

João Carlos Ferreira Costa

**Formulação por Caminhos para Problemas de
Bifurcação $Z_2 + Z_2$ -equivariantes**



1910001054



Formulação por Caminhos para Problemas de Bifurcação $Z_2 + Z_2$ -equivariantes

João Carlos Ferreira Costa

Orientadora: Profa. Dra. Angela Maria Sitta



Dissertação para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas, área de concentração Matemática apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP.

São José do Rio Preto

2002

+513.74
C837R

10103058

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

unesp

Formulação por Caminhos para Problemas de
Bifurcação $Z_2 + Z_2$ -equivariantes

João Carlos Ferreira Costa

Orientadora: Profa. Dra. Angela Maria Sitta

Dissertação para a obtenção do título de Mestre
em Ciências Matemáticas, área de concentração
Matemática apresentada ao Departamento de
Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.



Costa, João Carlos Ferreira.

Formulação por caminhos para problemas de bifurcação $Z_2 + Z_2$ -
equivariantes / João Carlos Ferreira Costa. – São José do Rio Preto :
[s.n.], 2002

113 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Angela Maria Sitta.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Geometria. 2. Teoria de singularidades. 3. Formulação por
caminhos. 4. Teoria de bifurcação $Z_2 + Z_2$ -equivariante. I. Sitta, Angela
Maria. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU -513



“Aqueles que são guiados pelo
Espírito Santo, têm idéias justas.
Eis porque existem tantos ignorantes
que sabem mais que os sábios”.
S. João Maria Vianney



Aos meus pais,
João e Cidinha
dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

À Profa. Dra. Angela Maria Sitta, por toda dedicação, paciência e estímulo durante sua valiosa orientação.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, pela formação e incentivo. Em especial às professoras Aparecida Francisco da Silva e Maria Gorete Carreira Andrade, pelos preciosos conselhos nos momentos de dúvida.

Aos professores José Márcio Machado, José Roberto Ruggiero, Maria Aparecida Soares Ruas, Sérgio Henrique Monari Soares e Wilson Maurício Tadini, pelas valiosas sugestões.

À minha família, pelo incentivo e segurança que me passaram durante todo esse período.

À Sabrina, pela confiança e carinho, mesmo nos momentos difíceis.

Aos amigos da Pós-graduação pelo agradável convívio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

À Fapesp pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

Neste trabalho classificamos os problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes até codimensão 3, usando a Formulação por Caminhos. Comparamos a classificação obtida com a apresentada em [5] segundo as técnicas de Golubitsky e Schaeffer. Como aplicação da teoria $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante, estudamos o mode jumping da envergadura de uma placa retangular.

Palavras-chave: Formulação por Caminhos, Problemas de Bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, Mode Jumping.



Abstract

In this work we classify $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariant bifurcation problems up to codimension 3, using the Path Formulation. We compare the classification obtained to the presented in [5] following Golubitsky and Schaeffer techniques. As an application of the $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariant theory, we study the mode jumping in the buckling of a rectangular plate.

Keywords: Path Formulation, $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariant bifurcation problems, Mode Jumping.



Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$	3
1.2 Codimensão de um Ideal	6
1.3 Problemas de Bifurcação	7
2 Teoria de Bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$-equivariante	9
2.1 Preliminares	9
2.2 A Caracterização dos Problemas de Bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante .	12
2.3 A $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência	13
2.4 O Espaço Tangente $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante	15
2.5 O Problema do Reconhecimento	19
2.6 Submódulos Intrínsecos e Termos de Ordem Alta	26
2.7 $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências Unipotentes e Espaço Tangente Unipotente . .	27
2.8 Teoria dos Desdobramentos $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes	34
2.9 Estabilidade das Soluções	41
2.10 Diagramas de Bifurcação	42
3 Formulação por Caminhos	48
3.1 Teoria da Formulação por Caminhos	49
3.1.1 Espaço Tangente aos Caminhos	52
3.2 Classificação dos Problemas $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes Via Formulação por Caminhos	53
4 Aplicação Física	76
4.1 Formulação Matemática do Problema	78
4.2 Condições de Fronteira para a Placa Simplesmente Apoiada	84

Introdução

Os estudos desenvolvidos neste trabalho baseiam-se nas referências [1], [5] e [6]. O principal resultado que apresentamos é a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, usando a Formulação por Caminhos. Esta formulação foi sugerida por Golubitsky e Schaeffer em [1], onde eles relacionaram problemas de bifurcação em uma variável padrão e sem simetria com um caminho através do desdobramento miniversal de uma cuspóide, no sentido da Teoria das Catástrofes. Além da Teoria de Formulação por Caminhos, as técnicas que utilizamos na análise dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, baseiam-se fundamentalmente na Teoria de Singularidades aplicada à Teoria de Bifurcação. Problemas desse tipo têm sido motivo de estudo em várias áreas, como é o caso da Física, Química, Economia, entre outros. Particularmente, no Capítulo 4 apresentamos uma aplicação em Física cujo modelo matemático se reduz a um problema $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante. As idéias acima estão distribuídas em quatro capítulos como seguem.

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos preliminares da Teoria de Singularidades e Teoria de Bifurcação como é o caso de germes, codimensão, problemas de bifurcação, entre outros.

O Capítulo 2 é dedicado aos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes e seus desdobramentos miniversais. Definimos a $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência, espaço tangente e resolvemos o problema do reconhecimento. Além disso, baseados em [5], apresentamos no Teorema 2.8.3 a classificação de tais problemas usando técnicas clássicas da Teoria de Singularidades. Encerramos o capítulo com um breve estudo sobre estabilidade e apresentamos os diagramas de bifurcação da forma normal h_1 e do



seu desdobramento miniversal H_1 .

O Capítulo 3 é o central deste trabalho. Nele apresentamos a Teoria de Formulação por Caminhos e em seguida propomos a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes via esta formulação. Por fim, comparamos esta classificação com a apresentada no Capítulo 2.

Finalmente, o Capítulo 4 trata de uma aplicação do estudo que fizemos da teoria $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante a um problema de natureza física. Este problema consiste em estudar a envergadura de uma placa retangular elástica, com determinadas condições de fronteira, sujeita a uma força de compressão uniformemente distribuída em suas extremidades verticais.

1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$

Como já sabemos, toda aplicação diferenciável pode ser escrita como

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função de valores reais e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função de valores reais. Em F definimos a operação de adição de funções $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Também definimos a multiplicação de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Com estas definições, F é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função de valores reais, então f pode ser escrita como $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ onde $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valores reais.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é dada por } f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \text{ onde } f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma função de valores reais.}$$

Uma expressão de f em termos de f_i é dada por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ onde $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valores reais.

Se $x_1, \dots, x_n$ for um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e $y_1, \dots, y_m$ for um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^m$, então f pode ser escrita como $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ onde $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valores reais.

Seja

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é dada por } f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \text{ onde } f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma função de valores reais.}$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos fundamentais da Teoria de Singularidades e Teoria de Bifurcação que aparecerão no decorrer deste texto, como é o caso de *germes*, *codimensão*, *diagramas de bifurcação*, entre outros.

Todas as aplicações consideradas são de classe $\mathbb{C}^\infty$, e às vezes, mencionaremos apenas aplicações suaves ou diferenciáveis.

1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$

Como nosso estudo é local, trabalharemos com germes.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as aplicações $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de x . Em $\mathcal{F}$ definimos a seguinte relação de equivalência: $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ são equivalentes se existir uma vizinhança $W \subset U_1 \cap U_2$ de x tal que $f_1|_W = f_2|_W$. Cada classe de equivalência desta relação é chamada *germe* em x . Se $y = f_1(x) = f_2(x)$, usaremos as notações

$$f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y) \text{ ou } f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

para o germe de f_1 ou de f_2 . Chamamos x a *fonte* do germe e y a *meta* do germe.

Se $x_1, \dots, x_n$ for um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$, então denotaremos f_{x_i} ou $\partial_{x_i} f$ a derivada parcial de f com relação à variável x_i .

Sejam

$$\mathcal{E}_{n,p} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p\} \text{ e } \mathcal{E}_{n,1} = \mathcal{E}_n.$$



Definindo naturalmente em $\mathcal{E}_n$ as operações de adição, produto por escalar e produto, segue que $\mathcal{E}_n$ é uma $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa.

$\mathcal{E}_n$ é um anel local e

$$\mathcal{M}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \mapsto (\mathbb{R}, 0)\}$$

é o seu ideal maximal.

Notações:

- i) Um ideal de $\mathcal{E}_n$ gerado por $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{E}_n$ (uma quantidade finita de geradores) será denotado por

$$\langle p_1, \dots, p_k \rangle_{\mathcal{E}_n} \quad \text{ou simplesmente por} \quad \langle p_1, \dots, p_k \rangle,$$

e será dito *finitamente gerado*.

- ii) Um subespaço vetorial real de $\mathcal{E}_n$ gerado por $p_1, \dots, p_k$ será denotado por

$$\mathbb{R} \cdot \{p_1, \dots, p_k\}.$$

- iii) Dados $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, denotaremos por x_i o germe $x_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $x_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

- iv) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável, com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$. Denotaremos por $d_n f(x_0, y_0) = (d_n f)_{x_0, y_0}$ a “matriz jacobiana” $p \times n$ dada pelas derivadas parciais de f com relação a $x_1, \dots, x_n$.

Pelo Lema de Hadamard (ver [11], p. 100) segue que

$$\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{\mathcal{E}_n}.$$

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. A k -ésima potência de $\mathcal{M}_n$ é dada por

$$\mathcal{M}_n^k = \langle x^\alpha : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ e } \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \rangle,$$



sendo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

O lema a seguir trata de uma importante propriedade envolvendo ideais. É um resultado que utilizaremos no estudo dos termos de ordem alta de um germe, a ser tratado no Capítulo 2.

Lema 1.1.1 (Lema de Nakayama) *Sejam I, J ideais em $\mathcal{E}_n$, onde I é finitamente gerado. Então,*

$$I \subset J \iff I \subset J + \mathcal{M}_n I.$$

Demonstração. Ver [1], p. 71. ■

A próxima definição caracteriza a estrutura algébrica de vários conjuntos que aparecerão nesse texto.

Definição 1.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ um anel comutativo com unidade. Um módulo sobre o anel $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ -módulo), é um conjunto R munido de uma operação binária, usualmente descrita por adição, e uma operação de R em $\mathcal{A}$, chamada multiplicação por escalar, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) $(R, +)$ é um grupo abeliano;
- ii) Para quaisquer $a \in R$ e $f, g \in \mathcal{A}$, $a(f + g) = af + ag$;
- iii) Para quaisquer $a, b \in R$ e $f \in \mathcal{A}$, $(a + b)f = af + bf$;
- iv) Para quaisquer $a, b \in R$ e $f \in \mathcal{A}$, $(ab)f = a(bf)$;
- v) Se 1 é a identidade (multiplicativa) de R , $1f = f$, para todo $f \in \mathcal{A}$.

Observe que um módulo está para um anel assim como um espaço vetorial está para um corpo.

Exemplo 1.1.1 *O grupo $\mathcal{E}_{n,p}$ é um $\mathcal{E}_n$ -módulo.*



1.2 Codimensão de um Ideal

Nesta seção definimos codimensão de ideais e apresentamos um resultado que caracteriza os ideais de codimensão finita.

Definição 1.2.1 *Um subespaço vetorial $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se existir um subespaço vetorial real de dimensão finita $V \subset \mathcal{E}_n$ tal que $I + V = \mathcal{E}_n$. Caso contrário, I tem codimensão infinita.*

Todo ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ é subespaço vetorial real em $\mathcal{E}_n$.

Definição 1.2.2 *Seja $I \subset \mathcal{E}_n$ um subespaço vetorial de codimensão finita. A codimensão de I , $\text{cod } I$, é a dimensão de qualquer subespaço $V \subset \mathcal{E}_n$ tal que $\mathcal{E}_n = I \oplus V$.*

Exemplo 1.2.1 *É fácil ver que $\mathcal{M}_n$ tem codimensão finita, pois,*

$$\text{cod } \mathcal{M}_n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_n / \mathcal{M}_n = \dim \mathbb{R} \cdot \{1\} = 1.$$

Definição 1.2.3 *Seja $I \subset \mathcal{E}_n$ um ideal de codimensão finita. Chamamos espaço vetorial normal a I o subespaço vetorial de dimensão finita $I^\perp$ gerado pelos monômios que não pertencem a I .*

Proposição 1.2.1 *Seja $I \subset \mathcal{E}_n$ um ideal de codimensão finita. Então $I + I^\perp = \mathcal{E}_n$.*

Demonstração. Ver [17], p. 14. ■

Em geral $I \cap I^\perp \neq 0$. De fato, considerando em $\mathcal{E}_2$ o ideal $I = \langle x^2 + y^2, xy \rangle$ temos

$$I^\perp = \mathbb{R} \cdot \{1, x, y, x^2, y^2\} \text{ e } I \cap I^\perp = \mathbb{R} \cdot \{x^2 + y^2\}.$$

Proposição 1.2.2 *Seja $I \subset \mathcal{E}_n$ um ideal. Então, a codimensão de I é finita se, e somente se, existe um inteiro k tal que $\mathcal{M}_n^k \subset I$.*

Demonstração. Ver [1], p. 75. ■

1.3 Problemas de Bifurcação

Neste trabalho estudaremos problemas de bifurcação em duas variáveis padrão. Mas, antes disso, apresentamos um caso de bifurcação com apenas uma variável padrão. Esse problema se reduz a uma equação do tipo

$$g(x, \lambda) = 0 \quad (1.1)$$

com $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde x é chamada variável padrão e λ é um parâmetro auxiliar, chamado parâmetro de bifurcação.

