



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Corda Bosônica à Temperatura Finita

Wagner Paniago de Souza

Orientador

Prof. Dra. Maria Cristina Batoni Abdalla

230000003589



Outubro de 2002

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Maria Cristina Batoni Abdalla por toda sua paciência e dedicação ao me orientar durante o tempo dispendido na elaboração deste trabalho, e também incondicionalmente aos amigos Ion Vasile Vancea e Alexandre Leite Gadelha por todas as discussões, esclarecimentos e seminários sobre teoria de cordas e dinâmica de campos térmicos. A todos meus familiares, principalmente aos meus pais por toda compreensão e apoio. Aos professores do IFT pelas aulas que me serviram como base para o estudo do conteúdo apresentado neste material. Agradeço também antecipadamente aos membros da banca examinadora. A todos meus amigos de república pela convivência agradável durante todo o tempo. Aos funcionários do IFT, em particular Marcelo Isniewski, José Francisco e Ana Lucia pela convivência dentro e fora deste instituto. E finalmente à Fapesp pelo seu apoio financeiro que muito contribuiu para a realização deste trabalho.

Resumo

Inicialmente, apresentamos a construção de Umezawa e Takahashi para uma dinâmica de campos térmicos (DCT) e obtemos algumas grandezas estatísticas, tais como o número médio de partículas, entropia e energia livre de Helmholtz para sistemas em equilíbrio térmico. Com o objetivo de aplicarmos estes conceitos em uma teoria de cordas, quantizamos a corda bosônica clássica (aberta e fechada) em um calibre manifestamente covariante e no calibre de cone de luz. Derivamos então uma descrição para a corda à temperatura finita no contexto da DCT. As entropias dos estados associados às equações de movimento da corda aberta com diferentes combinações das condições de contorno de Neumann e Dirichlet são dadas. Discutimos as transformações do espaço do Fock e dos operadores geradas por transformações unitárias de Bogoliubov mais gerais, cujos operadores formam uma álgebra $SU(1, 1)$. Neste contexto, obtivemos também a entropia da corda fechada.

Palavras Chaves: Corda Bosônica e Temperatura Finita

Áreas do Conhecimento: Teoria de Campos

Abstract

Initially, we present the Umezawa and Takahashi's construction known as Thermo Field Dynamics (TFD) and obtain some statistical quantities as the mean number of particles, entropy and Helmholtz's free energy for systems in thermal equilibrium. With the objective of applying these concepts in string theory, we quantize the classical bosonic string (open and closed) in a manifestly covariant gauge and in the light-cone gauge. So, we derive a description for the strings at finite temperature based on the TFD approach. The entropy of the states associated with the equations of motion of the open string with different Neumann and Dirichlet boundary conditions is given. We discuss the Fock space transformations (and of the operators) generated by more general unitary Bogoliubov transformations. The entropy of the closed string is obtained.

Índice

1	Introdução	1
2	Corda Bosônica	4
2.1	Partícula Clássica Relativística	4
2.2	Corda Bosônica Clássica	7
2.2.1	Tensor Energia-Momento	12
2.2.2	Dinâmica da Corda Clássica	13
2.2.3	Equação de Movimento e suas Soluções	14
2.2.4	Álgebra de Virasoro e Estados de Massa para a Corda	17
2.3	Quantização Canônica	20
2.3.1	Álgebra Quântica de Virasoro e Estados Físicos	24
2.3.2	Quantização no Calibre de Cone de Luz	28
3	Dinâmica de Campos Térmicos	39
3.1	Dinâmica de Campos Térmicos - Formalismo Canônico	39
3.1.1	Ensemble de Bósons Livres com Freqüência ω	42
3.2	Formalismo Lagrangiano para os Campos Livres	48
3.3	Entropia	55
3.4	Condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS)	60
3.5	Vácuo Térmico e Axiomas Básicos	60
4	Teoria de Corda à Temperatura Finita	65
4.1	A Entropia dos Estados de uma Corda Bosônica Aberta com Dependência das Condições de Contorno	69
4.2	Corda Bosônica Fechada no Grupo $SU(1,1)$ Térmico	72
4.2.1	Vácuo e Operadores Térmicos para a Corda Fechada	74
4.2.2	Operador Entropia para a Corda Fechada	76
5	Conclusão	78
A	Mapeamento do Vácuo	82

Capítulo 1

Introdução

Este livro tem como objetivo principal apresentar ao leitor os fundamentos da teoria da computação, com ênfase na lógica e na teoria dos conjuntos. O conteúdo é dividido em capítulos que abordam desde os conceitos básicos até tópicos mais avançados, como a complexidade computacional e a teoria da recursão. A abordagem adotada é rigorosa, mas acessível, visando proporcionar uma compreensão sólida dos tópicos tratados. Ao longo do texto, serão utilizados exemplos e exercícios para facilitar a assimilação dos conceitos. Esperamos que este livro seja uma valiosa ferramenta para estudantes e pesquisadores da área de ciência da computação.

Os autores agradecem aos colegas de trabalho e aos alunos que contribuíram para a melhoria deste livro. Também agradecemos à editora por sua confiança e apoio. Este livro é dedicado aos nossos familiares e amigos, que sempre nos incentivaram a buscar o conhecimento.

Os autores: [Nomes dos autores]

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, um dos maiores problemas da física das altas energias foi encontrar uma descrição consistente para o mundo na escala subatômica. Para atingirmos este objetivo, devemos também ser capazes de entender a gravidade tanto no nível clássico quanto no nível quântico. Pode-se dizer que neste século as duas teorias que mais tiveram sucesso neste âmbito foram a teoria quântica de campos e a teoria da relatividade geral. No entanto, estas duas teorias não convivem muito bem quando aplicadas ao mesmo domínio. Neste contexto, a teoria que contém o maior número de características desejáveis é a teoria de cordas. Esta é a teoria quântica na qual seus constituintes fundamentais são objetos matemáticos extensos, unidimensionais, descritos em um espaço-tempo de dimensões superiores. Esta teoria tem uma variedade de aplicações fundamentais em Física Teórica. Atualmente, a mais importante aplicação da teoria de cordas é a unificação de todas as forças fundamentais e partículas elementares em uma única teoria. A idéia básica desta teoria é que toda a matéria é formada por cordas minúsculas; por exemplo, se um elétron é visto como um ponto de 10^{-13} cm , mudando a resolução da escala para 10^{-33} cm , iremos verificar que ele é um objeto extenso como uma corda. A unificação é feita de modo que todas as partículas são formadas por um único tipo de corda, e diferentes tipos de partículas são somente excitações de um mesmo tipo de corda, ou seja, se excitarmos a corda, um modo de excitação será o elétron, o outro um fóton, e assim por diante. Devemos ainda ressaltar que o modo correspondente a um estado de massa nula e spin 2 pode ser identificado com o gráviton, e desta maneira garantimos que a teoria necessariamente contém a gravidade quântica [18, 19, 20, 21].

Para chegarmos nestes resultados, apresentaremos uma breve introdução à teoria relativística da partícula clássica e, em seguida, obteremos a ação de Nambu-Goto para uma corda clássica, a qual possui claramente uma interpretação geométrica, e, a partir desta, deduziremos uma ação mais geral, a ação de Polyakov, e mostraremos

que estas duas são classicamente equivalentes. Analisaremos também as simetrias e invariâncias da ação e obteremos o tensor energia-momento. Além disso, obtaremos e resolveremos a equação de movimento em um dado calibre covariante e sujeita a diferentes condições de contorno, cujas soluções nos fornecem as amplitudes de vibração da corda em termos dos coeficientes do oscilador α_n^μ . Escreveremos também os colchetes de Poisson para as variáveis dinâmicas da corda, centro de massa e para os α_n^μ . A álgebra clássica de Virassoro e os estados de massa para a corda serão também obtidos. Em seguida, quantizaremos a corda bosônica (aberta e fechada) e veremos como o conteúdo de partículas aparece nesta teoria. A quantização (canônica) será realizada tanto em um calibre manifestamente covariante quanto em um não manifestamente covariante (cone de luz) sendo que este possui a vantagem de estar livre de estados de norma negativa. Verificaremos também que para a teoria ter certos aspectos desejáveis, a dimensão do espaço-tempo no qual a corda está imersa deve ser $D = 26$ [18, 19, 20, 21].

Visando estudar alguns aspectos termodinâmicos da teoria de cordas, iremos apresentar no primeiro capítulo o formalismo de Umezawa e Takahashi [1], que consiste basicamente na construção de uma dinâmica para campos térmicos, na qual o vácuo depende da temperatura de tal forma que o valor esperado neste vácuo de uma variável dinâmica de um sistema seja igual à sua média estatística no ensemble *grand canônico*. Neste formalismo, os estados à temperatura finita são mapeados no estado de vácuo à temperatura nula através de uma transformação de Bogoliubov. O formalismo de Umezawa é essencialmente baseado em conceitos quanto-mecânicos e permite ser escrito no formalismo Lagrangiano, podendo ser aplicado em teorias de campos de forma mais abrangente. Em seguida, mostraremos como a dinâmica de campos térmicos pode ser implementada em uma teoria de campos qualquer, partindo de certos axiomas. Iremos aplicar este formalismo para uma teoria de cordas bosônicas. Como iremos verificar, a construção de uma teoria de cordas à temperatura finita via transformações de Bogoliubov conserva muitas das propriedades da teoria de cordas à temperatura nula. A temperatura será introduzida através do mapeamento do vácuo e das soluções das equações de movimento, as quais são expandidas em termos dos coeficientes dos osciladores à temperatura nula nos respectivos vácuo e soluções das equações de movimento à temperatura finita via tais transformações. Deste modo, podemos interpretar a corda térmica como um modelo de excitações de um vácuo térmico bosônico. Calcularemos a entropia do sistema, que é dada pelo valor esperado de um operador definido como operador de entropia. Para cada um dos setores da corda, a entropia do vácuo térmico deve ser calculada para cada uma das direções espaço-temporais, sendo que, devido à sua extensividade, a entropia total é dada pela soma das entropias dos campos escalares

em cada uma das direções.

Analisaremos, para a corda aberta, se as diferentes condições de contorno às quais as equações de movimento podem estar sujeitas interferem nas propriedades termodinâmicas do sistema. Em geral, se um dado estado depende das condições de contorno, a entropia, que é calculada como a média do operador entropia neste estado, também depende. Uma vez que o estado de vácuo da corda bosônica depende das condições de contorno impostas sobre as equações de movimento, desejamos estudar a entropia dos estados associados às soluções gerais das equações de movimento com diferentes combinações das condições de contorno em suas extremidades. Em resumo, construiremos uma dinâmica de campos térmicos para a corda bosônica aberta e calcularemos a entropia dos estados no calibre do cone de luz com dependência explícita das condições de contorno [14]. Isto é importante para a obtenção do vácuo térmico em teoria de cordas e D-branas térmicas no contexto da dinâmica de campos térmicos e o entendimento da entropia das D-branas (que é dada pelo valor médio do operador entropia para a corda bosônica no estado de D-brana térmica) no limite perturbativo da teoria de cordas [11, 12, 13].

Em seguida, introduziremos temperatura em uma teoria de cordas bosônica fechada de um modo um pouco diferente do usado para a corda aberta. Os estados de vácuo e os operadores serão construídos usando o mesmo formalismo da dinâmica de campos térmicos, mas diferindo da construção anterior, pelo fato de que aqui os operadores que mapeiam objetos em $T = 0$ em objetos à temperatura finita é uma combinação linear de operadores que satisfazem a álgebra $SU(1, 1)$ [13]. Segundo [4, 6], podemos definir operadores de Bogoliubov para qualquer teoria, os quais formam uma representação de osciladores do grupo $SU(1, 1)$ para bósons e, se todos estes operadores forem considerados, as transformações térmicas podem ser geradas por uma combinação linear desses geradores do $SU(1, 1)$. Os coeficientes desses geradores determinam se as transformações são ou não unitárias e se as características básicas da dinâmica de campos térmicos são satisfeitas pelos geradores. Uma vez construído o sistema à temperatura finita, obteremos a entropia do sistema neste formalismo do mesmo modo citado acima.

Capítulo 2

Corda Bosônica

2.1 Partícula Clássica Relativística

Inicialmente, vamos descrever a ação de uma partícula puntual clássica relativística. Este estudo servirá para nos guiar na obtenção da ação para a corda bosônica clássica. A partícula está se movendo em um espaço-tempo de coordenadas $(X^0, X^1, \dots, X^{D-1})$, e sua trajetória neste é chamada de linha mundo. A métrica do espaço-tempo usada é a de Minkowski com $D - 1$ autovalores negativos e um positivo.

Sendo $x^\mu(\tau)$ a trajetória clássica da partícula, na qual τ é um parâmetro real que rotula os pontos ao longo da linha mundo no espaço-tempo, então, $\dot{x}^\mu = \partial_\tau x^\mu$ representa a velocidade da partícula (vetor tangente). Sendo a linha mundo parametrizada pelo tempo próprio da partícula, ou seja, $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 1$, então, o momento da partícula é dado por $p^\mu = m\dot{x}^\mu$, onde m é a massa de repouso da partícula. Deste modo, $p^\mu p_\mu = m^2 \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = m^2 = p^2$, portanto

$$p^2 - m^2 = 0. \quad (2.1)$$

Esta é a equação de movimento de uma partícula relativística que nos fornece um vínculo entre a massa de repouso e seu momento, e é conhecida como condição de concha de massa. Agora, se τ é algum outro parâmetro que não o tempo próprio, o momento da partícula será

$$p^\mu = \frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{(\dot{x}^\nu)^2}}. \quad (2.2)$$

Pode-se verificar que p^μ dado pela eq.(2.2) satisfaz à condição de concha de massa, eq.(2.1).

Dada a ação

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(\dot{x}^\mu, x^\mu, \tau), \quad (2.3)$$

o momento p^μ da partícula é dado pela equação $p^\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}$, a qual, quando integrada, resulta em

$$L = -p_\mu \dot{x}^\mu, \quad (2.4)$$

onde p^μ é o momento conjugado de x^μ . Substituindo a eq.(2.2) na eq.(2.4) obtemos

$$L = -m\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}. \quad (2.5)$$

Desta forma, a ação para uma partícula relativística de massa m é

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}, \quad (2.6)$$

onde τ é um parâmetro arbitrário da linha mundo.

Qualquer parametrização da linha mundo é permitida, desde que, como veremos, a ação seja invariante por reparametrização (porque esta representa um objeto geométrico, ou seja, é proporcional ao comprimento invariante da linha mundo). Reparametrizando a eq.(2.6) de τ para τ' temos que: $\tau \rightarrow \tau'$ e $x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau')$. Portanto, diferenciando as coordenadas antigas ($x^\mu(\tau)$) em relação aos novos parâmetros (τ') obtemos

$$\dot{x}^{\mu'} = \frac{\partial}{\partial \tau'} x^\mu(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} = \dot{x}^\mu \partial_{\tau'} \tau, \quad (2.7)$$

e a diferencial de τ' é

$$d\tau' = \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.8)$$

Então, uma nova ação (S') escrita em termos dos novos parâmetros será

$$S' = -m \int d\tau' \sqrt{\dot{x}^{\mu'} \dot{x}_{\mu'}}. \quad (2.9)$$

Por substituição das equações (2.7) e (2.8) obtém-se

$$S' = -m \int \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \dot{x}_\mu \frac{\partial \tau}{\partial \tau'}}$$

ou seja

$$S' = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = S.$$

Logo, como vemos, a ação é invariante por reparametrização da linha mundo.

Em termos da métrica do espaço-tempo o quadrado da distância entre dois pontos vizinhos é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.11)$$

Então, o integrando da ação (2.6) se torna

$$d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{ds^2} = ds. \quad (2.12)$$

Logo, utilizando-se a eq.(2.12), a ação (2.6) pode ser escrita como:

$$S = -m \int ds \quad (2.13)$$

ou seja, é o produto da massa de repouso pelo comprimento da linha mundo (como já havíamos citado).

A ação escrita na forma (2.6) não é muito útil, pois não pode ser usada para uma partícula com massa nula e apresenta problemas quando tentamos quantizar a teoria, devido a presença da raiz quadrada no integrando. Uma Lagrangiana alternativa que podemos usar para obter uma ação classicamente equivalente à ação (2.6) é a seguinte:

$$L = -p_\mu \dot{x}^\mu + \frac{1}{2}e(\tau)(p^2 - m^2) \quad (2.14)$$

onde temos a Lagrangiana dada pela eq.(2.4), mais um vínculo dado pela eq.(2.1) vezes o multiplicador de Lagrange $\frac{1}{2}e(\tau)$, onde $e(\tau)$ é um campo fictício.

Devemos eliminar p^μ da eq.(2.14) escrevendo-o em termos de $\dot{x}^\mu$ e e . Para isto, usaremos a equação de movimento para p_μ :

$$\frac{\partial L}{\partial p_\mu} = -\dot{x}^\mu + ep^\mu = 0,$$

ou seja,

$$p^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{e},$$

o qual, substituindo na eq.(14) obtem-se

$$L = -\frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^2 + em^2).$$

Portanto, a nova ação pode ser escrita como

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau (e^{-1}\dot{x}^2 + em^2). \quad (2.15)$$

Agora, mostraremos que esta última ação é classicamente equivalente à primeira. Das equações de Euler-Lagrange temos:

$$\frac{\delta S}{\delta e} = \frac{\partial L}{\partial e}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = -\frac{1}{2}(-e^{-2}\dot{x}^2 + m^2) = 0$$

$$\dot{x}^2 - m^2 e^2 = 0;$$

$$e = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m}.$$

Substituindo esta última equação na eq.(2.15) obtemos

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{m}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}^2 + \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m} m^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d\tau (m\sqrt{\dot{x}^2} + m\sqrt{\dot{x}^2}) \\
 &= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu},
 \end{aligned}$$

que é idêntica a primeira ação obtida, eq.(2.6), usando a Lagrangiana (2.5).

As ações (2.6) e (2.15) são chamadas respectivamente de ação de Nambu-Goto (NG) e Polyakov (PL), sendo que esta última não apresenta os problemas da primeira e é mais geral. Quânticamente não sabemos se as duas ações são equivalentes.

2.2 Corda Bosônica Clássica

Para construirmos a ação da corda clássica, estenderemos a idéia de que a ação da partícula clássica é proporcional ao comprimento da linha mundo. Ou seja, a ação para uma corda clássica deve ser proporcional à área da superfície descrita pela corda quando a mesma evolui no espaço-tempo, a saber,

$$S = -T \int dA, \quad (2.16)$$

onde a constante de proporcionalidade é o negativo da tensão da corda. Esta generalização da linha mundo é chamada folha mundo e está ilustrada na fig. 2.1 abaixo.

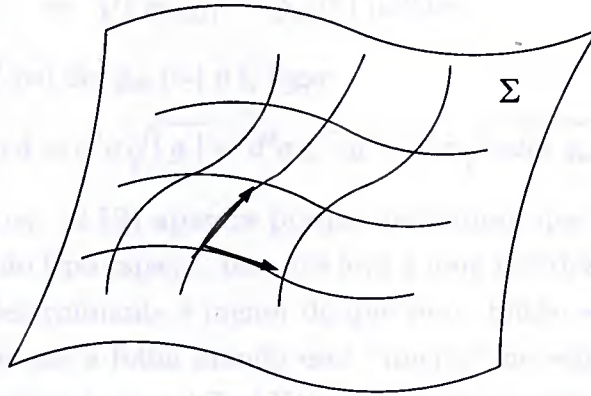


Figura 2.1: Superfície de coordenadas σ e τ e descrita pelo campo $X^\mu(\tau, \sigma)$

Se σ é uma coordenada tipo espaço que denota a posição ao longo da corda e τ uma coordenada tipo tempo que parametriza sua evolução temporal, ambos

definidos respectivamente nos intervalos $0 \leq \sigma \leq \pi$ e $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, então $X^\mu(\tau, \sigma) \equiv X^\mu(\sigma^0, \sigma^1) \equiv X^\mu(\sigma^a)$ descreve matematicamente a folha mundo e nos fornece a posição da corda para σ e τ específicos.

Para maior clareza das expressões, estamos convencionando, neste capítulo, que os índices gregos referem-se ao espaço-tempo e variam de 0 a $D - 1$, onde D é a dimensão do espaço-tempo, e os índices latinos referem-se à folha mundo e assumem os valores 0 e 1. Uma outra convenção usada é a das unidades nas quais $\hbar = c = 1$. Nestas unidades, a tensão da corda possui unidade de $[\text{comprimento}]^{-2}$.

Precisamos obter uma forma explícita para a ação dada pela eq. (2.16). Para isto, derivaremos uma expressão integral para a área de uma superfície curva (folha mundo), dotada de uma métrica genérica $g_{ab}(\sigma^a)$ e “imersa” em um espaço-tempo D -dimensional com métrica $G_{\mu\nu}(X)$.

Dividindo a folha mundo em diversos paralelogramos infinitesimais (ver fig. 2.2) de lados $\vec{d\tau}$ e $\vec{d\sigma}$, onde $\vec{d\tau}$ e $\vec{d\sigma}$ são vetores tangentes às linhas de coordenadas constantes τ e σ respectivamente. A área do paralelogramo é dada por

$$dA = \|\vec{d\tau} \times \vec{d\sigma}\| = \|\vec{d\sigma}^0 \times \vec{d\sigma}^1\| = \|\vec{d\sigma}^0\| \|\vec{d\sigma}^1\| \sin \theta \quad (2.17)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{d\sigma}^0$ e $\vec{d\sigma}^1$. Usando a definição $\|\vec{B}\|^2 = g_{ab}B^aB^b$, onde $\vec{B}$ é um vetor arbitrário, e o fato da métrica ser um tensor simétrico, podemos escrever a eq.(2.17) na forma

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{\|\vec{d\sigma}^0\|^2 \|\vec{d\sigma}^1\|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{\|\vec{d\sigma}^0\|^2 \|\vec{d\sigma}^1\|^2 - (\|\vec{d\sigma}^0\| \|\vec{d\sigma}^1\| \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{\|\vec{d\sigma}^0\|^2 \|\vec{d\sigma}^1\|^2 - (\|\vec{d\sigma}^0\| \cdot \|\vec{d\sigma}^1\|)^2} \\ &= \sqrt{|g_{00}g_{11} - (g_{01})^2|} d\sigma^0 d\sigma^1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mas $|g_{00}g_{11} - (g_{01})^2| = |\det g_{ab}| = |g|$, logo

$$dA = d^2\sigma \sqrt{|g|} = d^2\sigma \sqrt{-g} = d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}}. \quad (2.19)$$

O sinal negativo na eq. (2.19) aparece porque assumimos que τ é uma coordenada do tipo tempo e σ é do tipo espaço. Isto nos leva à uma métrica (g_{ab}) indeterminada na superfície, cujo determinante é menor do que zero. Então $-g > 0$.

Usando o fato de que a folha mundo está “imersa” no espaço-tempo, podemos usar a métrica do espaço-tempo $(G_{\mu\nu}(X))$ para medirmos distâncias na superfície da folha mundo, ou seja, obtermos uma expressão para a métrica da folha mundo em termos da métrica e coordenadas do espaço-tempo. Neste caso, chamamos esta métrica obtida para a folha mundo de métrica induzida e a representamos por h_{ab} para a diferenciarmos da métrica genérica g_{ab} .

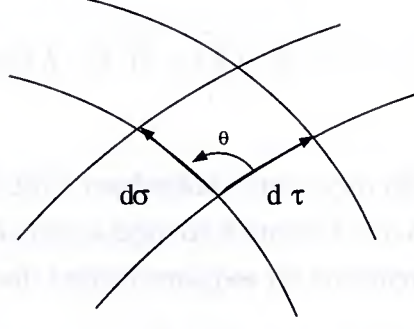


Figura 2.2: Em cada ponto da superfície existem dois vetores de deslocamento infinitesimais $d\tau$ e $d\sigma$ tangentes às linhas constantes τ e σ .

Consideremos uma distância ds no espaço-tempo. Em termos da métrica do espaço-tempo, o quadrado da distância entre dois pontos vizinhos X^μ e $X^\mu + dX^\mu$ é dado por

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu. \quad (2.20)$$

Se os pontos X^μ e $X^\mu + dX^\mu$ estão sobre a superfície da folha mundo, então $X^\mu = X^\mu(\sigma^a)$, e sua diferencial é

$$dX^\mu = \partial_a X^\mu d\sigma^a. \quad (2.21)$$

Por outro lado, como os pontos estão sobre a superfície, então ds^2 pode ser escrito em termos da métrica induzida na superfície (h_{ab})

$$ds^2 = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b. \quad (2.22)$$

Substituindo a eq.(2.21) na eq.(2.20) e igualando-a com a eq.(2.22) obtemos:

$$h_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (2.23)$$

É importante notar que fizemos uma mudança na métrica de $g_{ab}(\sigma^c)$ para $h_{ab}(X^\mu(\sigma^c))$. Então, calculando as componentes da métrica (2.23), obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} h_{00} &= G_{\mu\nu} \partial_0 X^\mu \partial_0 X^\nu = \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu = \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = (\dot{X})^2 \\ h_{11} &= G_{\mu\nu} \partial_1 X^\mu \partial_1 X^\nu = \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu = X'^\mu X'_\mu = (X')^2 \\ h_{01} &= h_{10} = G_{\mu\nu} \partial_0 X^\mu \partial_1 X^\nu = \partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu = \dot{X}^\mu X'_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Trocando na eq.(2.19) a métrica genérica g_{ab} pela métrica induzida h_{ab} e usando as componentes de h_{ab} deduzidas em (2.24), podemos escrever

$$dA = d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} = d^2\sigma \sqrt{-h_{00}h_{11} + (h_{01})^2} = d^2\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \quad (2.25)$$

Substituindo a eq.(2.25) na eq.(2.16), obtemos

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \quad (2.26)$$

onde $h = \det h_{ab}$.

A ação dada pela eq.(2.26) é conhecida como ação de Nambu-Goto (NG). Sendo um objeto geométrico, uma área, a ação de Nambu-Goto é invariante por reparametrização, ou seja, invariante sob transformações de coordenadas da folha mundo,

$$(\tau, \sigma) \longrightarrow (\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)). \quad (2.27)$$

A presença de uma raiz quadrada no integrando expressa a não linearidade da ação de Nambu-Goto. Devido a dificuldade de trabalharmos com esta ação não linear, tentaremos eliminar a raiz quadrada da eq.(2.26) escrevendo uma outra ação classicamente equivalente.

Para isto, faremos a variação da ação de Nambu-Goto, eq.(2.26), onde usaremos a variação de h dada por

$$\delta h = \delta \det h_{ab} = \delta e^{\text{tr} \ln(h_{ab})} = h \text{tr} \delta \ln h_{ab} = h \text{tr} \frac{1}{h_{ab}} \delta h_{ab} = h h^{ab} \delta h_{ab}, \quad (2.28)$$

que é obtida usando-se a condição de ortogonalidade do tensor métrico $h^{ab} h_{bc} = \delta_c^a$:

$$\delta S_{NG} = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \delta h_{ab}. \quad (2.29)$$

A variação em h_{ab} é devido a variação de X^μ , porque h_{ab} é a métrica induzida por $G_{\mu\nu}$. Temos como resultado da variação da eq.(2.23) e da simetria do tensor métrico, $\delta h_{ab} = \delta h_{ba}$, a equação

$$\delta h_{ab} = G_{\mu\nu} \delta(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu) = \partial_a \delta X^\mu \partial_b X_\mu + \partial_a X^\mu \partial_b \delta X_\mu = 2\partial_a X^\mu \partial_b \delta X_\mu. \quad (2.30)$$

Desta forma, substituindo a eq.(2.30) na eq.(2.29) e usando $\partial_b(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \delta X_\mu) = \partial_b(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X_\mu + \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b(\delta X_\mu)$, a eq.(2.29) pode ser colocada na forma

$$\delta S_{NG} = -T \int d^2\sigma \partial_b(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \delta X_\mu) + T \int d^2\sigma \partial_b(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X_\mu.$$

Utilizando o Teorema de Stokes na primeira integral da equação, obtemos

$$\delta S_{NG} = -T \int_{\partial\Sigma} d\sigma_b \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \delta X_\mu + T \int d^2\sigma \partial_b(\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X_\mu, \quad (2.31)$$

onde $\partial\Sigma$ é o contorno da superfície que representa a folha mundo. Com o uso da condição de contorno na folha mundo $\delta X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$, ou seja, a variação dos campos é nula no contorno que delimita a superfície, a primeira integral da eq.(2.31) se anula.

