ \left(1 - \frac{A\bar{A}}{\square} \right) + \mathbf{1}_+ - E_+ \right] + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\perp_- \left(1 - \frac{A\bar{A}}{\square} \right) + \mathbf{1}_- - E_- \right] \right\} \delta_{21}^4. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Esta expressão pode ser separada em duas partes: uma contribuição de $\perp_{\pm}$ e uma contribuição proporcional a $(\mathbf{1} - E)_{\pm}$. Calculamos primeiramente a contribuição de $(\mathbf{1}_- - E_-)$, escrevendo-a da forma:

$$\mathcal{G}_{\eta_-}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} [\ln(\mathbf{1}_- - E_-)]_2 \delta_{21}^4. \quad (5.87)$$

Novamente introduzimos o parâmetro contínuo $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\mathcal{G}_{\eta_- \lambda}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} [\ln(\mathbf{1}_- - \lambda E_-)]_2 \delta_{21}^4. \quad (5.88)$$

Derivando com relação a λ :

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta_- \lambda}^{(1)\delta^0} = -\frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} F[E_-]_2 \delta_{21}^4, \quad (5.89)$$

com $F[E] = E(\mathbf{1} - \lambda E)^{-1}$. Escrevendo $F[E]$ explicitamente, usando (5.63), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta_- \lambda}^{(1)\delta^0} &= -\frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} \{ F_{11}[E_-] \bar{\eta}_- \eta_- + F_{12}[E_-] \bar{\eta}_- \\ &\quad + F_{21}[E_-] \eta_- + F_{22}[E_-] \eta_- \bar{\eta}_- \}_2 \delta_{21}^4. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Usando as identidades no super-espço:

$$\int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 [F \eta_{\pm} \bar{\eta}_{\pm}]_2 \delta_{21}^4 = \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 [F \bar{\eta}_{\pm} \eta_{\pm}]_2 \delta_{21}^4 = \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 F_2, \quad (5.91)$$

e

$$\begin{aligned} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 [F \eta_{\pm}]_2 \delta_{21}^4 &= \int d^4\theta \theta^2 \left[F \frac{1}{\square^{1/2}} \right]_2, \\ \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 [F \bar{\eta}_{\pm}]_2 \delta_{21}^4 &= \int d^4\theta \bar{\theta}^2 \left[F \frac{1}{\square^{1/2}} \right]_2, \end{aligned} \quad (5.92)$$

reescrevemos (5.90) como:

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta_- \lambda}^{(1)\delta^0} = -\frac{1}{4} \int d^4\theta \text{tr} \left\{ (F_{11}[E_-] + F_{22}[E_-]) \theta^2 \bar{\theta}^2 + \frac{1}{\square^{1/2}} F_{21}[E_-] \theta^2 + \frac{1}{\square^{1/2}} F_{12}[E_-] \bar{\theta}^2 \right\}. \quad (5.93)$$

Ao calcular a contribuição de $(\mathbf{1}_+ - E_+)$, obtemos exatamente o mesmo resultado (5.93). Assim, a soma das contribuições de $(\mathbf{1}_- - E_-)$ e $(\mathbf{1}_+ - E_+)$ é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta\lambda}^{(1)\delta^0} &= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta-\lambda}^{(1)\delta^0} + \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta+\lambda}^{(1)\delta^0} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4\theta \text{tr} \left\{ (F_{11}[E_-] + F_{22}[E_-])\theta^2\bar{\theta}^2 + \frac{1}{\square^{1/2}} F_{21}[E_-]\theta^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\square^{1/2}} F_{12}[E_-]\bar{\theta}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Como a matriz E_- depende das matrizes A e B e estas não dependem de θ ou $\bar{\theta}$ (vide (5.47)), as contribuições proporcionais a θ^2 e $\bar{\theta}^2$ na expressão acima são nulas, ou seja, $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta\theta^2}^{(1)\delta^0} = \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta\bar{\theta}^2}^{(1)\delta^0} = 0$, e a única contribuição não nula é a proporcional a $\theta^2\bar{\theta}^2$.

Para calcular esta contribuição, usamos (5.85), e escrevemos

$$F_{11}[E_-] + F_{22}[E_-] = -\frac{d}{d\lambda} \left[\ln(1 - \lambda\alpha) + \ln \left(1 - \lambda\delta - \frac{\lambda^2\beta\gamma}{1 - \lambda\alpha} \right) \right]. \quad (5.95)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_{\eta\lambda\theta^2\bar{\theta}^2}^{(1)\delta^0} &= -\frac{1}{2} \int d^4\theta \text{tr} \left\{ (F_{11}[E_-] + F_{22}[E_-])\theta^2\bar{\theta}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4\theta \frac{d}{d\lambda} \text{tr} \left[\ln(1 - \lambda\alpha) + \ln \left(1 - \lambda\delta - \frac{\lambda^2\beta\gamma}{1 - \lambda\alpha} \right) \right] \theta^2\bar{\theta}^2. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Agora, usando a relação

$$1 - \delta - \frac{\beta\gamma}{1 - \alpha} = \frac{1}{\square} \left\{ \square - A\bar{A} - \frac{B\bar{B}}{\square - A\bar{A}} \right\}, \quad (5.97)$$

e integrando em λ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\eta\theta^2\bar{\theta}^2}^{(1)\delta^0} &= \frac{1}{2} \int d^4\theta \text{tr} \left[\ln(1 - \alpha) + \ln \left(1 - \delta - \frac{\beta\gamma}{1 - \alpha} \right) \right] \theta^2\bar{\theta}^2 \\ &= \int d^4\theta \theta^2\bar{\theta}^2 \left\{ \text{tr} L_0(A\bar{A}) + \frac{1}{2} K(A\bar{A}, B) \right\}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

com

$$L_0(A\bar{A}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{A\bar{A}}{k^2} \right), \quad (5.99)$$

$$K(A\bar{A}, B) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left(1 - \frac{B\bar{B}}{(k^2 + A\bar{A})^2} \right). \quad (5.100)$$

A relação (5.98) representa a soma das contribuições proporcionais a $(\mathbf{1}_- - E_-)$ e $(\mathbf{1}_+ - E_+)$ na equação (5.86). Precisamos agora calcular as contribuições proporcionais aos operadores $\perp_{\pm}$. A contribuição proporcional a $\perp_-$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\perp-}^{(1)\delta^0} &= \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} \ln \left[\perp_- \left(1 - \frac{A\bar{A}}{\square} \right) \right] \delta_{21}^4 \\ &= \frac{1}{4} \int d^4\theta_{12} \delta_{21}^4 \text{tr} \ln \left[(P_- - \bar{\eta}_- \eta_- - \eta_- \bar{\eta}_-) \left(1 + \frac{A\bar{A}}{k^2} \right) \right] \delta_{21}^4. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Usando o fato de que $\delta_{21}^4 P_+ \delta_{21}^4 = -\delta_{21}^4 \frac{1}{k^2}$ e a relação (5.91), obtemos:

$$\mathcal{G}_{\perp-}^{(1)\delta^0} = - \int d^4\theta \text{tr} \left[\frac{1}{4} L_1(A\bar{A}) + \frac{1}{2} L_0(A\bar{A}) \theta^2 \bar{\theta}^2 \right], \quad (5.102)$$

onde $L_0(A\bar{A})$ é dado em (5.99) e

$$L_1(A\bar{A}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \ln \left(1 + \frac{A\bar{A}}{k^2} \right). \quad (5.103)$$

As expressões para as integrais $L_0(A\bar{A})$, $K(A\bar{A}, B)$ e $L_1(A\bar{A})$ estão listadas no apêndice E.

A contribuição proporcional a $\perp_+$ é exatamente igual a (5.102) e, assim, a contribuição total dos projetores $\perp_{\pm}$ é:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\perp}^{(1)\delta^0} &= \mathcal{G}_{\perp-}^{(1)\delta^0} + \mathcal{G}_{\perp+}^{(1)\delta^0} \\ &= - \int d^4\theta \text{tr} \left[\frac{1}{2} L_1(A\bar{A}) + L_0(A\bar{A}) \theta^2 \bar{\theta}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Portanto, de (5.98) e (5.104), a expressão para o diagrama de vácuo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)\delta^0} &= \mathcal{G}_{\eta\theta^2\bar{\theta}^2}^{(1)\delta^0} + \mathcal{G}_{\perp}^{(1)\delta^0} \\ &= \frac{1}{2} K(A\bar{A}, B) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[L_0(\tilde{A} + \tilde{B}) + L_0(\tilde{A} - \tilde{B}) - 2L_0(\tilde{A}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\ln \left(1 + \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{k^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \left(1 + \frac{\tilde{A}}{k^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.105)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A\bar{A} = \begin{pmatrix} 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2 & 0 & 4mg\langle\varphi_1\rangle \\ 0 & m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2 & 0 \\ 4mg\langle\varphi_1\rangle & 0 & m^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} &= (B\bar{B})^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4g\langle F_0\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Finalmente, usando a expressão (E.6) para as integrais $L_0(m^2)$, podemos incorporar os termos divergentes e constantes na energia do vácuo, pois estamos calculando um diagrama de vácuo, fazendo com que os procedimentos de regularização e renormalização sejam triviais. Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}^{(1)} = \mathcal{G}^{(1)\delta^0} &= \frac{1}{(8\pi)^2} \left\{ (m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2)^2 \ln \left[1 - \frac{16g^2\langle F_0\rangle^2}{(m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2)^2} \right] \right. \\ &\quad + 8g\langle F_0\rangle (m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2) \ln \left[\frac{m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2 + 4g\langle F_0\rangle}{m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2 - 4g\langle F_0\rangle} \right] \\ &\quad \left. + 16g^2\langle F_0\rangle^2 \ln \left[\frac{(m^2 + 16g^2\langle\varphi_1\rangle^2)^2 - 16g^2\langle F_0\rangle^2}{\mu^4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Este é o potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh [51] e representa a soma de todos os diagramas de um *loop*, ou seja, um resultado não perturbativo. Este resultado é válido em um *loop* para qualquer ordem em δ , com os parâmetros otimizados dados por (5.52), (5.53).

Portanto, usando a *LDE* até ordem δ , derivamos o potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh. Para isto, tivemos que calcular apenas um diagrama, o diagrama de vácuo, de ordem δ^0 . De fato, não foi preciso calcular os diagramas de ordem δ de forma explícita pois, usando o *FAC*, foi possível encontrar as soluções otimizadas para a , b e ρ antes mesmo de fazê-lo.

Salientamos aqui que, caso desejássemos derivar este resultado calculando diagramas de Feynman no espaço-tempo usual, usando regras de Feynman para os campos componentes, a quantidade de diagramas necessários para obter (5.107) seria absurdamente grande (da ordem de mil), o que demonstra a eficiência e praticidade da *LDE* no super-espaço.

5.2.4 Soluções otimizadas em ordem δ : *PMS*

Mostraremos agora, de maneira breve e apenas como uma verificação, como aplicar a *LDE* com o *PMS* como método de otimização.

De acordo com o *PMS*, precisamos resolver as seguintes equações para encontrar os valores otimizados a_0 , b_0 e ρ_0 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{(1)}(a, b, \rho)}{\partial a} \right|_{a=a_0, \delta=1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{(1)}(a, b, \rho)}{\partial b} \right|_{b=b_0, \delta=1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{(1)}(a, b, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0, \delta=1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Para encontrar as soluções das equações acima, reescrevemos a equação (5.105) para o diagrama de vácuo como

$$\mathcal{G}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{|b|^2}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2} \right], \quad (5.109)$$

de tal forma que (5.50) seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}^{(1)} &= \mathcal{G}^{(1)\delta^0} + \sum_{i=1}^5 \mathcal{G}_i^{(1)\delta^1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{|b|^2}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2} \right] \\ &\quad + \delta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \left\{ -2g\bar{b} \int d^2 \theta \phi_0 + \frac{1}{2} |b|^2 + h.c. \right\} \end{aligned}$$

$$+\delta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \left\{ 4g\bar{a} |b|^2 \int d^2\theta\theta^2\phi_1 - |a|^2 |b|^2 - \rho\bar{M} |b|^2 + h.c. \right\} \quad (5.110)$$

A equação do *PMS* para o parâmetro a é, então:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{(1)}}{\partial a} \right|_{\delta=1} &= |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \left\{ 4g \int d^2\theta\bar{\theta}^2\bar{\Phi}_1 - \bar{a} \right\} \\ &\quad + \bar{a}\bar{b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 + |M|^2 + |a|^2) [F(k)]^2 \left\{ 4g \int d^2\theta\Phi_0 - b + h.c. \right\} \\ &\quad + \bar{a} |b|^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [B(k)]^2 \left\{ 4g\bar{a} \int d^2\theta\theta^2\Phi_1 - |a|^2 - \rho\bar{M} + h.c. \right\} \\ &\quad - 3\bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 [B(k)]^2 \\ &\quad \quad \times \left\{ 4g\bar{a} \int d^2\theta\theta^2\Phi_1 - |a|^2 - \rho\bar{M} + h.c. \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Teremos equações análogas para b e ρ e, daí, vemos que o mesmo resultado de (5.52) é obtido e, substituindo estas soluções em (5.50) ou (5.110), obtemos exatamente o resultado (5.107). Logo, também obtemos o potencial de Coleman-Weingerg ao usar o *PMS* como método de otimização.

Portanto, usando a *LDE*, através do cálculo de apenas um superdiagrama, obtivemos a soma de todos os diagramas de um *loop* para o modelo de O’Raifeartaigh, tanto usando o *FAC* quanto o *PMS*. No próximo capítulo, mostraremos uma forma de obter correções de dois *loops* para o potencial efetivo deste modelo, usando o *método de campo de fundo*.

Capítulo 6

Método de campo de fundo no modelo de O’Raifeartaigh

Como visto no capítulo 4, no *método de campo de fundo*, os campos da teoria são separados em um campo clássico constante (campo de fundo) mais flutuações quânticas. Desta forma, o potencial efetivo é igual ao potencial em nível de árvore no fundo clássico mais a soma de diagramas de vácuo *IPI* conexos, com massas e acoplamentos dependentes dos campos.

Para teorias com *SUSY* exata, os diagramas de vácuo são identicamente nulos, devido às integrações em $d^4\theta$. Porém, na presença de termos de quebra *soft*, os propagadores possuem uma dependência não trivial em θ e $\bar{\theta}$ [51], logo, os diagramas de vácuo contribuem, como visto no capítulo anterior.

Agora, mostraremos que as técnicas de cálculo no super-espço, com inserções espúrias, podem ser uma ferramenta poderosa na obtenção de correções quânticas de um número maior de *loops*. Calcularemos o potencial efetivo em dois *loops* para o modelo de O’Raifeartaigh diretamente no super-espço, usando o *método de campo de fundo* [54].

6.1 Campos de fundo e regras de Feynman

Retomando (5.10), a Lagrangiana do modelo de O’Raifeartaigh é dada por:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \bar{\Phi}_i \Phi_i - \left[\int d^2\theta \left(\xi \Phi_0 + m \Phi_1 \Phi_2 + g \Phi_0 \Phi_1^2 \right) + h.c. \right] , \quad i = 0, 1, 2 , \quad (6.1)$$

com

$$\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m} \left(\varphi_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta^2 F_i(y) \right) , \quad i = 0, 1, 2 . \quad (6.2)$$

No capítulo 3, vimos que o potencial escalar para esse modelo é:

$$V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) = |\xi + g\varphi_1^2|^2 + |m\varphi_2 + 2g\varphi_0\varphi_1|^2 + m^2 |\varphi_1|^2 . \quad (6.3)$$

Para simplificar a notação, a partir de agora denotaremos os *vev*’s dos campos escalares φ_0 e φ_1 por y e x , respectivamente, de tal forma que o mínimo do potencial escalar seja:

$$\langle \varphi_0 \rangle = y , \quad \langle \varphi_1 \rangle = x , \quad \langle \varphi_2 \rangle = -\frac{2g}{m}xy , \quad (6.4)$$

onde y é completamente indeterminado (direção plana) e x obedece à equação $x(m^2 + 2\xi g + 2g^2x^2) = 0$. No mínimo:

$$V(\langle\varphi_1\rangle) = (\xi + gx^2)^2 + (mx)^2 = V(x) . \quad (6.5)$$

Resolvendo as equações de movimento para os campos auxiliares, obtemos:

$$\langle F_0 \rangle = \Delta , \quad \langle F_1 \rangle = 0 , \quad \langle F_2 \rangle = mx , \quad (6.6)$$

com $\Delta = \xi + gx^2$. Como y é completamente indeterminado, fazemos a escolha $y = 0$ e consideraremos a fase não simétrica, ou seja, $x \neq 0$.

Aplicaremos agora o *método de campo de fundo*. Como iremos trabalhar ao redor do vácuo, tomamos $\langle F_0 \rangle = \Delta$, $\langle \varphi_1 \rangle = x$, $\langle F_2 \rangle = mx$ e separamos os supercampos como uma soma de um supercampo quântico (ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2) mais os respectivos valores clássicos:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \phi_0 + \theta^2 \Delta , \\ \Phi_1 &= \phi_1 + x , \\ \Phi_2 &= \phi_2 + \theta^2 mx . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Substituindo estas expressões em (6.1) e expandindo em torno da configuração clássica até terceira ordem nos supercampos quânticos, temos:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \bar{\phi}_i \phi_i - \left[\int d^2\theta (\xi \phi_0 + m \phi_1 \phi_2 + 2gx \phi_0 \phi_1 + g\Delta \theta^2 \phi_1^2 + g\phi_0 \phi_1^2) + h.c. \right] . \quad (6.8)$$

Novamente, termos proporcionais a θ^2 e $\bar{\theta}^2$ sinalizam a quebra explícita de *SUSY* de maneira *soft*, e estes aparecem de forma natural quando a quebra espontânea de *SUSY* é estudada no super-espaço.

Os propagadores podem ser encontrados usando as técnicas desenvolvidas em [51] e são dados por (listaremos apenas os que iremos utilizar neste capítulo):

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 \bar{\phi}_0 \rangle &= (k^2 + m^2) A(k) \delta_{12}^4 + (2gx)^2 (2g\Delta)^2 B(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \phi_0 \bar{\phi}_1 \rangle &= (2gx)(2g\Delta) C(k) \frac{1}{16} D_1^2 \bar{D}_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \phi_1 \bar{\phi}_1 \rangle &= E(k) \delta_{12}^4 + (2g\Delta)^2 B(k) \frac{1}{16} D_1^2 \theta_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \phi_0 \phi_0 \rangle &= -(2gx)^2 (2g\Delta) C(k) \frac{1}{4} D_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \phi_0 \phi_1 \rangle &= (2gx) A(k) \frac{1}{4} D_1^2 \delta_{12}^4 - (2gx)(2g\Delta)^2 B(k) \frac{1}{4} \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 ; \\ \langle \phi_1 \phi_1 \rangle &= (2g\Delta) F(k) \frac{1}{4} \bar{\theta}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 , \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde

$$A(k) = \frac{1}{k^2 (k^2 + m^2 + 4g^2x^2)} ,$$

$$\begin{aligned}
B(k) &= \frac{1}{(k^2 + m^2 + 4g^2x^2) [(k^2 + m^2 + 4g^2x^2)^2 - 4g^2\Delta^2]} , \\
C(k) &= \frac{1}{k^2 [(k^2 + m^2 + 4g^2x^2)^2 - 4g^2\Delta^2]} , \\
E(k) &= \frac{1}{k^2 + m^2 + 4g^2x^2} , \\
F(k) &= \frac{1}{(k^2 + m^2 + 4g^2x^2)^2 - 4g^2\Delta^2} ,
\end{aligned}$$

ou seja, os propagadores agora são iguais aos de (5.33), utilizados na *LDE*, com $a = 2gx$, $b = 2g\Delta$ e $M = m$.

Agora, temos apenas um termo de interação - $g\Phi_0\Phi_1^2$ - na Lagrangiana (6.1) e a regra de Feynman correspondente é:

$$\text{vértice } \phi_0\phi_1^2 : -2g \int d^4\theta . \quad (6.10)$$

As contribuições quânticas para o potencial efetivo são calculadas no super-espaço através superdiagramas de vácuo *IPI* conexos, usando as regras de Feynman definidas em (6.9) e (6.10).

Expandindo o gerador funcional, o potencial efetivo pode ser expresso da forma

$$\mathcal{V}_{eff} = \mathcal{V}_{eff}^{(0)} + \frac{1}{(4\pi)^2} \mathcal{V}_{eff}^{(1)} + \frac{1}{(4\pi)^4} \mathcal{V}_{eff}^{(2)} + \dots + \frac{1}{(4\pi)^{2n}} \mathcal{V}_{eff}^{(n)} + \dots , \quad (6.11)$$

onde $\mathcal{V}_{eff}^{(n)}$ representa a correção de n loops. O diagrama de vácuo de um *loop* da figura abaixo vem da parte quadrática da expansão da ação, enquanto que os diagramas de vácuo de dois *loops* vêm dos termos com três supercampos quânticos.

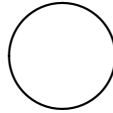


Figura 6.1: Diagrama de vácuo de um *loop*.

O diagrama de um *loop* acima foi calculado no capítulo anterior e é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{eff}^{(1)} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left[L_0(\tilde{A} + \tilde{B}) + L_0(\tilde{A} - \tilde{B}) - 2L_0(\tilde{A}) \right] \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4} (m^2 + 4g^2x^2)^2 \ln \left[1 - \frac{4g^2\Delta^2}{(m^2 + 4g^2x^2)^2} \right] \right. \\
&\quad + g\Delta (m^2 + 4g^2x^2) \ln \left[\frac{m^2 + 4g^2x^2 + 2g\Delta}{m^2 + 4g^2x^2 - 2g\Delta} \right] \\
&\quad \left. + g^2\Delta^2 \ln \left[\frac{(m^2 + 4g^2x^2)^2 - 4g^2\Delta^2}{\mu^4} \right] \right\} , \quad (6.12)
\end{aligned}$$

com $\tilde{A} = A\bar{A}$, $\tilde{B} = (B\bar{B})^{1/2}$ e

$$L_0(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) . \quad (6.13)$$

Este resultado representa o potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh e vamos agora mostrar como calcular correções quânticas de uma ordem acima para este modelo.