Chamamos o conjunto

$$S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : g(x, \lambda) = 0\}$$

de *diagrama de bifurcação* ou *conjunto solução* de g .

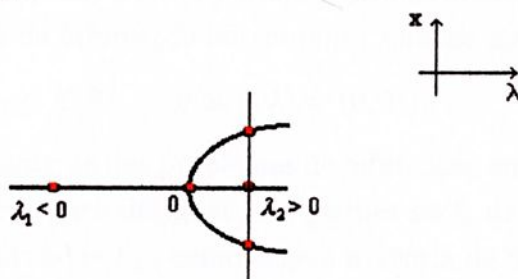
Para cada λ , seja $n(\lambda)$ o número de x 's para o qual (x, λ) é uma solução de (1.1). Como nosso estudo é local, iremos supor que (1.1) deve ser definido numa vizinhança de um ponto (x_0, λ_0) e que $n(\lambda)$ representa o número de soluções nessa vizinhança, onde $g(x_0, \lambda_0) = 0$.

Diremos que (x_0, λ_0) é um *ponto de bifurcação* se $n(\lambda)$ muda quando λ varia na vizinhança de λ_0 , isto é, se dado $\epsilon > 0$, existe $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ tal que $n(\lambda) \neq n(\lambda_0)$.

Exemplo 1.3.1 Consideremos o problema de bifurcação dado por

$$g(x, \lambda) = x^3 - \lambda x.$$

Observe que $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação e, neste caso, o diagrama de bifurcação de g é dado por



— Pitchfork —

Ao esboçar um diagrama de bifurcação costuma-se colocar o parâmetro no eixo das abcissas para facilitar a visualização da bifurcação.

Pelo Teorema da Função Implícita, se $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$ então existem vizinhanças $I \subset \mathbb{R}$ contendo x_0 , $J \subset \mathbb{R}$ contendo λ_0 e uma única função $n : J \rightarrow I$ tal que $x = n(\lambda)$ e

$$g(n(\lambda), \lambda) = 0$$

ou seja, $n(\lambda)$ não varia, e então não existem pontos de bifurcação nas vizinhanças de (x_0, y_0) .

Assim, se (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação devemos ter $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$, ou seja, o Teorema da Função Implícita nos dá uma condição necessária para que um ponto (x_0, λ_0) seja de bifurcação.

De um modo geral, podemos definir um problema de bifurcação com n variáveis padrão da seguinte forma

Definição 1.3.1 *Seja $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um germe de aplicação suave. Então dizemos que $g(z, \lambda)$ é um problema de bifurcação com n variáveis padrão se*

$$g(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad (d_n g)_{0,0} = 0.$$

Conforme foi dito no início dessa seção, estudaremos problemas de bifurcação que se reduzem a uma equação do tipo

$$g(x, y, \lambda) = (0, 0) \tag{1.2}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ são as variáveis padrão e λ o parâmetro de bifurcação.

Analogamente, o *diagrama de bifurcação* ou *conjunto solução* de g é dado por

$$S = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, \lambda) = (0, 0)\}.$$

O Capítulo 2 trata exclusivamente dos problemas de bifurcação em duas variáveis padrão. A notação que usaremos para designar tais germes será, de acordo com a Teoria de Bifurcação, $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}$ ao invés de $\mathcal{E}_{3,2}$ como sugere a Teoria de Singularidades. A razão dessa diferença é que queremos destacar a presença do parâmetro de bifurcação λ .

Capítulo 2

Teoria de Bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante

Neste capítulo analisamos o papel da simetria no estudo de problemas de bifurcação. Especificamente, problemas de bifurcação em duas variáveis padrão e um parâmetro de bifurcação, que comutam com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$. A presença de simetria num problema como esse, faz com que a teoria dos grupos ofereça técnicas eficientes para organizar certas informações complicadas.

Resolvemos questões como o problema do reconhecimento e estudamos os desdobramentos miniversais dos germes $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. Para isso, apresentamos o Teorema de Classificação 2.8.3 que nos fornece as formas normais para os problemas de bifurcação em questão. A teoria que desenvolveremos aqui servirá de suporte para resolvermos o problema de von Kármán dado no Capítulo 4, que consiste em estudar as deformações de uma placa retangular elástica sob a ação de uma força de compressão em suas extremidades verticais, com certas condições de fronteira.

2.1 Preliminares

Sejam

$$\mathcal{E}_{x,y,\lambda} = \{f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$$



o conjunto dos germes em duas variáveis padrão e um parâmetro de bifurcação e

$$\mathcal{E}_\lambda = \{\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos germes na variável λ .

A simetria em nossos problemas é dada pelo grupo multiplicativo $Z_2 \oplus Z_2$ que é gerado por

$$\{(\varepsilon, \delta) : \varepsilon = \pm 1 \text{ e } \delta = \pm 1\}.$$

A seguir, definimos uma ação de $Z_2 \oplus Z_2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.1.1 *Seja*

$$\Theta : Z_2 \oplus Z_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{tal que } \Theta((\varepsilon, \delta), (x, y)) = (\varepsilon, \delta) \cdot (x, y) = (\varepsilon x, \delta y), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Então, Θ é uma ação de $Z_2 \oplus Z_2$ em $\mathbb{R}^2$.

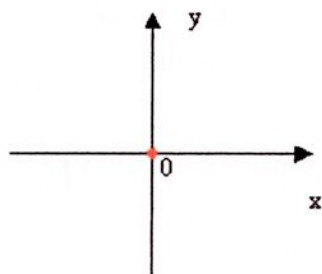
As restrições de Θ a $(\varepsilon, \delta) \times \mathbb{R}^2$, podem ser vistas como aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, dadas pelas matrizes da forma $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$.

Esta ação define uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}^2$ de forma natural. Com isso, particionamos este espaço em classes de equivalências chamadas *órbitas*. Assim, temos que a órbita do ponto (x, y) é o conjunto

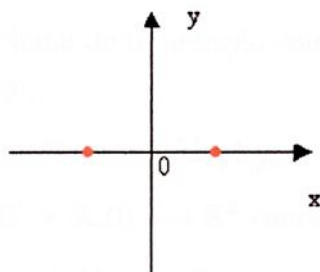
$$Z_2 \oplus Z_2 \cdot (x, y) = \{(\varepsilon, \delta) \cdot (x, y) : (\varepsilon, \delta) \in Z_2 \oplus Z_2\}. \quad (2.2)$$

Temos então quatro tipos de órbitas :

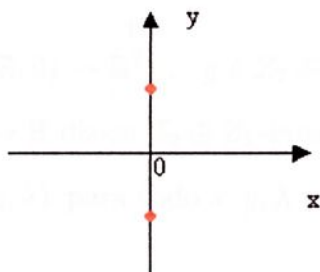
a) $Z_2 \oplus Z_2 \cdot (0, 0) = \{(0, 0)\}.$



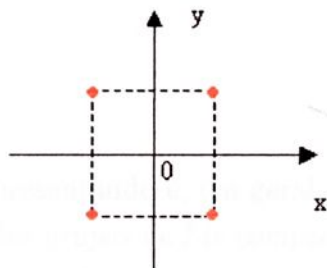
b) Para $x \neq 0$, $Z_2 \oplus Z_2 \cdot (x, 0) = \{(x, 0), (-x, 0)\}$.



c) Para $y \neq 0$, $Z_2 \oplus Z_2 \cdot (0, y) = \{(0, y), (0, -y)\}$.



d) Para $xy \neq 0$, $Z_2 \oplus Z_2 \cdot (x, y) = \{(x, y), (-x, y), (x, -y), (-x, -y)\}$.



Logo, as órbitas têm 1, 2 ou 4 pontos. A origem é a única órbita que tem apenas um ponto.

2.2 A Caracterização dos Problemas de Bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante

Seja $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um problema de bifurcação com duas variáveis padrão x, y e parâmetro de bifurcação λ . Logo,

$$g(0, 0, 0) = (0, 0) \text{ e } (d_2 g)_{0,0,0} = 0. \quad (2.3)$$

Dizemos que um germe $g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ comuta com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$ se

$$g((\varepsilon, \delta) \cdot (x, y), \lambda) = (\varepsilon, \delta) \cdot g(x, y, \lambda). \quad (2.4)$$

Um germe $g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ diz-se $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante se ele comuta com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$.

Seja

$$\tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) = \{g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2 : g \text{ é } Z_2 \oplus Z_2\text{-equivariante}\}. \quad (2.5)$$

Um germe $f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se $Z_2 \oplus Z_2$ -invariante se

$$f(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = f(x, y, \lambda) \text{ para todo } x, y, \lambda \text{ e } \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}.$$

Seja

$$\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) = \{f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é } Z_2 \oplus Z_2\text{-invariante}\}. \quad (2.6)$$

O conjunto dos germes equivariantes, $\tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, é um módulo sobre o anel $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Observações.

- 1- Essa teoria que estamos apresentando é, em geral, desenvolvida para um tipo especial de grupos, chamados *grupos de Lie compactos*. Um grupo de Lie pode ser pensado como um subgrupo fechado do grupo das transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Quanto à compacidade, ele deve ser compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Observe que todos os grupos finitos são exemplos de grupos de Lie. Logo, estamos trabalhando com um caso particular dado pelo grupo $Z_2 \oplus Z_2$.

2- O mesmo estudo que fazemos aqui com a simetria $Z_2 \oplus Z_2$ é feito para outros grupos como, por exemplo $\mathbb{D}_n$, conforme podemos encontrar em [3] e [4].

3- É importante notar que não existe ação no parâmetro de bifurcação λ .

Lema 2.2.1 *Seja $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação. Então, existem germes de funções suaves $p(u, v, \lambda)$ e $q(u, v, \lambda)$ tais que*

$$g(x, y, \lambda) = (p(u, v, \lambda)x, q(u, v, \lambda)y), \quad (2.7)$$

onde $u = x^2$, $v = y^2$, $p(0, 0, 0) = 0$ e $q(0, 0, 0) = 0$.

Demonstração. Ver [1], p. 419. ■

Em geral, para facilitar, denotaremos (2.7) por

$$g = \begin{pmatrix} px \\ qy \end{pmatrix} = (px, qy),$$

ou, mais usualmente,

$$g = [p, q].$$

2.3 A $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. Dizemos que f e g são $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalentes se existirem uma matriz 2×2 invertível $S = S(x, y, \lambda)$ e um difeomorfismo $Z(x, y, \lambda) = (X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$ tal que

$$g(x, y, \lambda) = S(x, y, \lambda)f(X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda)) \quad (2.8)$$

onde

$$X(0, 0, 0) = (0, 0), \quad \Lambda(0) = 0, \quad \Lambda'(0) > 0, \quad (2.9)$$

$$X(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = (\varepsilon, \delta) \cdot X(x, y, \lambda), \quad (2.10)$$

$$S(\varepsilon x, \delta y, \lambda) \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} S(x, y, \lambda) \quad (2.11)$$

e

$\Lambda \in \mathcal{E}_\lambda$, onde não há ação no parâmetro λ .

Além disso, queremos que $S(0, 0, 0)$ e $(d_2 X)_{0,0,0}$ sejam matrizes diagonais com entradas positivas.

Quando $\Lambda(\lambda) \equiv \lambda$ dizemos que a $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência é *forte*.

As restrições (2.10) e (2.11) são as condições de equivariância. Observe que (2.10) afirma que X comuta com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$, ou seja, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ enquanto a restrição (2.11) é precisamente a condição que S precisa para garantir que a equivalência definida acima tenha a seguinte propriedade:

“Se f é um problema de bifurcação comutando com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$ e se g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a f , então g comuta com $Z_2 \oplus Z_2$ ”.

As demais restrições estão relacionadas com a estabilidade das soluções do problema de bifurcação.

Denotaremos o conjunto das matrizes 2×2 que satisfazem a condição (2.11) por

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2).$$

Consideremos $\mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}$ o conjunto de todas as $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências, ou seja,

$$\mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2} = \{(S, X, \Lambda) : S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) \text{ e } \Lambda \in \mathcal{E}_\lambda\}. \quad (2.12)$$

Daí, se $\varphi = (S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}$, podemos pensar a $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência como sendo uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = S \cdot g \circ (X, \Lambda). \end{array}$$

2.4 O Espaço Tangente $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante

Nesta seção, a idéia principal é a obtenção do espaço tangente a um dado germe com respeito a $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariância. Antes disso, como caso mais simples, vamos caracterizar o espaço tangente restrito (relacionado com a $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariância forte) para um germe g $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante e achar seus possíveis geradores.

Consideremos, então, uma família a um parâmetro de germes $Z_2 \oplus Z_2$ -fortemente equivalentes a g , ou seja,

$$g(x, y, \lambda, t) = S(x, y, \lambda, t) g(X(x, y, \lambda, t), \lambda) \quad (2.13)$$

onde $S(x, y, \lambda, 0) = I$, $X(0, 0, 0, t) \equiv 0$ e $X(x, y, \lambda, 0) = (x, y)$. Diferenciando (2.13) com respeito a t e avaliando em $t = 0$ obtemos

$$\dot{g}(x, y, \lambda, 0) = \dot{S}(x, y, \lambda, 0) g(x, y, \lambda) + (d_2 g) \dot{X}(x, y, \lambda, 0). \quad (2.14)$$

Como $X(x, y, \lambda, t)$ e $S(x, y, \lambda, t)$ satisfazem as condições de equivariância, o mesmo ocorre com $\dot{X}(x, y, \lambda, 0)$ e $\dot{S}(x, y, \lambda, 0)$ pois a derivada em questão é na variável t . Além disso, como pela condição (2.9) da definição de equivalência, X anula-se na origem, segue que $X(0, 0, 0, t) \equiv 0$.