Da eq.(2.31), obtemos a equação de movimento para o campo X^μ , que é dada por

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = T \partial_b (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu), \quad (2.32)$$

onde assumimos aqui que a métrica induzida h_{ab} não depende do campo X^μ , ou seja, $h_{ab} = g_{ab}$, e também omitimos o rótulo NG da ação. Agora, se os campos não interagem, ou seja, a Lagrangiana não apresenta termos de auto-interação do tipo $(X^\mu X_\mu)^n$, então, comparando a eq.(2.32) com a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} - \partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b X^\mu)} \right),$$

obtemos

$$\partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b X^\mu)} \right) = -T \partial_b (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu).$$

Esta última igualdade será satisfeita somente se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b X^\mu)} = -T(\sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu)$, que por integração resulta em

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (2.33)$$

Como o tensor g^{ab} é simétrico, a densidade de Lagrangiana foi dividida por dois para evitarmos contagem dupla dos índices. A ação respectiva é chamada de ação de Polyakov (S_P) e é escrita como

$$S_P = -\frac{T}{2} \int d^2 \sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (2.34)$$

Esta ação também possui invariância por reparametrização. As reparametrizações locais sob as quais esta ação é invariante são

$$\begin{aligned} \delta g^{ab} &= \xi^c \partial_c g^{ab} - \partial_c \xi^a g^{cb} - \partial_c \xi^b g^{ac}, \\ \delta X^\mu &= \xi^a \partial_a X^\mu, \\ \delta(\sqrt{-g}) &= \partial_a (\xi^a \sqrt{-g}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde ξ^a é um deslocamento infinitesimal nas coordenadas (τ, σ) .

Uma outra invariância local, pelo menos no nível clássico, é a de Weyl ou reescalonamento conforme da métrica da folha mundo: $\delta X^\mu = 0$ e $\delta g_{ab} = \Lambda g_{ab}$, onde $\Lambda = \Lambda(\tau, \sigma)$ é uma função infinitesimal arbitrária de σ^a . Existe ainda uma simetria global que reflete a simetria do espaço-tempo no qual a corda está se propagando. Para o espaço plano, esta é justamente a invariância de Lorentz ou Poincaré descrita por $\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu$ onde b^μ é um vetor constante e $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} a_\nu^\rho$ é um tensor anti-simétrico ($\eta_{\mu\rho}$ é a métrica de Minkowski). Note que a exigência fundamental para

se obter a ação de Polyakov é que h^{ab} não dependa de X^μ . Podemos mostrar que as ações de Nambu-Goto e Polyakov são classicamente equivalentes mostrando que a solução clássica da equação de movimento para g^{ab} é a eq.(2.23), isto é, $\left. \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \right|_{g_{ab}=h_{ab}=0}$. Isto é feito considerando que a ação de Polyakov é um invariante de Weyl (que será discutido adiante) e com a restrição que h_{ab} não dependa do campo X^μ , ou seja, quando $h_{ab} = g_{ab}$.

2.2.1 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento bidimensional, que é representado por T_{ab} , é proporcional à derivada variacional da ação com respeito a métrica g^{ab} da folha mundo. Uma vez que as ações de Nambu-Goto e de Polyakov não dependem de derivadas da métrica, o tensor energia-momento é dado por

$$T_{ab} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ab}}. \quad (2.36)$$

A densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ é dada pela eq.(2.33). Então, calculado T_{ab} obtemos

$$\begin{aligned} T_{ab} &= -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{ab}} \left(-\frac{T}{2} \sqrt{-g} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{cd} \frac{\partial g_{cd}}{\partial g^{ab}} \right) g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu + \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando que $g_{ab} = -g^{mn} \frac{\delta g_{mn}}{\delta g^{ab}}$, a equação acima torna-se

$$T_{ab} = -\frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu + \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (2.38)$$

O tensor energia-momento possui duas propriedades importantes.

1) A primeira delas é que, devido a invariância de Weyl da ação, seu traço é nulo. De fato,

$$tr T_{ab} = g^{ab} T_{ab} = g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} tr g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu. \quad (2.39)$$

Devemos então calcular $tr g_{ab}$ que aparece nesta equação, para isto, usaremos o fato de que a ação da corda é um invariante de Weyl. Uma transformação finita de Weyl pode ser escrita como $g_{ab} \rightarrow g'_{ab} = e^{\Lambda(\tau, \sigma)} g_{ab}$ e sua inversa é $g^{ab} \rightarrow g'^{ab} = e^{-\Lambda(\tau, \sigma)} g^{ab}$. Desta forma, podemos transformar a métrica genérica g_{ab} na métrica plana de Minkowski η_{ab} , ou seja, $g'_{ab} = \eta_{ab} = e^{\Lambda(\sigma)} g_{ab}$, que substituindo na expressão para o traço de g_{ab} obtemos $tr g_{ab} = g^{ab} g_{ab} = \eta^{ab} e^{-\Lambda(\sigma)} \eta_{ab} e^{\Lambda(\sigma)} = tr \eta_{ab} = 2$. Portanto, substituindo este resultado na equação (2.39), obtemos $tr T_{ab} = 0$.

2) A outra propriedade é que $T_{ab} = 0$ pois, como a equação de movimento para o campo g^{ab} é igual a zero, e T_{ab} é proporcional a esta equação, então $T_{ab} = 0$.

Estes são os dois vínculos clássicos da teoria. No processo de quantização, tentaremos implementar estes vínculos quanticamente e veremos que surgirão resultados interessantes.

2.2.2 Dinâmica da Corda Clássica

Agora, iremos obter as equações de movimento clássicas para uma corda bosônica aberta. Partindo de uma forma geral para a ação (Nambu-Goto ou Polyakov)

$$S = \int d^2\sigma \mathcal{L} = \int d\sigma d\tau \mathcal{L}, \quad (2.40)$$

consideraremos o efeito de uma evolução da corda entre duas configurações fixas $X^\mu(\tau_1, \sigma)$ e $X^\mu(\tau_2, \sigma)$ onde $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ e $\sigma \in [0, \pi]$.

Variando a ação (2.40) e integrando por partes, obtemos

$$\delta S = \int d^2\sigma \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X^\mu} \delta X^\mu + \int d\sigma \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} \delta X^\mu \right|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int d\tau \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma X^\mu)} \delta X^\mu \right|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}, \quad (2.41)$$

onde a segunda integral da eq.(2.41) é nula porque a configuração do sistema é fixa em τ_1 e τ_2 , ou seja, $\delta X^\mu(\tau_1) = \delta X^\mu(\tau_2) = 0$. Usando a equação de Euler-Lagrange na primeira integral da eq.(2.41) (observando que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} = 0$), obtemos:

$$\delta S = - \int d^2\sigma \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)} \right) \delta X^\mu + \int d\tau \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma X^\mu)} \delta X^\mu \right|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \quad (2.42)$$

Pelo princípio variacional, a primeira integral da eq.(2.42) nos fornece a equação de movimento

$$\partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)} \right) = 0, \quad (2.43)$$

enquanto que a segunda fornece as seguintes condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \right|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0, \quad \text{ou} \quad \delta X^\mu|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \quad (2.44)$$

Os momentos conjugados a $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$ e $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$ são

$$P_\tau^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} \quad \text{e} \quad P_\sigma^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} \quad (2.45)$$

respectivamente, onde P_σ^μ é o fluxo de momento de uma extremidade a outra da corda (na direção σ) e P_τ^μ é o fluxo de momento transverso a P_σ^μ . Em termos destas correntes de momentos, a equação de movimento pode ser escrita como

$$\frac{\partial P_\tau^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\sigma^\mu}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.46)$$

e a primeira condição de contorno pode ser expressa na forma

$$P_\sigma^\mu(\sigma = 0) - P_\sigma^\mu(\sigma = \pi) = 0. \quad (2.47)$$

Esta equação mostra que o fluxo do momento da corda é conservado, isto quer dizer que o fluxo de momento que entra por um lado da corda é igual em módulo ao fluxo que sai pelo outro lado. Para uma corda aberta isto fica claro, porque é razoável dizer que o momento pode fluir para dentro e para fora da corda por ambas as extremidades.

O momento total da corda é a integral do momento ao longo de uma curva arbitrária γ que liga duas extremidades opostas da folha mundo, onde uma destas extremidades é limitada pela condição $\sigma = 0$ e a outra pela condição $\sigma = \pi$, então:

$$P^\mu = \int d\sigma P_\tau^\mu + d\tau P_\sigma^\mu = \int_0^\pi d\sigma P_\tau^\mu. \quad (2.48)$$

Derivando o momento em relação a τ e usando a equação de movimento, eq.(2.46), resulta

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = - \int_0^\pi d\sigma \frac{\partial P_\sigma^\mu}{\partial \sigma} = P_\sigma^\mu(\sigma = 0) - P_\sigma^\mu(\sigma = \pi) = 0 \quad (2.49)$$

ou seja, o momento total é conservado.

2.2.3 Equação de Movimento e suas Soluções

Para uma análise subsequente da dinâmica e quantização da corda, faremos uma escolha de um calibre conveniente. Esta escolha servirá para diminuirmos os graus de liberdade das variáveis dinâmicas que aparecem explicitamente na ação. Em duas dimensões, uma transformação geral de coordenadas $(\sigma, \tau \rightarrow \sigma', \tau')$ depende de duas funções livres, a saber, σ' e τ' . Por esta transformação, quaisquer duas das três componentes de h podem ser eliminadas. Uma forma conveniente de fazermos isto é escolhermos uma parametrização da folha mundo, tal que $g_{ab} = e^\Lambda \eta_{ab}$, onde η_{ab} é a métrica plana da folha mundo ($\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$), ou seja, métrica bidimensional de Minkovski, e e^Λ é conhecido como fator conforme. É sempre possível fazer esta escolha, pelo menos localmente. Esta escolha é chamada de calibre conforme. Substituindo este calibre conforme na ação de Polyakov (2.34), esta se reduz a

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.50)$$

e o tensor energia-momento bidimensional

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \eta_{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu. \quad (2.51)$$

Como $T_{ab} = 0$, os graus de liberdade do campo X^μ estão sujeitos aos seguintes vínculos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0, \\ T_{10} &= T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se fizermos a variação da ação (2.50), esta irá conter um termo de volume e um de superfície. Para assegurarmos que a ação seja estacionária, pelo princípio da mínima ação, ambos os termos devem ser iguais a zero e isto nos conduz à equação de movimento

$$\square X^\mu(\tau, \sigma) = \partial^a \partial_a X^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad (2.53)$$

e à condição de contorno periódica

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \pi) \quad (2.54)$$

para a corda fechada, ou à condição de contorno para a corda aberta,

$$\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu|_0^\pi = 0 \quad (2.55)$$

onde esta última pode ser satisfeita de dois modos

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu|_0^\pi = 0 \rightarrow \text{condições de contorno de Neumann (N),} \\ \delta X^\mu|_{\partial M} = 0 \rightarrow \text{condições de contorno de Dirichlet (D).} \end{cases} \quad (2.56)$$

A eq.(2.53) é uma equação de onda sem massa em duas dimensões, cuja solução pode ser escrita de forma genérica como uma combinação dos movimentos para direita X_R^μ e para esquerda X_L^μ , $X^\mu(\sigma^a) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+)$, onde $\sigma^- = \tau - \sigma$ e $\sigma^+ = \tau + \sigma$. Desta forma, é conveniente mudar as coordenadas da folha mundo para coordenadas de cone de luz (σ^+, σ^-) . Nestas novas coordenadas, o elemento de comprimento sobre a folha mundo torna-se $ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$, o que nos leva a dizer que as novas componentes da métrica plana de Minkowski são $\eta_{-+} = \eta_{+-} = -\frac{1}{2}$ e sua inversa $\eta^{-+} = \eta^{+-} = 2$ e $\eta_{++} = \eta_{--} = \eta^{++} = \eta^{--} = 0$. As derivadas conjugadas a $\sigma^\pm$ são $\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-$ e $\partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$. As condições de contorno (2.56) implicam que os movimentos para a esquerda e para direita da corda não são independentes. As soluções da equação de onda livre podem estar sujeitas tanto às condições de contorno Neumann quanto às de Dirichlet, embora esta última quebre a invariância de Poincaré. Desta forma, a única solução que é invariante de Poincaré é a solução na qual ambas as extremidades da corda estão sujeitas às condições de contorno Neumann, e é dada por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.57)$$

e a solução geral compatível à condição periódica (2.54) é

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2n} \left(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \beta_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \right), \quad (2.58)$$

sendo as componentes do movimento para a direita e para a esquerda dadas respectivamente por

$$X_R^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (2.59)$$

$$X_L^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \beta_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (2.60)$$

onde n é um inteiro, α' é o parâmetro de Regge que está relacionado com a tensão da corda através da relação $T = (2\pi\alpha')^{-1}$. α_n^μ e β_n^μ são os coeficientes de Fourier, que serão interpretados como coeficientes do oscilador. Deste modo, vemos que a solução para a corda fechada envolve uma superposição linear dos movimentos da corda para a esquerda e para direita, com coeficientes de Fourier α_n^μ e β_n^μ , respectivamente. É importante observarmos que no caso da corda fechada estes coeficientes dão origem aos modos de vibração para a direita e esquerda, respectivamente. As constantes x^μ e p^μ são interpretadas como sendo, respectivamente, a coordenada e o momento do centro de massa da corda. O fato de X^μ ser real exige que x^μ e p^μ também o sejam. O mesmo fato nos conduz à condição de α_{-n}^μ (β_{-n}^μ) ser o adjunto de $\alpha_n^{\mu\dagger}$ ($\beta_n^{\mu\dagger}$), isto é, $\alpha_n^{\mu\dagger} = \alpha_{-n}^\mu$ ($\beta_n^{\mu\dagger} = \beta_{-n}^\mu$). Esta condição será importante para determinarmos os colchetes de Poisson para os coeficientes α_n^μ (β_n^μ).

Quando fixamos τ , os colchetes de Poisson para as variáveis dinâmicas do sistema são:

$$\{X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\} = 0, \quad \{\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), \dot{X}^\nu(\tau, \sigma')\} = 0, \quad (2.61)$$

$$\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\} = T \{\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma') \eta_{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

É essencial escrevermos os colchetes de Poisson para os coeficientes do oscilador α_n^μ e β_n^μ , pois, quando quantizarmos a teoria, estes coeficientes serão os operadores de criação e destruição dos modos normais de vibração da corda. Para isto, inserimos a solução (2.58) nos colchetes de Poisson (2.62) e obtemos

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\mu\} = \{\beta_m^\mu, \beta_n^\mu\} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

e também

$$\{\alpha_m^\mu, \beta_n^\mu\} = 0. \quad (2.64)$$

O colchete de Poisson correspondente às variáveis dinâmicas do centro de massa fica sendo

$$\{p^\mu, x^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (2.65)$$

A Hamiltoniana é contruída por integração sobre todo o comprimento da corda da densidade de Hamiltoniana dada por $\mathcal{H} = P_\tau^\mu(\tau, \sigma)\dot{X}_\mu - \mathcal{L}$. Neste calibre conforme, $g_{ab} = \eta^{ab}$, a Hamiltoniana pode ser escrita em termos dos coeficientes do oscilador. Para a corda aberta, obtemos

$$H = \int d\sigma \mathcal{H} = \frac{T}{2} \int_0^\pi d^2\sigma (\dot{X}^2 + X'^2) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} = \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \frac{1}{2} \sqrt{2\alpha'} p^\mu p_\mu, \quad (2.66)$$

onde definimos o coeficiente $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$. Para a corda fechada, temos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \beta_{-n}^\mu \beta_{\mu n}) = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \beta_{-n}^\mu \beta_{\mu n}) + \frac{1}{2} \sqrt{2\alpha'} p^\mu p_\mu, \quad (2.67)$$

onde para a corda fechada usamos $\alpha_0^\mu = \beta_0^\mu = \frac{1}{2} l p^\mu$.

Podemos ainda escrever para o caso da corda aberta soluções da equação de onda (2.53) sujeitas às outras combinações das condições de contorno em suas extremidades que não são invariantes de Poincaré. Por exemplo, para uma corda aberta sujeita às condições de contorno de Dirichlet nas duas extremidades, temos como solução

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{c^\mu(\pi - \sigma) + d^\mu \sigma}{\pi} - \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \right), \quad (2.68)$$

e para condições de contorno mistas, temos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = c^\mu - \sqrt{2\alpha'} \sum_{r \in \mathbb{Z}'} \left(\frac{\alpha_r^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \right), \quad (\text{caso Neumann-Dirichlet}), \quad (2.69)$$

e

$$X^\mu(\tau, \sigma) = d^\mu + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{r \in \mathbb{Z}'} \left(\frac{\alpha_r^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma \right), \quad (\text{caso Dirichlet-Neumann}). \quad (2.70)$$

Em ambos os casos, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, c^μ e d^μ são vetores constantes das duas extremidades da corda imersa no espaço-tempo. Em todo o texto, a menos que seja mencionado, estaremos trabalhando somente com a solução $X^\mu(\tau, \sigma)$ invariante por Poincaré.

2.2.4 Álgebra de Virasoro e Estados de Massa para a Corda

Os graus de liberdade no calibre covariante devem satisfazer não somente a equação de onda (2.53) que nos conduz aos modos de expansão, como também os vínculos que são originados da equação de movimento para g_{ab} e são consequência da invariância por reparametrização da corda. Para analisarmos estes vínculos, é

conveniente expressarmos as componentes do tensor energia-momento nas coordenadas de cone de luz, tal que as combinações T_{++} e T_{--} do tensor energia-momento bidimensional T_{ab} sejam dadas por

$$\begin{aligned} T_{++} &\equiv \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X, \\ T_{--} &\equiv \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Escrevendo T_{++} e T_{--} desta forma, as equações de vínculo (2.52) podem ser escritas como $T_{++}=T_{--}=0$. Estas combinações das componentes do tensor energia-momento são válidas tanto para a corda aberta quanto para a fechada. Vamos agora considerar os modos de expansão do vínculo $T_{ab}=0$.

Para a corda fechada, podemos verificar que $\dot{X}_L^\mu = X_L^{\prime\mu}$ e $\dot{X}_R^\mu = -X_R^{\prime\mu}$. Então, T_{++} pode ser escrito somente em termos de X_L^μ e a componente T_{--} em termos de X_R^μ , ou seja, $T_{++} = \dot{X}_L^\mu \dot{X}_{\mu L}$ e $T_{--} = \dot{X}_R^\mu \dot{X}_{\mu R}$. Classicamente, estamos livres para implementarmos estes vínculos, mas como veremos, quanticamente qualquer expressão contendo operadores que não comutam não é bem definida sem antes especificarmos uma prescrição normal para os mesmos. Sendo assim, é útil neste caso trabalharmos com as componentes de Fourier de T_{--} e T_{++} para os movimentos para direita e para a esquerda da corda fechada definidas em $\tau=0$, respectivamente como

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \left(e^{-2im\sigma} T_{--} \right) \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \left(e^{-2im\sigma} \dot{X}_R^2 \right), \quad m \neq 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{L}_m &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \left(e^{2im\sigma} T_{++} \right) \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \left(e^{2im\sigma} \dot{X}_L^2 \right), \quad m \neq 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Em termos dos modos de Fourier, estas componentes podem ser escritas, respectivamente, como

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n}, \quad m \neq 0, \quad (2.74)$$

$$\bar{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{m-n}^\mu \beta_{\mu n}, \quad m \neq 0, \quad (2.75)$$

onde $\alpha_0 = \beta_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}p^\mu$. L_m e $\bar{L}_m$ são conhecidos como operadores de Virasoro para a corda fechada. Estes dois operadores formarão duas álgebras de Virasoro independentes, uma para o movimento para a esquerda e uma para a direita. Como já

citamos anteriormente, as condições de contorno para uma corda aberta significam que a separação da solução da equação de onda em movimento para a esquerda e para direita não é possível porque os mesmos não são independentes. Portanto, a expansão da corda aberta envolve somente um conjunto de osciladores α_n^μ e, conseqüentemente, iremos definir uma única álgebra de Virasoro em vez de álgebras independentes para os movimentos para a direita e para a esquerda como no caso da corda fechada. Podemos então definir os geradores da álgebra de Virassoro (L_m), tomando a combinação das componentes de Fourier de T_{++} e T_{--} em $\tau = 0$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} L_m &= T \int_0^\pi d\sigma \left(e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--} \right) \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \left\{ e^{im\sigma} (\dot{X} + X')^2 + e^{-im\sigma} (\dot{X} - X')^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde definimos $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$. Notamos que, em particular, a Hamiltoniana para as cordas aberta e fechada podem ser escritas, respectivamente, como $H = L_0$ e $H = L_0 + \bar{L}_0$.

O quadrado da massa (M) de uma corda em um dado estado de oscilação é dado por $M^2 = -p_\mu p^\mu$. A equação de vínculo $L_0 = \bar{L}_0 = 0$ nos fornece uma importante equação de movimento que determina M^2 em termos dos modos internos de oscilação da corda, isto é,

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (2.77)$$

para a corda aberta, e

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \beta_{-n} \cdot \beta_n) \quad (2.78)$$

para a corda fechada. Estas equações são conhecidas como condição de concha de massa para as cordas aberta e fechada, respectivamente. Quanticamente, estas condições serão modificadas devido ao efeito do ordenamento normal. Devido ao fato de que $L_0 = \bar{L}_0$ para a corda fechada, temos que os dois termos nas equações (2.78) ou (2.67) dão contribuições iguais.

Os modos de Fourier do tensor energia-momento L_m e $\bar{L}_m$ são chamados de operadores de Virasoro. Os parênteses de Poisson dos operadores de Virassoro podem ser calculados a partir da definição de L_m e dos colchetes de Poisson já conhecidos dos osciladores, eq.(2.63). Da definição de L_n , equação (2.76), temos

$$\{L_m, L_n\} = \frac{1}{4} \sum_{k,l} \{\alpha_{m-k} \cdot \alpha_k, \alpha_{n-l} \cdot \alpha_l\}. \quad (2.79)$$

A identidade $\{AB, CD\} = A\{B, C\}D + AC\{B, C\} + \{A, C\}DB + C\{A, D\}B$, mais as relações de comutação dos osciladores (2.63), nos levam a

$$\{L_m, L_n\} = \frac{i}{4} \sum_{k,l} (k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_l \delta_{k+n-l} + k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{n-l} \delta_{k+l} + (m-k)\alpha_l \cdot \alpha_k \delta_{m-k+n-l} \\ + (m-k)\alpha_{n-l} \cdot \alpha_k \delta_{m-k+l}),$$

onde δ_n é 1 se $n = 0$, e 0 para outros valores. Efetuando-se a soma em l a equação acima se reduz a

$$\{L_m, L_n\} = \frac{i}{2} \sum_k k\alpha_{m-k} \cdot \alpha_{k+n} + \frac{i}{2} \sum_k (m-k)\alpha_{m-k+n} \cdot \alpha_k. \quad (2.80)$$

Fazendo uma mudança de variáveis de $k \rightarrow k' = k + n$ na primeira soma, a eq.(2.80) se reduz à álgebra de Virassoro

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}. \quad (2.81)$$

Analogamente, partindo da definição de $\bar{L}_m$, obtemos

$$\{\bar{L}_m, \bar{L}_n\} = i(m-n)\bar{L}_{m+n}. \quad (2.82)$$

Como os coeficientes α_m^μ e β_n^ν comutam, é natural escrevermos que $\{L_m, \bar{L}_n\} = 0$.

Após o processo de quantização a forma dos operadores de Virassoro será ligeiramente modificada e veremos que um termo extra surgirá na álgebra de Virassoro. O termo aparece devido às relações de comutação dos coeficientes de Fourier α_n^μ e β_n^ν .

2.3 Quantização Canônica

Quando quantizamos a corda livre, o conteúdo de partículas aparece, pois o espaço de Fock da teoria de cordas contém vários estados de partículas. Como veremos, anomalias que surgirão na teoria devido ao ordenamento normal dos operadores de criação e destruição desaparecerão se impusermos restrições na dimensão do espaço-tempo, no qual a folha mundo está imersa. Existem muitos procedimentos diferentes para se quantizar um sistema clássico [18, 19, 20, 21]. Quando usados corretamente, todos são equivalentes, embora estas equivalências não sejam triviais.

Nesta seção, apresentaremos a quantização canônica, que é baseada em termos do campo X^μ com restrições físicas somente no espaço de Fock. Tais restrições provêm de vínculos sobre o tensor energia-momento e dão origem a graus de liberdade não físicos. A quantização destes graus de liberdade não físicos são responsáveis pelo

surgimento de estados com norma negativa (fantasmas) na teoria. A situação é análoga às condições de Gupta-Bleuler na eletrodinâmica, onde o vínculo clássico $\partial_\mu A^\mu = 0$ é trocado pela exigência de que componentes de frequência positiva dos correspondentes operadores quânticos aniquilem estados físicos do fóton.

Para fazermos a quantização canônica da teoria, usaremos o calibre conforme onde fixamos $h_{ab} = \eta_{ab}$ (como mencionado na seq. 2.2.3). A escolha deve ser cuidadosa, pois uma vez fixado o calibre, o traço do tensor energia-momento é nulo.

No processo de quantização canônica, ou primeira quantização, da corda bosônica clássica devemos considerar os campos X^μ como operadores quanto-mecânicos (isto é equivalente a fazermos a transição da mecânica clássica para mecânica quântica em primeira quantização via relações canônicas de comutação para as coordenadas e seus momentos canonicamente conjugados). Para isto, trocaremos os parênteses de Poisson por comutadores de acordo com a relação $\{ , \} \longrightarrow \frac{1}{i} [,]$, ou seja, usaremos o Princípio da Correspondência. Deste modo, obtemos as relações de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} [X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] &= [\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), \dot{X}^\nu(\tau, \sigma')] = 0, \\ [P_\tau^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] &= T [\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

As componentes espaciais do campo $X^\mu(\tau, \sigma)$ comportam-se como campos escalares independentes sujeitos às relações de comutação usuais para os campos de Klein-Gordon. No entanto, a componente temporal $X^0(\tau, \sigma)$ satisfaz estas relações de comutação com o sinal trocado (negativo). Isto é inevitável se escrevermos as relações de comutação a tempos iguais na forma covariante, uma vez que o tensor métrico que aparece do lado direito possui ambos os sinais. Este sinal negativo implicará em uma mudança na estrutura do espaço de Hilbert do campo $X^\mu(\tau, \sigma)$, pois aparecem estados de norma negativa.