6.2 O potencial efetivo em dois *loops*

O uso do formalismo de supercampos para o cálculo de superdiagramas reduz drasticamente o número de diagramas individuais a serem calculados, em relação aos cálculos com campos componentes. Porém, como vimos no capítulo anterior, os propagadores são proporcionais aos termos espúrios θ e $\bar{\theta}$ em teorias com quebra do tipo *soft* de *SUSY*, o que torna sua forma funcional complexa, além do fato de que os diagramas de vácuo envolvem uma soma infinita de termos espúrios. Todavia, usando as técnicas desenvolvidas em [53] e usadas no capítulo anterior, os termos espúrios podem ser somados em todas as ordens. Usaremos estas técnicas para calcular superdiagramas de vácuo de dois *loops*.

Como há somente um termo de interação, temos apenas um tipo de topologia para os diagramas de vácuo de dois *loops*, desenhados na figura abaixo:

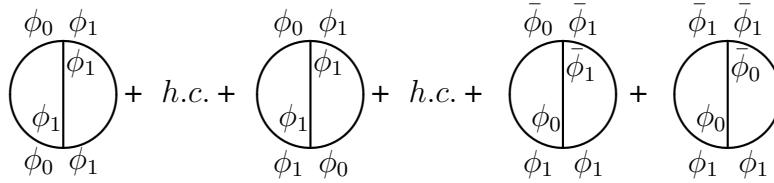


Figura 6.2: Diagramas de vácuo de dois *loops*.

Iremos agora calcular estes diagramas na ordem em que aparecem na figura, e escolhemos realizar os cálculos com parâmetros renormalizados.

6.2.1 Diagrama $\mathcal{G}_1^{(2)}$

Voltando à notação $a = 2gx$ and $b = 2g\Delta$, por simplicidade, a contribuição do primeiro diagrama é:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(2)} &= (-2g)(-2g) \int \frac{d^4 p d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^8} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(p) \langle \phi_0 \phi_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(k) \langle \phi_1 \phi_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{16} \bar{D}_1^2(q) \bar{D}_2^2(-q) \langle \phi_1 \phi_1 \rangle \right] \\ &= -\frac{g^2}{(16)^3} a^2 b^3 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} C(p) F(k) F(q) \mathcal{I}_1(\theta, \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde $q = (k - p)$ e a integral $\mathcal{I}_1(\theta, \bar{\theta})$ é dada no apêndice D. Aqui, usamos a álgebra das derivadas covariantes e as relações algébricas com os termos espúrios, apresentadas no apêndice C. O mesmo tipo de manipulação algébrica será usado para resolver as próximas integrais no super-espaço. No apêndice D, algumas destas integrais são explicitamente calculadas, como exemplos destas manipulações.

Substituindo (D.1) em (6.14), obtemos:

$$\mathcal{G}_1^{(2)} = -4g^2 a^2 b^3 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} C(p) F(k) F(q) p^2 . \quad (6.15)$$

A integral no super-espaço foi resolvida, sobrando apenas uma integral no espaço dos momentos.

Para tratar esta integral e as outras que aparecerão no espaço dos momentos, adotamos a seguinte estratégia: para cada integral, separamos o integrando com o método da decomposição em frações parciais e escrevemos cada uma delas como uma soma de outras integrais, com apenas três termos no denominador. As integrais remanescentes são conhecidas na literatura, e usaremos os resultados das referências [55, 56, 57], mostrados no apêndice E, para calculá-las.

De agora em diante adotaremos a notação $\eta^2 = m^2 + a^2$ e $\eta^\pm = m^2 + a^2 \pm b$ e, com o exposto acima, a igualdade (6.15) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(2)} &= -4g^2 a^2 b^3 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} C(p) F(k) F(q) p^2 \\ &= -4g^2 a^2 b^3 I_1(p, k) , \end{aligned} \quad (6.16)$$

com

$$\begin{aligned} I_1(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\ &= \frac{1}{(2b)^3} [-I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) + 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) \\ &\quad - 3I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] , \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde as integrais na segunda linha estão definidas no apêndice E. Para obter (6.17), separamos o integrando através do método descrito acima. Mesmo com cada integral individual sendo divergente, usando (E.34), o resultado final para $I_1(p, k)$ é finito. Substituindo (6.17) em (6.16), obtemos:

$$\mathcal{G}_1^{(2)} = \frac{g^2 a^2}{2} [I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) - 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) + 3I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) - I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] . \quad (6.18)$$

Esta expressão representa a contribuição (finita) total do primeiro diagrama.

6.2.2 Diagrama $\mathcal{G}_2^{(2)}$

A contribuição do segundo diagrama é:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{(2)} &= 2(-2g)(-2g) \int \frac{d^4 p d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^8} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(p) \langle \phi_0 \phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(k) \langle \phi_0 \phi_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{16} \bar{D}_1^2(q) \bar{D}_2^2(-q) \langle \phi_1 \phi_1 \rangle \right] \\ &= \frac{2g^2}{(16)^3} a^2 b \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \{ A(p) A(k) F(q) \mathcal{I}_2(\theta, \bar{\theta}) - 2b^2 A(p) B(k) F(q) \mathcal{I}_3(\theta, \bar{\theta}) \\ &\quad + b^4 B(p) B(k) F(q) \mathcal{I}_4(\theta, \bar{\theta}) \} , \end{aligned} \quad (6.19)$$

Substituindo (D.2) - (D.4) em (6.19), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_2^{(2)} &= -16g^2a^2b^3 \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} A(p)B(k)F(q)p^2 - 8g^2a^2b^5 \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} B(p)B(k)F(q) \\ &= -16g^2a^2b^3 I_2(p, k) - 8g^2a^2b^5 I_3(p, k),\end{aligned}\quad (6.20)$$

com

$$\begin{aligned}I_2(p, k) &= \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\ &= \frac{1}{(2b)^3} [4I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) - 4I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \\ &\quad - 2I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) + 2I(\eta^2, \eta^-, \eta^-)] ,\end{aligned}\quad (6.21)$$

$$\begin{aligned}I_3(p, k) &= \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\ &= \frac{1}{(2b)^5} [-16I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 16I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) + 16I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) \\ &\quad - 16I(\eta^2, \eta^-, \eta^-) - 4I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) - 4I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) \\ &\quad + 4I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + 4I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] .\end{aligned}\quad (6.22)$$

Assim como para $\mathcal{G}_1^{(2)}$, cada uma das integrais acima é divergente mas, usando (E.34), o resultado final para $I_2(p, k)$ e $I_3(p, k)$ é finito. Substituindo (6.21) e (6.22) em (6.20), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_2^{(2)} &= g^2a^2 [-4I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 4I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) + I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) \\ &\quad + I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) - I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) - I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] ,\end{aligned}\quad (6.23)$$

que é a contribuição (finita) total do segundo diagrama.

6.2.3 Diagrama $\mathcal{G}_3^{(2)}$

A contribuição do terceiro diagrama é:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3^{(2)} &= 4(-2g)(-2g) \int \frac{d^4pd^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^8} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(p) \langle \phi_1 \bar{\phi}_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(k) \langle \bar{\phi}_1 \phi_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{16} \bar{D}_1^2(q) D_2^2(-q) \langle \phi_0 \bar{\phi}_1 \rangle \right] \\ &= \frac{g^2}{(16)^3} a^2 b^2 \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} C(p)C(q) \left\{ E(k) \mathcal{I}_5(\theta, \bar{\theta}) + \frac{1}{16} b^2 B(k) \mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) \right\} ,\end{aligned}\quad (6.24)$$

Substituindo (D.5) e (D.6) em (6.24), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3^{(2)} &= 16g^2a^2b^2 \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} C(p)E(k)C(q)p^2q^2 + 16g^2a^2b^4 \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} C(p)B(k)C(q)p^2q^2 \\ &= 16g^2a^2b^2 I_4(p, k) + 16g^2a^2b^4 I_5(p, k) ,\end{aligned}\quad (6.25)$$

com

$$\begin{aligned}I_4(p, k) &= \int \frac{d^4pd^4k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\ &= \frac{1}{(2b)^2} [I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) - 2I(\eta^2, \eta^+, \eta^-) + I(\eta^2, \eta^-, \eta^-)] ,\end{aligned}\quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
I_5(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\
&= \frac{1}{(2b)^4} [-4I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) + 8I(\eta^2, \eta^+, \eta^-) - 4I(\eta^2, \eta^-, \eta^-) + 2I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) \\
&\quad - 2I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) - 2I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + 2I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] . \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Da mesma forma que para $\mathcal{G}_1^{(2)}$ e $\mathcal{G}_2^{(2)}$, cada uma das integrais acima é divergente mas, usando (E.34), o resultado final para $I_4(p, k)$ e $I_5(p, k)$ é finito. Substituindo (6.26) e (6.27) em (6.25), obtemos:

$$\mathcal{G}_3^{(2)} = 2g^2 a^2 [I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) - I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) - I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] . \tag{6.28}$$

A igualdade acima representa a contribuição (finita) total do terceiro diagrama.

6.2.4 Diagrama $\mathcal{G}_4^{(2)}$

A contribuição do quarto diagrama é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4^{(2)} &= 2(-2g)(-2g) \int \frac{d^4 p d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^8} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(p) \langle \phi_1 \bar{\phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(k) \langle \bar{\phi}_1 \phi_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{16} \bar{D}_1^2(q) D_2^2(-q) \langle \phi_0 \bar{\phi}_0 \rangle \right] \\
&= \frac{8g^2}{(16)^2} a^2 b^2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} B(q) \left\{ E(p) E(k) \mathcal{I}_7(\theta, \bar{\theta}) + \frac{1}{8} b^2 E(p) B(k) \mathcal{I}_8(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(16)^2} b^4 B(p) B(k) \mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) \right\} \\
&\quad + \frac{8g^2}{(16)^2} \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} A(q) (q^2 + m^2) \left\{ E(p) E(k) \mathcal{I}_{10}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{1}{8} b^2 E(p) B(k) \mathcal{I}_{11}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(16)^2} b^4 B(p) B(k) \mathcal{I}_{12}(\theta, \bar{\theta}) \right\} , \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Substituindo (D.7) - (D.12) em (6.29), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4^{(2)} &= 8g^2 a^2 b^2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} E(p) E(k) B(q) + 16g^2 a^2 b^4 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} E(p) B(k) B(q) \\
&\quad + 8g^2 a^2 b^6 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} B(p) B(k) B(q) \\
&\quad - 16g^2 b^2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} E(p) B(k) A(q) k^2 q^2 - 8g^2 b^4 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} B(p) B(k) A(q) q^4 \\
&\quad - 16g^2 m^2 b^2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} E(p) B(k) A(q) k^2 - 8g^2 m^2 b^4 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} B(p) B(k) A(q) q^2 \\
&= 8g^2 a^2 b^2 I_6(p, k) + 16g^2 a^2 b^4 I_7(p, k) + 8g^2 a^2 b^6 I_8(p, k) - 16g^2 b^2 I_9(p, k) \\
&\quad - 8g^2 b^4 I_{10}(p, k) - 16g^2 m^2 b^2 I_{11}(p, k) - 8g^2 m^2 b^4 I_{12}(p, k) , \tag{6.30}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
I_6(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(q^2 + \eta^2)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\
&= \frac{1}{(2b)^2} [-4I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + 2I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 2I(\eta^2, \eta^2, \eta^-)] , \tag{6.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\
&= \frac{1}{(2b)^4} [16I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) - 16I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) - 16I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \\
&\quad + 4I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) + 8I(\eta^2, \eta^+, \eta^-) + 4I(\eta^2, \eta^-, \eta^-)] , \tag{6.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)(q^2 + \eta^+)(q^2 + \eta^-)} \\
&= \frac{1}{(2b)^6} [-64I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + 96I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 96I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) - 48I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) \\
&\quad - 96I(\eta^2, \eta^+, \eta^-) - 48I(\eta^2, \eta^-, \eta^-) + 8I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) + 24I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) \\
&\quad + 24I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + 8I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] , \tag{6.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{k^2}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)} \\
&= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)} - \eta^2 I_6(p, k) \\
&= \frac{1}{(2b)^2} [4\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) - 2\eta^+ I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) - 2\eta^- I(\eta^2, \eta^2, \eta^-)] , \tag{6.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10}(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{q^2}{(p^2 + \eta^2)(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)} \\
&= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)} - \eta^2 I_7(p, k) \\
&= \frac{1}{(2b)^4} [16J(\eta^2, \eta^2) - 16J(\eta^2, \eta^+) - 16J(\eta^2, \eta^-) + 4J(\eta^+, \eta^+) + 8J(\eta^+, \eta^-) \\
&\quad + 4J(\eta^-, \eta^-) - 16\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + 16\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 16\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \\
&\quad - 4\eta^2 I(\eta^2, \eta^+, \eta^+) - 8\eta^2 I(\eta^2, \eta^+, \eta^-) - 4\eta^2 I(\eta^2, \eta^-, \eta^-)] , \tag{6.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11}(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{k^2}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)q^2(q^2 + \eta^2)} \\
&= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)q^2(q^2 + \eta^2)} \\
&\quad - \eta^2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)q^2(q^2 + \eta^2)} \\
&= \frac{1}{(2b\eta)^2} [-4\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + 2\eta^+ I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 2\eta^- I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \\
&\quad + 4\eta^2 I(\eta^2, \eta^2, 0) - 2\eta^+ I(\eta^2, \eta^+, 0) - 2\eta^- I(\eta^2, \eta^-, 0)] , \tag{6.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}(p, k) &= \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \frac{1}{(p^2 + \eta^2)(p^2 + \eta^+)(p^2 + \eta^-)(k^2 + \eta^2)(k^2 + \eta^+)(k^2 + \eta^-)(q^2 + \eta^2)} \\
&= I_7(p, k) . \tag{6.37}
\end{aligned}$$

De forma distinta das integrais em $\mathcal{G}_1^{(2)}$, $\mathcal{G}_2^{(2)}$ e $\mathcal{G}_3^{(2)}$, $I_6(p, k)$ e $I_9(p, k)$ possuem uma divergência logarítmica e, mesmo usando (E.34), o resultado final para $\mathcal{G}_4^{(2)}$ não será finito.

Substituindo (6.31) - (6.37) em (6.30), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4^{(2)} = & 8g^2a^2 \left[-I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + \frac{b}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) - \frac{b}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \right] \\ & + 8g^2m^2 \left[-2I(\eta^2, \eta^2, 0) + \frac{\eta^+}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^+, 0) + \frac{\eta^-}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^-, 0) \right] \\ & + g^2a^2 \left[I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) + 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) + 3I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + I(\eta^-, \eta^-, \eta^-) \right] \\ & + 2g^2 \left[-4J(\eta^2, \eta^2) + 4J(\eta^2, \eta^+) + 4J(\eta^2, \eta^-) \right. \\ & \quad \left. - J(\eta^+, \eta^+) - 2J(\eta^+, \eta^-) - J(\eta^-, \eta^-) \right] .\end{aligned}\quad (6.38)$$

Esta é a contribuição total do quarto diagrama e, ao contrário dos três diagramas anteriores, a igualdade acima não é finita, pois possui divergências logarítmicas.

6.2.5 Expressão renormalizada para o potencial efetivo em dois *loops*

De posse das expressões (6.18), (6.23), (6.28) e (6.38), escrevemos o potencial efetivo em dois *loops* como:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{eff}^{(2)} = & \left[\mathcal{G}_1^{(2)} + h.c. \right] + \left[\mathcal{G}_2^{(2)} + h.c. \right] + \mathcal{G}_3^{(2)} + \mathcal{G}_4^{(2)} \\ = & 2g^2a^2 \left[-4I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) + I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) \right] \\ & + \frac{8g^2a^2\eta^-}{\eta^2} \left[-I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \right] \\ & + 8g^2m^2 \left[-2I(\eta^2, \eta^2, 0) + \frac{\eta^+}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^+, 0) + \frac{\eta^-}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^-, 0) \right] \\ & + 2g^2 \left[-4J(\eta^2, \eta^2) + 4J(\eta^2, \eta^+) + 4J(\eta^2, \eta^-) \right. \\ & \quad \left. - J(\eta^+, \eta^+) - 2J(\eta^+, \eta^-) - J(\eta^-, \eta^-) \right] .\end{aligned}\quad (6.39)$$

Para renormalizar a parte divergente do potencial efetivo em dois *loops*, adotamos a mesma estratégia usada em [55, 56, 57]. Como estamos trabalhando com parâmetros renormalizados, apenas subtraímos as subdivergências das integrais de dois *loops*, diagrama por diagrama, ao invés de calcular separadamente um conjunto de diagramas de um *loop* com inserções de contratermos. Usando este procedimento, não é preciso calcular as constantes de renormalização necessárias para cancelar os pólos proporcionais a $(1/\epsilon^2)$ e $(1/\epsilon)$ e, assim, o potencial efetivo renormalizado em dois *loops* é escrito substituindo-se as integrais calculadas na seção anterior pelas partes independentes de ϵ das integrais $\hat{J}(x, y)$ e $\hat{I}(x, y, z)$. Assim, substituindo (E.36) - (E.39) em (6.39) e explicitando a forma das integrais, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{eff}^{(2)r} = & \frac{g^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{4}{m^2 + a^2} \left[(m^2 + a^2)^2(2m^2 + a^2) + b(m^2 + a^2 - b)(m^2 - 2a^2) \right] \overline{\ln}^2(m^2 + a^2) \right. \\ & \left. + \frac{(m^2 + a^2 + b)}{(m^2 + a^2)} \left[4m^2b - (m^2 + a^2)(2m^2 + 11a^2 + 2b) \right] \overline{\ln}^2(m^2 + a^2 + b) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [b(3a^2 - 2b) - (m^2 + a^2)(2m^2 + 3a^2 - 4b)] \overline{\ln}^2(m^2 + a^2 - b) \\
& + 8(m^2 + a^2 + b)(2a^2 - b) \overline{\ln}(m^2 + a^2) \overline{\ln}(m^2 + a^2 + b) \\
& + \frac{8a^2b(m^2 + a^2 - b)}{(m^2 + a^2)} \overline{\ln}(m^2 + a^2) \overline{\ln}(m^2 + a^2 - b) \\
& - 2(m^2 + a^2 + b)(2m^2 + 3a^2 - 2b) \overline{\ln}(m^2 + a^2 + b) \overline{\ln}(m^2 + a^2 - b) \\
& + \frac{8m^2b}{m^2 + a^2} [2b \ln(m^2 + a^2) - (m^2 + a^2 + b) \ln(m^2 + a^2 + b) + (m^2 + a^2 - b) \ln(m^2 + a^2 - b)] \overline{\ln} b \\
& - 16(m^2 + a^2)(2m^2 + 3a^2) \overline{\ln}(m^2 + a^2) \\
& + 8(m^2 + a^2 + b)(2m^2 + 3a^2 + 2b) \overline{\ln}(m^2 + a^2 + b) \\
& + 8(m^2 + a^2 - b)(2m^2 + 3a^2 - 2b) \overline{\ln}(m^2 + a^2 - b) \\
& + a^2 [4\xi(m^2 + a^2, m^2 + a^2, m^2 + a^2) - 3\xi(m^2 + a^2 + b, m^2 + a^2 + b, m^2 + a^2 + b) \\
& \quad - \xi(m^2 + a^2 + b, m^2 + a^2 - b, m^2 + a^2 - b)] \\
& + \frac{4a^2(m^2 + a^2 - b)}{m^2 + a^2} [\xi(m^2 + a^2, m^2 + a^2, m^2 + a^2 + b) - \xi(m^2 + a^2, m^2 + a^2, m^2 + a^2 - b)] \\
& + \frac{8m^2b}{m^2 + a^2} \left[(m^2 + a^2 + b) \text{Li}_2\left(\frac{m^2 + a^2}{m^2 + a^2 + b}\right) + (m^2 + a^2 - b) \text{Li}_2\left(\frac{m^2 + a^2 - b}{m^2 + a^2}\right) \right] \\
& - 40b^2 - \frac{8}{3}m^2b\pi^2 \Big\} . \tag{6.40}
\end{aligned}$$

Esta é a expressão renormalizada para o potencial efetivo em dois *loops* para o modelo de O’Raifeartaigh.

Usando técnicas de cálculo no super-espço, fomos capazes de obter um resultado não perturbativo, (6.40), calculando apenas quatro superdiagramas. Voltamos a dizer que a obtenção deste resultado através de cálculos com os campos componentes seria uma tarefa extremamente complicada, pois o número de diagramas de Feynman a serem calculados para isto seria muito grande.

Capítulo 7

Correção de dois *loops* usando a *LDE*

No capítulo 5, obtivemos uma expressão para o potencial de Coleman-Weinberg do modelo de O’Raifeartaigh usando a *LDE*, através do cálculo de apenas um superdiagrama, o diagrama de vácuo. Desta forma, mostramos como este método de ressonância, adaptado ao super-espço, possibilita a obtenção da soma de todos os diagramas de um *loop*, mesmo com a forma complexa e não trivial dos propagadores, devido à dependência nas variáveis de Grassmann θ e $\bar{\theta}$, para o caso do modelo de O’Raifeartaigh, que realiza a quebra de *SUSY*.

No capítulo 6, utilizando o *método de campo de fundo* no super-espço, obtivemos uma correção de dois *loops* para o potencial efetivo deste modelo, ou seja, obtivemos uma correção quântica uma ordem acima da obtida no capítulo 5.

No presente capítulo, aplicaremos novamente a *LDE* ao modelo de O’Raifeartaigh, mas agora até ordem δ^2 . Veremos que as soluções (5.52), (5.53) não serão mais válidas, estudaremos a renormalização do modelo e indicaremos como obter uma correção ao resultado do capítulo 6.

Até ordem δ^2 , a soma diagramática do potencial efetivo é composta pelo diagrama de vácuo (um *loop*, ordem δ^0), pelos diagramas $\mathcal{G}_1^{(1)\delta^1}, \dots, \mathcal{G}_5^{(1)\delta^1}$ em (5.48) (um *loop*, ordem δ^1), por diagramas de um *loop* de ordem δ^2 e pelos diagramas de vácuo de dois *loops* de ordem δ^2 , calculados no capítulo 6.

Calcularemos estes diagramas nas próximas seções, veremos que alguns deles fornecem correções divergentes e, posteriormente, mostraremos como regularizar e renormalizar a teoria.

Lembramos que estaremos utilizando a notação $\eta^2 = M^2 + a^2$, $\eta^\pm = M^2 + a^2 \pm b$, onde $M = m + \rho$. Além disso, para a *LDE* no modelo de O’Raifeartaigh, os parâmetros a serem otimizados são a , b e ρ .

Os propagadores são dados por (5.33) e os vértices por (5.34). Na *LDE*, após a otimização, os parâmetros otimizados são escritos como funções dos campos clássicos e acoplamentos originais da teoria, então, como os valores dos *vev*’s dos campos componentes dos supercampos Φ_0 , Φ_1 e Φ_2 são reais, consideraremos que os parâmetros a , b e ρ também o são.

