

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**“ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DE ESPAÇAMENTOS DE
DUBLETOS UTILIZANDO O MODELO DO BILHAR
ANULAR”**

Ana Paula Mijolaro

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa
de Pós-Graduação em Física – Área de Concentração
em Física Aplicada, para obtenção do Título de Mestre
em Física

Rio Claro (SP)
2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**“ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DE ESPAÇAMENTOS DE
DUBLETOS UTILIZANDO O MODELO DO BILHAR
ANULAR”**

Ana Paula Mijolaro

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa
de Pós-Graduação em Física – Área de Concentração
em Física Aplicada, para obtenção do Título de Mestre
em Física

Rio Claro (SP)
2004

530.15
M636e

Mijolaro, Ana Paula.

Estudo da distribuição de espaçamentos de dubletos
utilizando o modelo do bilhar anular / Ana Paula Mijolaro. --
Rio Claro : [s.n.], 2004

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

1. Física matemática. 2. Caos. 3. Tunelamento.
4. Splittings. 5. Mecânica semiclássica. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)
IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marcus Aloízio Martinez de Aguiar
IFGW / UNICAMP / Campinas (SP)

Prof. Dr. Marcus Werner Beims
Universidade Federal do Paraná / Curitiba (PR)

Rio Claro, 19 de fevereiro de 2004.

Resultado: APROVADA

*Aos meus pais por tudo que
fizeram para que eu chegasse até aqui*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas e instituições que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, em especial:

- Ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Egydio por ter me acolhido e me apoiado em todos os momentos e pela confiança que sempre depositou em mim;
- À comissão examinadora pelas correções e dicas;
- Aos meus pais, que acompanharam todas as minhas conquistas e angústias durante a vida e principalmente nos últimos dois anos;
- Ao meu marido Tadeu pela paciência e compreensão nos períodos mais estressantes;
- Aos amigos Fabiano, Heberton e Guilherme pelos inúmeros momentos de descontração, engraçados e proveitosos no nosso “Laboratório de Caos na Mecânica Clássica, Semiclássica e Quântica”;
- À FAPESP pelo apoio financeiro na concessão da bolsa de mestrado sob o processo 01/11840-2, essencial para que tivesse uma dedicação exclusiva à pesquisa e por ter finalizado o trabalho no dentro do prazo pré-estabelecido.

ÍNDICE

ÍNDICE	i
ÍNDICE DE FIGURAS	ii
Resumo	iv
Palavras chave	iv
Abstract	v
Key Words	v
1. Dinâmica Clássica	1
1.1. Do movimento regular ao caótico	1
1.1.1 Sistemas regulares	2
1.1.2 Sistemas ergódicos.....	7
1.1.3 Sistemas “Mixing”	8
1.1.4 Sistemas-K.....	11
1.1.5 Sistemas Bernouilli.....	12
1.1.6 Sistemas quase-integráveis	13
1.2. Mapeamento com preservação de medida.....	14
1.2.1. Seção de Poincaré	14
1.3. Bilhares	18
1.4. O Bilhar anular	20
1.4.1. Mapeamento para o problema do bilhar anular não-concêntrico	22
2. Dinâmica Quântica	26
2.1. Caologia Quântica	26
2.2. Estatísticas de níveis, tunelamento e tunelamento dinâmico.....	28
2.3. Dinâmica quântica do bilhar anular.....	32
2.3.1. Caso concêntrico:.....	43
3. Procedimentos e resultados.....	45
3.1. Colisão entre 3 níveis	53
3.2. Análise estatística dos resultados	54
4. Discussões e Conclusões	63
Referências	66

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Um toro invariante com dois graus de liberdade; as ações J_1 e J_2 são proporcionais ao quadrado dos raios dos dois círculos definindo o toro, e os ângulos θ_1 e θ_2 definem um ponto sobre o toro.	5
Figura 2 - Representação esquemática da propriedade de mistura.	10
Figura 3 - (a) Trajetória cruzando a seção de superfície Σ_y ; (b) Pontos do mapa de Poincaré sobre Σ_y	15
Figura 4 - Ilustração da propriedade (44): Σ_y é uma seção de superfície, γ é uma curva fechada sobre Σ_y , e $M_a(\gamma)$ a imagem de γ sobre Σ_y . As áreas de γ e $M_a(\gamma)$ são iguais, mas a região $M_a(\gamma)$ poderia estar deformada.	16
Figura 5 - Padrão típico de uma seção de Poincaré de um sistema integrável bidimensional para condições iniciais definindo um toro racional.	17
Figura 6 - Padrão típico de uma seção de Poincaré de um sistema integrável bidimensional para condições iniciais definindo um toro irracional.	17
Figura 7 - Duas seções de Poincaré de um sistema inicialmente integrável ao qual foi adicionada uma perturbação.	18
Figura 8 - Seção de Poincaré composta de regiões integráveis e caóticas.	18
Figura 9 - Bilhar de Sinai.	18
Figura 10 - Bilhar de Bunimovich.	20
Figura 11 - Geometria do bilhar anular não concêntrico, com excentricidade $d = \overline{OO'}$, raio externo b e raio interno a . Mostramos em cada item, parte de uma trajetória que, depois de chocar-se com o círculo externo, colide: (a) novamente com o círculo externo (movimento-A); (b) com o círculo interior, antes de chocar-se novamente com o círculo exterior (movimento-B).	21
Figura 12 - Região coberta pelas W.G.O. (Whispering Gallery Orbits).	22
Figura 13 - Seções de Poincaré para $a + d = 0.45$ e diferentes excentricidades d : (a) $d=0.01$; (b) $d=0.03$; (c) $d=0.07$; (d) $d=0.15$; (e) $d = 0.225$; (f) $d = 0.3375$	24
Figura 14. Do lado esquerdo, temos a órbita quase periódica, cuja condição inicial $(L_0, S_0)=(0.31, 0.002)$ encontra-se no interior da cadeia de ilhas no espaço de fases da figura 3-d (lado direito).	25
Figura 15 – Distribuições de espaçamentos para um sistema classicamente caótico e para um sistema integrável.	30

Figura 16 - α é o “parâmetro de perturbação”	30
Figura 17 - Região anular limitada entre as fronteiras circulares Γ e Γ' . Comparada com a Fig. 12, verifica-se uma troca de coordenadas com relação ao círculo externo e interno. Isto foi feito intencionalmente a fim de facilitar os cálculos seguintes.....	33
Figura 18	36
Figura 19. Geometria no interior do bilhar da fig. 17, utilizada para aplicar a Fórmula de Graff.	37
Figura 20 - Gráfico da função $f_n(k) = J_n(kb) - F_n(ka)Y_n(kb)$, para $n=125$, num intervalo de k indo de ≈ 250 à ≈ 280 . Neste intervalo, encontramos 8 raízes, que correspondem os autovalores para $n=125$ de $m=27$ à $m=34$	49
Figura 21 - Comportamento dos autovalores com a excentricidade para os dubletos #1, #2 e #3 respectivamente.....	50
Figura 22 - Variação de k com a excentricidade para os dubletos #4 e #7.....	51
Figura 23 - Variação de $\text{Log} \Delta k $ com a excentricidade d no intervalo $[0.06, 0.07]$. Em (a) acompanhamos o dubleto #4, em (b) o dubleto #5, em (c) e (d) os dubletos #6 e #7, respectivamente.....	52
FIGURA 24 – (a) O "splitting" aumenta em razão do “cruzamento evitado”; (b) o "splitting" diminui até desaparecer para um determinado parâmetro.	53
Figura 25. Distribuição de “splittings” utilizando dubletos semiclássicos, onde o tunelamento dinâmico é o único fenômeno existente. Os pontos representam os resultados experimentais, enquanto a linha cheia, as previsões analíticas de Leyvraz e Ullmo.....	58
Figura 26. (a) Acompanhamento da variação de Δk num intervalo de $d \approx [0.03, 0.07]$, para o dubleto $(n, m) = (11, 3)$. (b) Resultado numérico referente ao cenário (a) da Fig. 24.	59
Figura 27 – Resultado numérico encontrado em nosso modelo mostrando a aproximação de um nível com um dubleto.	60
Figura 28. Gráfico apresentado em [30], mostrando que os dados obtidos numericamente pelos autores (círculos), considerando um dubleto não conectado por caos estão de bom acordo com as fórmulas de Leyvraz e Ullmo (linha cheia) [27].....	61
Figura 29. Gráfico log-log de $\Delta k \times P(\Delta k)$, para o dubleto $(n, m) = (11, 3)$ num intervalo de $d = [0.03, 0.04]$. Os pontos representam os resultados numéricos e a linha cheia o resultado previsto por Leyvraz e Ullmo. Neste caso $\mu = 6.5$	62

RESUMO

Título: “Estudo da distribuição de espaçamentos de doublets utilizando o modelo do bilhar anular”

Dentro do contexto de caos quântico, um tema que tem recebido crescente atenção é aquele relacionado com tunelamento. Atualmente sabe-se que os processos de tunelamento são fortemente afetados pela natureza da dinâmica do sistema clássico correspondente. Em sistemas classicamente não-integráveis, com alguma simetria discreta, existem doublets de energia cujos espaçamentos (“splittings”) são muito sensíveis à variação de um parâmetro externo. Neste trabalho vamos apresentar os resultados sobre a distribuição de espaçamentos de doublets, onde investigamos a influência da dinâmica clássica nas flutuações estatísticas desta distribuição sendo o bilhar anular o nosso modelo. O estudo da distribuição de “splittings” dos doublets é realizado em função do parâmetro perturbativo, a excentricidade, para diferentes regimes de intensidade de caos clássico e para diferentes escalas de energia.

PALAVRAS CHAVE

Caos, tunelamento, “splittings”, mecânica semiclássica

ABSTRACT

Title: “Study of distributions of doublets splittings using the annular billiard”

In the context of quantum chaos, an area receiving increasing attention is the subject of tunnelling. Nowadays it is known that the tunnelling processes are strongly affected by the nature of the corresponding classic dynamics. For systems which are classically integrable, with some discrete symmetry, doublets of energy exist whose splittings are healthy very sensitive to the variation of an external parameter. In this work we will present the results about the levels splitting distribution, where we investigated the influence of the classic dynamics on the statistical fluctuations of this distribution using the annular billiard model. The study of the level splittings distribution is accomplished as a function of the external parameter, the eccentricity, for different regimes of intensity of classic chaos and for different scales of energy.

KEY WORDS

Chaos, tunnelling, splittings, semiclassical mechanics.

1. DINÂMICA CLÁSSICA

Quase todas as abordagens de física teórica são formuladas em termos de equações diferenciais, freqüentemente equações diferenciais parciais. Em geral, estas descrevem alguma manifestação dinâmica associada com o movimento de partículas ou ondas, como por exemplo, a Equação de Laplace, as Equações de Maxwell, a Equação de Schrödinger e a lei de Newton. Embora essas equações geralmente sejam muito difíceis de serem resolvidas analiticamente, é possível obter mais facilmente, informações qualitativas sobre o comportamento de suas soluções, quando as equações que regem o sistema em estudo não envolvem a variável tempo t explicitamente.

O propósito deste capítulo é introduzir o conceito de caos clássico na mecânica de sistemas conservativos.

1.1. Do movimento regular ao caótico

Todos sistemas Hamiltonianos conservativos com N graus de liberdade têm em comum três propriedades essenciais:

- i) Para um dado conjunto de condições iniciais, a dimensão da superfície acessível no espaço de fases é menor ou igual a $(2N-1)$; uma vez que o sistema é conservativo, a energia é constante ao longo desta “superfície de energia”, a qual chamaremos de S_E .
- ii) Os volumes encerrados pelas trajetórias no espaço de fases são conservados. O teorema de Liouville é a demonstração desta propriedade nos sistemas Hamiltonianos [1-3]. O leitor encontrará uma demonstração genérica do teorema de Liouville para sistemas multidimensionais na referência [2].
- iii) As órbitas no espaço de fases não se cruzam [4].

Além destas características, o movimento no espaço de fases pode exibir uma grande variedade de comportamentos. Por exemplo, pode-se perguntar como um determinado elemento de volume evolui com o tempo: ele tende a cobrir toda a superfície de energia S_E quando o tempo tende a infinito ou ele permanece restrito a uma parte de S_E ? Ele conserva aproximadamente sua forma inicial ou mostra grandes deformações? Conforme as respostas obtidas para estas questões, pode-se definir uma hierarquia da regularidade para sistemas dinâmicos não-lineares [4]. Como veremos agora, a maioria dos sistemas regulares, podem ser usados como relógios, assim como a maioria dos sistemas caóticos pode ser usada como geradores de números aleatórios.

1.1.1 Sistemas regulares

De maneira geral, dizemos que um sistema dinâmico regular é aquele que pode ser integrado por quadraturas. Vamos ser mais precisos, e definir quais são as condições e as conseqüências da “regularidade extrema”.

Consideremos um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade:

$$\begin{aligned} H &= H(\underline{q}, \underline{p}) ; \\ \underline{q} &= \{q_1, q_2, \dots, q_N\}, \\ \underline{p} &= \{p_1, p_2, \dots, p_N\}. \end{aligned} \quad (1)$$

As equações de movimento escritas na forma Hamiltoniana são:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p})}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p})}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (2)$$

A seguir, por simplicidade, utilizaremos uma Hamiltoniana genérica de um sistema com dois graus de liberdade dada por:

$$H = H(p_x, q_x, p_y, q_y). \quad (3)$$

As equações de movimento são:

$$\dot{q}_x = \frac{\partial H(p_x, q_x, p_y, q_y)}{\partial p_x}, \quad (4)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H(p_x, q_x, p_y, q_y)}{\partial q_x}, \quad (5)$$

$$\dot{q}_y = \frac{\partial H(p_x, q_x, p_y, q_y)}{\partial p_y}, \quad (6)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H(p_x, q_x, p_y, q_y)}{\partial q_y}. \quad (7)$$

Para que um sistema conservativo seja integrável [4] é preciso que haja sempre um número de constantes de movimento independentes, igual ou maior que o número de graus de liberdade. Sendo assim, um sistema Hamiltoniano unidimensional é sempre integrável, pois existe uma constante de movimento, que é a energia total, para o único grau de liberdade. Em sistemas Hamiltonianos com dois ou mais graus de liberdade, porém, a

conservação da energia total não é suficiente para eliminar a possibilidade de ocorrência do caos, é preciso que haja mais constantes de movimento.

Se $I(p_x, q_x, p_y, q_y)$ for uma constante de movimento pertencente ao sistema governado pela Hamiltoniana (3),

$$\frac{d I(p_x, q_x, p_y, q_y)}{dt} = 0. \quad (8)$$

Por outro lado,

$$\frac{d I(p_x, q_x, p_y, q_y)}{dt} = \frac{\partial I}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial I}{\partial q_x} \frac{dq_x}{dt} + \frac{\partial I}{\partial p_y} \frac{dp_y}{dt} + \frac{\partial I}{\partial q_y} \frac{dq_y}{dt}. \quad (9)$$

Pela substituição das equações de movimento (4) – (7) em (8), temos:

$$\frac{d I(p_x, q_x, p_y, q_y)}{dt} = \frac{\partial I}{\partial p_x} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_x} \right) + \frac{\partial I}{\partial q_x} \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial I}{\partial p_y} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_y} \right) + \frac{\partial I}{\partial q_y} \left(\frac{\partial H}{\partial p_y} \right) \quad (10)$$

que pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d I(p_x, q_x, p_y, q_y)}{dt} = \left(\frac{\partial I}{\partial q_x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial I}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial q_x} \right) + \left(\frac{\partial I}{\partial q_y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial I}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial q_y} \right) \quad (11)$$

O lado direito da equação (11) é chamado *parênteses de Poisson* de I , e é denotado de forma compacta por $\{I, H\}(p_x, q_x, p_y, q_y)$. Como I é uma constante de movimento, então $\{I, H\}(p_x, q_x, p_y, q_y) = 0$. Então, se $\{I, H\}(p_x, q_x, p_y, q_y) = 0$, I será uma constante de movimento do sistema.

Para facilitar a resolução de equações diferenciais utilizam-se transformações de variáveis. No entanto, para que esta transformação seja invariante com relação às equações de Hamilton, as novas variáveis precisam respeitar as equações de Hamilton, assim como as originais. Estas são as transformações canônicas.

Para exemplificar uma transformação canônica, vamos partir da transformação dada por:

$$T\{p_x, q_x, p_y, q_y\} \rightarrow \{P_x, Q_x, P_y, Q_y\}, \quad (12)$$

as variáveis p_x, q_x, p_y, q_y satisfazem as equações de Hamilton (4)–(7).

Para que T seja uma transformação canônica, as novas variáveis precisam satisfazer as equações de Hamilton:

$$\dot{Q}_x(P_x, Q_x, P_y, Q_y) = \frac{\partial H'(P_x, Q_x, P_y, Q_y)}{\partial P_x}, \quad (13)$$

$$\dot{P}_x(P_x, Q_x, P_y, Q_y) = -\frac{\partial H'(P_x, Q_x, P_y, Q_y)}{\partial Q_x}, \quad (14)$$

$$\dot{Q}_y(P_x, Q_x, P_y, Q_y) = \frac{\partial H'(P_x, Q_x, P_y, Q_y)}{\partial P_y}, \quad (15)$$

$$\dot{P}_y(P_x, Q_x, P_y, Q_y) = -\frac{\partial H'(P_x, Q_x, P_y, Q_y)}{\partial Q_y}. \quad (16)$$

onde $H'(P_x, Q_x, P_y, Q_y)$ é a Hamiltoniana do sistema nas novas variáveis.

Uma propriedade das transformações canônicas é a de que o parêntese de Poisson das novas variáveis em função das antigas é igual a um. No caso da transformação T dada pela equação (12), temos:

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial q_x} \frac{\partial P_x}{\partial p_x} - \frac{\partial Q_x}{\partial p_x} \frac{\partial P_x}{\partial q_x} \right) + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial q_y} \frac{\partial P_y}{\partial p_y} - \frac{\partial Q_y}{\partial p_y} \frac{\partial P_y}{\partial q_y} \right) = 1. \quad (17)$$

Em muitas áreas da Física aparecem sistemas onde o movimento é periódico ou quase periódico. Portanto, transformar as variáveis originais em variáveis de ângulo e ação torna mais fácil a visualização do movimento. Este tipo de transformação é um tipo específico de transformação canônica.

Seja uma Hamiltoniana com dois graus de liberdade escrita em variáveis de ângulo e ação obtida por uma transformação canônica na Hamiltoniana genérica (3):

$$H' = H'(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2). \quad (18)$$

As variáveis J_1 , J_2 , θ_1 e θ_2 são dadas pelas seguintes relações:

$$J_1 = \oint p_x dq_x, \quad (19)$$

$$\theta_1 = \int \frac{\partial H'}{\partial J_1} dt, \quad (20)$$

$$J_2 = \oint p_y dq_y, \quad (21)$$

$$\theta_2 = \int \frac{\partial H'}{\partial J_2} dt. \quad (22)$$

Nos sistemas Hamiltonianos integráveis com dois graus de liberdade, as trajetórias no espaço de fases estão presas a superfícies tridimensionais topologicamente semelhantes a toros (ver Fig.1). As variáveis “ação” caracterizam estes toros, também chamados “toros invariantes” porque as trajetórias que começam sobre eles, permanecem sobre eles para sempre.

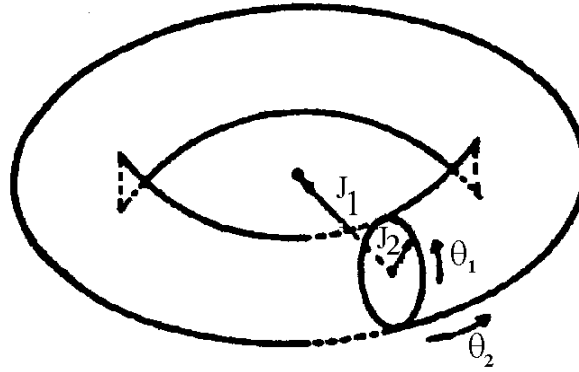


FIGURA 1 - Um toro invariante com dois graus de liberdade; as ações J_1 e J_2 são proporcionais ao quadrado dos raios dos dois círculos definindo o toro, e os ângulos θ_1 e θ_2 definem um ponto sobre o toro.

As frequências de rotação das trajetórias sobre os toros são descritas pelas seguintes relações:

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J_1} \quad (23)$$

e

$$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J_2} \quad (24)$$

Quando a razão entre as frequências ω_1 e ω_2 é um número racional, dizemos que o toro é um toro racional (ou toro ressonante), então a trajetória é fechada sobre o toro; neste caso o movimento é *periódico*. Toros que possuem esta propriedade exibem, portanto, o mais alto grau de regularidade, como um “relógio ideal” faria.

Ao contrário, quando a razão $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ é um número irracional, as órbitas nunca se fecham, mas cobrem densamente o toro depois de um tempo infinito: tal órbita é “ergódica” sobre o toro – chamado “irracional”, ou “toro não-ressonante”.

Para um sistema integrável genérico, existem simultaneamente – correspondendo a diferentes conjuntos de condições iniciais – toros não-ressonantes, cobertos por trajetórias ergódicas e toros ressonantes. Quase todos os toros de um sistema integrável genérico são irracionais, da mesma maneira que quase todos os números reais são irracionais.

De acordo com o teorema de Arnold-Liouville [4], para um sistema com N graus de liberdade, se o sistema é integrável, o movimento é restrito a uma superfície N -dimensional, ao invés de uma superfície de energia $(2N-1)$ dimensional para um sistema genérico não tendo nenhuma outra constante de movimento além da energia.

Exemplos de sistemas regulares

- i) para $N=1$, nós já vimos que todos sistemas conservativos são regulares;
- ii) para $N=2$, o sistema será regular se houver uma outra constante de movimento além da energia;
- iii) para $N=3$, todos sistemas submetidos a apenas um campo de força central são regulares: $\vec{L}^2$ e L_z , além da energia, são conservados.