Podemos observar que o vínculo clássico $T_{ab} = 0$, o qual em termos dos campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ é representado pela eq.(2.71), não pode ser implementado quanticamente como uma equação operatorial, pois isto estará em conflito com as relações de comutação (2.83). Isto significa que devemos aplicar estes vínculos aos estados físicos. No entanto, não podemos definir um estado físico $|\psi\rangle$ aceitável via $T_{ab}|\psi\rangle = 0$, pois isto também está em conflito com as relações de comutação. Para mostrarmos isto, realizamos o cálculo de $[T_{ab}, X^\mu]$ e obtivemos os seguintes resultados: $[T_{00}, X^\mu] = [T_{11}, X^\mu] = -iT^{-1}\dot{X}^\mu$ e $[T_{01}, X^\mu] = [T_{10}, X^\mu] = -iT^{-1}X'^\mu$. Isto implica que T_{ab} é um operador que certamente não é zero. Desta forma, temos uma incompatibilidade entre a quantização canônica e a fixação do calibre $h_{ab} = \eta_{ab}$. Somente serão admitidos vetores de estado para os quais o valor esperado de T_{ab}

seja nulo

$$\langle \psi | T_{ab} | \psi \rangle = 0. \quad (2.84)$$

Podemos ainda separar o operador tensor energia-momento em duas partes, uma de frequência positiva $T_{ab}^{(+)}$ e outra de frequência negativa $T_{ab}^{(-)}$ que consistem de operadores de aniquilação e de criação, respectivamente ($T_{ab} = T_{ab}^{(+)} + T_{ab}^{(-)}$), onde ($T_{ab}^{(+)\dagger} = T_{ab}^{(-)}$). Desta forma, a eq.(2.84) pode ser escrita como uma equação de autovalor, cuja parte de frequências positivas aniquila os estados físicos $T_{ab}^{(+)}|\psi\rangle = 0$. A correspondente condição adjunta é $\langle \psi | T_{ab}^{(-)} = 0$. Estas duas condições são suficientes para garantirmos (2.84), pois

$$\langle \psi | T_{ab} | \psi \rangle = \langle \psi | T_{ab}^{(+)} | \psi \rangle + \langle \psi | T_{ab}^{(-)} | \psi \rangle = 0. \quad (2.85)$$

Como veremos adiante, sob certas restrições, os estados obtidos desta forma serão livres de fantasmas.

Uma vez feita a quantização canônica para os campos X^μ , devemos também escrever as relações de comutação a tempos iguais para as variáveis canonicamente conjugadas do centro de massa, x^μ e p^μ , e para os coeficientes de Fourier α_n^μ e β_n^μ , que são, respectivamente,

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (2.86)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\beta_m^\mu, \beta_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.87)$$

$$[\alpha_m^\mu, \beta_n^\nu] = 0.$$

Os coeficientes α_n^μ e β_n^μ são interpretados como operadores de criação para n negativo e operadores de destruição para n positivo. Todas as relações escritas com α_n^μ são válidas tanto para a corda aberta quanto para corda fechada, e as escritas com β_n^μ são válidas somente para a corda fechada, quando isto não for verdadeiro, deixaremos claro no texto. A imposição de que X^μ seja Hermitiano exige que x^μ e p^μ também o seja. O mesmo fato nos conduz a impor a condição de Hermiticidade conjugada dos operadores para todo e qualquer valor inteiro de n , ou seja,

$$(\alpha_n^\mu)^\dagger = \alpha_{-n}^\mu \quad \text{e} \quad (\beta_n^\mu)^\dagger = \beta_{-n}^\mu. \quad (2.88)$$

Os operadores α_n^μ e β_n^μ estão relacionados com os operadores de criação e aniquilação (convenientemente normalizados) do oscilador harmônico da forma

$$a_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n^\mu \quad \text{e} \quad b_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_n^\mu, \quad (2.89)$$

e seus Hermitianos conjugados

$$a_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{-n}^\mu \quad \text{e} \quad b_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \beta_{-n}^\mu. \quad (2.90)$$

Estas relações são válidas somente para $n > 0$. Os a_n^μ 's e os b_n^μ 's obedecem as relações de comutação padrão do oscilador harmônico somente para $\mu \neq 0$ e $\nu \neq 0$, devido a presença do tensor métrico $\eta^{\mu\nu}$, cuja componente temporal (η^{00}) é negativa, ou seja, $[a_m^\mu, a_n^\mu] = \delta_{m+n}\eta^{\mu\mu}$.

O estado fundamental do oscilador é definido como sendo aquele que é aniquilado por α_n^μ com $n > 0$, $\alpha_n^\mu|0\rangle_\alpha = 0$, para a corda aberta, e aniquilado por α_n^μ e β_n^μ para a corda fechada $\alpha_n^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta = \beta_n^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta = 0$. Especificando que os osciladores estão no estado fundamental, não determinamos completamente o estado da corda. Um outro grau de liberdade é o momento do centro de massa p^μ . Quando desejamos então especificar completamente o estado aniquilado por α_n^μ (β_n^μ), para $n > 0$, e com momento do centro de massa p^μ escrevemos $|0, p^\mu\rangle_\alpha$ ($|0, p^\mu\rangle_\beta$).

Um ponto de fundamental importância nesta teoria é que o espaço de Fock construído por aplicações sucessivas do operador de criação $a_m^{\mu\dagger}$ no estado fundamental $|0, p^\mu\rangle_\alpha$ não é positivo definido, pois as componentes temporais possuem um sinal negativo devido a métrica do espaço-tempo ser de Minkowski. As relações de comutação destas componentes temporais são $[a_m^0, a_m^{0\dagger}] = -1$ e, desta forma, o vetor de estado $a_m^{0\dagger}|0, p^\mu\rangle_\alpha$ possui norma negativa, pois ${}_\alpha\langle p^\mu, 0|a_m^0, a_m^{0\dagger}|0, p^\mu\rangle_\alpha = {}_\alpha\langle p^\mu, 0|[a_m^0, a_m^{0\dagger}]|0, p^\mu\rangle_\alpha = -1$, e o vácuo é normalizado. Este mesmo argumento é válido para os operadores de criação, $a_m^{\mu\dagger}$ e $b_m^{\mu\dagger}$, que geram o espaço de Fock a partir do vácuo $|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta$ para a corda fechada. Deste modo, o espaço físico permitido para os estados da corda é um subespaço do espaço completo de Fock, e é especificado por certas condições subsidiárias, que serão apresentadas adiante.

Para termos uma teoria causal é necessário que o subespaço físico seja livre de estados de norma negativa, que são usualmente chamados "fantasmas". Estados de norma negativa são estados não aceitáveis fisicamente, pois estão em conflito com a interpretação probabilística da mecânica quântica. Esperamos então que os estados fantasmas desacoplem do espaço de Hilbert. Verificaremos que estes fantasmas de fato desacoplam do espaço de Hilbert se a dimensão do espaço-tempo for menor ou igual a 26, e a constante a que surge devido ao ordenamento normal for menor ou igual a 1.

As condições subsidiárias usadas para determinarmos o espaço dos estados físicos, que correspondem às equações clássicas de vínculo $T_{ab} = 0$, são equivalentes a impor que $L_m|\psi\rangle = \bar{L}_m|\psi\rangle = 0$ para $m > 0$, uma vez que L_m para a corda aberta é definida como sendo a componente de Fourier da combinação das componentes T_{++} e T_{--} definidas em (2.71), e para a corda fechada L_m e $\bar{L}_m$ são definidos em termos das componentes de Fourier de T_{--} e T_{++} , respectivamente. O caso $m = 0$ requer um pouco mais de cuidado, uma vez que quanticamente o operador de Virasoro (2.76) apresenta problemas, pois, sendo operadores, os coeficientes α_{m+n}^μ (β_{m+n}^μ) e α_n^μ (β_n^μ)

não comutam para $m = 0$, surgindo deste modo o problema de ordenamento normal nas expressões para L_0 e $\bar{L}_0$, que podem ser escritos como

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + a \quad \text{e} \quad \bar{L}_0 = \frac{1}{2}\beta_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n} \cdot \alpha_n + a, \quad (2.91)$$

onde $a = \frac{D}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n$ é uma constante que aparece devido as relações de comutação. Podemos resolver este problema definindo a expressão normalmente ordenada para L_0 e $\bar{L}_0$ da forma

$$:L_0: = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_n : = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.92)$$

$$:\bar{L}_0: = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \beta_{-n} \cdot \beta_n : = \frac{1}{2}\beta_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n} \cdot \beta_n. \quad (2.93)$$

Devido a esta ambigüidade do ordenamento normal, o vínculo clássico $H = L_0 = \bar{L}_0 = 0$ deve ser implementado quanticamente como

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = (\bar{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0. \quad (2.94)$$

Portanto, os estados físicos devem satisfazer a condição de Virasoro

$$(L_m - a\delta_m)|\psi\rangle = 0, \quad m \geq 0, \quad (2.95)$$

$$(\bar{L}_m - a\delta_m)|\psi\rangle = 0, \quad m \geq 0. \quad (2.96)$$

Estas condições, mais as propriedades de Hermiticidade $L_{-m} = L_m^\dagger$ e $\bar{L}_{-m} = \bar{L}_m^\dagger$, mostram que, se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são dois estados físicos, então $\langle\phi|(L_m - a\delta_m)|\psi\rangle = \langle\phi|(\bar{L}_m - a\delta_m)|\psi\rangle = 0, \quad \forall m$.

2.3.1 Álgebra Quântica de Virasoro e Estados Físicos

Nesta seção, veremos qual é a estrutura da anomalia que aparece na álgebra de Virasoro, que classicamente é dada pela eq. (2.81), devido ao ordenamento normal dos operadores. Todos os passos usados para obtermos a expressão (2.81) são válidos tanto no nível clássico quanto no nível quântico, o problema surge no segundo termo da expressão (2.80) para $m + n = 0$, deste modo, é razoável dizer que a álgebra quântica de Virasoro tem a forma

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}. \quad (2.97)$$

Devemos então calcular explicitamente a forma do termo $A(m)$. Usando a identidade de Jacobi $[L_k, [L_m, L_n]] + [L_m, [L_n, L_k]] + [L_n, [L_k, L_m]] = 0$, e o fato de que $A(m) =$

$-A(-m)$, que pode ser mostrado trocando-se m por n e vice-versa no comutador (2.97), obtemos

$$(n - m)A(n + m) + (2n + m)A(m) - (n + 2m)A(n) = 0. \quad (2.98)$$

Se escolhermos $n = 2m$ e considerarmos que $n \neq 0$, pois se $m = 0$ temos que $A(0) = 0$, a eq. (2.98) torna-se

$$A(3m) + 5A(m) - 4A(2m) = 0. \quad (2.99)$$

Assumindo que $A(m)$ tem uma forma polinomial $A(m) = \sum_p a_p m^p$, então da eq.(2.99), sempre que $a_p \neq 0$, podemos obter a seguinte equação exponencial em p , $3^p + 5 - 2^{p+2} = 0$. Para $p \geq 4$, 3^p começa a ficar muito maior que 2^{p+2} , então as únicas soluções desta equação são $p = 1$ ou $p = 3$. Portanto, $A(m) = a_1 m + a_3 m^3$. Os valores dos coeficientes a_1 e a_3 podem ser encontrados se calcularmos o valor esperado do comutador $[L_m, L_{-m}]$ entre dois estados físicos para dois valores diferentes de m . Por simplicidade, escolhemos tal estado físico como sendo o estado fundamental de uma corda com momento do centro de massa nulo ($p^\mu = 0$) representado por $|0; 0\rangle$. Para $m = 1$, obtemos que $a_1 = -a_3$ e para $m = 2$, obtemos $2a_1 + 8a_3 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}D$. Desta forma, dos resultados obtidos para $m = 1$ e $m = 2$, obtemos que os coeficientes a_1 e a_3 valem, respectivamente, $-\frac{D}{12}$ e $\frac{D}{12}$, portanto, $A(m) = \frac{D}{12}(m^3 - m)$ e a álgebra quântica de Virasoro torna-se

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n}, \quad (2.100)$$

onde D é chamado de carga central e nos fornece a dimensão do espaço-tempo no qual a folha mundo está imersa. Em outras palavras, nos fornece o número de campos escalares livres na folha mundo, uma vez que o campo bidimensional X^μ possui D componentes independentes. Isto quer dizer que cada campo escalar livre contribui com uma unidade para a carga central.

A estrutura da álgebra quântica de Virasoro é tal que L_{-1}, L_0 e L_1 geram uma subálgebra fechada, sem anomalia, isomórfica aos grupos $SU(1,1)$ ou $SL(2, \mathbb{R})$.

Verificaremos agora que, devido à presença da anomalia na álgebra quântica de Virasoro, o vínculo clássico $L_m = 0, \forall m$ não pode ser implementado em estados quanto-mecânicos, uma vez que,

$$\langle \psi | [L_m, L_n] | \psi \rangle = \langle \psi | L_0 | \psi \rangle + \frac{D}{12}(m^3 - m)\langle \psi | \psi \rangle. \quad (2.101)$$

Então, se assegurarmos que $L_n | \psi \rangle = 0, \forall m$, então $\langle \psi | [L_m, L_n] | \psi \rangle = 0$, o que não é verdade. No caso da corda fechada, teremos também os operadores $\bar{L}_n$, que comutam

com L_n e satisfazem a mesma álgebra de Virasoro, como na equação (2.100). Para a corda fechada, segue-se ainda a seguinte condição adicional

$$(L_0 - \bar{L}_0)|\psi\rangle = 0. \quad (2.102)$$

O quadrado da massa (M) de uma corda em um dado estado de oscilação é dado por

$$M^2 = -p_\mu p^\mu. \quad (2.103)$$

Para a corda aberta, temos:

$$L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} + \alpha' p^\mu p_\mu. \quad (2.104)$$

Então, a condição (2.94) implica que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} - a\right)|\varphi\rangle = \alpha' M^2 |\varphi\rangle, \quad (2.105)$$

que é chamada condição de concha de massa, e o operador de massa para a corda é

$$(N - a) = \alpha' M^2, \quad (2.106)$$

onde definimos o operador número de níveis como

$$N = \sum_{n>0} N_n = \sum_{n>0} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}. \quad (2.107)$$

Este operador conta o número de excitações em um dado estado, N_n , ponderado pelo número do osciladores. Os autovalores de N são $\sum_{n=1}^{\infty} n N_n$. Portanto, a massa de cada estado da corda é determinada pelo nível de excitação.

A massa M dos estados físicos da corda fechada pode ser obtida a partir do vínculo (2.102). Usando $L_0 = \frac{1}{4}\alpha' p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}$ e a expressão $\bar{L}_0 = \frac{1}{4}\alpha' p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n}^\mu \beta_{n\mu}$, este vínculo pode ser escrito como

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = M_L^2 + M_R^2, \quad (2.108)$$

onde

$$\alpha' M_L^2 = 2(\bar{N} - a) \quad \text{e} \quad \alpha' M_R^2 = 2(N - a).$$

Ainda, como consequência do vínculo $(L_0 - \bar{L}_0)|\varphi\rangle = 0$ para todos os estados físicos $|\varphi\rangle$, obtemos

$$N|\varphi\rangle = \bar{N}|\varphi\rangle$$

e, conseqüentemente

$$M_L^2 = M_R^2.$$

Este resultado nos diz que o quadrado das massas possui contribuições iguais para direita e para a esquerda.

As Hamiltonianas (2.66) e (2.67) estão relacionadas com os operadores de Virasoro, respectivamente da seguinte forma:

$$H = L_0 - a, \quad (2.110)$$

para a corda aberta e

$$H = 2(L'_0 + \bar{L}'_0) = 2(L_0 + \bar{L}_0 - 2a),$$

para a corda fechada.

Agora, faremos uma análise das condições para as quais não existem estados físicos de norma negativa para o caso da corda aberta. Veremos que estes estados de norma negativa existem somente para certas regiões dos valores que podem ser assumidos pelo parâmetro a e pela dimensão D . Para isto, olharemos regiões do espaço de Hilbert para as quais os estados físicos possuem norma zero. Tais estados físicos estarão sempre presentes nas fronteiras que dividem o espaço físico de Hilbert em uma região onde os estados possuem norma positiva e outra região onde estes vetores possuem norma negativa. Estes vetores de norma nula nos fornecerão os valores críticos de a e D , para os quais o espaço de Hilbert está livre de fantasmas.

Denotemos o estado fundamental de uma corda de momento k^μ como $|0; k^\mu\rangle$. A condição de concha de massa implica que $\alpha' k^2 = a$. Agora, consideremos o primeiro estado excitado $\xi \cdot \alpha_{-1} |0; k^\mu\rangle$, onde $\xi^\mu(k)$ é o vetor de polarização com D componentes independentes. A condição de concha de massa agora implica que $\alpha' k^2 = a - 1$ e a condição de estado físico $L_1 |\psi\rangle = 0$ nos fornece $\xi \cdot k = 0$. Esta condição nos conduz à $D - 1$ polarizações permitidas. A norma deste vetor de estado é $\xi \cdot \xi$. Se escolhermos que o vetor k se encontre no plano $(0, 1)$, então teremos $D - 2$ estados (tipo espaço) com polarização normal ao plano e com norma positiva. Podemos ver que os autovalores do operador de massa para o estado fundamental e para o primeiro estado excitado são, respectivamente,

$$M^2 = -\frac{a}{\alpha'} \quad \text{e} \quad M^2 = \frac{a}{\alpha'}(1 - a). \quad (2.112)$$

Analisaremos agora algumas condições sobre o parâmetro a e suas implicações. Se $a < 1$, então $M^2 > 0$ e, conseqüentemente, k^μ será um vetor tipo tempo e podemos escolher um sistema de referência, no qual este só possua componente temporal $(k_0, 0, 0, \dots)$. Neste caso, ξ^μ é tipo espaço e possui norma positiva. Se $a > 1$, $M^2 < 0$ e k^μ é um vetor tipo espaço com somente coordenadas espaciais em um referencial apropriado $(0, k_1, k_2, \dots)$ e ξ^μ é um quadrivetor tipo tempo com norma negativa. O

último caso é o qual $a=1$, o que implica em $M^2 = 0$ e, conseqüentemente, k^μ é um vetor tipo luz, sendo assim, ξ^μ é proporcional a k^μ e possui norma zero. Portanto, uma vez que a norma de $\xi \cdot \alpha_{-1}|0; k^\mu\rangle$ é $\xi \cdot \xi$, obtemos a primeira condição para ausência de fantasmas $a \leq 1$. Na fronteira onde $a = 1$ (estados de norma zero), a partícula vetorial é um fóton e o estado fundamental é um táquion, pois possui o quadrado da massa negativa. O táquion viaja com velocidade maior que a da luz e pode ser excitado para qualquer energia negativa, tornando desta forma a teoria inconsistente. A presença do táquion mostra que o estado fundamental da teoria de cordas, se existe é instável.

Agora, para esta fronteira na qual $a = 1$, devemos examinar também quais são os valores críticos de D . Para isto, consideremos o seguinte estado

$$|\psi\rangle = [c_1\alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} + c_2\alpha_0 \cdot \alpha_{-2} + c_3(\alpha_0 \cdot \alpha_{-2})^2] |0; p\rangle. \quad (2.113)$$

Da condição de concha de massa para $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$, obtemos $p^2 = 2a - 4$, logo $p^2 = -2$, pois $a = 1$. Tal estado também deve satisfazer as condições de estado físico $L_1|\psi\rangle = L_2|\psi\rangle = 0$. A condição $L_1|\psi\rangle = 0$ nos conduz à $(2c_1 + 2c_2 - 4c_3)|0; p\rangle = 0$ e a condição $L_2|\psi\rangle = 0$ à $(Dc_1 - 4c_2 - 2c_3)|0; p\rangle = 0$. Desta forma, podemos dizer que $|\psi\rangle$ somente será um estado físico se os coeficientes c_1, c_2 e c_3 satisfizerem às seguintes relações

$$c_2 = c_1 \frac{D-1}{5} \quad \text{e} \quad c_3 = c_1 \frac{D+1}{10}. \quad (2.114)$$

Neste caso, a norma é $\langle\psi|\psi\rangle = \frac{2c_1^2}{25}(D-1)(26-D)$, de onde podemos observar que o espectro é livre de fantasmas para $D \leq 26$.

Esta análise realizada aqui para a corda aberta pode ser estendida para a corda fechada, desde que um estado de uma corda fechada pode ser escrito como um produto tensorial de dois estados de corda aberta, podemos tomar duas cópias idênticas dos nossos resultados para a corda aberta. O estado fundamental da corda fechada é um táquion, cuja massa é dada por $M^2 = -4/\alpha'$ e com todas as conseqüências que vimos para o caso da corda aberta. Os demais estados podem ser construídos por aplicações de um número igual de operadores de criação no vácuo dos setores esquerdo e direito.

2.3.2 Quantização no Calibre de Cone de Luz

Fixando o calibre conforme, não eliminamos totalmente as simetrias de calibre da ação da corda, o que nos possibilita impor condições adicionais de calibre que reduzam o número de componentes não-triviais de X^μ e nos conduzam somente

aos graus de liberdade dinâmicos. Podemos verificar que ainda resta uma simetria residual, pois a ação em um calibre conforme possui ainda uma invariância por reparametrização das coordenadas da folha mundo

$$(\sigma, \tau) \longrightarrow (\tilde{\sigma}(\sigma, \tau), \tilde{\tau}(\sigma, \tau)), \quad (2.115)$$

onde (σ, τ) e $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ são sistemas de coordenadas ortogonais sobre a folha mundo. Usaremos esta simetria residual para impor uma condição de calibre extra que, como veremos, não é covariante, mas muito conveniente, pois nos conduz a uma teoria livre de fantasmas. Esta invariância deve ser compatível com os vínculos gerados pelo tensor energia-momento. Usando a regra da cadeia, estes dois sistemas de coordenadas podem ser relacionados na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \sigma} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Então, impondo que o lado esquerdo destas equações devam satisfazer os vínculos de Virasoro, equações (2.71), obtemos as seguintes equações diferenciais para as novas coordenadas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \tilde{\sigma} = 0, \quad (2.117)$$

e similarmente,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \tilde{\tau} = 0. \quad (2.118)$$

Portanto, os vínculos implicam que $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\tau}$ satisfazem as mesmas equações de movimento, no calibre conforme, que as coordenadas espaço-temporais $X^\mu(\sigma, \tau)$. Isto significa que podemos identificar $\tilde{\sigma}$ ou $\tilde{\tau}$ como sendo uma das componentes de X^μ . Podemos fazer uma reparametrização tal que uma das coordenadas na folha mundo seja idêntica a uma das coordenadas espaço-temporais. A escolha na qual X^μ é idêntica a τ nos conduz ao calibre de cone de luz como segue.

Se X^0 é a dimensão temporal do espaço-tempo, para um espaço-tempo D -dimensional então temos $D - 1$ dimensões espaciais. Definamos as coordenadas do cone de luz X^+ e X^- como:

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}). \quad (2.119)$$

Existe uma grande diferença entre estas e as coordenadas de cone de luz introduzidas anteriormente para folha mundo. No espaço-tempo temos um total de D coordenadas e (2.119) envolve somente duas delas, a saber, X^0 e X^{D-1} , de um modo arbitrário e não covariante. Na folha mundo, existem somente duas coordenadas,

desta forma a escolha de $\sigma^\pm$ não é arbitrária. Neste sistema de coordenadas, o produto escalar de dois vetores $V = (V^+, V^-, V^i)$ e $U = (U^+, U^-, U^i)$ é definido como

$$U.V = U^+V^- + U^-V^+ - U^iV^i, \quad (2.120)$$

onde o índice i vai de 1 a $D - 2$, e os índices são levantados e abaixados de acordo com a regra: $V^+ = -V_-$, $V^- = -V_+$, $V^i = V_i$. Estas regras nos dizem que as componentes da métrica são $\eta_{ij} = 1$ e $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$. A idéia básica do calibre de cone de luz é escolhermos a direção de X^+ ao longo de $\tilde{\tau}$, desta forma X^+ deve satisfazer a mesma equação de movimento para $\tilde{\tau}$, cuja solução pode ser escolhida como

$$X^+ = x^+ + l^2 p^+ \tau, \quad (2.121)$$

onde p^+ e x^+ são, respectivamente, o momento e a coordenada do centro de massa da corda no calibre do cone de luz. Com esta escolha, usaremos os vínculos para encontrar X^- .

Corda Aberta

A solução da equação de movimento (2.53) para uma corda aberta com a condição de contorno de Neumann, (2.56), é

$$X^\mu = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.122)$$

e a componente temporal do momento canonicamente conjugado no calibre conforme é

$$P_\tau^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} = T \dot{X}^\mu. \quad (2.123)$$

Notemos então que as condições de contorno (2.71) podem ser escritas, respectivamente, como:

$$P_\tau^\mu X'_\mu = 0, \quad (2.124)$$

$$P_\tau^\mu P_{\tau\mu} + T^2 X'^\mu X'_\mu = 0. \quad (2.125)$$

Nas coordenadas do cone de luz, a componente temporal da corrente de momento P_τ^μ pode ser escrita como

$$P_\tau^\pm = T \dot{X}^\pm, \quad (2.126)$$

e as derivadas temporais e espaciais da solução (2.121) são, respectivamente,

$$\dot{X}^+ = l^2 p^+ \quad \text{e} \quad X'^+ = 0. \quad (2.127)$$

Então, a componente + da equação (2.126) torna-se

$$P_{\tau}^{+} = 2\alpha' T p^{+}. \quad (2.128)$$

Logo, para o primeiro vínculo, equação (2.124), obtemos

$$P_{\tau}^{\mu} X'_{\mu} = P_{\tau}^{+} X^{-'} + P_{\tau}^{-} X'^{+} - P_{\tau}^i X'_i = 2\alpha' T p^{+} X^{-'} - P_{\tau}^i X'_i = 0, \quad (2.129)$$

que, em termos das componentes i da corrente de momento P_{τ}^{μ} pode ser escrito como

$$X^{-'} = \frac{1}{2\alpha' T p^{+}} P_{\tau}^i X'_i = \frac{1}{2\alpha' p^{+}} \dot{X}^i X'_i. \quad (2.130)$$

Já o segundo vínculo é dado por:

$$\begin{aligned} P_{\tau}^{\mu} P_{\tau\mu} + T^2 X'^{\mu} X'_{\mu} &= 0 \\ 2P_{\tau}^{+} P_{\tau}^{-} - P_{\tau}^i P_{\tau}^i + 2T^2 X'^{+} X^{-'} - T^2 X'_i X'_i &= 0 \\ 2P_{\tau}^{+} P_{\tau}^{-} &= T^2 X'_i X'_i + P_{\tau}^i P_{\tau}^i \\ 4\alpha' T p^{+} P_{\tau}^{-} &= T^2 X'_i X'_i + T^2 \dot{X}^i \dot{X}^i \\ P_{\tau}^{-} &= \frac{T}{4\alpha' p^{+}} [(\dot{X}^i)^2 + (X'_i)^2] \\ \dot{X}^{-} &= \frac{1}{4\alpha' p^{+}} [(\dot{X}^i)^2 + (X'_i)^2]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Logo, o primeiro vínculo determina $X^{-'}$ e o segundo $\dot{X}^{-}$. Deste modo, podemos combinar estes dois vínculos na forma abaixo para obtermos uma única expressão que é equivalente aos vínculos de Virasoro (2.71)

$$\dot{X}^{-} + X^{-'} = \frac{1}{4\alpha' p^{+}} (\dot{X}^i + X'_i)^2. \quad (2.132)$$

Nas coordenadas do cone de luz, a componente X^{-} da expansão para X^{μ} é

$$X^{-} = x^{-} + 2\alpha' p^{-} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{-} e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.133)$$

A combinação das suas derivadas espacial e temporal, e definindo $\alpha_0^{-} = lp^{-}$, fornece

$$\begin{aligned} \dot{X}^{-} + X^{-'} &= 2\alpha' p^{-} \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^{-} e^{-in\tau} e^{-in\sigma} \\ \dot{X}^{-} + X^{-'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{-} e^{-in\tau} e^{-in\sigma}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Da mesma forma, a componente X^i da expansão para X^μ é

$$X^i = x^i + 2\alpha' p^i \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.135)$$

E definindo $\alpha_0^i = \sqrt{2\alpha'} p^i$, podemos escrever

$$(\dot{X}^i + X_i')^2 = 2\alpha' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_m^i \alpha_l^i e^{-i(m+l)\tau} e^{-i(m+l)\sigma}. \quad (2.136)$$

Portanto, substituindo as equações (2.134) e (2.136) na equação (2.132) e fazendo a seguinte mudança dos índices $n = m + l$, esta combinação de vínculos pode ser escrita como

$$\alpha_n^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^i \alpha_{n-m}^i, \quad (2.137)$$

que é uma forma alternativa de escrevermos os vínculos de Virasoro.