Assim, podemos definir o *espaço tangente restrito equivariante* por

$$RT(g, Z_2 \oplus Z_2) = \{Sg + (d_2 g)X : S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) \text{ e } X^0 = 0\}, \quad (2.15)$$

onde $X^0 = X(0, 0, 0)$.

Estamos agora interessados em resolver a seguinte questão:

Qual é a estrutura algébrica de $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ e como são os seus geradores ?

Quanto à estrutura algébrica temos que $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ é um submódulo finitamente gerado de $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Os geradores de $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ são provenientes de (2.15). Primeiramente, devemos observar que os germes de matrizes pertencentes a $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ são gerados por quatro elementos. De fato, dada uma matriz S neste conjunto, podemos escrevê-la como

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} S_1(x, y, \lambda) & S_2(x, y, \lambda) \\ S_3(x, y, \lambda) & S_4(x, y, \lambda) \end{pmatrix}.$$



Usando a condição (2.11), concluímos que as funções S_1 e S_4 são pares tanto em x quanto em y , enquanto S_2 e S_3 são funções ímpares em x e em y . Então, usando o Teorema de Malgrange (ver [8], p. 106), podemos reescrever a matriz S na forma

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x^2, y^2, \lambda) & c_2(x^2, y^2, \lambda)xy \\ c_3(x^2, y^2, \lambda)xy & c_4(x^2, y^2, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Em particular,

$$S(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} c_1(0, 0, 0) & 0 \\ 0 & c_4(0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

ou seja, $S(0, 0, 0)$ é diagonal e, conforme foi requerido na definição de $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência, $c_1(0, 0, 0) > 0$ e $c_4(0, 0, 0) > 0$.

Logo, de (2.16) podemos concluir que

$$S = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com c_1, c_2, c_3 e c_4 pertencentes ao anel $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Portanto, $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ é o módulo sobre $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ gerado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Assim, dado $g = (px, qy)$, a parcela Sg da expressão (2.15) fornece os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} px \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} px \\ 0 \end{pmatrix} = [p, 0], \\ \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} px \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} vqx \\ 0 \end{pmatrix} = [vq, 0], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} px \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ upy \end{pmatrix} = [0, up], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} px \\ qy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ qy \end{pmatrix} = [0, q], \end{aligned}$$

onde lembramos que $u = x^2$ e $v = y^2$.

Os outros geradores de $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ provêm da expressão $(d_2g)X$, conforme (2.15).

Como (d_2g) é a matriz jacobiana de $g(x, y, \lambda) = (p(u, y, \lambda)x, q(u, v, \lambda)y)$ nas variáveis x e y , então

$$(d_2g) = \begin{pmatrix} 2up_u + p & 2p_vxy \\ 2q_uxy & 2vq_v + q \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Já a função X pertence ao módulo $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ que é gerado por

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

pois dado $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, escrevemos

$$X(x, y, \lambda) = (a(u, v, \lambda)x, b(u, v, \lambda)y) = a(u, v, \lambda) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + b(u, v, \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

onde a e b pertencem a $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Logo, os outros geradores são dados por

$$\begin{pmatrix} 2up_u + p & 2p_vxy \\ 2q_uxy & 2vq_v + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2up_u x \\ 2uq_u y \end{pmatrix} = [2up_u, 2uq_u]$$

e

$$\begin{pmatrix} 2up_u + p & 2p_vxy \\ 2q_uxy & 2vq_v + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2vp_v x \\ 2vq_v y \end{pmatrix} = [2vp_v, 2vq_v].$$

Portanto, os geradores de $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ são

$$[p, 0], [vq, 0], [0, up], [0, q], [up_u, uq_u] \text{ e } [vp_v, vq_v], \quad (2.20)$$

onde $g = [p, q] = (p(u, v, \lambda)x, q(u, v, \lambda)y)$, $u = x^2$ e $v = y^2$.

No caso em que não há equivalência forte, ou seja, existe presença do difeomorfismo Λ atuando no parâmetro de bifurcação λ , o espaço tangente de g , denotado por $T(g, Z_2 \oplus Z_2)$, é dado por

$$T(g, Z_2 \oplus Z_2) = \{Sg + (d_2g)X + g_\lambda \Lambda : S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) \text{ e } \Lambda \in \mathcal{E}_\lambda\}, \quad (2.21)$$

que pode ser obtido de maneira análoga a que fizemos para obter $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$. Este espaço é um módulo sobre o sistema de anéis

$$\{\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), \mathcal{E}_\lambda\}.$$

Usando (2.15) e lembrando que Λ é um difeomorfismo em λ , podemos reescrever a expressão (2.21) da seguinte forma

$$\begin{aligned} T(g, Z_2 \oplus Z_2) &= RT(g, Z_2 \oplus Z_2) + \mathcal{E}_\lambda\{g_\lambda\} = \\ &= RT(g, Z_2 \oplus Z_2) + \mathcal{E}_\lambda\{[p_\lambda, q_\lambda]\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O espaço complementar a $T(g, Z_2 \oplus Z_2)$ em $\tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, chamado *espaço normal de g* , é dado pelo quociente

$$N(g, Z_2 \oplus Z_2) = \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) / T(g, Z_2 \oplus Z_2).$$

A codimensão de g , também chamada $Z_2 \oplus Z_2$ -codimensão de g , é a dimensão do espaço normal de g como espaço vetorial real.

Finalizamos esta seção com um resultado básico. O teorema a seguir nos diz que se o espaço tangente restrito de um germe g permanece constante quando g é perturbado, então g e sua perturbação são fortemente $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalentes.

Teorema 2.4.1 *Sejam $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação e h um germe qualquer em $\tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$. Suponha que*

$$RT(g + th, Z_2 \oplus Z_2) = RT(g, Z_2 \oplus Z_2) \quad (2.23)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Então $g + th$ é fortemente $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a g para todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Ver [2], p. 172. ■



2.5 O Problema do Reconhecimento

O Teorema 2.5.1 que enunciaremos a seguir resolve o problema do reconhecimento para os problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. O problema do reconhecimento trata de estabelecer quando um germe $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a uma forma normal dada. Resolver o problema do reconhecimento significa estabelecer explicitamente um número finito de igualdades e desigualdades polinomiais a serem satisfeitas pelos coeficientes de Taylor dos elementos da classe das $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências.

Teorema 2.5.1 *Seja $g = [p, q] \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação. Se*

$$p_u, \quad q_v, \quad p_\lambda, \quad q_\lambda, \quad p_u q_v - p_v q_u, \quad p_u q_\lambda - p_\lambda q_u, \quad q_v p_\lambda - p_v q_\lambda \quad (2.24)$$

são todos diferentes de zero na origem $(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$, então g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a

$$h_1 = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, \eta u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda], \quad (2.25)$$

com $\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u)$, $\varepsilon_2 = \text{ sinal } (p_\lambda)$, $\varepsilon_3 = \text{ sinal } (q_v)$, $\varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_\lambda)$ e parâmetros modais

$$\mu = \left| \frac{q_\lambda}{q_v p_\lambda} \right| p_v, \quad \eta = \left| \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right| q_u. \quad (2.26)$$

Além disso, os parâmetros modais μ e η satisfazem também as condições

$$\mu \neq \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4, \quad \eta \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4, \quad \mu \eta \neq \varepsilon_1 \varepsilon_3 \quad e \quad (2.27)$$

todas as derivadas que aparecem no enunciado são calculadas na origem.

Demonstração. Seja $g(x, y, \lambda) = (p(u, v, \lambda)x, q(u, v, \lambda)y)$ um problema de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante. Para encontrar um germe f $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a g tomamos uma equivalência genérica

$$f = S \cdot g \circ (X, \Lambda).$$

Podemos fazer isto em duas etapas:

$$f' = g \circ (X, \Lambda) \quad (2.28)$$

e, em seguida, multiplicar pela matriz S , ou seja,

$$f = S \cdot f',$$

onde $S, X = [a, b]$ e Λ são dadas como na definição da $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência.

Assim, de (2.28), segue que

$$f' = [p', q']$$

com

$$p'(u, v, \lambda) = p(a^2(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda), \Lambda(\lambda))a(u, v, \lambda) \quad \text{e}$$

$$q'(u, v, \lambda) = q(a^2(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda), \Lambda(\lambda))b(u, v, \lambda).$$

Para facilitar nossas contas podemos escrever

$$p' = \tilde{p}a, \text{ com } \tilde{p}(u, v, \lambda) = p(a^2(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda), \Lambda(\lambda)) \quad \text{e}$$

$$q' = \tilde{q}b, \text{ com } \tilde{q}(u, v, \lambda) = q(a^2(u, v, \lambda), b^2(u, v, \lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor *até a segunda ordem* de p' em torno da origem e igualando com o desenvolvimento de Taylor de $\tilde{p}a$, nas mesmas condições, obtemos

- $p'_0 = 0;$
- $p'_u = p_u a_0^3;$
- $p'_v = p_v a_0 b_0^2;$
- $p'_\lambda = p_\lambda a_0 \Lambda'(0);$
- $p'_{uu} = 6p_u a_0^2 a_u + p_{uu} a_0^5;$
- $p'_{vv} = p_{vv} a_0 b_0^4 + 4p_v a_0 b_0 b_v + 2p_v a_v b_0^2;$
- $p'_{\lambda\lambda} = p_\lambda a_0 \Lambda''(0) + 2p_\lambda a_\lambda \Lambda'(0) + p_{\lambda\lambda} a_0 (\Lambda'(0))^2;$
- $p'_{uv} = 3p_u a_0^2 a_v + p_{uv} a_0^3 b_0^2 + 2p_v a_0 b_0 b_u + p_v a_u b_0^2;$

- $p'_{u\lambda} = 3p_u a_0^2 a_\lambda + p_\lambda a_u \Lambda'(0) + p_{u\lambda} a_0^3 \Lambda'(0);$
- $p'_{v\lambda} = p_\lambda a_v \Lambda'(0) + p_{v\lambda} a_0 b_0^2 \Lambda'(0) + 2p_v a_0 b_0 b_\lambda + p_v a_\lambda b_0^2.$

Analogamente, usando as mesmas técnicas para q' , obtemos

- $q'_0 = 0;$
- $q'_u = q_u a_0^2 b_0;$
- $q'_v = q_v b_0^3;$
- $q'_\lambda = q_\lambda b_0 \Lambda'(0);$
- $q'_{uu} = 2q_u a_0^2 b_u + q_{uu} a_0^4 b_0 + 4q_u a_0 a_u b_0;$
- $q'_{vv} = q_{vv} b_0^5 + 6q_v b_0^2 b_v;$
- $q'_{\lambda\lambda} = 2q_\lambda b_\lambda \Lambda'(0) + q_\lambda b_0 \Lambda''(0) + q_{\lambda\lambda} b_0 (\Lambda'(0))^2;$
- $q'_{uv} = 3q_v b_0^2 b_u + q_{uv} a_0^2 b_0^3 + 2q_u a_0 b_0 a_v + q_u b_v a_0^2;$
- $q'_{u\lambda} = 2q_u a_0 b_0 a_\lambda + q_\lambda b_u \Lambda'(0) + q_{u\lambda} a_0^2 b_0 \Lambda'(0) + q_u a_0^2 b_\lambda;$
- $q'_{v\lambda} = q_\lambda b_v \Lambda'(0) + q_{v\lambda} b_0^3 \Lambda'(0) + 3q_v b_\lambda b_0^2.$

Observação. Para fazer as contas do desenvolvimento de Taylor das expressões p' , $\tilde{p}a$, q' e $\tilde{q}b$, usamos o MAPLE V. Além disso, usamos como desenvolvimento

$$a = a_0 + a_u u + a_v v + a_\lambda \lambda + \frac{1}{2}(a_{uu} u^2 + a_{vv} v^2 + a_{\lambda\lambda} \lambda^2 + 2a_{uv} uv + 2a_{u\lambda} u\lambda + 2a_{v\lambda} v\lambda) + \dots$$

$$b = b_0 + b_u u + b_v v + b_\lambda \lambda + \frac{1}{2}(b_{uu} u^2 + b_{vv} v^2 + b_{\lambda\lambda} \lambda^2 + 2b_{uv} uv + 2b_{u\lambda} u\lambda + 2b_{v\lambda} v\lambda) + \dots$$

$$p = p_0 + p_u u + p_v v + p_\lambda \lambda + \frac{1}{2}(p_{uu} u^2 + p_{vv} v^2 + p_{\lambda\lambda} \lambda^2 + 2p_{uv} uv + 2p_{u\lambda} u\lambda + 2p_{v\lambda} v\lambda) + \dots$$

$$q = q_0 + q_u u + q_v v + q_\lambda \lambda + \frac{1}{2}(q_{uu} u^2 + q_{vv} v^2 + q_{\lambda\lambda} \lambda^2 + 2q_{uv} uv + 2q_{u\lambda} u\lambda + 2q_{v\lambda} v\lambda) + \dots$$

e

$$\Lambda(\lambda) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)\lambda + \frac{1}{2}\Lambda''(0)\lambda^2 + \dots$$

Lembramos que todas as derivadas são calculadas na origem. Mais adiante, explicaremos o porquê de tomarmos os desenvolvimentos apenas até a segunda ordem.