Dois exemplos de sistemas do tipo iii) são de interesse especial. O movimento de Kepler $\left(V(r) = -\frac{k}{r} \right)$ e o oscilador harmônico isotrópico $\left(V(r) = \omega^2 \frac{r^2}{2} \right)$. Para estes dois sistemas particulares, todos os toros são racionais, nenhuma órbita cobre densamente um toro [4]. Para entender porque tal situação é uma exceção, temos que recorrer ao Teorema de Bertrand [5]: Considere o movimento de uma massa pontual sob a ação de um potencial esfericamente simétrico $V(r)$. Então uma condição necessária e suficiente para que todas as trajetórias limitadas sejam fechadas é que $V(r)$ comporte-se como r^2 ou $\left(-\frac{1}{r} \right)$. Como é bem conhecida, a origem deste comportamento particular do oscilador harmônico esférico e do movimento de Kepler é a existência de uma integral adicional, devido à forma particular do potencial, enquanto as outras três integrais são meramente conseqüências da invariância de rotação. Por esta razão, estes sistemas são chamados superintegráveis. Para o movimento de Kepler, a integral extra é o vetor de Runge-Lenz¹. Outra peculiaridade do movimento de Kepler e do oscilador harmônico encontra-se no fato que eles são separáveis em sistemas de coordenadas ortogonais. A maioria dos sistemas integráveis que estamos lidando possui esta propriedade; entretanto, separabilidade é um caso muito especial de integrabilidade. De fato, nenhum método geral é disponível para saber se um sistema é integrável ou não. Além disso, mesmo se um sistema é conhecido como sendo integrável, não é garantido que se encontre a transformação que leve às variáveis de ângulo-ação.

- iv) Existem alguns bilhares² que são reconhecidamente regulares.

¹ O vetor de Runge-Lenz é dado pela expressão: $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{Mk_K \vec{r}}{r}$, onde $\vec{p}$ é o vetor momento linear, $\vec{L}$ o vetor momento angular, k_K uma constante e M a massa reduzida do sistema.

² Na seção 1.3. falaremos com maiores detalhes sobre este assunto.

O fato é que, os sistemas regulares, tão bem conhecidos, são uma exceção entre os sistemas dinâmicos.

1.1.2 Sistemas ergódicos

A definição mais popular de ergodicidade é a igualdade entre médias de tempo e médias no espaço de fases. Em linguagem mais abstrata, define-se freqüentemente um sistema ergódico como um sistema cujo espaço de fases não é metricamente decomponível sob o fluxo Hamiltoniano. Detalharemos a seguir estas duas definições equivalentes e citaremos algumas conseqüências importantes.

Vamos considerar um sistema dinâmico conservativo, do espaço de fases X . Tome $x(t) = [q_1(t), \dots, q_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t)]$ sendo qualquer ponto de X . A evolução de x com o tempo pode ser descrito pelo operador T_t , chamado “fluxo Hamiltoniano”:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{T_t} X: \\ x &\mapsto T_t x = x_t \end{aligned} \quad (25)$$

A medida de Liouville de um subconjunto V de X :

$$\mu(V) = \int_V dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N \quad (26)$$

é, de acordo com o teorema de Liouville [4], invariante sob o fluxo Hamiltoniano:

$$\mu(T_t V) = \mu(V) \quad (27)$$

Para um sistema conservativo, pode-se definir [4] um elemento de superfície da superfície de energia S_E como:

$$d\sigma = d\mu \left\| \text{grad } H \right\|_{H=E} \quad (28)$$

$$\text{onde } \left\| \overrightarrow{\text{grad } H} \right\|^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)^2 \right].$$

Nos cálculos seguintes, a medida σ será normalizada a um (isto é, $\sigma(S_E) = 1$).

O sistema é dito ergódico, ou metricamente transitivo, ou não decomponível, se ele não é decomponível em subconjuntos não-triviais que são invariantes sob T , isto é:

$$\nexists A \subset S_E \ (\sigma(A) \neq 0, \sigma(A) \neq 1) \text{ tal que } T_t A = A \quad (29)$$

onde A é um subconjunto de S_E .

A expressão (29) nos diz que o único subconjunto de S_E , diferente de zero, que é

invariante sob T é toda a superfície de energia S_E (ou qualquer subconjunto de S_E tendo a mesma área do próprio S_E). Isto sugere intuitivamente que uma trajetória típica não pode ser confinada em uma região restrita do espaço de fases, mas, ao contrário, irá explorar toda a superfície de energia. De fato, uma propriedade mais forte que caracteriza sistemas ergódicos é: pode-se mostrar [4] que quase todas as órbitas exploram quase todos os pontos da superfície de energia S_E (cobrem densamente S_E), gastando em qualquer parte de A um tempo proporcional à área de A .

A igualdade entre as médias de tempo e as médias do espaço de fases constitui uma definição alternativa de ergodicidade. Ela pode ser formulada como segue: um sistema é ergódico se, para qualquer função integrável $f(x)$ ($x \in X$, $\int |f(x)| d\sigma < \infty$),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T_t x) dt = \int_{S_E} f(x) d\sigma \quad (30)$$

para quase todos x 's $\in S_E$.

1.1.3 Sistemas “Mixing”

Qualitativamente, a idéia escondida por trás da mistura é a propriedade (para qualquer parte A de uma superfície de energia ($\sigma(A) \neq 0$)) de obter a extensão da superfície de energia uniformemente coberta quando $t \rightarrow \infty$. Para obter um “sentido experimental” desta característica, vamos imaginar um liquidificador em que se coloca 80% de suco de laranja e 20% de vodka; então agita-se continuamente o liquidificador. Se o sistema é do tipo “mixing”, vai se encontrar, quando o tempo tender ao infinito, 20% de vodka em *qualquer* volume do líquido, isto é, a vodka será uniformemente misturada com o suco de laranja em qualquer parte da bebida. É claro que tal propriedade implica que o volume inicial de vodka (ou qualquer parte da superfície de energia) seja fortemente deformada quando o tempo passa, isto é, vai se transformando com o tempo em um filamento cada vez mais estreito, que no limite estará presente em qualquer parte do volume do líquido (ou cobrirá densamente a superfície de energia).

Um sistema é do tipo “mixing” se: [4]

$$\begin{aligned} \forall A, B \subset S_E \\ \sigma(A) \neq 0 \neq \sigma(B) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(T_t A \cap B)}{\sigma(B)} = \sigma(A) \quad (32)$$

Para entender porquê a relação acima define um sistema do tipo “mixing”, considere dois subconjuntos A e B contidos em S_E . O subconjunto A evolui com o tempo pela aplicação T_t enquanto a região de B permanece fixa. Podemos reescrever o lado direito da Eq. (32) como:

$$\sigma(A) = \frac{\sigma(S_E \cap T_t A)}{\sigma(S_E)}, \quad (33)$$

já que,

$$\sigma(S_E \cap T_t A) = T_t A, \quad (34)$$

$$\sigma(S_E) = 1, \quad (35)$$

e $\sigma(T_t A) = \sigma(A).$ (36)

Então, o lado direito de (32) representa a fração da superfície de energia S_E ocupada por $T_t A$ (evolução de A pela aplicação T_t), enquanto o lado esquerdo da mesma equação representa a fração ocupada por $T_t A$ em B. Como foi discutido acima, para um sistema do tipo “mixing” $T_t A$ deve cobrir uniformemente S_E quando o tempo tende ao infinito, por isso as quantidades representadas pelos lados direito e esquerdo da Eq. (32) devem ser iguais.

Algumas conseqüências importantes da mistura devem ser discutidas. Primeiramente, pode-se mostrar que mistura implica ergodicidade. De fato, suponha a existência da propriedade de mistura; tome por A um conjunto de S_E , e escolha $B \equiv A$. Então $(B \cap T_t A)$ é simplesmente A, e a o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(T_t A \cap B)}{\sigma(B)} = \sigma(A)$ é zero ou um, isto é, não existe nenhum subconjunto A de S_E não-trivial, que seja invariante por T_t . Como visto pela equação (29), esta é a propriedade que caracteriza sistemas ergódicos.

Note que a inversa não é verdadeira, isto é, ergodicidade não implica mistura; de fato, pode-se imaginar sistemas onde quaisquer elementos exploram toda a superfície de energia sem serem deformados pelo tempo; em tais sistemas, a distância entre dois pontos de S_E permanece da mesma ordem de grandeza conforme o tempo passa. Pelo contrário, em um sistema “mixing” dois pontos que inicialmente estão próximos um do outro fiquem distantes no limite $t \rightarrow \infty$, pela obrigação de estarem sobre a superfície de energia. Assim, a mistura implica *instabilidade* com respeito às condições iniciais e, em outras palavras, perda de informação com o tempo, já que um pequeno erro na medida de x ($t = 0$) pode se propagar

com o tempo e eventualmente induzir erros tão grandes sobre $x(t)$ que as previsões sobre este sistema para tempos longos são sem significado.

Na Figura 2 mostramos uma representação esquemática da propriedade encontrada em sistemas tipo “mixing”: B é qualquer área fixa da superfície de energia, e A é um elemento de superfície para o tempo t_0 , cuja evolução é desenhada para tempos sucessivos $t_1 < t_2 < t_3$. Quando o tempo passa, T_t tende a diluir a superfície inicial uniformemente em toda a superfície de energia. Quando o tempo tende a infinito, a fração da área de teste B ocupada por $T_t A$ é igual a fração da superfície de energia S_E inicialmente ocupada por A.

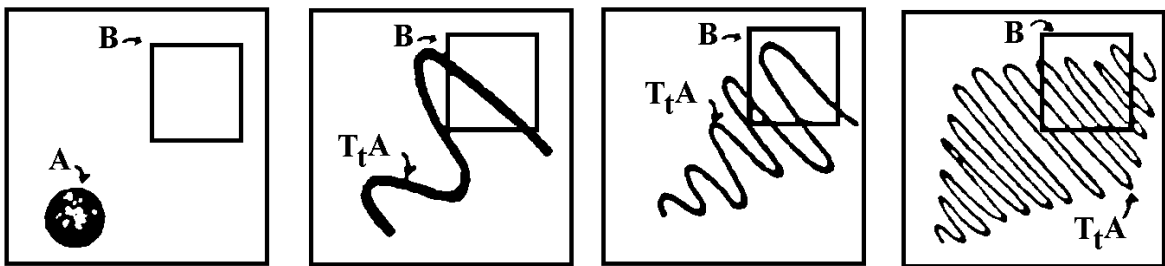


FIGURA 2 - Representação esquemática da propriedade de mistura.

Finalmente, vamos mencionar uma propriedade característica importante (isto é, que poderia ser usada como uma definição) da mistura, que é o decaimento de correlações entre duas funções: em sistemas do tipo “mixing”, quaisquer duas funções de quadrado assintoticamente integrável tornam-se independentes estatisticamente, isto é [4]:

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2_\sigma(S_E), \int f(x)g(T_t x)d\sigma \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left[\int f(x)d\sigma \right] \left[\int g(x)d\sigma \right]. \quad (37)$$

onde $\mathcal{L}^2_\sigma(S_E)$ representa um espaço de medida σ , onde as funções f e g são assintoticamente de quadrado integrável.

Nós não discutiremos as relações sutis entre mistura e irreversibilidade. Vamos somente enfatizar a este respeito que as equações de movimento permitem recuperar qualquer ponto $x(t=0)$ conhecendo $x(t>0)$.

1.1.4 Sistemas-K

Sem que assumamos nada além da propriedade de mistura, não se pode dar qualquer informação quantitativa sobre a separação de trajetórias com o tempo.

Os então chamados sistemas-K são sistemas do tipo “mixing” que possuem uma instabilidade tão grande que a maioria das trajetórias começando em pontos próximos se separam, em média, exponencialmente com o tempo. Para tais sistemas, o conhecimento de $x(t_i)$ para todos os tempos anteriores a t não proporcionam nenhuma informação útil sobre o comportamento do sistema para $t > t_0$. A evolução de um ponto genérico no espaço de fases é muito irregular, e exibe algum tipo de comportamento aleatório; isto é porque se associa com sistemas-K, para os quais o movimento não depende de seu passado distante, a idéia de imprevisibilidade.

A definição matemática de um sistema-K iria além do alcance de nossa introdução “qualitativa” para fenômenos caóticos. Vamos dar somente as idéias principais da caracterização de sistemas-K, e tentar entender aproximadamente em qual sentido pode-se dizer que o passado não determina o futuro. Todos os conceitos usados são emprestados da teoria de informação [6,7]. Primeiramente, introduzimos uma partição ordenada finita P (dividida em células) de uma superfície de energia S_E , para assim definirmos uma “medida”: o resultado da medida do sistema associado a P para o tempo t_0 é o número de células de P que é atravessado pela trajetória num tempo que vai de t_0 até t ; então um *experimento* associado a P é uma seqüência de medidas para tempos igualmente espaçados indo de t_0 até ∞ . Agora, vamos definir a entropia $h(T_t, P)$ do fluxo Hamiltoniano T_t relativo à partição P , que representa a razão média de informação¹, para o experimento associado a P , gerada pelo tempo. Considere, por exemplo, um sistema muito regular, cujo movimento é periódico no espaço de fases. O conhecimento de um conjunto finito de medidas seqüenciais é suficiente para determinar o resultado de *todas* as medidas adicionais, e, portanto a entropia é $h(T_t, P)$ é zero. Para sistemas fortemente irregulares, mesmo conhecendo um conjunto infinito de medidas seqüenciais não é suficiente para saber, com probabilidade um, o resultado da medida seguinte, e, portanto a entropia é positiva.

Sistemas-K são agora definidos [4] como sistemas para os quais a entropia para qualquer partição finita P é positiva.

$$h(T_t, P) > 0 \quad \forall P. \quad (38)$$

¹ Note que a quantidade de informação ganha quando se faz a medida é igual à falta de informação, isto é, à incerteza.

Embora os sistemas-K sejam definidos desta forma, a dificuldade está em se medir a quantidade $h(T_t, P)$. Estes são, portanto, sistemas cujo movimento é irregular e imprevisível. Uma quantidade de interesse para medir o grau de irregularidade, é a chamada entropia métrica, ou entropia Kolmogorov-Sinai: [4] ela é definida como o valor máximo de $h(T_t, P)$, tomada sobre todas as possíveis partições finitas P :

$$h_{K-S}(T_t) = \max_{P_i} h(T_t, P_i). \quad (39)$$

Vamos enfatizar que esta entropia não depende de qualquer estado dinâmico em consideração, ao contrário da entropia geralmente usada em mecânica estatística, mas é uma quantidade intrínseca associada a um sistema dinâmico considerado como um todo para uma dada energia E . Esta entropia K-S proporciona uma medida da força da mistura do sistema, e é relacionada à taxa média da separação exponencial das trajetórias.

1.1.5 Sistemas Bernouilli

Estes são, entre os sistemas-K, os mais imprevisíveis. De fato, eles têm a propriedade da existência de uma partição P_0 tal que a seqüência de medidas do experimento associado é completamente não relacionada. Esta partição P_0 deve satisfazer também outra condição a fim do sistema ser do tipo Bernouilli.

Para um sistema Bernouilli, a entropia K-S é simplesmente igual à entropia da partição particular P_0 , isto é:

$$h_{K-S}(T) = -\sum_i \mu_i \ln \mu_i \quad (40)$$

onde μ_i é a medida da i -ésima célula de P_0 (isto é, a área da i -ésima célula de $P_0 \subset S_E$), e a soma é sobre todas as células de P_0 .

Os diferentes tipos de sistemas que já introduzimos ilustram a transição da regularidade para o caos, isto é, a aleatoriedade produzida por equações causais de movimento. Várias observações devem ser feitas neste estágio:

- i) Parte do vocabulário introduzido acima (ergodicidade, mistura) soa familiar e aparece em mecânica estatística. Nós enfatizamos, entretanto, que todas as considerações feitas anteriormente não são restritas a sistemas com um grande número de graus de liberdade, mas realmente podem ser aplicadas a sistemas muito simples, eventualmente tendo somente dois graus de liberdade.

- ii) Embora seja relativamente simples verificar se um sistema é integrável, em geral é extremamente difícil classificá-lo em ergódico, “mixing”, Bernoulli, etc., por causa da dificuldade em se medir a entropia dos sistemas. Os principais resultados, com respeito a esta classificação, disponíveis até agora dizem respeito a bilhares [4,8].

1.1.6 Sistemas quase-integráveis

Sistemas conservativos quase-integráveis são obtidos pela aplicação de uma perturbação fraca que preserva a conservação de energia de um sistema integrável. A adição de uma perturbação periódica em um sistema integrável ocasiona o surgimento de ressonâncias nele, as quais apresentam frequências bem definidas. Como a teoria de perturbações usual não é boa nas proximidades de uma ressonância, Kolmogorov encontrou uma forma de desenvolver uma teoria de perturbação alternativa aplicável àqueles toros que não ressonavam. Mais tarde, Arnold e Moser puseram em prática as idéias de Kolmogorov dando origem ao Teorema KAM [1-3,8].

De acordo com o Teorema KAM, na presença de uma perturbação fraca, os toros irracionais não se quebram, mas apenas se deformam levemente, enquanto que os toros racionais são gradativamente destruídos.

Com o aumento da intensidade da perturbação os toros irracionais começam a ser destruídos um a um até o último, cuja razão de frequências coincide com a Média Dourada, que é considerada o número mais irracional pelo critério das frações continuadas.

O critério das frações continuadas diz respeito que um dado número irracional $\mathcal{J}$ pode ser descrito pela seqüência [1]:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (41)$$

e esta converge mais lentamente quando todos os valores $a_1, a_2, \dots, a_n$, são os menores possíveis, ou seja, todos iguais a um, determinando o valor:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (42)$$

chamado média dourada ou número áureo.

A maneira como os toros são destruídos é descrita pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff [1-3].

De acordo com o Teorema de Poincaré-Birkhoff, na presença de uma perturbação fraca, os toros racionais ressonam e se quebram. Em seu lugar surge uma sequência finita de n pontos hiperbólicos¹ e n pontos elípticos² intercalados, onde n depende da frequência de rotação do toro destruído. Ao redor dos pontos elípticos aparecerão pequenas estruturas regulares compostas por uma infinidade de toros racionais e irracionais, assim como o sistema original. As órbitas mais próximas dos pontos hiperbólicos ficam altamente instáveis ou caóticas, acompanhando o movimento da separatriz³, dando origem a uma região denominada emaranhando homoclínico.

Com o aumento da intensidade da perturbação as estruturas regulares envolvidas pelo emaranhado homoclínico são destruídas, e a superposição das regiões caóticas resultantes destrói os toros irracionais um a um até que todo o espaço de fases apresente um padrão caótico.

Pode-se imaginar facilmente que, para um sistema dinâmico “genérico”, a estrutura do espaço de fases é muito complicada, mostrando ambos regimes: regular e caótico. Neste sentido, a discussão feita acima, descrevendo as principais características de sistemas Hamiltonianos, de acordo com o aumento do grau de caos, é irrelevante para a maioria dos sistemas. Entretanto, estudar problemas abertos tais como a caracterização de caos quântico, parece natural começar com sistemas cujos análogos clássicos são razoavelmente bem conhecidos.

1.2. Mapeamento com preservação de medida

1.2.1. Seção de Poincaré

Por simplicidade, vamos nos restringir por um momento a sistemas físicos conservativos com dois graus de liberdade. Como já mencionado, está longe de ser fácil, mesmo para estes sistemas, estudar analiticamente seu grau de irregularidade.

Para os sistemas considerados aqui, a porção acessível do espaço de fases para uma dada energia E , ou seja, a superfície de energia S_E é uma superfície tridimensional limitada. O método de seções de superfícies de Poincaré consiste na escolha de uma superfície “apropriada” bidimensional Σ no espaço de fases, e no olhar para a figura gerada por cruzamentos sucessivos de uma dada órbita com Σ ; pelo termo “apropriada” queremos dizer

¹ Ponto de equilíbrio instável do sistema.

² Ponto de equilíbrio estável do sistema.

³ Curva que separa as regiões de rotação e libração no espaço de fases.

que a trajetória deve cruzar a superfície Σ um número infinito de vezes, quando o tempo vai de zero a infinito.

Vamos ilustrar o interesse do método pela consideração de uma superfície particular Σ_y , definida da seguinte forma. Supondo que a superfície $x=0$ intercepta a superfície de energia $H(x,y,P_x,P_y)=E$, chamaremos esta intersecção Σ_y , que é uma superfície bidimensional. Um ponto sobre Σ_y pode ser definido pelas coordenadas (y, P_y) . A integral de movimento $H=E$ define P_x^2 como uma função de (P_y, x, y) ; portanto, pode-se unir a um ponto sobre Σ_y um conjunto de coordenadas $(x = 0, y, \epsilon|P_x|, P_y)$, com o sinal $\epsilon = \pm 1$ de P_x dependendo do sentido de uma dada trajetória que atravessa Σ_y . Para retirarmos a ambigüidade do sinal, nós escolhemos um dado lado de Σ_y e olhamos para intersecções sucessivas Q_n de uma dada trajetória com Σ_y (ver Fig3.) . Escolhemos o lado de saída da trajetória:

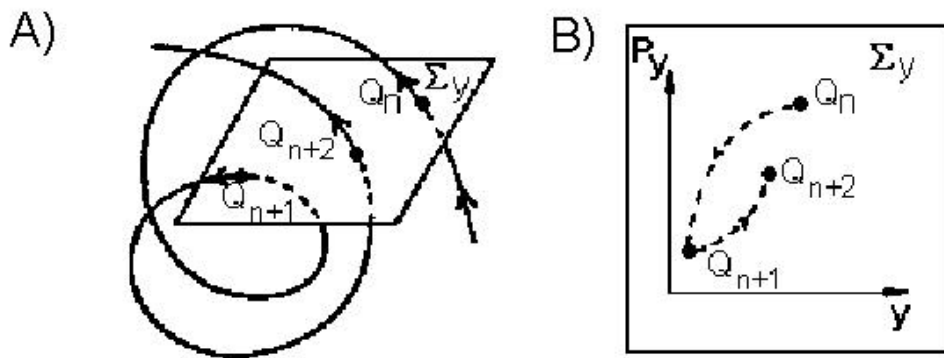


FIGURA 3 - (A) Trajetória cruzando a seção de superfície Σ_y ; (B) Pontos do mapa de Poincaré sobre Σ_y .

Agora, o conhecimento das coordenadas de Q_n sobre Σ_y especifica completamente todo o conjunto de coordenadas de Q_n no espaço de fases, isto é, o conhecimento de um par de variáveis conjugadas sobre Σ_y determina completamente o estado dinâmico. O que foi perdido pela redução do problema inicial tridimensional para o bidimensional é a “história” da órbita entre dois cruzamentos sucessivos com Σ_y , mas isto não é essencial para o conhecimento e caracterização da dinâmica.