7.1 Diagrama de vácuo

O diagrama de vácuo de ordem δ^0 , mostrado na figura abaixo,

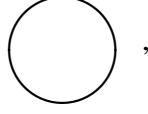


Figura 7.1: Diagrama de vácuo de um *loop*.

foi calculado no capítulo 5, e é dado por:

$$\mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^0} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4} (M^2 + a^2)^2 \ln \left[1 - \frac{b^2}{(M^2 + a^2)^2} \right] + \frac{b}{2} (M^2 + a^2) \ln \left[\frac{M^2 + a^2 + b}{M^2 + a^2 - b} \right] + \frac{b^2}{4} \ln \left[\frac{(M^2 + a^2)^2 - b^2}{\mu^4} \right] \right\}. \quad (7.1)$$

Como vimos no capítulo 5, quando as soluções do *FAC* ou *PMS* são (5.52), (5.53), a expressão acima representa o potencial de Coleman-Weinberg para o modelo de O’Raifeartaigh.

7.2 Diagramas de um *loop* de ordem δ^1

Os diagramas de um *loop* de ordem δ^1 são mostrados na figura abaixo,

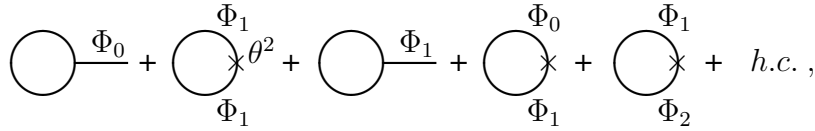


Figura 7.2: Diagramas de um *loop* de ordem δ^1 .

e são dados por (5.48):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(1)\delta^1} &= 2\delta g \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \delta_{12}^4 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\ &= -2\delta g \bar{b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \int d^4 \theta \bar{\theta}^2 \Phi_0 + h.c. \\ &= -\frac{4\delta g b \langle F_0 \rangle}{\kappa} \frac{1}{\epsilon} + \frac{2\delta g \langle F_0 \rangle}{\kappa} (\eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^- - 2b) ; \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{(1)\delta^1} &= -\frac{\delta b}{2} \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \delta_{12}^4 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\ &= \frac{\delta |b|^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c. \\ &= \frac{\delta b^2}{\kappa} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\delta b}{2\kappa} (\eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^- - 2b) ; \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_3^{(1)\delta^1} &= 4\delta g \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \delta_{12}^4 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= 4\delta g \bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 \Phi_1 + h.c. \\
&= -\frac{4\delta g a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa} (2\eta^2 \bar{\ln} \eta^2 - \eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^-) ; \tag{7.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4^{(1)\delta^1} &= -\delta a \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \delta_{12}^4 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\delta |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4 \theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c. \\
&= \frac{\delta a^2}{\kappa} (2\eta^2 \bar{\ln} \eta^2 - \eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^-) ; \tag{7.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_5^{(1)\delta^1} &= -\delta\rho \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \delta_{12}^4 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\delta\rho \bar{M} |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} B(k) \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c. \\
&= \frac{\delta\rho M}{\kappa} (2\eta^2 \bar{\ln}\eta^2 - \eta^+ \bar{\ln}\eta^+ - \eta^- \bar{\ln}\eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

As integrais $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k)$ e $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} B(k)$ que aparecem nas expressões acima são calculadas no apêndice E, e usamos a notação $\Phi_0(1) = \Phi_0(p=0, \theta_1, \bar{\theta}_1)$.

Os diagramas $\mathcal{G}_1^{(1)\delta^1}$ e $\mathcal{G}_2^{(1)\delta^1}$ fornecem contribuições divergentes. Mostraremos como lidar com elas posteriormente, ao discutir a regularização e renormalização da teoria.

7.3 Diagramas de um *loop* de ordem δ^2

Para os diagramas de um *loop* de ordem δ^2 , adotaremos a seguinte estratégia: existem 42 diagramas (mais os hermitianos conjugados), e os separamos em conjuntos distintos; cada diagrama de um determinado conjunto possui a mesma estrutura dos propagadores no *loop* e difere dos demais diagramas do conjunto apenas pelo fato de possuir campos externos clássicos ou inserções de a , b ou ρ , de peso δ .

O primeiro conjunto de diagramas é:

$$\begin{array}{c} \Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_1 \quad \Phi_0 \\ \hline \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \hline \Phi_1 \quad \Phi_1 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_1 \\ \hline \text{---} \bigcirc \times \theta^2 \\ \hline \Phi_1 \quad \Phi_1 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \Phi_1 \quad \Phi_1 \\ \hline \theta^2 \times \bigcirc \times \theta^2 \\ \hline \Phi_1 \quad \Phi_1 \end{array} ; \quad + h.c.$$

Figura 7.3: Diagramas $\mathcal{G}_1^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_2^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_3^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^{(1)\delta^2} &= (-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \Phi_0(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g^2}{(16)^2} \bar{b}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) F(k) \mathcal{J}_1(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g^2 \langle F_0 \rangle^2}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^{(1)\delta^2} &= (-2\delta g)(\delta b) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \theta_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g}{(16)^2} \bar{b} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) F(k) \mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2 g b \langle F_0 \rangle}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_3^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{4} (\delta b)(\delta b) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \theta_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{4(16)^2} |b|^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) F(k) \mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 b^2}{8\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.9}$$

O segundo conjunto de diagramas é:

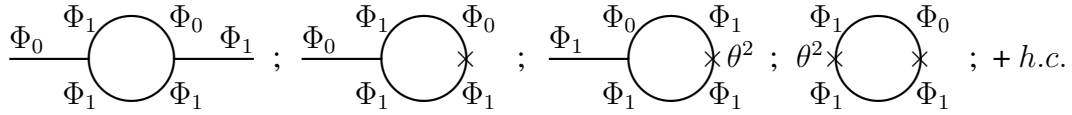


Figura 7.4: Diagramas $\mathcal{G}_4^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_5^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_6^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_7^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4^{(1)\delta^2} &= 4(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \Phi_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{16\delta^2 g^2}{(16)^2} \bar{a} \bar{b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_4(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= -\frac{8\delta^2 g^2 a \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_5^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} |a|^2 \bar{b} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_6(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g a^2 \langle F_0 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_6^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta b) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \theta_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} \bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g a b \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_7^{(1)\delta^2} &= (\delta b)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{(16)^2} |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= -\frac{a^2 b}{2\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.13}$$

O terceiro conjunto de diagramas é:

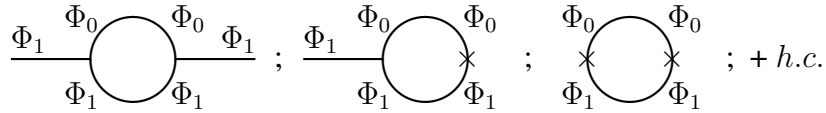


Figura 7.5: Diagramas $\mathcal{G}_8^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_9^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{10}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_8^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \Phi_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{8\delta^2 g^2}{(16)^2} |a|^2 \bar{b}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_{10}(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g^2 a^2 \langle \varphi_1 \rangle^2}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_9^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g}{(16)^2} a |a|^2 \bar{b}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g a^3 \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{10}^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{2} (\delta a)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_0 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2}{2(16)^2} a^2 |a|^2 \bar{b}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 a^4}{4\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.16}$$

O quarto conjunto de diagramas é:

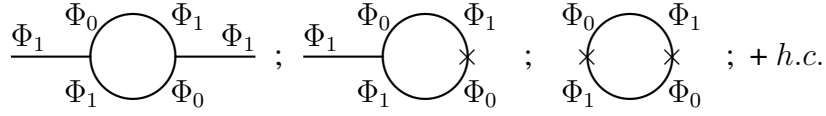


Figura 7.6: Diagramas $\mathcal{G}_{11}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{12}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{13}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{11}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \Phi_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{8\delta^2 g^2}{(16)^2} \bar{a}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ A(k) A(k) \mathcal{J}_{11}(\theta, \bar{\theta}) - 2|b|^2 A(k) B(k) \mathcal{J}_{10}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + |b|^4 B(k) B(k) \mathcal{J}_{12}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g^2 a^2 \langle \varphi_1 \rangle^2}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{12}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} |a|^2 \bar{a} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ A(k) A(k) \mathcal{J}_{13}(\theta, \bar{\theta}) - 2|b|^2 A(k) B(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + |b|^4 B(k) B(k) \mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g a^3 \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{13}^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{2}(\delta a)(\delta a) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{2(16)^2} |a|^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ A(k) A(k) \mathcal{J}_{14}(\theta, \bar{\theta}) - 2|b|^2 A(k) B(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + |b|^4 B(k) B(k) \mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 a^4}{4\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.19}
\end{aligned}$$

O quinto conjunto de diagramas é:

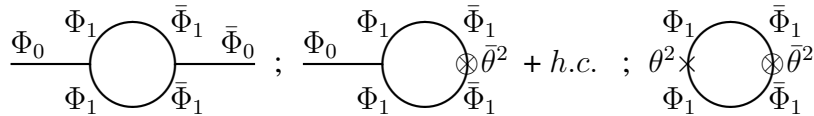


Figura 7.7: Diagramas $\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{15}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{16}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] \\
&= \frac{8\delta^2 g^2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ E(k) E(k) \mathcal{J}_{15}(\theta, \bar{\theta}) + 2\frac{|b|^2}{16} E(k) B(k) \mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{|b|^4}{(16)^2} B(k) B(k) \mathcal{J}_{17}(\theta, \bar{\theta}) \right\} \\
&= \frac{8\delta^2 g^2 \langle F_0 \rangle^2}{\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{\ln} \eta^2 \right) \\
&\quad + \frac{2\delta^2 g^2 \langle F_0 \rangle^2}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{15}^{(1)\delta^2} &= (-2\delta g)(\delta\bar{b}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \bar{\theta}_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g}{16} \bar{b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ E(k) E(k) \mathcal{J}_{18}(\theta, \bar{\theta}) + 2 \frac{|b|^2}{16} E(k) B(k) \mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{|b|^4}{(16)^2} B(k) B(k) \mathcal{J}_{19}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g b \langle F_0 \rangle}{\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{\ln} \eta^2 \right) \\
&\quad - \frac{\delta^2 g b \langle F_0 \rangle}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{16}^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{2} (\delta b)(\delta\bar{b}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \bar{\theta}_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] \\
&= \frac{\delta^2}{2(16)} |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ E(k) E(k) \mathcal{J}_{20}(\theta, \bar{\theta}) + 2 \frac{|b|^2}{16} E(k) B(k) \mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{|b|^4}{(16)^2} B(k) B(k) \mathcal{J}_{21}(\theta, \bar{\theta}) \right\} \\
&= \frac{\delta^2 b^2}{2\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{\ln} \eta^2 \right) \\
&\quad + \frac{\delta^2 b^2}{8\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] . \tag{7.22}
\end{aligned}$$

O sexto conjunto de diagramas é:

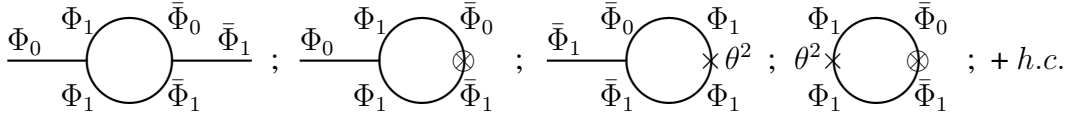


Figura 7.8: Diagramas $\mathcal{G}_{17}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{18}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{19}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{20}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{17}^{(1)\delta^2} &= 4(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{16\delta^2 g^2}{(16)^2} a\bar{b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} C(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_{22}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_{23}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{8\delta^2 g^2 a \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) . \tag{7.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{18}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\bar{a}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} |a|^2 \bar{b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} C(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_6(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_{24}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g a^2 \langle F_0 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) . \tag{7.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{19}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta b) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_1(1) \theta_2^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} a |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_{25}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g a b \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{20}^{(1)\delta^2} &= (\delta b)(\delta \bar{a}) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{(16)^2} |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_{27}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2 a^2 b}{2\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.26}$$

O sétimo conjunto de diagramas é:

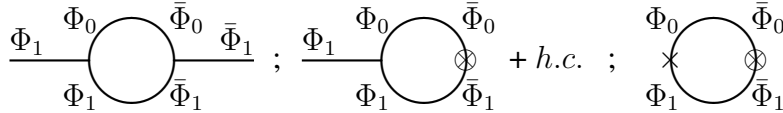


Figura 7.9: Diagramas $\mathcal{G}_{21}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{22}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{23}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{21}^{(1)\delta^2} &= 4(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_0 \rangle \right] \\
&= \frac{16\delta^2 g^2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (k^2 + |M|^2) E(k) A(k) \mathcal{J}_{28}(\theta, \bar{\theta}) + |a|^2 |b|^2 E(k) B(k) \mathcal{J}_{29}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + (k^2 + |M|^2) \frac{|b|^2}{16} B(k) A(k) \mathcal{J}_{30}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|a|^2 |b|^4}{16} B(k) B(k) \mathcal{J}_{31}(\theta, \bar{\theta}) \right\} \\
&= \frac{4\delta^2 g^2 \langle \varphi_1 \rangle^2}{\kappa b} \left\{ 4b(2\eta^2 - M^2) \bar{\ln} \eta^2 + [a^2 \eta^2 + 2\eta^+(M^2 - \eta^+)] \bar{\ln} \eta^+ \right. \\
&\quad \left. - [a^2 \eta^2 + 2\eta^-(M^2 - \eta^-)] \bar{\ln} \eta^- - 2b(a^2 + 2M^2 - 2\eta^2) \right\} .
\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{22}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta \bar{a}) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{16} \bar{a} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (k^2 + |M|^2) E(k) A(k) \mathcal{J}_{13}(\theta, \bar{\theta}) + |a|^2 |b|^2 E(k) B(k) \mathcal{J}_{32}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + (k^2 + |M|^2) \frac{|b|^2}{16} B(k) A(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|a|^2 |b|^4}{16} B(k) B(k) \mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} \left\{ 4b(2\eta^2 - M^2) \bar{\ln} \eta^2 + [a^2 \eta^2 + 2\eta^+(M^2 - \eta^+)] \bar{\ln} \eta^+ \right. \\
&\quad \left. - [a^2 \eta^2 + 2\eta^-(M^2 - \eta^-)] \bar{\ln} \eta^- - 2b(a^2 + 2M^2 - 2\eta^2) \right\} .
\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\mathcal{G}_{23}^{(1)\delta^2} = (\delta a)(\delta \bar{a}) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_0 \Phi_0 \rangle \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta^2}{16} |a|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (k^2 + |M|^2) E(k) A(k) \mathcal{J}_{33}(\theta, \bar{\theta}) + |a|^2 |b|^2 E(k) B(k) \mathcal{J}_{34}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + (k^2 + |M|^2) \frac{|b|^2}{16} B(k) A(k) \mathcal{J}_{35}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|a|^2 |b|^4}{16} B(k) B(k) \mathcal{J}_{36}(\theta, \bar{\theta}) \right\} \\
&= \frac{\delta^2 a^2}{4\kappa b} \left\{ 4b(2\eta^2 - M^2) \overline{\ln \eta^+} + [a^2 \eta^2 + 2\eta^+(M^2 - \eta^+)] \overline{\ln \eta^+} \right. \\
&\quad \left. - [a^2 \eta^2 + 2\eta^-(M^2 - \eta^-)] \overline{\ln \eta^-} - 2b(a^2 + 2M^2 - 2\eta^2) \right\} . \tag{7.29}
\end{aligned}$$

O oitavo conjunto de diagramas é:

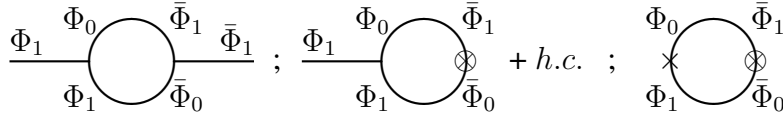


Figura 7.10: Diagramas $\mathcal{G}_{24}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{25}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{26}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{24}^{(1)\delta^2} &= 4(-2\delta g)(-2\delta g) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_0 \rangle \right] \\
&= \frac{16\delta^2 g^2}{(16)^3} |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) C(k) \mathcal{J}_{37}(\theta, \bar{\theta}) \\
&= \frac{4\delta^2 g^2 a^2 \langle \varphi_1 \rangle^2}{\kappa b} (\eta^2 \overline{\ln \eta^+} - \eta^2 \overline{\ln \eta^-} - 2b) . \tag{7.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{25}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta \bar{a}) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^3} |a|^2 \bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) C(k) \mathcal{J}_{38}(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g a^3 \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} (\eta^2 \overline{\ln \eta^+} - \eta^2 \overline{\ln \eta^-} - 2b) . \tag{7.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{26}^{(1)\delta^2} &= (\delta a)(\delta \bar{a}) \int \frac{d^4 k d^4 \theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_0 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_0 \rangle \right] \\
&= \frac{\delta^2}{(16)^3} |a|^4 |b|^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) C(k) \mathcal{J}_{39}(\theta, \bar{\theta}) \\
&= \frac{\delta^2 a^4}{4\kappa b} (\eta^2 \overline{\ln \eta^+} - \eta^2 \overline{\ln \eta^-} - 2b) . \tag{7.32}
\end{aligned}$$

O nono conjunto de diagramas é:

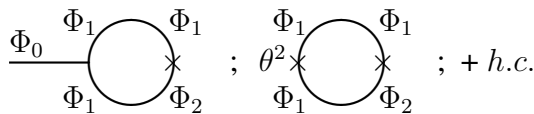


Figura 7.11: Diagramas $\mathcal{G}_{27}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{28}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{27}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} \rho \bar{M} \bar{b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_6(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g \rho M \langle F_0 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{28}^{(1)\delta^2} &= (\delta b)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{(16)^2} \rho \bar{M} |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) \{ A(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) - |b|^2 B(k) \mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2 \rho M b}{2\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.34}$$

O décimo conjunto de diagramas é:

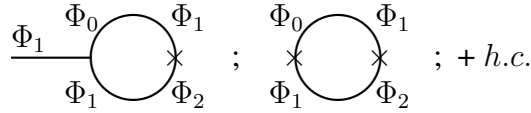


Figura 7.12: Diagramas $\mathcal{G}_{29}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{30}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{29}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{(16)^2} \rho \bar{M} \bar{a} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{ A(k) A(k) \mathcal{J}_{13}(\theta, \bar{\theta}) - 2|b|^2 A(k) B(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) \\
&\quad + |b|^4 B(k) B(k) \mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g \rho M a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] .
\end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{30}^{(1)\delta^2} &= (\delta a)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{(16)^2} \rho \bar{M} |a|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \{ A(k) A(k) \mathcal{J}_{14}(\theta, \bar{\theta}) - 2|b|^2 A(k) B(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) \\
&\quad + |b|^4 B(k) B(k) \mathcal{J}_{36}(\theta, \bar{\theta}) \} + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 \rho M a^2}{2\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] .
\end{aligned} \tag{7.36}$$

O décimo primeiro conjunto de diagramas é:

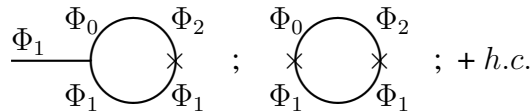


Figura 7.13: Diagramas $\mathcal{G}_{31}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{32}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{31}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_2 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g}{(16)^2} \rho \bar{M} \bar{a} \bar{b}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g \rho M a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{32}^{(1)\delta^2} &= (\delta a)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_2^2(-k) \langle \Phi_2 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2}{(16)^2} \rho \bar{M} |a|^2 \bar{b}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 \rho M a^2}{2\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.38}$$

O décimo segundo conjunto de diagramas é:

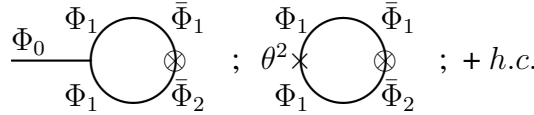


Figura 7.14: Diagramas $\mathcal{G}_{33}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{34}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{33}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_0(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g}{16} \bar{\rho} M \bar{b} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_{18}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{2\delta^2 g \rho M \langle F_0 \rangle}{\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{34}^{(1)\delta^2} &= (\delta b)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \theta_1^2 \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_1 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2}{16} \bar{\rho} M |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) \left\{ E(k) \mathcal{J}_{20}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^2}{16} B(k) \mathcal{J}_{36}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2 \rho M b}{2\kappa} (\bar{\ln} \eta^+ - \bar{\ln} \eta^-) .
\end{aligned} \tag{7.40}$$

O décimo terceiro conjunto de diagramas é:

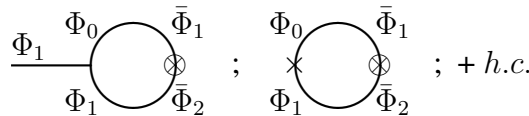


Figura 7.15: Diagramas $\mathcal{G}_{35}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{36}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{35}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{4\delta^2 g}{(16)^2} \bar{\rho} M \bar{a} |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g \rho M a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{36}^{(1)\delta^2} &= (\delta a)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_1 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2}{(16)^2} \bar{\rho} M |a|^2 |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) C(k) \mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 \rho M a^2}{2\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.42}$$

O décimo quarto conjunto de diagramas é:

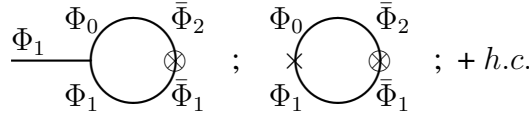


Figura 7.16: Diagramas $\mathcal{G}_{37}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{38}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{37}^{(1)\delta^2} &= 2(-2\delta g)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \Phi_1(1) \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_2 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{4\delta^2 g}{16} \bar{\rho} M \bar{a} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ -E(k) A(k) \mathcal{J}_{40}(\theta, \bar{\theta}) + |b|^2 E(k) B(k) \mathcal{J}_{32}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{|b|^2}{16} B(k) A(k) \mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^4}{16} B(k) B(k) \mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= -\frac{2\delta^2 g \rho M a \langle \varphi_1 \rangle}{\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] .
\end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{38}^{(1)\delta^2} &= (\delta a)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_2 \Phi_0 \rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{16} \bar{\rho} M |a|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ -E(k) A(k) \mathcal{J}_{33}(\theta, \bar{\theta}) + |b|^2 E(k) B(k) \mathcal{J}_{34}(\theta, \bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{|b|^2}{16} B(k) A(k) \mathcal{J}_{35}(\theta, \bar{\theta}) + \frac{|b|^4}{16} B(k) B(k) \mathcal{J}_{36}(\theta, \bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{\delta^2 \rho M a^2}{2\kappa b} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (\eta^2 + 2b) \bar{\ln} \eta^+ + (\eta^2 - 2b) \bar{\ln} \eta^- + 2b] .
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Os últimos quatro diagramas possuem estrutura única dos propagadores no *loop*, e não os dividimos em conjuntos.