Assim, para obtermos o produto final $f = [p'', q'']$, equivalente a g , resta-nos multiplicar a expressão $f' = [p', q']$ por $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2xy \\ S_3xy & S_4 \end{pmatrix}$, com S_1, S_2, S_3 e S_4 pertencentes ao anel $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} f &= S \cdot f' = \begin{pmatrix} S_1 & S_2xy \\ S_3xy & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'x \\ q'y \end{pmatrix} = \\ &= S_1[p', 0] + S_2[vq', 0] + S_3[0, up'] + S_4[0, q']. \end{aligned}$$

Logo, $f = [p'', q'']$ onde

$$p'' = S_1p' + S_2vq' \quad (2.29)$$

e

$$q'' = S_3up' + S_4q'. \quad (2.30)$$

Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor das funções S_i , $i = 1 \dots 4$ do seguinte modo

$$S_i = s_i^0 + s_{i_u}u + s_{i_v}v + s_{i_\lambda}\lambda + \dots, \quad i = 1 \dots 4.$$

Novamente, fazendo o desenvolvimento de Taylor até a segunda ordem, em torno da origem, em ambos os membros das expressões (2.29) e (2.30), obtemos

- $p''_0 = 0;$
- $p''_u = p'_u s_1^0;$
- $p''_v = p'_v s_1^0;$
- $p''_\lambda = p'_\lambda s_1^0;$

- $p''_{uu} = 2p'_u s_{1_u} + p'_{uu} s_1^0;$
- $p''_{vv} = 2p'_v s_{1_v} + p'_{vv} s_1^0 + 2q'_v s_2^0;$
- $p''_{\lambda\lambda} = 2p'_\lambda s_{1_\lambda} + p'_{\lambda\lambda} s_1^0;$
- $p''_{uv} = p'_u s_{1_v} + p'_v s_{1_u} + p'_{uv} s_1^0 + q'_u s_2^0;$
- $p''_{u\lambda} = p'_u s_{1_\lambda} + p'_\lambda s_{1_u} + p'_{u\lambda} s_1^0;$
- $p''_{v\lambda} = p'_v s_{1_\lambda} + p'_\lambda s_{1_v} + p'_{v\lambda} s_1^0 + q'_\lambda s_2^0;$

- $q''_0 = 0;$
- $q''_u = q'_u s_4^0;$
- $q''_v = q'_v s_4^0;$
- $q''_\lambda = q'_\lambda s_4^0;$
- $q''_{uu} = 2p'_u s_3^0 + q'_{uu} s_4^0 + 2q'_u s_{4_u};$
- $q''_{vv} = 2q'_v s_{4_v} + q'_{vv} s_4^0;$
- $q''_{\lambda\lambda} = 2q'_\lambda s_{4_\lambda} + q'_{\lambda\lambda} s_4^0;$
- $q''_{uv} = q'_u s_{4_v} + q'_v s_{4_u} + q'_{uv} s_4^0 + p'_v s_3^0;$
- $q''_{u\lambda} = q'_u s_{4_\lambda} + q'_\lambda s_{4_u} + q'_{u\lambda} s_4^0 + p'_\lambda s_3^0;$
- $q''_{v\lambda} = q'_v s_{4_\lambda} + q'_\lambda s_{4_v} + q'_{v\lambda} s_4^0.$

Agora, substituindo os valores dos p 's e q 's nas expressões acima ficamos com

- $p''_0 = 0;$
- $p''_u = p_u a_0^3 s_1^0;$

- $p''_v = p_v a_0 b_0^2 s_1^0$;
 - $p''_\lambda = p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_1^0$;
 - $p''_{uu} = 2p_u a_0^3 s_{1_u} + (6p_u a_0^2 a_u + p_{uu} a_0^5) s_1^0$;
 - $p''_{vv} = 2p_v a_0 b_0^2 s_{1_v} + (p_{vv} a_0 b_0^4 + 4p_v a_0 b_0 b_v + 2p_v a_v b_0^2) s_1^0 + 2q_v b_0^3 s_2^0$;
 - $p''_{\lambda\lambda} = 2p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_{1_\lambda} + (p_\lambda a_0 \Lambda''(0) + 2p_\lambda a_\lambda \Lambda'(0) + p_{\lambda\lambda} a_0 (\Lambda'(0))^2) s_1^0$;
 - $p''_{uv} = p_u a_0^3 s_{1_v} + p_v a_0 b_0^2 s_{1_u} + (3p_u a_0^2 a_v + p_{uv} a_0^3 b_0^2 + 2p_v a_0 b_0 b_u + p_v a_u b_0^2) s_1^0 + q_u a_0^2 b_0 s_2^0$;
 - $p''_{u\lambda} = p_u a_0^3 s_{1_\lambda} + p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_{1_u} + (3p_u a_0^2 a_\lambda + p_\lambda a_u \Lambda'(0) + p_{u\lambda} a_0^3 \Lambda'(0)) s_1^0$;
 - $p''_{v\lambda} = p_v a_0 b_0^2 s_{1_\lambda} + p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_{1_v} + (p_\lambda a_v \Lambda'(0) + p_{v\lambda} a_0 b_0^2 \Lambda'(0) + 2p_v a_0 b_0 b_\lambda + p_v a_\lambda b_0^2) s_1^0 + q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_2^0$;
-
- $q''_0 = 0$;
 - $q''_u = q_u a_0^2 b_0 s_4^0$;
 - $q''_v = q_v b_0^3 s_4^0$;
 - $q''_\lambda = q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_4^0$;
 - $q''_{uu} = 2p_u a_0^3 s_3^0 + (2q_u a_0^2 b_u + q_{uu} a_0^4 b_0 + 4q_u a_0 a_u b_0) s_4^0 + 2q_u a_0^2 b_0 s_{4_u}$;
 - $q''_{vv} = 2q_v b_0^3 s_{4_v} + (q_{vv} b_0^5 + 6q_v b_0^2 b_v) s_4^0$;
 - $q''_{\lambda\lambda} = 2q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_{4_\lambda} + (2q_\lambda b_\lambda \Lambda'(0) + q_\lambda b_0 \Lambda''(0) + q_{\lambda\lambda} b_0 (\Lambda'(0))^2) s_4^0$;
 - $q''_{uv} = q_u a_0^2 b_0 s_{4_v} + q_v b_0^3 s_{4_u} + (3q_v b_0^2 b_u + q_{uv} a_0^2 b_0^3 + 2q_u a_0 b_0 a_v + q_u b_v a_0^2) s_4^0 + p_v a_0 b_0^2 s_3^0$;
 - $q''_{u\lambda} = q_u a_0^2 b_0 s_{4_\lambda} + q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_{4_u} + (2q_u a_0 b_0 a_\lambda + q_\lambda b_u \Lambda'(0) + q_{u\lambda} a_0^2 b_0 \Lambda'(0) + q_u a_0^2 b_\lambda) s_4^0 + p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_3^0$;
 - $q''_{v\lambda} = q_v b_0^3 s_{4_\lambda} + q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_{4_v} + (q_\lambda b_v \Lambda'(0) + q_{v\lambda} b_0^3 \Lambda'(0) + 3q_v b_\lambda b_0^2) s_4^0$.

As expressões acima, do desenvolvimento de p'' e q'' , nos dão o germe equivalente a g , de forma genérica. Pela $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência temos algumas condições sobre os coeficientes que aparecem nas expressões acima, ou seja, temos que $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $p_0 = q_0 = 0$, $s_1^0 > 0$, $s_4^0 > 0$ e $\Lambda'(0) > 0$. Para obter a forma normal h_1 dada em (2.25), precisamos

$$a) \quad p''_u = p_u a_0^3 s_1^0 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad |p_u| a_0^3 s_1^0 = 1,$$

$$b) \quad p''_\lambda = p_\lambda a_0 \Lambda'(0) s_1^0 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad |p_\lambda| a_0 \Lambda'(0) s_1^0 = 1,$$

$$c) \quad q''_v = q_v b_0^3 s_4^0 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad |q_v| b_0^3 s_4^0 = 1,$$

$$d) \quad q''_\lambda = q_\lambda b_0 \Lambda'(0) s_4^0 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad |q_\lambda| b_0 \Lambda'(0) s_4^0 = 1.$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$a) \quad s_1^0 = \frac{1}{|p_u| a_0^3},$$

$$b) \quad \Lambda'(0) = \frac{1}{|p_\lambda| a_0 s_1^0} = \frac{|p_u| a_0^2}{|p_\lambda|},$$

$$c) \quad s_4^0 = \frac{1}{|q_v| b_0^3},$$

$$d) \quad \frac{a_0^2}{b_0^2} = \frac{|p_\lambda| |q_v|}{|q_\lambda| |p_u|}.$$

Substituindo os valores acima nas expressões p''_u , p''_λ , q''_v e q''_λ , concluímos que

$$\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u), \quad \varepsilon_2 = \text{ sinal } (p_\lambda), \quad \varepsilon_3 = \text{ sinal } (q_v) \quad \text{e} \quad \varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_\lambda).$$

Além disso, das expressões p''_v e q''_u , obtemos

$$e) \quad p''_v = p_v a_0 b_0^2 s_1^0 = \frac{p_v b_0^2}{|p_u| a_0^2} = \left| \frac{q_\lambda}{q_v p_\lambda} \right| p_v$$

e

$$f) \quad q''_u = q_u a_0^2 b_0 s_4^0 = \frac{q_u a_0^2}{|q_v| b_0^2} = \left| \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right| q_u$$

que são os parâmetros modais, como aparecem em (2.26). As restrições (2.27) seguem, respectivamente, das hipóteses

$$q_v p_\lambda - p_v q_\lambda \neq 0, \quad p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0 \quad \text{e} \quad p_u q_v - p_v q_u \neq 0.$$

Logo, obtivemos a forma normal h_1 como em (2.25) com parâmetros modais μ e η dados por (2.26).

Resta-nos agora mostrar a razão pela qual os termos de ordem maior ou igual a dois não aparecem na forma normal h_1 . Este é o motivo também pelo qual não nos preocupamos em fazer o desenvolvimento de Taylor das expressões anteriores até ordens maiores. A justificativa é que estes termos são de *ordem alta* para o problema de bifurcação h_1 podendo, assim, ser desprezados. Mostraremos isto no final da Seção 2.7 e, com isto, o teorema fica demonstrado. ■

Observação. Se g satisfaz as condições que aparecem em (2.24), dizemos que g é um germe genérico. Assim, podemos reformular o teorema acima nos seguintes termos:

“Seja g um problema de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante genérico. Então g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a h_1 ”.

2.6 Submódulos Intrínsecos e Termos de Ordem Alta

Estamos interessados em caracterizar os termos do desenvolvimento de Taylor de um germe que podem ser desprezados pois não contribuem na resolução do problema do reconhecimento.

O conjunto dos termos de ordem alta de um germe g é dado por

$$\wp(g, Z_2 \oplus Z_2) = \{p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) : h \pm p \sim g, \forall h \sim g\} \quad (2.31)$$

onde $\sim$ denota $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência.



Na classificação de problemas de codimensão finita, usualmente encontramos os termos de ordem alta de uma forma normal por meio dos submódulos intrínsecos relacionados à esta forma normal. Um submódulo $J \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ é intrínseco se ele é invariante por $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência, isto é, se $\varphi(g) \in J$, para todo $g \in J$ e para toda $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalência $\varphi = (S, X, \Lambda)$. O resultado a seguir nos dá a caracterização dos submódulos intrínsecos em $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Proposição 2.6.1 *Sejam I e J ideais em $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$. Considere o submódulo*

$$S = \{[p, q] \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) : p \in I, q \in J\}$$

de $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Então S é um submódulo intrínseco se, e somente se, I e J são ideais intrínsecos, $uI \subset J$ e $vJ \subset I$.

Demonstração. Ver [5], p. 1656. ■

Seja $V \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$. Definimos a parte intrínseca de V , a qual denotamos por $\text{itr } V$, como sendo o maior submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ contido em V .

Proposição 2.6.2 *Para cada $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, o conjunto $\varphi(g, Z_2 \oplus Z_2)$ é um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.*

Demonstração. Ver [2], p. 205. ■

2.7 $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências Unipotentes e Espaço Tangente Unipotente

Temos $\mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}$ o conjunto de todas as $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências (S, X, Λ) . Estamos interessados em um subgrupo especial de $\mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}$. Para definí-lo, consideremos a aplicação projeção π dada por

$$\pi(S, X, \Lambda) = (S(0, 0, 0), (d_2 X)_{0,0,0}, \Lambda'(0)), \quad \forall (S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}.$$

O kernel da aplicação π dado por

$$\mathcal{KU}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2} = \{(S, X, \Lambda) \in \mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2} : S(0, 0, 0) = I_2, (d_2 X)_{0,0,0} = I_2, \Lambda'(0) = 1\}$$

é um subgrupo normal de $\mathcal{K}_\lambda^{Z_2 \oplus Z_2}$ formado de difeomorfismos nilpotentes, e é chamado de *subgrupo unipotente* de $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências. Seu espaço tangente associado em $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, chamado *espaço tangente unipotente*, é dado por

$$TU(g, Z_2 \oplus Z_2) = \{Sg + (d_2 g)X + g\Lambda : S \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}^o(Z_2 \oplus Z_2), X \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}^o(Z_2 \oplus Z_2), (d_2 X)_{0,0,0} = 0, \Lambda(0) = \Lambda'(0) = 0\}, \quad (2.32)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}^o(Z_2 \oplus Z_2) &= \{S \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) : S(0, 0, 0) = I_2\}, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}^o(Z_2 \oplus Z_2) &= \{X \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) : X(0, 0, 0) = (0, 0)\}. \end{aligned}$$

A importância em calcularmos o espaço tangente unipotente é que a partir daí, podemos calcular os termos de ordem alta usando o seguinte resultado devido a Gaffney:

Teorema 2.7.1 *Seja $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ de $Z_2 \oplus Z_2$ -codimensão finita. Então,*

$$\wp(g) \supset \text{itr } TU(g, Z_2 \oplus Z_2). \quad (2.33)$$

Demonstração. Ver [10], p. 108. ■

Corolário 2.7.1 *Seja $p \in \text{itr } TU(g, Z_2 \oplus Z_2)$. Então, $g + p$ é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a g .*

Para finalizar esta seção, consideremos $\mathcal{M} = \langle u, v, \lambda \rangle$ o ideal maximal de $\mathcal{E}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$. Mostraremos que os termos da forma $[p, q]$ com $p, q \in \mathcal{M}^2$, os quais denotaremos por $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$, são de ordem alta para a forma normal h_1 .