Os cruzamentos sucessivos com Σ_y definem um mapeamento M_a :

$$\Sigma_y \xrightarrow{M_a} \Sigma_y . \quad (43)$$

Dada uma condição inicial $\underline{\xi}_0 = (x_0 = 0, y_0, P_{x_0}, P_{y_0})$ para um ponto sobre Σ_y , o estudo do sistema dinâmico é agora reduzido ao estudo do conjunto de pontos $\{\underline{\xi}_n = M_a^n \underline{\xi}_0, n = 0, 1, 2, \dots, \infty\}$.

A propriedade ii) apresentada na página anterior significa que o mapeamento M_a preserva a área (ou medida), ou seja, dada qualquer curva fechada γ sobre Σ_y , a área limitada pela curva imagem $M_a(\gamma)$ de γ pelo mapeamento M_a deve ser igual a área limitada pela curva γ (ver Fig.4):

$$\oint_{\gamma} P_y d_y = \oint_{M_a(\gamma)} P_y d_y. \quad (44)$$

Isto pode ser mostrado a partir do caráter Hamiltoniano do movimento.

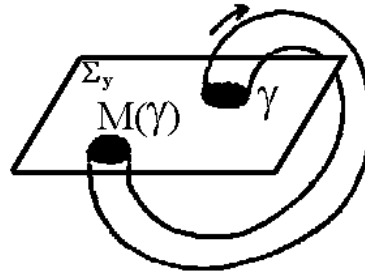


FIGURA 4 - Ilustração da propriedade (44): Σ_y é uma seção de superfície, γ é uma curva fechada sobre Σ_y , e $M_a(\gamma)$ a imagem de γ sobre Σ_y . As áreas de γ e $M_a(\gamma)$ são iguais, mas a região $M_a(\gamma)$ poderia estar deformada.

Agora vamos olhar para o padrão gerado sobre Σ_y pelos pontos $M_a^n \underline{\xi}_0$, ($n=0, 1, 2, \dots, \infty$), e ver qual tipo de informação podemos tirar a partir dele. Primeiro vamos considerar um sistema que tem além da energia, uma outra constante de movimento I , de modo que $\{H, I\} = 0$, ou seja, o sistema é integrável

$$I(x, y, P_x, P_y) = \text{Constante}, \quad H(x, y, P_x, P_y) = E. \quad (45)$$

A partir de (45) pode-se eliminar duas das variáveis canônicas, digamos x e P_x , o que produz:

$$P_y = P_y(x, y). \quad (46)$$

Já que $x=0$ sobre Σ_y , a Eq. (46) projetada sobre Σ_y é a equação de uma curva Γ , que é *invariante* sob o mapeamento M_a , e que é simplesmente a intersecção do toro invariante bidimensional com Σ_y . Portanto os cruzamentos sucessivos de uma órbita com Σ_y encontram-se todos sobre uma única curva ($M_a(\Gamma) = \Gamma$), para qualquer conjunto de condições iniciais. Isto é uma assinatura de integrabilidade. Duas possibilidades podem ocorrer neste caso:

- i) o toro é ressonante (ou racional). Então, o movimento é periódico sobre o toro; ou seja, a órbita é fechada, e tem somente um número finito k de cruzamentos com Σ_y que são todos pontos fixos para M_a , já que $M_a^k \underline{\xi}_0 = \underline{\xi}_0$ (ver Fig.5).
- ii) se, ao contrário, o toro invariante é irracional, a órbita cobre densamente o toro (é ergódica sobre o toro), e os pontos gerados por iterações sucessivas do mapeamento irão cobrir no limite de infinitas iterações a curva invariante Γ (ver Fig. 6).

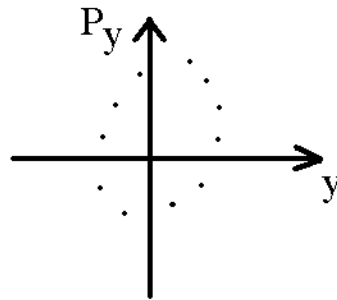


FIGURA 5 - Padrão típico de uma seção de Poincaré de um sistema integrável bidimensional para condições iniciais definindo um toro racional.

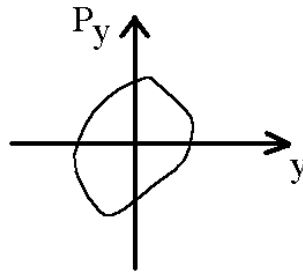


FIGURA 6 - Padrão típico de uma seção de Poincaré de um sistema integrável bidimensional para condições iniciais definindo um toro irracional.

Como outro exemplo temos a Fig.7. Na primeira seção, à esquerda, percebemos a presença de toros racionais, dados pelas linhas tracejadas, e de irracionais, dados pelas linhas cheias. Na segunda seção, à direita, os toros racionais foram destruídos e em seu lugar surgiram as estruturas regulares mergulhadas no emaranhado homoclínico, similares ao sistema antes de uma perturbação, a qual o sistema é submetido. Com o aumento desta perturbação, como dissemos, a região caótica ocupará todo o espaço de fases, destruindo todas as estruturas regulares remanescentes.

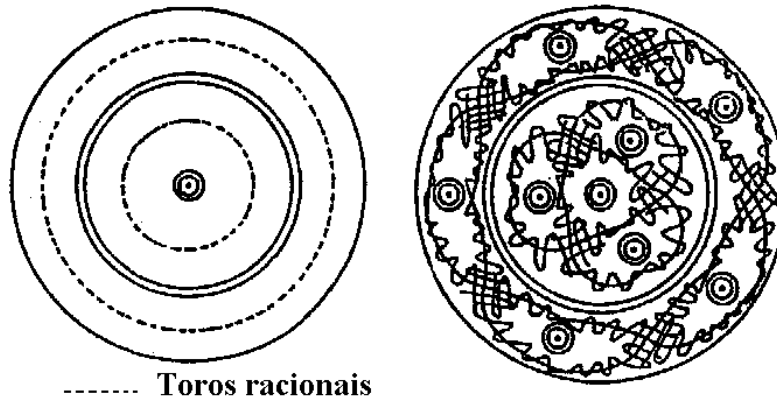


FIGURA 7 - Duas seções de Poincaré de um sistema inicialmente integrável ao qual foi adicionada uma perturbação.

Entre sistemas integráveis e ergódicos há uma grande variedade de sistemas para os quais as regiões caóticas e regulares coexistem no espaço de fases. O padrão dos mapas de Poincaré mostra tanto curvas invariantes como pontos escassos, como pode ser visto na Fig. 8. É usual representar sobre um mesmo mapa de Poincaré impactos de várias trajetórias correspondendo a diferentes condições iniciais.

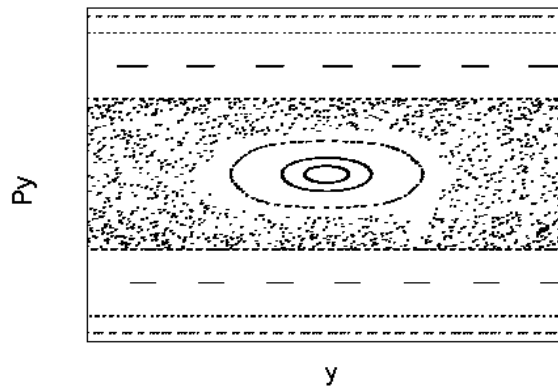


FIGURA 8 - Seção de Poincaré composta de regiões integráveis e caóticas.

1.3. Bilhares

Um bilhar é um sistema dinâmico produzido pelo movimento livre de uma partícula pontual no plano $\mathbb{R}^2$ limitado por uma curva Γ , ou mais genericamente, por um conjunto de curvas Γ_i , com reflexões elásticas sobre a fronteira Γ , ou seja, a componente tangencial de qualquer trajetória permanece constante para Γ , enquanto a componente normal troca de sinal. Um bilhar é portanto um sistema com dois graus de liberdade, com pelo menos uma constante de movimento, a energia $E = \frac{1}{2} Mv^2$ (energia cinética).

O comportamento de qualquer órbita no espaço de fases não depende nem da massa M da partícula nem de sua velocidade (esta característica peculiar dos bilhares é devido ao fato do movimento ser simplesmente governado por leis da óptica geométrica); portanto as propriedades deste tipo de sistema dinâmico não dependem da energia E , todas as superfícies de energia têm a mesma estrutura.

Já uma trajetória no espaço de configuração é uma seqüência infinita de segmentos de retas, cada um correspondendo a uma velocidade constante $\bar{v}$. Portanto, é natural procurar uma seção de Poincaré Σ tal que cruzamentos sucessivos com Σ correspondam a sucessivos choques com Γ .

O estudo dos bilhares é de interesse em muitos aspectos:

- i) eles são, entre os sistemas físicos Hamiltonianos, os mais estudados a partir do ponto de vista matemático;
- ii) os bilhares possuem uma grande riqueza de comportamentos. Existem sistemas que se encontram no topo, assim como no ponto mais baixo da hierarquia da regularidade descrita na seção 1.1, e também sistemas que não podem ser classificados de acordo com esta hierarquia, ou seja, para os quais o espaço de fases contém tanto regiões regulares como caóticas.
- iii) a superfície de energia dos bilhares é tridimensional, que é a menor necessária para observar um movimento caótico.

Como exemplo de bilhares regulares, temos: o retângulo, o círculo e a elipse. Nestes exemplos, os sistemas possuem duas constantes de movimento independentes [4].

Como exemplo de sistema que exhibe comportamento caótico podemos citar o bilhar de Sinai, no qual a partícula fica se movimentando num quadrado com um obstáculo circular em torno do centro (ver Fig.9). De fato, foi provado por Ya. G. Sinai [9] que este bilhar é um sistema-K. Mais tarde, ele mostraria que este bilhar também é um sistema do tipo Bernouilli, ou simplesmente sistema-B. Citamos também como exemplo de sistema-K (e B) o estádio de Bunimovich [4] (dois semicírculos de raio R , unidos por dois segmentos paralelos à linha que atravessa seus centros) (ver Fig. 10).

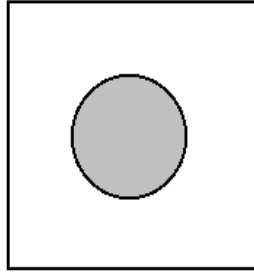


Figura 9 - Estádio de Sinai.



Figura 10 - Bilhar de Bunimovich.

Como o modelo utilizado neste trabalho é o bilhar anular, a próxima seção dedica-se a um maior detalhamento deste sistema.

1.4. O Bilhar anular

A fronteira Γ para este tipo de bilhar consiste de um círculo externo de raio b (que terá **valor unitário** nas aplicações numéricas) e um círculo interno (disco) de raio a ($a < b$) (ver Fig.11). Neste sistema, quando a distância d entre os centros dos dois círculos não-concêntricos tende a zero, o bilhar se reduz ao caso integrável (ou regular) de dois círculos concêntricos[9], já que o momento angular $L_z = |\vec{L}|z$ com respeito ao centro do bilhar e a energia total do sistema são conservados. Por outro lado, quando $d > 0$, L_z não se conserva mais e os resultados numéricos mostram o aparecimento de órbitas caóticas. No entanto, o bilhar anular não-concêntrico nunca é completamente caótico por causa da existência de um grupo não-nulo de órbitas do bilhar que nunca acertam o círculo interno. Estas órbitas, denominadas “Whispering Gallery Orbits”, ou somente W.G.O., conservam o momento angular e são portanto idênticas às órbitas integráveis associadas a um bilhar de fronteira circular. Sobre um certo intervalo de valores de d , a órbita representada pelo segmento QP da Fig.11 é observada juntamente com uma região de quase-integrabilidade ao seu redor. Assim, o bilhar anular não-concêntrico pode exibir simultaneamente comportamento integrável, quase-integrável (KAM), ou comportamento caótico.

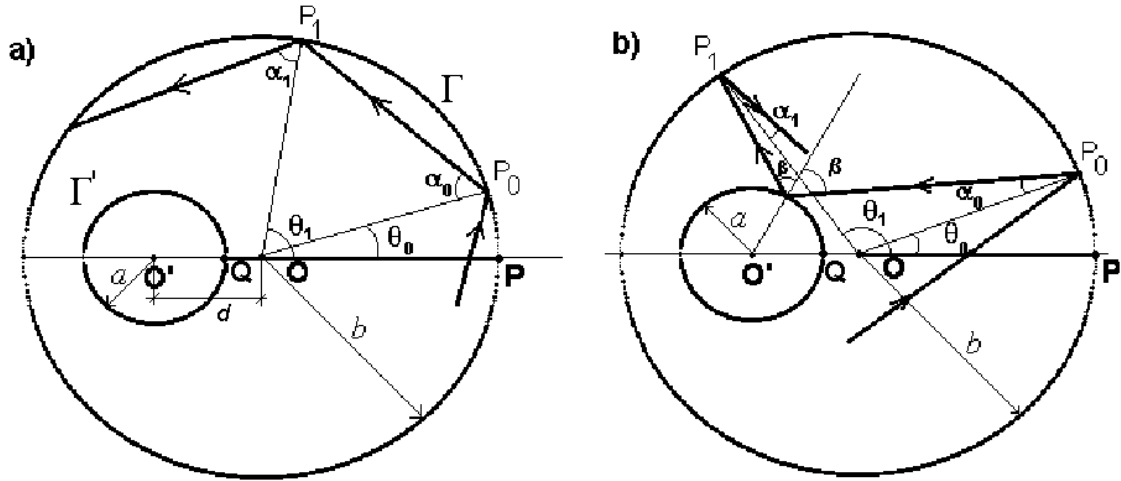


FIGURA 11 - Geometria do bilhar anular não concêntrico, com excentricidade $d = \overline{OO'}$, raio externo b e raio interno a . Mostramos em cada item, parte de uma trajetória que, depois de chocar-se com o círculo externo, colide: (a) novamente com o círculo externo (movimento-A); (b) com o círculo interior, antes de chocar-se novamente com o círculo exterior (movimento-B).

Já que o bilhar de dois círculos excêntricos é um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, poderíamos reduzir o movimento a um plano, preservando a área do mapeamento através do uso da técnica de Poincaré, já apresentada na seção (1.2.). Entretanto, cada segmento reto de uma órbita do bilhar termina em uma colisão com a fronteira do bilhar; então escolhemos seguir Birkhoff [10], Benettin e Strelcyn [11] e usar variáveis que preservem a área do mapeamento (L, S) , onde L é o comprimento ao redor do círculo externo e S é o seno do ângulo de reflexão da colisão com o círculo externo. Para círculos não-concêntricos, é uma questão de geometria determinar as equações que mapeiam os valores de (L, S) para seqüências de colisões com a fronteira. Seguindo, iteramos as equações do mapa (L, S) para valores de parâmetros dos círculos não-concêntricos, a e d (já que fizemos $b=1$). Para o caso $a > d$, regiões de integrabilidade, quase-integrabilidade e caos coexistem. Quando $a < d$, a órbita periódica QP da Fig.11 torna-se instável e a região de quase-integrabilidade que a cerca desaparece [12]. No bilhar anular não-concêntrico podem existir duas classes de trajetórias: aquelas que nunca batem no círculo interno e aquelas que colidem com ele. As que nunca colidem com o círculo externo são as W.G.O. Elas sempre existem (exceto para $a+d=b$), e encontram-se dentro da região anular simétrica sombreada limitada pelo círculo exterior e a cáustica¹ (veja Fig. 12) correspondente às trajetórias que são tangentes ao círculo interno. Para uma família particular de órbitas identificada pela expressão $a+d=\text{constante}$, a

¹ Circunferência com raio $\mathcal{R} = a + d$.

região coberta pelas W.G.O. permanece constante: quando d varia, todas as W.G.O. continuam inalteradas.

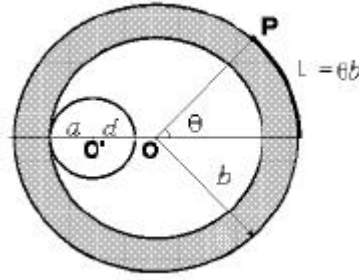


FIGURA 12 - Região coberta pelas W.G.O. (Whispering Gallery Orbits).

1.4.1. Mapeamento para o problema do bilhar anular não-concêntrico

Consideramos o bilhar entre uma fronteira circular externa Γ e uma fronteira circular interna Γ' que é levada para à esquerda por uma excentricidade d , como é mostrado pela Fig. 11.

A dinâmica discreta do bilhar pode ser escrita mais convenientemente pelo sistema de coordenadas (L,S) ; aqui a abscissa do espaço de fases será dada por $L = \frac{\theta b}{2\pi}$, onde θ é o comprimento de arco normalizado medido ao redor do círculo externo Γ do ponto P da Fig. 12. Fazendo $b=1$, produz-se $|L| \leq 0.5$, e como ordenada do espaço de fases $S = \sin \alpha$, com α sendo o ângulo de reflexão do ponto de colisão com o círculo externo, produzindo $|S| \leq 1$. O ângulo α é medido a partir da normal com relação à origem O. Na Fig.11(a), mostramos uma trajetória que após uma colisão com o círculo externo, colide novamente com ele sem antes se chocar com o círculo interno (chamado movimento-A); já na Fig. 11(b) a trajetória choca-se com o círculo externo e antes de se chocar novamente com ele, colide intermediariamente com o círculo interno (definindo o movimento-B). Vamos denotar o mapeamento a partir de um ponto inicial P_0 no círculo externo, com coordenadas (L_0, S_0) , para uma próxima colisão com ele (L_1, S_1) , por T. Iterações sucessivas do mapeamento são denotadas por P_0, TP_0, T^2P_0 , etc. e determinamos a órbita pelo cálculo das iterações subseqüentes da condição inicial P_0 .

Para nosso sistema, a transformação T pode ser escrita usando argumentos geométricos. Para o movimento-A encontramos[13]:

$$T_a: \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 \\ \theta_1 &= \theta_0 + (\pi - 2\alpha_0); \end{aligned} \quad (47)$$

enquanto para o movimento-B

$$\begin{aligned} & \sin \alpha_0 + d \sin (\alpha_0 - \theta_0) = a \sin \beta \\ T_b: & \sin \alpha_1 + d \sin (\alpha_1 + \theta_1) = a \sin \beta . \\ & 2\beta = \alpha_0 - \theta_0 + \alpha_1 + \theta_1 \end{aligned} \quad (48)$$

onde β é o ângulo de reflexão da órbita no círculo interno. O movimento entre os dois círculos não-concêntricos é então reduzido aos mapas T_a e T_b . Em particular, a condição geométrica de tangência ditando o uso de T_b ao invés de T_a é dada por:

$$|\sin \alpha + d \sin(\alpha - \theta)| \leq a , \quad (49)$$

onde a igualdade no sinal de desigualdade em (49) significa que a órbita é tangente ao círculo interno.

O movimento na região $|S| \geq a + d$ corresponde às W.G.O. (trajetórias que possuem somente movimento-A). Dentre as W.G.O., cada trajetória não-periódica dá origem a um toro cuja seção é uma linha horizontal no plano L, S com $a + d < |S| < 1$. Para cada um destes toros há um outro correspondente, simetricamente localizado com respeito ao eixo $S=0$, obtido a partir da trajetória original pela reversão de sua direção.

Várias seções de Poincaré são mostradas na Fig. 13, para $a + d = 0.45$ e diferentes valores da excentricidade d . Salientamos que a condição de tangência, Eq. (49), deve ser testada para todas as iterações a fim de definir qual dos mapas, T_a ou T_b , deve ser usado na iteração correspondente.

Para valores pequenos de d (veja Fig. 13-a), podemos ver ao redor do ponto fixo da origem a presença de toros de libração. Além da separatriz, na região $|S| < a + d$, existem toros de rotação, que como os toros das W.G.O., aparecem em pares, correspondentes ao movimento reverso. Entretanto, em contraste aos toros das W.G.O., eles se deformam quando d varia, mantendo $a + d = \text{constante}$. Quando d é aumentada (veja Fig. 13-b) a região coberta pelos toros de libração decresce: muitos toros de libração desaparecem, tornando-se camadas de órbitas caóticas. O mesmo acontece com muitos toros de rotação. Os toros de libração/rotação gradualmente desaparecem, construindo um mar de caos que eventualmente conecta diretamente a região $|S| < (a + d)$ às regiões de toros de W.G.O. (Fig.13-c). Quando d é aumentada ainda mais, a região coberta pelos toros de libração encolhe ainda mais (Fig. 13-d), até desaparecer para $a = d$ (Fig.13-e). Quando d alcança o valor $d \cong 3a$, nenhuma estrutura visível parece existir e uma trajetória genérica (que não seja W.G.O.) parece explorar uniformemente o espaço de fases disponível $|S| \leq a + d$ (Fig. 13-f).