O trigésimo nono diagrama é:

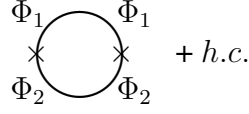


Figura 7.17: Diagrama $\mathcal{G}_{39}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{39}^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{2}(\delta\rho)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4}\bar{D}_1^2(k)\langle\Phi_2\Phi_2\rangle \right] \left[-\frac{1}{4}\bar{D}_2^2(-k)\langle\Phi_1\Phi_1\rangle \right] + h.c. \\
&= -\frac{\delta^2}{2(16)^2}\rho^2|M|^2\bar{b}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} C(k)F(k)\mathcal{J}_9(\theta,\bar{\theta}) + h.c. \\
&= \frac{\delta^2\rho^2 M^2}{4\kappa b} (\eta^2\bar{\ln}\eta^+ - \eta^2\bar{\ln}\eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.45}$$

O quadragésimo diagrama é:

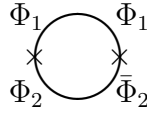


Figura 7.18: Diagrama $\mathcal{G}_{40}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{40}^{(1)\delta^2} &= (\delta\rho)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4}\bar{D}_1^2(k)\langle\Phi_2\bar{\Phi}_2\rangle \right] \left[-\frac{1}{4}D_2^2(-k)\langle\bar{\Phi}_1\Phi_1\rangle \right] \\
&= \frac{\delta^2}{16}|\rho|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (k^2 + |a|^2)A(k)E(k)\mathcal{J}_{33}(\theta,\bar{\theta}) + (k^2 + |a|^2)\frac{|b|^2}{16}A(k)B(k)\mathcal{J}_{35}(\theta,\bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + |M|^2|b|^2B(k)E(k)\mathcal{J}_{34}(\theta,\bar{\theta}) + \frac{|M|^2|b|^4}{16}B(k)B(k)\mathcal{J}_{36}(\theta,\bar{\theta}) \right\} \\
&= \frac{\delta^2\rho^2}{4\kappa b} \left\{ 4b(2\eta^2 - a^2)\bar{\ln}\eta^2 - [2\eta^+(\eta^+ - a^2) - M^2\eta^2]\bar{\ln}\eta^+ \right. \\
&\quad \left. + [2\eta^-(\eta^- - a^2) - M^2\eta^2]\bar{\ln}\eta^- + 2b(2\eta^2 - 2a^2 - M^2) \right\} .
\end{aligned} \tag{7.46}$$

O quadragésimo primeiro diagrama é:

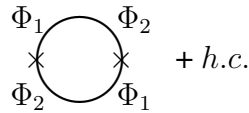


Figura 7.19: Diagrama $\mathcal{G}_{41}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{41}^{(1)\delta^2} &= \frac{1}{2}(\delta\rho)(\delta\rho) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4}\bar{D}_1^2(k)\langle\Phi_2\Phi_1\rangle \right] \left[-\frac{1}{4}\bar{D}_2^2(-k)\langle\Phi_2\Phi_1\rangle \right] + h.c. \\
&= \frac{\delta^2}{2(16)^2}\rho^2\bar{M}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ A(k)A(k)\mathcal{J}_{14}(\theta,\bar{\theta}) - 2|b|^2A(k)B(k)\mathcal{J}_9(\theta,\bar{\theta}) \right. \\
&\quad \left. + |b|^4B(k)B(k)\mathcal{J}_3(\theta,\bar{\theta}) \right\} + h.c. \\
&= \frac{\delta^2\rho^2 M^2}{4\kappa b} [4b\bar{\ln}\eta^2 - (\eta^2 + 2b)\bar{\ln}\eta^+ + (\eta^2 - 2b)\bar{\ln}\eta^- + 2b] .
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Finalmente, o quadragésimo segundo diagrama é:

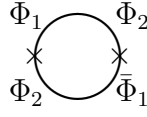


Figura 7.20: Diagrama $\mathcal{G}_{42}^{(1)\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{42}^{(1)\delta^2} &= (\delta\rho)(\delta\bar{\rho}) \int \frac{d^4k d^4\theta_{12}}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} \bar{D}_1^2(k) \langle \Phi_2 \bar{\Phi}_1 \rangle \right] \left[-\frac{1}{4} D_2^2(-k) \langle \bar{\Phi}_2 \Phi_1 \rangle \right] \\
&= \frac{\delta^2}{16} |\rho|^2 |M|^2 |b|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) F(k) \mathcal{J}_{20}(\theta, \bar{\theta}) \\
&= \frac{\delta^2 \rho^2 M^2}{4\kappa b} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) .
\end{aligned} \tag{7.48}$$

As integrais no super-espaço $\mathcal{J}_i(\theta, \bar{\theta})$ que aparecem nas expressões acima são listadas no apêndice 4. As integrais nos momentos são calculadas no apêndice 5.

Os diagramas $\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2}$, $\mathcal{G}_{15}^{(1)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_{16}^{(1)\delta^2}$, do quinto conjunto, fornecem contribuições divergentes e, assim como os diagramas $\mathcal{G}_1^{(1)\delta^1}$ e $\mathcal{G}_2^{(1)\delta^1}$ da seção anterior, os discutiremos mais adiante, quando tratarmos de regularização e renormalização.

7.4 Diagramas de dois loops de ordem δ^2

Os diagramas de dois loops de ordem δ^2 foram calculados no capítulo anterior, quando aplicamos o *método de campo de fundo*, e são mostrados na figura abaixo:

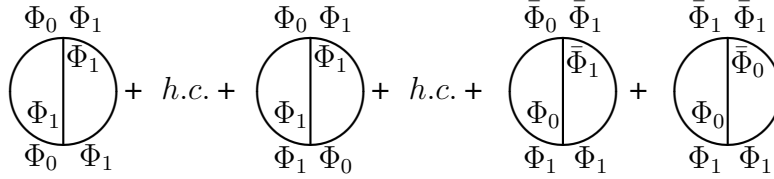


Figura 7.21: Diagramas $\mathcal{G}_1^{(2)\delta^2}$, $\mathcal{G}_2^{(2)\delta^2}$, $\mathcal{G}_3^{(2)\delta^2}$ e $\mathcal{G}_4^{(2)\delta^2}$.

As expressões para estes diagramas são dadas por (6.18), (6.23), (6.28) e (6.38):

$$\mathcal{G}_1^{(2)} = \frac{g^2 a^2}{2} [I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) - 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) + 3I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) - I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] ; \tag{7.49}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^{(2)} &= g^2 a^2 [-4I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) + 4I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) + I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) \\
&\quad + I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) - I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) - I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] ;
\end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\mathcal{G}_3^{(2)} = 2g^2 a^2 [I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) - I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) - I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + I(\eta^-, \eta^-, \eta^-)] ; \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4^{(2)} = & 8g^2a^2 \left[-I(\eta^2, \eta^2, \eta^2) + \frac{b}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^2, \eta^+) - \frac{b}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^2, \eta^-) \right] \\
& + 8g^2M^2 \left[-2I(\eta^2, \eta^2, 0) + \frac{\eta^+}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^+, 0) + \frac{\eta^-}{\eta^2} I(\eta^2, \eta^-, 0) \right] \\
& + g^2a^2 \left[I(\eta^+, \eta^+, \eta^+) + 3I(\eta^+, \eta^+, \eta^-) + 3I(\eta^+, \eta^-, \eta^-) + I(\eta^-, \eta^-, \eta^-) \right] \\
& + 2g^2 \left[-4J(\eta^2, \eta^2) + 4J(\eta^2, \eta^+) + 4J(\eta^2, \eta^-) \right. \\
& \quad \left. - J(\eta^+, \eta^+) - 2J(\eta^+, \eta^-) - J(\eta^-, \eta^-) \right] .
\end{aligned} \tag{7.52}$$

O quarto diagrama $\mathcal{G}_4^{(2)}$ fornece uma contribuição divergente, enquanto que os três primeiros são finitos.

Agora, tendo em mãos as expressões para todos os diagramas que contribuem para a *LDE* até ordem δ^2 , é importante notar que, considerando apenas os diagramas de um *loop*, de ordem δ^1 e δ^2 , vemos que as soluções do *PMS* (5.52), (5.53) para a , b e ρ continuam válidas. Porém, em ordem δ^2 , temos também os diagramas de dois *loops*, que fazem com que estas soluções não sejam mais válidas, ou seja, $a_0 = 4g\langle\varphi_1\rangle$, $b_0 = 4g\langle F_0\rangle$ e $\rho_0 = 0$ não são soluções quando fazemos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}(a, b, \rho)}{\partial a} \right|_{a=a_0, \delta=1} &= 0 , \\
\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}(a, b, \rho)}{\partial b} \right|_{b=b_0, \delta=1} &= 0 , \\
\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}(a, b, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0, \delta=1} &= 0 .
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Estas equações não possuem solução exata e veremos mais adiante como esperamos resolver o *PMS* até ordem δ^2 , através de um cálculo numérico, e assim obter correções aos resultados obtidos nos capítulos anteriores.

7.5 Regularização e renormalização

Nas três seções anteriores, vimos que existem diagramas divergentes, tanto de ordem δ^1 quanto de ordem δ^2 . Em contraste com o que foi feito no capítulo 6, quando não precisamos calcular e regularizar diagramas de um *loop*, agora devemos regularizar e renormalizar a teoria ordem a ordem em δ .

Os diagramas divergentes de ordem δ^1 são:

$$\mathcal{G}_1^{(1)\delta^1} = \left\{ -\frac{2\delta gb}{\kappa} \frac{1}{\epsilon} + \frac{\delta g}{\kappa} (\eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^- - 2b) \right\} \int d^4\theta \bar{\theta}^2 \Phi_0 + h.c. ; \tag{7.54}$$

$$\mathcal{G}_2^{(1)\delta^1} = \left\{ \frac{\delta b^2}{2\kappa} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\delta b}{4\kappa} (\eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^- - 2b) \right\} \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 + h.c. ; \tag{7.55}$$

Os diagramas divergentes de ordem δ^2 são:

$$\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2} = \left\{ \frac{8\delta^2 g^2}{\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \overline{\ln}\eta^2 \right) + \frac{2\delta^2 g^2}{\kappa b} [4b\overline{\ln}\eta^2 - (\eta^2 + 2b)\overline{\ln}\eta^+ + (\eta^2 - 2b)\overline{\ln}\eta^- + 2b] \right\} \int d^4\theta \Phi_0 \bar{\Phi}_0 ; \quad (7.56)$$

$$\mathcal{G}_{15}^{(1)\delta^2} = \left\{ -\frac{2\delta^2 gb}{\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \overline{\ln}\eta^2 \right) - \frac{\delta^2 gb}{2\kappa b} [4b\overline{\ln}\eta^2 - (\eta^2 + 2b)\overline{\ln}\eta^+ + (\eta^2 - 2b)\overline{\ln}\eta^- + 2b] \right\} \int d^4\theta \bar{\theta}^2 \Phi_0 + h.c. \quad (7.57)$$

$$\mathcal{G}_{16}^{(1)\delta^2} = \left\{ \frac{\delta^2 b^2}{2\kappa} \left(\frac{1}{\epsilon} - \overline{\ln}\eta^2 \right) + \frac{\delta^2 b^2}{8\kappa b} [4b\overline{\ln}\eta^2 - (\eta^2 + 2b)\overline{\ln}\eta^+ + (\eta^2 - 2b)\overline{\ln}\eta^- + 2b] \right\} \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 . \quad (7.58)$$

Os diagramas $\mathcal{G}_2^{(1)\delta^1}$ e $\mathcal{G}_{16}^{(1)\delta^2}$ são diagramas de vácuo, logo sua regularização e renormalização são triviais, bastando incorporar os termos divergentes na energia de vácuo.

Para renormalizar o termo divergente em $\mathcal{G}_1^{(1)\delta^1}$, introduzimos o contratermo

$$\frac{2\delta gb}{\kappa\epsilon} \int d^4\theta \bar{\theta}^2 \Phi_{0R} + h.c. = \frac{2\delta gb}{\kappa\epsilon} \int d^2\theta \Phi_{0R} + h.c. , \quad (7.59)$$

para o termo divergente em $\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2}$, o contratermo

$$-\frac{8\delta^2 g^2}{\kappa\epsilon} \int d^4\theta \Phi_{0R} \bar{\Phi}_{0R} , \quad (7.60)$$

e, para o termo divergente em $\mathcal{G}_{15}^{(1)\delta^2}$, o contratermo

$$\frac{2\delta^2 gb}{\kappa\epsilon} \int d^4\theta \bar{\theta}^2 \Phi_{0R} + h.c. = \frac{2\delta^2 gb}{\kappa\epsilon} \int d^2\theta \Phi_{0R} + h.c. . \quad (7.61)$$

Aqui, Φ_{0R} denota o supercampo renormalizado.

Assim, a Lagrangiana renormalizada na *LDE* para o modelo de O’Raifeartaigh em um *loop* é:

$$\mathcal{L}_R^\delta = [\mathcal{L}^\delta]_R + \mathcal{L}_{CT}^\delta , \quad (7.62)$$

onde $[\mathcal{L}^\delta]_R$ é a Lagrangiana original do modelo com o campo renormalizado e

$$\mathcal{L}_{CT}^\delta = -\frac{8\delta^2 g^2}{\kappa\epsilon} \int d^4\theta \Phi_{0R} \bar{\Phi}_{0R} + \left[\left(\frac{2\delta gb}{\kappa\epsilon} \int d^2\theta \Phi_{0R} + \frac{2\delta^2 gb}{\kappa\epsilon} \int d^2\theta \Phi_{0R} \right) + h.c. \right] \quad (7.63)$$

é a Lagrangiana de contratermos.

Em um *loop*, sabemos que a solução para o parâmetro otimizado b_0 é:

$$b_0 = 4g \int d^2\theta \Phi_0 = 4g \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}_0 = 4g \langle F_0 \rangle , \quad (7.64)$$

e esta é válida para todas as ordens em δ .

Notemos que, como o parâmetro otimizado em um *loop* é escrito como a integral de um supercampo antiquiral, ao substituírmos (7.64) em (7.63) vemos que a renormalização dos termos quirais (7.59) e (7.61), após a otimização em um *loop*, induz uma renormalização do potencial de Kähler. Desta forma, apenas a função de onda é de fato renormalizada. Portanto, a *LDE* respeita o teorema de não-renormalização e não afeta o comportamento ultravioleta da teoria, ou seja, o modelo continua sendo um modelo de quebra *soft*.

Esta situação não é clara em dois *loops*, e ainda estamos estudando a estrutura dos contra-termos neste caso.

Para os diagramas de vácuo de dois *loops*, o mesmo raciocínio usado para os outros diagramas de vácuo é válido, ou seja, os termos divergentes são incorporados na energia de vácuo. Porém, para o cálculo das integrais de dois *loops*, devemos usar a expressão (E.34) em (7.49) - (7.52), com as subdivergências provenientes dos diagramas de um *loop* inclusas, em contraste com o que foi feito no capítulo 6, onde usamos a expressão (E.37) para calcular as integrais.

7.6 O potencial efetivo até ordem δ^2

Tendo calculado os diagramas até ordem δ^2 e mostrado que a teoria é renormalizável até a ordem em que estamos interessados, vamos agora obter a expressão para o potencial efetivo renormalizado.

Da parte finita das expressões (7.2) - (7.6), a contribuição de um *loop* em ordem δ^1 para o potencial efetivo é:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^1} &= \sum_{i=1}^5 \mathcal{G}_i^{(1)\delta^1} \\ &= \frac{\delta}{(4\pi)^2} \left\{ b(b - 4g\langle F_0 \rangle) + 2[a(a - 4g\langle \varphi_1 \rangle) + \rho M](M^2 + a^2) \overline{\ln} [M^2 + a^2] \right. \\ &\quad + \left[a(4g\langle \varphi_1 \rangle - a) + \frac{1}{2}(4g\langle F_0 \rangle - b) - \rho M \right] (M^2 + a^2 + b) \overline{\ln} [M^2 + a^2 + b] \\ &\quad \left. + \left[a(4g\langle \varphi_1 \rangle - a) - \frac{1}{2}(4g\langle F_0 \rangle - b) - \rho M \right] (M^2 + a^2 - b) \overline{\ln} [M^2 + a^2 - b] \right\}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

De (7.7) - (7.48), a contribuição de um *loop* em ordem δ^2 para o potencial efetivo é:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^2} &= \sum_{i=1}^{42} \mathcal{G}_i^{(1)\delta^2} \\ &= \frac{\delta^2}{(4\pi)^2} \left\{ [(a - 4g\langle \varphi_1 \rangle)^2 (M^2 + 3a^2) + a\rho M(a - 4g\langle \varphi_1 \rangle) + \rho^2 (3M^2 + a^2)] \overline{\ln} (M^2 + a^2) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} [(a - 4g\langle \varphi_1 \rangle) [(a - 4g\langle \varphi_1 \rangle)(M^2 + 3a^2 + b) + 2a(b - 4g\langle F_0 \rangle) + 4a\rho M] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(b - 4g\langle F_0 \rangle) [(b - 4g\langle F_0 \rangle) + 4\rho M] + \rho^2 (3M^2 + a^2 + b)] \overline{\ln} (M^2 + a^2 + b) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left[(a-4g\langle\varphi_1\rangle) \left[(a-4g\langle\varphi_1\rangle)(M^2+3a^2-b) - 2a(b-4g\langle F_0\rangle) + 4a\rho M \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(b-4g\langle F_0\rangle) \left[(b-4g\langle F_0\rangle) - 4\rho M \right] + \rho^2(3M^2+a^2-b) \right] \overline{\ln}(M^2+a^2-b) \Big\} \quad (7.66)
\end{aligned}$$

De (7.49) - (7.52), usando (E.34), a contribuição de dois *loops* em ordem δ^2 para o potencial efetivo é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{eff}^{(2)\delta^2} = & \frac{\delta^2 g^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{4}{(M^2+a^2)} \left[4(M^2+a^2)^3 + b(M^2+a^2-b)(M^2-2a^2) \right] \overline{\ln}^2(M^2+a^2) \right. \\
& - \frac{(M^2+a^2+b)}{(M^2+a^2)} \left[(M^2+a^2)(6M^2+17a^2) + 2b(M^2+3a^2) \right] \overline{\ln}^2(M^2+a^2+b) \\
& - 3(M^2+a^2-b)(2M^2+3a^2-2b) \overline{\ln}^2(M^2+a^2-b) \\
& + 8(M^2+a^2+b)(2a^2-b) \overline{\ln}(M^2+a^2) \overline{\ln}(M^2+a^2+b) \\
& + \frac{8a^2b(M^2+a^2-b)}{(M^2+a^2)} \overline{\ln}(M^2+a^2) \overline{\ln}(M^2+a^2-b) \\
& - 2(M^2+a^2+b)(2M^2+3a^2-2b) \overline{\ln}(M^2+a^2+b) \overline{\ln}(M^2+a^2-b) \\
& + \frac{8M^2b}{(M^2+a^2)} \left[b \ln \left(\frac{(M^2+a^2)^2}{(M^2+a^2)^2-b^2} \right) - (M^2+a^2) \ln \left(\frac{M^2+a^2+b}{M^2+a^2-b} \right) \right] \overline{\ln}b \\
& - 24(M^2+a^2)(2M^2+3a^2) \overline{\ln}(M^2+a^2) \\
& + 12(M^2+a^2+b)(2M^2+3a^2+2b) \overline{\ln}(M^2+a^2+b) \\
& + 12(M^2+a^2-b)(2M^2+3a^2-2b) \overline{\ln}(M^2+a^2-b) \\
& + a^2 \left[4\xi(M^2+a^2, M^2+a^2, M^2+a^2) - 3\xi(M^2+a^2+b, M^2+a^2+b, M^2+a^2+b) \right. \\
& \quad \left. - \xi(M^2+a^2+b, M^2+a^2-b, M^2+a^2-b) \right] \\
& + \frac{4a^2(M^2+a^2-b)}{(M^2+a^2)} \left[\xi(M^2+a^2, M^2+a^2, M^2+a^2+b) - \xi(M^2+a^2, M^2+a^2, M^2+a^2-b) \right] \\
& + \frac{8M^2b}{(M^2+a^2)} \left[(M^2+a^2+b) \text{Li}_2 \left(\frac{M^2+a^2}{M^2+a^2+b} \right) + (M^2+a^2-b) \text{Li}_2 \left(\frac{M^2+a^2-b}{M^2+a^2} \right) \right] \\
& \left. - 56b^2 - \frac{4}{3}b\pi^2(2M^2+b) \right\} . \quad (7.67)
\end{aligned}$$

O potencial efetivo renormalizado total, até ordem δ^2 , é, portanto, dado por

$$\mathcal{V}_{eff}^{\delta^2} = \mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^0} + \mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^1} + \mathcal{V}_{eff}^{(1)\delta^2} + \mathcal{V}_{eff}^{(2)\delta^2} , \quad (7.68)$$

ou seja, é dado pela soma das expressões (7.1), (7.65), (7.66) e (7.67).

Devemos encontrar os valores otimizados para a , b e ρ , aplicando o *PMS* até ordem δ^2 , isto é, devemos resolver as equações:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}}{\partial a} \right|_{a=a_0} = \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}}{\partial b} \right|_{b=b_0} = \left. \frac{\partial \mathcal{V}_{eff}^{\delta^2}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 , \quad (7.69)$$

em $\delta = 1$, e substituir os valores de a_0 , b_0 e ρ_0 em (7.68), para então obter uma correção para a contribuição de dois *loops* calculada no capítulo 6. Porém, como visto anteriormente, as

soluções $a_0 = 4g\langle\varphi_1\rangle$, $b_0 = 4g\langle F_0\rangle$ e $\rho_0 = 0$ não satisfazem (7.69) e, portanto, devemos ter outras soluções para esta equação.