Primeiramente, observe que os geradores de $TU(g, Z_2 \oplus Z_2)$, com $g = [p, q]$, são dados por

$$[up, 0], [vp, 0], [\lambda p, 0], [vq, 0], [0, up], [0, uq], [0, vq], [0, \lambda q],$$

$$[u^2p_u, u^2q_u], [uvp_u, uvq_u], [u\lambda p_u, u\lambda q_u], [uvp_v, uvq_v], [v^2p_v, v^2q_v], [v\lambda p_v, v\lambda q_v], \\ [\lambda^2p_\lambda, \lambda^2q_\lambda].$$

Segue de (2.32) que os oito primeiros geradores acima vêm da parcela Sg . Os seis seguintes da parcela $(d_2g)X$ e o último de $g_\lambda\Lambda$.

Para $h_1 = [\varepsilon_1u + \mu v + \varepsilon_2\lambda, \eta u + \varepsilon_3v + \varepsilon_4\lambda]$ temos que $TU(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$ é gerado por

$$c_1 = [\varepsilon_1u^2 + \mu uv + \varepsilon_2u\lambda, 0]$$

$$c_2 = [\varepsilon_1uv + \mu v^2 + \varepsilon_2v\lambda, 0]$$

$$c_3 = [\varepsilon_1u\lambda + \mu v\lambda + \varepsilon_2\lambda^2, 0]$$

$$c_4 = [\eta uv + \varepsilon_3v^2 + \varepsilon_4v\lambda, 0]$$

$$c_5 = [0, \varepsilon_1u^2 + \mu uv + \varepsilon_2u\lambda]$$

$$c_6 = [0, \eta u^2 + \varepsilon_3uv + \varepsilon_4u\lambda]$$

$$c_7 = [0, \eta uv + \varepsilon_3v^2 + \varepsilon_4v\lambda]$$

$$c_8 = [0, \eta u\lambda + \varepsilon_3v\lambda + \varepsilon_4\lambda^2]$$

$$c_9 = [\varepsilon_1u^2, \eta u^2]$$

$$c_{10} = [\varepsilon_1uv, \eta uv]$$

$$c_{11} = [\varepsilon_1u\lambda, \eta u\lambda]$$

$$c_{12} = [\mu uv, \varepsilon_3uv]$$

$$c_{13} = [\mu v^2, \varepsilon_3v^2]$$

$$c_{14} = [\mu v\lambda, \varepsilon_3v\lambda]$$

$$c_{15} = [\varepsilon_2\lambda^2, \varepsilon_4\lambda^2].$$

Agora, usando argumentos de Álgebra Linear, podemos reescrever estes geradores de modo mais simples. Por exemplo, trocando-se

$$c_1 \leftrightarrow c_1 - c_9 - c_{12} + c_6 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_{11}$$

obtemos um novo gerador

$$[0, (\varepsilon_4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta) u \lambda]$$

que entrará no lugar de c_1 .

Como por (2.27) $\eta \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4$, temos que $\varepsilon_4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \neq 0$. Assim, obtemos o gerador $[0, u \lambda]$, o qual chamaremos $\tilde{c}_1$. Do gerador c_{11} obtemos $[u \lambda, 0]$ pois

$$c_{11} \leftrightarrow c_{11} - \eta \tilde{c}_1 = [\varepsilon_1 u \lambda, 0].$$

Daí, podemos eliminar os geradores $[0, u \lambda]$ e $[u \lambda, 0]$ de todos os demais geradores c_i .

Ficamos então com uma nova lista de geradores os quais chamaremos de $\tilde{c}_i$, $i = 1, \dots, 15$, ou seja,

$$\tilde{c}_1 = [0, u \lambda]$$

$$\tilde{c}_2 = [\varepsilon_1 uv + \mu v^2 + \varepsilon_2 v \lambda, 0]$$

$$\tilde{c}_3 = [\mu v \lambda + \varepsilon_2 \lambda^2, 0]$$

$$\tilde{c}_4 = [\eta uv + \varepsilon_3 v^2 + \varepsilon_4 v \lambda, 0]$$

$$\tilde{c}_5 = [0, \varepsilon_1 u^2 + \mu uv]$$

$$\tilde{c}_6 = [0, \eta u^2 + \varepsilon_3 uv]$$

$$\tilde{c}_7 = [0, \eta uv + \varepsilon_3 v^2 + \varepsilon_4 v \lambda]$$

$$\tilde{c}_8 = [0, \varepsilon_3 v \lambda + \varepsilon_4 \lambda^2]$$

$$\tilde{c}_9 = [\varepsilon_1 u^2, \eta u^2]$$

$$\tilde{c}_{10} = [\varepsilon_1 uv, \eta uv]$$

$$\tilde{c}_{11} = [u\lambda, 0]$$

$$\tilde{c}_{12} = [\mu uv, \varepsilon_3 uv]$$

$$\tilde{c}_{13} = [\mu v^2, \varepsilon_3 v^2]$$

$$\tilde{c}_{14} = [\mu v\lambda, \varepsilon_3 v\lambda]$$

$$\tilde{c}_{15} = [\varepsilon_2 \lambda^2, \varepsilon_4 \lambda^2].$$

Agora, trocando

$$\tilde{c}_2 \leftrightarrow \tilde{c}_2 - \tilde{c}_{10} - \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_7 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \tilde{c}_{14}$$

obtemos, no lugar de $\tilde{c}_2$, o gerador $[(\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu) v\lambda, 0]$.

Devido a (2.27), $\mu \neq \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$. Logo, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu \neq 0$. Então é possível eliminar o gerador $[v\lambda, 0]$. Novamente, é automático que também conseguimos eliminar o gerador $[0, v\lambda]$, devido a $\tilde{c}_{14}$. Da mesma forma como fizemos antes, podemos eliminar $[v\lambda, 0]$ e $[0, v\lambda]$ dos demais geradores $\tilde{c}_i$, ou seja, ficamos com novos geradores $\bar{c}_i$ dados por

$$\bar{c}_1 = [0, u\lambda]$$

$$\bar{c}_2 = [v\lambda, 0]$$

$$\bar{c}_3 = [\varepsilon_2 \lambda^2, 0]$$

$$\bar{c}_4 = [\eta uv + \varepsilon_3 v^2, 0]$$

$$\bar{c}_5 = [0, \varepsilon_1 u^2 + \mu uv]$$

$$\bar{c}_6 = [0, \eta u^2 + \varepsilon_3 uv]$$

$$\bar{c}_7 = [0, \eta uv + \varepsilon_3 v^2]$$

$$\bar{c}_8 = [0, \varepsilon_4 \lambda^2]$$

$$\bar{c}_9 = [\varepsilon_1 u^2, \eta u^2]$$

$$\bar{c}_{10} = [\varepsilon_1 uv, \eta uv]$$

$$\bar{c}_{11} = [u\lambda, 0]$$

$$\bar{c}_{12} = [\mu uv, \varepsilon_3 uv]$$

$$\bar{c}_{13} = [\mu v^2, \varepsilon_3 v^2]$$

$$\bar{c}_{14} = [0, v\lambda]$$

$$\bar{c}_{15} = [\varepsilon_2 \lambda^2, \varepsilon_4 \lambda^2].$$

Observe que de $\bar{c}_3 = [\varepsilon_2 \lambda^2, 0]$ obtemos $[\lambda^2, 0]$. Analogamente, de $\bar{c}_8 = [0, \varepsilon_4 \lambda^2]$ obtemos $[0, \lambda^2]$. Assim, o gerador $\bar{c}_{15} = [\varepsilon_2 \lambda^2, \varepsilon_4 \lambda^2]$ torna-se redundante.

Sabemos que $\mathcal{M}^2$ é gerado por $u^2, v^2, \lambda^2, uv, u\lambda$ e $v\lambda$. Assim, $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$ é gerado por $[\star, 0]$ e $[0, \star]$ onde $\star$ representa os geradores de $\mathcal{M}^2$.

Para mostrar que $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$ são os termos de ordem alta de h_1 é necessário mostrar que podemos obter todos os geradores $[\star, 0]$ e $[0, \star]$.

Resta-nos ainda obter os geradores $[u^2, 0], [uv, 0], [v^2, 0], [0, u^2], [0, uv]$ e $[0, v^2]$. Para isto, usamos os geradores de $TU(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$ que ainda não foram usados. São eles

$$\bar{c}_4 = [\eta uv + \varepsilon_3 v^2, 0]$$

$$\bar{c}_5 = [0, \varepsilon_1 u^2 + \mu uv]$$

$$\bar{c}_6 = [0, \eta u^2 + \varepsilon_3 uv]$$

$$\bar{c}_7 = [0, \eta uv + \varepsilon_3 v^2]$$

$$\bar{c}_9 = [\varepsilon_1 u^2, \eta u^2]$$

$$\bar{c}_{10} = [\varepsilon_1 uv, \eta uv]$$

$$\bar{c}_{12} = [\mu uv, \varepsilon_3 uv]$$

$$\bar{c}_{13} = [\mu v^2, \varepsilon_3 v^2].$$

Assim, temos 8 geradores de $TU(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$ para tentar eliminar os 6 geradores que estão faltando para completar $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$. Vamos então montar a seguinte tabela:

geradores	$[u^2, 0]$	$[uv, 0]$	$[v^2, 0]$	$[0, u^2]$	$[0, uv]$	$[0, v^2]$
$\bar{c}_4$	0	η	ε_3	0	0	0
$\bar{c}_5$	0	0	0	ε_1	μ	0
$\bar{c}_6$	0	0	0	η	ε_3	0
$\bar{c}_7$	0	0	0	0	η	ε_3
$\bar{c}_9$	ε_1	0	0	η	0	0
$\bar{c}_{10}$	0	ε_1	0	0	η	0
$\bar{c}_{12}$	0	μ	0	0	ε_3	0
$\bar{c}_{13}$	0	0	μ	0	0	ε_3

Para concluir o que estamos querendo, basta mostrar que a matriz 8×6 dos coeficientes acima tem rank máximo. Isto equivale a mostrar que existe um subdeterminante 6×6 não nulo.

De fato, considerando o primeiro subdeterminante 6×6 já obtemos

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \eta & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \mu \eta \neq 0 \quad (2.34)$$

devido a (2.27).

Portanto, conseguimos eliminar todos os geradores de $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$. Logo,

$$TU(h_1, Z_2 \oplus Z_2) = [\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2], \quad (2.35)$$

que é um submódulo intrínseco conforme a Proposição 2.6.1.

Assim, pelo Teorema 2.7.1,

$$\wp(h_1) \supset \text{itr } TU(h_1, Z_2 \oplus Z_2) = [\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2],$$

ou seja,

$$[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$$

são de ordem alta para h_1 .

Observação. Em [2] p. 189, encontramos outra demonstração do resultado acima usando o Lema de Nakayama e o Teorema 2.4.1.

2.8 Teoria dos Desdobramentos $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes

Seja $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação. Um desdobramento de g com k parâmetros é um germe $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante $G(x, y, \lambda, \alpha) \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda,\alpha}(Z_2 \oplus Z_2)$, com $\alpha \in \mathbb{R}^k$ e

$$G(x, y, \lambda, 0) = g(x, y, \lambda).$$

Mais precisamente,

$$G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

com $G(x, y, \lambda, 0) = g(x, y, \lambda)$ e

$$G(\varepsilon x, \delta y, \lambda, \alpha) = (\varepsilon, \delta) \cdot G(x, y, \lambda, \alpha) \quad (2.36)$$

para todo $(\varepsilon, \delta) \in Z_2 \oplus Z_2$. Podemos assumir que $Z_2 \oplus Z_2$ atua trivialmente nos parâmetros λ, α .

Definição 2.8.1 *Sejam $H(x, y, \lambda, \beta)$ um desdobramento $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante de g com l parâmetros e $G(x, y, \lambda, \alpha)$ um desdobramento $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante de g com k parâmetros. Dizemos que H fatora-se através de G se*

$$H(x, y, \lambda, \beta) = S(x, y, \lambda, \beta) G(X(x, y, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)) \quad (2.37)$$

onde $S(x, y, \lambda, 0) = I$, $X(x, y, \lambda, 0) = (x, y)$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ e $A(0) = 0$.

Pro A equação (2.37) afirma que para cada β , $H(\cdot, \cdot, \cdot, \beta)$ é equivalente a algum membro de $G(\cdot, \cdot, \cdot, A(\beta))$ da família G .

Definição 2.8.2 Um $Z_2 \oplus Z_2$ -desdobramento G de g é dito versal se para cada $Z_2 \oplus Z_2$ -desdobramento H de g , H fatora-se através de G . Um $Z_2 \oplus Z_2$ -desdobramento versal G de g é chamado miniversal se G depende de um número mínimo de parâmetros. Este número mínimo de parâmetros é chamado de $Z_2 \oplus Z_2$ -codimensão de g .