Em resumo, implementando o calibre do cone de luz e fixando X^+ , pudemos resolver X^+ e X^- em termos de X^i e α_n^- em termos de α_n^i , uma vez que escolhemos a solução X^+ de modo que $\alpha_n^- = 0$ para $n \neq 0$. Portanto, este calibre nos conduz somente a graus de liberdade transversais X^i .

A densidade de Lagrangeana no calibre conforme é

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2} (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - X'^\mu X'_\mu)$$

e a Lagrangeana

$$L = \int d\sigma \mathcal{L} = \frac{-T}{2} \int d\sigma (\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - X'^\mu X'_\mu).$$

No calibre do cone de luz, X^+ é especificado e X^- é eliminado. X^i deve satisfazer a mesma equação de onda que X^μ no calibre covariante. Então, a Lagrangeana no calibre de cone de luz é

$$L_{gcl} = -\frac{T}{2} \int d\sigma ((\dot{X}^i)^2 - (X_i')^2). \quad (2.138)$$

Integrando a expressão para a densidade de Hamiltoniana $\mathcal{H} = P_\tau^\mu \cdot X_\mu - \mathcal{L}$, obtemos a Hamiltoniana correspondente no calibre de cone de luz

$$\begin{aligned} H_{gcl} &= \frac{T}{2} \int d\sigma ((\dot{X}^i)^2 + (X_i')^2) \\ &= \frac{1}{2T} \int d\sigma ((\dot{P}_\tau^i)^2 + T^2 (X_i')^2) \\ &= 2\alpha' p^+ \int d\sigma P_\tau^- \\ &= 2\alpha' p^+ p^-, \end{aligned} \quad (2.139)$$

onde usamos a equação (2.132). Em termos dos modos de expansão de Fourier, p^+ e p^- podem ser escritos, respectivamente, como

$$p^+ = \frac{1}{4\alpha' \alpha_0^-} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^i \alpha_{-m}^i \quad \text{e} \quad p^- = \frac{\alpha_0^-}{\sqrt{2\alpha'}}. \quad (2.140)$$

Logo a Hamiltoniana acima torna-se

$$H_{gcl} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^i \alpha_{-m}^i. \quad (2.141)$$

Agora iremos quantizar a teoria, para isto $X^i(\tau, \sigma)$ e P_τ^i serão tratados como operadores quânticos e, conseqüentemente, os modos de Fourier serão quantizados. Os comutadores destes operadores em tempos iguais são

$$\begin{aligned} [X^i(\tau, \sigma), P_\tau^j(\tau, \sigma')] &= i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma'), \\ [X^i(\tau, \sigma), X^j(\tau, \sigma')] &= [P_\tau^i(\tau, \sigma), P_\tau^j(\tau, \sigma')] = 0, \\ [x^-, p^+] &= -i, \\ [x^-, X^i] &= [x^-, P_\tau^j] = [p^+, X^i] = [p^+, P_\tau^j] = 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Das expressões para X^i e P_τ^j nas relações de comutação acima, podemos mostrar que:

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m}. \quad (2.143)$$

Como na quantização canônica, nós podemos interpretar estes coeficientes de Fourier quantizados como um conjunto de osciladores harmônicos quânticos se identificarmos

$$\alpha_{-n}^i = (\alpha_n^i)^\dagger, \quad n > 0, \quad (2.144)$$

e também temos o problema de divergência da Hamiltoniana devido a não comutatividade dos operadores α_m^i e α_{-m}^i . Para resolvermos este problema, devemos ordenar normalmente os operadores que aparecem na Hamiltoniana, e explicitamente separarmos a divergência constante, que representa a energia de ponto zero dos osciladores, da seguinte forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_m^i \alpha_{-m}^i : -a, \quad (2.145)$$

onde das relações de comutação (2.143) temos

$$a = -\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (2.146)$$

Podemos regularizar esta divergência escolhendo um método particular chamado regularização da função ζ , com $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, que é analítica para $s = -1$. Então

$$a = -\frac{D-2}{2}\zeta(-1) = \frac{D-2}{24}. \quad (2.147)$$

O estado fundamental, ou vácuo da corda, é definido por

$$\alpha_n^i |0; p\rangle_\alpha = 0, \quad n > 0, \quad (2.148)$$

e

$$p_{op}^i |0; p\rangle_\alpha = p^i |0; p\rangle_\alpha. \quad (2.149)$$

Iremos frequentemente nos referir ao estado $|0; p\rangle_\alpha$ como $|0\rangle_\alpha$ em situações onde os momentos da corda não têm importância. Estados excitados, vetores no espaço de Fock, são criados por aplicações sucessivas dos operadores de criação $(\alpha_n^i)^\dagger = \alpha_{-n}^i$, $n > 0$, no estado de vácuo $|0\rangle_\alpha$.

Os estados físicos de uma partícula podem ser classificados de acordo com sua massa. As massas são autovalores de um operador massa relacionado com o momento de uma partícula pela condição de concha de massa: $M^2 = -p^\mu p_\mu$. O quadrado da massa da corda é o autovalor do operador M^2 definido como

$$\begin{aligned} M^2 &= p^\mu p_\mu \\ &= 2p^+ p^- - p^i p^i \\ &= 2\pi T H_{gl} - \phi T \alpha_0^i \alpha_0^i \\ &= \pi T \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_m^i \alpha_{-m}^i : - 2a - \alpha_0^i \alpha_0^i \right) \\ &= \pi T \left(\sum_{m \neq 0} : \alpha_m^i \alpha_{-m}^i : - 2a \right) \\ &= 2\pi T (N - a), \end{aligned} \quad (2.150)$$

onde

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i$$

é o operador número usual que conta o número de excitações no estado. Esta é a mesma condição de concha de massa encontrada no tratamento covariante, exceto que somente os modos transversais contribuem para N .

O quadrado da massa da corda no estado fundamental, ($N = 0$), é

$$M^2 |0\rangle = -2\phi T a |0\rangle = M_0^2 |0\rangle. \quad (2.151)$$

Como $a > 0$, isto nos conduz a uma teoria não-causal, uma vez que o vácuo possui o quadrado da massa negativa. A partícula representada por este estado é chamada de tachyon.

No calibre de cone de luz, quantizamos somente os graus de liberdade dinâmicos, excluindo então a possibilidade da existência de estados de norma negativa (fantasmas). No entanto, para quantizarmos somente estes graus de liberdade dinâmicos quebramos a covariância de Lorentz manifesta.

Agora, vamos examinar o primeiro estado excitado, ou seja, um estado contendo uma excitação transversal de um oscilador, $\alpha_{-1}^i |0\rangle_\alpha$. Este conjunto de estados forma um vetor com $D - 2$ componentes físicas transversalmente polarizadas. A falta de componentes longitudinais e a eliminação de duas componentes não físicas via transformações de calibre, como no caso do fóton no calibre de Coulomb, é uma característica de campos de massa nula. Isto implica que este estado deve possuir massa nula se a invariância de Lorentz for mantida. A massa deste estado é obtida aplicando o operador de massa (2.150) no vácuo $|0\rangle_\alpha$ e resultando o seguinte autovalor

$$M^2 = 2\pi T(1 - a). \quad (2.152)$$

O estado terá massa nula somente se $a = 1$. Portanto, da equação (2.147) obtemos que a dimensão do espaço-tempo é $D = 26$.

Os geradores de Lorentz são

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\phi d\sigma M_\tau^{\mu\nu} = \int_0^\phi d\sigma (X^\mu P_\tau^\nu - X^\nu P_\tau^\mu), \quad (2.153)$$

onde $M_\tau^{\mu\nu}$ é a componente τ da corrente conservada associada à simetria de Lorentz da ação da corda. Classicamente, estes geradores satisfazem à álgebra de Lorentz

$$[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\rho}] = i\eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}. \quad (2.154)$$

Esta simetria pode ser verificada se fizermos uma transformação infinitesimal de Lorentz, $\delta X^\mu = \delta\Lambda^{\mu\nu} X_\nu$, na ação da corda. Uma vez que esta é uma operação de simetria, $\delta S = 0$, a corrente é conservada. $M^{\mu\nu}$ é a carga associada a esta corrente.

No calibre covariante, onde a componente τ da corrente de momento é dada por $P_\tau^\mu = T\dot{X}^\mu$, os geradores de Lorentz são

$$M^{\mu\nu} = T \int_0^\phi d\sigma (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu). \quad (2.155)$$

Substituindo os modos de expansão dos campos X^μ , equação (2.57) nesta expressão e efetuando a integração obtemos:

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (2.156)$$

Classicamente, as componentes M^{-i} destes geradores satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[M^{-i}, M^{-j}] = 0, \quad (2.157)$$

e o comutador quântico correspondente é

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) - a \right) \right] \times (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i). \quad (2.158)$$

Para a teoria permanecer invariante por transformações de Lorentz, o lado direito deste comutador deve ser zero. Para isto, devemos ter a dimensão crítica do espaço-tempo $D = 26$ e $a = 1$.

Corda Fechada

Agora, analisaremos a corda fechada no calibre de cone de luz. Esta análise seguirá a mesma linha que a usada para a corda aberta. Os modos de expansão da corda fechada são dados pela equação (2.58). No calibre de cone de luz, a componente X^+ do campo ainda é dada pela equação (2.121). Isto implica, se compararmos as equações (2.58) e (2.121), que

$$\alpha_n^+ = \beta_n^+ = 0 \quad . \quad (2.159)$$

para $n \neq 0$. Podemos subtrair a equação (2.130) da (2.131) para obter a seguinte combinação entre os vínculos de Virasoro:

$$\dot{X}^- - X'^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^i - X_i')^2. \quad (2.160)$$

A componente X^- da expansão da solução X^μ no calibre covariante é

$$X^-(\tau, \sigma) = X_R^-(\tau, \sigma) + X_L^-(\tau, \sigma), \quad (2.161)$$

onde

$$X_R^- = \frac{1}{2}x^- + \alpha' p^-(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.162)$$

e

$$X_L^- = \frac{1}{2}x^- + \alpha' p^-(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \beta_n^- e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.163)$$

Então, substituindo esta solução nas equações de vínculo (2.132) e (2.160), teremos, respectivamente

$$\dot{X}^- + X'^- = \sqrt{2\alpha'} (\alpha_0^- - \beta_0^-) + 2\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n^- e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (2.164)$$

e

$$\dot{X}^- - X^{-'} = \sqrt{2\alpha'}(\beta_0^- - \alpha_0^-) + 2\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^- e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (2.165)$$

onde definimos

$$\alpha_0^- + \beta_0^- = p^- \sqrt{2\alpha'}. \quad (2.166)$$

Analogamente para o caso da corda aberta, podemos definir

$$\alpha_0^i = \beta_0^i = \frac{\sqrt{2\alpha'} p^i}{2} \quad (2.167)$$

e, a partir dos vínculos, obter as componentes α_l^- e β_l^- em termos das componentes α_l^i e β_l^i , respectivamente, como segue:

$$\alpha_l^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_l^i \alpha_{l-n}^i, \quad \beta_l^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_l^i \beta_{l-n}^i. \quad (2.168)$$

Desta forma, a Hamiltoniana clássica (2.139) no calibre de cone de luz para a corda fechada é

$$H_{l_{cg}} = 2\alpha' p^+ p^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n^i \alpha_{-n}^i + \beta_n^i \beta_{-n}^i) \quad (2.169)$$

e a expressão clássica para o quadrado da massa da corda aberta é

$$\begin{aligned} M^2 &= p^\mu p_\mu \\ &= 2p^+ p^- - p^i p^i \\ &= 4\pi T \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^i \alpha_{-m}^i + \beta_m^i \beta_{-m}^i). \end{aligned} \quad (2.170)$$

Para quantizarmos a corda fechada, precisamos impor relações de comutação análogas às relações (2.142). Então, se substituirmos a componente i da solução para a corda fechada, equação (2.58), obtemos as seguintes relações de comutação entre os osciladores

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\beta_n^i, \beta_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m} \quad \text{e} \quad [\alpha_n^i, \beta_m^j] = 0,$$

onde α_{-n}^i e β_{-n}^i para $n > 0$ atuam como operadores de criação e, α_n^i e β_n^i como operadores de destruição. Como na quantização aparecem problemas de divergência, precisamos introduzir o ordenamento normal em todas as quantidades definidas anteriormente em termos dos operadores de criação e destruição.

$$\begin{aligned} \alpha_l^- &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_n^i \alpha_{l-n}^i : - a \\ \beta_l^- &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \beta_n^i \beta_{l-n}^i : - a \end{aligned}$$

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(: \alpha_n^i \alpha_{-n}^i : + : \beta_n^i \beta_{-n}^i : - 2a \right)$$

$$M^2 = 4\pi T(N + \tilde{N} - 2a),$$

onde

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \quad \text{e} \quad \tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n}^i \beta_n^i.$$

Como na teoria para a corda aberta, a exigência de que no calibre de cone de luz a teoria seja invariante por Lorentz requer que $D = 26$ e $a = 1$. Para a corda fechada, o estado de vácuo que satisfaz

$$\alpha_n^i |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta = \beta_n^i |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta = 0, \quad n > 0 \quad (2.171)$$

é um tachyon. O próximo estado permitido possui um modo de excitação para a direita balanceado por um modo de excitação para a esquerda,

$$\alpha_{-1}^i \beta_{-1}^i |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta, \quad (2.172)$$

e possui massa nula. Podemos também tomar uma combinação de estados que seja simétrica e de traço nulo e que se transforme como uma partícula de spin 2 sem massa. Esta combinação de estados é a seguinte

$$\left(\frac{1}{2} (\alpha_{-1}^i \beta_{-1}^j + \alpha_{-1}^j \beta_{-1}^i) - \alpha_{-1}^i \beta_{-1}^i \right) |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta, \quad (2.173)$$

e a identificaremos com o gráviton. O traço do estado escalar $\alpha_{-1}^i \beta_{-1}^i |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta$ é chamado de dilaton. Os estados restantes no espectro da corda fechada são massivos, $M^2 > 0$.

A corda aberta livre não contém o gráviton. Quando adicionamos interações, uma corda aberta pode auto-interagir juntando suas extremidades. Deste modo, uma teoria para a corda aberta com interação contém necessariamente um setor de corda fechada, e deste modo, o gráviton [18, 21].

Capítulo 3

Dinâmica de Campos Térmicos

Geralmente, não encontramos na natureza sistemas completamente isolados, mas sim em contato no mínimo com um reservatório térmico (estes sistemas podem estar também em contato com um reservatório de partículas). Deste fato, surge a necessidade de termos uma teoria de campos à temperatura finita para descrevermos tais sistemas.

Existem diversos formalismos para se introduzir temperatura em teorias de campos. Aqui, em particular, apresentaremos o formalismo desenvolvido inicialmente por Umezawa e Takahashi [1] conhecido como *Dinâmica de Campos Térmicos* (DCT). Neste formalismo é definido um vácuo térmico, $|0(\beta)\rangle$, tal que o valor esperado neste vácuo de um operador Hermitiano A coincida com sua média estatística

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta) \text{tr} [e^{-\beta \mathcal{H}} A] = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{H} = H - \mu N$, $Z(\beta) = \text{tr} [e^{-\beta \mathcal{H}}]$ e $\beta = \frac{1}{k_B T}$ sendo H a Hamiltoniana total, μ o potencial químico, N o número de partículas e k_B a constante de Boltzmann. Esta idéia foi inspirada na proposta de Matsubara [2] de que, a média estatística de um operador $\langle A \rangle$ tem propriedades semelhantes às do valor esperado deste operador no vácuo $\langle 0 | A | 0 \rangle$ em teoria quântica de campos. Como veremos, estados de vácuo em diferentes temperaturas são conectados uns aos outros através de uma transformação de Bogoliubov.

3.1 Dinâmica de Campos Térmicos - Formalismo Canônico

A idéia central em DCT é expressar médias estatísticas de uma variável dinâmica A como o valor esperado deste operador em um vácuo dependente da temperatura [1, 3, 4]. Sendo assim, devemos construir tal vácuo de modo que a equação (3.1) seja satisfeita para uma variável dinâmica arbitrária A

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_n \langle n | A | n \rangle e^{-\beta \omega_n}, \quad (3.2)$$

onde, por simplicidade, iremos supor que os autovalores de $\mathcal{H}$ são discretos e sua equação de autovalor é dada por $\mathcal{H}|n\rangle = \omega_n|n\rangle$. Os auto-estados $|n\rangle$ são ortonormalizados de modo que $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

Expandindo o estado de vácuo $|0(\beta)\rangle$ em termos de uma base $|n\rangle$ do espaço de Hilbert na forma

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)|n\rangle, \quad (3.3)$$

onde usamos a completeza do nosso espaço de Hilbert, e substituindo no lado esquerdo da equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_n f_n^*(\beta) \langle n|A \sum_m f_m(\beta)|m\rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta\omega_n}, \\ \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n|A|m\rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta\omega_n}, \\ \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n|A|m\rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} \delta_{nm} \langle n|A|m\rangle e^{-\beta\omega_n}, \\ f_n^*(\beta) f_m(\beta) &= Z^{-1}(\beta) e^{-\beta\omega_n} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esta relação não faz sentido, pois os coeficientes da expansão (3.3) são escalares complexos e estes não possuem a propriedade de ortogonalidade entre si como expressa esta relação. Portanto, se mantivermos o espaço de Hilbert original, tal estado ($|0(\beta)\rangle$) não poderá ser construído. No entanto, a relação (3.4) mostra uma estrutura vetorial (ortogonalidade) e, portanto, os coeficientes da expansão devem ser vetores. Em outras palavras, o estado $|0(\beta)\rangle$ deverá ser um vetor expandido por $|n\rangle$ e $f_n(\beta)$.

Para construirmos um estado que satisfaça a equação (3.2) devemos dobrar os graus de liberdade da teoria. Isto é feito introduzindo um sistema dinâmico não físico representado por um estado $|\tilde{m}\rangle$ (chamado de espaço til) ortogonal e com as mesmas características do sistema físico original, por exemplo, energia, número de partículas. Denotaremos, então, todas as quantidades associadas a este sistema não físico com um til. A Hamiltoniana deste sistema $\tilde{\mathcal{H}}$ e o espaço dos vetores de estado $|\tilde{n}\rangle$ obedecem as seguintes relações

$$\tilde{\mathcal{H}}|\tilde{n}\rangle = \omega_n|\tilde{n}\rangle, \quad \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{mn},$$

onde, como definimos anteriormente, ω_n é o mesmo do sistema físico.

O vetor de estado do sistema total é construído a partir do produto direto dos vetores de estado de cada um dos sistemas, físico e não físico, $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$. Desta forma, os elementos de matriz dos operadores A e $\tilde{A}$ são dados respectivamente por

$$\langle \tilde{m}, n|A|n', \tilde{m}'\rangle = \langle n|A|n'\rangle \delta_{mm'}, \quad \langle \tilde{m}, n|\tilde{A}|n', \tilde{m}'\rangle = \langle \tilde{m}|\tilde{A}|\tilde{m}'\rangle \delta_{nn'}. \quad (3.5)$$

Definindo o coeficiente vetorial da expansão (3.3) como

$$f_n(\beta) = e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) |\tilde{n}\rangle, \quad (3.6)$$

podemos verificar que a relação (3.4) é satisfeita:

$$\begin{aligned} f_n^*(\beta) f_m(\beta) &= e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) \langle \tilde{n} | e^{-\beta\omega_m/2} Z^{-1/2}(\beta) | \tilde{m} \rangle \\ &= e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_n + \omega_m)} Z^{-1}(\beta) \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle \\ &= Z^{-1} e^{-\beta\omega_n}(\beta) \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Ainda, usando a definição (3.6), podemos construir o estado de vácuo térmico a partir da equação (3.3) como segue:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) |\tilde{n}\rangle \otimes |n\rangle = \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) |n, \tilde{n}\rangle. \quad (3.7)$$

A expressão da função de partição $Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta\omega_n} \langle n | n \rangle = \text{tr} [e^{-\beta\mathcal{H}}]$ pode ser obtida exigindo-se que o estado $|0(\beta)\rangle$ satisfaça a condição de normalização $\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1$ como segue

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) \langle \tilde{n}, n | \sum_m e^{-\beta\omega_m/2} Z^{-1/2}(\beta) | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m} e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_n + \omega_m)} Z^{-1}(\beta) \langle \tilde{n}, n | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m} e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_n + \omega_m)} Z^{-1}(\beta) \langle n | m \rangle \delta_{nm} \\ &= \sum_n e^{-\beta\omega_n} Z^{-1}(\beta) \langle n | n \rangle = 1. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta\omega_n} \langle n | n \rangle = \text{tr} [e^{-\beta\mathcal{H}}]. \quad (3.8)$$

Verificaremos, agora, que o valor médio de um operador A no estado de vácuo térmico obtido, equação (3.7), está de acordo com a hipótese de Umezawa, eq. (3.2)

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} \langle \tilde{n}, n | A Z^{-1/2}(\beta) \sum_m e^{-\beta\omega_m/2} | m, \tilde{m} \rangle \\ &= Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_n + \omega_m)} \langle n | A | m \rangle \delta_{nm} \\ &= Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta\omega_n} \langle n | A | n \rangle. \end{aligned}$$

Podemos notar que na construção dos estados $|0(\beta)\rangle$ aparece o produto direto dos vetores $|n\rangle$ e $|\tilde{n}\rangle$, e como verificado acima, o vetor $|\tilde{n}\rangle$ seleciona o elemento diagonal do observável A .

Portanto, mostramos que podemos introduzir um estado de vácuo dependente da temperatura tal que a média estatística de qualquer operador pode ser identificado com o valor esperado do operador neste estado. Mas, isto implica obrigatoriamente em uma duplicação do espaço de Hilbert. Por outro lado, a vantagem se encontra no fato de que podemos usar as técnicas de uma teoria de campos à temperatura nula nesta teoria à temperatura finita. Usaremos agora um sistema de bósons livres como exemplo para ilustrar como construir um conjunto completo de vetores ortonormais ao qual pertence o vetor $|0(\beta)\rangle$. Veremos também como construir o espaço de Fock usando este exemplo.

3.1.1 Ensemble de Bósons Livres com Freqüência ω

Vamos agora detalhar o formalismo da DCT através de um exemplo simples. Consideremos um oscilador bosônico de freqüência ω descrito por um par de variáveis complementares a e $a^\dagger$ não Hermitianas, cuja Hamiltoniana é

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (3.9)$$

com a e $a^\dagger$ satisfazendo as seguintes relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \text{e} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (3.10)$$

O espaço de Hilbert é de dimensão infinita e os auto-estados de H podem ser construídos baseados nas relações de comutação (3.10). Os estados serão rotulados por um índice inteiro n :

$$H|n\rangle = \omega_n|n\rangle \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.11)$$

Partindo do estado $|n\rangle$, encontramos que $a^\dagger|n\rangle$ e $a|n\rangle$ são também auto-estados da Hamiltoniana, mas com o autovalor da energia deslocado de um quantum, ou seja,

$$Ha^\dagger|n\rangle = \omega a^\dagger a a^\dagger|n\rangle = \omega a^\dagger(1 + a^\dagger a)|n\rangle = (\omega_n + \omega)a^\dagger|n\rangle \quad (3.12)$$

e

$$Ha|n\rangle = (\omega_n - \omega)a|n\rangle. \quad (3.13)$$

O estado fundamental $|0\rangle$ é definido como sendo o estado de menor energia possível, que implica em

$$a|0\rangle = 0.$$

Qualquer auto-estado do oscilador pode ser construído através de aplicações sucessivas do operador de criação, $a^\dagger$, no estado fundamental, ou seja

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle.$$

Portanto, o conjunto de estados ortonormais é

$$|0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{1!}}a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2!}}a^\dagger a^\dagger|0\rangle = |2\rangle, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle = |n\rangle \dots$$

Mostraremos agora como construir o vetor de estado $|0(\beta)\rangle$ para este sistema. De acordo com a nossa discussão geral da DCT feita na seção anterior, devemos introduzir um sistema fictício, idêntico ao sistema original, descrito pela Hamiltoniana

$$\widetilde{H} = \omega \widetilde{a}^\dagger \widetilde{a},$$

onde $\widetilde{a}$ e $\widetilde{a}^\dagger$ satisfazem as mesmas relações de comutação expressas por (3.10)

$$[\widetilde{a}, \widetilde{a}^\dagger] = 1 \quad \text{e} \quad [\widetilde{a}, \widetilde{a}] = [\widetilde{a}^\dagger, \widetilde{a}^\dagger] = 0.$$

Assumimos ainda que todas as variáveis complementares do sistema real comutam com as variáveis do sistema fictício, ou seja,

$$[a, \widetilde{a}] = [a^\dagger, \widetilde{a}^\dagger] = [a, \widetilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \widetilde{a}] = 0.$$

Analogamente ao sistema físico, teremos que os vetores de estado ortogonais são

$$|\widetilde{0}\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{1!}}\widetilde{a}^\dagger|\widetilde{0}\rangle = |\widetilde{1}\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2!}}\widetilde{a}^\dagger\widetilde{a}^\dagger|\widetilde{0}\rangle = |\widetilde{2}\rangle, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{n!}}(\widetilde{a}^\dagger)^n|\widetilde{0}\rangle = |\widetilde{n}\rangle \dots$$

e, como o sistema fictício deve possuir as mesmas características do sistema físico, os autovalores da Hamiltoniana $\widetilde{H}$ são $n\omega$, onde $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Os vetores de estado ortogonais do sistema composto (produto direto dos estados $|n\rangle$ e $|\widetilde{n}\rangle$) serão

$$|0\rangle\rangle, \quad a^\dagger|0\rangle\rangle, \quad \widetilde{a}^\dagger|0\rangle\rangle, \quad a^\dagger\widetilde{a}^\dagger|0\rangle\rangle, \quad \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n(\widetilde{a}^\dagger)^n|0\rangle\rangle, \dots \quad (3.14)$$

onde estamos denotando

$$|0, \widetilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\widetilde{0}\rangle = |0\rangle\rangle.$$

Assim sendo, podemos construir o estado $|0(\beta)\rangle$, como indicado pela equação (3.7), da seguinte forma

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) |n, \widetilde{n}\rangle \\ &= \sum_n e^{-\beta\omega_n/2} Z^{-1/2}(\beta) \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n (\widetilde{a}^\dagger)^n |0\rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podemos ainda obter a função de partição para este sistema, exigindo a ortonormalização do estado $|0(\beta)\rangle$ encontrado

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_{m,n} \langle\langle 0 | \frac{1}{n!} (\tilde{a})^n (a)^n e^{-\beta(\omega_n + \omega_m)/2} \frac{1}{m!} (a^\dagger)^m (\tilde{a}^\dagger)^m | 0 \rangle\rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{m,n} \langle\langle 0 | \frac{1}{n!} (\tilde{a})^n (a)^n e^{-\beta(\omega_n + \omega_m)/2} \frac{1}{m!} (a^\dagger)^m (\tilde{a}^\dagger)^m | 0 \rangle\rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{m,n} e^{-\beta(\omega_n + \omega_m)/2} \langle \tilde{n}, n | m, \tilde{m} \rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{m,n} e^{-\beta(\omega_n + \omega_m)/2} \langle n | m \rangle \delta_{m,n} \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta\omega n} \langle n | n \rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{(-\beta\omega)n} \langle n | n \rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} = 1,
\end{aligned}$$

de forma que

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}.$$

Usando esta função de partição, e rearranjando os termos, podemos reescrever o estado de vácuo térmico, equação (3.15), na forma

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}n\omega} \frac{1}{n!} (a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0\rangle\rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\frac{\beta}{2}\omega)n} \frac{1}{n!} (a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0\rangle\rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{-\frac{\beta}{2}\omega} a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0\rangle\rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp(e^{-\frac{\beta}{2}\omega} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que o estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ pode ser mapeado no vácuo total $|0\rangle\rangle$ em $T = 0$ por uma dada transformação de Bogoliubov. Para isto definimos

$$u(\beta) = (1 - e^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + f_B(\omega)} = \cosh \theta(\beta) \quad (3.16)$$

e

$$v(\beta) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{f_B(\omega)} = \sinh \theta(\beta) \quad (3.17)$$

onde f_B é a distribuição de Bose [5]. Podemos então verificar que

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1. \quad (3.18)$$

Usando estas definições, podemos escrever o vetor de estado $|0(\beta)\rangle$ como

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= u(\beta)^{-1} \exp \left[e^{-\beta\omega/2} \frac{(1 - e^{-\beta\omega})^{1/2}}{(1 - e^{-\beta\omega})^{1/2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right] |0\rangle \\
 &= u(\beta)^{-1} \exp \left[\left(\frac{1}{(e^{\beta\omega} - 1)} \right)^{1/2} (1 - e^{-\beta\omega})^{1/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right] |0\rangle \\
 &= u(\beta)^{-1} \exp \left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde usamos as equações para $u(\beta)$ e $v(\beta)$ definidas anteriormente.