Para resolver este problema, fazemos o *ansatz*

$$\begin{aligned} a &= 4g\langle\varphi_1\rangle + A, \\ b &= 4g\langle F_0\rangle + B, \\ \rho &= C, \end{aligned} \tag{7.70}$$

e substituímos em (7.68). Os valores dos parâmetros A , B e C devem ser encontrados numericamente, de tal forma que as equações (7.69) sejam obedecidas. Isto feito, estes novos parâmetros serão funções dos campos e acoplamentos originais da teoria. Assim, atribuindo valores aos parâmetros originais da teoria, obtemos um gráfico do potencial efetivo.

Agora, dado o novo potencial até ordem δ^2 , se fizermos $A=B=C=0$, obteremos, através de um cancelamento não trivial de diagramas, o resultado do capítulo 6, calculado com o *método de campo de fundo*. Para A , B e C diferentes de zero, faremos uma comparação com o resultado obtido com o *método de campo de fundo* e, com o cálculo numérico, esperamos obter uma correção a este resultado [58].

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

O formalismo de super-espço e supercampos é a forma mais clara, compacta e elegante de estudar teorias supersimétricas. Inicialmente, introduzimos o conceito de *SUSY*, sua álgebra, seus geradores e suas representações, condensadas em um supercampo. Demos um exemplo de como construir ações supersimétricas no super-espço, através do modelo de Wess-Zumino, e, a partir deste exemplo, construímos a ação renormalizável mais geral possível com supercampos quirais. Ao analisar as características desta ação, apresentamos um critério para a quebra espontânea de *SUSY* e mostramos como este é implementado em termos dos campos componentes da teoria. Vimos então o papel fundamental exercido pelos campos auxiliares F_i para a quebra, tal que chamamos o critério de quebra pelo termo F . As quebras espontânea e explícita de *SUSY* são tópicos relevantes no que se refere a aspectos fundamentais e fenomenológicos de teorias de campos, em especial para a Física “além do *MP*”. Tendo isto em vista, introduzimos o modelo de O’Raifeartaigh, um modelo com três supercampos quirais que implementa a quebra espontânea de *SUSY* pelo termo F . Explicitamos como a quebra faz com que os campos tenham massas não degeneradas, o que possui um forte apelo fenomenológico. A seguir, apresentamos dois métodos de ressonância amplamente usados em *TQC* usual, a *LDE* e o *método de campo de fundo*. Tais métodos são de extrema importância quando deseja-se obter resultados não perturbativos em um dado modelo, pois são capazes de fornecer a soma total das contribuições de uma certa classe de diagramas de Feynman.

Desta forma, o objetivo central desta tese foi a aplicação destes dois métodos de ressonância ao modelo de O’Raifeartaigh, utilizando o formalismo de supercampos para o cálculo de superdiagramas de Feynman diretamente no super-espço, e com isto obter correções radiativas de um e dois *loops* para o potencial efetivo do modelo. Apesar da quebra de *SUSY*, técnicas de cálculo no super-espço são importantes quando deseja-se calcular correções de altas ordens para o potencial efetivo.

Ao aplicar a *LDE* ao modelo [52], vimos que algumas alterações tiveram que ser feitas, devido à natureza quiral dos supercampos. O método quebra *SUSY* de maneira explícita, pois o(s) parâmetro(s) de massa arbitrário(s) são na verdade supercampos e, quando expandidos, produzem termos de quebra do tipo *soft* na Lagrangiana. Mostramos que, através de um cálculo

perturbativo com novos propagadores e vértices, foi possível obter o potencial de Coleman-Weinberg. Particularmente, vimos que, após o processo de otimização em ordem δ^1 , levando em consideração apenas alguns poucos superdiagramas, o potencial efetivo em ordem δ^0 (diagrama de vácuo) reproduz a soma de todos os diagramas de um *loop*.

A soma dos termos espúrios de quebra *soft* θ^2 e $\bar{\theta}^2$ em todas as ordens produz expressões não triviais para os propagadores. Isto poderia, em princípio, parecer uma desvantagem de se adotar regras de Feynman diretamente no super-espço para calcular correções radiativas no caso de modelos com quebra de *SUSY*. Todavia, os trabalhos da referência [51] sistematizaram e adaptaram as técnicas de cálculo de superdiagramas para o caso em que a *SUSY* é quebrada. As expressões envolvendo as derivadas covariantes agora dependem dos termos espúrios, o que torna o cálculo das integrais no super-espço presentes nas expressões para os superdiagramas muito mais complicado.

Na aplicação do *método de campo de fundo* ao modelo de O’Raifeartaigh [54], mostramos a eficácia do cálculo no super-espço no caso de *SUSY* quebrada, através do problema concreto de calcular uma correção de dois *loops* para o potencial efetivo, de uma forma tal que possa ser estendida para outros modelos que generalizam o modelo de O’Raifeartaigh. No nosso caso, tivemos que calcular apenas quatro diagramas no super-espço, reduzindo drasticamente (da ordem de centenas) o número de diagramas que seria necessário calcular caso usássemos os campos componentes e, apesar da forma muito mais complicada dos propagadores, trabalhar com eles não é tão complicado como pode parecer em um primeiro momento, devido ao caráter anticomutante das variáveis θ e $\bar{\theta}$ e às relações que obtivemos na presença destas variáveis, que simplificam muito o cálculo das longas expressões que aparecem nos superdiagramas para o caso de *SUSY* quebrada. Portanto, a opção de calcular apenas uns poucos diagramas, mesmo com as regras de Feynman mais complicadas, na nossa perspectiva, é melhor, e confirmamos isto no cálculo explícito da correção de dois *loops* para o potencial efetivo.

Após este cálculo, voltamos a aplicar a *LDE* para o modelo de O’Raifeartaigh, calculando o potencial efetivo até ordem δ^2 . Neste caso, temos diagramas de vácuo de um e dois *loops* e diagramas de um *loop* de ordens δ^1 e δ^2 . Calculamos todos estes diagramas no super-espço e mostramos que as soluções para os parâmetros otimizados obtidas anteriormente, para o caso do potencial efetivo até ordem δ^1 , não são mais válidas. Assim, para encontrar as novas soluções, introduzimos um *ansatz* e, com isto, através de um cálculo numérico, esperamos obter uma nova correção não perturbativa de uma certa classe de diagramas de dois *loops*.

Como perspectivas futuras, a continuação óbvia do que foi realizado nesta tese é o estudo de modelos com quebra espontânea de simetria *R* e com vácuo metaestável com quebra de *SUSY*, desenvolvidos principalmente em [18]-[22] e [33]. No contexto do mecanismo de Intriligator-Seiberg-Shih, uma sequência natural de nosso trabalho seria um estudo e uma discussão mais detalhados de nossas correções radiativas para o potencial efetivo para analisar aspectos como seus efeitos no tempo de vida deste vácuo instável para modelos do tipo O’Raifeartaigh. Nesta linha - tendo em vista a quebra de simetria *R* - também seria interessante uma investigação mais fenomenológica, aplicando as técnicas e resultados desenvolvidos aqui para analisar os modos

de decaimento da partícula supersimétrica mais leve, presente no *MPSM*, em partículas do *MP*.

Um outro trabalho a ser realizado é o de testar a eficácia da *LDE* quando aplicada em teorias de gauge supersimétricas, em especial à quebra de *SUSY à la* Fayet-Iliopoulos (quebra pelo termo D) [50]. Neste caso, os resultados presentes em [59] mostram que os cálculos no super-espaço são mais complexos do que no caso de modelos do tipo O’Raifeartaigh; misturas não triviais entre os supercampos de matéria e de potencial de gauge que aparecem nestas teorias geram uma grande discussão sobre a fixação de gauge do tipo R_ξ no super-espaço. Logo, o modelo de Fayet-Iliopoulos para quebra de *SUSY* proporciona um cenário apropriado para o teste da *LDE* e o estudo da mistura matéria/setor de gauge deve trazer um entendimento melhor da *LDE* no super-espaço.

Apêndice A

Notação

Apresentamos a seguir as notações e convenções utilizadas no texto, com respeito às matrizes de Pauli e à álgebra espinorial. Também apresentamos algumas propriedades e relações desta álgebra.

A notação utilizada neste apêndice e ao longo de toda a tese é a mesma das referências [28] e [29].

A.1 Álgebra espinorial

Primeiramente, devemos salientar que estamos trabalhando sempre em $(3 + 1)$ dimensões, com a métrica de Minkowski dada por

$$\eta^{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Denotamos índices de $SL(2, \mathbb{C})$ por letras gregas, tal que as componentes de uma matriz $N \in SL(2, \mathbb{C})$ são N_{α}^{β} , $\alpha, \beta = 1, 2$.

A conexão entre $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz é estabelecida através das matrizes de Pauli, que, com $m = 0, 1, 2, 3$, têm a forma

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m : \sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Estas matrizes formam uma base para as matrizes complexas 2×2 :

$$P = P_m \sigma^m = \begin{pmatrix} -P_0 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & -P_0 - P_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Podemos escrever as matrizes de Dirac γ^m em termos das matrizes de Pauli,

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

e definimos

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.5})$$

tal que $(\gamma^5)^2 = 1$ e $\{\gamma^5, \gamma^m\} = 0$.

Seja $N \in SL(2, \mathbb{C})$ uma matriz de determinante igual a um. Para qualquer matriz hermitiana P , podemos sempre obter uma outra matriz P' através da transformação:

$$P' = NPN^\dagger. \quad (\text{A.6})$$

Tanto P quanto P' possuem expansão em σ ,

$$\sigma^m P'_m = N \sigma^m P_m N^\dagger \quad (\text{A.7})$$

e, como $\det N = 1$, os coeficientes P_m e P'_m são conectados por uma transformação de Lorentz:

$$\det[\sigma^m P'_m] = \det[\sigma^m P_m] = P_0'^2 - |\vec{P}'|^2 = P_m' P'^m = P_0^2 - |\vec{P}|^2 = P^m P_m. \quad (\text{A.8})$$

A matriz N , sua complexa conjugada N^* , sua transposta inversa $(N^T)^{-1}$ e sua conjugada hermitiana inversa $(N^\dagger)^{-1}$, todas representam $SL(2, \mathbb{C})$. Estas matrizes representam a ação do grupo de Lorentz em espinores de Weyl de duas componentes.

As representações de $SL(2, \mathbb{C})$ e suas transformações sob N são

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\rightarrow \psi'_\alpha = N_\alpha{}^\beta \psi_\beta, \\ \psi^\alpha &\rightarrow \psi'^\alpha = (N^{-1})^\alpha{}_\beta \psi^\beta, \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &\rightarrow \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = (N^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &\rightarrow \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = ((N^*)^{-1})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

As duas primeiras representações são equivalentes e um objeto de duas componentes que se transforma de acordo com estas representações é chamado de “espinor de Weyl de mão esquerda”. O mesmo ocorre para as duas últimas representações, isto é, estas também são equivalentes, e um objeto de duas componentes que se transforma de acordo com estas representações é chamado de “espinor de Weyl de mão direita”.

Podemos levantar e abaixar os índices destes espinores, utilizando os tensores antissimétricos invariantes sob o grupo de Lorentz $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ e $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, definidos por

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \epsilon^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} &= \delta_{\alpha}^{\gamma}, \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} &= \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}},\end{aligned}\tag{A.11}$$

da seguinte maneira:

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}, \quad \psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta},\tag{A.12}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}.\tag{A.13}$$

Usamos também a seguinte notação de soma para os espinores (assumindo que estes anti-comutam entre si):

$$\begin{aligned}\psi\xi &= \psi^{\alpha}\xi_{\alpha} = -\psi_{\alpha}\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \xi\psi, \\ \bar{\psi}\bar{\xi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}\bar{\psi}.\end{aligned}\tag{A.14}$$

O produto $\bar{\psi}\bar{\xi}$ é definido de tal forma que

$$(\xi\psi)^{\dagger} = (\xi^{\alpha}\psi_{\alpha})^{\dagger} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\xi} = \bar{\xi}\bar{\psi},\tag{A.15}$$

onde notamos que a conjugação inverte a ordem dos espinores. Em particular, para as variáveis de Grassmann do super-espaco:

$$\theta\theta = \theta^{\alpha}\theta_{\alpha} = \theta^2, \quad \bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^2;\tag{A.16}$$

$$(\theta\theta)^{\dagger} = \bar{\theta}\bar{\theta}.\tag{A.17}$$

Dados dois espinores de Dirac,

$$\Psi_{D1} = \begin{pmatrix} \psi_{1\alpha} \\ \bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{D2} = \begin{pmatrix} \psi_{2\alpha} \\ \bar{\xi}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix},\tag{A.18}$$

as relações entre estes e os espinores de Weyl são:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{D1}\Psi_{D2} &= \xi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\xi}_2, \\ \bar{\Psi}_{D1}\gamma^5\Psi_{D2} &= \xi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\xi}_2, \\ \bar{\Psi}_{D1}\gamma^m\Psi_{D2} &= \xi_1\sigma^m\bar{\xi}_2 - \psi_2\sigma^m\bar{\psi}_1, \\ \bar{\Psi}_{D1}\gamma^m\gamma^5\Psi_{D2} &= -\xi_1\sigma^m\bar{\xi}_2 - \psi_2\sigma^m\bar{\psi}_1.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Para espinores de Majorana,

$$\Psi_{M1} = \begin{pmatrix} \psi_{1\alpha} \\ \bar{\psi}_1^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{M2} = \begin{pmatrix} \psi_{2\alpha} \\ \bar{\psi}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix},\tag{A.20}$$

as relações entre estes e os espinores de Weyl são análogas a (A.19).

Assim como fizemos para os espinores, também podemos levantar e abaixar os índices das matrizes de Pauli, com a introdução das matrizes $\bar{\sigma}^m$,

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m,\tag{A.21}$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m = \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta},\tag{A.22}$$

onde $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$ e $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$, com $i = 1, 2, 3$.

Denotamos contrações envolvendo espinores e as matrizes de Pauli da seguinte forma:

$$\xi^\alpha \sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = (\xi \sigma^m)_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = \xi \sigma^m \bar{\psi} , \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta = (\bar{\xi} \bar{\sigma}^m)^\beta \psi_\beta = \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \psi . \quad (\text{A.24})$$

Os geradores do grupo de Lorentz na representação espinorial são dados por

$$\sigma^{nm}{}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4} (\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}) , \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{\sigma}^{nm\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \sigma^n_{\alpha\dot{\beta}}) , \quad (\text{A.26})$$

de tal forma que se M^{mn} são os geradores infinitesimais de $SO(3, 1)$ ($M^{mn} = -M^{nm}$), podemos escrever:

$$\begin{aligned} M_{\alpha}{}^{\beta} &= M^{mn} (\sigma_{mn})_{\alpha}{}^{\beta} , \\ M^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= M^{mn} (\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} . \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A.2 Propriedades

Listamos agora algumas propriedades úteis da álgebra espinorial apresentada na seção anterior, onde θ e $\bar{\theta}$ são variáveis de Grassmann de duas componentes e $\xi(\bar{\xi})$, $\psi(\bar{\psi})$ e $\phi(\bar{\phi})$ são espinores de Weyl:

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \theta^\beta &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \theta^2 , \\ \theta_\alpha \theta_\beta &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \theta^2 , \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^2 , \\ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^2 . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} (\theta \xi)(\theta \psi) &= -\frac{1}{2} (\xi \psi) \theta^2 , \\ (\bar{\theta} \bar{\xi})(\bar{\theta} \bar{\psi}) &= -\frac{1}{2} (\bar{\xi} \bar{\psi}) \bar{\theta}^2 . \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\theta \sigma^m \bar{\theta} \theta \sigma^n \bar{\theta} = -\frac{1}{2} \theta^2 \bar{\theta}^2 \eta^{mn} . \quad (\text{A.30})$$

$$\xi \sigma^m \bar{\psi} = -\bar{\psi} \bar{\sigma}^m \xi , \quad (\text{A.31})$$

$$(\xi \sigma^m \bar{\psi})^\dagger = \psi \sigma^m \bar{\xi} , \quad (\text{A.32})$$

$$\xi \sigma^m \bar{\sigma}^n \psi = \psi \sigma^n \bar{\sigma}^m \xi , \quad (\text{A.33})$$

$$(\xi \sigma^m \bar{\sigma}^n \psi)^\dagger = \bar{\psi} \bar{\sigma}^n \sigma^m \bar{\xi} . \quad (\text{A.34})$$

$$(\sigma^m \bar{\theta})_\alpha (\theta \sigma^n \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \eta^{mn} \theta_\alpha \bar{\theta}^2 - i (\sigma^{mn} \theta)_\alpha \bar{\theta}^2 . \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} (\theta \xi)(\bar{\theta} \bar{\psi}) &= \frac{1}{2} (\theta \sigma^m \bar{\theta})(\xi \sigma_m \bar{\psi}) , \\ (\bar{\theta} \bar{\psi})(\theta \xi) &= \frac{1}{2} (\theta \sigma^m \bar{\theta})(\xi \sigma_m \bar{\psi}) = (\theta \xi)(\bar{\theta} \bar{\psi}) . \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$(\psi \phi) \bar{\xi}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2} (\phi \sigma^m \bar{\xi})(\psi \sigma^m)_{\dot{\beta}} . \quad (\text{A.37})$$

Estas identidades são chamadas de identidades de Fierz.

Para as matrizes de Pauli:

$$Tr[\sigma^m \bar{\sigma}^n] = -2\eta^{mn} . \quad (\text{A.38})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\sigma}_m^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} . \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} (\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta &= -2\eta^{mn} \delta_\alpha^\beta , \\ (\bar{\sigma}^m \sigma^n + \bar{\sigma}^n \sigma^m)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= -2\eta^{mn} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} . \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma^{mn}{}_\alpha{}^\alpha = 0 . \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma^{mn}{}_\alpha{}^\beta \epsilon_{\beta\gamma} = \sigma^{mn}{}_\gamma{}^\beta \epsilon_{\beta\alpha} . \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{mnpq} \sigma_{pq} &= -2i\sigma^{mn} , \\ \epsilon^{mnpq} \bar{\sigma}_{pq} &= 2i\bar{\sigma}^{mn} . \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}} - \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^n{}_{\beta\dot{\beta}} &= 2 [(\sigma^{nm} \epsilon)_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\epsilon \bar{\sigma}^{nm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\alpha\beta}] , \\ \sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}} + \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^n{}_{\beta\dot{\beta}} &= -\eta^{nm} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 4(\sigma^{ln} \epsilon)_{\alpha\beta} (\epsilon \bar{\sigma}^{lm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} . \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$Tr[\sigma^{mn} \sigma^{kl}] = -\frac{1}{2} (\eta^{mk} \eta^{nl} - \eta^{ml} \eta^{nk}) - \frac{i}{2} \epsilon^{mnkl} . \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \sigma^m \bar{\sigma}^n \sigma^p + \sigma^p \bar{\sigma}^n \sigma^m &= 2(\eta^{mp} \sigma^n - \eta^{np} \sigma^m - \eta^{mn} \sigma^p) , \\ \bar{\sigma}^m \sigma^n \bar{\sigma}^p + \bar{\sigma}^p \sigma^n \bar{\sigma}^m &= 2(\eta^{mp} \bar{\sigma}^n - \eta^{np} \bar{\sigma}^m - \eta^{mn} \bar{\sigma}^p) . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} \sigma^m \bar{\sigma}^n \sigma^p - \sigma^p \bar{\sigma}^n \sigma^m &= 2i\epsilon^{mnpq} \sigma_q , \\ \bar{\sigma}^m \sigma^n \bar{\sigma}^p - \bar{\sigma}^p \sigma^n \bar{\sigma}^m &= -2i\epsilon^{mnpq} \bar{\sigma}_q . \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

As derivadas com relação às variáveis de Grassmann são denotadas por

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = \partial_\alpha , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} = \partial^\alpha , \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} , \quad \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{\alpha}}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} , \quad (\text{A.49})$$

e têm as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta &= -\partial^\alpha, \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}} &= -\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}.\end{aligned}\tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\theta_\beta &= \delta^\alpha_\beta, & \partial_\alpha\theta_\beta &= -\epsilon_{\alpha\beta}, \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, & \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}.\end{aligned}\tag{A.51}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\theta^2 &= \partial^\alpha\partial_\alpha\theta^2 = -\partial_\alpha\partial^\alpha\theta^2 = 4, \\ \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}^2 &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^2 = -\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^2 = 4.\end{aligned}\tag{A.52}$$

Apêndice B

Propriedades de $\mathbb{R}^{4/4}$, $\mathbb{C}^{4/2}$ e $\mathbb{C}^{*4/2}$

B.1 Integração e derivação

Uma integral indefinida sobre uma variável de Grassmann θ é definida por

$$\int d\theta = 0 \ ; \ \int \theta d\theta = 1 \ , \quad (\text{B.1})$$

ou, generalizando:

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \ ; \ \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \ . \quad (\text{B.2})$$

Dada uma função polinomial de θ ,

$$f(\theta) = a + b\theta \ ,$$

temos, usando (B.1), que:

$$\begin{aligned} \int f(\theta) d\theta &= \int (a + b\theta) d\theta = a \int d\theta + b \int \theta d\theta = b \ , \\ \int f(\theta) \theta d\theta &= \int (a + b\theta) \theta d\theta = a \int \theta d\theta + b \int \theta \theta d\theta = a \ . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Introduzimos as seguintes medidas escalares para integração de variáveis de Grassmann:

$$\begin{aligned} d^2\theta &= -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta_\alpha \ , \\ d^2\bar{\theta} &= -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \ , \\ d^4\theta &= d^2\theta d^2\bar{\theta} = \frac{1}{16} d\theta^\alpha d\theta_\alpha d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \ , \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

que satisfazem:

$$\int d^2\theta \theta^2 = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 = \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 = 1 \ . \quad (\text{B.5})$$

Como $\partial_\beta \theta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, da mesma forma que $\int d\theta^\alpha \theta_\beta = \delta_\beta^\alpha$, concluímos que integração e derivação no espaço de Grassmann são equivalentes, ou seja:

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4} \partial^\alpha \partial_\alpha \ ,$$

$$\begin{aligned}\int d^2\bar{\theta} &= \frac{1}{4}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}, \\ \int d^4\theta &= \frac{1}{16}\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Obviamente, derivadas com respeito às variáveis de Grassmann anticomutam.

Vamos provar o seguinte:

Proposição: Se f é quiral ($\bar{D}_{\dot{\alpha}}f = 0$), então $\int d^4x \int d^2\theta f$ é supersimétrica.