Para facilitar a notação e a leitura vamos nos referir a $Z_2 \oplus Z_2$ -codimensão apenas por codimensão e ao $Z_2 \oplus Z_2$ -desdobramento apenas por desdobramento, pois a atuação do grupo $Z_2 \oplus Z_2$ está explícita desde o início do texto.

Teorema 2.8.1 (Teorema do Desdobramento Miniversal $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante)

Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação e $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda,\alpha}(Z_2 \oplus Z_2)$ um desdobramento com k parâmetros de g . Então G é versal se, e somente se,

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) = T(g, Z_2 \oplus Z_2) + \mathbb{R} \cdot \{G_{\alpha_1}(x, y, \lambda, 0), \dots, G_{\alpha_k}(x, y, \lambda, 0)\}.$$

Demonstração. Ver [2], p. 233. ■

Corolário 2.8.1 Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ e $W \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um espaço vetorial real tal que

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2) = T(g, Z_2 \oplus Z_2) \oplus W.$$

Sejam $p_1(x, y, \lambda), \dots, p_k(x, y, \lambda)$ uma base para W . Então

$$G(x, y, \lambda, \alpha) = g(x, y, \lambda) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(x, y, \lambda) \quad (2.38)$$

é um desdobramento miniversal de g .

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.8.1. ■

Observe que a codimensão de um germe g é igual a codimensão de $T(g, Z_2 \oplus Z_2)$ em $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$.

A proposição a seguir relaciona a codimensão do $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ com a codimensão de $T(g, Z_2 \oplus Z_2)$.

Proposição 2.8.1 *Seja $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$. Então, $RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ tem codimensão finita se, e somente se, $T(g, Z_2 \oplus Z_2)$ tem codimensão finita.*

Demonstração. Ver [2], p. 212. ■

Para finalizar a seção vamos determinar um desdobramento miniversal para a forma normal h_1 dada em (2.25).

Teorema 2.8.2

$$H_1(x, y, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\varepsilon_1 u + (\mu + \alpha_3)v + \varepsilon_2 \lambda, (\eta + \alpha_2)u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda - \varepsilon_4 \alpha_1]$$

é um desdobramento miniversal de h_1 .

Demonstração. Para encontrarmos o desdobramento H_1 de h_1 vamos descobrir quais são os geradores do espaço normal $N(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$. Sabemos que o espaço tangente $T(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$ é formado por germes da forma

$$Sh_1 + (d_2 h_1)X + h_{1,\lambda}\Lambda.$$

As duas primeiras parcelas da soma acima nos dão os germes que estão em $RT(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$ cujos geradores são

$$c_1 = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, 0]$$

$$c_2 = [\eta uv + \varepsilon_3 v^2 + \varepsilon_4 v \lambda, 0]$$

$$c_3 = [0, \varepsilon_1 u^2 + \mu uv + \varepsilon_2 u \lambda]$$

$$c_4 = [0, \eta u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda]$$

$$c_5 = [\varepsilon_1 u, \eta u]$$

$$c_6 = [\mu v, \varepsilon_3 v].$$

A última parcela nos fornece os geradores

$$c_7 = 1 \cdot [\varepsilon_2, \varepsilon_4] = [\varepsilon_2, \varepsilon_4]$$

$$c_8 = \lambda \cdot [\varepsilon_2, \varepsilon_4] = [\varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_4 \lambda]$$

$$c_9 = \lambda^2 \cdot [\varepsilon_2, \varepsilon_4] = [\varepsilon_2 \lambda^2, \varepsilon_4 \lambda^2].$$

Para provar o teorema, mostraremos que $[v, 0]$, $[0, u]$ e $[0, -\varepsilon_4]$ geram o espaço normal $N(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$. Este cálculo é feito módulo os termos $[\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2]$ que estão contidos em $RT(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$. Assim, os vetores que contribuem neste cálculo são

$$c_1 = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, 0]$$

$$c_4 = [0, \eta u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda]$$

$$c_5 = [\varepsilon_1 u, \eta u]$$

$$c_6 = [\mu v, \varepsilon_3 v]$$

$$c_7 = [\varepsilon_2, \varepsilon_4]$$

$$c_8 = [\varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_4 \lambda].$$

Consideremos então a seguinte tabela:

geradores	$[1, 0]$	$[u, 0]$	$[v, 0]$	$[\lambda, 0]$	$[0, 1]$	$[0, u]$	$[0, v]$	$[0, \lambda]$
c_1	0	ε_1	μ	ε_2	0	0	0	0
c_4	0	0	0	0	0	η	ε_3	ε_4
c_5	0	ε_1	0	0	0	η	0	0
c_6	0	0	μ	0	0	0	ε_3	0
c_7	ε_2	0	0	0	ε_4	0	0	0
c_8	0	0	0	ε_2	0	0	0	ε_4
$[v, 0]$	0	0	1	0	0	0	0	0
$[0, u]$	0	0	0	0	0	1	0	0
$[0, -\varepsilon_4]$	0	0	0	0	$-\varepsilon_4$	0	0	0

A Álgebra Linear mostra que se essa matriz 9×8 tem rank 8 (máximo), então os vetores citados acima geram o espaço normal. De fato, consideremos o subdeterminante formado pela eliminação da linha 6, que corresponde à linha do gerador c_8 . Então, calculando o subdeterminante, por rebaixamento de ordem, temos

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \mu & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \neq 0.$$

Portanto, $p_1 = [0, -\varepsilon_4]$, $p_2 = [0, u]$ e $p_3 = [v, 0]$ geram o espaço normal que é complementar a $T(h_1, Z_2 \oplus Z_2)$. Daí, pelo Corolário 2.8.1

$$H_1 = h_1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i,$$

ou seja,

$$H_1(x, y, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\varepsilon_1 u + (\mu + \alpha_3)v + \varepsilon_2 \lambda, (\eta + \alpha_2)u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda - \varepsilon_4 \alpha_1]$$

é um $Z_2 \oplus Z_2$ -desdobramento miniversal de h_1 . ■

Por questões de notação, vamos a partir de agora denotar o desdobramento H_1 por

$$H_1(x, y, \lambda, \mu, \eta, \sigma) = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, \eta u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 (\lambda - \sigma)], \quad (2.39)$$

onde, por abuso de notação, $\mu = \mu + \alpha_3$, $\eta = \eta + \alpha_2$ e $\alpha_1 = \sigma$.

Nesta seção achamos a forma normal genérica h_1 e seu desdobramento miniversal H_1 . Agora, degenerando as condições (2.24) obtemos outras formas normais. Em [5], M. Manoel e I. Stewart completam a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes encontrando as outras formas normais com o seguinte teorema

Teorema 2.8.3 (*Classificação de bifurcações $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes*) Se um germe $g - [p, q] \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ satisfaz as condições de reconhecimento da tabela a seguir para a forma normal h_j , para algum $j = 2, \dots, 8$, então g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a h_j .

Demonstração. Ver [5], p. 1658. ■

A tabela que consta no enunciado do teorema encontra-se na página seguinte.



Formas Normais

$$\begin{aligned} h_2 &= [\epsilon_1 u + \epsilon_4 v + \epsilon_2 \lambda + \epsilon_5 u^2, \epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 u + \epsilon_3 v + \kappa \lambda] \\ h_3 &= [\epsilon_1 u + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda + \epsilon_5 \lambda^2] \\ h_4 &= [\epsilon_1 u + \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 v + \epsilon_2 \lambda, \eta u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda + \epsilon_5 \lambda^2] \\ h_5 &= [\epsilon_1 u^2 + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_5 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda] \\ h_6 &= [\epsilon_1 u + \epsilon_5 v + \epsilon_2 \lambda, \eta u + \epsilon_3 v^2 + \epsilon_4 \lambda] \\ h_7 &= [\epsilon_1 u + \epsilon_5 v + \epsilon_2 \lambda^2, \eta u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda] \\ h_8 &= [\epsilon_1 u + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_5 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda^2] \end{aligned}$$

Forma Normal	Condições Reconhecimento	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	Parâmetro Modal	Termos de Desdobramento
h_2	$p_u q_v - p_v q_u = 0$							$[u, 0]$
	$p_u, q_v, p_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_2,$	p_u	p_λ	q_v	p_v	$\rho_2 q_v$	$\kappa = \left \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right q_\lambda$	$[0, \lambda]$
	$p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0$							$[0, 1]$
h_3	$p_\lambda q_u - p_u q_\lambda = 0$							$[v, 0]$
	$p_u, q_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_3,$	p_u	p_λ	q_v	q_λ	$\rho_3 p_\lambda$	$\mu = \left \frac{q_\lambda}{p_\lambda q_v} \right p_v$	$[0, u]$
	$p_u q_v - p_v q_u \neq 0$							$[0, 1]$
h_4	$p_v q_\lambda - p_\lambda q_v = 0$							$[v, 0]$
	$p_u, q_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_4,$	p_u	p_λ	q_v	q_λ	$\rho_4 p_\lambda$	$\eta = \left \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right q_u$	$[0, u]$
	$p_u q_v - p_v q_u \neq 0$							$[0, 1]$
h_5	$p_u = 0$							$[v, 0]$
	$p_\lambda, q_v, q_\lambda, p_{uu},$	p_{uu}	p_λ	q_v	q_λ	q_u	$\mu = \left \frac{q_\lambda}{p_\lambda q_v} \right p_v$	$[u, 0]$
	$p_v q_\lambda - p_\lambda q_v \neq 0$							$[0, 1]$
h_6	$q_v = 0$							$[0, v]$
	$p_u, p_\lambda, q_\lambda, p_v, q_u, q_{vv},$	p_u	p_λ	q_{vv}	q_λ	p_v	$\eta = \left \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right q_u$	$[0, u]$
	$p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0$							$[1, 0]$
h_7	$p_\lambda = 0$							$[\lambda, 0]$
	$p_u, p_v, q_v, q_\lambda, p_{\lambda\lambda},$	p_u	$p_{\lambda\lambda}$	q_v	q_λ	p_v	$\eta = \left \frac{p_v}{p_u q_v} \right q_u$	$[0, u]$
	$p_u q_v - p_v q_u \neq 0$							$[1, 0]$
h_8	$q_\lambda = 0$							$[0, \lambda]$
	$p_u, p_\lambda, q_u, q_v, q_{\lambda\lambda}$	p_u	p_λ	q_v	$q_{\lambda\lambda}$	q_u	$\mu = \left \frac{q_u}{p_u q_v} \right p_v$	$[v, 0]$
	$p_u q_v - p_v q_u \neq 0$							$[1, 0]$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= q_{uv} p_u p_v^2 - q_{vv} p_u^2 p_v - q_{uu} p_v^3 - p_{uv} q_v p_u p_v + p_{vv} q_v p_u^2 + p_{uu} q_v p_v^2 \\ \rho_3 &= q_{uu} p_\lambda^3 - p_{uu} p_\lambda^2 q_\lambda - q_{u\lambda} p_\lambda^2 p_u + q_{\lambda\lambda} p_\lambda p_u^2 + p_{u\lambda} p_\lambda q_\lambda p_u - p_{\lambda\lambda} p_u^2 q_\lambda \\ \rho_4 &= q_{\lambda\lambda} p_\lambda q_v^2 - p_{vv} p_\lambda q_\lambda^2 - q_{v\lambda} p_\lambda q_\lambda q_v - p_{vv} q_\lambda^3 - p_{\lambda\lambda} q_v^2 q_\lambda + p_{v\lambda} q_\lambda^2 q_v \end{aligned}$$

2.9 Estabilidade das Soluções

Há quatro tipos de soluções possíveis para a expressão

$$g(x, y, \lambda) = (p(x^2, y^2, \lambda)x, q(x^2, y^2, \lambda)y) = (0, 0).$$

São elas,

- a) Solução trivial: $x = y = 0,$
- b) Soluções x -mode: $p(x^2, 0, \lambda) = 0, y = 0, x \neq 0,$
- c) Soluções y -mode: $x = 0, q(0, y^2, \lambda) = 0, y \neq 0,$
- d) Soluções mixed mode: $p(x^2, y^2, \lambda) = 0, q(x^2, y^2, \lambda) = 0, x \neq 0, y \neq 0.$

Estas soluções correspondem exatamente aos tipos de órbitas listados em (2.2) da ação de $Z_2 \oplus Z_2$ em $\mathbb{R}^2$.

Queremos a partir das soluções de $g = 0$ estudar se estas soluções são ou não estáveis. Assim, diremos que uma solução (x, y, λ) da equação $g(x, y, \lambda) = (0, 0)$ é *estável* se ambos os autovalores de (d_2g) em (x, y, λ) tem parte real positiva e *instável* se pelo menos um dos autovalores de (d_2g) tem parte real negativa.

O estudo da estabilidade será importante para o Capítulo 4, onde iremos tratar do fenômeno do mode jumping. Veremos que este fenômeno ocorre justamente pela perda da estabilidade de uma das soluções que caracterizam o problema. Ressaltamos ainda que a estabilidade das soluções em problemas que envolvem simetria, como no caso da $Z_2 \oplus Z_2$ -simetria, tem a importante característica de ser um invariante por equivalência. Em outras palavras, se h é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a g , então os autovalores de (d_2h) possuem os mesmos sinais dos autovalores de (d_2g) .