Podemos ainda definir o seguinte operador Hermitiano

$$G(\theta) = G(\theta)^\dagger = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger), \tag{3.20}$$

onde $\theta(\beta)$ é um parâmetro real que depende da temperatura definido em (3.16) e (3.17), tal que o operador $U(\theta) = e^{-iG(\theta)}$ seja unitário. Este operador gera o vácuo térmico a partir do espaço dobrado como segue

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\theta)} |0\rangle. \tag{3.21}$$

A transformação que liga o estado de vácuo térmico ao vácuo duplicado à temperatura nula é chamada de transformação de Bogoliubov, equação (3.21), e o gerador desta transformação, equação (3.20), é chamado operador de Bogoliubov. Esta afirmação de que o estado $|0(\beta)\rangle$ pode ser colocado na forma (3.21) está demonstrado no apêndice A.

Dadas as seguintes relações de comutação

$$[G, a] = -i\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad [G, \tilde{a}] = -i\theta(\beta)a^\dagger, \quad [G, a^\dagger] = -i\theta(\beta)\tilde{a}, \quad [G, \tilde{a}^\dagger] = -i\theta(\beta)a$$

podemos ver que os operadores de destruição na temperatura finita são também gerados por estas transformações unitárias, transformações de Bogoliubov, como segue

$$\begin{aligned}
 a(\beta) &= e^{-iG} a e^{iG} \\
 &= a - \frac{i}{1!} [G, a] + \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, a]] - \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, a]]] + \frac{(i)^4}{4!} [G, [G, [G, [G, a]]]] + \dots \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}(\beta)}{2n!} \right) a - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}^\dagger \\
 &= \cosh \theta(\beta) a - \sinh \theta(\beta) \tilde{a}^\dagger \\
 &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\beta) &= e^{-iG} \tilde{a} e^{iG} \\
&= a - \frac{i}{1!} [G, \tilde{a}] + \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, \tilde{a}]] - \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, \tilde{a}]]] + \frac{(i)^4}{4!} [G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]] + \dots \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}(\beta)}{2n!} \right) \tilde{a} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}^\dagger \\
&= \cosh \theta(\beta) \tilde{a} - \sinh \theta(\beta) a^\dagger \\
&= u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^\dagger
\end{aligned} \tag{3.23}$$

e seus Hermitianos conjugados (operadores de criação) são respectivamente

$$a^\dagger(\beta) = e^{-iG} a e^{iG} = u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a}, \tag{3.24}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = e^{-iG} \tilde{a}^\dagger e^{iG} = u(\beta) \tilde{a}^\dagger - v(\beta) a. \tag{3.25}$$

Abaixo estão expressos a e $a^\dagger$ em termos dos operadores térmicos, os quais foram obtidos simplesmente invertendo as equações (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25)

$$a = u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta), \quad a^\dagger = u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta)$$

$$\tilde{a} = u(\beta) \tilde{a}(\beta) + v(\beta) a^\dagger(\beta), \quad \tilde{a}^\dagger = u(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta) a(\beta).$$

Os operadores térmicos podem também ser obtidos de um modo geral se definirmos o seguinte dubleto como

$$A = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

então podemos escrever

$$\begin{aligned}
A(\beta) &= \begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = U(\theta) A U^\dagger(\theta) = \bar{U}(\theta) A \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \theta(\beta) & -\sinh \theta(\beta) \\ -\sinh \theta(\beta) & \cosh \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com $\theta(\beta)$ dado por (3.16) e (3.17) e

$$\bar{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta(\beta) & -\sinh \theta(\beta) \\ -\sinh \theta(\beta) & \cosh \theta(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

A média estatística do operador número $N = a^\dagger a$ pode ser calculada usando os operadores dependentes da temperatura, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta)) (u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | u^2(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u(\beta) v(\beta) (a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) + a(\beta) \tilde{a}(\beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= v^2(\beta) \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = f_B(\beta)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

que é exatamente a distribuição de Bose que aparece nas equações (3.16) e (3.17). Vemos que a construção de Umezawa nos conduz a um resultado conhecido da mecânica estatística. Mais adiante, obteremos outros resultados, tais como a entropia e a energia livre de Helmholtz.

Definidos os operadores de criação e destruição térmicos, podemos mostrar que o vetor de estado $|0(\beta)\rangle$ é realmente o vácuo térmico, pois

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} a e^{iG} |0(\beta)\rangle = e^{-iG} a e^{iG} e^{-iG} |0\rangle = e^{-iG} a |0\rangle = 0 \quad (3.30)$$

e

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} \tilde{a} e^{iG} |0(\beta)\rangle = e^{-iG} \tilde{a} e^{iG} e^{-iG} |0\rangle = e^{-iG} \tilde{a} |0\rangle = 0, \quad (3.31)$$

onde usamos as transformações de Bogoliubov, equações (3.21), (3.22) e (3.23), para obtermos o vácuo e os operadores de destruição térmicos em termos dos respectivos operadores à temperatura nula. Verificamos portanto que o estado $|0(\beta)\rangle$ é aniquilado por operadores de destruição térmicos. Podemos então pensar neste como sendo um estado de vácuo térmico. Finalmente, podemos construir o espaço térmico de Hilbert através de aplicações sucessivas dos operadores de criação térmicos no vácuo térmico. Das equações (3.16) e (3.17), podemos ainda obter

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2} \quad (3.32)$$

de modo que (3.30) e (3.31) possam ser escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$a|0(\beta)\rangle = e^{-\beta\omega/2} \tilde{a}^\dagger |0(\beta)\rangle = e^{-\beta\hat{H}/2} \tilde{a}^\dagger |0(\beta)\rangle \quad (3.33)$$

e

$$\tilde{a}|0(\beta)\rangle = e^{-\beta\omega/2} a^\dagger |0(\beta)\rangle = e^{-\beta\hat{H}/2} a^\dagger |0(\beta)\rangle. \quad (3.34)$$

Juntas, elas conduzem às regras de conjugação til que serão apresentadas adiante.

No entanto, tais vetores de estados não são auto-estados das Hamiltonianas dos sistema físico e fictício, entretanto podemos construir uma nova Hamiltoniana ($\hat{H}$) envolvendo H e $\tilde{H}$ da qual estes são auto-estados. Usando as equações que nos fornecem os operadores em $T = 0$ em função dos operadores em $T \neq 0$ e a equação (3.18) podemos escrever esta nova Hamiltoniana como

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega (a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) = \omega (a^\dagger(\beta) a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta)). \quad (3.35)$$

Isto mostra que a Hamiltoniana total é invariante por transformações de Bogoliubov, logo, o gerador é conservado

$$[G, \hat{H}] = 0. \quad (3.36)$$

Podemos pensar nesta Hamiltoniana como sendo a que governa a dinâmica do sistema combinado (real e fictício).

3.2 Formalismo Lagrangiano para os Campos Livres

Na seção anterior, estudamos um sistema quanto-mecânico simples à temperatura finita no formalismo da DCT. Agora, iremos analisar uma teoria de campos à temperatura finita neste formalismo. Como exemplo, vamos considerar um campo de Schrödinger em 3+1 dimensões. Para isto, faremos uma breve exposição dos conceitos de campos clássicos e quantização canônica dos campos usando como exemplo o campo de Schrödinger.

Consideraremos um sistema descrito pela densidade de lagrangeana do campo de Schrödinger [16] livre

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi. \quad (3.37)$$

Neste caso, devemos considerar as funções $\psi(\vec{x}, t)$ e $\psi^*(\vec{x}, t)$ como campos independentes. Fazendo a variação da ação, obteremos duas equações independentes de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = 0. \quad (3.38)$$

Podemos verificar que estas equações de Euler-Lagrange nos conduzem às seguintes equações de movimento

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad \text{e} \quad i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*, \quad (3.39)$$

que são respectivamente a equação de Schrödinger livre e seu complexo conjugado. Para introduzirmos o formalismo Hamiltoniano, será necessário introduzirmos os campos canonicamente conjugados associados aos campos $\psi(\vec{x}, t)$ e $\psi^*(\vec{x}, t)$ que são respectivamente definidos por

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^*(\vec{x}, t) \quad \text{e} \quad \phi^*(\vec{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = 0, \quad (3.40)$$

portanto, existem somente dois campos independentes $\psi(\vec{x}, t)$ e $\phi(\vec{x}, t)$. A densidade de Hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \phi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \quad (3.41)$$

que depois de uma integração por partes nos conduz à Hamiltoniana

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 \right) \psi(\vec{x}, t). \quad (3.42)$$

Os colchetes de Poisson a tempos iguais são

$$\{\psi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.43)$$

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)\} = \{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)\} = 0. \quad (3.44)$$

No processo de quantização canônica, os campos clássicos $\psi(\vec{x}, t)$ e $\phi(\vec{x}, t)$ são trocados pelos operadores $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ e $\hat{\phi}(\vec{x}, t) = i\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)$, onde o campo complexo $\psi^*(\vec{x}, t)$ foi trocado pelo operador de campo Hermitiano adjunto $\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)$. Trocamos também os parênteses de Poisson por comutadores de acordo com a relação

$$\{ \ , \ } \longrightarrow \frac{1}{i} [\ , \]. \quad (3.45)$$

Desta forma, as relações de comutação a tempos iguais são

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.46)$$

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)] = 0. \quad (3.47)$$

Este procedimento é chamado Princípio da Correspondência [18]. A evolução dinâmica dos operadores de campo é dada pelas equações de movimento de Heisenberg

$$i\dot{\hat{\psi}} = [\hat{\psi}, \hat{H}] \quad \text{e} \quad i\dot{\hat{\phi}} = [\hat{\phi}, \hat{H}]. \quad (3.48)$$

Usando as relações de comutação para os operadores de campo, e estas equações de movimento, podemos obter a equação de Schrödinger. Para verificarmos isto, usaremos $\mathcal{D}_x$ como abreviação para o operador diferencial de Schrödinger livre definido como

$$\mathcal{D}_x = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \quad (3.49)$$

então

$$\begin{aligned} i\dot{\hat{\psi}} &= [\hat{\psi}, \hat{H}] \\ &= \int d^3x' [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)\mathcal{D}_{x'}\hat{\psi}(\vec{x}', t)] \\ &= \int d^3x' ([\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)]\mathcal{D}_{x'}\hat{\psi}(\vec{x}, t) + \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)\mathcal{D}_{x'}[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]) \\ &= \mathcal{D}_x\hat{\psi}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Portanto, o operador de campo também satisfaz a equação de Schrödinger livre e dependente do tempo

$$i\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\hat{\psi}. \quad (3.51)$$

Introduziremos o sistema fictício (denotado com til), o qual é descrito pela densidade de Lagrangeana convenientemente definida como [1]

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vec{x}, t) = -i\tilde{\psi}^* \dot{\tilde{\psi}} - \frac{1}{2m} \nabla \tilde{\psi}^* \nabla \tilde{\psi}. \quad (3.52)$$

A razão para o sinal negativo no primeiro termo da densidade de Lagrangeana acima tornar-se-a claro em breve. O momento canonicamente conjugado ao campo $\tilde{\psi}(x, t)$ é dado por

$$\tilde{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{\psi}}} = -i\tilde{\psi}^*(\vec{x}, t). \quad (3.53)$$

Como no caso do sistema físico real, o momento canonicamente conjugado ao campo $\tilde{\psi}^*(\vec{x}, t)$ é nulo, existindo somente dois campos independentes $\tilde{\psi}(\vec{x}, t)$ e $\tilde{\phi}(\vec{x}, t)$. A densidade de Hamiltoniana para este sistema fictício é

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\phi} \dot{\tilde{\psi}} - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2m} \nabla \tilde{\psi}^* \nabla \tilde{\psi} \quad (3.54)$$

e os colchetes de Poisson a tempos iguais são

$$\{\tilde{\psi}(\vec{x}, t), \tilde{\phi}(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.55)$$

$$\{\tilde{\psi}(\vec{x}, t), \tilde{\psi}(\vec{x}', t)\} = \{\tilde{\phi}(\vec{x}, t), \tilde{\phi}(\vec{x}', t)\} = 0, \quad (3.56)$$

além disso

$$\{\psi(\vec{x}, t), \tilde{\psi}(\vec{x}', t)\} = \{\tilde{\psi}(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0. \quad (3.57)$$

Analogamente ao processo de quantização canônica feito para os campos clássicos do sistema físico, $\tilde{\psi}(\vec{x}, t)$ e $\tilde{\phi}(\vec{x}, t)$ são trocados pelos operadores $\hat{\tilde{\psi}}(\vec{x}, t)$ e $\hat{\tilde{\phi}}(\vec{x}, t) = i\hat{\tilde{\psi}}^\dagger(\vec{x}, t)$. Desta forma, as relações de comutação a tempos iguais são

$$[\hat{\tilde{\psi}}(x, t), \hat{\tilde{\psi}}^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.58)$$

$$[\hat{\tilde{\psi}}(\vec{x}, t), \hat{\tilde{\psi}}(\vec{x}', t)] = [\hat{\tilde{\psi}}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\tilde{\psi}}^\dagger(\vec{x}', t)] = 0 \quad (3.59)$$

e também

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\tilde{\psi}}^\dagger(\vec{x}', t)] = [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\tilde{\psi}}(\vec{x}', t)] = 0. \quad (3.60)$$

A evolução dinâmica dos operadores de campo é dada pelas equações de movimento de Heisenberg e conduz às equações Schrödinger livre.

De agora em diante, trataremos somente do sistema quantizado, sendo assim, omitiremos o símbolo $\hat{}$ para os operadores, e passaremos a usá-lo somente para notarmos quantidades relacionadas ao sistema total (físico e fictício), se houver alguma excessão deixaremos claro no texto.

O sistema total é caracterizado pela densidade de Lagrangeana $\hat{\mathcal{L}}(\vec{x}, t)$

$$\hat{\mathcal{L}}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}(\vec{x}, t) - \tilde{\mathcal{L}}(\vec{x}, t), \quad (3.61)$$

e os momentos canônicos do sistema total são

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(\vec{x}, t) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{\psi}}} = i\tilde{\psi}^\dagger(\vec{x}, t), \quad (3.62)$$

e a densidade de Hamiltoniana total é

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\nabla\psi^\dagger\nabla\psi - \nabla\tilde{\psi}^\dagger\nabla\tilde{\psi}). \quad (3.63)$$

A Hamiltoniana total é dada pela integração sobre todo o espaço das coordenadas da densidade de Hamiltoniana total, a qual denotamos como

$$\hat{H} = \int d^3x (\mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}) = H - \tilde{H}. \quad (3.64)$$

Esta Hamiltoniana total também satisfaz as equações de movimento de Heisenberg, ou seja,

$$i\dot{\psi} = [\psi, \hat{H}] = [\psi, H] \quad , \quad i\dot{\tilde{\psi}} = [\tilde{\psi}, \hat{H}] = -[\tilde{\psi}, \tilde{H}]. \quad (3.65)$$

Os operadores de campo de Schrödinger ψ e $\tilde{\psi}$, podem ser representados em termos de uma decomposição de Fourier em uma base de ondas planas como segue

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}, \quad (3.66)$$

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}}t} \tilde{a}_{\vec{k}}, \quad (3.67)$$

e seus respectivos Hermitianos conjugados são

$$\psi^\dagger(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi_{\vec{k}}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}}^\dagger, \quad (3.68)$$

e

$$\tilde{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}_{\vec{k}}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.69)$$

onde a energia é discretizada e dada por $\omega_{\vec{k}} = \frac{|\vec{k}|^2}{2m}$, devido ao fato da quantização ser realizada em uma caixa cúbica de volume finito V (constante de normalização) do espaço que nos conduz a valores discretos de $\vec{k}$. Usando estas expansões em termos das componentes de Fourier (operadores de criação e destruição), a Hamiltoniana total $\hat{H}$ pode ser escrita como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}). \quad (3.70)$$

O espaço de Hilbert para o sistema combinado é construído de maneira semelhante à da seção anterior, ou seja, podemos definir o vácuo térmico como

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n_{\vec{k}}} \sum_{\vec{k}} e^{-\beta\omega_{n_{\vec{k}}}/2} Z^{-1/2}(\beta) |n_{\vec{k}}, \tilde{n}_{\vec{k}}\rangle, \quad (3.71)$$

onde a função de partição do sistema é agora dada por

$$Z(\beta) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_{\vec{k}}}}. \quad (3.72)$$

O gerador das transformações que nos permite mapear os operadores térmicos nos operadores em $T = 0$ é

$$G = -i \sum_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} - \tilde{a}_{\vec{k}} a_{\vec{k}}), \quad (3.73)$$

o qual nos conduz formalmente ao operador unitário

$$U(\theta) = e^{-iG(\theta)} = e^{-\sum_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} - \tilde{a}_{\vec{k}} a_{\vec{k}})}. \quad (3.74)$$

Este operador unitário irá conectar o vácuo térmico ao vácuo original de um modo padrão (transformação de Bogoliubov), ou seja, usaremos o gerador G dado pela equação (3.73) para definir o espaço de Fock transformado através do novo vácuo

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= U(\theta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG}|0\rangle \\ &= \exp\left(\sum_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} - \tilde{a}_{\vec{k}} a_{\vec{k}})\right) |0\rangle \\ &= \prod_{\vec{k}} \exp\left(\theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} - a_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{k}})\right) |0\rangle \\ &= \prod_{\vec{k}} \left[\cosh^{-1} \theta_{\vec{k}}(\beta) \exp(\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta) a_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}) \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde

$$u_{\vec{k}}(\beta) = (1 - e^{-\beta\omega_{\vec{k}}})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + f_B(\omega_{\vec{k}})} = \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) \quad (3.76)$$

e

$$v_{\vec{k}}(\beta) = (e^{\beta\omega_{\vec{k}}} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{f_B(\omega_{\vec{k}})} = \sinh \theta_{\vec{k}}(\beta) \quad (3.77)$$

Usando as equações (3.22) e (3.23), podemos verificar que estes operadores podem ser mapeados na forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}}(\beta) \\ \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \end{pmatrix} &= \overline{U}(\theta_{\vec{k}}) \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) & -\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta) \\ -\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta) & \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^{\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.78)$$

com $\theta_{\vec{k}}(\beta)$ dado por (3.76) e (3.77). Alternativamente, isto pode ser escrito em termos das variáveis de campo como segue:

$$\begin{pmatrix} \psi_{\vec{k}}(t, \beta) \\ \tilde{\psi}_{\vec{k}}^{\dagger}(t, \beta) \end{pmatrix} = \bar{U}(\theta_{\vec{k}}) \begin{pmatrix} \psi_{\vec{k}}(t) \\ \tilde{\psi}_{\vec{k}}^{\dagger}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) & -\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta) \\ -\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta) & \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\vec{k}}(t) \\ \tilde{\psi}_{\vec{k}}^{\dagger}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Podemos ainda escrever esta última expressão na forma de duas equações, a saber,

$$a_{\vec{k}}(\beta) = e^{-iG} a_{\vec{k}} e^{iG} = a_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \sinh \theta_{\vec{k}}(\beta), \quad (3.80)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) = e^{-iG} \tilde{a}_{\vec{k}} e^{iG} = \tilde{a}_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) - a_{\vec{k}}^{\dagger} \sinh \theta_{\vec{k}}(\beta). \quad (3.81)$$

e substituí-las na Hamiltoniana total, equação (3.70), e usar a equação (3.18) para mostrarmos que, como no caso da Hamiltoniana total para a partícula dada pela equação (3.35), a Hamiltoniana total é invariante por transformações de Bogoliubov

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta)) \quad (3.82)$$

e portanto o gerador é conservado

$$i\dot{G} = [G, \hat{H}] = 0. \quad (3.83)$$

Os estados de uma partícula são $a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}}^{\dagger}|0\rangle$, $\tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle = e^{-iG} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}|0\rangle$, e assim por diante. Notemos então que não somente o estado de vácuo pode ser obtido por uma transformação de Bogoliubov, mas também qualquer estado de partícula. Ainda, usando a propriedade $a|0\rangle = \tilde{a}|0\rangle = 0$, podemos verificar que o estado $|0(\beta)\rangle$ é realmente o vácuo térmico:

$$a_{\vec{k}}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle = e^{-iG} a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad (3.84)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} \tilde{a}_{\vec{k}} e^{iG} e^{-iG}|0\rangle = e^{-iG} \tilde{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.85)$$

Se substituirmos a equação (3.80) em (3.84) e no resultado obtido substituirmos a transformação inversa da equação (3.80) obtemos um resultado importante relacionado ao novo estado de vácuo:

$$a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} a_{\vec{k}}^{\dagger}|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \tilde{a}_{\vec{k}}|0(\beta)\rangle. \quad (3.86)$$

Da mesma forma, podemos substituir a equação (3.81) em (3.85) e em seguida a transformação inversa de (3.81) no resultado obtido por esta substituição e obtermos

$$\tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sinh \theta_{\vec{k}}(\beta)} a_{\vec{k}}|0(\beta)\rangle. \quad (3.87)$$

Além disso, da invariância da Hamiltoniana total temos

$$\hat{H}|0(\beta)\rangle = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) \right) |0(\beta)\rangle = 0. \quad (3.88)$$

Definindo o operador número total de partículas $\hat{N}$ como

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N - \tilde{N} \\ &= \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{a}_{\vec{k}}) \\ &= \sum_{\vec{k}} \left[u^2(\beta) \left(a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) \right) - v^2(\beta) \left(a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} \left[\left(u^2(\beta) - v^2(\beta) \right) \left(a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta) \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde usamos a equação (3.18). Desta forma, a Hamiltoniana total pode ser escrita como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}, \quad (3.90)$$

onde $\hat{N}_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) a_{\vec{k}}(\beta) - \tilde{a}_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}(\beta)$. Logo, da equação (3.88) temos um importante resultado:

$$\langle 0(\beta) | \hat{H} | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | (H - \tilde{H}) | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | H | 0(\beta) \rangle - \langle 0(\beta) | \tilde{H} | 0(\beta) \rangle = 0 \quad (3.91)$$

logo

$$\langle 0(\beta) | H | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | \tilde{H} | 0(\beta) \rangle, \quad (3.92)$$

que demonstra a nossa suposição de que a energia do sistema fictício é igual a do sistema físico. Da equação (3.89) obtemos ainda

$$\langle 0(\beta) | \hat{N} | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | (N - \tilde{N}) | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle - \langle 0(\beta) | \tilde{N} | 0(\beta) \rangle = 0 \quad (3.93)$$

que resulta em

$$\langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | \tilde{N} | 0(\beta) \rangle \quad (3.94)$$

ou seja, o sistema possui o mesmo número de partículas físicas quanto de não físicas, como também já havíamos suposto. Além disso, as expressões (3.86) e (3.87) mostram que acrescentar uma partícula física ao vácuo $|0(\beta)\rangle$ é equivalente a eliminar uma partícula não física, a menos de um fator constante, e vice-versa. Portanto, a partícula não física pode ser interpretada como um buraco ou a falta de uma partícula física.

3.3 Entropia

Nesta seção, obteremos duas grandezas de extrema importância em mecânica estatística no formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, são elas a entropia e a energia livre de Helmholtz. Para isto, definiremos o operador

$$K = - \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \ln \sinh^2 \theta_{\vec{k}}(\beta) - a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \ln \cosh^2 \theta_{\vec{k}}(\beta) \right), \quad (3.95)$$

onde o operador $\tilde{K}$ pode ser obtido deste simplesmente pela troca de $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$ por $\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger$ e $\tilde{a}_{\vec{k}}$ respectivamente. Usando as relações de comutação para variáveis bosônicas, podemos escrever este operador na seguinte forma

$$K = -2 \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \ln \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta) - \ln \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) \right). \quad (3.96)$$

Usando esta definição para o operador K definido em (3.95), o estado de vácuo $|0(\beta)\rangle$ dado por (3.75) pode ser expresso como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-K/2} \left\{ \exp \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right\} |0\rangle = e^{-\tilde{K}/2} \left\{ \exp \sum_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger \right\} |0\rangle. \quad (3.97)$$

Para demonstrarmos isto, usaremos os seguintes resultados

$$e^{-K/2} a_{\vec{k}}^\dagger e^{K/2} = \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta) a_{\vec{k}}^\dagger, \quad e^{K/2} |0\rangle = \prod_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}(\beta) |0\rangle, \quad (3.98)$$

e

$$e^{-K/2} \left(\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)^n |0\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \left(\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)^n |0\rangle. \quad (3.99)$$

Logo

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= e^{-K/2} \exp \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle \\ &= e^{-K/2} \prod_{\vec{k}} \exp \left(a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \prod_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} + \frac{1}{1!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)] a_{\vec{k}}^\dagger e^{-K/2} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger + \frac{1}{2!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^2 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{-K/2} \left(\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^3 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger e^{-K/2} \left(\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)^3 + \dots \right\} |0\rangle \\ &= \prod_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} + \frac{1}{1!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)] a_{\vec{k}}^\dagger \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^2 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \left(\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} [\tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^3 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} (\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger)^3 + \dots \Big\} |0\rangle\rangle \\
& = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \left\{ 1 + \frac{1}{1!} [a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)] + \frac{1}{2!} [a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^2 \right. \\
& + \left. \frac{1}{3!} [a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)]^3 + \dots \right\} |0\rangle\rangle
\end{aligned}$$

ou seja

$$|0(\beta)\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\cosh \theta_{\vec{k}}(\beta)} \exp \left\{ a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta) \right\} |0\rangle\rangle$$

que é a mesma expressão obtida através do mapeamento com o operador de Bogoliubov, (3.19). Procedimento completamente análogo pode ser usado para mostrarmos a validade da expressão com til, uma vez que $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger$ comutam.