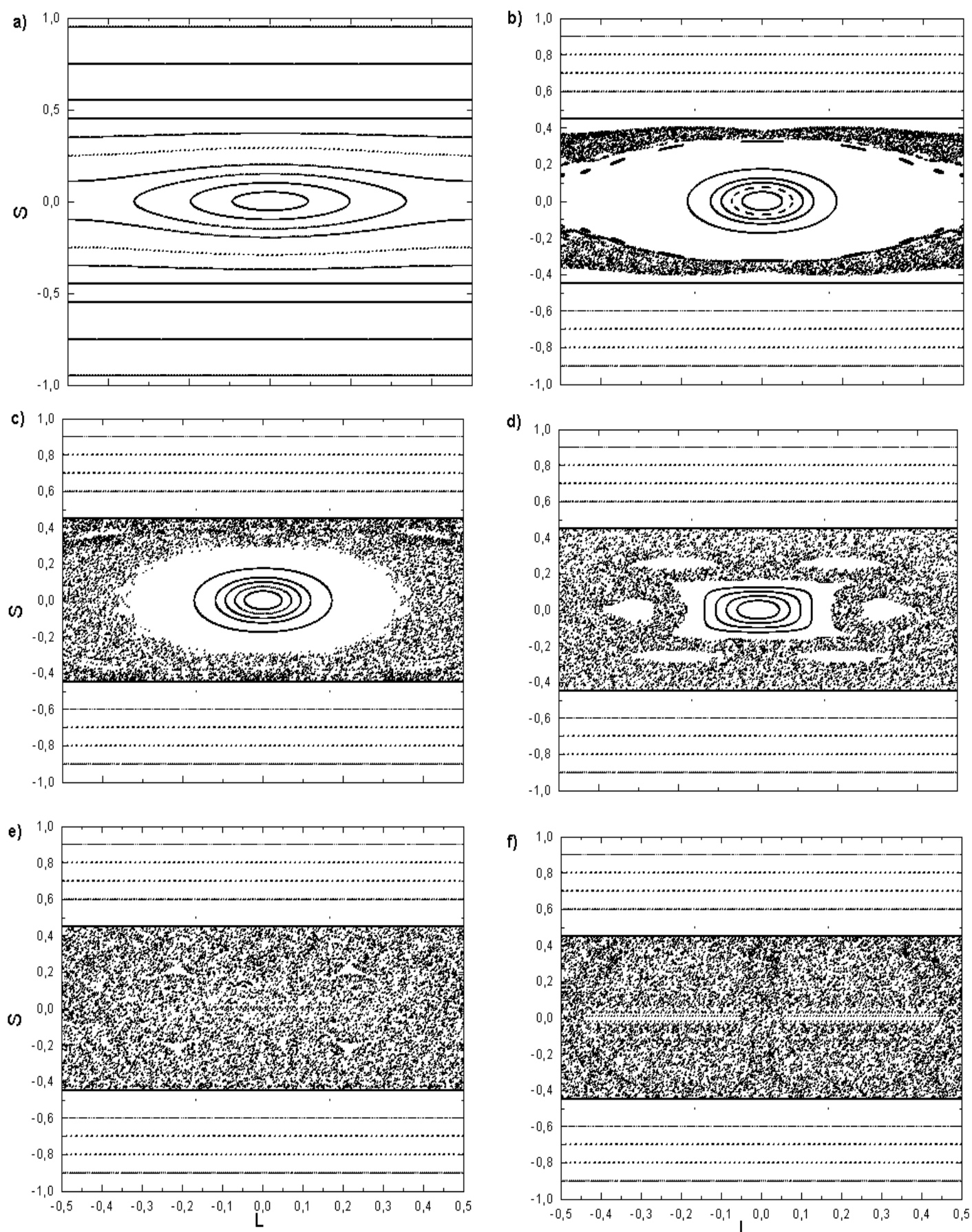


FIGURA 13 - Seções de Poincaré para $a + d = 0.45$ e diferentes excentricidades d : (a) $d=0.01$; (b) $d=0.03$; (c) $d=0.07$; (d) $d=0.15$; (e) $d=0.225$; (f) $d=0.3375$.

A figura a seguir representa uma órbita quase-periódica no plano do bilhar localizada no interior da cadeia de ilhas da Fig. 13-d.

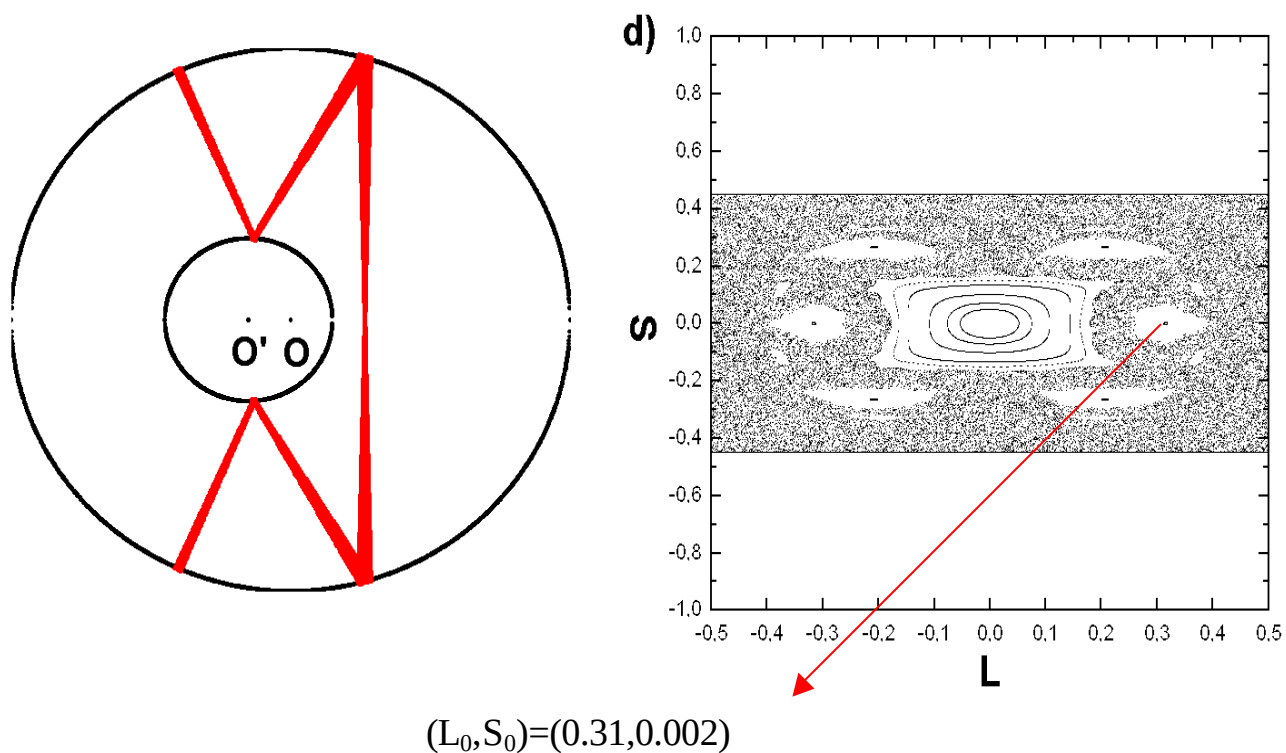


FIGURA 14. Do lado esquerdo, temos a órbita quase periódica, cuja condição inicial $(L_0, S_0) = (0.31, 0.002)$ encontra-se no interior da cadeia de ilhas no espaço de fases da figura 3-d (lado direito)

2. DINÂMICA QUÂNTICA

2.1. Caologia Quântica

Ainda como uma introdução, pensamos ser importante a apresentação de uma síntese dos principais trabalhos, no qual o nosso se insere, para que o leitor tenha uma visão geral sobre o assunto.

Caologia Quântica é o estudo quântico de fenômenos característicos de sistemas, cujo movimento clássico apresenta caos [14].

É importante salientar neste momento que o termo “Caos Quântico”, embora muito utilizado na literatura não está correto, pois caos quântico não existe no sentido de uma sensibilidade exponencial às condições iniciais, mas há vários fenômenos quânticos que refletem a presença de caos clássico. O estudo destes fenômenos é a caologia quântica [15].

Historicamente, o desenvolvimento deste ramo do conhecimento começou no início do século passado (entre as décadas de 10 e 20), quando alguns químicos, ao estudarem moléculas simples, perceberam a existência de um fenômeno denominado “avoided level crossings” (ou cruzamento evitado de níveis) na dinâmica dos níveis de energia. Basicamente o que ocorre é, quando os níveis vizinhos estão próximos, ao se aproximarem, não se cruzam, apresentando uma repulsão [16].

Em 1929, von Neumann e Wigner mostraram que sistemas dinâmicos genéricos não podem apresentar cruzamentos entre os níveis de energia [17]. Teller afirmou o mesmo teorema em 1937 [18]. Percival [19] em 1973 propôs que o espectro de energias dos sistemas dinâmicos, no limite semi-clássico, deveria consistir de uma parte regular e outra irregular, refletindo as partes regulares e irregulares do espaço de fases respectivamente.

No início dos anos 80 diversos trabalhos evidenciaram que o fenômeno “avoided level crossings” era típico de sistemas não integráveis [20-22]. Na mesma época, Berry propôs que na transição da integrabilidade para a não integrabilidade de um sistema a distribuição de espaçamentos entre os níveis de energia vizinhos deveria apresentar grandes mudanças [21].

Neste trabalho acontece uma ligação entre a Caologia Quântica e uma teoria estatística iniciada por Wigner na década de 50 para estudar propriedades espectrais de sistemas de núcleos atômicos, posteriormente denominada Teoria de Matrizes Aleatórias,

onde se considera um ensemble de Hamiltonianas que possuem alguma simetria em comum, com o objetivo de encontrar propriedades de flutuações espectrais genéricas.

Em 1979, McDonald e Kaufmann publicaram um estudo numérico pioneiro envolvendo a Caologia Quântica. Eles estudaram os análogos quânticos de dois sistemas: o bilhar circular (classicamente integrável) e o estádio de Bunimovich (classicamente caótico) [23].

Ainda no início da década de 80, Davis e Heller [24] propuseram a existência de um fenômeno chamado *tunelamento dinâmico* que afeta o comportamento dos níveis de energia em sistemas ditos mistos, os quais apresentam em seus espaços de fases regiões regulares separadas por um mar de caos.

Embora o tunelamento seja uma característica puramente quântica, atualmente está bem estabelecido que os processos de tunelamento são fortemente afetados pela natureza da correspondente dinâmica clássica. Mais adiante apresentamos com mais detalhe os fenômenos de tunelamento.

Alguns dos principais resultados relacionando o efeito de caos clássico no processo de tunelamento são encontrados nas referências a seguir.

No início dos anos 90, Bohigas [12],[25] apresenta estudos sobre o acoplamento entre regiões regulares do espaço de fases via mar de caos. Do ponto de vista quântico, Bohigas associa o tunelamento dinâmico à presença de caos no sistema, introduzindo a idéia de tunelamento induzido por caos. Bohigas também apresenta aplicações da Teoria de Matrizes Aleatórias na Caologia Quântica, estudando propriedades espectrais genéricas dos sistemas classicamente caóticos.

Nesta mesma época, Lin e Ballentine [26] apresentaram um estudo sobre os efeitos do tunelamento dinâmico em um sistema do tipo poço duplo com um campo elétrico oscilante no tempo.

Em 96, Leyvraz e Ullmo [27] apresentaram um estudo associando a distribuição dos espaçamentos de energia com o tunelamento dinâmico num sistema particular onde tal fenômeno é o mecanismo dominante no processo de tunelamento. Adiante daremos uma maior ênfase a este trabalho.

Em 98, Frischat e Doron [28] apresentaram um estudo sobre tunelamento dinâmico em sistemas mistos de modo geral, apresentando a idéia de que o tunelamento dinâmico ocorre entre estruturas regulares, ou ilhas, separadas pelo mar de caos via região de praia, que seria aquela que contorna a ilha, estando entre esta e o mar de caos.

Em 99, Heller [29] apresentou um estudo sobre tunelamento, dando especial atenção ao tunelamento dinâmico e seus efeitos em importantes processos químicos.

Em 2003, Mouchet e Delande [30] mostraram estudos numéricos sobre tunelamento dinâmico, renomeado por eles como “tunelamento caótico”. Alguns de seus resultados foram surpreendentes. Este artigo será discutido em adiante em maiores detalhes. Adiantamos que este trabalho foi peça chave para as conclusões que obtivemos neste trabalho.

2.2. Estatísticas de níveis, tunelamento e tunelamento dinâmico

Como dissemos na seção 2.1, as características quânticas de sistemas classicamente caóticos diferem das características quânticas dos sistemas classicamente integráveis, onde o conceito de integrabilidade vem da existência de no mínimo tantas integrais de movimento independentes quantos forem os graus de liberdade.

Uma das formas de visualizar estas diferenças é estudar as propriedades do espectro de energias, obtido a partir da diagonalização da matriz Hamiltoniana do sistema. Muitas propriedades dos espectros de energias variam de sistema para sistema, mas certas características são absolutamente genéricas e algumas delas estão diretamente relacionadas à presença de caos. Uma característica em especial é a distribuição de espaçamentos entre primeiros vizinhos por unidade de espaçamento médio que é uma medida estatística cujas flutuações estão intimamente relacionadas com a presença ou não de caos no sistema.

Entretanto, a teoria estatística utilizada no estudo da distribuição de espaçamentos de energia de um sistema não é uma teoria convencional, onde conhecemos explicitamente as interações presentes nos sistemas. A teoria estatística utilizada considera que todas as interações são equiprováveis e não é necessário conhecer as origens físicas.

A partir das idéias de Wigner, Dyson mostrou que existem três Grupos genéricos de Hamiltonianas classificados por suas simetrias. O primeiro Grupo é o que possui invariância de rotação e de reversão temporal, dados pelas Hamiltonianas reais e simétricas. O segundo Grupo é aquele cuja invariância de reversão temporal é violada, como no caso de um elétron em um campo magnético externo. O terceiro Grupo é aquele onde a invariância de reversão temporal é conservada, mas a invariância rotacional é quebrada. Neste Grupo, os sistemas possuem spin semi-inteiro.

Os três Grupos mostrados por Dyson definem os seguintes ensembles: ensemble ortogonal gaussiano (*Gaussian Orthogonal Ensemble* – GOE), ensemble unitário gaussiano

(*Gaussian Unitary Ensemble* – GUE) e ensemble simplético gaussiano (*Gaussian Symplectic Ensemble* – GSE).

Para calcular a distribuição de espaçamentos entre os níveis de primeiros vizinhos de um sistema em função de um dado espaçamento médio, procede-se da seguinte maneira.

Primeiramente, calcula-se o espaçamento médio S_m dado pela média aritmética dos espaçamentos.

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_{i+1} - E_i) = \frac{E_{N+1} - E_1}{N}, \quad (50)$$

onde N é o número de espaçamentos.

Uma discussão detalhada a respeito desta análise estatística pode ser encontrada na referência [31].

No caso de sistemas integráveis, a distribuição de espaçamentos entre primeiros vizinhos será do tipo Poisson, onde a probabilidade de se encontrar um espaçamento em um certo intervalo é dado pela relação:

$$P_p = \frac{1}{S_m} \exp\left(-\frac{S}{S_m}\right), \quad (51)$$

evidenciando uma alta probabilidade de ocorrência de degenerescências ($S=0$). Não confundir S e S_m definidos no acima com $S=\sin\alpha$ (variável do espaço de fases).

Já para sistemas bidimensionais classicamente caóticos, governados por Hamiltonianas reais e simétricas, a distribuição de espaçamentos entre primeiros vizinhos segue a estatística da teoria de matrizes aleatórias para o ensemble GOE, e é dada pela função:

$$P_w(S) = \frac{\pi S}{2S_m^2} \exp\left(-\frac{\pi S^2}{4S_m^2}\right), \quad (52)$$

onde $P_w(S)$ é a distribuição de Wigner e evidencia que é nula a probabilidade de haver níveis degenerados ($S=0$).

Aqui vale lembrar que o modelo que estamos estudando é misto, ou seja, apresenta regiões regulares e caóticas simultaneamente no espaço de fases, de modo que sua distribuição de espaçamentos é diferente daquela obtida pela teoria de matrizes aleatórias com uso do ensemble GOE, que só é válida para sistemas totalmente caóticos.

Graficamente a diferença entre as duas distribuições é mostrada pela seguinte figura:

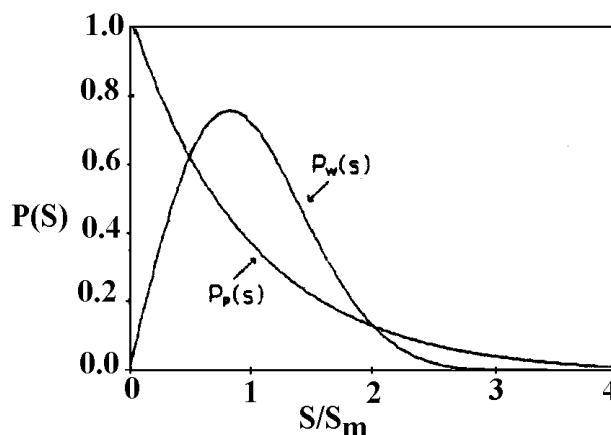


FIGURA 15 – Distribuições de espaçamentos para um sistema classicamente caótico e para um sistema integrável.

As diferenças que notamos na Fig.15 entre as distribuições de espaçamentos correspondentes a um sistema classicamente caótico ($P_W(S)$) e a um sistema integrável ($P_P(S)$) são causadas pela repulsão entre os níveis. Num sistema integrável há pouca ou nenhuma correlação entre os níveis, de modo que há grande probabilidade de ocorrência de degenerescências totais entre dois níveis de energia, o que reflete a curva $P_P(S)$. Já num sistema classicamente caótico, os níveis estão fortemente correlacionados, de modo que não há probabilidade de ocorrência de degenerescência total entre dois níveis de energia, o que se reflete na curva $P_W(S)$.

A forte correlação entre os níveis embutida no sistema pela presença de caos gera o fenômeno que diferencia propriedades quânticas de sistemas classicamente caóticos das propriedades quânticas de sistemas integráveis. Este fenômeno é o que chamamos de “avoided level crossings”, ou cruzamento evitado de níveis. O padrão da dinâmica dos níveis de energia de um sistema classicamente caótico apresenta cruzamentos evitados. Isto pode ser perceber pela figura seguinte, extraída de [8].

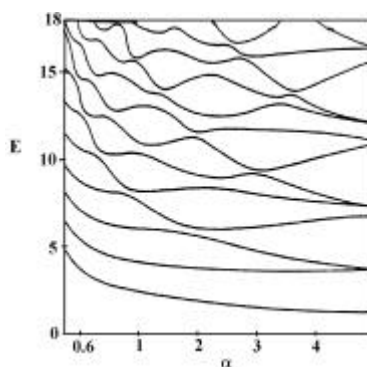


FIGURA 16 - α é o “parâmetro de perturbação”

A Fig. 16 representa os treze primeiros níveis de energia de um bilhar triangular cujo estudo é detalhado na referência [7]. Aqui notamos que os níveis de energia apresentam uma forte repulsão, evitando cruzamentos. Os níveis, neste caso, podem se aproximar, mas não se cruzam.

Para sistemas mistos, uma das causas da correlação entre os níveis de energia é o fenômeno do tunelamento, que pode ser definido como uma transição que ocorre no sistema do ponto de vista quântico, através de um caminho classicamente proibido, como no caso do tunelamento por barreira de potencial, onde uma função de onda correspondente a uma partícula atravessa uma barreira de potencial sem que para isso possua energia superior ao topo da barreira.

Neste sentido, um outro fenômeno que ocorre em sistemas mistos, chamado tunelamento dinâmico (ou tunelamento caótico) [24-30] contribui também para o aumento da correlação entre os níveis de energia.

Para entender o que vem a ser tunelamento dinâmico, precisamos resgatar alguns conceitos da dinâmica clássica do sistema.

Quando estudamos os sistemas dinâmicos, incluindo aqueles com dois graus de liberdade na seção 1, dissemos que as trajetórias dos sistemas integráveis estão presas sobre superfícies de toros onde as ações se conservam. Nos sistemas caóticos os toros não existem, pois foram destruídos, como vimos ao discutir o teorema Poincaré-Birkhoff. Nos sistemas mistos, entretanto, existem estruturas regulares imersas num mar de caos. Dentro das estruturas regulares existem toros, de modo que o movimento local é semelhante ao movimento em um sistema integrável. Sendo assim, uma partícula que esteja dentro de uma região regular do espaço de fases de um sistema misto continua presa a superfície do toro correspondente.

Do ponto de vista da mecânica quântica, se colocarmos um pacote de onda inicialmente centrado sobre a borda externa da região regular, onde há um toro infinitesimalmente próximo do mar de caos e o propagarmos com o tempo, o pacote de onda irá se difundir por todo o mar de caos até chegar à borda externa de outra região regular, de modo que a probabilidade de se encontrar a partícula em outro lugar que não seja o toro que contém a sua trajetória não é nula, o que é classicamente proibido. Esta transição entre duas estruturas regulares via difusão do pacote de onda pelo mar caótico é o que chamamos de tunelamento dinâmico.

O bilhar anular não-concêntrico é um sistema misto onde ocorre o fenômeno de

tunelamento dinâmico. Seu estudo torna-se interessante nas vizinhanças de situações integráveis, perto da região que contém as W.G.O. A dinâmica não-integrável da região $|S| < a + d$ provoca importantes alterações nas propriedades quânticas do sistema.

As características que apresentamos aqui não são as únicas que caracterizam quanticamente sistemas cujos análogos são caóticos. Existem outras propriedades, como o padrão de linhas nodais das funções de onda, que apresentam um comportamento bastante irregular nos estados excitados de sistemas classicamente caóticos. No entanto, a introdução feita até aqui é suficiente para que o leitor compreenda os conceitos básicos aos estudos que apresentaremos nas próximas seções.

2.3. Dinâmica quântica do bilhar anular

A dinâmica quântica de uma partícula de massa M sujeita à influência de um potencial $V(\mathbf{r}, t)$ é descrita pela equação de Schrödinger [32]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (53)$$

onde Δ é o operador Laplaciano.

Já que na região entre os dois círculos do bilhar, $V(\mathbf{r}, t)$ é igual a zero (partícula livre), o problema quântico, correspondente ao bilhar anular, consiste em determinar o espectro do laplaciano, isto é, resolver a equação de autovalor

$$(\Delta + k^2) \Psi = 0 \quad , \quad (54)$$

com condições de contorno de Dirichlet nas fronteiras. Na equação (54), também chamada de equação de Helmholtz, k é o número de onda relacionado com a energia E por $k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$.

Devido à geometria do sistema considerado, devemos escrever a equação (54) em coordenadas polares em duas dimensões. Vamos considerar então a região limitada pelos círculos de raios a e b centrados em O e O' , respectivamente, como mostrado na Fig. 17. Vamos admitir que a distância entre os centros dos dois círculos seja d . As coordenadas polares de qualquer ponto P na região anular serão (r, q) e (r', q') com respeito à O e O' , respectivamente.

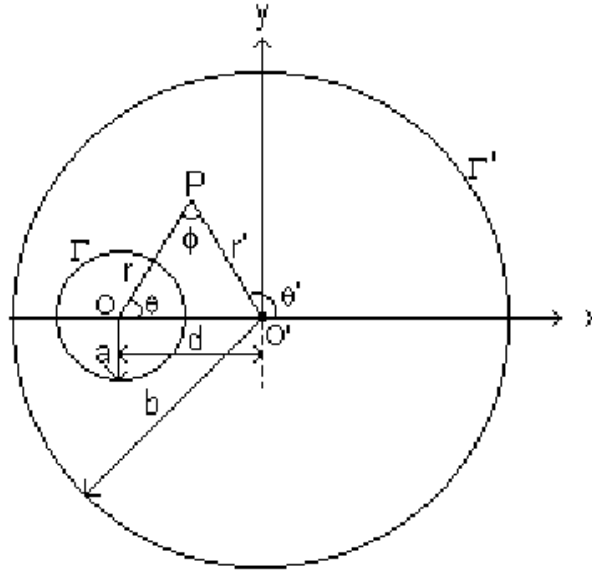


FIGURA 17 - Região anular limitada entre as fronteiras circulares Γ e Γ' . Comparada com a Fig. 12, verifica-se uma troca de coordenadas com relação ao círculo externo e interno. Isto foi feito intencionalmente a fim de facilitar os cálculos seguintes.