Prova: Para provar esta proposição, basta aplicar a transformação de Supersimetria δ_Q na integral:

$$\begin{aligned}\delta_Q \int d^4x \int d^2\theta f &= \int d^4x \int d^2\theta (\delta_Q f) \\ &= \int d^4x \int d^2\theta [(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})f] \\ &= \int d^4x \int d^2\theta [\xi^{\alpha}(\partial_{\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_m)] f.\end{aligned}$$

Como

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_m \Rightarrow \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \bar{D}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_m,\tag{B.7}$$

temos que

$$\begin{aligned}\delta_Q \int d^4x \int d^2\theta f &= \int d^4x \int d^2\theta [\xi^{\alpha}(\partial_{\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(\bar{D}^{\dot{\alpha}} - 2i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_m)] f \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x (\partial^{\gamma}\partial_{\gamma})(\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}f + \text{termos de superfície}) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{B.8}$$

Logo, $\int d^4x \int d^2\theta f$ é supersimétrica.

Podemos também definir superdeterminantes e supertraços. Uma supermatriz é definida como uma matriz $M = M_Q^P$ da forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\tag{B.9}$$

determinando uma forma quadrática $z_P M_Q^P z'^Q$, onde z e z' são coordenadas no super-espço e A, B, C e D são blocos de matrizes. O superdeterminante desta matriz é introduzido como

$$sDet(M) = \int d^8z_1 d^8z_2 e^{-z_1 M z_2},\tag{B.10}$$

ou

$$sDet(M) = det(A)det^{-1}(D - CA^{-1}B).\tag{B.11}$$

O supertraço desta matriz é

$$sTr(M) = Tr(A) - Tr(D)\tag{B.12}$$

e, como usual,

$$sDet(M) = exp(sTr \ln M).\tag{B.13}$$

B.2 A função δ de Grassmann

Definimos a função δ em $\mathbb{R}^{4/4}$ através da integral:

$$\int f(\theta) \delta(\theta) d\theta = f(0) . \quad (\text{B.14})$$

Desta igualdade e de (B.3) tiramos que

$$\delta(\theta) = \theta \quad (\text{B.15})$$

e, consequentemente,

$$\delta(\theta) \delta(\theta) = 0 . \quad (\text{B.16})$$

Generalizando para variáveis de Grassmann de duas dimensões (espinores), temos que

$$\begin{aligned} \delta^8(z) &= \delta^4(x) \delta^2(\theta) \delta^2(\bar{\theta}) , \\ \delta^2(\theta) &= \theta^2 , \\ \delta^2(\bar{\theta}) &= \bar{\theta}^2 , \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

com as propriedades

$$\begin{aligned} \int d^8 z' \delta^8(z - z') v(z') &= v(z) , \\ \delta^8(z - z') v(z') &= \delta^8(z - z') v(z) , \\ \delta^8(z) &= \delta^8(-z) , \quad (\delta^8(z))^2 = 0 , \quad \delta^8(0) = 0 , \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde $v(z) = v(x, \theta, \bar{\theta})$ é um supercampo arbitrário. Da mesma forma, no subespaço das variáveis θ e $\bar{\theta}$ apenas, obtemos

$$\int d^4 \theta' \delta^4(\theta - \theta') f(\theta') = f(\theta) , \quad (\text{B.19})$$

com a condição

$$\int d^4 \theta \delta^4(\theta - \theta') = 1 . \quad (\text{B.20})$$

Denotamos $\delta^4(\theta_1 - \theta_2)$ por δ_{12}^4 .

Seja $F(z) = F(x, \theta, \bar{\theta})$ um supercampo escalar arbitrário. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F^J(z')}{\delta F^I(z)} &= \frac{\delta \bar{F}^J(z')}{\delta \bar{F}^I(z)} = \delta_I^J \delta^8(z - z') , \\ \frac{\delta F^J(z')}{\delta \bar{F}^I(z)} &= \frac{\delta \bar{F}^J(z')}{\delta F^I(z)} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

No subespaço quiral (de Φ e $\bar{\Phi}$), estas relações tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi(z')}{\delta \Phi(z)} &= -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \delta^8(z - z') \equiv \delta_+(z, z') , \\ \frac{\delta \bar{\Phi}(z')}{\delta \bar{\Phi}(z)} &= -\frac{1}{4} D^2 \delta^8(z - z') \equiv \delta_-(z, z') , \\ \frac{\delta \Phi(z')}{\delta \bar{\Phi}(z)} &= \frac{\delta \bar{\Phi}(z')}{\delta \Phi(z)} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Aqui, $\delta_+(z, z')$ é chamado de “função delta quirial” e $\delta_-(z, z')$ é chamado de “função delta antiquiral”. Suas propriedades básicas são

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\delta_+(z, z') = 0 , \quad (\text{B.23})$$

$$\delta_+(z, z') = \delta_+(z', z) , \quad (\text{B.24})$$

$$\int d^6 z' \delta_+(z, z') \Phi(z') = \Phi(z) , \quad (\text{B.25})$$

$$(\delta_+(z, z'))^2 = 0 , \quad (\text{B.26})$$

$$\delta_+(z, z) = 0 , \quad (\text{B.27})$$

e basta conjugá-las para obter relações completamente análogas para $\delta_-(z, z')$.

Apêndice C

Identidades envolvendo as derivadas covariantes

Neste apêndice listaremos várias identidades envolvendo as derivadas covariantes D e $\bar{D}$. Suas expressões são

$$D_\alpha(p) = \partial_\alpha - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} p_m, \quad D^\alpha(p) = -\partial^\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} p_m, \quad (\text{C.1})$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(p) = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m p_m, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}}(p) = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha p_m, \quad (\text{C.2})$$

Daí:

$$\{D_\alpha(p), \bar{D}_{\dot{\alpha}}(k)\} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (p+k)_m, \quad (\text{C.3})$$

e

$$D^2(p) = D^\alpha(p) D_\alpha(p) = -\partial^\alpha \partial_\alpha + 2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} p_m \partial_\alpha + \bar{\theta}^2 p^2, \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{D}^2(p) = \bar{D}_{\dot{\alpha}}(p) \bar{D}^{\dot{\alpha}}(p) = -\partial_{\dot{\alpha}} \partial^{\dot{\alpha}} + 2\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m p_m \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + \theta^2 p^2. \quad (\text{C.5})$$

C.1 Relações de comutação e anticomutação

Relações envolvendo as derivadas covariantes D_α e D^α :

$$\begin{aligned} [D_\alpha, \theta_\beta] &= -\epsilon_{\alpha\beta} - 2\theta_\beta D_\alpha, & [D_\alpha, \theta^\beta] &= \delta_\alpha^\beta - 2\theta^\beta D_\alpha, \\ [D^\alpha, \theta_\beta] &= -\delta_\beta^\alpha - 2\theta_\beta D^\alpha, & [D^\alpha, \theta^\beta] &= \epsilon^{\alpha\beta} - 2\theta^\beta D^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \theta_\beta\} &= -\epsilon_{\alpha\beta}, & \{D_\alpha, \theta^\beta\} &= \delta_\alpha^\beta, \\ \{D^\alpha, \theta_\beta\} &= -\delta_\beta^\alpha, & \{D^\alpha, \theta^\beta\} &= \epsilon^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} [D_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}] &= -2\bar{\theta}_{\dot{\beta}} D_\alpha, & [D_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}] &= -2\bar{\theta}^{\dot{\beta}} D_\alpha, \\ [D^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}] &= -2\bar{\theta}_{\dot{\beta}} D^\alpha, & [D^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}] &= -2\bar{\theta}^{\dot{\beta}} D^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\{D, \bar{\theta}\} = 0 , \quad (C.9)$$

$$[D_\alpha, \theta^2] = 2\theta_\alpha , \quad [D^\alpha, \theta^2] = 2\theta^\alpha , \quad (C.10)$$

$$\{D_\alpha, \theta^2\} = 2\theta_\alpha + 2\theta^2 D_\alpha , \quad \{D_\alpha, \theta^2\} = 2\theta^\alpha + 2\theta^2 D^\alpha , \quad (C.11)$$

$$[D, \bar{\theta}^2] = 0 , \quad (C.12)$$

$$\{D_\alpha, \bar{\theta}^2\} = 2\bar{\theta}^2 D_\alpha , \quad \{D^\alpha, \bar{\theta}^2\} = 2\bar{\theta}^2 D^\alpha . \quad (C.13)$$

Relações envolvendo a derivada covariante D^2 :

$$[D^2, \theta_\alpha] = 2D_\alpha , \quad [D^2, \theta^\alpha] = 2D^\alpha , \quad (C.14)$$

$$\{D^2, \theta_\alpha\} = 2D_\alpha + 2\theta_\alpha D^2 , \quad \{D^2, \theta^\alpha\} = 2D^\alpha + 2\theta^\alpha D^2 , \quad (C.15)$$

$$[D^2, \bar{\theta}] = 0 , \quad (C.16)$$

$$\{D^2, \bar{\theta}_\alpha\} = 2\bar{\theta}_\alpha D^2 , \quad \{D^2, \bar{\theta}^\alpha\} = 2\bar{\theta}^\alpha D^2 , \quad (C.17)$$

$$[D^2, \theta^2] = -4 + 4\theta^\alpha D_\alpha , \quad (C.18)$$

$$\{D^2, \theta^2\} = -4 + 4\theta^\alpha D_\alpha + 2\theta^2 D^2 , \quad (C.19)$$

$$[D^2, \bar{\theta}^2] = 0 , \quad (C.20)$$

$$\{D^2, \bar{\theta}^2\} = 2\bar{\theta}^2 D^2 . \quad (C.21)$$

Relações completamente análogas são obedecidas pelas derivadas $\bar{D}_\alpha$, $\bar{D}^\alpha$ e $\bar{D}^2$.

C.2 Identidades úteis para o cálculo de integrais

No cálculo de integrais no super-espço, algumas identidades envolvendo as derivadas covariantes são muito úteis na redução de uma integral a uma expressão final local nas variáveis de Grassmann, isto é, a uma única integral em $d^4\theta$. Este tipo de manipulação é essencial no cálculo de superdiagramas, tendo em vista o teorema de não-renormalização.

Devido à dependência nas inserções espúrias θ^2 e $\bar{\theta}^2$ dos propagadores, algumas relações triviais que aparecem em cálculos de superdiagramas no caso de teorias com *SUSY* exata devem ser modificadas para os cálculos em teorias com *SUSY* quebrada.

Temos as seguintes relações de transferência:

$$D_2^2(k)\delta_{12}^4 = D_1^2(-k)\delta_{12}^4 , \quad \theta_2^2\delta_{12}^4 = \theta_1^2\delta_{12}^4 \quad (C.22)$$

Agora, listamos abaixo algumas identidades, com $D_1 = D(\theta_1, p)$:

$$D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}^4 = 16e^{(\theta_1 \sigma^m \bar{\theta}_1 + \theta_2 \sigma^m \bar{\theta}_2 - 2\theta_1 \sigma^m \bar{\theta}_2)p_m} , \quad (C.23)$$

$$\bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 = 16e^{-(\theta_1 \sigma^m \bar{\theta}_1 + \theta_2 \sigma^m \bar{\theta}_2 - 2\theta_1 \sigma^m \bar{\theta}_2)p_m} , \quad (C.24)$$

$$\delta_{12}^4 D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}^4 = 16\delta_{12}^4 , \quad (C.25)$$

$$\delta_{12}^4 D_{1\alpha} \bar{D}_{1\dot{\beta}} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{12}^4 = -32 \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a p_a \delta_{12}^4 , \quad (\text{C.26})$$

$$\delta_{12}^4 \bar{D}_1^2 D_1^2 \theta_1^2 \delta_{12}^4 = 16 \theta_1^2 \delta_{12}^4 , \quad (\text{C.27})$$

$$\delta_{12}^4 \bar{D}_1^2 \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 = 16 \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4 , \quad (\text{C.28})$$

$$\delta_{12}^4 \bar{D}_1^2 D_1^2 \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 = (16)^2 e^{2\theta_1 \sigma^m \bar{\theta}_1 p_m} \delta_{12}^4 . \quad (\text{C.29})$$

$$\delta_{12}^4 \delta_{12}^4 = \delta_{12}^4 D^\alpha \delta_{12}^4 = \delta_{12}^4 D^2 \delta_{12}^4 = \delta_{12}^4 \bar{D}_{\dot{\alpha}} \delta_{12}^4 = \delta_{12}^4 \bar{D}^2 \delta_{12}^4 = 0 . \quad (\text{C.30})$$

Uma relação muito útil contendo as derivadas covariantes é:

$$\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) = -16k^2 \bar{D}_1^2(k) \quad , \quad D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) = -16k^2 D_1^2(k) . \quad (\text{C.31})$$

No cálculo das integrais no super-espaço, muitas vezes temos que utilizar integração por partes. Algumas relações úteis são:

$$\int d^4\theta f g (D_\alpha h) = - \int d^4\theta (D_\alpha f) g h - \int d^4\theta f (D_\alpha g) h , \quad (\text{C.32})$$

$$\int d^4\theta f g (D^2 h) = \int d^4\theta (D^2 f) g h + 2 \int d^4\theta (D^\alpha f) (D_\alpha g) h + \int d^4\theta f (D^2 g) h , \quad (\text{C.33})$$

$$\int d^4\theta f g_\beta (D_\alpha h) = \int d^4\theta (D_\alpha f) g_\beta h + \int d^4\theta f (D_\alpha g_\beta) h , \quad (\text{C.34})$$

$$\int d^4\theta f g_\beta (D^2 h) = \int d^4\theta (D^2 f) g_\beta h + 2 \int d^4\theta (D^\alpha f) (D_\alpha g_\beta) h + \int d^4\theta f (D^2 g_\beta) h , \quad (\text{C.35})$$

onde f, g, h são supercampos escalares e g_β é um supercampo espinorial. Relações análogas são válidas para as derivadas covariantes $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ e $\bar{D}^2$.

Apêndice D

Integrais no super-espaço

Neste apêndice, listamos as integrais $\mathcal{I}_i(\theta, \bar{\theta})$ que aparecem no capítulo 6 e as integrais $\mathcal{J}_i(\theta, \bar{\theta})$ que aparecem no capítulo 7. Calcularemos também cinco destas integrais explicitamente, como ilustrações das manipulações algébricas necessárias nos cálculos dos superdiagramas.

As integrais no super-espaço que aparecem no capítulo 6 são:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)D_1^2(p)\theta_1^2\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)\bar{D}_2^2(-q)\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] \\ &= 4(16)^3p^2 ;\end{aligned}\tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)D_1^2(p)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(k)D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)\bar{D}_2^2(-q)\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] \\ &= 0 ;\end{aligned}\tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)D_1^2(p)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(k)\theta_2^2\bar{\theta}_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)\bar{D}_2^2(-q)\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] \\ &= 4(16)^3p^2 ;\end{aligned}\tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_4(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2D_1^2(p)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(k)\theta_2^2\bar{\theta}_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)\bar{D}_2^2(-q)\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] \\ &= -4(16)^3 ;\end{aligned}\tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_5(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\bar{\theta}_1^2D_1^2(p)\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)D_1^2(q)\bar{D}_1^2(q)\theta_1^2\delta_{12}^4] \\ &= (16)^4p^2q^2 ;\end{aligned}\tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\bar{\theta}_1^2D_1^2(p)\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2\theta_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] \\ &\quad \times [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)D_1^2(q)\bar{D}_1^2(q)\theta_1^2\delta_{12}^4] \\ &= (16)^5p^2q^2 ;\end{aligned}\tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_7(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\delta_{12}^4] \\
&= (16)^2;
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_8(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2\theta_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\delta_{12}^4] \\
&= (16)^3;
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)D_1^2(p)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2\theta_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\delta_{12}^4] \\
&= (16)^4;
\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{10}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\delta_{12}^4] \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{11}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2\theta_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\delta_{12}^4] \\
&= -(16)^3k^2;
\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{12}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p)D_1^2(p)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [D_2^2(k)\bar{D}_2^2(k)\bar{\theta}_2^2\theta_2^2D_2^2(k)\delta_{12}^4] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2(q)D_2^2(-q)\delta_{12}^4] \\
&= -(16)^4q^2.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

As integrais no super-espaco que aparecem no capítulo 7 são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1)\Phi_0(2) [\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k)\bar{\theta}_2^2D_2^2(-k)\delta_{12}^4] \\
&= (16)^2\langle F_0 \rangle^2;
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1) [\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [\theta_2^2\bar{D}_2^2(-k)\bar{\theta}_2^2D_2^2(-k)\delta_{12}^4] \\
&= (16)^2\langle F_0 \rangle;
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_3(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\theta_1^2\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [\theta_2^2\bar{D}_2^2(-k)\bar{\theta}_2^2D_2^2(-k)\delta_{12}^4] \\
&= (16)^2;
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_4(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1)\Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k)D_2^2(-k)\delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2k^2\langle F_0 \rangle\langle \varphi_1 \rangle;
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^2 \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_6(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 \langle F_0 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_7(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_8(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{\theta}_2^2 \delta_{12}^4] \\
&= (16)^2 \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_9(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\theta_1^2 \bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 ;
\end{aligned} \tag{D.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{10}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) \Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 \langle \varphi_1 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{11}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) \Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 0 ;
\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{12}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) \Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{\theta}_2^2 \delta_{12}^4] \\
&= (16)^2 \langle \varphi_1 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{13}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 0 ;
\end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{14}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 0 ;
\end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{15}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 16 \langle F_0 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^2 \langle F_0 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{17}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 \langle F_0 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{18}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 16 \langle F_0 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{19}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 \langle F_0 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{20}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\theta_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 16 ;
\end{aligned} \tag{D.32}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{21}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\theta_1^2 \bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 ;
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{22}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{23}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^3 k^2 \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{24}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^3 k^2 \langle F_0 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.36}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{25}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= -(16)^2 k^2 \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.37}$$

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 \theta_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4]$$

$$= -(16)^3 k^2 \langle \varphi_1 \rangle ; \quad (\text{D.38})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{27}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} [\theta_1^2 \bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= -(16)^3 k^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{28}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\ &= 0 ; \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{29}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= 16 \langle \varphi_1 \rangle^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{30}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\ &= -(16)^2 k^2 \langle \varphi_1 \rangle^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{31}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= (16)^2 \langle \varphi_1 \rangle^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{32}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= 16 \langle \varphi_1 \rangle ; \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{33}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\ &= 0 ; \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{34}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= 16 ; \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{35}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\ &= -(16)^2 k^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{36}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \delta_{12}^4] \\ &= (16)^2 ; \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{37}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) \bar{\Phi}_1(2) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 k^4 \langle \varphi_1 \rangle^2 ;
\end{aligned} \tag{D.49}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{38}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 k^4 \langle \varphi_1 \rangle ;
\end{aligned} \tag{D.50}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{39}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= (16)^3 k^4 ;
\end{aligned} \tag{D.51}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{40}(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} \Phi_1(1) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{D.52}$$

D.1 Cálculo explícito de algumas integrais no super-espço

Calcularemos explicitamente algumas das integrais listadas acima, como ilustrações de como usar as relações apresentadas no apêndice C para o cálculo de superdiagramas.

D.1.1 Integral $\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta})$

A integral $\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta})$ aparece no diagrama $\mathcal{G}_3^{(2)}$, da figura 6.2, e é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_2^2(k) \bar{D}_2^2(k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(k) \delta_{12}^4] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2(q) D_2^2(-q) D_1^2(q) \bar{D}_1^2(q) \theta_1^2 \delta_{12}^4] .
\end{aligned} \tag{D.53}$$

Usando (C.22) no segundo e no terceiro colchetes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) &= \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_1^2(-k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2(q) D_1^2(q) \bar{D}_1^2(q) \theta_1^2 D_1^2(q) \delta_{12}^4] .
\end{aligned} \tag{D.54}$$

Usando (C.31) no terceiro colchete:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) &= -16q^2 \int d^4\theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_1^2(-k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] \\
&\quad \times [\bar{D}_1^2(q) \theta_1^2 D_1^2(q) \delta_{12}^4] .
\end{aligned} \tag{D.55}$$

Transferindo $\bar{\theta}_1^2$ do segundo colchete para o primeiro, θ_1^2 do terceiro colchete para o segundo e usando (C.18) (e seu complexo conjugado), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) &= -(16)^2 q^2 \int d^4\theta_{12} [\bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [\theta_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(q) D_1^2(q) \delta_{12}^4] .
\end{aligned} \tag{D.56}$$

Transferindo θ_1^2 do segundo colchete para o primeiro e integrando por partes $\bar{D}_1^2$ do terceiro colchete:

$$\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) = -(16)^2 q^2 \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] [D_1^2(q) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.57})$$

Integrando por partes D_1^2 do terceiro colchete e usando (C.25) e as relações

$$\delta_{12}^4 D_{1\alpha} \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 = 0 \quad , \quad \delta_{12}^4 D_1^2 \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^4 = 0 , \quad (\text{D.58})$$

obtemos:

$$\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) = -(16)^3 q^2 \int d^4 \theta_{12} [D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] \delta_{12}^4 . \quad (\text{D.59})$$

Usando (C.29):

$$\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) = -(16)^5 q^2 \int d^4 \theta e^{2\theta \sigma^m \bar{\theta} p_m} . \quad (\text{D.60})$$

Mas,

$$\int d^4 \theta e^{2\theta \sigma^m \bar{\theta} p_m} = \int d^4 \theta (1 + 2\theta \sigma^m \bar{\theta} p_m - \theta^2 \bar{\theta}^2 p^2) = -p^2 , \quad (\text{D.61})$$

logo:

$$\mathcal{I}_6(\theta, \bar{\theta}) = (16)^5 p^2 q^2 . \quad (\text{D.62})$$

D.1.2 Integral $\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta})$

A integral $\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta})$ aparece no diagrama $\mathcal{G}_4^{(2)}$, da figura 6.2, e é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = & \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) D_1^2(p) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_2^2(k) \bar{D}_2^2(k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(k) \delta_{12}^4] \\ & \times [\bar{D}_1^2(q) D_2^2(-q) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \delta_{12}^4] . \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

Usando (C.22) no segundo e terceiro colchetes:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = & \int d^4 \theta_{12} [\bar{D}_1^2(p) \bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \theta_1^2 \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_1^2(-k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] \\ & \times [\bar{D}_1^2(q) \bar{\theta}_1^2 \theta_1^2 D_1^2(q) \delta_{12}^4] . \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

Transferindo $\bar{\theta}_1^2$ do segundo colchete para o primeiro e usando o complexo conjugado de (C.18):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = & -4 \int d^4 \theta_{12} [\bar{\theta}_1^2 D_1^2(p) \theta_1^2 \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_1^2(-k) \theta_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] \\ & \times [\bar{D}_1^2(q) \bar{\theta}_1^2 \theta_1^2 D_1^2(q) \delta_{12}^4] . \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