Também é conveniente definirmos a quantidade

$$|\hat{I}\rangle = \exp \left\{ \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \right\} |0\rangle\rangle,$$

que em termos da notação usada na seção anterior é

$$|\hat{I}\rangle = \sum_n |n, \tilde{n}\rangle.$$

Usando esta quantidade, a equação (3.97) pode ser escrita como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-K/2} |\hat{I}\rangle = e^{-\tilde{K}/2} |\hat{I}\rangle.$$

Pode-se mostrar que o operador $\hat{K} = K - \tilde{K}$ satisfaz a relação

$$[K - \tilde{K}, G] = 0,$$

com G dado pela equação (3.73). Uma outra propriedade envolvendo os operadores K e $\tilde{K}$ aplicados no estado $|0(\beta)\rangle$ é a seguinte:

$$\begin{aligned}
(K - \tilde{K})|0(\beta)\rangle &= (K - \tilde{K})e^{-iG}|0\rangle\rangle \\
&= e^{-iG}(K - \tilde{K})|0\rangle\rangle \\
&= -2e^{-iG} \sum_{\vec{k}} (\ln \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta)) (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}}) |0\rangle\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Até o momento, nada foi dito sobre os valores assumidos pelo “ângulo” $\theta_{\vec{k}}(\beta)$, que está sendo considerado completamente arbitrário. Agora, iremos exigir que o valor esperado no vácuo do operador $\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}}$ seja constante e analisar quais as condições que $\theta_{\vec{k}}(\beta)$ deve satisfazer para que isto ocorra. Nestas condições

calcularemos o valor esperado no vácuo do operador K . Usando a equação (3.29) podemos fixar o valor para $\theta_{\vec{k}}(\beta)$ da seguinte forma

$$\langle 0(\beta) | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0(\beta) \rangle = v_{\vec{k}}^2(\beta) = \sinh^2 \theta_{\vec{k}}(\beta) = n_{\vec{k}}, \quad (3.100)$$

então calculando o valor médio de K dado pela equação (3.95) obtemos

$$\langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle = \sum_{\vec{k}} \left\{ (1 + n_{\vec{k}}) \ln(1 + n_{\vec{k}}) - n_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}} \right\} = \langle K \rangle. \quad (3.101)$$

Este resultado é proporcional à entropia calculada no sistema *grã canônico* [5], ou seja,

$$S = k_B \sum_k \left\{ (1 + \langle n_k \rangle) \ln(1 + \langle n_k \rangle) - \langle n_k \rangle \ln \langle n_k \rangle \right\}$$

onde $\langle n_k \rangle$ representa o número médio de ocupação do estado k . Por esta razão, o valor esperado no vácuo térmico do operador K multiplicado pela constante de Boltzmann (k_B) é a entropia do sistema físico e é dada por

$$S = k_B \langle K \rangle = k_B \langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle.$$

Desta forma, iremos nos referir ao operador K como sendo o operador Entropia. Seja a energia livre de Helmholtz dada por $\Omega = -TS + \langle H \rangle - \mu \langle N \rangle$, onde T é a temperatura do sistema, H e N sua Hamiltoniana e número de partículas respectivamente e μ seu potencial químico. Usando a equação (3.100) podemos escrever

$$\begin{aligned} \Omega &= -TS + \langle H \rangle - \mu \langle N \rangle \\ &= -\frac{1}{\beta} \langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle + \langle 0(\beta) | H | 0(\beta) \rangle - \mu \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle \\ &= -\frac{1}{\beta} \langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle + \langle 0(\beta) | \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0(\beta) \rangle - \mu \langle 0(\beta) | \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0(\beta) \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}} \left\{ -\frac{1}{\beta} [(1 + n_{\vec{k}}) \ln(1 + n_{\vec{k}}) - n_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}}] + (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) n_{\vec{k}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Supondo que o sistema esteja em equilíbrio, ou seja, $\langle H \rangle = \text{constante}$, então

$$\delta\Omega = \sum_{\vec{k}} \frac{\partial\Omega}{\partial n_{\vec{k}}} \delta n_{\vec{k}} = 0.$$

Como a variação $\delta n_{\vec{k}}$ é arbitrária, temos que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n_{\vec{k}}} = 0.$$

Para calcularmos esta derivada, devemos usar a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial n_{\vec{k}}} &= \sum_{\vec{k}'} \frac{dn_{\vec{k}'}}{dn_{\vec{k}}} \frac{d\Omega}{dn_{\vec{k}'}} \\ &= \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \left\{ \frac{1}{\beta} \ln \frac{n_{\vec{k}}}{1+n_{\vec{k}}} + (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) \right\} = 0.\end{aligned}\quad (3.103)$$

Da equação (3.103) obtemos

$$\beta \epsilon_{\vec{k}} = -\ln \frac{n_{\vec{k}}}{1+n_{\vec{k}}},$$

onde $\epsilon_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} - \mu$ e $n_{\vec{k}} = \sinh^2 \theta_{\vec{k}}(\beta)$. Esta expressão especifica o ângulo $\theta_{\vec{k}}(\beta)$ e nos fornece também a distribuição estatística de Bose. Observemos que estes resultados foram obtidos somente porque consideramos que o sistema está no estado de equilíbrio térmico.

Se escrevermos

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}} |n, \tilde{n}\rangle$$

podemos verificar que

$$\langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle = - \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}}$$

e, da normalização do estado $|0(\beta)\rangle$, obtemos

$$\sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} = 1.$$

As expressões (3.86) e (3.87) podem ser generalizadas. Para isto, consideremos os funcionais

$$F = \sum_{m,n} \sum_{\vec{k}, \vec{p}} C(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_m; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_m}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} \dots a_{\vec{p}_n} \quad (3.104)$$

e

$$\tilde{F} = \sum_{m,n} \sum_{\vec{k}, \vec{p}} C^*(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_m; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \tilde{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}_2}^\dagger \dots \tilde{a}_{\vec{k}_m}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p}_1} \tilde{a}_{\vec{p}_2} \dots \tilde{a}_{\vec{p}_n} \quad (3.105)$$

onde C e C^* são coeficientes complexos. Então as relações (3.86) e (3.87) podem ser escritas genericamente na forma

$$e^{\tilde{K}/2} F |0(\beta)\rangle = e^{K/2} \tilde{F}^\dagger |0(\beta)\rangle$$

e seu dual

$$\langle 0(\beta) | F e^{\tilde{K}/2} = \langle 0(\beta) | \tilde{F}^\dagger e^{K/2}.$$

Para provarmos isto, inicialmente iremos definir

$$A = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_m}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} \dots a_{\vec{p}_n} |0(\beta)\rangle. \quad (3.106)$$

Usando as expressões (3.86) e (3.87) e o fato de que as variáveis bosônicas do sistema físico comutam com as do sistema fictício, podemos escrever

$$A = (\tanh \theta_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{p}_m}^\dagger) \dots (\tanh \theta_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{p}_1}^\dagger) (\coth \theta_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{k}_m}) \dots (\coth \theta_{\vec{k}} \tilde{a}_{\vec{k}_1}) |0(\beta)\rangle \quad (3.107)$$

e, substituindo as equações

$$e^{-K/2} a_{\vec{k}}^\dagger e^{K/2} = \tanh \theta_{\vec{k}}(\beta) a_{\vec{k}}^\dagger$$

e

$$e^{-\tilde{K}/2} \tilde{a}_{\vec{k}} e^{\tilde{K}/2} = \coth \theta_{\vec{k}}(\beta) \tilde{a}_{\vec{k}}$$

na equação (3.107) obtemos

$$A = e^{-\tilde{K}/2} \tilde{a}_{\vec{p}_m}^\dagger \dots \tilde{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}_m} \dots \tilde{a}_{\vec{k}_1} e^{\tilde{K}/2} |0(\beta)\rangle,$$

mas

$$e^{\tilde{K}/2} |0(\beta)\rangle = e^{\tilde{K}/2} [e^{-\tilde{K}/2} |\hat{I}\rangle] = |\hat{I}\rangle = e^{K/2} |0(\beta)\rangle.$$

Logo, obtemos a seguinte equação para A

$$A = e^{-\tilde{K}/2} e^{K/2} \tilde{a}_{\vec{p}_m}^\dagger \dots \tilde{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}_m} \dots \tilde{a}_{\vec{k}_1} |0(\beta)\rangle. \quad (3.108)$$

Portanto, igualando as equações (3.106) e (3.108) vem

$$a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_m}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} \dots a_{\vec{p}_n} |0(\beta)\rangle = e^{-\tilde{K}/2} e^{K/2} \tilde{a}_{\vec{p}_m}^\dagger \dots \tilde{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}_m} \dots \tilde{a}_{\vec{k}_1} |0(\beta)\rangle.$$

Agora usando a definição do funcional generalizado, eqs. (3.104) e (3.105), obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$e^{\tilde{K}/2} F |0(\beta)\rangle = e^{K/2} \tilde{F}^\dagger |0(\beta)\rangle.$$

Observemos que esta equação é dita ser a generalização das equações (3.86) e (3.87) devido ao fato que, para obtermos esta, nós partimos da equação (3.106) que, como podemos observar, é a forma mais geral das equações (3.86) e (3.87).

Usando o formalismo desenvolvido neste capítulo, pretendemos obter os estados de vácuo e a Hamiltoniana à temperatura finita para a corda bosônica, assim como o operador entropia e a energia livre de Helmholtz. Visando isto, discutiremos no próximo capítulo a quantização da corda bosônica.

3.4 Condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS)

As condições de KMS possuem uma grande importância para a mecânica estatística no equilíbrio térmico. Elas surgem da necessidade de calcularmos um traço quando desejamos calcular uma média em um ensemble. Na DCT, as condições de KMS seguem das condições térmicas (3.33) e (3.34). Usaremos tais condições para calcularmos a média em um ensemble da correlação de dois operadores arbitrários.

$$\begin{aligned}
 \langle 0(\beta) | A(t) B(t') | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | \tilde{A}^\dagger(t) e^{\beta \hat{H}/2} B(t') | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | \tilde{A}^\dagger(t + i\beta/2) B(t') | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | B(t') e^{\beta \hat{H}/2} \tilde{A}^\dagger(t + i\beta/2) | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | B(t') A(t + i\beta) | 0(\beta) \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Por simplicidade, omitimos aqui as coordenadas espaciais. A importância desta relação é que em certas situações, é interessante termos uma regra para trocarmos as posições de dois operadores quando tomamos o valor esperado do produto destes no vácuo.

3.5 Vácuo Térmico e Axiomas Básicos

Como vimos anteriormente, para construirmos o estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ precisamos dobrar os graus de liberdade dos operadores, ou seja, para cada operador A deve existir um operador correspondente $\tilde{A}$. Quaisquer operadores A e $\tilde{A}$ são independentes, isto é, comutam entre si, e além disso, existe um mapeamento entre os conjuntos de operadores $\{A\}$ e $\{\tilde{A}\}$ chamado *regras de conjugação til*. A temperatura entra na teoria através de condições que relacionam a forma na qual A e $\tilde{A}^\dagger$ atuam no estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$. Esta condição é chamada de *condição de estado térmico* ou *regra de substituição til*. Uma teoria dinâmica de campos térmicos para teoria quântica de campos (TQC) pode ser melhor construída a partir dos seguintes axiomas [7]:

Sejam dois conjuntos de operadores $\mathfrak{S} = \{A\}$ e $\tilde{\mathfrak{S}} = \{\tilde{A}\}$, então:

Axioma 1 . A tempos iguais, variáveis dinâmicas pertencentes a diferentes subespaços ($A \in \mathfrak{S}$ e $\tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{S}}$) são independentes, ou seja, comutam:

$$[A, \tilde{B}] = 0. \tag{3.110}$$

Axioma 2 . Existe um mapeamento um a um entre dois subespaços ortogonais, $\mathfrak{S}$ e $\tilde{\mathfrak{S}}$, chamado conjugação til, que para quaisquer A e $B \in \mathfrak{S}$, $\tilde{A}$ e $\tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{S}}$ e c_1, c_2

números complexos, valem as seguintes regras:

$$\text{a)} \quad (\widetilde{AB}) = \widetilde{A}\widetilde{B}, \quad (3.111)$$

$$\text{b)} \quad (c_1\widetilde{A} + c_2\widetilde{B}) = c_1^*\widetilde{A} + c_2^*\widetilde{B}, \quad (3.112)$$

$$\text{c)} \quad \widetilde{A^\dagger} = \widetilde{A}^\dagger. \quad (3.113)$$

Axioma 3 . O vácuo térmico é invariante sob as regras de conjugação til:

$$|0(\widetilde{\beta})\rangle = |0(\beta)\rangle. \quad (3.114)$$

Axioma 4 . Translações espaço-temporais de um operador $A \in \mathfrak{S}$ é induzida pelo operador energia-momento $P_\mu \in \mathfrak{S}$ da seguinte maneira

$$A(x) = e^{iP_\mu x^\mu} A e^{-iP_\mu x^\mu}. \quad (3.115)$$

Axioma 5 . O vácuo térmico é definido pelas seguintes relações operatoriais chamadas condições de estado térmico:

$$A(t, \vec{x})|0(\beta)\rangle = \sigma \widetilde{A}^\dagger(t - i\beta/2, \vec{x})|0(\beta)\rangle, \quad (3.116)$$

$$\langle O(\beta)|A(t, \vec{x}) = \langle O(\beta)|\widetilde{A}^\dagger(t + i\beta/2, \vec{x})\sigma^*, \quad (3.117)$$

onde no caso em que A é uma variável bosônica, escolhemos $\sigma = 1$. Aqui, t é uma coordenada temporal.

Axioma 6 . Definiremos a dupla conjugação til como segue:

$$\widetilde{\widetilde{A}} = \sigma A. \quad (3.118)$$

Existe uma certa liberdade na escolha da definição das condições de estado térmico, axioma 5, e dupla conjugação til, axioma 6, devido à presença do fator de fase σ que deve satisfazer somente $|\sigma| = 1$. No trabalho de H.Matsumoto, Y.Nakano e H.Umezawa [8], são apresentadas regras gerais para a escolha deste fator de fase para operadores de Heisenberg arbitrários.

A importância das regras de conjugação til, axioma 2, está no fato de que todas as relações usuais em TQC, tais como relações de comutação e equações de Heisenberg, podem ser generalizadas para DCT através destas regras (como veremos adiante).

Podemos observar também que a condição de estado térmico define o vácuo térmico, sendo esta uma das mais importantes relações em DCT. Esta relação mostra também que sempre existe uma certa combinação dos operadores $A(x)$ e $\widetilde{A}^\dagger(x)$ que aniquila o vácuo térmico. Esta é uma importante característica da DCT que não existe na TQC usual.

Podemos agora generalizar o axioma 1 usando os axiomas 2 e 4 do seguinte modo. Se $A(x) \in \mathfrak{S}$ e $\tilde{B}(y) \in \tilde{\mathfrak{S}}$, então eles comutam em todo o espaço-tempo:

$$[A(x), \tilde{B}(y)] = 0. \quad (3.119)$$

Se realizarmos uma operação til-dagger ou dagger-til, podemos verificar a partir do axioma 2 que os coeficientes dos operadores permanecem inalterados. Desta forma, introduziremos a notação de dubleto térmico como:

$$A^\alpha = \begin{cases} A, & \text{se } \alpha = 1 \\ \tilde{A}^\dagger, & \text{se } \alpha = 2. \end{cases} \quad (3.120)$$

Deste modo, qualquer função de um operador A , digamos $F(A)$, pode ser colocada na forma de dubletos térmicos como

$$[F(A)]^\alpha = P_\alpha F(A^\alpha), \quad (3.121)$$

onde P_α é o operador de ordenamento térmico definido como

$$P_\alpha[A^\alpha B^\alpha \dots C^\alpha] = \begin{cases} A^1 B^1 \dots C^1, & \text{se } \alpha = 1 \\ C^2 \dots B^2 A^2, & \text{se } \alpha = 2. \end{cases} \quad (3.122)$$

Como exemplo, estenderemos a equação de Heisenberg quadridimensional

$$i\partial_\mu \psi(x) = [\psi(x), P_\mu] \quad (3.123)$$

para a notação de dubleto térmico como

$$i\partial_\mu \psi^\alpha(x) = \epsilon^\alpha [\psi^\alpha(x), P_\mu^\alpha], \quad (3.124)$$

onde $\epsilon^\alpha = 1(\alpha = 1)$ e $-1(\alpha = 2)$ é introduzido para preservar as relações de comutação que são alteradas devido ao ordenamento térmico definido em (3.122).

O gerador total de translações espaço-temporais em DCT é dado por

$$\hat{P}_\mu = \sum_\alpha \epsilon^\alpha P_\mu^\alpha = P_\mu - \tilde{P}_\mu, \quad (3.125)$$

e desta forma, a eq. (3.124) pode ser escrita como

$$i\partial_\mu \psi^\alpha(x) = [\psi^\alpha(x), \hat{P}_\mu]. \quad (3.126)$$

Podemos verificar que esta construção está de acordo com o axioma 2. Por exemplo, se fizermos $\alpha = 1$ na eq. (3.126), obtemos

$$i\partial_\mu \psi(x) = [\psi(x), P_\mu], \quad (3.127)$$

e seu associado til, de acordo com o axioma 2, é

$$i\partial_\mu \tilde{\psi}(x) = -[\tilde{\psi}(x), \tilde{P}_\mu], \quad (3.128)$$

que é justamente a expressão para $\alpha = 2$ na eq. (3.126) supondo que os campos sejam Hermitianos. Caso os campos não sejam Hermitianos, esta construção também é válida, basta tomarmos o Hermitiano conjugado da eq. (3.128).

Dada a Lagrangeana ou a Hamiltoniana de um sistema físico, podemos obter a Lagrangeana ou a Hamiltoniana térmicas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \epsilon^\alpha H^\alpha = H - \tilde{H}, \quad \hat{L} = \sum_\alpha \epsilon^\alpha L^\alpha = L - \tilde{L}. \quad (3.129)$$

O comutador $[A(x), B(y)] = C(x, y)$ pode ser estendido como:

$$[A^\alpha(x), B^\alpha(y)] = \tau^{\alpha\gamma} C^\gamma(x, y), \quad (3.130)$$

onde

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

A condição de estado térmico nos conduz à existência de um operador que aniquila o vácuo térmico

$$a(\beta, t)|0(\beta)\rangle = \tilde{a}(\beta, t)|0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta)|a^\dagger(\beta, t) = \langle 0(\beta)|\tilde{a}^\dagger(\beta, t) = 0. \quad (3.132)$$

Estes operadores de aniquilação, $a(\beta, t)$ e $\tilde{a}(\beta, t)$, podem ser construídos de qualquer outro operador, o que expressa a condição de estado térmico. Assumindo que $A(t)$ tenha um Hermitiano conjugado $A^\dagger(t)$ tal que

$$A(t)|0(\beta)\rangle = \tilde{A}^\dagger(t - i\beta/2)|0(\beta)\rangle, \quad (3.133)$$

$$A^\dagger(t)|0(\beta)\rangle = \tilde{A}(t - i\beta/2)|0(\beta)\rangle, \quad (3.134)$$

onde estamos omitindo as variáveis espaciais, pois neste caso somente as variáveis temporais têm importância, estes operadores podem ser construídos na forma

$$a(\beta, t) = f^{1/2}(-i\partial_t) \left(A(t + i\beta/2) - \tilde{A}^\dagger(t) \right), \quad (3.135)$$

$$\tilde{a}(\beta, t) = f^{1/2}(-i\partial_t)^* \left(\tilde{A}(t - i\beta/2) - A^\dagger(t) \right), \quad (3.136)$$

onde $f^{1/2}$ é um operador diferencial que será determinado adiante. Usando a notação de dubleto térmico, temos que os operadores térmicos estão relacionados com os operadores à temperatura nula através de uma transformação de Bogoliubov na forma

$$a^\alpha(\beta, t) = U^{-1}(-i\partial_t)^{\alpha\gamma} A^\gamma(t), \quad (3.137)$$

onde

$$U^{-1}(\omega) = f^{1/2}(\omega) \begin{pmatrix} e^{\beta\omega/2} & -1 \\ -1 & e^{\beta\omega/2} \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

Ela está normalizada como

$$U^{-1}(\omega)\tau U^{-1}(\omega)^\dagger = \tau, \quad (3.139)$$

onde τ está definido em (3.131). Desta condição de normalização, obtemos a seguinte expressão para $f(\omega)$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (3.140)$$

Podemos também definir a transformação inversa de (3.137) através de uma superposição não local no tempo dos operadores que aniquilam o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ e seu dual $\langle 0(\beta)|$

$$A^\alpha(t) = U(-i\partial_t)^{\alpha\gamma} a^\gamma(\beta, t). \quad (3.141)$$

Podemos mostrar que os operadores à temperatura nula estão conectados aos operadores à temperatura finita na forma canônica como segue

$$A^{(l)} = e^{iG(\beta)} a(\beta, t)^{(l)} e^{-iG(\beta)}, \quad (3.142)$$

e o vácuo térmico pode ser mapeado no vácuo duplicado à temperatura nula na forma

$$|O(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.143)$$

com o gerador G satisfazendo

$$G(\beta) = G^\dagger(\beta) = -\tilde{G}(\beta). \quad (3.144)$$

Este gerador é chamado de *operador de Bogoliubov*. Podemos ainda obter a eq. (3.7) partindo da eq. (3.143) com um $G(\beta)$ apropriado como foi mostrado na seção 3.1. Deste modo, foi apresentado aqui uma formulação que pode ser aplicada na construção de uma dinâmica de campos térmicos qualquer (basta conhecermos a lagrangeana que descreve o campo). Este formalismo canônico pode ser aplicado à teorias de campos no formalismo de integrais de trajetória, bem como geradores funcionais para funções de Green em mecânica estatística quântica podem ser construídos [9, 10].

Capítulo 4

Teoria de Corda à Temperatura Finita

Neste capítulo, construiremos uma teoria de cordas bosônicas à temperatura finita usando o formalismo de H. Umezawa e Y. Takahashi desenvolvido no capítulo 3 para descrevermos uma Dinâmica de Campos Térmicos. Este formalismo pode ser convenientemente aplicado em sistemas descritos por osciladores (um exemplo desta aplicação foi feito na seção 3.1.1). Deste modo, tal construção será possível, uma vez que o estado de uma corda, que pode ser completamente representado pelo campo X^μ , pode ser expandido em termos de operadores de criação $\alpha_n^{\mu\dagger}$ e destruição α_n^μ . De acordo com a Dinâmica de Campos Térmicos, a termodinâmica deste sistema pode ser descrita em um espaço de Fock, composto do espaço de Fock original da corda e de uma cópia idêntica a este (que será denotada por $\sim$), ou seja, estamos duplicando o sistema. Novos graus de liberdade surgirão devido a esta duplicação. As duas cópias são independentes e o espaço de Fock total é dado pelo produto direto dos espaços de Fock das cópias. Do mesmo modo, este formalismo foi usado na construção de estados de D-branas à temperatura finita [11, 12].

Como já exposto, para implementarmos esta construção para o caso de uma corda bosônica livre, iremos escrever os operadores de criação e destruição da corda física, os quais denotaremos por

$$A_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^\mu \quad ; \quad A_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^\mu \quad , \quad (4.1)$$

$$B_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\beta_n^\mu \quad ; \quad B_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\beta_{-n}^\mu \quad , \quad (4.2)$$

onde $n > 0$. Cópias idênticas existem para ambos os conjuntos de osciladores do sistema,

$$\tilde{A}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\alpha}_n^\mu \quad ; \quad \tilde{A}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\alpha}_{-n}^\mu \quad , \quad (4.3)$$

$$\tilde{B}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\beta}_n^\mu \quad ; \quad \tilde{B}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\beta}_{-n}^\mu. \quad (4.4)$$

Estes operadores satisfazem duas álgebras independentes como segue

$$[A_n^\mu, A_m^{\nu\dagger}] = [\tilde{A}_n^\mu, \tilde{A}_m^{\nu\dagger}] = \delta_{n+m} \eta^{\mu\nu} \quad , \quad [B_n^\mu, B_m^{\nu\dagger}] = [\tilde{B}_n^\mu, \tilde{B}_m^{\nu\dagger}] = \delta_{n+m} \eta^{\mu\nu} \quad , \quad (4.5)$$

$$[A_n^\mu, \tilde{A}_m^\nu] = [A_n^\mu, \tilde{A}_m^{\nu\dagger}] = [A_n^\mu, \tilde{B}_m^\nu] = \dots = 0. \quad (4.6)$$

O espaço de Fock estendido do sistema total é dado pelo produto direto de dois espaços de Fock das cordas

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}. \quad (4.7)$$

Denotaremos um estado de $\hat{\mathcal{H}}$ por $|\rangle\rangle$. Os estados de vácuo da corda para cada um dos setores podem ser escritos, como:

$$|0\rangle\rangle_\alpha = |0\rangle_\alpha \otimes |\tilde{0}\rangle_\alpha = |0, 0\rangle_\alpha \quad \text{e} \quad |0\rangle\rangle_\beta = |0\rangle_\beta \otimes |\tilde{0}\rangle_\beta = |0, 0\rangle_\beta. \quad (4.8)$$

Portanto, o vácuo total para a corda fechada pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} |0\rangle\rangle &= |0\rangle\rangle_\alpha |0\rangle\rangle_\beta = (|0\rangle_\alpha \otimes |\tilde{0}\rangle_\alpha) (|0\rangle_\beta \otimes |\tilde{0}\rangle_\beta) \\ &= (|0\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta) (|\tilde{0}\rangle_\alpha \otimes |\tilde{0}\rangle_\beta), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde a última equação é consequência do fato de que as cordas original e a til são independentes, e também mostra explicitamente a duplicação do estado de cada oscilador e a estrutura do estado de vácuo da corda. Ainda, para obtermos o estado fundamental, devemos multiplicar (4.8) e (4.9) respectivamente por $|p\rangle$ e $|p\rangle \otimes |\tilde{p}\rangle$.