A equação de Helmholtz bidimensional em coordenadas polares com relação à origem O é

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right) \Psi(r, \theta) = 0 \quad . \quad (55)$$

Para resolver esta equação, vamos supor que Ψ seja a multiplicação de duas funções, uma dependente apenas de r e outra dependente apenas em θ . Com isto,

$$\Psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad . \quad (56)$$

Agora, substituímos (56) em (55), obtemos:

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \Theta \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 R \Theta = 0 \quad . \quad (57)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{r^2}{R \Theta}$, teremos:

$$r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad . \quad (58)$$

Percebemos que o lado esquerdo da equação anterior depende apenas da variável r , enquanto o lado direito da mesma equação depende somente da variável θ . Assim, esta igualdade só será satisfeita se:

$$r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = n^2, \quad (59)$$

onde n é uma constante.

De (59) teremos:

$$-\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = n^2, \quad (60)$$

$$r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = n^2. \quad (61)$$

A solução de (60) é dada por:

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta} = \underbrace{A \cos n\theta}_{\text{Parte Par}} + \underbrace{B \sin n\theta}_{\text{Parte Ímpar}}, \quad (62)$$

onde n é um número inteiro. As constantes A e B de (62) devem ainda ser determinadas através de condições de contorno.

Organizando os termos da equação (61), ela pode ser escrita como:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - n^2)R = 0. \quad (63)$$

A equação (63) é a chamada equação de Bessel [33]. A solução geral de (63) é dada por:

$$R(r) = C J_n(kr) + D Y_n(kr). \quad (64)$$

A solução $J_n(kr)$, que tem limite finito quando kr tende a zero, é a função de Bessel de primeira espécie de ordem n . A solução $Y_n(kr)$, que não tem limite finito quando kr tende a zero, é a função de Bessel de segunda espécie de ordem n , ou função de Neumann.

A solução geral de (55) é dada por:

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_S + \Psi_A, \quad (65)$$

onde Ψ_S e Ψ_A indicam a parte par e ímpar da solução. Elas são dadas por:

$$\Psi_S(r, \theta) = A_0 J_0(kr) + B_0 Y_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr)] \cos n\theta, \quad (66)$$

$$\Psi_A(r, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [C_n J_n(kr) + D_n Y_n(kr)] \sin n\theta. \quad (67)$$

A solução par (66) pode ser reescrita como[35]:

$$\Psi_S(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr)] \cos n\theta, \quad (68)$$

onde $\epsilon_n = 2 - \delta_{n,0}$ e $\delta_{n,0} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq 0 \\ 1 & \text{para } n = 0 \end{cases}$.

Aplicando a condição de contorno de Dirichlet em $r = a$, exigimos que:

$$\Psi_s(a, \theta) = 0, \quad (69)$$

$$A_n J_n(ka) + B_n Y_n(ka) = 0.$$

Se fizermos,

$$-\frac{B_n}{A_n} = \frac{J_n(ka)}{Y_n(ka)} = F_n(ka). \quad (70)$$

Podemos substituir (70) em (68). Para todos os valores de θ teremos:

$$\Psi_s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n A_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \cos(n\theta). \quad (71)$$

As variáveis r e θ podem ser expressas em termos de r' e θ' a partir de transformações de coordenadas. Entretanto, a condição de contorno:

$$\Psi_s(r, \theta) \Big|_{r=b} = 0, \quad (72)$$

para todos os valores de θ' na Equação (71) não levará a uma equação apropriada para a determinação de k . Assim, nós primeiramente expandimos a função $\Psi_s(r, \theta)$ em uma série de Fourier cosseno em θ' :

$$\Psi_s(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m a_m \cos m\theta', \quad (73)$$

onde ϵ_m é definido da mesma forma que em (68) e a_m é dado por

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_s(r, \theta) \cos m\theta' d\theta' \quad (74)$$

ou
$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n A_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \cos n\theta \cos m\theta' d\theta'. \quad (75)$$

Definindo:

$$Q_{nm} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \cos n\theta \cos m\theta' d\theta' \quad (76)$$

e substituindo (75) em (73),

$$\Psi_s = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\theta' \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n A_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \cos n\theta \cos m\theta' d\theta' \right). \quad (77)$$

Podemos trocar a ordem do somatório e da integral e escrever¹:

$$\Psi_s = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n A_n \cos m\theta' \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [J_n(kr) - F_n(ka)Y_n(kr)] \cos n\theta \cos m\theta' d\theta' \right). \quad (78)$$

O termo entre parênteses da relação anterior é exatamente Q_{nm} dado pela Eq. (76).

Deste modo,

$$\Psi_s(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n A_n Q_{nm} \cos m\theta'. \quad (79)$$

Usando a condição de contorno (72)

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n A_n Q_{nm} \cos m\theta' = 0. \quad (80)$$

Isto requer que em $r'=b$:

$$\det|Q_{nm}| = 0. \quad (81)$$

Esta é a equação básica, encontrada nas referências [35] e [36], cuja solução fornece vários valores de k , e assim os correspondentes coeficientes A_n podem ser então determinados. Nós poderíamos encontrar Q_{nm} definido pela equação (76) numericamente, já que r e θ são funções de r' e θ' . Agora, nós mostraremos que usando o teorema da adição das funções de Bessel, consegue-se uma forma analítica para $Q_{n,m}$.

Nosso objetivo agora é transferir o sistema de referência para O' (centro do círculo externo). Para isto, primeiramente apresentaremos a fórmula de Graf [34], p.360-361, que é derivada das relações do triângulo da Fig. 18.

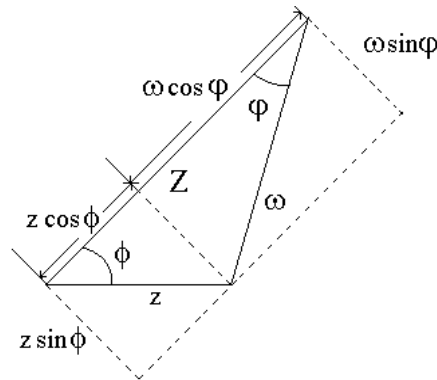


FIGURA 18

¹ Para fazer a troca é preciso garantir que a série convirja. E este é o caso, pois ela é uma série de Fourier, que é uma série de auto-funções de um operador auto-adjunto.

–Fórmula de Graf:

$$e^{in\phi} J_n(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(Z) J_p(z) e^{ip\phi}, \quad (82)$$

$$\text{onde } \begin{cases} Z - z \cos \phi = \omega \cos \phi \\ z \sin \phi = \omega \sin \phi \end{cases}. \quad (83)$$

Desejamos escrever uma equação semelhante à (82) envolvendo as variáveis do nosso problema. Com este objetivo, na Fig. 19 ampliamos o triângulo OPO da Fig. 17, porém na condição que $r'=b$ (a mesma condição utilizada na Eq. (81)). Comparando o triângulo $O'PO$ nestas condições com o triângulo da Fig. 17, identificamos:

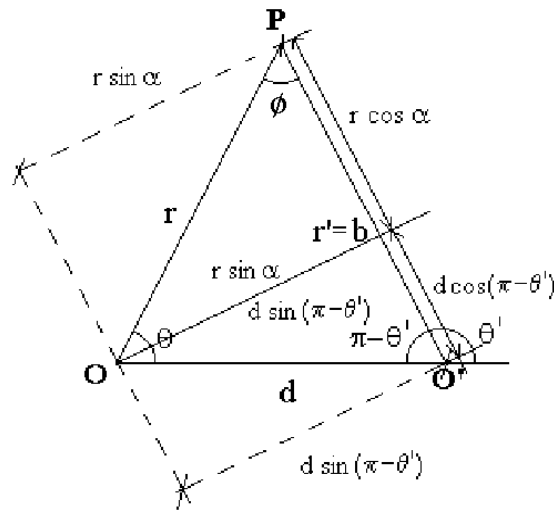


FIGURA 19. Geometria no interior do bilhar da fig. 17, utilizada para aplicar a Fórmula de Graff.

$$\begin{cases} b - d \cos(\pi - \theta') = r \cos \phi \\ d \sin(\pi - \theta') = r \sin \phi \end{cases}. \quad (84)$$

A Eq. (84) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} b + d \cos \theta' = r \cos \phi \\ d \sin \theta' = r \sin \phi \end{cases}. \quad (85)$$

A partir das relações (82), (83) e (85), escrevemos:

$$Z_n(kr) \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_{n+p}(kb) J_p(kd) \frac{-\cos p\theta'}{\sin p\theta'}, \quad (86)$$

onde Z_n pode ser J_n ou Y_n .

Agora, utilizamos a transformação de coordenadas retirada do triângulo da Fig.19:

$$\theta = \theta' - \phi:$$

$$\cos n\theta = \cos[n(\theta' - \phi)] = \cos n\theta' \cos n\phi + \sin n\theta' \sin n\phi. \quad (87)$$

Queremos escrever a relação (76) de outra maneira, envolvendo apenas as variáveis sem “'”. Reescrevendo a Eq. (76)

$$Q_{nm} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [J_n(kr) - F_n(ka)Y_n(kr)] \cos n\theta \cos m\theta' d\theta'. \quad (76)$$

Agora, utilizamos a relação (87) para escrever,

$$\begin{aligned} J_n(kr) \cos n\theta &= J_n(kr)(\cos n\theta' \cos n\phi + \sin n\theta' \sin n\phi) \\ &= \cos n\theta' [J_n(kr) \cos n\phi] + \sin n\theta' [J_n(kr) \sin n\phi] \end{aligned} \quad (88)$$

e

$$\begin{aligned} Y_n(kr) \cos n\theta &= Y_n(kr)(\cos n\theta' \cos n\phi + \sin n\theta' \sin n\phi) \\ &= \cos n\theta' [Y_n(kr) \cos n\phi] + \sin n\theta' [Y_n(kr) \sin n\phi] \end{aligned} \quad (89)$$

Aplicando (86) nas expressões entre colchetes na relação (88),

$$J_n(kr) \cos n\theta = -\cos n\theta' \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) \cos(p\theta') \right] + \sin n\theta' \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) \sin(p\theta') \right]. \quad (90)$$

Colocando em evidência o fator $\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd)$, escrevemos

$$\begin{aligned} J_n(kr) \cos(n\theta) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\cos(n\theta') \cos(p\theta') + \sin(n\theta') \sin(p\theta')] \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\cos(n+p)\theta'] \end{aligned} \quad (91)$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos:

$$Y_n(kr) \cos(n\theta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\cos(n+p)\theta']. \quad (92)$$

Substituindo (91) e (92) em (76), segue,

$$Q_{nm}(r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} [J_{n+p}(kb) - F_n(ka)Y_{n+p}(kb)] J_p(kd) [\cos(n+p)\theta'] \cos m\theta' d\theta'. \quad (93)$$

Mas,

$$\int_0^\pi \cos[(n+p)\theta'] \cos m\theta' d\theta' = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m+p)\pi}{n-m+p} + \frac{\sin(n+m+p)\pi}{n+m+p} \right]. \quad (94)$$

E como m, n e p são índices inteiros, segue:

$$\int_0^\pi \cos[(n+p)\theta'] \cos m\theta' d\theta' = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } p = m-n \text{ e } p = -m-n \\ 0 & \text{para outros casos} \end{cases}. \quad (95)$$

Para atender as condições em que a integral (95) assume valores não nulos, tomamos primeiramente $p = m - n$ e substituímos em (93)

$$Q_{nm} = \frac{2}{\pi} [J_{n+m-n}(kb) - F_n(ka)Y_{n+m-n}(kb)] J_{m-n}(kd) \frac{\pi}{2}, \quad (96)$$

$$Q_{nm} = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] J_{m-n}(kd). \quad (97)$$

Agora, tomamos $p = -m - n$ e substituímos em (93)

$$Q_{nm} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [J_{n-m-n}(kb) - F_m(ka)Y_{n-m-n}(kb)] J_{-m-n}(kd) \frac{\pi}{2}, \quad (98)$$

$$Q_{nm} = [J_{-m}(kb) - F_n(ka)Y_{-m}(kb)] J_{-m-n}(kd). \quad (99)$$

Lembrando que $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$, a equação (99) torna-se:

$$\begin{aligned} Q_{nm} &= (-1)^m [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] (-1)^m (-1)^n J_{m+n}(kd) \\ &= (-1)^{2m} [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] (-1)^n J_{m+n}(kd). \end{aligned}$$

Mas como n é positivo (par ou ímpar), $(-1)^{2m} = 1$.

Portanto,

$$Q_{nm} = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] (-1)^n J_{m+n}(kd). \quad (100)$$

Para que as situações de (95) sejam atendidas, devemos somar (97) e (100):

$$Q_{nm} = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] \times [J_{m-n}(kd) + (-1)^n J_{m+n}(kd)], \quad (101)$$

com $n = 0, \dots, \infty$ e $m = 0, \dots, \infty$.

Agora vamos considerar a parte ímpar da solução da equação (65) dada por

$$\Psi_A(r, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [C_n J_n(kr) + D_n Y_n(kr)] \sin n\theta, \quad (102)$$

onde C_n e D_n são constantes de integração.

Aplicando a condição de contorno de Dirichlet em $r = a$, exigimos que:

$$\Psi_A(a, \theta) = 0, \quad (103)$$

$$C_n J_n(ka) + D_n Y_n(ka) = 0.$$

Se fizermos,

$$-\frac{D_n}{C_n} = \frac{J_n(ka)}{Y_n(ka)} = F_n(ka). \quad (104)$$

Podemos substituir (104) em (102), e para todos os valores de θ , teremos:

$$\Psi_A(r, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \sin(n\theta). \quad (105)$$

Agora, nós expandimos a função $\Psi_A(r, \theta)$ em uma série de Fourier seno em θ ':

$$\Psi_A(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\theta' \quad (106)$$

e b_m é dado por

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_A(r, \theta) \sin m\theta' d\theta' \quad (107)$$

ou

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \sin n\theta \sin m\theta' d\theta'. \quad (108)$$

Definindo:

$$Q_{nm}^A = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \sin(n\theta) \sin(m\theta') d\theta'. \quad (109)$$

e substituindo (108) em (106),

$$\Psi_A = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \sin(n\theta) \sin(m\theta') d\theta' \right) \sin(m\theta'). \quad (110)$$

Podemos trocar a ordem da série (como feito para a solução par) e reescrevê-la

$$\Psi_A = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_m \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [J_n(kr) - F_n(ka) Y_n(kr)] \sin(n\theta) \sin(m\theta') d\theta' \right) \sin(m\theta'). \quad (111)$$

Substituindo o valor de Q_{nm}^A dado pela Eq. (104), teremos:

$$\Psi_A(r, \theta) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_m Q_{nm}^A(r') \sin m\theta'. \quad (112)$$

Usando a condição de contorno (72) aplicada a Ψ_A , obtém-se:

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{nm}^A(r'=b) \sin m\theta' = 0. \quad (113)$$

Isto requer que:

$$\det[Q_{nm}^A(r'=b)] = 0. \quad (114)$$

Agora, utilizamos a transformação de coordenadas retirada do triângulo da Figura

19: $\theta = \theta' - \phi$:

$$\sin n\theta = \sin[n(\theta' - \phi)] = \sin n\theta' \cos n\phi - \cos n\theta' \sin n\phi. \quad (115)$$

Queremos escrever a relação (109) de uma outra maneira, envolvendo apenas as variáveis sem “' ”.

Agora, utilizamos a relação (115) para escrever,

$$\begin{aligned} J_n(kr)\sin(n\theta) &= J_n(kr)(\sin n\theta' \cos n\phi - \cos n\theta' \sin n\phi) \\ &= \sin n\theta' [J_n(kr) \cos n\phi] - \cos n\theta' [J_n(kr) \sin n\phi] \end{aligned} \quad (116)$$

e

$$\begin{aligned} Y_n(kr)\sin(n\theta) &= Y_n(kr)(\sin n\theta' \cos n\phi - \cos n\theta' \sin n\phi) \\ &= \sin n\theta' [Y_n(kr) \cos n\phi] - \cos n\theta' [Y_n(kr) \sin n\phi] \end{aligned} \quad (117)$$

Aplicando (86) nas expressões entre colchetes na relação (117),

$$J_n(kr) \cos n\theta = \sin n\theta' \left[- \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) \cos(p\theta') \right] - \cos n\theta' \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) \sin(p\theta') \right]. \quad (118)$$

Colocando em evidência o fator $\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd)$, escrevemos

$$\begin{aligned} J_n(kr) \cos(n\theta) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\sin(n\theta') \cos(p\theta') - \cos(n\theta') \sin(p\theta')] \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\sin(n+p)\theta'] \end{aligned} \quad (119)$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos:

$$Y_n(kr) \sin n\theta = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+p}(kb) J_p(kd) [-\sin(n+p)\theta']. \quad (120)$$

Substituindo (119) e (120) em (109), segue,

$$Q_{nm}^A(r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [J_{n+p}(kb) - F_n(ka) Y_{n+p}(kb)] J_p(kd) [\sin(n+p)\theta'] \sin m\theta' d\theta'. \quad (121)$$

Mas,

$$\int_0^{\pi} \sin[(n+p)\theta'] \sin m\theta' d\theta' = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(n+m+p)\pi}{n+m+p} + \frac{\sin(m-n-p)\pi}{m-n-p} \right] \quad (122)$$

e como m, n e p são índices inteiros, segue:

$$\int_0^{\pi} \sin[(n+p)\theta'] \sin m\theta' d\theta' = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } p = m - n \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } p = -n - m \\ 0 & \text{para outros casos} \end{cases} \quad (123)$$

Para atender as condições em que a integral (123) assume valores não nulos, tomamos primeiramente $p = m - n$ e substituímos em (121):

$$Q_{nm}^A = \frac{2}{\pi} [J_{n+m-n}(kb) - F_n(ka)Y_{n+m-n}(kb)] J_{m-n}(kd) \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad (124)$$

$$Q_{nm}^A = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] J_{m-n}(kd). \quad (125)$$

Agora, tomamos $p = -m - n$ e substituímos em (121):

$$Q_{nm}^A = \frac{2}{\pi} [J_{n-m-n}(kb) - F_n(ka)Y_{n-m-n}(kb)] J_{-m-n}(kd) \left(-\frac{\pi}{2} \right), \quad (126)$$

$$Q_{nm} = -[J_{-m}(kb) - F_n(ka)Y_{-m}(kb)] J_{-m-n}(kd). \quad (127)$$

Lembrando que $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$, a equação (127) torna-se:

$$\begin{aligned} Q_{nm}^A &= -(-1)^m [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] (-1)^m (-1)^n J_{m+n}(kd) \\ &= (-1)^{2m} [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] \times [-(-1)^n J_{m+n}(kd)] \end{aligned}$$

Mas como n é positivo (par ou ímpar), $(-1)^{2m} = 1$ e $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Portanto,

$$Q_{nm}^A = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] (-1)^{n+1} J_{m+n}(kd). \quad (128)$$

Para que as situações de (123) sejam atendidas, devemos somar (125) e (128):

$$Q_{nm}^A = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] \times [J_{m-n}(kd) + (-1)^{n+1} J_{m+n}(kd)]. \quad (129)$$

com $n = 1, \dots, \infty$ e $m = 1, \dots, \infty$.

Percebemos que as expressões (101) e (129) diferem de onde começa a soma em n e m e também por um sinal antes do termo $J_{m+n}(kd)$.

Assim, pelas equações (101) e (111) encontramos soluções k^+ e k^- , respectivamente que zeram os determinantes (81) e (114). Se k^+ e k^- forem iguais, os níveis são degenerados. Se $k^+ \neq k^-$ existe um espaçamento entre os níveis, chamado “splitting”. O “splitting” é dado pela expressão:

$$\Delta k = k^+ - k^-. \quad (130)$$

2.3.1. Caso concêntrico:

Para o caso concêntrico ($d = 0$), além da energia, devido à simetria de rotação, o momento angular L é conservado também. Resolvendo a equação de Schrödinger para o caso concêntrico, encontramos os valores $k_{n,m}$ ($n = 0,1,2,\dots$, $m = 1,2,3,\dots$) (números de onda), que são soluções da equação:

$$J_n(kb) - F_n(ka)Y_n(kb) = 0, \quad (131)$$

n , relacionado com a ordem das funções de Bessel, caracteriza o momento angular e m , relacionado com a raiz das funções de Bessel, caracteriza o número quântico radial. Para este caso, as auto-funções correspondentes:

$$\Phi_{n,m}(r, \theta) = G_{n,m} \left[J_n(k_{n,m}r) - \frac{J_n(k_{n,m}a)}{Y_n(k_{n,m}a)} Y_n(k_{n,m}r) \right] \times \begin{cases} \cos n\theta & n = 0,1,\dots \text{ estados pares} \\ \sin n\theta & n = 1,2,\dots \text{ estados impares} \end{cases}, \quad (132)$$

onde $G_{n,m}$ é a constante de normalização. Exceto para momento angular igual a zero ($n = 0$), que são singletos, todos os outros estados são dubletos.

Vamos considerar o comportamento das soluções (101) e (129) no limite em que d tende a zero. Para isto, reescrevemos as Eqs. (96) e (124):

$Q_{nm} = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] \times [J_{m-n}(kd) + (-1)^n J_{m+n}(kd)] \quad (101)$ com $n = 0, \dots, \infty$ e $m = 0, \dots, \infty$. $Q_{nm}^A = [J_m(kb) - F_n(ka)Y_m(kb)] \times [J_{m-n}(kd) + (-1)^{n+1} J_{m+n}(kd)] \quad (129)$ com $n = 1, \dots, \infty$ e $m = 1, \dots, \infty$.

Os termos $[J_{m-n}(kd) + (-1)^n J_{m+n}(kd)]$ e $[J_{m-n}(kd) + (-1)^{n+1} J_{m+n}(kd)]$ só assumem valores não nulos para $m=n$ ou $m=n=0$, pois $J_p(0) \neq 0$ somente para $p=0$. Isto impõe que (101) e (129) só terão valores não nulos para $m=n$ ou $m=n=0$ (singletos da Eq. (101)).