Transferindo $\bar{\theta}_1^2$ do primeiro colchete para o terceiro e usando novamente o complexo conjugado de (C.18):

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = 16 \int d^4 \theta_{12} [D_1^2(p) \theta_1^2 \bar{D}_1^2(p) \delta_{12}^4] [D_1^2(-k) \theta_1^2 \bar{D}_1^2(-k) D_1^2(-k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_1^2 \theta_1^2 D_1^2(q) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.66})$$

Transferindo θ_1^2 do terceiro colchete para o segundo e usando (C.18):

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = -4(16) \int d^4\theta_{12} [D_1^2(p)\theta_1^2\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [\theta_1^2\bar{D}_1^2(-k)D_1^2(-k)\delta_{12}^4] [\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.67})$$

Novamente, transferimos θ_1^2 do segundo colchete para o primeiro e usamos (C.18), obtendo:

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \int d^4\theta_{12} [\theta_1^2\bar{D}_1^2(p)\delta_{12}^4] [\bar{D}_1^2(-k)D_1^2(-k)\delta_{12}^4] [\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.68})$$

Transferindo θ_1^2 do primeiro colchete para o terceiro, integrando por partes $\bar{D}_1^2$ do primeiro colchete e usando (C.25), obtemos:

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = (16)^3 \int d^4\theta_{12}\delta_{12}^4 [\bar{D}_1^2(q)\theta_1^2\bar{\theta}_1^2D_1^2(q)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.69})$$

Agora, usando (C.28):

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = (16)^4 \int d^4\theta\theta^2\bar{\theta}^2 . \quad (\text{D.70})$$

Lembrando que

$$\int d^4\theta\theta^2\bar{\theta}^2 = 1 , \quad (\text{D.71})$$

finalmente chegamos a:

$$\mathcal{I}_9(\theta, \bar{\theta}) = (16)^4 . \quad (\text{D.72})$$

D.1.3 Integral $\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta})$

A integral $\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta})$ aparece no diagrama $\mathcal{G}_4^{(1)\delta^2}$, da figura 7.4, e é dada por:

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1)\Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k)\theta_2^2\bar{\theta}_2^2D_2^2(-k)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.73})$$

Usando (C.22) no segundo colchete:

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1)\Phi_1(2) [\bar{D}_1^2(k)\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [D_1^2(k)\bar{\theta}_1^2\theta_1^2\bar{D}_1^2(k)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.74})$$

Transferindo $\bar{\theta}_1^2$ do segundo colchete para o primeiro e usando o complexo conjugado de (C.18):

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = -4 \int d^4\theta_{12}\Phi_0(1)\Phi_1(2) [\bar{\theta}_1^2D_1^2(k)\delta_{12}^4] [D_1^2(k)\theta_1^2\bar{D}_1^2(k)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.75})$$

Usando (C.33) para integrar por partes D_1^2 do primeiro colchete, os termos que atuam na derivada D_1^2 no segundo colchete são nulos e, como D_1^2 não atua em $\Phi_1(2)$, obtemos:

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = -4 \int d^4\theta_{12} [D_1^2(p)\Phi_0(1)] \Phi_1(2)\bar{\theta}_1^2\delta_{12}^4 [D_1^2(k)\theta_1^2\bar{D}_1^2(k)\delta_{12}^4] . \quad (\text{D.76})$$

Usando (C.27):

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \int d^4\theta\theta^2\bar{\theta}^2 \left[-\frac{1}{4}D_1^2(p)\Phi_0 \right] \Phi_1 . \quad (\text{D.77})$$

Como o momento do supercampo externo clássico é nulo, temos que:

$$-\frac{1}{4}D_1^2(p)\Phi_0 = -\frac{1}{4}D_1^2(0)\Phi_0 = -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha\Phi_0 = \langle F_0 \rangle . \quad (\text{D.78})$$

Assim:

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \langle F_0 \rangle \int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 \Phi_1 . \quad (\text{D.79})$$

Portanto:

$$\mathcal{J}_5(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \langle F_0 \rangle \langle \varphi_1 \rangle . \quad (\text{D.80})$$

D.1.4 Integral $\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta})$

A integral $\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta})$ aparece no diagrama $\mathcal{G}_{14}^{(1)\delta^2}$, da figura 7.7, e é dada por:

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 D_2^2(-k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.81})$$

Usando (C.22) no segundo colchete:

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) [\bar{D}_1^2(k) \delta_{12}^4] [D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.82})$$

Integrando por partes $\bar{D}_1^2$ do primeiro colchete:

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \Phi_0(1) \bar{\Phi}_0(2) \delta_{12}^4 [\bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \theta_1^2 \bar{\theta}_1^2 \bar{D}_1^2(k) D_1^2(k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.83})$$

Usando (C.29):

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \int d^4\theta e^{2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m} \Phi_0 \bar{\Phi}_0 . \quad (\text{D.84})$$

Mas,

$$e^{2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m} = 1 + 2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m - \theta^2\bar{\theta}^2k^2 , \quad (\text{D.85})$$

logo:

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 (\langle F_0 \rangle \langle \bar{F}_0 \rangle - k^2 \langle \varphi_0 \rangle \langle \bar{\varphi}_0 \rangle) . \quad (\text{D.86})$$

Como $\langle F_0 \rangle = \langle \bar{F}_0 \rangle$ e $\langle \varphi_0 \rangle = 0$:

$$\mathcal{J}_{16}(\theta, \bar{\theta}) = (16)^2 \langle F_0 \rangle^2 . \quad (\text{D.87})$$

D.1.5 Integral $\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta})$

A integral $\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta})$ aparece no diagrama $\mathcal{G}_{19}^{(1)\delta^2}$, da figura 7.8, e é dada por:

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [D_1^2(k) \bar{D}_1^2(k) \bar{\theta}_1^2 \theta_1^2 D_1^2(k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.88})$$

Usando (C.22) no primeiro colchete:

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [D_2^2(-k) \theta_2^2 \bar{\theta}_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.89})$$

Transferindo θ_2^2 do segundo colchete para o primeiro e usando (C.18):

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = -4 \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [\theta_2^2 \bar{\theta}_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] [\bar{D}_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.90})$$

Transferindo $\bar{\theta}_2^2$ do primeiro colchete para o segundo e usando o complexo conjugado de (C.18):

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = 16 \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [\theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] [\bar{\theta}_2^2 D_2^2(-k) \bar{D}_2^2(-k) \delta_{12}^4] . \quad (\text{D.91})$$

Transferindo $\bar{\theta}_2^2$ do segundo colchete para o primeiro e integrando por partes D_2^2 e $\bar{D}_2^2$ do segundo colchete:

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = 16 \int d^4\theta_{12} \bar{\Phi}_1(1) [\bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \bar{\theta}_2^2 \theta_2^2 \bar{D}_2^2(-k) D_2^2(-k) \delta_{12}^4] \delta_{12}^4 . \quad (\text{D.92})$$

Usando (C.29):

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = (16)^3 \int d^4\theta e^{-2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m} \Phi_0 \bar{\Phi}_0 . \quad (\text{D.93})$$

Mas,

$$e^{-2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m} = 1 - 2\theta\sigma^m\bar{\theta}k_m - \theta^2\bar{\theta}^2 k^2 , \quad (\text{D.94})$$

logo (lembrando que $\langle\varphi_1\rangle = \langle\bar{\varphi}_1\rangle$):

$$\mathcal{J}_{26}(\theta, \bar{\theta}) = -(16)^3 k^2 \langle\varphi_1\rangle . \quad (\text{D.95})$$

Apêndice E

Integrais no espaço dos momentos

Neste apêndice listaremos a forma das integrais no espaço dos momentos presentes ao longo da tese.

E.1 Integrais de um *loop*

Começamos pela integral [53]:

$$\begin{aligned} J_n(m^2) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)} \\ &= \frac{(m^2)^{1-n}}{16\pi^2} \left(4\pi \frac{\mu^2}{m^2} \right)^{2-(D/2)} \frac{\pi}{\Gamma(D/2) \sin \pi(D/2 - n)} , \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

onde $D = 4 - 2\epsilon$ e μ é a escala de renormalização. Expandindo esta expressão, obtemos duas igualdades úteis:

$$J_0(m^2) = -\frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] , \quad (\text{E.2})$$

$$J_1(m^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] . \quad (\text{E.3})$$

Um tipo de integrais que aparece em nossos cálculos no capítulo 5 é:

$$L_n(m^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1}{k^{2n}} \ln \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) . \quad (\text{E.4})$$

Este tipo de integrais está relacionado com integrais do tipo (E.1) através da relação

$$\frac{\partial}{\partial m^2} L_n(m^2) = J_n(m^2) \implies L_n(m^2) = \frac{m^2}{D/2 - n} J_n(m^2) , \quad (\text{E.5})$$

para $n = 0, 1$. Assim, de (E.2) e (E.3), obtemos:

$$L_0(m^2) = -\frac{1}{2} \frac{m^4}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] , \quad (\text{E.6})$$

$$L_1(m^2) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] , \quad (\text{E.7})$$

que são as igualdades que usamos para as integrais (5.99) e (5.103).

Já a integral

$$K(m^2, M^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \text{tr} \ln \left(1 - \frac{M^2 \bar{M}^2}{(k^2 + m^2 \bar{m}^2)^2} \right) \quad (\text{E.8})$$

pode ser escrita como uma soma de integrais do tipo (E.6),

$$K(m^2, M^2) = \text{tr} [L_0(m^2 + \tilde{m}^2) + L_0(m^2 - \tilde{m}^2) - 2L_0(m^2)] , \quad (\text{E.9})$$

com $\tilde{m}^2 = (M^2 \bar{M}^2)^{1/2}$, e é esta igualdade que usamos em (5.100) para chegarmos ao resultado (5.105).

No que segue, definimos $\eta^2 = M^2 + a^2$, $\eta^\pm = M^2 + a^2 \pm b$ e adotamos a mesma notação de [55, 56, 57]. No capítulo 7, nos deparamos com integrais do tipo

$$J(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + x} . \quad (\text{E.10})$$

Fazendo $D = 4 - 2\epsilon$, escrevemos a expressão acima como:

$$J(x) = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{k^2 + x} = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(-1 + \epsilon) x^{1-\epsilon} . \quad (\text{E.11})$$

Expandindo em torno de ϵ , obtemos:

$$\kappa J(x) = -\frac{x}{\epsilon} + x (\bar{\ln} x - 1) , \quad (\text{E.12})$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa &= (4\pi)^2 , \\ \bar{\ln} x &= \ln \left(\frac{x}{\mu^2} \right) + \gamma - \ln 4\pi . \end{aligned}$$

A parte finita desta integral é denotada por:

$$\kappa J_f(x) = x (\bar{\ln} x - 1) , \quad (\text{E.13})$$

Temos também integrais do tipo [60]:

$$\tilde{J}(x) = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(k^2 + x)^2} = \frac{(\mu^2)^\epsilon}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)} x^{-\epsilon} . \quad (\text{E.14})$$

Expandindo em torno de ϵ :

$$\kappa \tilde{J}(x) = \frac{1}{\epsilon} - \bar{\ln} x . \quad (\text{E.15})$$

De posse dos resultados (E.12) e (E.15), podemos calcular as integrais de um *loop* presentes no capítulo 7. Para isto separamos o integrando de cada integral, usando o método da

decomposição em frações parciais. Lembramos que:

$$\begin{aligned}
A(k) &= \frac{1}{k^2 (k^2 + |M|^2 + |a|^2)} , \\
B(k) &= \frac{1}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2) [(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2]} , \\
C(k) &= \frac{1}{k^2 [(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2]} , \\
E(k) &= \frac{1}{k^2 + |M|^2 + |a|^2} , \\
F(k) &= \frac{1}{(k^2 + |M|^2 + |a|^2)^2 - |b|^2} ,
\end{aligned}$$

com a, b e M reais.

Listamos agora os resultados das integrais:

$$\begin{aligned}
I_1(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2} \\
&= -\frac{1}{2b} J(\eta^+) + \frac{1}{2b} J(\eta^-) \\
&= \frac{1}{\kappa \epsilon} - \frac{1}{2\kappa b} (\eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^- - 2b) ; \tag{E.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= -\frac{1}{b^2} J(\eta^2) + \frac{1}{2b^2} J(\eta^+) + \frac{1}{2b^2} J(\eta^-) \\
&= -\frac{1}{2\kappa b^2} (2\eta^2 \bar{\ln} \eta^2 - \eta^+ \bar{\ln} \eta^+ - \eta^- \bar{\ln} \eta^-) ; \tag{E.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F(k) F(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= \frac{1}{4b^2} \tilde{J}(\eta^+) + \frac{1}{4b^2} \tilde{J}(\eta^-) + \frac{1}{4b^3} J(\eta^+) - \frac{1}{4b^3} J(\eta^-) \\
&= \frac{1}{4\kappa b^3} (\eta^2 \bar{\ln} \eta^+ - \eta^2 \bar{\ln} \eta^- - 2b) ; \tag{E.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A(k) F(k) k^2 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 (k^2 + M^2 + a^2)] [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]}
\end{aligned}$$

$$= I_2(k) ; \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned}
I_5(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) F(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= -\frac{1}{4b^3} \tilde{J}(\eta^+) + \frac{1}{4b^3} \tilde{J}(\eta^-) + \frac{1}{b^4} J(\eta^2) - \frac{1}{2b^4} J(\eta^+) - \frac{1}{2b^4} J(\eta^-) \\
&= \frac{1}{4\kappa b^4} [4\eta^2 \bar{\ln} \eta^2 - (2\eta^+ - b) \bar{\ln} \eta^+ - (2\eta^- + b) \bar{\ln} \eta^-] ; \quad (\text{E.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) F(k) k^2 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^2 [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= I_3(k) ; \quad (\text{E.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) B(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] (k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= \frac{1}{b^4} \tilde{J}(\eta^2) + \frac{1}{4b^4} \tilde{J}(\eta^+) + \frac{1}{4b^4} \tilde{J}(\eta^-) + \frac{3}{4b^5} J(\eta^+) - \frac{3}{4b^5} J(\eta^-) \\
&= -\frac{1}{4\kappa b^5} [4b \bar{\ln} \eta^2 - (3\eta^+ - b) \bar{\ln} \eta^+ + (3\eta^- + b) \bar{\ln} \eta^- + 6b] ; \quad (\text{E.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A(k) B(k) k^2 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^2 (k^2 + M^2 + a^2) (k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= -\frac{1}{b^2} \tilde{J}(\eta^2) - \frac{1}{2b^3} J(\eta^+) + \frac{1}{2b^3} J(\eta^-) \\
&= \frac{1}{2\kappa b^3} (2b \bar{\ln} \eta^2 - \eta^+ \bar{\ln} \eta^+ + \eta^- \bar{\ln} \eta^- + 2b) ; \quad (\text{E.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} E(k) E(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) (k^2 + M^2 + a^2)} \\
&= \tilde{J}(\eta^2) \\
&= \frac{1}{\kappa \epsilon} - \frac{1}{\kappa} \bar{\ln} \eta^2 ; \quad (\text{E.24})
\end{aligned}$$

$$I_{10}(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) E(k)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] (k^2 + M^2 + a^2)} \\
&= I_8(k) ;
\end{aligned} \tag{E.25}$$

$$\begin{aligned}
I_{11}(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) E(k) k^2 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^2 [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] (k^2 + M^2 + a^2)} \\
&= I_2(k) ;
\end{aligned} \tag{E.26}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} B(k) C(k) k^2 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] k^2 [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= I_5(k) ;
\end{aligned} \tag{E.27}$$

$$\begin{aligned}
I_{13}(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A(k) B(k) k^4 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{k^2 (k^2 + M^2 + a^2) (k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= I_2(k) - \eta^2 I_8(k) \\
&= -\frac{1}{2\kappa b^3} [4b\eta^2 \bar{\ln}\eta^2 - (\eta^+)^2 \bar{\ln}\eta^+ + (\eta^-)^2 \bar{\ln}\eta^- + 2b\eta^2] ;
\end{aligned} \tag{E.28}$$

$$\begin{aligned}
I_{14}(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C(k) C(k) k^4 \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{k^2 [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2] k^2 [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= I_3(k) ;
\end{aligned} \tag{E.29}$$

$$\begin{aligned}
I_{15}(k) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} E(k) F(k) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M^2 + a^2) [(k^2 + M^2 + a^2)^2 - b^2]} \\
&= I_2(k) .
\end{aligned} \tag{E.30}$$

E.2 Integrais de dois *loops*

Nos capítulos 6 e 7 aparecem várias integrais de dois *loops*, das formas:

$$I(x, y, z) = \frac{(\mu^2)^{2\epsilon}}{(2\pi)^{2D}} \int \frac{d^D p d^D k}{(k^2 + x)(k^2 + y)(q^2 + z)} \quad , \quad q = k - p \quad , \tag{E.31}$$

ou

$$J(x, y) = J(x)J(y) . \quad (\text{E.32})$$

Os resultados destas integrais são:

$$\kappa^2 J(x, y) = xy \left[\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} (2 - \overline{\ln}x - \overline{\ln}y) + (1 - \overline{\ln}x - \overline{\ln}y + \overline{\ln}x\overline{\ln}y) \right] , \quad (\text{E.33})$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 I(x, y, z) = & -\frac{c}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3c}{2} - L_1 \right) - \frac{1}{2} \{ L_2 - 6L_1 + (y+z-x)\overline{\ln}y\overline{\ln}z \\ & + (z+x-y)\overline{\ln}z\overline{\ln}x + (y+x-z)\overline{\ln}y\overline{\ln}x + \xi(x, y, z) + c[7 + \zeta(2)] \} , \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

onde

$$\begin{aligned} c &= x + y + z , \\ \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} \text{ (função zeta de Riemann)} , \\ L_m &= x\overline{\ln}^m x + y\overline{\ln}^m y + z\overline{\ln}^m z , \\ \xi(x, y, z) &= S \left[2 \ln \frac{z+x-y-S}{2z} \ln \frac{z+y-x-S}{2z} - \ln \frac{x}{z} \ln \frac{y}{z} \right. \\ &\quad \left. - 2\text{Li}_2 \left(\frac{z+x-y-S}{2z} \right) - 2\text{Li}_2 \left(\frac{z+y-x-S}{2z} \right) + \frac{\pi^2}{3} \right] , \\ S &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx} , \\ \text{Li}_2(z) &= - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt \text{ (função dilogarítmica)} . \end{aligned}$$

Podemos subtrair as divergências de um *loop* nas integrais de dois *loops* acima, através da prescrição:

$$\begin{aligned} \hat{J}(x, y) &= J(x, y) + \frac{1}{\kappa\epsilon} (xJ(y) + yJ(x)) , \\ \hat{I}(x, y, z) &= I(x, y, z) - \frac{1}{\kappa\epsilon} (J(x) + J(y) + J(z)) . \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

As partes finitas das expressões para as integrais são dadas por:

$$\kappa^2 \hat{J}_f(x, y) = xy (1 - \overline{\ln}x - \overline{\ln}y + \overline{\ln}x\overline{\ln}y) , \quad (\text{E.36})$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 \hat{I}_f(x, y, z) &= \frac{1}{2} [(x-y-z)\overline{\ln}y\overline{\ln}z + (y-x-z)\overline{\ln}x\overline{\ln}z + (z-x-y)\overline{\ln}x\overline{\ln}y] \\ &\quad + 2x\overline{\ln}x + 2y\overline{\ln}y + 2z\overline{\ln}z - \frac{5}{2}c - \frac{1}{2}\xi(x, y, z) . \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

É útil ter expressões para estas funções quando alguns de seus argumentos são nulos. Além das identidades triviais $J(0) = 0$, $J(x, 0) = J(0, x) = 0$ e $I(0, 0, 0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \kappa^2 \hat{I}_f(0, x, y) &= (x-y) \left[\text{Li}_2(y/x) - \ln(x/y)\overline{\ln}(x-y) + \frac{1}{2}\overline{\ln}^2 x - \zeta(2) \right] \\ &\quad - \frac{5}{2}(x+y) + 2x\overline{\ln}x + 2y\overline{\ln}y - x\overline{\ln}x\overline{\ln}y , \text{ para } x \geq y , \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

$$\begin{aligned}
\kappa^2 \hat{I}_f(0, x, x) &= 2J(x) - 2x - \frac{1}{x} \hat{J}_f(x, x) \\
&= -x \overline{\ln}^2 x + 4x \overline{\ln} x - 5x ,
\end{aligned} \tag{E.39}$$

$$\kappa^2 \hat{I}_f(0, 0, x) = -\frac{1}{2} x \overline{\ln}^2 x + 2x \overline{\ln} x - \frac{5}{2} x - \zeta(2)x . \tag{E.40}$$

Apêndice F

Ação efetiva e potencial efetivo

Introduzimos aqui os conceitos de ação efetiva e potencial efetivo, que são fundamentais ao longo de toda a tese.

F.1 Ação efetiva

A ação efetiva é um objeto central em *TQC*. Seu estudo está relacionado com problemas de estabilidade do vácuo, funções de Green, quebra espontânea de simetria, anomalias, etc.

Iniciamos nosso estudo lembrando que o gerador funcional de todas as funções de Green $Z[J]$ está associado ao gerador funcional das funções de Green conexas $W[J]$ da seguinte forma:

$$Z[J] = \exp \left(\frac{iW[J]}{\hbar} \right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\varphi(x)] + \int d^4x \varphi(x) J(x) \right] \right\}, \quad (\text{F.1})$$

onde $J(x)$ é uma fonte externa. Podemos expandir $W[J]$ funcionalmente, como uma série de potências em $J(x)$,

$$iW[J(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\hbar^{-1})^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{F.2})$$

sendo

$$i^n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i \frac{\delta^n W[J(x)]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0} \quad (\text{F.3})$$

as funções de Green conexas de n pontos. $G^{(n)}(x_i, x_j)$ é chamado de propagador completo e está relacionado com o propagador de Feynman G da seguinte forma:

$$G^{(n)}(x_i, x_j) = G(x_i, x_j) + O(\hbar). \quad (\text{F.4})$$

O propagador completo coincide com o propagador de Feynman no limite $\hbar \rightarrow 0$. Assim, G é usualmente chamado de propagador em nível de árvore (sem correções quânticas).