Lema 2.9.1 *Seja (x_0, y_0, λ_0) uma solução de $g(x, y, \lambda) = (0, 0)$. Se (x_0, y_0, λ_0) é*

- i) solução trivial, então (d_2g) é uma matriz diagonal com autovalores reais cujos sinais são dados por: sinal $p(0, 0, \lambda_0)$ e sinal $q(0, 0, \lambda_0)$;*
- ii) solução x -mode, então (d_2g) é também uma matriz diagonal com autovalores reais cujos sinais são dados por: sinal $p_u(x_0, 0, \lambda_0)$ e sinal $q(x_0, 0, \lambda_0)$;*



iii) solução *y-mode*, então (d_2g) é ainda uma matriz diagonal com autovalores reais cujos sinais são os mesmos de $p(0, y_0, \lambda_0)$ e $q_v(0, y_0, \lambda_0)$;

iv) solução *mixed mode*, então

$$\text{sinal det } (d_2g) = \text{sinal } (p_u q_v - p_v q_u) \text{ em } (x_0, y_0, \lambda_0),$$

$$\text{sinal tr } (d_2g) = \text{sinal } (u p_u + v q_v) \text{ em } (x_0, y_0, \lambda_0).$$

Demonstração. Seja $g = [p, q]$. Basta usar o fato de que

$$(d_2g) = \begin{pmatrix} p + 2up_u & 2p_v xy \\ 2q_u xy & q + 2vq_v \end{pmatrix}$$

combinado aos tipos de soluções de $g = 0$. ■

2.10 Diagramas de Bifurcação

Um tópico importante da Teoria de Bifurcação é analisar os diagramas de bifurcação de uma forma normal. Daremos aqui apenas os diagramas do desdobramento H_1 de h_1 . Os diagramas relacionados aos outros desdobramentos H_i podem ser encontrados em [5]. A razão de considerarmos apenas este caso é que ele nos dá uma idéia geral de como os diagramas são obtidos e também pelo fato de que, no Capítulo 4, estes diagramas terão importância fundamental.

Observe que temos várias possibilidades para a forma normal h_1 em (2.25) devido a presença dos ε_i 's, mas consideraremos apenas o caso em que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -1. \quad (2.40)$$

Então, nesta seção, nos referiremos a h_1 como sendo

$$h_1 = [u + \mu v - \lambda, \eta u + v - \lambda] \quad (2.41)$$

e, por conseguinte, as condições sobre os modais dadas em (2.27) como

$$\mu \neq 1, \quad \eta \neq 1, \quad \text{e} \quad \mu\eta \neq 1. \quad (2.42)$$

As razões dessa escolha deve-se ao fato de que geralmente nas aplicações, a solução trivial é estável para $\lambda < 0$. Segue do Lema 2.9.1 que isso ocorre quando

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -1.$$

O caso

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$$

está relacionado ao modo como, frequentemente, as soluções x -mode ou y -mode bifurcam.

De acordo com as condições (2.40), temos que o desdobramento miniversal H_1 de h_1 é dado por

$$H_1 = [u + \mu v - \lambda, \eta u + v - (\lambda - \sigma)]. \quad (2.43)$$

As condições sobre os modais em (2.42), dividem o plano modal- $\mu\eta$ em sete regiões que são dadas na figura a seguir.

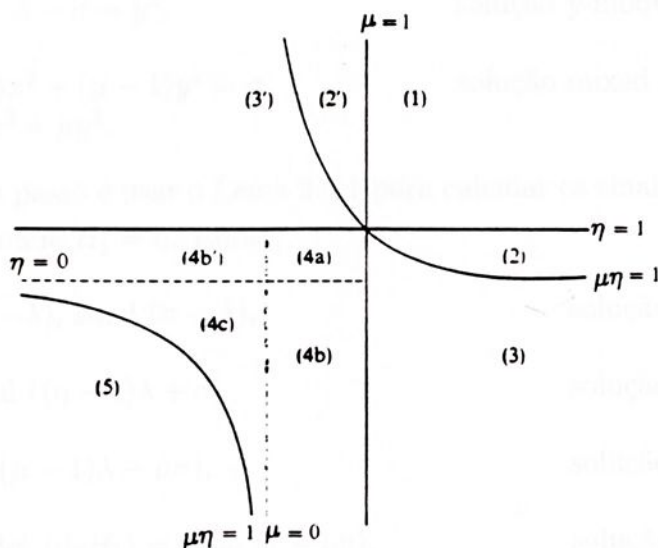


Figura 2.1

Os diagramas de bifurcação de H_1 são de dois tipos: os perturbados e os não perturbados. Os *não perturbados* são dados quando $\sigma = 0$ e eles são topologicamente equivalentes (ver [36]) para todos os valores de μ e η em cada região. Além disso, o desdobramento miniversal (2.43) é topologicamente trivial em cada região exceto na região (4). A região (4) está dividida em quatro outras subregiões indicadas pelas linhas tracejadas na figura anterior, nas quais os desdobramentos miniversais são topologicamente triviais. A seguir desenhamos os diagramas para as regiões (1), (2), (3), (4a), (4b), (4c) e (5). Os diagramas nas regiões (2'), (3') e (4b') são equivalentes ou podem ser obtidos daqueles das regiões (2), (3) e (4b). É importante ressaltar que os diagramas de bifurcação estão no $\mathbb{R}^3$, mas aqui os desenharemos apenas de maneira esquemática, nos quais as linhas referem-se às órbitas das soluções descritas em (2.2). Para desenhá-los precisamos encontrar as soluções da expressão $H_1 = 0$. Ou seja,

- | | |
|---|---------------------|
| a) $x = y = 0$, | solução trivial, |
| b) $\lambda = x^2$; $y = 0$, | solução x -mode, |
| c) $x = 0$; $\lambda - \sigma = y^2$, | solução y -mode, |
| d) $(1 - \eta)x^2 + (\mu - 1)y^2 = \sigma$,
$\lambda = x^2 + \mu y^2$. | solução mixed mode. |

O próximo passo é usar o Lema 2.9.1 para calcular os sinais dos autovalores da matriz $(d_2 H_1)$ onde $H_1 = 0$. Então,

- | | |
|--|---------------------|
| a) sinal $(-\lambda)$, sinal $(\sigma - \lambda)$, | solução trivial, |
| b) +, sinal $((\eta - 1)\lambda + \sigma)$, | solução x -mode, |
| c) sinal $((\mu - 1)\lambda - \mu\sigma)$, +, | solução y -mode, |
| d) sinal $\det(d_2 H_1) = \text{sinal}(1 - \mu\eta)$,
sinal $\text{tr}(d_2 H_1) = +$. | solução mixed mode, |

Ressaltamos ainda que as soluções mixed mode ocorrem nos diagramas de bi-

furcação não perturbado precisamente quando

$$\text{senal}(\mu - 1) = \text{senal}(\eta - 1).$$

Nas figuras a seguir, usamos os sinais de + e de - para indicar estabilidade. Assim, ++ indica que ambos os autovalores de $(d_2 H_1)$ tem parte real positiva e portanto, este ramo é estável; +- ou -+ indicam que os autovalores têm parte real com sinais opostos e -- indica que ambos autovalores têm parte real com sinal negativo; nestes outros casos, onde aparece pelo menos um sinal -, os ramos são instáveis. Além disso, para facilitar a interpretação dos diagramas, as órbitas indicadas pelas linhas mais fortes referem-se a soluções estáveis.

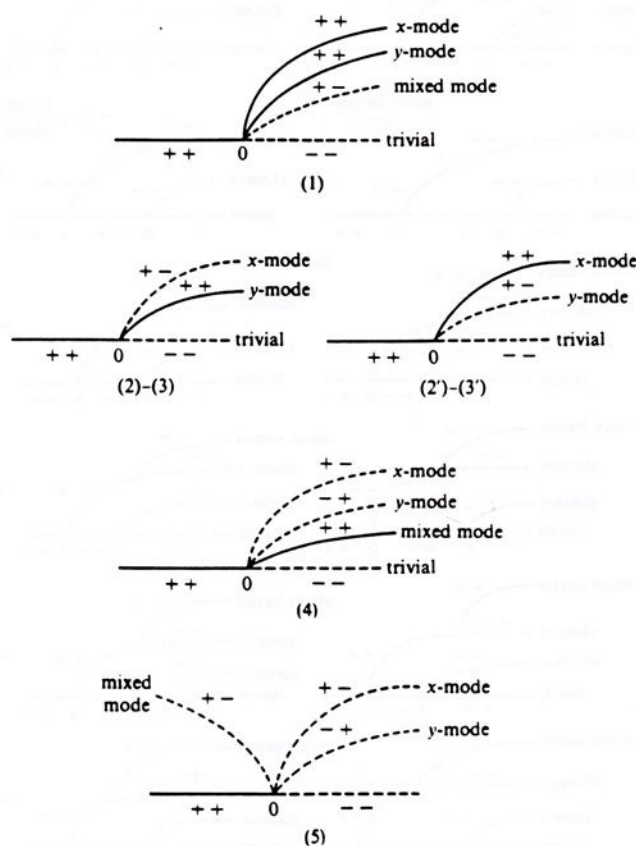


Figura 2.2

Os diagramas *perturbados* são aqueles em que $\sigma > 0$ ou $\sigma < 0$, para as várias regiões. Estes diagramas são mais complicados que o caso não perturbado. Nestes diagramas ocorrem bifurcações secundárias em consequência da $Z_2 \oplus Z_2$ -simetria. Eles são dados pelas figuras a seguir.

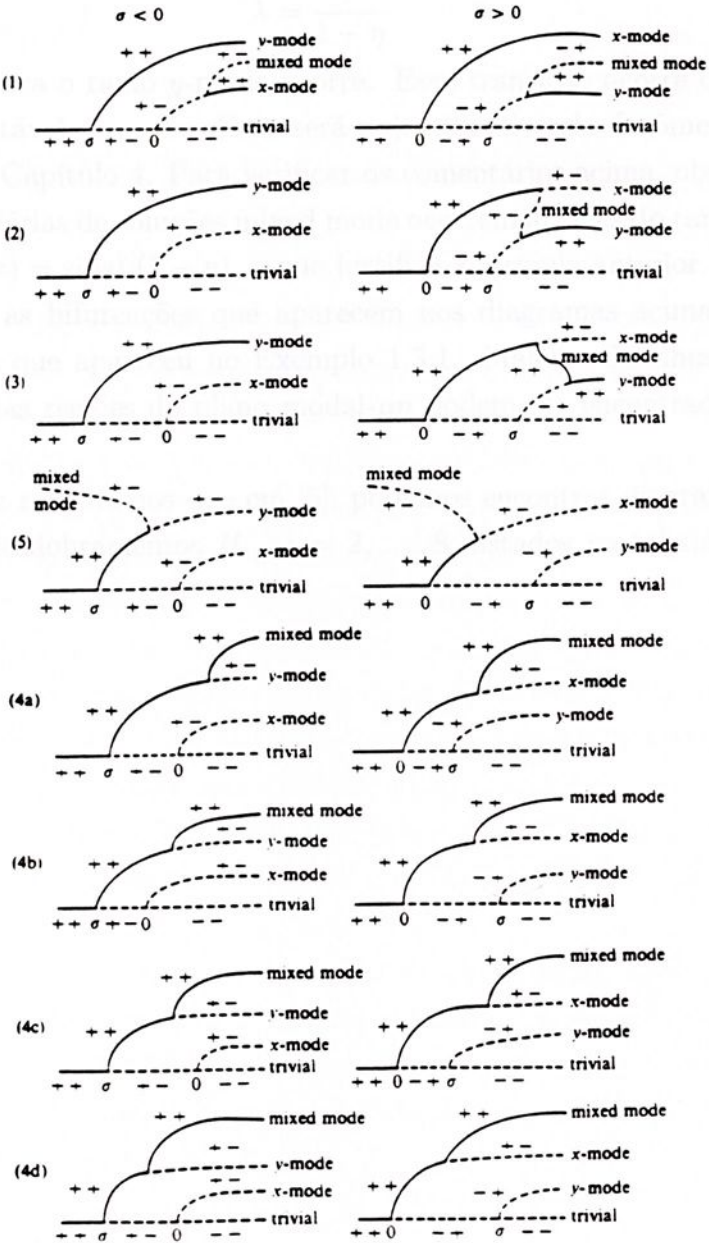


Figura 2.3

Vários comentários seguem ao analisarmos os diagramas anteriores, mas gostaríamos de salientar o que ocorre na região (2) com $\sigma > 0$. Neste caso o ramo x -mode perde estabilidade através de uma bifurcação secundária dada pelo ramo de solução mixed mode

$$\lambda = \frac{\sigma}{1 - \eta}$$

e uma transição para o ramo y -mode ocorre. Essa transição ocorre com um salto para a solução estável y -mode. Esta será a justificativa do fenômeno físico que descreveremos no Capítulo 4. Para verificar os comentários acima, observamos que bifurcações secundárias de soluções mixed mode ocorrem através do ramo de solução x -mode se $\text{ sinal } (\sigma) = \text{ sinal } (1 - \eta)$, o que justifica a fórmula anterior.

Observe que as bifurcações que aparecem nos diagramas acima são do tipo pitchfork, como a que apareceu no Exemplo 1.3.1. Maiores detalhes sobre as bifurcações nas várias regiões do plano modal- $\mu\eta$ podem ser encontrados em [1], p. 435.

Mais uma vez ressaltamos que em [5], podemos encontrar diagramas de bifurcação de outros desdobramentos H_i , $i = 2, \dots, 8$, listados na tabela do Teorema 2.8.3.



Capítulo 3

Formulação por Caminhos

Neste capítulo, usamos a formulação por caminhos como forma alternativa para obter a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, apresentados no Capítulo 2. Dessa forma, este trabalho torna-se paralelo a [5] onde M. Manoel e I. Stewart classificam esses mesmos problemas de bifurcação utilizando técnicas clássicas da Teoria de Singularidades aplicadas à Teoria de Bifurcação.