Estas características podem ser escritas como:

$$Q_{n,m} = Q_{n,m} \delta_{n,m}. \quad (133)$$

Assim,

$$Q_n = J_n(kb) - F_n(ka)Y_n(kb) \quad (134)$$

Ela coincide com a solução radial encontrada pela resolução da Eq. de Schrödinger para o caso concêntrico (132). O determinante se reduz a uma equação, cujos zeros fornecem os valores de $k_{n,m}$.

Para o caso não-concêntrico, $d \neq 0 (> 0)$, o momento angular não é mais conservado. Entretanto o sistema ainda possui uma simetria discreta: ele é simétrico com respeito à linha que une os centros dos dois círculos. É por isso que os autoestados de (55) são pares ou ímpares com respeito a esta simetria.

Devemos mencionar que a resolução da equação (55) foi feita com a origem no centro do círculo interno e então se transferiu a solução para a origem no centro do círculo externo. Se tivéssemos procedido de outra maneira, ou seja, resolver o problema com relação ao círculo externo primeiramente e depois transferir a solução para o círculo interno, permitiríamos que $Y_n(x)$ tivesse um valor infinito em $x=0$. Por isso, não conseguiríamos obter uma forma analítica para (81) como (101) e (129).

A precisão dos resultados é melhorada pelo aumento de termos incluídos na expansão de Fourier, isto é, pelo aumento da ordem dos determinantes (81) e (114).

Em resumo, o objetivo então é encontrar os valores de k que zeram os determinantes (81) e (114). Estes valores irão formar o espectro de energias do sistema, já que a relação entre k e E é dada por $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Um teste para checar os resultados numéricos pode ser feito tomando $N(k)$ como sendo a função escada (número de estados com um vetor de onda menor ou igual a k). Para o bilhar anular, o valor médio $\langle N(k) \rangle$ de $N(k)$ é dado por [31], p. 259:

$$\langle N(k) \rangle = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{A}k^2 - \mathcal{L}k), \quad (135)$$

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{4\pi} \left(\mathcal{A} \frac{2mE}{\hbar^2} - \mathcal{L} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \right) \quad (136)$$

onde $\mathcal{A}$ é a área ($= \pi(b+a)(b-a)$) e $\mathcal{L}$ é o perímetro ($= 2\pi(b+a)$) do bilhar.

3. PROCEDIMENTOS E RESULTADOS

Primeiramente queremos verificar se as características da dinâmica clássica do bilhar não-concêntrico afetam a separação dos dubletos. Para isto, pensamos numa conexão entre as grandezas quânticas, por exemplo, o momento angular “n” e o número de onda “k”, com aquelas do espaço de fases, de forma a localizar os dubletos no espaço de fases.

Assim, escrevemos a expressão para o módulo do momento angular:

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = pr \sin \alpha, \quad (137)$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$ (o mesmo ângulo α de reflexão com relação ao círculo externo numa batida P).

A quantização semiclássica de Einstein-Brillouin-Keller, ou simplesmente EBK, do momento angular fornece[12]:

$$L = n\hbar. \quad (138)$$

Combinando (137) e (138) chegamos a:

$$n\hbar = pr \sin \alpha. \quad (139)$$

Como o momento linear é dado por $p = \sqrt{2ME}$ (M é a massa da partícula) a equação (139) será dada por:

$$\frac{n\hbar}{\sqrt{2ME}} = r \sin \alpha. \quad (140)$$

Mas lembrando que $k = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$ e que $r = b = 1$, concluímos que:

$$\sin \alpha = \frac{n}{k}. \quad (141)$$

Perceba que o lado esquerdo da equação (141) é exatamente a ordenada do espaço de fases S . Por isso, escrevemos:

$$S = \sin \alpha = \frac{n}{k}. \quad (142)$$

Esta expressão permite, uma vez que os vetores de onda são conhecidos e os números quânticos são fixados, localizar a altura do toro quantizado na seção de Poincaré L, S .

Assim, conseguimos localizar um dubleto no espaço de fases. Se $\frac{n}{k}$ for maior que $(a+d)$, o nível localiza-se na região de W.G.O.

É particularmente interessante considerar dubletos correspondentes à família de bilhar representadas pelos parâmetros (a, d) com $a + d = \text{constante}$. De fato, quando a

excentricidade é modificada, embora o toro quantizado permaneça não perturbado, é possível, o aumento ou diminuição da região caótica que se encontra entre eles, na região $|S| < a+d$.

É possível identificar no espectro os dubletos que correspondem aos toros das W.G.O. Por exemplo, podemos usar as seguintes características:

- i) Seus vetores de onda são quase constantes para a família de bilhar (a,d) quando $a+d$ é mantido fixo;
- ii) Seus vetores de onda são muito próximos ao valor correspondente para o caso concêntrico $(a+d,0)$.

Na realidade, a última propriedade é importante, pois permite-nos acompanhar um determinado valor de $k_{n,m}$, solução de (131), para diferentes valores de d . Para o caso não-concêntrico k será aproximadamente $k_{n,m}$ quando o dubleto estiver longe da região $S=a+d$. E se o dubleto estiver muito próximo à fronteira entre integrabilidade e caos $S=a+d$, o valor de k será muito próximo à $k_{n,m}$, apenas quando $d \approx 0$.

Utilizamos o método da bisseção para encontrar as raízes de uma função. Toda a programação foi feita em linguagem Fortran, enquanto os valores das funções de Bessel num ponto e o cálculo do determinante, foram feitos utilizando a biblioteca matemática IMSL.

Os procedimentos utilizados a seguir podem ser esquematizados da seguinte maneira:

- a) O espectro do sistema para o caso concêntrico é obtido encontrando as soluções de (131), para vários valores de n . Para $n=0$, temos os singletos, enquanto para os demais valores de n , os dubletos. A ordem em que as raízes aparecem, para cada família com o mesmo momento angular n , será dada pelos valores de m . Assim, um dubleto é identificado pelo par (n,m) , e uma família de com o mesmo momento angular n , pelos pares (n,m_i) . Para o caso concêntrico todos os dubletos são degenerados, $k_{n,m}^+ = k_{n,m}^-$;
- b) Utilizando (142) localizamos os dubletos no espaço de fases;
- c) Analisaremos apenas os dubletos localizados em $|S| > a+d$, aqueles localizados na região de W.G.O.;
- d) Para o caso não-concêntrico utilizamos os determinantes (81) e (114) para encontrar os valores de k^+ e k^- , respectivamente. Devemos acompanhar o comportamento de k^+ (ou k^-) com a variação de d . Se os níveis estiverem no limite semiclássico, a variação de d deve ser muito refinada, pois a densidade de níveis é maior e isto garante que não confundamos o nível que nos interessa com um outro, localizado muito próximo. A variação

de d deve começar muito próximo de $d=0$, onde k^+ ou k^- serão aproximadamente $k_{n,m}$ (caso concêntrico).

e) Tendo os valores de k^+ e k^- , podemos proceder às análises computando os valores dos “splittings” $\Delta k = k^+ - k^-$.

Aqui é momento de comentarmos sobre a precisão dos cálculos numéricos. Sabemos que as soluções para o caso não-concêntrico são obtidas a partir da resolução de determinantes de ordem $n \times m$ ($m=n$) infinita, e o fato do determinante ser truncado para a realização do cálculo numérico, poderia nos fazer pensar que isto afetaria a precisão dos resultados. Mas este problema é contornado da seguinte forma:

O cálculo numérico possui uma precisão máxima de 16 casas decimais. O problema está em considerarmos os valores das funções de $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ quando n é muito grande e simultaneamente x muito pequeno. Nestes casos, truncamos a ordem do determinante, quando todos os elementos de uma determinada linha forem menores que esta precisão de 16 dígitos, ou seja, consideramos um valor máximo de n (ou m), onde pelo menos um elemento de uma determinada linha é maior que 10^{-15} . Isto é suficiente para obtermos valores confiáveis de k^+ e k^- em todos os casos que utilizamos, evitando o aparecimento de falsos autovalores.

Esta precisão é necessária, pois estamos trabalhando com grandezas extremamente pequenas. Quando a perturbação do sistema d é nula, os dubletos são degenerados. Para dubletos altos do espectro (semiclássicos), a quebra da degenerescência dos dubletos ocorre quando caos conecta as regiões de W.G.O. Apenas consideramos “splittings” $\Delta k = k^+ - k^-$ maiores que 10^{-14} , por causa da precisão numérica. Para valores de d que ainda não conectam as regiões de regularidade, os “splittings” podem ser menores que 10^{-14} , mas devido à precisão, eles são considerados nulos e os dubletos degenerados.

Após estas considerações, analisaremos a família de W.G.O. caracterizada pelo momento angular $n=125$. Na Tabela 1, mostramos todos os dubletos localizados sobre toros das W.G.O., que são as soluções do **caso concêntrico** (131), para $n=125$. Cada linha da tabela representa um dubleto identificado por (n,m) . Perceba que eles não aparecem em pares, pois são todos degenerados. Para estes cálculos, consideramos $2M=1$.

TABELA 1 – Autovalores do problema **concêntrico** para a família de W.G.O. identificada por $n=125$, para $a+d=0.45$.

n	m	$k_{n,m}$	$S=n/k$
125	1	134.485355186851600	9.294692334814240E-001
125	2	141.853761375647100	8.811891823508566E-001
125	3	148.057643203629800	8.442657690294471E-001
125	4	153.668639843911600	8.134385787950510E-001
125	5	158.902544866043900	7.866456771059015E-001
125	6	163.869358478538800	7.628027665487607E-001
125	7	168.634385574583400	7.412485868412356E-001
125	8	173.240225664601500	7.215414290789710E-001
125	9	177.716517415269100	7.033673730389014E-001
125	10	182.084875398425500	6.864930419206080E-001
125	11	186.361638967772800	6.707388961180796E-001
125	12	190.559514941133400	6.559630467080814E-001
125	13	194.688614743679400	6.420508983772414E-001
125	14	198.757138766323700	6.289082282823610E-001
125	15	202.771844593540900	6.164563933940844E-001
125	16	206.738377209678000	6.046289116085236E-001
125	17	214.545311196612700	5.826275079274421E-001
125	18	218.393297820677700	5.723618867765679E-001
125	19	222.208517294755000	5.625346927372279E-001
125	20	225.993637364744000	5.531129170608259E-001
125	21	229.751006846530900	5.440672566170625E-001
125	22	233.482705804096900	5.353715581182315E-001
125	23	237.190586237518500	5.270023654093388E-001
125	24	240.876306413630200	5.189385451026941E-001
125	25	244.541365326754600	5.111609638433801E-001
125	26	248.187159586924300	5.036521639880423E-001
125	27	251.815139054778300	4.963958897356376E-001
125	28	255.427274961328000	4.893760856937661E-001
125	29	259.027268612626100	4.825746751278795E-001
125	30	262.622902179858900	4.759676287271892E-001
125	31	266.228850577777700	4.695208642065701E-001
125	32	269.867115138993800	4.631909298604957E-001
125	33	273.562306747408000	4.569342958327148E-001
125	34	277.334066941878600	4.507199615912909E-001

A escolha por $n=125$ se deve ao fato de desejar, a princípio, estar próximo ao limite semiclássico. Não basta escolhermos autovalores com o número de onda “ k ” grande, distante do estado fundamental ($k_{n,m} = k_{0,1} \approx 5.67$), pois a relação $S=n/k$ impõe que “ n ” deve ser também grande, de modo que a razão n/k seja maior que $a+d$, para estudarmos dubletos localizados sobre os toros de W.G.O. Neste regime, o espaçamento entre os níveis é muito pequeno e toda a teoria desenvolvida é melhor aplicada. Para se ter uma idéia de como estes níveis estão afastados do estado fundamental, o dubleto (125,5) é aproximadamente o 2400^o nível, enquanto o dubleto (125,34) ocupa aproximadamente a 7400^a posição no espectro.

Uma outra maneira de visualizarmos os autovalores da Tabela 1 seria fazendo o gráfico da função $f_n(k) = J_n(kb) - F_n(ka)Y_n(kb)$ em função de k , para um n fixo. Onde a função cruzar o eixo de k , ou seja, localizando os zeros (ou raízes) da função, teremos os autovalores do problema concêntrico. É isso que fazemos na Fig.20:

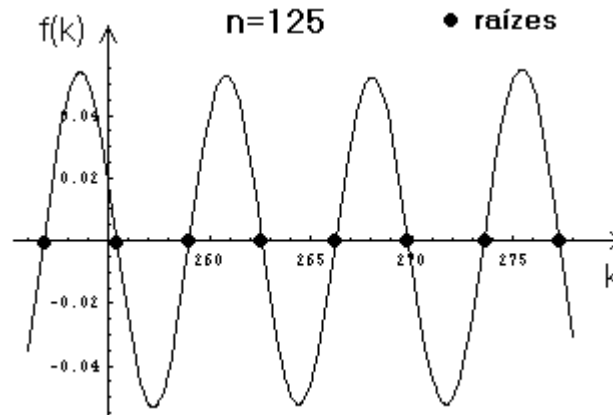


FIGURA 20 - Gráfico da função $f_n(k) = J_n(kb) - F_n(ka)Y_n(kb)$, para $n=125$, num intervalo de k indo de ≈ 250 à ≈ 280 . Neste intervalo, encontramos 8 raízes, que correspondem os autovalores para $n=125$ de $m=27$ à $m=34$.

A partir da Tabela 1, percebemos que para uma mesma família, encontramos dubletos $(125, m_i)$ localizados em toda a região $|S| > a+d = 0.45$.

Por este motivo, investigaremos os comportamentos dos “splittings” para duas regiões distintas do espaço de fases: longe da borda $S=0.45$, onde, por exemplo, estão localizados 3 dubletos: $(125,6)$ e $(125,7)$, $(125,8)$, este último localizado, na realidade, numa região intermediária e também os dubletos localizados próximos à fronteira $S=0.45$: $(125,31)$, $(125,32)$, $(125,33)$ e $(125,34)$. Lembrando que esta fronteira é aquela que separa as regiões de integrabilidade daquela onde pode haver caos no espaço de fases.

O objetivo agora é “acompanhar” os dubletos num intervalo pequeno de d . Trabalharemos no intervalo de $d=[0.06, 0.07]$, pois neste intervalo a dinâmica clássica praticamente não se altera e caos já conecta as regiões de integrabilidade (ver Fig13-c).

As expressões utilizadas para acompanhar os comportamentos dos autovalores “k’s” são (81) e (101) para estados pares, enquanto (114) e (129) são utilizadas para estados ímpares. Para $d=0$, os níveis são degenerados.

Na Tabela 2, selecionamos 7 dubletos da Tabela 1. Eles pertencem à família $n=125$ e possuem diferentes localizações no espaço de fases.

TABELA 2 - Dubletos estudados para $n=125$. Caso concêntrico.

Dublete	n	m	$k_{n,m}$	$S=n/k$
#1	125	5	158.902544866043900	7.866456771059015E-001
#2	125	6	163.869358478538800	7.628027665487607E-001
#3	125	16	206.738377209678000	6.046289116085236E-001
#4	125	31	266.228850577777700	4.695208642065701E-001
#5	125	32	269.867115138993800	4.631909298604957E-001
#6	125	33	273.562306747408000	4.569342958327148E-001
#7	125	34	277.334066941878600	4.507199615912909E-001

Percebemos que os dubletos #1– #3 estão localizados distantes da borda $S=0.45$, enquanto os dubletos #4–#7 possuem uma localização no espaço de fases muito próxima à borda que separa as regiões de W.G.O.

Como ponto de partida, veremos o comportamento dos autovalores k (par ou ímpar) com a variação da excentricidade, d , no intervalo escolhido $d=[0.06,0.07]$ para os dubletos #1, #2 e #3, localizados distantes da borda $|S|=0.45$.

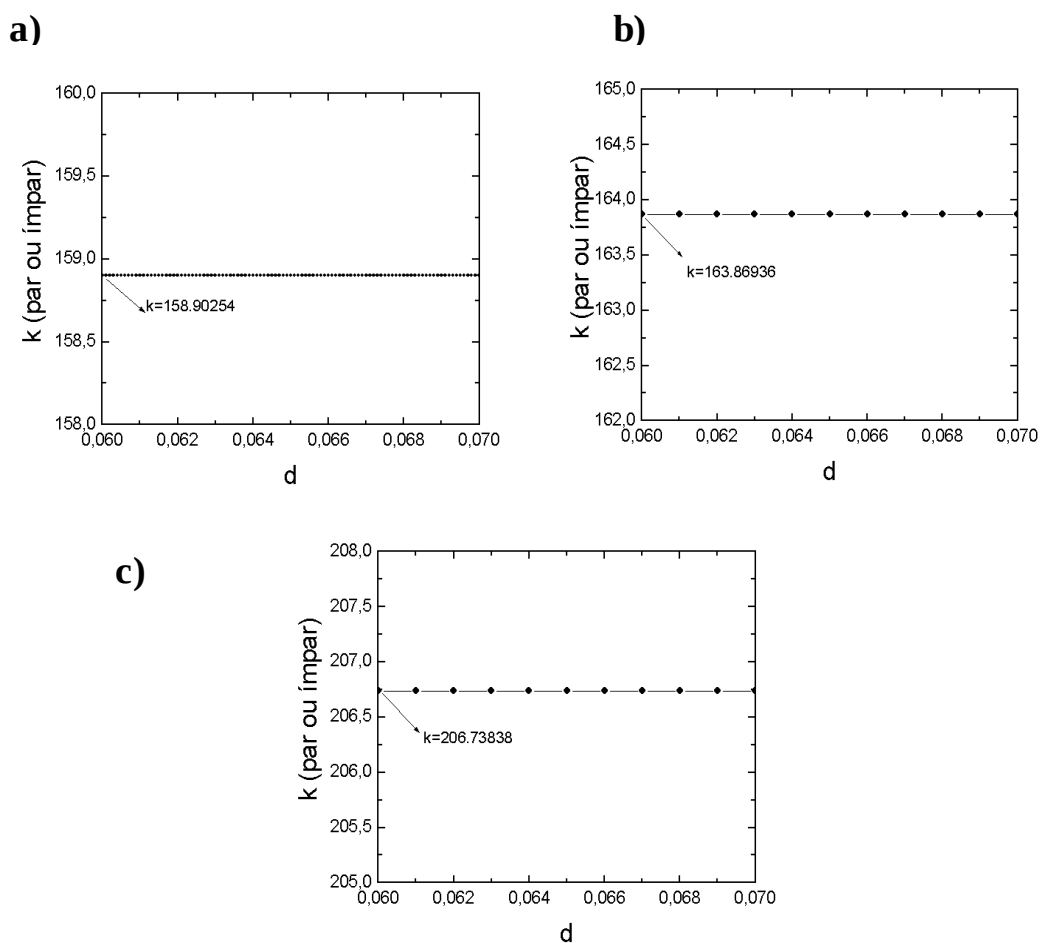


FIGURA 21 - Comportamento dos autovalores com a excentricidade para os dubletos #1, #2 e #3 respectivamente.

Analisando os gráficos anteriores, observamos o mesmo comportamento para os 3 dubletos localizados distantes da região $|S|=0.45$. Os valores de k (par ou ímpar) não variam com o aumento de d , no intervalo considerado $d=[0.06,0.07]$. Aliás, os autovalores neste intervalo de d são os mesmos dos correspondentes autovalores para o caso concêntrico, dentro de nossa precisão de 15 casas decimais. Ou seja, mesmo aumentando a intensidade de caos na região $|S|<0.45$, parece que os dubletos nada sentem. Além disto, constatamos que neste intervalo de d , os níveis permanecem degenerados, ou seja, os “splittings” Δk são nulos, dentro da nossa precisão.

A fim de compararmos o comportamento de k , com a variação de d para dubletos localizados em regiões distintas do espaço de fases, acompanhamos o comportamento dos dubletos #4 e #7 (localizados próximos à fronteira $|S|=a+d=0.45$) no mesmo intervalo de d da Fig.21 $d=[0.06,0.07]$. O valor de k_{par} (ou k^+) diminui com o aumento de d , para os dois dubletos. As diferenças entre as Fig. 21 e 22 mostram que a localização do dubleto no espaço de fases (distantes e próximos à borda $|S|=0.45$) modifica o comportamento dos seus autovalores.

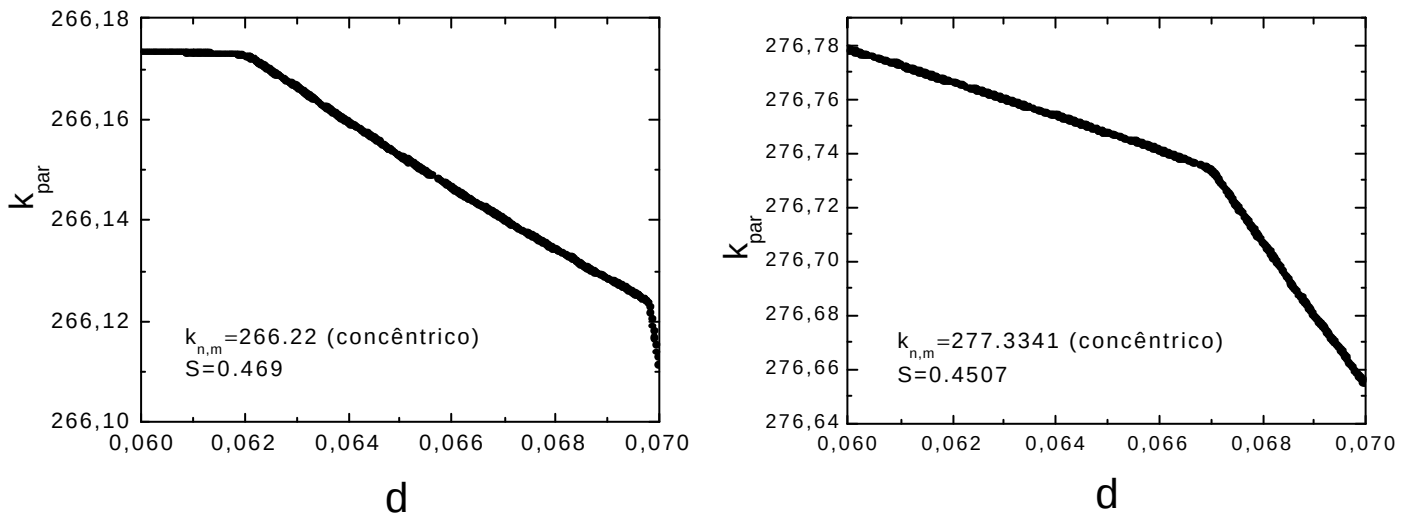


FIGURA 22 - Variação de k com a excentricidade para os dubletos #4 e #7.