Introduzimos agora a quantidade $\varphi_c(x)$, que chamaremos de campo clássico, através da relação:

$$\varphi_c(x) = \frac{\partial W[J]}{\partial J(x)} . \quad (\text{F.5})$$

Vemos então que $\varphi_c(x)$ é um funcional de $J(x)$. Logo, de (F.1) e da definição acima, temos que:

$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \{-i \ln Z[J(x)]\} \\ &= -i \frac{1}{Z[J(x)]} \frac{\delta Z[J(x)]}{\delta J(x)} . \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $\langle 0|T[A]|0\rangle$ o valor esperado ordenado temporalmente de um operador qualquer A , podemos escrever

$$(i\hbar^{-1})^n \langle 0|T(\hat{\varphi}(x_1)\dots\hat{\varphi}(x_n)|0\rangle = \frac{\delta^n Z[J(x)]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0} , \quad (\text{F.6})$$

logo:

$$\frac{\delta Z[J(x)]}{\delta J(x)} = i \langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle_J , \quad (\text{F.7})$$

onde $\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle_J$ é o *vev* do operador de campo na presença de uma fonte J . Agora, usando também que $Z[J(x)] = \langle 0|0\rangle_J$ (amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de fonte), chegamos a:

$$\varphi_c(x) = \frac{\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_J} . \quad (\text{F.8})$$

Portanto, na ausência de fonte ($J(x) = 0$), $\varphi_c(x)$ é justamente o *vev* do operador de campo, e está relacionado com a quebra de simetria.

Tendo introduzido o campo clássico, definimos a ação efetiva, que é um funcional de $\varphi_c(x)$ dado pela transformada de Legendre:

$$\Gamma[\varphi_c(x)] = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi_c(x) , \quad (\text{F.9})$$

Derivando a ação efetiva com relação à fonte externa, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta J(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[\int d^4x' J(x') \varphi_c(x') \right] \\ &= \varphi_c(x) - \int d^4x' \delta^4(x - x') \varphi_c(x') \\ &= \varphi_c(x) - \varphi_c(x) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

e, derivando com relação ao campo clássico:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} &= \int d^4x' \frac{\delta W[J]}{\delta J(x')} \frac{\delta J(x')}{\delta \varphi_c(x)} - J(x) - \int d^4x' \varphi_c(x') \frac{\delta J(x')}{\delta \varphi_c(x)} \\ &= \int d^4x' \varphi_c(x') \frac{\delta J(x')}{\delta \varphi_c(x)} - J(x) - \int d^4x' \varphi_c(x') \frac{\delta J(x')}{\delta \varphi_c(x)} \\ &= -J(x) . \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Assim, vemos que de fato $\Gamma[\varphi_c]$ é um funcional apenas de φ_c . Quando consideramos correções quânticas para a ação clássica, a equação (F.11) é entendida como a equação de movimento para o campo clássico. Assim, o funcional $\Gamma[\varphi_c]$ na teoria quântica realiza o mesmo papel da ação clássica na teoria clássica e, por este motivo, é chamado de ação efetiva.

Da mesma forma com que φ_c pode ser obtido como uma derivada funcional de $W[J]$ em (F.5), a fonte J pode ser obtida como uma derivada funcional de $\Gamma[\varphi_c]$:

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} . \quad (\text{F.12})$$

Para ilustrar o exposto até aqui, consideremos a teoria para o campo escalar livre, com ação clássica dada por:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) . \quad (\text{F.13})$$

Temos que:

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' J(x) \Delta(x - x') J(x') , \quad (\text{F.14})$$

sendo $\Delta(x - x')$ o propagador de Feynman, que neste caso é proporcional à função de dois pontos (a menos de um fator i), que para esta teoria é a única diferente de zero.

Derivando funcionalmente (F.14):

$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[-\frac{1}{2} \int d^4x'' \int d^4x' J(x'') \Delta(x'' - x') J(x') \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x'' \int d^4x' [\delta^4(x - x'') \Delta(x'' - x') J(x') + J(x'') \Delta(x'' - x') \delta^4(x - x')] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int d^4x' \Delta(x - x') J(x') + \int d^4x'' J(x'') \Delta(x'' - x) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \int d^4x' \Delta(x - x') J(x') . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\varphi_c(x) = - \int d^4x' \Delta(x - x') J(x') \quad (\text{F.15})$$

Como $\Delta(x - x')$ é a função de Green do operador $(\partial_m \partial^m + m^2)$, ou seja,

$$(\partial_m \partial^m + m^2) \Delta(x - x') = -\delta^4(x - x') , \quad (\text{F.16})$$

ao aplicarmos este operador em ambos os lados de (F.15), temos que

$$(\partial_m \partial^m + m^2) \varphi_c(x) = J(x) , \quad (\text{F.17})$$

que é precisamente a equação de movimento para um campo escalar clássico na presença de uma fonte $J(x)$, o que nos mostra que realmente é apropriado chamar $\varphi_c(x)$ de campo clássico.

Agora, calculemos explicitamente a ação efetiva para o campo escalar livre, usando (F.14), (F.15) e (F.17), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma[\varphi_c] &= W[J] - \int d^4x J(x) \varphi_c(x) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' J(x) \Delta(x-x') J(x') - \int d^4x \varphi_c(x) (\square + m^2) \varphi_c(x) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \varphi_c(x) (\square + m^2) \varphi_c(x) - \int d^4x \varphi_c(x) (\square + m^2) \varphi_c(x) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \varphi_c(x) (\square + m^2) \varphi_c(x) .
\end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\Gamma[\varphi_c] = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_m \varphi_c \partial^m \varphi_c - m^2 \varphi_c^2) . \quad (\text{F.18})$$

Portanto, para o caso do campo escalar livre a ação efetiva é igual à ação clássica. Porém, isto só é válido pelo fato da teoria considerada ser uma teoria livre. Para uma teoria com interação, não poderemos chegar a um resultado exato para a ação efetiva, assim como também não o podemos em relação às demais quantidades ($Z[J]$, $W[J]$, $\varphi_c(x)$, etc), tendo então que levar em consideração correções quânticas. Para tratar este problema, fazemos uma expansão funcional da ação efetiva como uma série de potências em φ_c :

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) , \quad (\text{F.19})$$

onde:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)} \right|_{\varphi_c(x)=0} . \quad (\text{F.20})$$

Os coeficientes $\Gamma^{(n)}$ nesta expansão são as funções de Green *IPI*, ou funções de vértice, que têm como característica possuir linhas externas amputadas e, no caso de teorias com interação, os diagramas de Feynman envolvidos em seu cálculo são todos conexos e não podem ser desconexos eliminando-se uma única linha interna. Desta forma, $\Gamma[\varphi_c]$ é o gerador funcional das funções *IPI*.

Para a teoria com campo escalar livre, vemos de (F.18) que a única função de Green *IPI* não nula é:

$$\Gamma^{(2)}(x', x) = (\partial_m^{x'} \partial_{x'}^m + m^2) \delta^4(x' - x) . \quad (\text{F.21})$$

Podemos também fazer a transformada de Fourier para o espaço de momentos das funções de Green *IPI*, obtendo:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) &= \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \exp[i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)] \\
&\quad \times \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) .
\end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Assim, no espaço de momentos:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = -(p^2 - m^2) . \quad (\text{F.23})$$

F.2 Potencial efetivo

Vimos, na seção 4.2, que o cálculo da ação efetiva é feito através de uma expansão em *loops*. Para encontrar a correção de um *loop* é necessário calcular os determinantes de operadores diferenciais, que dependem do campo clássico φ_c . Para correções de ordens superiores, é necessário calcular as funções de Green $G(x, y|\varphi_c)$, que também dependem do campo clássico. Geralmente, nenhum destes problemas pode ser resolvido. Logo, métodos que permitem calcular a ação efetiva de forma aproximada são muito úteis. Mostraremos agora um destes métodos, que permite o cálculo da ação efetiva para uma certa condição satisfeita pelo campo φ_c .

O potencial efetivo ($\mathcal{V}_{eff}$) é definido como sendo a Lagrangiana efetiva calculada a valores constantes dos campos escalares, e todos os outros campos tomados como zero. Seja $\Gamma[\varphi_c]$ a ação efetiva renormalizada de uma teoria escalar qualquer. Podemos expandir $\Gamma[\varphi_c]$ em uma série de potências do momento em torno do momento zero. Escrita no espaço de coordenadas, esta expansão é da forma:

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left(-\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c(x)) + \frac{A(\varphi_c(x))}{2} \partial_m \varphi_c(x) \partial^m \varphi_c(x) + \dots \right), \quad (\text{F.24})$$

onde $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c(x))$, $A(\varphi_c(x))$, etc, são funções de $\varphi_c(x)$ (e não funcionais).

O coeficiente $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c(x))$ é chamado de potencial efetivo. No caso de um campo clássico $\varphi_c(x)$ constante no espaço e no tempo ou, se obrigarmos o vácuo a ser invariante por translação, teremos $\varphi_c(x) = \varphi_c$ e, portanto:

$$\Gamma[\varphi_c] = - \int d^4x \mathcal{V}_{eff}(\varphi_c). \quad (\text{F.25})$$

Das equações (F.9) e (F.12), temos que:

$$\frac{d\mathcal{V}_{eff}}{d\varphi_c} = J. \quad (\text{F.26})$$

Se fizermos a fonte igual a zero, φ_c terá o significado do *vev* do operador de campo, $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c)$ é identificado como a densidade de energia livre e (F.26) toma a forma:

$$\left. \frac{d\mathcal{V}_{eff}}{d\varphi_c} \right|_{\bar{\varphi}_c} = 0, \quad (\text{F.27})$$

onde $\bar{\varphi}_c$ é o valor do campo para o qual o potencial efetivo assume um valor mínimo. Quando $\bar{\varphi}_c \neq 0$ teremos uma quebra de simetria. Então, uma vez que soubermos o potencial efetivo da teoria, deveremos resolver (F.27) para encontrarmos o *vev* do operador de campo, isto é, devemos minimizar $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c)$ para encontrar a configuração de campo no vácuo, que será um ponto estacionário de $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c)$ e deverá ser um mínimo absoluto.

Como exemplo, consideremos novamente o caso do campo escalar livre (F.13). Temos que:

$$\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c) = \frac{1}{2} m^2 \varphi_c^2. \quad (\text{F.28})$$

Minimizando, encontramos que $\bar{\varphi}_c = 0$, logo o *vev* do operador de campo é zero e, portanto, não há quebra de simetria.

Também podemos obter uma expansão funcional para $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c)$ em termos de funções de Green. Para isto, substituímos a transformada de (F.22) em (F.19) e, de (F.25):

$$\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) \varphi_c^n. \quad (\text{F.29})$$

Nesta equação, temos $\tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0)$, pois estamos expandindo em torno do momento zero.

A equação acima, além de fornecer o termo referente ao potencial clássico, fornecerá também todas as contribuições quânticas provenientes das funções $\tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0)$ para o potencial da teoria, podendo assim alterar a forma do potencial clássico, levando a uma quebra de simetria.

Podemos, assim como fizemos para $\Gamma[\varphi_c]$, fazer uma expansão em loops para $\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c)$:

$$\mathcal{V}_{eff}(\varphi_c) = \mathcal{V}(\varphi_c) + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \mathcal{V}^{(n)}(\varphi_c). \quad (\text{F.30})$$

Da mesma forma que (4.25), (F.30) descreve o potencial efetivo como o potencial clássico $\mathcal{V}(\varphi_c)$ mais correções quânticas, representadas por $\mathcal{V}^{(n)}$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Coleman and E. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. D **7** (1973) 1888.
- [2] Chris Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Westview Press, 1997.
- [3] Carlo Giunti and Chung W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press, Oxford, NY, 2007.
- [4] Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance*, JETP Lett. **13** (1971) 323.
- [5] D. V. Volkov and V. P. Akulov, *Is the Neutrino a Goldstone Particle?*, Phys. Lett. B **46** (1973) 109.
- [6] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four-Dimensions*, Nucl. Phys. B **70** (1974) 39.
- [7] B. de Wit and D. Z. Freedman, *Phenomenology of Goldstone Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 827.
- [8] W. Fischler, H. P. Nilles, J. Polchinski, S. Raby and L. Susskind, *Vanishing Renormalization of the D Term in Supersymmetric $U(1)$ Theories*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 757.
- [9] L. Girardello and M. T. Grisaru, *Soft breaking of supersymmetry*, Nucl. Phys. B **194** (1982) 65.
- [10] A. Salam and J. Strathdee, *Supergauge Transformations*, Nucl. Phys. B **76** (1974) 477.
- [11] S. Ferrara, B. Zumino, and J. Wess, *Supergauge Multiplets and Superfields*, Phys. Lett. B **51** (1974) 239.
- [12] A. Salam and J. Strathdee, *On Superfields and Fermi-Bose Symmetry*, Phys. Rev. D **11** (1975) 1521.
- [13] M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Roček, *Improved Methods for Supergraphs*, Nucl. Phys. B **159** (1979) 429.

- [14] N. Seiberg, *Exact results on the space of vacua of four-dimensional SUSY gauge theories*, Phys. Rev. D **49** (1994) 6857, [hep-th/9402044];
K. A. Intriligator, R. G. Leigh and N. Seiberg, *Exact superpotentials in four-dimensions*, Phys. Rev. D **50** (1994) 1092, [hep-th/9403198].
- [15] N. Seiberg and E. Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B **426** (1994) 19, [hep-th/9407087].
- [16] L. O’Raifeartaigh, *Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields*, Nucl. Phys. B **96** (1975) 331.
- [17] A. E. Nelson and N. Seiberg, *R symmetry breaking versus SUSY breaking*, Nucl. Phys. B **416** (1994) 46, [hep-ph/9309229].
- [18] K. Intriligator and N. Seiberg, *Lectures on SUSY breaking*, Class. Quant. Grav. **24** (2007) S741, [hep-ph/0702069].
- [19] K. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, *Dynamical SUSY breaking in meta-stable vacua*, JHEP **04** (2006) 021, [hep-th/0602239].
- [20] K. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, *SUSY breaking, R-symmetry breaking and meta-stable vacua*, JHEP **07** (2007) 017, [hep-th/0703281].
- [21] D. Shih, *Spontaneous R-symmetry breaking in O’Raifeartaigh models*, JHEP **02** (2008) 091, [hep-th/0703196].
- [22] L. G. Aldrovandi and D. Marqués, *SUSY and R-symmetry breaking in models with non-canonical Kähler potential*, JHEP **05** (2008) 022, arXiv:0803.4163 [hep-th].
- [23] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, Phys. Rev. D **9** (1974) 1686.
- [24] P. Ramond, *Dual Theory for Free Fermions*, Phys. Rev. D **3** (1971) 2415;
A. Neveu and J. H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys. B **31** (1971) 86;
J-L. Gervais and B. Sakita, *Field Theory Interpretation Of Supergauges In Dual Models*, Nucl. Phys. B **34** (1971) 632.
- [25] R. Haag, J. Lopuszanski and M. Sohnius, *All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix*, Nucl. Phys. B **88** (1975) 257.
- [26] P. Fayet, *Supersymmetry and Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. B **64** (1976) 159; *Spontaneously Broken Supersymmetric Theories of Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. B **69** (1977) 489; *Supersymmetry And Unification Of The Fundamental Interactions*, Recherche **19** (1988) 334;

- I. Simonsen, hep-ph/9506369;
A. Djouadi *et al* (MSSM working group), hep-ph/9901246.
- [27] S. Coleman and J. Mandula, *All Possible Symmetries Of The S Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [28] Julius Wess and Jonathan Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Series in Physics, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [29] Ioseph L. Buchbinder and Sergei M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity*, Revised Edition, Institute of Physics Publishing.
- [30] J. Wess and B. Zumino, *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Phys. Lett. B **49** (1974) 52.
- [31] Manuel Drees, Rohini M. Godbole and Probir Roy, *Theory and Phenomenology of Spar-ticles - An account of four-dimensional $N=1$ supersymmetry in High Energy Physics*, World Scientific Publishing, 2004.
- [32] S. Ferrara, L. Girardello and F. Palumbo, *A General Mass Formula in Broken Supersym-metry*, Phys. Rev. D **20** (1979) 403.
- [33] Antonio Amariti and Alberto Mariotti, *Two Loop R-Symmetry Breaking*, JHEP **07** (2009) 071, ArXiv:0812.3633 [hep-th].
- [34] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B **202** (1982) 253.
- [35] A. Okopinska, *Nonstandard expansion techniques for the effective potential in lambda phi**4 quantum field theory*, Phys. Rev. D **35** (1987) 1835;
A. Duncan and M. Moshe, *Nonperturbative physics from interpolating actions*, Phys. Lett. B **215** (1988) 352.
- [36] J. L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, *Asymptotically improved convergence of optimized perturbation theory in the Bose-Einstein condensation problem*, Phys. Rev. A **68** (2003) 043615, [cond-mat/0207295].
- [37] R. L. S. Farias, G. Krein and R. O. Ramos, *Applicability of the linear delta expansion for the lambda phi**4 field theory at finite temperature in the symmetric and broken phases*, Phys. Rev. D **78** (2008) 065046, arXiv:0809.1449 [hep-ph].
- [38] D. J. Gross and A. Neveu, *Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories*, Phys. Rev. D **10** (1974) 3235.
- [39] Sunil K. Gandhi and Marcus B. Pinto, *delta expansion of models with chiral symmetry breaking*, Phys. Rev. D **46** (1992) 2570.

- [40] J. L. Kneur, A. Neveu and M. B. Pinto, *Improved optimization of perturbation theory: Applications to the oscillator energy levels and Bose-Einstein condensate critical temperature*, Phys. Rev. A **69** (2004) 053624, cond-mat/0401324.
- [41] P. M. Stevenson, *Optimized perturbation theory*, Phys. Rev. D **23** (1981) 2916.
- [42] S. K. Gandhi, H. F. Jones and M. B. Pinto, *The delta expansion in the large N limit*, Nucl. Phys. B **359** (1991) 429.
- [43] J. L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, *Critical and tricritical points for the massless 2D Gross-Neveu model beyond large N* , Phys. Rev. D **74** (2006) 125020, hep-th/0610201;
J. L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos and E. Staudt, *Emergence of tricritical point and liquid-gas phase in the massless 2+1 dimensional Gross-Neveu model*, Phys. Rev. D **76** (2007) 045020, arXiv:0705.0676 [hep-th].
- [44] K. G. Klimenko, *Gross-Neveu model and optimized expansion method*, Z. Phys. C **50** (1991) 477; *Three-dimensional (anti-psi psi)**2 model and optimized expansion*, Mod. Phys. Lett. A **9** (1994) 1767.
- [45] S. Coleman, R. Jackiw and H. D. Politzer, *Spontaneous Symmetry Breaking in the $O(N)$ Model for Large N^** , Phys. Rev. D **10** (1974) 2491.
- [46] B. S. De Wit, Phys. Rev. **162** (1967) 1195;
G. 't Hooft, *An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure*, Nucl. Phys. B **62** (1973) 444;
S. Deser, J. Kay and K. Stelle, *Renormalizability Properties of Supergravity*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 527;
L. F. Abbott, *The Background Field Method Beyond One Loop*, Nucl. Phys. B **185** (1981) 189.
- [47] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov and I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, Institute of Physics Publishing, London, 1992;
Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [48] L. F. Abbott, M. T. Grisaru and R. K. Schaefer, *The Background Field Method And The S-Matrix*, Nucl. Phys. B **229** (1983) 372.
- [49] M. C. B. Abdalla, J. A. Helay el-Neto, Daniel L. Nedel and Carlos R. Senise Jr., *An extension of the linear delta expansion to superspace*, Phys. Rev. D **77** (2008) 125020, arXiv:0711.0382 [hep-th].

- [50] J. Iliopoulos and B. Zumino, *Broken Supergauge Symmetry and Renormalization*, Nucl. Phys. B **76** (1974) 310;
A. Salam and J. Strathdee, *On Goldstone Fermions*, Phys. Lett. B **49** (1974) 465;
P. Fayet and J. Iliopoulos, *Spontaneously broken supergauge symmetries and Goldstone spinors*, Phys. Lett. B **51** (1974) 461;
P. Fayet, *Supergauge Invariant Extension of the Higgs Mechanism and a Model for the electron and Its Neutrino*, Nucl. Phys. B **90** (1975) 104; *Spontaneous Supersymmetry Breaking Without Gauge Invariance*, Phys. Lett. B **58** (1975) 67.
- [51] J. A. Helayël-Neto, *Superpropagators for explicitly broken supersymmetric theories*, Phys. Lett. **135** (1984) 78;
F. Feruglio, J. A. Helayël-Neto and F. Legovini, *Supergraphs extended to broken supersymmetries*, Nucl. Phys. B **249** (1985) 533;
J. A. Helayël-Neto, F. A. B. Rabelo de Carvalho and A. William Smith, *Broken supersymmetries and shifted superpropagators*, Nucl. Phys. B **271** (1986) 175.
- [52] M. C. B. Abdalla, J. A. Helayël-Neto, Daniel L. Nedel and Carlos R. Senise Jr., *Linear delta expansion applied to the O’Raifeartaigh model*, Phys. Rev. D **80** (2009) 065002, arXiv:0904.4672 [hep-th].
- [53] S. G. Nibbelink and T. S. Nyawelo, *Effective action of softly broken supersymmetric theories*, Phys. Rev. D **75** (2007) 045002, [hep-th/0612092].
- [54] M. C. B. Abdalla, J. A. Helayël-Neto, Daniel L. Nedel and Carlos R. Senise Jr., *Superspace evaluation of the two-loop effective potential for the O’Raifeartaigh model*, Phys. Rev. D **82** (2010) 125029, arXiv:1008.5295 [hep-th].
- [55] C. Ford, I. Jack and D. R. T. Jones, *The standard model effective potential at two loops*, Nucl. Phys. B **387** (1992) 373, [hep-ph/0111190].
- [56] Jose Ramón Espinosa and Ren-Jie Zhang, *Complete two-loop dominant corrections to the mass of the lightest CP-even Higgs boson in the minimal supersymmetric standard model*, Nucl. Phys. B **586** (2000) 3, [hep-ph/0003246].
- [57] Stephen P. Martin, *Two-loop effective potential for a general renormalizable theory and softly broken supersymmetry*, Phys. Rev. D **65** (2002) 116003, [hep-ph/0111209].
- [58] J. L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, *Thermodynamics and Phase Structure of the Two-Flavor Nambu–Jona–Lasinio Model Beyond Large- N_c* , Phys. Rev. C **81** (2010) 065205, arXiv:1004.3815 [hep-ph].
- [59] F. A. B. Rabelo de Carvalho, A. William Smith and J. A. Helayël-Neto, *Superpropagators for broken supersymmetric abelian gauge theories*, Nucl. Phys. B **278** (1986) 309.

- [60] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.