Uma vez duplicado o sistema, sua descrição térmica pode ser obtida atuando os operadores unitários de Bogoliubov G_n^α e G_n^β em cada um dos setores dos espaços físico e estendido de Hilbert e nos operadores de criação e destruição de acordo com as regras estabelecidas para a DCT. Os operadores G são definidos como segue

$$\begin{aligned} G_n^\alpha &= -i\theta(\beta_T) (A_n \cdot \tilde{A}_n - A_n^\dagger \cdot \tilde{A}_n^\dagger) \\ G_n^\beta &= -i\theta(\beta_T) (B_n \cdot \tilde{B}_n - B_n^\dagger \cdot \tilde{B}_n^\dagger), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\beta_T = \frac{1}{k_B T}$ e $\theta_n(\beta_T)$ é um parâmetro real que depende da estatística do n th modo do oscilador (como mostrado no cap.3)

$$\cosh \theta_n(\beta_T) = (1 - e^{\beta_T n})^{-1}. \quad (4.11)$$

No entanto, $\theta_n(\beta_T)$ é o mesmo tanto para o movimento para a esquerda quanto para a direita para um dado modo n dos osciladores. O ponto em (4.10) representa o produto escalar no espaço de Minkowski $A_n \cdot \tilde{A}_n = A_n^\mu \tilde{A}_{n\mu}$. Sendo os modos para a direita e esquerda independentes, os operadores de Bogoliubov comutam como segue:

$$[G_n^\alpha, G_m^\alpha] = [G_n^\beta, G_m^\beta] = [G_n^\alpha, G_m^\beta] = 0. \quad (4.12)$$

Das definições expressas em (4.10) para os operadores G , podemos observar que estes são Hermitianos, ou seja,

$$(G_n^\alpha)^\dagger = G_n^\alpha \quad \text{e} \quad (G_n^\beta)^\dagger = G_n^\beta. \quad (4.13)$$

E para n 's negativos temos

$$G_{|n|}^\alpha = -G_{-n}^\alpha. \quad (4.14)$$

Uma álgebra simples nos fornece as relações de comutação entre os operadores G e os osciladores

$$\begin{aligned} [G_n^\alpha, A_n^\mu] &= -i\theta_n(\beta_T)\tilde{A}_n^{\mu\dagger}, & [G_n^\alpha, B_n^\mu] &= -i\theta_n(\beta_T)\tilde{B}_n^{\mu\dagger}, \\ [G_n^\alpha, A_n^{\mu\dagger}] &= -i\theta_n(\beta_T)\tilde{A}_n^\mu, & [G_n^\alpha, B_n^{\mu\dagger}] &= -i\theta_n(\beta_T)\tilde{B}_n^\mu, \\ [G_n^\alpha, \tilde{A}_n^\mu] &= -i\theta_n(\beta_T)A_n^{\mu\dagger}, & [G_n^\alpha, \tilde{B}_n^\mu] &= -i\theta_n(\beta_T)B_n^{\mu\dagger}, \\ [G_n^\alpha, \tilde{A}_n^{\mu\dagger}] &= -i\theta_n(\beta_T)A_n^\mu, & [G_n^\alpha, \tilde{B}_n^{\mu\dagger}] &= -i\theta_n(\beta_T)B_n^\mu. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vamos agora construir o estado de vácuo e operadores de criação e destruição em $T \neq 0$. Atuando no vácuo à temperatura nula com o operador de Bogoliubov adequado, obtemos estados dependentes explicitamente da temperatura como segue

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = \prod_{m>0} e^{iG_m} |0\rangle\rangle = \prod_{m>0} |0(\beta_T)_m\rangle\rangle, \quad (4.16)$$

para a corda aberta e

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = \prod_{m>0} e^{iG_m^\alpha} |0\rangle\rangle_\alpha \prod_{n>0} e^{iG_n^\beta} |0\rangle\rangle_\beta = \prod_{m>0} |0(\beta_T)_m\rangle\rangle_\alpha \prod_{n>0} |0(\beta_T)_n\rangle\rangle_\beta \quad (4.17)$$

para a fechada. Uma vez que os operadores G não misturam os estados dos modos para a direita e para a esquerda, podemos construir o estado de vácuo para a corda fechada à temperatura finita na forma

$$|0(\beta_T)_n\rangle\rangle = |0(\beta_T)_n\rangle_\alpha \otimes |0(\beta_T)_n\rangle_\beta. \quad (4.18)$$

Os operadores de criação e destruição em $T \neq 0$, que aniquilam estes estados de vácuo, são obtidos a partir dos conjuntos de operadores $\{A, A^\dagger, \tilde{A}, \tilde{A}^\dagger\}$ e $\{B, B^\dagger, \tilde{B}, \tilde{B}^\dagger\}$ por transformação de Bogoliubov como segue:

$$\begin{aligned} A_n^\mu(\beta_T) &= e^{iG_n^\alpha} A_n^\mu e^{-iG_n^\alpha} = u_n(\beta_T) A_n^\mu - v_n(\beta_T) \tilde{A}_n^{\mu\dagger}, \\ \tilde{A}_n^\mu(\beta_T) &= e^{iG_n^\alpha} \tilde{A}_n^\mu e^{-iG_n^\alpha} = u_n(\beta_T) \tilde{A}_n^\mu - v_n(\beta_T) A_n^{\mu\dagger}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

para a corda aberta e para o setor de movimento para a direita da corda fechada. Para o setor de movimento para a esquerda da corda fechada temos

$$\begin{aligned} B_n^\mu(\beta_T) &= e^{iG_n^\beta} B_n^\mu e^{-iG_n^\beta} = u_n(\beta_T) B_n^\mu - v_n(\beta_T) \tilde{B}_n^{\mu\dagger}, \\ \tilde{B}_n^\mu(\beta_T) &= e^{iG_n^\beta} \tilde{B}_n^\mu e^{-iG_n^\beta} = u_n(\beta_T) \tilde{B}_n^\mu - v_n(\beta_T) A_n^{\mu\dagger}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Estes resultados foram obtidos usando (4.13), (4.14), (4.12) e (4.15). Aqui,

$$u_n(\beta_T) = \cosh \theta_n(\beta_T) \quad , \quad v_n(\beta_T) = \sinh \theta_n(\beta_T). \quad (4.21)$$

Desde que os operadores $\hat{p}$, $\hat{X}$, $\hat{\tilde{p}}$, $\hat{\tilde{X}}$ comutam com todos os operadores dos osciladores, eles não são afetados pelas transformações de Bogoliubov, ou seja, as coordenadas de momento e centro de massa são invariantes por transformações de Bogoliubov.

Os operadores de criação e destruição à temperatura finita satisfazem a álgebra dos osciladores (4.5) e (4.6) para cada modo, em cada setor e para ambas as cópias da corda original, e todas estas álgebras são independentes. Sendo assim, os estados de um sistema à temperatura finita são obtidos atuando no vácuo térmico os operadores de criação e destruição à temperatura finita, definidos em (4.16) e (4.17). Os estados obtidos desta forma pertencem a um espaço de Fock térmico.

Uma importante questão é se a construção desta teoria de cordas à temperatura finita possui a mesma estrutura da teoria em $T = 0$, ou se existe algum mapeamento entre elas. Se substituirmos os operadores à temperatura finita na solução da equação de movimento da corda bosônica, obtemos uma solução que depende de T e mistura as cordas original e a til. Este resultado é uma consequência da definição dos operadores G que não afeta a estrutura da folha mundo, mas somente os coeficientes de Fourier. Podemos mostrar que todas as propriedades da corda bosônica à temperatura zero são satisfeitas. Em particular, podemos construir as soluções da equação de movimento da corda à temperatura finita, o tensor energia momento que possui a mesma forma do tensor para $T = 0$. Então, os seguintes operadores

$$L_n^\alpha(\beta_T) = \frac{1}{2} \sum_k \alpha_{-k}(\beta_T) \cdot \alpha_{k+m}(\beta_T), \quad \tilde{L}_n^\beta(\beta_T) = \frac{1}{2} \sum_k \beta_{-k}(\beta_T) \cdot \beta_{k+m}(\beta_T), \quad (4.22)$$

podem ser construídos e a álgebra de Virasoro pode ser mostrada usando as propriedades dos operadores de Bogoliubov (4.13), (4.14), (4.12) e (4.15). Uma vez que estamos trabalhando com duas cópias do mesmo sistema, tudo que foi dito acima é válido também para a corda til. No entanto, nesta teoria de temperatura finita, a noção de corda e corda til são um pouco diferentes desde que ambas misturam os operadores da corda e da corda til como definidos inicialmente em $T = 0$. Deste modo, o símbolo til nos lembra somente que os operadores foram obtidos de uma cópia do sistema original.

4.1 A Entropia dos Estados de uma Corda Bosônica Aberta com Dependência das Condições de Contorno

Consideremos uma corda aberta no espaço de Minkowski. Para evitarmos a introdução de fantasmas na teoria, iremos trabalhar no calibre de cone de luz $X^0 \pm X^{25}$ apresentado no capítulo 2. Neste calibre, o conjunto dos índices correm de $\mu, \nu = 1, 2, \dots, 24$. Consideraremos aqui somente as soluções sujeitas às condições de contorno de Neumann em ambas as extremidades. Os outros casos podem ser tratados da mesma maneira. Neste caso, escreveremos o operador de Bogoliubov definido em (4.10) como

$$G_n = \sum_{\mu=1}^{24} G_n^\mu. \quad (4.23)$$

e denotaremos o vácuo térmico total do sistema da seguinte forma

$$|\Omega(\beta_T)\rangle\rangle = |0(\beta_T)\rangle\rangle |p\rangle |\tilde{p}\rangle. \quad (4.24)$$

Uma vez que estamos tratando a corda como um conjunto de osciladores bosônicos, o operador entropia para a corda bosônica pode ser escrito, da definição (3.95), como segue:

$$K = \sum_{\mu=1}^{24} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{\mu\dagger} A_n^\mu \log \sinh^2 \theta_n - A_n^\mu A_n^{\mu\dagger} \log \cosh^2 \theta_n) \quad (4.25)$$

$$\tilde{K} = \sum_{\mu=1}^{24} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{A}_n^{\mu\dagger} \tilde{A}_n^\mu \log \sinh^2 \theta_n - \tilde{A}_n^\mu \tilde{A}_n^{\mu\dagger} \log \cosh^2 \theta_n). \quad (4.26)$$

Como já foi dito no capítulo 3, o vácuo da teoria é invariante sob a operação til e toda a informação física está contida no sistema sem til, deste modo, como a entropia de um estado é dada pelo valor médio do operador entropia neste estado, iremos somente calculá-lo para o operador (4.25). Para realizarmos os cálculos, é conveniente escrevermos (4.25) na forma

$$K = \sum_{\mu=1}^{24} K^\mu. \quad (4.27)$$

A idéia básica aqui é primeiramente calcularmos a contribuição dos elementos de matriz do operador entropia para cada direção do espaço-tempo. Como resultado obtido da eq. (3.1), a entropia da corda representa a soma das entropias de todos os osciladores.

Nosso objetivo é obter a entropia da corda associada à solução mais geral da equação de movimento. Neste caso, a entropia é uma função do campo que descreve

a folha mundo e sua dependência com os parâmetros da folha mundo é ditada pelas condições de contorno impostas nas equações de movimento. Um vetor de estado geral para a corda à temperatura finita $|X^\mu(\beta_T)\rangle\rangle$ pode ser obtido operando com a solução (2.57) no estado de vácuo térmico (4.24), uma vez que quantizando o sistema, a solução (2.57) torna-se um operador que atua no espaço de Fock.

O elemento de matriz $\langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle$ pode ser dividido em duas partes, uma contendo somente contribuições dos osciladores e outra contendo as contribuições das coordenadas e momentos do centro de massa (CM)

$$\langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle = \text{CM} - 2\alpha' \sum_{n,k,l>0} \frac{e^{i(l-n)\tau}}{\sqrt{l n}} \cos n\sigma \cos l\sigma [(T_1)_{nkl}^{\mu\rho\nu} + (T_2)_{nkl}^{\mu\rho\nu}], \quad (4.28)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} (T_1)_{nkl}^{\mu\rho\nu} &= \left\langle \tilde{0} \left| \left\langle 1_n^\mu \left| \prod_{m>0} e^{-iG_m} A_k^{\rho\dagger} A_k^\rho \log \sinh^2 \theta_k \prod_{s>0} e^{iG_s} \right| 1_l^\nu \right\rangle \right| \tilde{0} \right\rangle \langle \tilde{p} | \tilde{q} \rangle \langle p | q \rangle \\ (T_2)_{nkl}^{\mu\rho\nu} &= - \left\langle \tilde{0} \left| \left\langle 1_n^\mu \left| \prod_{m>0} e^{-iG_m} A_k^\rho A_k^{\rho\dagger} \log \cosh^2 \theta_k \prod_{s>0} e^{iG_s} \right| 1_l^\nu \right\rangle \right| \tilde{0} \right\rangle \langle \tilde{p} | \tilde{q} \rangle \langle p | q \rangle \end{aligned} \quad (4.29)$$

e

$$|1_l^\mu\rangle = A_l^{\mu\dagger} |0\rangle. \quad (4.30)$$

Aqui, consideramos a normalização usual dos estados de momento em um volume V_{24} no espaço transversal

$$\langle p | q \rangle = 2\pi \delta^{(24)}(p - q) \quad (4.31)$$

$$(2\pi)^{24} \delta^{(24)}(0) = V_{24}. \quad (4.32)$$

Manipulando algebricamente (4.28), a contribuição dos osciladores para o elemento de matriz do operador entropia toma a forma

$$\begin{aligned} \langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle &= \text{CM} - 2\alpha' (2\pi)^{(48)} \delta^{\mu\nu} \delta^{(24)}(p - q) \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{q}) \times \\ &\quad \sum_{n>0} \frac{1}{n} \cos^2 n\sigma [\log(\tanh \theta_n)^2 \delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho} \sum_{k>0} \delta_{kk}]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O termo contendo o CM contém tanto as contribuições das coordenadas e momentos quanto dos osciladores. Para escrevermos explicitamente a forma desta contribuição para o elemento de matriz do operador entropia, devemos dividir ainda este termo em duas partes, uma contendo somente contribuições das coordenadas e centro de massa e outra dos osciladores. Para o cálculo das contribuições devido às coordenadas e momentos, usaremos as relações de completeza dos auto-estados dos operadores de momento junto com o elemento de matriz

$$\langle x | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-12} e^{ix \cdot p / \hbar}. \quad (4.34)$$

Para calcularmos a contribuição do termo devido aos osciladores, podemos expressar os osciladores em $T = 0$ em termos dos osciladores em $T \neq 0$ ou escrever o vácuo à temperatura finita em termos do vácuo à temperatura nula. Os dois modos conduzem ao mesmo resultado, no entanto, o primeiro nos fornece somente relações polinomiais entre os operadores de criação e destruição à temperatura finita. Usando as propriedades dos operadores de Bogoliubov mostradas na seção anterior, podemos mostrar que as contribuições vindas dos termos que misturam os operadores do centro de massa com a parte dos osciladores são canceladas. Os termos diferentes de zero são todos proporcionais a $\langle\langle 0(\beta_T) | K^\rho | 0(\beta_T) \rangle\rangle$, que representa a entropia de um número infinito de osciladores bosônicos na ρ 'ésima direção do espaço-tempo. A relação final obtida para a entropia levando em conta a contribuição de todos os termos é

$$\begin{aligned} & \langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle = \\ & - (2\pi\hbar)^{-24} \left[(2\pi\hbar)^{24} (2\alpha'\tau)^2 p^\mu p^\nu \delta^{(24)}(p - p') + 2\alpha'\tau (I_2^\mu p^\nu + I_2^\nu p^\mu) + I_2^\mu I_2^\nu \prod_{j \neq \mu, \nu} I_1^j \right] \\ & \times \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{p}') \sum_{m=1} [\mathbf{n}_m^\rho \log \mathbf{n}_m^\rho + (1 - \mathbf{n}_m^\rho) \log(1 - \mathbf{n}_m^\rho)] - 2\alpha'(2\pi)^{(48)} \delta^{\mu\nu} \delta^{(24)}(p - p') \\ & \times \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{p}') \sum_{n>0} \frac{1}{n} \cos^2 n\sigma \left[\log(\tanh \theta_n)^2 \delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho} \sum_{k>0} \delta_{kk} \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde as integrais unidimensionais no domínio finito $x \in [x_0, x_1]$ são dadas por

$$I_1 = -i\hbar(p' - p)^{-1} \left[e^{\frac{i}{\hbar}x_1(p' - p)} - e^{\frac{i}{\hbar}x_0(p' - p)} \right] \quad (4.36)$$

$$I_2 = -i\hbar(p' - p)^{-1} \left[-i\hbar I_1 + x_1 e^{\frac{i}{\hbar}x_1(p' - p)} - x_0 e^{\frac{i}{\hbar}x_0(p' - p)} \right], \quad (4.37)$$

e os estados de momento final e inicial são denotados, respectivamente, por $|p\rangle$, $|p'\rangle$, e o termo

$$\mathbf{n}_m^\rho = \langle\langle 0(\beta_T) | A_m^{\rho\dagger} A_m^\rho | 0(\beta_T) \rangle\rangle = \sinh^2 \theta_m \quad (4.38)$$

representa o número de excitações da corda no vácuo térmico.

A equação (4.35) representa o elemento de matriz do operador entropia K^ρ entre dois estados gerais, descritos pela equação de movimento para a corda bosônica com condições de contorno de Neunmam em ambas as extremidades. Como expressa a equação (4.27), a entropia total é a soma das entropias em todas as direções do espaço transversal. Uma vez que as condições de contorno são impostas nas coordenadas da folha mundo, podemos obter de modo similar expressões para as entropias das cordas sujeitas as outras condições de contorno DD, DN e ND, cujas soluções estão expressas no cap. 2. É importante observarmos que nestes casos não

existem operadores associados com as coordenadas e momentos do centro de massa da corda, mas sim, vetores de posição constantes associados com suas extremidades, não havendo, então, contribuição destes termos para a entropia. Tais termos que misturam as coordenadas das extremidades da corda tornam-se zero pelas mesmas razões do caso NN já estudado em detalhes. Os termos dos elementos de matriz diferentes de zero obtidos para cada um dos novos casos são

$$\begin{aligned} \text{DD} : \langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle &= 2\alpha'(2\pi)^{(48)} \delta^{\mu\nu} \delta^{(24)}(p - p') \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{p}') \\ &\sum_{n>0} \frac{1}{n} \sin^2 n\sigma \left[\log(\tanh \theta_n)^2 \delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho} \sum_{k>0} \delta_{kk} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \text{DN} : \langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle &= 2\alpha'(2\pi)^{(48)} \delta^{\mu\nu} \delta^{(24)}(p - p') \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{p}') \\ &\sum_{r=\mathcal{Z}+1/2} \frac{1}{r} \sin^2 r\sigma \left[\log(\tanh \theta_r)^2 \delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho} \sum_{k>0} \delta_{kk} \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \text{ND} : \langle\langle X^\mu(\beta_T) | K^\rho | X^\mu(\beta_T) \rangle\rangle &= 2\alpha'(2\pi)^{(48)} \delta^{\mu\nu} \delta^{(24)}(p - p') \delta^{(24)}(\tilde{p} - \tilde{p}') \\ &\sum_{r=\mathcal{Z}+1/2} \frac{1}{r} \cos^2 r\sigma \left[\log(\tanh \theta_r)^2 \delta^{\rho\nu} - \delta^{\rho\rho} \sum_{k>0} \delta_{kk} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aqui, $\mathcal{Z} + 1/2$ são números inteiros. As relações (4.35), (4.39), (4.40) e (4.41) representam a entropia dos estados associados às soluções gerais das equações de movimento. Elas dão a entropia como função da folha mundo, no entanto, esta entropia não pode ser pensada como a entropia do vácuo da corda bosônica que é dada como a soma em todas as direções espaço-temporais da entropia dos bósons escalares sem massa e não dependem das condições de contorno.

4.2 Corda Bosônica Fechada no Grupo SU(1,1) Térmico

Nesta seção, será obtida uma expressão para a entropia da corda fechada de um modo um pouco diferente do usado para obtermos a expressão para a entropia da corda aberta na seção anterior. Aqui, consideraremos a construção desenvolvida em [4, 6], na qual podemos obter um gerador geral para as transformações de Bogoliubov, partindo de uma combinação linear de três geradores individuais que satisfazem independentemente as condições necessárias para gerar uma transformação de Bogoliubov.

Para termos uma teoria de cordas à temperatura finita, temos que inicialmente gerar um vácuo térmico que, como sabemos, pode ser obtido do vácuo dobrado (4.9) partindo de qualquer transformação que misture os operadores A_k^μ , $\tilde{A}_k^{\mu\dagger}$ para

os modos direitos, e $B_k^\mu, \tilde{B}_k^{\mu\dagger}$ para os modos esquerdos, e cujos geradores comutam com a Hamiltoniana total

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \sum_{n>0}^{\infty} n \left(A_n^\dagger \cdot A_n + B_n^\dagger \cdot B_n - \tilde{A}_n^\dagger \cdot \tilde{A}_n - \tilde{B}_n^\dagger \cdot \tilde{B}_n \right). \quad (4.42)$$

Além de satisfazer as condições acima, tais transformações devem ter a forma geral das transformações de Bogoliubov, que fixam a forma dos geradores pelas seguintes relações

$$\begin{pmatrix} A' \\ \tilde{A}'^\dagger \end{pmatrix} = e^{-iG} \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix} e^{iG} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A'^\dagger & -\tilde{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger & -\tilde{A} \end{pmatrix} \mathcal{B}^{-1}, \quad (4.43)$$

onde $\mathcal{B}$ é uma matriz de transformação 2×2 complexa e unitária

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad |u|^2 - |v|^2 = 1, \quad (4.44)$$

e G é o gerador da transformação conhecido como operador de Bogoliubov (já citado no cap.1). Segundo [6] os operadores que satisfazem as condições (4.43) e (4.44) possuem a seguinte forma

$$\begin{aligned} g_{1_k}^\alpha &= \theta_{1_k} (A_k \cdot \tilde{A}_k + \tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger), & g_{1_k}^\beta &= \theta_{1_k} (B_k \cdot \tilde{B}_k + \tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger), \\ g_{2_k}^\alpha &= i\theta_{2_k} (A_k \cdot \tilde{A}_k - \tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger), & g_{2_k}^\beta &= i\theta_{2_k} (B_k \cdot \tilde{B}_k - \tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger), \\ g_{3_k}^\alpha &= \theta_{3_k} (A_k^\dagger \cdot A_k + \tilde{A}_k^\dagger \cdot \tilde{A}_k + \delta_{kk} tr \eta^{\mu\nu}), & g_{3_k}^\beta &= \theta_{3_k} (B_k^\dagger \cdot B_k + \tilde{B}_k^\dagger \cdot \tilde{B}_k + \delta_{kk} tr \eta^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde os supra-índices α e β referem-se, respectivamente, aos modos dos movimentos para a direita e para a esquerda e θ é um parâmetro real que depende da temperatura e foi convenientemente incluído nos operadores. Estes operadores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\left[g_{1_k}^{\alpha,\beta}, g_{2_k}^{\alpha,\beta} \right] = -i\Theta_{123} g_{3_k}^{\alpha,\beta}, \quad \left[g_{2_k}^{\alpha,\beta}, g_{3_k}^{\alpha,\beta} \right] = i\Theta_{231} g_{1_k}^{\alpha,\beta}, \quad \left[g_{3_k}^{\alpha,\beta}, g_{1_k}^{\alpha,\beta} \right] = i\Theta_{312} g_{2_k}^{\alpha,\beta}. \quad (4.46)$$

Podemos observar destas relações de comutação que os geradores (4.45) satisfazem a álgebra $SU(1,1)$ para a qual definimos

$$\Theta_{ijk} \equiv 2 \frac{\theta_{i_k} \theta_{j_k}}{\theta_{k_k}}. \quad (4.47)$$

Como já foi dito no início desta seção, podemos escrever um gerador geral como uma combinação linear dos geradores independentes escritos em (4.45) em uma forma compacta como segue

$$G = \sum_k \left(G_k^\alpha + G_k^\beta \right), \quad (4.48)$$

com os geradores das transformações de Bogoliubov para os modos dos osciladores direitos e esquerdos da corda dados respectivamente por

$$G_k^\alpha = \lambda_{1_k} \tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger - \lambda_{2_k} A_k \cdot \tilde{A}_k + \lambda_{3_k} (A_k^\dagger \cdot A_k + \tilde{A}_k^\dagger \cdot \tilde{A}_k + \delta_{kk} \text{tr} \eta^{\mu\nu}), \quad (4.49)$$

$$G_k^\beta = \lambda_{1_k} \tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger - \lambda_{2_k} B_k \cdot \tilde{B}_k + \lambda_{3_k} (B_k^\dagger \cdot B_k + \tilde{B}_k^\dagger \cdot \tilde{B}_k + \delta_{kk} \text{tr} \eta^{\mu\nu}) \quad (4.50)$$

onde os coeficientes λ representam uma combinação linear complexa dos parâmetros θ que estão relacionados à distribuição de Bose-Einstein, como segue

$$\lambda_{1_k} = \theta_{1_k} - i\theta_{2_k}, \quad \lambda_{2_k} = -\lambda_{1_k}^*, \quad \lambda_{3_k} = \theta_{3_k}. \quad (4.51)$$

Desta forma, o operador (4.48) gera as transformações térmicas e a dependência com a temperatura está contida em λ .

Existe uma certa liberdade na escolha do parâmetro θ , e podemos usar esta liberdade para fixarmos o tipo de transformação. Existem duas condições as quais uma transformação térmica deve satisfazer: i) unitariedade e ii) e invariância sob conjugação til de operadores arbitrários como segue

$$(\tilde{A}B) = \tilde{A}\tilde{B} \quad , \quad \alpha\tilde{A} = \alpha^*\tilde{A}, \quad (4.52)$$

onde α é um número complexo e $*$ representa uma conjugação complexa. A invariância sob conjugação til garante a invariância do vácuo sob a mesma operação. No entanto, o uso do grupo $SU(1, 1)$ térmico implica na escolha de somente um tipo de transformação. A unitariedade e a invariância por conjugação til nem sempre são simultaneamente compatíveis [4, 6], sendo que, em geral, esta compatibilidade reduz esta teoria a DCT de um único gerador (cap.3), pois somente o gerador g_2 é selecionado. Aqui, consideraremos que a condição de unitariedade é a mais natural para o nosso sistema, sendo a outra escolha comentada na conclusão.