Para os dubletos #5 e #6, também localizados próximos à borda $|S|=0.45$, verificamos comportamento semelhante ao mostrado pela Fig. 22. Além disso, para os dubletos de #4-#7 ocorrem “splittings” entre os níveis, no mesmo intervalo de $d=[0.06,0.07]$. Mostramos a variação destes “splittings” com a excentricidade nas próximas figuras, lembrando que apesar de apresentar grandes variações, a grandeza Δk é muito pequena. Por

isso, nos gráficos a seguir, apresentaremos a variação não de Δk , mas sim de $\text{Log}(|\Delta k|)$ com a excentricidade d , no intervalo de $d=[0.06,0.07]$ para os dupletos #4 – #7 da família $n=125$ apresentada na Tabela 2.

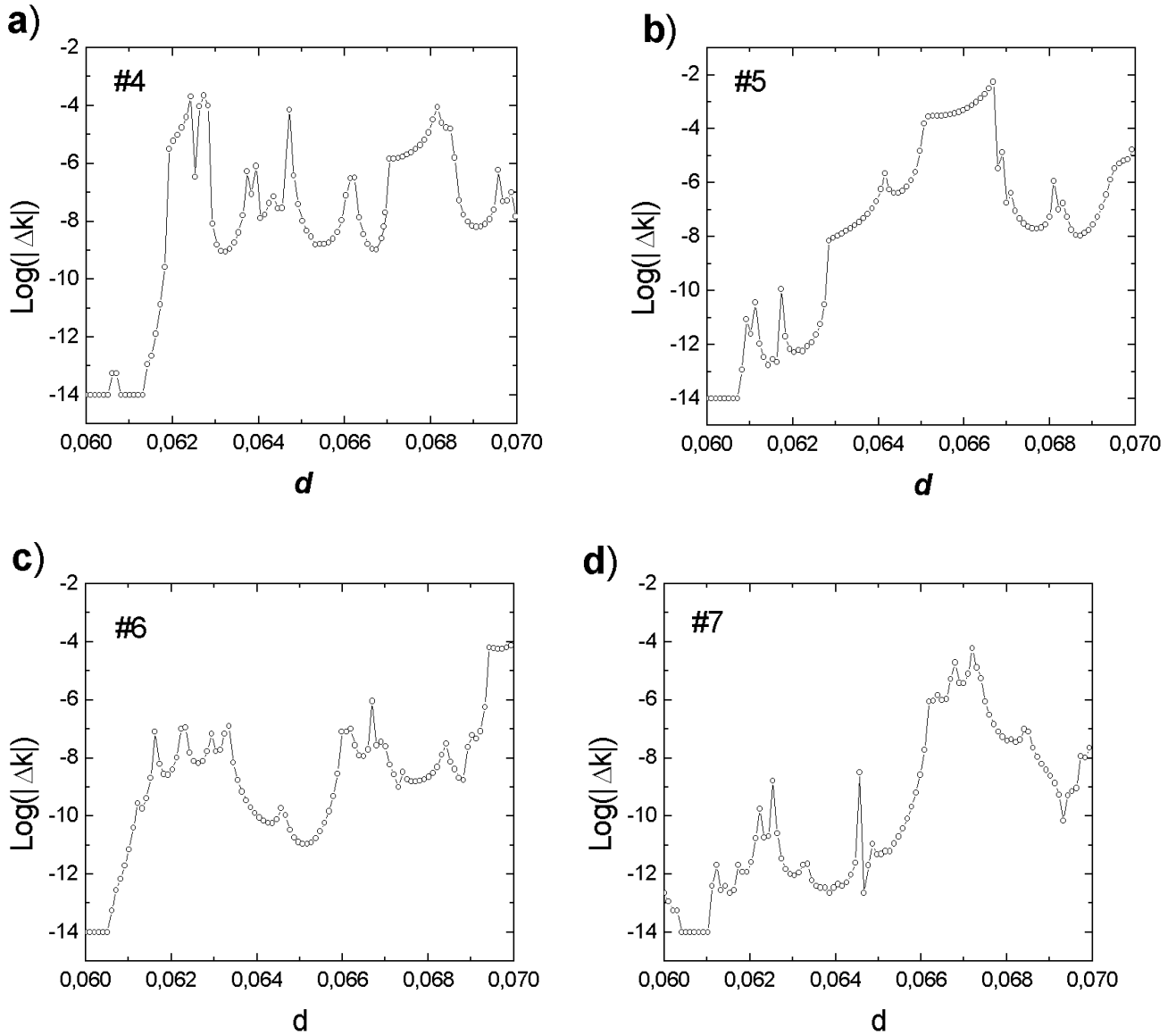


FIGURA 23 - Variação de $\text{Log}|\Delta k|$ com a excentricidade d no intervalo $[0.06,0.07]$. Em (a) acompanhamos o dupletto #4, em (b) o dupletto #5, em c) e d) os duplettos #6 e #7, respectivamente.

Embora os quatros duplettos possuam localizações próximas no espaço de fases, próximos à borda $S=0.45$, encontramos comportamentos diferentes. Ainda não estão claras as origens destes comportamentos.

Como dissemos no início deste capítulo, estes cálculos requerem uma precisão numérica muito grande. Para se ter uma idéia de quanto estes cálculos são demorados, após alguns testes, os acompanhamentos dos dubletos próximos à região caótica, referentes à Fig. 23, demoraram cerca de três meses num Pentium 4, 2GHz de uso exclusivo. Note que os “splittings” que eram nulos quando $d=0$, variaram muitas ordens de grandeza, com um pequeno aumento de d , onde as regiões de W.G.O. já estão conectadas por caos.

Notamos também grandes flutuações dos “splittings”. Essas flutuações aparecem quando um outro nível se aproxima do dubleto. É exatamente isto que discutiremos na próxima seção.

3.1. Colisão entre 3 níveis

Em [30], Mouchet e Delande mostraram, usando outro modelo, duas possibilidades que podem ocorrer quando um terceiro nível se aproxima de um dubleto. Há repulsão (ou cruzamento evitado) entre o terceiro nível e o nível do dubleto pertencente à mesma simetria (paridade), enquanto o outro nível do dubleto (com paridade diferente) ignora o terceiro nível. Num caso o nível de paridade diferente está entre os outros dois e noutro caso os dois níveis de mesma paridade são vizinhos. Na Fig. 24, reproduzimos uma figura de [30], onde existem estes dois cenários genéricos.

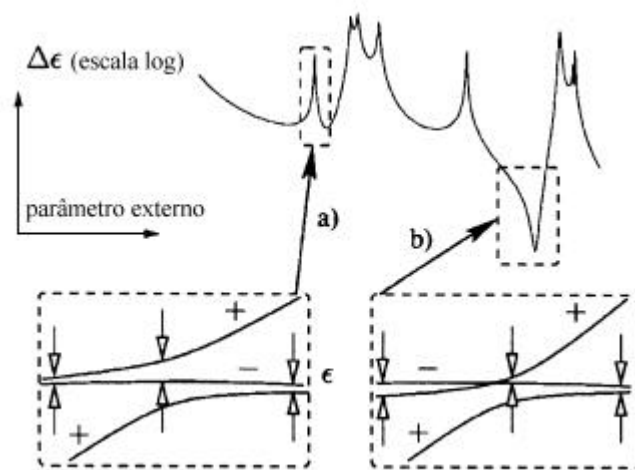


FIGURA 24 – (a) O “splitting” aumenta em razão do “cruzamento evitado”; (b) o “splitting” diminui até desaparecer para um determinado parâmetro.

Além disso, observamos na Fig. 24-(a) uma inversão na localização dos níveis do dubleto. Antes da aproximação, o nível de paridade par se localizava acima do nível de paridade ímpar. Depois da quase-colisão, estas localizações se invertem. O dubleto terá o

nível de paridade ímpar acima do nível de paridade par. Este efeito não ocorre no cenário (b) da Fig.24.

Os cenários apresentados por Mouchet e Delande [30] são teoricamente aceitáveis, porém nos resultados numéricos apresentados na Fig. 23 (a)–(d), encontramos grandes flutuações nos “splittings”, que são explicadas apenas a partir das considerações feitas na Fig. 24 (a). Nestes resultados, não encontramos nenhum pico para baixo, nem mesmo algum valor de d onde o “splitting” se anulasse. Voltaremos a esta questão na próxima seção, adiantando que o cenário do tipo (b) da Fig.24, apesar de aceitável teoricamente não foi encontrado em nossos resultados numéricos.

3.2. Análise estatística dos resultados

Leyvraz e Ullmo [27], em analogia aos ensembles de matrizes aleatórias que descrevem as flutuações espectrais de sistemas classicamente caóticos, ou suas generalizações introduzidas para descrever em parte sistemas caóticos, sugerem construir ensembles de matrizes aleatórias que modelam teoricamente as distribuições de “splittings” devido ao tunelamento caótico num determinado espaço de fases.

Eles encontraram expressões analíticas obtidas teoricamente para representar a distribuição de “splittings” em sistemas mistos, onde o fenômeno de tunelamento dinâmico é o único mecanismo presente, e testaram suas expressões para um determinado modelo, o oscilador quártico. Neste contexto, queremos verificar se o comportamento da distribuição de espaçamentos de dubletos para o bilhar anular excêntrico concorda com o exemplo utilizado em [27] e a partir daí tentar interpretar a aplicabilidade das expressões obtidas por Leyvraz e Ullmo no nosso modelo.

Agora, reproduziremos em linhas gerais, os procedimentos dos autores de [27] até se chegar às fórmulas analíticas.

Eles consideraram um sistema que possui uma simetria discreta P' e cujo tunelamento ocorre entre dois auto-estados Ψ_R^1 e Ψ_R^2 (R relacionado com um dubleto), construídos sobre toros invariantes t_1 e $\tau_2 = P'(\tau_1)$. Os auto-estados pertencem à simetria dada: classe + ou – dependendo se eles são pares ou ímpares sob a ação de P' . Denotamos por Ψ_R^+ e Ψ_R^- as combinações pares e ímpares dos auto-estados Ψ_R^1 e Ψ_R^2 .

Assim:

$$\Psi_R^+ = \frac{\Psi_R^1 + \Psi_R^2}{2} \text{ e } \Psi_R^- = \frac{\Psi_R^1 - \Psi_R^2}{2}.$$

Numa base onde a parte caótica da Hamiltoniana é diagonal, as paridades par e ímpar aparecem respectivamente como:

$$H^+ = \begin{pmatrix} E_R & u_1^+ & u_2^+ & \dots & \dots \\ u_1^+ & E_1^+ & 0 & 0 & \dots \\ u_2^+ & 0 & E_2^+ & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad H^- = \begin{pmatrix} E_R & u_1^- & u_2^- & \dots & \dots \\ u_1^- & E_1^- & 0 & 0 & \dots \\ u_2^- & 0 & E_2^- & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (143)$$

onde os $u_n^\pm$'s são os acoplamentos entre o nível do dubleto de energia E_R e o nível do mar de caos com energia $E_n^\pm$.

Depois da diagonalização de H^+ e H^- , os níveis regulares do dubleto irão se transformar entre E^+ e E^- , respectivamente. Utilizando a relação $k^2=E$ (em unidades onde $2M=1$), teremos o “splitting”:

$$\Delta k = \delta = |k^+ - k^-| \quad (130)$$

A escolha natural para os elementos de matriz de tunelamento $\mathcal{U}_n^\pm$ descrevendo o processo classicamente proibido é tomá-los como variáveis gaussianas independentes com a mesma variância¹ u_t^2 e, na ausência de qualquer barreira, usar para níveis caóticos E_1^+ , E_2^+ ,..., E_1^- , E_2^- ,... os “ensembles” clássicos de Wigner e Dyson que são conhecidos por modelar apropriadamente a estatística espectral de sistemas completamente caóticos [37]. Se existe invariância da simetria de reversão temporal, como assumiremos a seguir, isto significa que deveríamos tomar E_1^+ , E_2^+ ,..., E_1^- , E_2^- ,... como duas seqüências independentes, como uma distribuição dada pelo “ensemble” gaussiano ortogonal (GOE) [37]. Simbolicamente este “ensemble” é denotado por:

$$H^+ = \begin{pmatrix} E_R & \{\mathbf{u}\} \\ \{\mathbf{u}\} & (GOE)^+ \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H^- = \begin{pmatrix} E_R & \{\mathbf{u}\} \\ \{\mathbf{u}\} & (GOE)^- \end{pmatrix}, \quad (144)$$

onde os sobrescritos + e - enfatizam a natureza independente da distribuição. Neste caso, a distribuição de “splittings” $p(\delta)$ é meramente uma lei de Cauchy truncada [37]:

¹ A variância dos elementos da matriz de tunelamento u_t^2 descreve a parte classicamente proibida do processo de tunelamento e atualmente não existe nenhuma maneira teórica de calculá-la.

$$p(d) = \begin{cases} \frac{4u_t}{d^2 + 4pu_t^2} & d < u_t \\ 0 & d > u_t \end{cases} . \quad (145)$$

Este modelo estatístico não pode ser aplicado a qualquer estrutura, tal como barreiras parciais que impedem trajetórias clássicas a percorrerem livremente de uma parte caótica do espaço de fases para uma outra. Em tais configurações clássicas, que são provavelmente genéricas em sistema onde caos e regularidade coexistem, transições de “ensembles” têm sido introduzidos para obter uma descrição estatística correta de estados caóticos. Comparada ao caso onde nenhuma barreira está presente, a distribuição de estados caóticos será modificada de duas maneiras. Primeiramente, cada uma das seqüências de paridade, tomadas separadamente, geralmente não irão mais ser distribuídas como um GOE. Mais importante é que tais barreiras podem induzir correlações fortes entre as duas seqüências de paridades de estados caóticos. Considere um exemplo simples no qual uma barreira parcial separa o mar de caos em duas partes $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ que são imagens simétricas uma da outra sob a simetria discreta P' . Neste caso, o “ensemble” de matriz relevante pode ser simbolicamente reescrito como:

$$H^\pm = \begin{pmatrix} E_R & \{v\} \\ \{v\} & (GOE)_S \pm (GOE)_A(\Lambda) \end{pmatrix} , \quad (146)$$

onde a variância dos elementos de matriz de $(GOE)_S$ é escolhido de tal forma que tenha (na vizinhança de E_R) o mesmo espaçamento médio D entre os estados caóticos, e a variância σ^2 dos elementos de matriz de $(GOE)_A(\Lambda)$ é fixada pelo parâmetro de transporte clássico Λ através de [27]:

$$\frac{\sigma^2}{D^2} \equiv \Lambda . \quad (147)$$

O parâmetro de transporte é dado como um fluxo clássico Φ atravessando uma barreira parcial [27]:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi^2} \frac{g\Phi}{(2\pi\hbar)^{d-1} f_1 f_2} , \quad (148)$$

onde $g=1/2$ é a proporção de estados na classe simétrica correspondente, $f_1 = f_2 = 1/2$ é o volume do espaço de fases da região 1 e 2 e “d” o número de graus de liberdade.

Para barreiras pouco efetivas, Λ é muito maior que um. No extremo oposto, uma barreira perfeita dá $\Lambda=0$, e a parte + e – dos espectros são rigorosamente idênticas. Em particular, os deslocamentos k^+ e k^- sendo os mesmos, dá um “splitting” nulo. Para pequenos, mas finitos Λ , um nível típico E_n^- será geralmente encontrado perto do seu simétrico análogo E_n^+ , embora ligeiramente modificado. Neste caso, embora os deslocamentos k^+ e k^- já estejam distribuídos (lei de Cauchy), eles são fortemente correlacionados. Isto não só muda a escala de δ , mas também a sua distribuição.

Tipicamente, o “ensemble” que descreve a estrutura clássica de um sistema será mais complicado que o exemplo da equação (146). É provável que o transporte de uma ilha regular para sua parte simétrica seja afetada através do efeito de união de toda um conjunto de barreiras moderadamente efetivas do que por uma ação forte de um elemento. Então esperaríamos ter muito mais “ensembles” estruturados com um parâmetro de transporte Λ_n associado com esta barreira. Quando este é o caso, o problema pode ser tratado ainda como descrito acima, porque toda a informação codificada no “ensemble” de transição (que são essencialmente os Λ_n ’s), pode ser resumida por um único parâmetro α_c , que é uma média ponderada da variância de $(E_n^+ - E_n^-)$.

Para verificar a aplicabilidade destas expressões em nosso modelo, consideramos os “splittings” dos 4 dubletos da família $n=125$, apresentados na Fig.23. No intervalo considerado de $d=[0.06,0.07]$ (onde a dinâmica clássica praticamente não se altera), para cada dubleto teremos γ valores diferentes de “splittings”, cada um correspondendo a um certo d .

Para os 4 dubletos teremos 4γ valores de “splittings”. Agrupando todos estes valores de “splittings” formamos o nosso “ensemble”.

O fato de considerarmos dubletos de uma mesma família ($n=125$) e também dubletos localizados muito próximos entre si no espaço de fases, nos permite fazer este agrupamento, introduzindo, inclusive, o conceito de probabilidade no “ensemble”.

A seguir mostramos um gráfico $\log \times \log$, onde no eixo x estão os valores dos “splittings”, enquanto no eixo y a probabilidade de encontrá-los. Então, os pontos do gráfico serão os topos de um histograma, onde queremos verificar a probabilidade de um certo valor de “splitting” ocorrer. Estes pontos são os nossos resultados numéricos que formam o nosso “ensemble”, enquanto a linha cheia, representará a fórmula analítica (151), com $\mu=9000$.

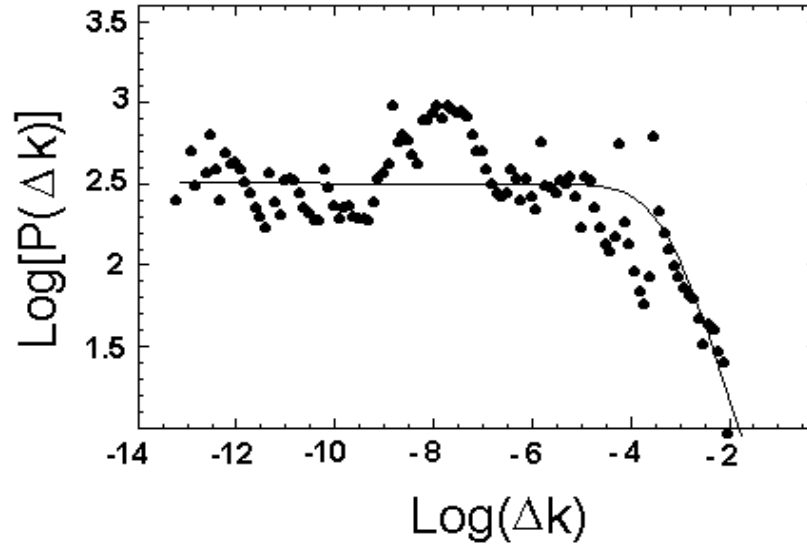


FIGURA 25. Distribuição de “splittings” utilizando dubletos semiclássicos, onde o tunelamento dinâmico é o único fenômeno existente. Os pontos representam os resultados experimentais, enquanto a linha cheia, as previsões analíticas de Leyvraz e Ullmo.

O gráfico mostra que os resultados numéricos flutuam em torno de um valor médio dado pela linha cheia, que são as previsões analíticas de Leyvraz e Ullmo. Verificamos a partir do gráfico, que a probabilidade de encontrarmos grandes “splittings”, da ordem de 10^{-2} , por exemplo, é muito menor de encontrarmos “splittings” da ordem de 10^{-8} .

Os resultados apresentados neste trabalho são teóricos e numéricos, enquanto os resultados apresentados em [30], são experimentais. Assim, não dispomos de métodos para encontrar os valores de α_c, ν_t e D do nosso sistema. Por isso, nos limitamos a encontrar um valor de μ que se ajustasse aos nossos valores numéricos.

Os resultados obtidos por Mouchet e Delande [30] mostram que as fórmulas de Leyvraz-Ullmo fazem previsões corretas também para sistemas quase-integráveis, indicando que tunelamento dinâmico não precisa ser o mecanismo dominante, ou sequer existir. Querendo verificar se este comportamento também ocorre no nosso sistema, estudamos o comportamento de “splittings” de dubletos localizados nas regiões de W.G.O., onde caos ainda **não conecta** as regiões regulares. Para níveis semiclássicos a quebra da degenerescência ocorre apenas quando caos conecta as regiões integráveis (ver Fig.21 e 23). Para observar a quebra de degenerescência num intervalo onde caos ainda não conecta as regiões de W.G.O., investigamos, por exemplo, o dubleto identificado por $(n,m)=(11,3)$, $k_{n,m} \gg 23.5$ (caso concêntrico) e $S \gg 0.4632$, ou seja, localizado numa região mais baixa do espectro, próximo ao estado fundamental. O aparecimento dos “splittings” neste dubleto é devido ao efeito de $\hbar$. Como os níveis estão próximos ao estado fundamental, o espaçamento

médio entre eles é grande, o que influencia a quebra da degenerescência na ausência de caos. Este não é o mesmo efeito observado anteriormente, pois aqui não podemos falar em tunelamento dinâmico ou caótico.

Na Fig. 26-(a), apresentamos o comportamento dos “splittings” Δk para o dubleto $(n,m)=(11,3)$, num intervalo de $d \in [0.03, 0.07]$ e em (b) um resultado numérico do cenário (a) da Fig. 24, responsável pelo aumento do “splitting” do dubleto $(n,m)=(11,3)$ próximo de $d=0.038$.