4.2.1 Vácuo e Operadores Térmicos para a Corda Fechada

O vácuo térmico à temperatura finita pode ser obtido através da transformação [1]

$$|0(\theta)\rangle\rangle = e^{-iG} |0\rangle\rangle, \quad (4.53)$$

onde, neste caso, G é o operador geral de Bogoliubov escrito em (4.48) e o vácuo térmico $|0\rangle\rangle$ é dado por (4.9). Como os termos dos modos para a direita e para a esquerda comutam entre si, existem duas contribuições distintas dos setores direito (α) e esquerdo (β). Uma vez que os termos que compõem os geradores G_k^α e G_k^β satisfazem a álgebra $SU(1, 1)$, fazendo uso do Teorema do “Desentrelaçamento”

[23, 24], podemos escrever o vácuo térmico da seguinte forma

$$|0(\theta)\rangle\rangle_\alpha = \prod_k e^{\Gamma_{1k}(\tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger)} e^{\log(\Gamma_{3k})(A_k^\dagger \cdot A_k + \tilde{A}_k^\dagger \cdot \tilde{A}_k + \delta_{kk} tr \eta^{\mu\nu})} e^{\Gamma_{2k}(A_k \cdot \tilde{A}_k)} |0\rangle\rangle_\alpha, \quad (4.54)$$

para o qual os coeficientes dos vários geradores são dados pelas seguintes relações

$$\Gamma_{1k} = \frac{-\lambda_{1k} \sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3k} \sinh(i\Lambda_k)}, \quad \Gamma_{2k} = \frac{\lambda_{2k} \sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3k} \sinh(i\Lambda_k)}, \quad (4.55)$$

$$\Gamma_{3k} = \frac{\Lambda_k}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3k} \sinh(i\Lambda_k)}, \quad (4.56)$$

e

$$\Lambda_k^2 \equiv (\lambda_{3k}^2 + \lambda_{1k} \lambda_{2k}). \quad (4.57)$$

Uma vez que os operadores A_k^μ e $\tilde{A}_k^\mu$ aniquilam o vácuo do modo direito à temperatura nula, expandindo as exponenciais dos operadores na expressão (4.54), encontramos que somente um termo contribui para o vácuo térmico, ou seja,

$$|0(\theta)\rangle\rangle_\alpha = \prod_k (\Gamma_{3k})^{\delta_{kk} tr \eta^{\mu\nu}} e^{\Gamma_{1k}(\tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger)} |0\rangle\rangle_\alpha. \quad (4.58)$$

O vácuo térmico dos modos do movimento para a esquerda ($|0(\theta)\rangle\rangle_\beta$) podem ser obtidos da mesma forma. O vácuo total à temperatura finita é dado pelo produto direto dos vácuos térmicos α e β . A expressão obtida desta operação é

$$|0(\theta)\rangle\rangle = \prod_k (\Gamma_{3k})^{2tr \eta^{\mu\nu}} e^{\Gamma_{1k}(\tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger)} e^{\Gamma_{1k}(\tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger)} |0\rangle\rangle. \quad (4.59)$$

Os operadores são mapeados na temperatura finita pelos correspondentes geradores de Bogoliubov como segue

$$\begin{aligned} A_k^\mu(\theta) &= e^{-iG_k^\alpha} A_k^\mu e^{iG_k^\alpha}, & \tilde{A}_k^\mu(\theta) &= e^{-iG_k^\alpha} \tilde{A}_k^\mu e^{iG_k^\alpha}, \\ B_k^\mu(\theta) &= e^{-iG_k^\beta} B_k^\mu e^{iG_k^\beta}, & \tilde{B}_k^\mu(\theta) &= e^{-iG_k^\beta} \tilde{B}_k^\mu e^{iG_k^\beta}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Usando as propriedades dos operadores G descritas no cap.3, podemos obter das expressões acima relações semelhantes para os operadores de criação. Pode ser mostrado que estes operadores térmicos satisfazem as mesmas relações de comutação dos operadores à temperatura nula. Podemos ainda escrever este mapeamento em termos dos dubletos térmicos [6, 4], como segue

$$\begin{pmatrix} A_k^\mu(\theta) \\ \tilde{A}_k^{\mu\dagger}(\theta) \end{pmatrix} = B_k \begin{pmatrix} A_k^\mu \\ \tilde{A}_k^{\mu\dagger} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

onde a matriz de transformação que atua nos dubletos à temperatura nula $\mathcal{B}_k$ é escrita na forma

$$\mathcal{B}_k = \cosh(i\Lambda_k) \mathcal{I} + \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{(i\Lambda_k)} \begin{pmatrix} i\lambda_{3_k} & i\lambda_{1_k} \\ i\lambda_{2_k} & -i\lambda_{3_k} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

onde $\mathcal{I}$ é uma matriz identidade. Devemos novamente salientar que o sistema à temperatura finita satisfaz todas as propriedades do sistema à temperatura nula, pois os operadores térmicos satisfazem as mesmas relações de comutação dos operadores em $T = 0$. Deste modo, podemos construir soluções com condições de contorno periódicas para uma equação de movimento à temperatura finita somente trocando os osciladores em $T = 0$ pelos seus correspondentes em $T \neq 0$, uma vez que as coordenadas de posição e momento do centro de massa são invariantes por transformações de Bogoliubov. Desta equação de movimento podemos também construir um tensor de energia-momento que possui a mesma forma que o tensor à temperatura nula e que nos conduzem aos seguintes geradores da álgebra de Virasoro

$$L_m^\alpha(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{-k}(\theta) \alpha_{k+m}(\theta), \quad L_m^\beta(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{-k}(\theta) \beta_{k+m}(\theta). \quad (4.63)$$

Isto nos garante que realmente estamos trabalhando com cordas fechadas à temperatura finita [11, 12]. Portanto, temos agora todos os componentes necessários para uma descrição térmica da corda fechada.

4.2.2 Operador Entropia para a Corda Fechada

No cap.3, descrevemos um operador cujo o valor esperado no vácuo térmico, multiplicado pela constante de Boltzmann, recebe o nome de operador de entropia para um campo bosônico na aproximação de Stirling, quando o sistema esta em equilíbrio, a saber:

$$\frac{1}{k_B} \langle\langle 0(\theta) | K | 0(\theta) \rangle\rangle = \left\{ \sum_k [(1 + n_k) \log(1 + n_k) - n_k \log(n_k)] \right\}, \quad (4.64)$$

onde n_k é a densidade de número de partículas e k_B a constante de Boltzmann. Definiremos para a nossa construção o operador entropia para a corda bosônica fechada como sendo

$$K = K^\alpha + K^\beta, \quad (4.65)$$

onde as entropias dos modos de movimento para a direita e para a esquerda são dadas, respectivamente, pelas seguintes relações

$$K^\alpha = \sum_k \left[A_k^\dagger \cdot A_k \log(\Omega_k) - A_k \cdot A_k^\dagger \log(\Omega_k) \right],$$

$$K^\beta = - \sum_k \left[B_k^\dagger \cdot B_k \log(\Omega_k) - B_k \cdot B_k^\dagger \log(\Omega_k) \right],$$

onde definimos

$$\Omega_k = g \frac{\lambda_{1k} \lambda_{2k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k).$$

A escolha desta forma para o operador entropia se encontra no fato de podermos reproduzir a entropia apresentada em [12] para o caso de existir uma única transformação gerada por g_{2k} , isto é, quando $\theta_{1k} = \theta_{3k} = 0$. Tal escolha também nos fornece o operador definido em [4] quando $g = 1$. Portanto, realizando a média do operador (4.65) no vácuo térmico e multiplicando o resultado pela constante de Boltzmann, obtemos a entropia para a corda bosônica fechada, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= k_B \langle\langle 0(\beta) | K | 0(\beta) \rangle\rangle \\ &= 2k_B \sum_k [(1 + n_k) \log(1 + n_k) - n_k \log(n_k)], \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde

$$n_k = g \left[\frac{\lambda_{1k} \lambda_{2k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k) \right], \quad (4.67)$$

e

$$g = \langle\langle 0 | \tilde{A}_k \cdot \tilde{A}_k^\dagger | 0 \rangle\rangle = \langle\langle 0 | \tilde{B}_k \cdot \tilde{B}_k^\dagger | 0 \rangle\rangle. \quad (4.68)$$

O operador entropia para a corda bosônica fechada foi construído como a soma das entropias dos modos dos movimentos para a esquerda e para a direita, tratados como dois subsistemas independentes do sistema total (corda bosônica fechada), ou seja, usamos a propriedade de extensividade do operador entropia. Uma observação importante é que a entropia do sistema, eq.(4.66), vai a zero quando o sistema está em equilíbrio, isto é, tomando a expressão para n_k , eq.(3.100),

$$n_k = \frac{e^{-(k_B T)^{-1} \omega}}{1 - e^{-(k_B T)^{-1} \omega}}, \quad (4.69)$$

e tomando o limite $T \rightarrow 0$ [13]. Isto garante que a terceira lei da termodinâmica seja satisfeita [5].

Capítulo 5

Conclusão

Inicialmente, descrevemos a ação de uma partícula clássica puntual relativística, a qual vimos ter uma interpretação geométrica: é proporcional ao comprimento da trajetória (linha mundo) desta partícula no espaço-tempo no qual está imersa. Generalizamos então este conceito para obtermos uma expressão para a ação de um objeto matemático extenso e unidimensional (corda bosônica clássica), ou seja, neste caso, a ação é proporcional à área delimitada pela trajetória da corda no espaço-tempo D -dimensional. Esta superfície é chamada de folha mundo e é parametrizada por dois parâmetros: τ (tipo tempo) e σ (tipo espaço). Devido à presença de uma raiz quadrada nesta ação, foi necessário escrevermos uma outra classicamente equivalente, e que possui claramente invariância por reparametrização local e reescalonamento conforme da métrica (Weyl), e uma outra invariância que reflete a simetria global do espaço-tempo (Lorentz ou Poincaré), no qual a corda está se propagando. Do fato da ação ser um invariante de Weyl, o tensor energia-momento possui traço nulo. Uma outra propriedade deste tensor, que nos conduz a vínculos na teoria, que podem ser implementados somente no nível clássico, é $T_{ab} = 0$. Nas coordenadas de cone de luz, estes vínculos tomam a forma $T_{++} = T_{--} = 0$, e suas componentes de Fourier nos conduzem a uma álgebra de Virasoro que não é válida quanticamente, devido aos problemas de ordenamento normal dos operadores.

Classicamente, a teoria de cordas livre pode ser formulada consistentemente em qualquer dimensão espaço-temporal, mas quando a quantizamos, o espectro é livre de fantasmas somente para $D \leq 26$ e para $a = 1$, onde a é uma constante que surge devido ao ordenamento normal do produto dos operadores de criação e aniquilação. A quantização canônica foi realizada em termos dos campos $X^\mu(\tau, \sigma)$, somente com restrições físicas no espaço de Fock, originadas dos vínculos sobre o tensor energia-momento que dão origem a graus de liberdade não físicos (fantasmas). Vimos também que surgem anomalias na álgebra de Virasoro devido ao produto normalmente ordenado dos operadores de criação e aniquilação. Esta anomalia desaparece

para determinados valores críticos de D e a , como já foi dito. Vimos também que a quantização no calibre do cone de luz apresenta a vantagem de ser livre de fantasmas, embora não seja manifestamente covariante. A escolha deste calibre não manifestamente covariante nos permite resolver as equações de vínculo de Virasoro e descrever a teoria em um espaço de Fock que descreve somente graus de liberdade físicos. Neste calibre, vimos também a necessidade de escolhermos $D = 26$ e $a = 1$.

A corda fechada é descrita dobrando-se os graus de liberdade da corda aberta. Os modos para a direita ou para a esquerda são descritos matematicamente da mesma forma que aqueles da corda aberta, e seu estado é dado pelo produto direto do estado que representa o modo para a direita e do que representa o modo para a esquerda. Os dois modos são independentes, exceto por uma única relação, $L_0 = \bar{L}_0$. A corda fechada possui como importância particular o fato do seu espectro conter grávitons sem massa.

No capítulo 3, mostramos como a média em um ensemble estatístico, que é dado por uma operação de traço, pode ser trocado por uma média em mecânica quântica. Este é o princípio fundamental da construção de uma Dinâmica de Campos Térmicos, que consiste basicamente em determinarmos um vácuo à temperatura finita que possa ser mapeado em um outro à temperatura nula através de uma transformação de Bogoliubov. Nesta construção houve necessidade de dobrarmos os graus de liberdade do sistema, através da introdução de um sistema fictício que, como vimos, possui todas as propriedades do sistema físico real. Um espaço de Fock térmico pôde ser construído a partir de aplicações dos operadores de criação e destruição térmicos, os quais são obtidos por transformações de Bogoliubov a partir dos operadores a $T = 0$, no vácuo térmico. Verificamos a validade desta construção por aplicação a um campo de Schrödinger, da qual obtivemos grandezas termodinâmicas tais como entropia, energia livre de Helmholtz e também a distribuição estatística de Bose-Einstein. Em seguida, apresentamos regras gerais para a generalização de tal formalismo para uma teoria quântica de campos arbitrária.

Aplicamos os conceitos apresentados no capítulos 2 e 3 para construir a corda bosônica térmica no capítulo 4. De acordo com a dinâmica de campos térmicos, primeiramente duplicamos o sistema e a cópia idêntica, que deve ser denotada por $\tilde{H}$, deve ser independente do sistema original e não pode representar um sistema físico. O espaço de Hilbert do sistema total é dado pelo produto direto dos dois espaços de Hilbert ($\mathcal{H}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$), e os operadores das duas cordas comutam entre si. Duplicando-se o sistema, surgem novos graus de liberdade, aos quais são atribuídas as propriedades térmicas da corda, que podem ser implementados no espaço de Hilbert através das transformações térmicas de Bogoliubov, que leva o vácuo da corda em um vácuo térmico definido por (3.1). Como vimos, existem diversas formas de se fazer tal

mapeamento [6, 4] usando operadores que geram um grupo térmico $SU(1, 1)$, mas se exigirmos que esta transformação seja unitária e invariante por transformação til, iremos selecionar somente um operador neste caso. Os operadores de criação e destruição, equações (4.19) e (4.20), formam um conjunto de osciladores térmicos, uma vez que estes satisfazem às mesmas relações de comutação dos operadores a $T = 0$. Uma vez que as coordenadas e momentos do centro de massa são invariantes por transformações de Bogoliubov, podemos construir a solução $X^\mu(\beta_T)$ a $T \neq 0$ trocando os operadores em (2.57) pelos correspondentes a $T \neq 0$. Do mesmo modo, construímos os geradores da álgebra de Virasoro em termos dos osciladores térmicos e mostramos que a simetria conforme da solução é preservada. Conseqüentemente, as transformações de Bogoliubov mapeiam as duas cópias da corda em duas cópias da corda térmica. No entanto, a interpretação de corda e corda til desaparece a $T \neq 0$, uma vez que os operadores de Bogoliubov misturam as duas cópias da corda. O vácuo térmico também é invariante sob operação til. Podemos dizer que excitações da corda térmica, sendo uma mistura de excitações a $T = 0$ da corda e da corda til, carregam graus de liberdade térmicos junto com os graus de liberdade dinâmicos. Após introduzida a temperatura na corda bosônica, calculamos a entropia da corda em estados que dependem explicitamente das condições de contorno. Para isto, partimos das soluções mais gerais das equações de movimento, para cada uma das possibilidades de condições de contorno, e calculamos o valor esperado do operador entropia nos estados correspondentes a cada uma delas. As relações importantes são (4.35), (4.39), (4.40) e (4.41). Estes elementos de matriz podem ser usados para calcularmos a entropia de vários estados de corda aberta com diferentes condições de contorno. Devemos observar que somente a entropia do estado correspondente às condições de contorno de Neumann em ambas as extremidades depende de $\hbar$. No limite semiclássico, $\hbar \rightarrow 0$, as contribuições dos momentos tornam-se irrelevantes. O termo que domina é o mesmo que domina no limite da tensão indo para o infinito, $\alpha' \rightarrow 0$, e, neste caso, a entropia dos estados correspondentes às outras condições de contorno, (4.39), (4.40) e (4.41) é nula. Para finalizar, analisamos o grupo térmico $SU(1, 1)$ formado por todos os possíveis geradores unitários de Bogoliubov no caso da corda bosônica fechada. A razão desta análise é que construímos a corda fechada térmica no contexto da DCT, onde o grupo $SU(1, 1)$ representa a estrutura mais geral das transformações de Bogoliubov. Escolhendo um determinado tipo de parametro τ , as transformações de Bogoliubov podem ser fixadas como sendo unitárias ou não unitárias. Escolhemos as transformações unitárias para preservarmos a estrutura do espaço de Hilbert à temperatura zero e a interpretação usual da mecânica quântica. No entanto, com esta escolha, a invariância til do vácuo térmico não é preservada e isto não é uma característica desejável na DCT. A solução é construir o vácuo

térmico como um produto direto entre o vácuo térmico original, obtido através das transformações de Bogoliubov, e o conjugado sob operação til. Se exigirmos que a transformação geral de Bogoliubov seja unitária e preserve a invariância til do vácuo, dois geradores do grupo $SU(1,1)$ serão eliminados. Deste modo, podemos concluir que, a menos que o vácuo térmico seja um produto do vácuo térmico original e do conjugado til, não existe um grupo térmico $SU(1,1)$ compatível com a unitariedade da mecânica quântica e a invariância til da DCT.

Mapeamento do Vácuo

Para estabelecer a conexão entre o vácuo térmico e o vácuo original, vamos considerar o mapeamento do vácuo térmico para o vácuo original. O vácuo térmico é definido como o estado de menor energia do sistema térmico, ou seja, o estado que satisfaz a equação de Schrödinger térmica:

$$H_T |\Omega\rangle = E_T |\Omega\rangle \quad (3.1)$$

onde H_T é o hamiltoniano térmico, E_T é a energia térmica e $|\Omega\rangle$ é o vácuo térmico. O hamiltoniano térmico é dado por:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 \quad (3.2)$$

onde H_0 é o hamiltoniano original e H_1 é o hamiltoniano de interação. O parâmetro λ é um escalar real que controla a intensidade da interação. O vácuo térmico pode ser escrito como um produto de dois estados:

$$|\Omega\rangle = |\Omega_1\rangle \otimes |\Omega_2\rangle \quad (3.3)$$

onde $|\Omega_1\rangle$ e $|\Omega_2\rangle$ são estados de menor energia dos subsistemas 1 e 2, respectivamente. O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.4)$$

onde $H_1^\dagger$ é o adjunto de H_1 . O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.5)$$

O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.6)$$

onde $H_1^\dagger$ é o adjunto de H_1 . O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.7)$$

O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.8)$$

onde $H_1^\dagger$ é o adjunto de H_1 . O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.9)$$

onde $H_1^\dagger$ é o adjunto de H_1 . O hamiltoniano térmico pode ser escrito como:

$$H_T = H_0 + \lambda H_1 = H_0 + \lambda (H_1 + H_1^\dagger) \quad (3.10)$$

Apêndice A

Mapeamento do Vácuo

Desejamos mostrar que o mapeamento do vácuo a $T = 0$ no vácuo térmico a $T \neq 0$, definido por

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG}|0\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde $G = G^\dagger = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger)$ é o gerador das transformações de Bogoliubov, nos conduz à equação

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= u(\beta)^{-1} \exp\left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh \theta(\beta)} \exp(\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com $u(\beta)$ e $v(\beta)$ dados pela equações (3.16) e (3.17), respectivamente.

Das duas equações anteriores, (A.1) e (A.2), podemos escrever o vácuo térmico como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= e^{-\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)} |O\rangle \\ &= e^{\tau(A+B)} |0\rangle, \end{aligned}$$

onde definimos $\tau \doteq \theta(\beta)$, $A \doteq -\tilde{a}a$, $B \doteq \tilde{a}^\dagger a^\dagger$. Para escrevermos a exponencial da soma como um produto de exponenciais, definiremos

$$E(\tau) = e^{\tau(A+B)} = e^{\alpha(\tau)B} \kappa e^{\gamma(\tau)A},$$

onde κ é um operador. Derivando $E(\tau)$ em relação a τ obtemos

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = (e^{-\alpha(\tau)B} B e^{\alpha(\tau)B}) \left(1 - \frac{d\alpha}{d\tau}\right) \kappa + (e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B}) \kappa - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \kappa A. \quad (\text{A.3})$$

Esta equação deve estar sujeita à seguinte condição de contorno

$$E(0) = e^{\alpha(0)B} \kappa(0) e^{\gamma(0)A} = 1. \quad (\text{A.4})$$

Seja

$$\begin{aligned} f_{\theta}(\tau) &= e^{-\alpha(\tau)B} \theta e^{\alpha(\tau)B} \\ &= \theta - \frac{\alpha}{1!}[B, \theta] + \frac{\alpha^2}{2!}[B, [B, \theta]] - \frac{\alpha^3}{3!}[B, [B, [B, \theta]]] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

então

$$f_B(\tau) = e^{-\alpha(\tau)B} B e^{\alpha(\tau)B} = B, \quad (\text{A.6})$$

e, portanto, a expressão (A.3) fica

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = B\left(1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\right)\kappa + (e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B})\kappa - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}\kappa A. \quad (\text{A.7})$$

Supondo que κ seja uma exponencial, ou seja,

$$\kappa = e^{\beta(\tau)C}, \quad (\text{A.8})$$

onde $C = [A, B]$, teremos

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} C e^{\beta(\tau)C}. \quad (\text{A.9})$$

As equações (A.7), (A.8) e (A.9) levam a

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} C e^{\beta(\tau)C} &= B \left(1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\right) e^{\beta(\tau)C} + (e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B}) e^{\beta(\tau)C} - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} e^{\beta(\tau)C} A \\ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} C &= \left(B\left(1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\right) + e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B}\right) - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} e^{\beta(\tau)C} A e^{-\beta(\tau)C} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e, pela expressão (A.5), teremos que

$$e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B} = A - \frac{\alpha}{1!}[B, A] + \frac{\alpha^2}{2!}[B, [B, A]] - \frac{\alpha^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots \quad (\text{A.11})$$

e

$$e^{\beta(\tau)C} A e^{-\beta(\tau)C} = A + \frac{\beta}{1!}[C, A] + \frac{\beta^2}{2!}[C, [C, A]] + \frac{\beta^3}{3!}[C, [C, [C, A]]] + \dots \quad (\text{A.12})$$

Agora, verificaremos que os operadores A , B , e $C = [A, B]$ formam uma álgebra fechada

$$[A, B] = [-\tilde{a}a, \tilde{a}^{\dagger}a^{\dagger}] = -\tilde{a}\tilde{a}^{\dagger} - a^{\dagger}a = C, \quad (\text{A.13})$$

$$[B, C] = [\tilde{a}\tilde{a}^{\dagger} + a^{\dagger}a, \tilde{a}^{\dagger}a^{\dagger}] = 2\tilde{a}^{\dagger}a^{\dagger} = 2B, \quad (\text{A.14})$$

$$[A, C] = [\tilde{a}a, \tilde{a}\tilde{a}^{\dagger} + a^{\dagger}a] = 2\tilde{a}a = -2A. \quad (\text{A.15})$$

Podemos ainda ver, destes três últimos comutadores, que os operadores A , B , e C satisfazem a identidade de Jacobi, ou seja

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Calculando explicitamente os comutadores que aparecem na expressão (A.11)

$$[B, A] = -C,$$

$$[B, [B, A]] = -2B,$$

$$[B, [B, [B, A]]] = 0,$$

sendo os demais termos também nulos, a equação (A.11) fica

$$e^{-\alpha(\tau)B} A e^{\alpha(\tau)B} = A + \alpha C - \alpha^2 B. \quad (\text{A.16})$$

Para a equação (A.12) obtemos

$$[C, A] = \lambda A,$$

$$[C, [C, A]] = \lambda[C, A] = 2^2 A,$$

$$[C, [C, [C, A]]] = [C, \lambda^2 A] = 2^3 A,$$

e desta forma, o n -ésimo termo será

$$[C, [C, \dots, [C, A] \dots]] = 2^n A$$

então

$$\begin{aligned} e^{\beta(\tau)C} A e^{-\beta(\tau)C} &= A + \frac{2\beta}{1!} A + \frac{(2\beta)^2}{2!} A + \frac{(2\beta)^3}{3!} A + \dots \\ &= e^{2\beta(\tau)} A. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo os resultados (A.16) e (A.17) na expressão (A.10), teremos

$$\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} C = \left(1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\right) B + (A + \alpha(\tau)C - \alpha^2(\tau)B) - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} e^{2\beta(\tau)} A, \quad (\text{A.18})$$

ou ainda

$$\left(1 - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} e^{2\beta(\tau)}\right) A + \left(1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} - \alpha^2(\tau)\right) B + \left(\alpha(\tau) - \frac{d\beta(\tau)}{d\tau}\right) C = 0. \quad (\text{A.19})$$

Como cada operador não pode ser escrito como uma combinação linear dos dois outros, para que (A.19) se verifique deveremos ter que

$$1 - \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} e^{2\beta(\tau)} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$1 - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} - \alpha^2(\tau) = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha(\tau) - \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Integrando a equação (A.21) obtemos

$$\tau + C = \int \frac{d\alpha'(\tau)}{1 - \alpha'^2(\tau)}, \quad (\text{A.23})$$

a qual tem como solução

$$\alpha(\tau) = \tanh \tau, \quad \text{para } |\alpha(\tau)| < 1 \quad (\text{A.24})$$

onde usamos as condições de contorno (A.4). Substituindo este resultado na equação (A.22) obtemos

$$\beta(\tau) = \int \coth \tau d\tau = \ln \cosh \tau + C, \quad (\text{A.25})$$

e, que, sujeito as condições de contorno (A.4) resultam em

$$\beta(\tau) = \ln \cosh \tau. \quad (\text{A.26})$$

Substituindo este resultado na equação (A.20) e usando as condições de contorno (A.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= e^{-2\beta(\tau)} \\ \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= e^{-2 \ln \cosh \tau} \\ d\gamma(\tau) &= \cosh^{-2} \tau d\tau \\ \gamma(\tau) &= \tanh \tau. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |O(\beta(\tau))\rangle &= e^{\tau(A+B)}|0\rangle\rangle \\ &= e^{\alpha(\tau)B} e^{\beta(\tau)C} e^{\gamma(\tau)A}|0\rangle\rangle \\ &= e^{\tanh \tau a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \tau (\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{-\tanh \tau \tilde{a} a} |0\rangle\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} (1 - \tanh \tau \tilde{a} a + \frac{1}{2!} (\tanh \tau \tilde{a} a)^2 - \dots |0\rangle\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{\ln \cosh \theta(\beta) (1 + \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)} |0\rangle\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta)} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) a^\dagger a} |0\rangle\rangle \\ &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} (\cosh \theta(\beta))^{-1} |0\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh \theta(\beta)} \exp \tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0\rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

como queríamos demonstrar.

Referências

- [1] Y. Takahashi e H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys.* Vol.10 Nos. 13 & 14 (1996) 1755-1805.
- [2] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* 14,351(1955).
- [3] H. Queirós, *O Operador Espalhamento para Férmions num Campo Externo em Thermofield Dynamics*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica, IFT-T.009/02, 2002.
- [4] H. Umezawa, *Advanced Field Theory*, Micro, Macro, and Thermal Physics, AIP, American Institute of Physics, 1993.
- [5] M. Toda, R. Kubo, N. Saitô, *Statistical Physics I*, Equilibrium Statistical Mechanics, Solid-State Sciences 30, Springer-Verlag, 1983.
- [6] H. Chu e H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys.* Vol.9 No.14 (1994) 2363-2409.
- [7] H. Matsumoto, in *Progress in Quantum Field Theory*, edited by H. Ezawa and S. Kamefuchi (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [8] H. Matsumoto, Y. Nakano e H. Umezawa, *Phys. Rev. D* **31**, 429(1985).
- [9] G. W. Semenoff e H. Umezawa, *Nucl. Phys.* B220, 196(1983).
- [10] Y. Leblanc, *Phys. Rev. D* **36**, 1780(1987).
- [11] I. V. Vanea, "Bosonic D-branes at finite temperature," *Phys. Lett. B* **487**, 175 (2000) [arXiv:hep-th/0006228].
- [12] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vanea, "Bosonic D-branes at finite temperature with an external field," *Phys. Rev. D* **64**, 086005 (2001) [arXiv:hep-th/0104068].
- [13] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vanea, "On the SU(1,1) thermal group of bosonic strings and D-branes," [arXiv:hep-th/0203222].

- [14] M. C. B. Abdalla, E. L. Graca and I. V. Vancea, "Entropy of bosonic open string states in TFD approach," Phys. Lett. B **536**, 114 (2002) [arXiv:hep-th/0201243].
- [15] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "On (b,c)-system at finite temperature in thermo field approach," Phys. Lett. A **273**, 235 (2000) [arXiv:hep-th/0003209].
- [16] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, 1996.
- [17] I. V. Vancea, "Introductory lectures on D-branes," arXiv:hep-th/0109029.
- [18] M.B. Green, J.H. Schwarz e E.Witten, *Superstring theory*, vol.1, Cambridge University Press, 1987.
- [19] D. Bailin & A. Love, *Supersymmetric Gauge Fields String Theory*, Graduate Student Series In Physics, Published by Institute of Physics Publishing, London,1994.
- [20] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley, 1992.
- [21] J. Polchinski, *String Theory*, vol.1, Cambridge University Press, 1998.
- [22] C. B. Thorn, Nucl. Phys. B **287**, 61(1987).
- [23] S. Chaturvedi and V. Srinivasan, J. Phys. A **32** (1999)1909.
- [24] K. Wódkiewicz and J. H. Eberly, J. Opt. Soc. Am. B **3** (1985) 485.