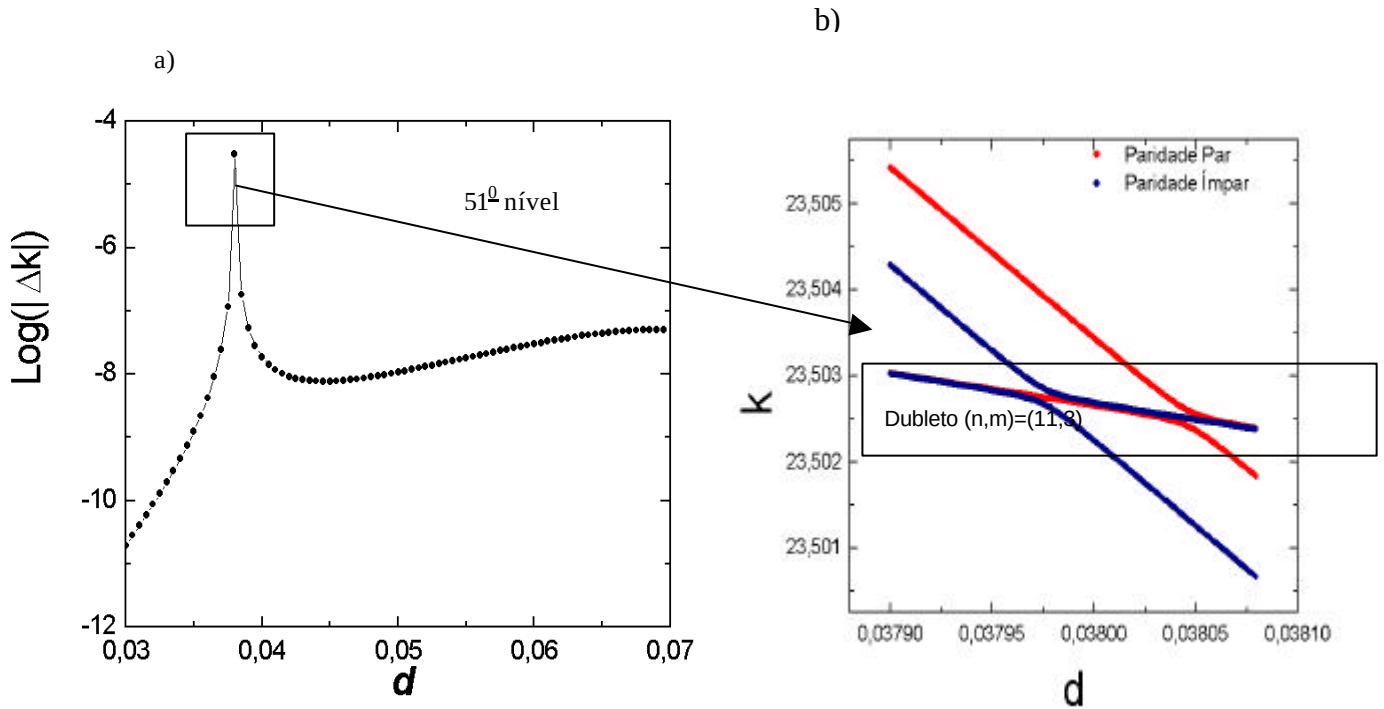


FIGURA 26. (a) Acompanhamento da variação de Δk num intervalo de $d \approx [0.03, 0.07]$, para o dubleto $(n,m)=(11,3)$. (b) Resultado numérico referente ao cenário (a) da Fig.24.

Na Fig.26-(b) vemos que o dubleto $(n,m)=(11,3)$ localizado no interior do retângulo interno, sofre a influência da aproximação de 2 outros níveis. Inicialmente k^+ é maior que k^- do dubleto. O primeiro nível que se aproxima (entre $d=0.03795$ e $d=0.03800$) é de paridade ímpar. Ele irá repelir o nível de mesma paridade do dubleto. Isso ocasionará um primeiro aumento no “splitting”. Logo após este quase-cruzamento, irá acontecer uma inversão nos papéis dos níveis e mudança de sinal do “splitting”. O nível de paridade ímpar que se aproximou irá se correlacionar com o nível de paridade oposta do dubleto e assim k^- será maior que k^+ . Próximo de $d=0.03805$ haverá um outro nível, este de paridade par, se aproximando do dubleto. Novamente este nível irá repelir o nível de mesma paridade do dubleto e isto ocasionará outro aumento no “splitting”. Estes dois quase-cruzamentos num

intervalo de d muito pequeno, ocasionaram uma grande variação do “splitting”, evidenciada pelo retângulo na Fig.26-a.

Como adiantamos no final da seção 3.1., embora teoricamente aceitável, o cenário (b) da Fig. 24 não foi encontrados em nossos resultados numéricos. Porém, encontramos um outro caso, que não foi citado pelos autores de [30] e que pode ser confundido com o cenário (b) da Fig.24. Isto é o que mostramos na Fig. 27.

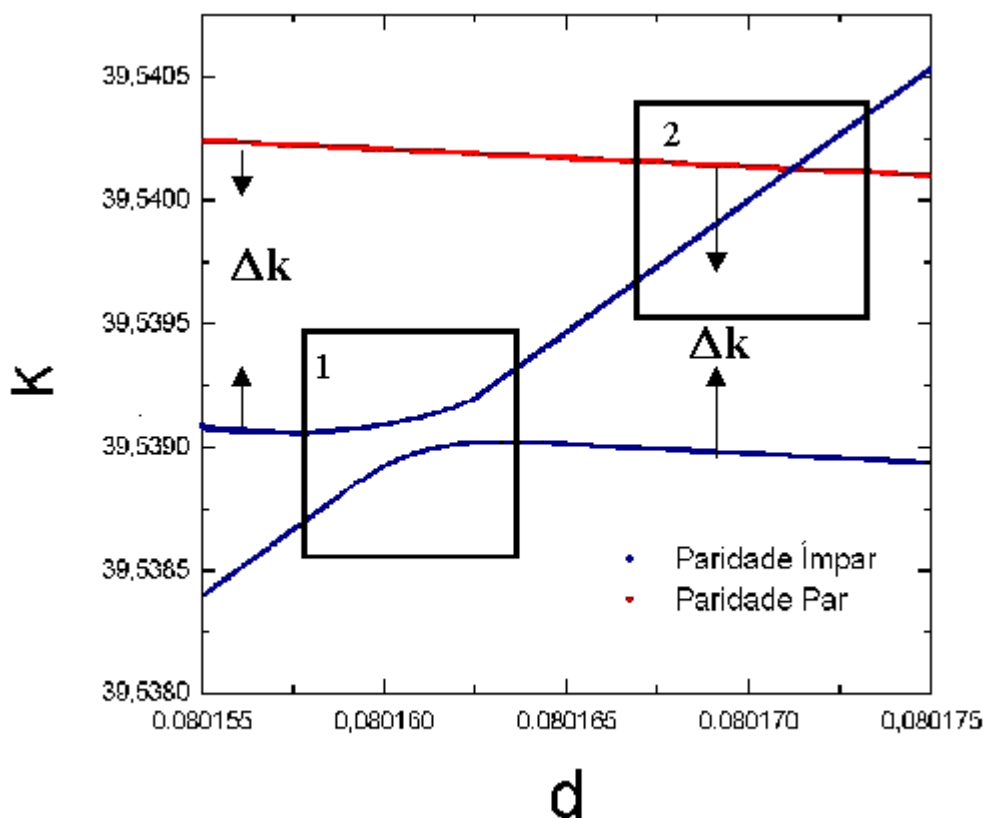


FIGURA 27 – Resultado numérico encontrado em nosso modelo mostrando a aproximação de um nível com um dubleto.

Neste exemplo, um nível de paridade ímpar se aproxima do dubleto. Os dois níveis de mesma paridade são consecutivos (não existe um nível de paridade par separando-os), eles irão se repelir. Com isso, o nível de paridade ímpar do dubleto irá se aproximar do nível de paridade par, cruzando-o. Porém, temos que deixar claro que este cruzamento não ocorre entre os níveis do dubleto, **não** correspondendo, portanto, ao cenário (b) da Fig. 24. Devido à grande perturbação do sistema ($d \gg 0.08$), o “splitting” deste dubleto é grande e como a inclinação do nível que se aproxima não é acentuada, após a repulsão dos níveis de paridade ímpar, o terceiro nível se aproxima lentamente do nível de paridade oposta, porém, o “splitting” do dubleto não varia muito como mostrado entre as setas da Fig.27. Agora fica a

questão: O cenário (b) da Fig. 24 realmente existe, ou poderia ser confundido com o que estamos apresentando aqui?

Agora, seguindo o procedimento apresentado em [30], queremos verificar se os “splittings” deste dubleto obedecem s fórmulas de Leyvraz e Ullmo [27], mesmo num regime onde caos não conecta as regiões regulares.

Abaixo mostramos o resultado que os autores de [30] consideram como surpreendente, pois as fórmulas de Leyvraz e Ullmo que deveriam prever distribuições de “splittings” de dubletos no regime onde existe caos no sistema, caracterizando o tunelamento caótico, parecem também prever o resultado da distribuição quando se considerou dubletos localizados em regiões integráveis e entre elas uma região quase integrável, sem caos.

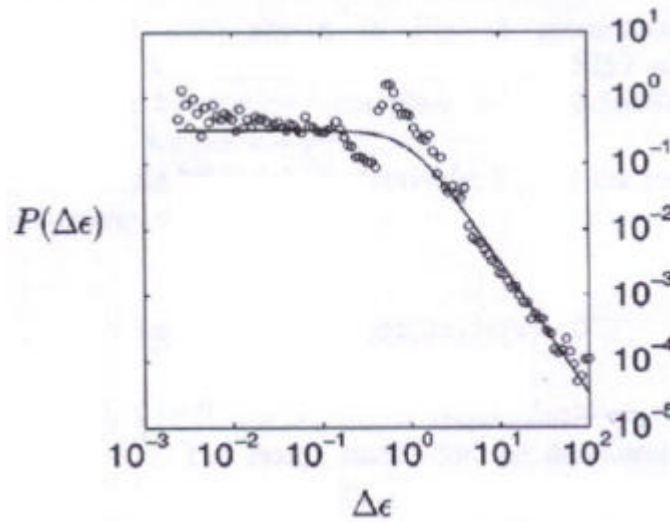


FIGURA 28. Gráfico apresentado em [30], mostrando que os dados obtidos numericamente pelos autores (círculos), considerando um dubleto não conectado por caos estão de bom acordo com as fórmulas de Leyvraz e Ullmo (linha cheia) [27].

Na Fig.29 apresentamos a distribuição de “splittings” para o dubleto $(n,m)=(11,3)$. O gráfico foi feito da mesma forma que aquele apresentado na Fig.25, porém utilizando “splittings” num intervalo de $d=[0.03,0.04]$. Neste intervalo, a dinâmica clássica quase não se altera e caos ainda não conecta as regiões de integrabilidade. Ainda assim, as fórmulas de Leyvraz e Ullmo preveem os resultados numéricos, quando utilizamos a eq. (151), com $\mu=6.5$.

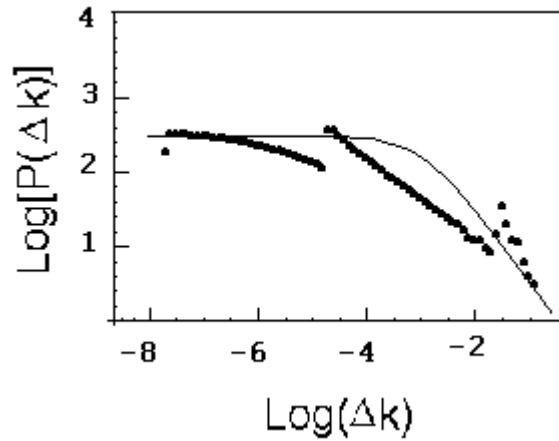


FIGURA 29. Gráfico log-log de $\Delta k \times P(\Delta k)$, para o dupletto $(n,m)=(11,3)$ num intervalo de $d=[0.03,0.04]$. Os pontos representam os resultados numéricos e a linha cheia o resultado previsto por Leyvraz e Ullmo. Neste caso $\mu=6.5$.

As Fig. 25 e 29 mostram que para a distribuição de “splittings” de dupletos do modelo do bilhar anular não-concêntrico, as fórmulas de Leyvraz e Ullmo predizem os resultados numéricos quando consideramos:

- a) dupletos no regime semiclássico e quando caos conecta as regiões de regularidade;
- b) dupletos com localização no espectro próximo ao estado fundamental e quando caos ainda não conecta as regiões de W.G.O.

4. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Quando os dois círculos são concêntricos, devido à existência de duas constantes de movimento (energia cinética e momento angular), a dinâmica em seu interior é integrável, e, portanto, todas as suas órbitas estão presas a toros invariantes. Estas órbitas podem ser periódicas ou ergódicas sobre o toro, dependendo de sua condição inicial (L_0, S_0) .

Quando a excentricidade é não-nula, podem coexistir no sistema estruturas de ressonâncias, caos e regiões integráveis, fazendo parte dos sistemas ditos mistos. A quebra da integrabilidade do sistema ocorre porque o momento angular não é mais conservado. Ainda assim, o sistema irá apresentar comportamento integrável por causa da existência de órbitas que nunca colidem com o círculo interno, portanto, idênticas àsquelas encontradas no bilhar circular (também integrável). Estas órbitas são chamadas Whispering Gallery Orbits, ou simplesmente W.G.O.

A dinâmica discreta do bilhar anular é descrita a partir das coordenadas (L, S) nos pontos de colisão com o círculo externo. Utilizamos um mapa que inclui os dois tipos de movimento que o sistema pode apresentar: Tipo A: a partícula colide duas vezes consecutivas com o círculo externo e Tipo B: entre duas colisões com o círculo externo, ocorre uma colisão intermediária com o círculo interno.

Quando os círculos são não-concêntricos, surge uma região no espaço de fases composta de estruturas de ressonâncias e caos entre as duas regiões integráveis ocupadas pelas W.G.O. A separação destas regiões no espaço de fases ocorre em $S = \pm(a+d)$, onde a é o raio do círculo interno.

Estudando famílias de bilhares onde mantivemos fixa a grandeza $a+d$, conseguimos modificar a intensidade de caos entre as regiões de W.G.O., sem alterar estas regiões, apenas variando o parâmetro d (ver Fig. 13).

Partindo para a análise do problema quântico correspondente, um dos objetivos do trabalho é verificar como as características da dinâmica clássica do sistema afetam sua dinâmica quântica. Neste sentido, resolvemos a equação de Schrödinger para o bilhar anular e encontramos expressões analíticas como solução (81) e (114).

A partir de uma aproximação semiclássica do momento angular, conectamos grandezas quânticas à ordenada do espaço de fases. Isto fez com que localizássemos no

espaço de fases, os autovalores (dubletos) do caso concêntrico.

Ao estudarmos o comportamento de dubletos associados a toros congruentes, em um regime onde caos conecta as regiões de integrabilidade, nossa atenção foi dada ao fenômeno de tunelamento dinâmico, o qual contribuiu para a quebra de degenerescência entre os níveis de energia, dando origens aos “splittings” que estávamos interessados.

Verificamos que apesar do tunelamento ser um fenômeno puramente quântico, ele é fortemente influenciado pela dinâmica clássica. Em particular, confirmamos os resultados obtidos em [25] estudando dubletos semiclássicos (grandes valores de n e de k), onde a ocorrência do fenômeno de cruzamentos evitados é muito grande, devido ao pequeno espaçamento entre os níveis neste regime. Por isso, o termo “tunelamento induzido por caos” muito usado na literatura é substituído pelo termo “tunelamento caótico” [30], uma vez que os espaçamentos dos dubletos podem aumentar ou diminuir quando um nível se aproxima do dubleto.

Apresentamos também resultados numéricos de uma das duas possibilidades que podem ocorrer quando um terceiro nível se aproxima de um dubleto, propostos em [30] (ver Fig.24). Encontramos um cenário que não foi citado por Mouchet e Delande [30] que pode ser confundido com o cenário (b) da Fig. 24. Não encontramos o cenário (b) da Fig. 24 em nossos resultados numéricos. Vale salientar que a natureza deste nível que se aproxima (regular ou caótica) não foi estudada ou identificada, sendo esta uma possibilidade de estudos posteriores.

Pela análise da dinâmica dos “splittings”, os dubletos sentem mais a influência da dinâmica clássica correspondente, quanto mais próxima for sua localização da fronteira entre as regiões de integrabilidade e aquela onde pode haver caos. Além disso, quanto maior a perturbação (d) do sistema, maior é o efeito de tunelamento. Quando caos separa as regiões integráveis, a separação de um dado dubleto pode variar algumas ordens de grandeza dependendo se um estado caótico está perto ou não do dubleto de tunelamento. Isto implica que pequenas mudanças nos parâmetros externos, que deixam a dinâmica clássica quase inalterada, podem mudar muito os “splittings”.

Quando agrupamos “splittings” de dubletos com o mesmo momento angular, localizados muito próximos do mar caótico, num regime onde a dinâmica clássica quase não se altera, o estudo estatístico da distribuição de espaçamentos (ou “splittings”) mostra que as fórmulas de Leyvraz e Ullmo [27] estão em bom acordo com os nossos resultados numéricos, predizendo os resultados quando consideramos dubletos “semiclássicos” e tendo as W.G.O.

conectadas por caos (Fig.25).

Porém, ao estudarmos dubletos localizados numa região mais baixa do espectro, próximos ao estado fundamental e num regime de quase total integrabilidade, nós obtivemos resultados que concordam com os resultados de Mouchet e Delande [30], isto é as fórmulas de Leyvraz e Ullmo também reproduzem corretamente os nossos resultados mesmo quando a dinâmica é quase integrável (Fig. 28). Isto foi surpreendente para os autores de [30], pois a condição principal assumida por [27] é que suas fórmulas eram eficientes quando o sistema em estudo possuía como fenômeno dominante o tunelamento dinâmico.

Este resultado sugere que *caos clássico* parece ser uma *condição suficiente*, mas *não necessária*, para obtermos grandes e numerosas flutuações de "splittings" de dubletos governadas pelas fórmulas de Leyvraz e Ullmo.

Para uma melhor compreensão do assunto seriam necessários estudos posteriores, tentando identificar as causas de tais comportamentos. Para os dois regimes estudados (semiclássico e níveis próximos ao estado fundamental), os parâmetros μ que se ajustaram aos resultados numéricos foram bem diferentes, isto ainda não nos está claro.

Outra possibilidade de continuidade para o nosso estudo pode ser, por exemplo, encontrar todos os parâmetros utilizados por Leyvraz e Ullmo, como o parâmetro de acoplamento ν_t e também o grau de correlação α_C entre os níveis pares e ímpares, que melhor descrevem os resultados numéricos e diferenciando-os dos parâmetros que predizem os resultados quando o sistema é quase-integrável. Essa diferença entre os dois casos é importante, pois num regime onde caos ainda não conecta as regiões de integrabilidade, o termo tunelamento caótico perde o sentido.

REFERÊNCIAS

- [1] J.L. McCauley, **An Introduction to Nonlinear Dynamics and Chaos Theory**. Physica Scripta T20, 1988;
- [2] E.Ott. **Chaos in Dynamical Systems**. Cambridge University Press. 1993;
- [3] R.C. Hilborn, **Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers**. Oxford University Press, 1994;
- [4] O.Bohigas, M.J.Giannoni, Lecture Notes in Physics, 209,1 (1984)
- [5] H. Goldstein, “Conditions for Closed Orbits (Bertrand's Theorem)” and “Proof of Bertrand's Theorem.” §3-6 and Appendix A in Classical Mechanics, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 90-94 and 601-605, 1980.
- [6] C.E. Shannon and W. Weaver, **Mathematical Theory of Communication**, University of Illinois Press, 1949;
- [7] P. Billingsley, **Ergodic Theory and Information**, Robert E. Krieger Publishing Company, 1978;
- [8] L.E. Reichl. **The transition to Chaos**. Springer-Verlag, 1992;
- [9] Ya.G. Sinai, Soviet Math. Dokl. **4** (1963) 1818; Russ. Math. Surv. **25** (1970) 137;
- [10] G.D. Birkhoff, **Dynamical Systems**, Amer. Math. Soc., Providence, 1927.
- [11] G. Benettin and J.M. Strelcyn, Phys. Rev. **A17** (1978) 773;
- [12] O.Bohigas; D. Boosé; R. Egydio de Carvalho; V. Marvulle. Nuclear Physics A, **560**, (1993) 197-210;
- [13] N. Saitô; H. Hirooka; J. Ford; F. Vivaldi; G.H. Walker, Physica **5D** (1982) 273-286;
- [14] M.V. Berry. The Bakerian Lecture, Proc. Roy. Soc. Lond. **A413**, 183 (1987);
- [15] M. V. Berry, Physica Scripta, **40**, (1989), 335-336;
- [16] M. Robnik, J.Phys. **A17** (1984) 1049;
- [17] J. von Neumann and E. P. Wigner, Phys. Zeitschr. **30** (1929) 467;

- [18] E. Teller, J. Phys. Chem. **41** (1937) 109;
- [19] I. C. Percival, J. Phys. B **6** (1973) L229;
- [20] R. Ramaswamy; R.A. Marcus, J. Chem. Phys. **74** (1981) 1379;
- [21] M. V. Berry, **Proceedings of the Les Houches Summer School on Chaotic Behavior of Deterministic Systems**, (North-Holland, Amsterdam, 1981);
- [22] R. A. Marcus, **Horizons in Quantum Chemistry**, edited by K. Fukui e B. Pullmann (Reidel, Dordrecht, 1980), p. 107;
- [23] S. W. McDonald; A. N. Kaufmann, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1189;
- [24] M. J. Davis; E. J. Heller. J. Chem. Phys. **75(1)** (1981);
- [25] O. Bohigas; S. Tomsovic; D. Ulmo. Physics Reports. **223 (2)**, (1993) 43-133;
- [26] W. A. Lin; L. E. Ballentine. Phys. Rev. A **45(6)**, (1992) 3637-3645;
- [27] F. Leyvraz; D. Ullmo. Journal of Physics A. **(29)**, (1996) 2529-2551;
- [28] S. D. Frischat; E.Doron. Physical Review E. **57(2)**, (1998) 1421-1440;
- [29] E. J. Heller. Journal of Physical Chemistry A. **(103)**, (1998) 10433-10444;
- [30] A. Mouchet; D.Delande. Phys. Rev. E **45**, (2003) 046216;
- [31] M. C. Gutzwiller. **Chaos in Classical and Quantum Mechanics**. Springer. 1990;
- [32] C. Cohen-Tannoudji; B. Diu; F. Laloë. **Quantum Mechanics**. vol.1, p.20, Hermann, Paris,1977;
- [33] G. B. Arfken, H.J. Weber. **Mathematical Methods for physicists**, 4th. ed. Academic Press, 1995;
- [34] G. N. Watson. **Treatise on the Theory of Bessel Functions** (Cambridge U. P., London, 1958);
- [35] G. S. Singh; L. S. Kothari. J. Math. Phys. **25(4)**, (1984), 810-811;
- [36] K. Nagaya, J. Sound Vib. **50**, (1977) 545;
- [37] O. Bohigas, M.J. Giannoni, C. Schmit. Phys. Rev. Lett. **52** (1) 1984.