A idéia básica da formulação por caminhos foi sugerida por Golubitsky e Schaeffer em [1] onde eles relacionaram problemas de bifurcação em uma variável padrão e sem simetria, com um caminho através do desdobramento miniversal de uma cuspóide x^{m+1} , fazendo assim uma analogia entre a Teoria de Bifurcação e a Teoria das Catástrofes. Essa idéia, já presente nos primeiros artigos de Mather e Martinet para Teoria de Singularidades, tem sido estendida e aplicada. (cf. [31],[13],[32]). Uma característica importante da formulação por caminhos é que podemos minimizar e organizar os cálculos que são feitos utilizando-se os métodos clássicos para obtenção de formas normais como no Capítulo 2.

Este capítulo está dividido em duas partes: na primeira, apresentamos os resultados básicos da teoria da formulação por caminhos; na segunda, fazemos a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, via esta formulação. Finalizamos o capítulo comparando a classificação que obtivemos com a sugerida por M. Manoel e I. Stewart em [5].



3.1 Teoria da Formulação por Caminhos

A teoria que vamos apresentar restringe-se ao caso $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante. Iniciamos o estudo dessa seção definindo o centro organizador de um problema de bifurcação $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$, o qual será chamado *core*.

Definição 3.1.1 *Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um problema de bifurcação. O core g_0 de g é dado por*

$$g_0(x, y) = g(x, y, 0).$$

Exemplo 3.1.1 *O core da forma normal $h_1 = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, \eta u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 \lambda]$ que aparece em (2.25), é dado por*

$$h_{1_0} = [\varepsilon_1 u + \mu v, \eta u + \varepsilon_3 v].$$

Denotaremos o conjunto dos germes $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes onde não há presença do parâmetro λ por

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$$

e o conjunto das matrizes $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes onde não há presença do parâmetro λ por

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2).$$

No capítulo anterior, definimos a noção de equivalência para problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. Agora, faremos o mesmo com os seus cores. Assim, dois cores $f_0, g_0 \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ são *equivalentes*, e também chamaremos $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalentes, se

$$f_0 = S \cdot g_0 \circ X, \quad (3.1)$$

onde $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ com $X(0, 0) = (0, 0)$. Além disso,

$$(d_2 X)_{0,0} \text{ e } S(0, 0)$$

são matrizes diagonais com entradas positivas.

O conjunto de todas as $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalências (S, X) será denotado por $\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}$.

Nosso próximo passo é associar a cada problema de bifurcação $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ um caminho no espaço dos parâmetros de desdobramento do core g_0 de g . Essa idéia surge a partir da $\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}$ -teoria dos desdobramentos. De maneira natural, podemos adaptar todos os resultados citados na Seção 2.8 do Capítulo 2, sobre a teoria dos desdobramentos $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, para germes em $\vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$, fazendo $\lambda = 0$.

Assim, o espaço tangente de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ é definido por

$$TK^{Z_2 \oplus Z_2}(g) = \{Sg + (d_2g)X : X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2), S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)\}.$$

Segue do Teorema 2.8.1 que o germe g tem um desdobramento miniversal se, e somente se, a dimensão de $NK^{Z_2 \oplus Z_2}(g) = \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)/TK^{Z_2 \oplus Z_2}(g)$, chamado espaço normal de g , é finita como espaço vetorial real. Esta dimensão é igual ao número de parâmetros de um desdobramento miniversal. Este número é chamado $\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}$ -codimensão de g , ou simplesmente, codimensão de g . Definimos também que um germe em $\vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ é dito de core finito se a $\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}$ -codimensão do seu respectivo core for finita.

Seja $g_0 \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ um core finito com $g(x, y, 0) = g_0(x, y)$. De acordo com a teoria dos desdobramentos, se $G_0(x, y, \alpha)$ é um desdobramento miniversal de g_0 , com $\alpha \in \mathbb{R}^k$ então, como $g(x, y, \lambda)$ também é um desdobramento de g_0 , temos que g fatora-se através de G_0 , ou seja,

$$g(x, y, \lambda) = S(x, y, \lambda) G_0(X(x, y, \lambda), \bar{\alpha}(\lambda)), \quad (3.2)$$

onde $\bar{\alpha} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ é o *caminho* associado ao problema de bifurcação g .

Observe que $\bar{\alpha}$ é uma aplicação do espaço de parâmetros de bifurcação no espaço de parâmetros de desdobramento. O espaço de todos os caminhos será dado por

$$\vec{\mathcal{P}}_\lambda = \{\bar{\alpha} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)\}. \quad (3.3)$$

Assim, $\bar{\alpha}$ induz um novo problema de bifurcação definido por

$$\bar{\alpha}^* G_0(x, y, \lambda) = G_0(x, y, \bar{\alpha}(\lambda)). \quad (3.4)$$

Chamamos $\bar{\alpha}^*$ de *aplicação pull-back pelo caminho* $\bar{\alpha}$.

Olhando para as expressões (3.2) e (3.4) podemos observar que

$$\begin{aligned} g(x, y, \lambda) &= S(x, y, \lambda) G_0(X(x, y, \lambda), \bar{\alpha}(\lambda)) = \\ &= S(x, y, \lambda) \bar{\alpha}^* G_0(X(x, y, \lambda), \lambda) = S(x, y, \lambda) \bar{\alpha}^* G_0(X(x, y, \lambda), I(\lambda)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde I é a aplicação identidade.

Assim, temos que g e $\bar{\alpha}^* G_0$ são $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalentes, com a equivalência (S, X, I) . Em símbolos,

$$g \sim \bar{\alpha}^* G_0. \quad (3.6)$$

Com isso, mostramos que se $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ tem core finito, então existe um caminho $\bar{\alpha}$ tal que g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a $\bar{\alpha}^* G_0$.

Como $G_0(x, y, \alpha)$ é um desdobramento miniversal do core g_0 , definimos o *discriminante* Δ_{G_0} de G_0 como sendo

$$\Delta_{G_0} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists (x, y) \text{ tal que } G_0(x, y, \alpha) = (d_2 G_0)_{(x,y)} = 0\}. \quad (3.7)$$

Tomando a aplicação projeção $\pi_{G_0} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e considerando a restrição $\pi_{G_0} : G_0^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^k$, temos que a imagem da projeção π_{G_0} dos pontos singulares de G_0 , restrita ao conjunto $G_0^{-1}(0)$, é, justamente, o discriminante Δ_{G_0} de G_0 .

Vamos agora estender a noção de equivalência para os caminhos com mesmo core. Dois caminhos $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ são equivalentes se

$$\bar{\alpha}(\lambda) = H(\lambda, \bar{\beta}(\Lambda(\lambda))) \quad (3.8)$$

onde $\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um difeomorfismo que preserva orientação e

$$H : \mathbb{R}^{1+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

é uma família λ -parametrizada de difeomorfismos locais sobre $\mathbb{R}^k$, isto é, $(d_2 H)_\alpha(0, 0)$ pertence ao conjunto das transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^k$ que possuem determinante positivo. Mais do que isto, H preserva o discriminante Δ_{G_0} de G_0 no sentido de que $H(\lambda, \Delta_{G_0}) \subset \Delta_{G_0}$, para todo λ .

Para um core g_0 fixado, o grupo das equivalências de caminhos ou grupo dos caminhos equivalentes, será denotado por $\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}$. Este grupo $\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}$ atua no espaço $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$ via (3.8).

3.1.1 Espaço Tangente aos Caminhos

A definição de espaço tangente aos caminhos utiliza o conceito de *derlogs*. Os *derlogs* que são campos de vetores tangentes ao discriminante Δ_{G_0} , são denominados *derlogs geométricos*. Definimos também o *derlog algébrico* ou *campo de vetores levantáveis*, denotado por $\text{Derlog}^*(\Delta_{G_0})$, como sendo o campo de vetores ξ que satisfaz a equação

$$S(x, y, \alpha) G_0(x, y, \alpha) = (dG_0)_{(x,y)}(x, y, \alpha) X(x, y, \alpha) + (dG_0)_\alpha(x, y, \alpha) \xi(\alpha), \quad (3.9)$$

onde G_0 é um desdobramento do core g_0 e S, X são $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. O par (X, ξ) é o levantamento de ξ e é formado pelo campo de vetores tangentes aos zeros de G_0 em seus pontos suaves.

Na equação (3.9), o termo do lado esquerdo da igualdade juntamente com a primeira parcela da soma do lado direito nos dão a expressão do espaço tangente de G_0 . Logo, de acordo com a expressão acima, estamos procurando vetores linearmente independentes ξ que dependam apenas de α , a partir dos vetores do espaço tangente de G_0 .

Observação. Quando os *derlogs* algébrico e geométrico coincidem temos que o determinante da matriz formada pelos vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{G_0})$ é um múltiplo unitário do discriminante Δ_{G_0} . Neste trabalho isto ocorre.

Os espaços tangentes que queremos tratar com relação a $\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}$ -equivalência (3.8) são os seguintes $\mathcal{E}_\lambda$ -módulos de $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$,

$$TK_{\Delta_{G_0}}(\bar{\alpha}) = \langle \bar{\alpha}_\lambda \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \bar{\alpha}^* \text{Derlog}^*(\Delta_{G_0}). \quad (3.10)$$

Na parcela $\langle \bar{\alpha}_\lambda \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ que aparece acima, $\bar{\alpha}_\lambda$ indica a derivada do caminho $\bar{\alpha}$ com respeito a λ . Já a segunda parcela, $\bar{\alpha}^* \text{Derlog}^*(\Delta_{G_0})$, é a aplicação pull-back do *derlog* pelo caminho $\bar{\alpha}$.

Definimos também o espaço normal ao caminho $\bar{\alpha}$, complementar a $TK_{\Delta_{G_0}}(\bar{\alpha})$, como sendo

$$NK_{\Delta_{G_0}}(\bar{\alpha}) = \vec{\mathcal{P}}_\lambda / TK_{\Delta_{G_0}}(\bar{\alpha}).$$



Assim, dizemos que a $\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}$ -codimensão de um caminho $\bar{\alpha}$, denotada por $\text{cod}_{\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}} \bar{\alpha}$, é a dimensão do espaço vetorial real $N\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}(\bar{\alpha})$.

Encerramos essa seção com um resultado que relaciona a codimensão do caminho $\bar{\alpha}$ com a codimensão do problema de bifurcação $\bar{\alpha}^*G_0$, onde G_0 é o desdobramento miniversal do core $g_0 \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$.

Proposição 3.1.1

$$\text{cod}_{\mathcal{K}_{\Delta_{G_0}}} \bar{\alpha} < \infty \text{ se, e somente se, } \text{cod}_{\mathcal{K}_{Z_2 \oplus Z_2}} \bar{\alpha}^*G_0 < \infty.$$

Demonstração. Ver [6], p. 289. ■

3.2 Classificação dos Problemas $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes Via Formulação por Caminhos

Esta é a parte central deste trabalho. Nesta seção, mostramos como obter a classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes, via formulação por caminhos. Com isso, apresentamos uma forma alternativa de classificação àquela usando técnicas clássicas da Teoria de Singularidades, proposta por M. Manoel e I. Stewart em [5].

Começamos nossa análise a partir do Teorema 3.2.1 que nos dá a forma normal genérica para o core com o qual trabalharemos.

Teorema 3.2.1 *Consideremos $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um germe $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariante dado por $g(x, y) = (p(u, v)x, q(u, v)y) = [p, q]$. Se*

$$p_u, \quad q_v, \quad q_u, \quad p_u q_v - p_v q_u \tag{3.11}$$

são todos não nulos na origem $(x, y) = (0, 0)$, então g é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a

$$h_1^c = [\varepsilon_1 u + mv, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v] \tag{3.12}$$

com $\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u)$, $\varepsilon_3 = \text{ sinal } (q_u)$, $\varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_v)$, e parâmetro modal

$$m = \left| \frac{q_u}{p_u q_v} \right| p_v.$$



Além disso,

$$m \neq \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4. \quad (3.13)$$

Demonstração. É essencialmente análoga à demonstração do Teorema 2.5.1. Inicialmente, fazemos uma mudança de coordenadas genérica

$$S \cdot g \circ X,$$

onde $X = [a, b] \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ e $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$. Queremos mostrar que

$$h_1^c = S \cdot g \circ X.$$

Da mesma forma como fizemos no capítulo anterior, desprezamos os termos de ordem maior que dois pois são de ordem alta para o problema do reconhecimento (basta fazer $\lambda = 0$). Então, se $S \cdot g \circ X = [p'', q'']$, segue da mudança de coordenadas

- $p''_u = p_u a_0^3 s_1^0$,
- $p''_v = p_v a_0 b_0^2 s_1^0$,
- $q''_u = q_u a_0^2 b_0 s_4^0$,
- $q''_v = q_v b_0^3 s_4^0$,

onde os elementos que aparecem nas expressões acima são dados como no Teorema 2.5.1, isto é, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $s_1^0 > 0$, $s_4^0 > 0$.

Para que g seja $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a h_1^c devemos ter

$$\begin{aligned} p_u a_0^3 s_1^0 = \pm 1 & \Rightarrow |p_u| a_0^3 s_1^0 = 1, \\ q_u a_0^2 b_0 s_4^0 = \pm 1 & \Rightarrow |q_u| a_0^2 b_0 s_4^0 = 1, \\ q_v b_0^3 s_4^0 = \pm 1 & \Rightarrow |q_v| b_0^3 s_4^0 = 1. \end{aligned}$$

Resolvendo as equações acima obtemos

$$s_1^0 = \frac{1}{|p_u| a_0^3},$$

$$s_4^0 = \frac{1}{|q_v|b_0^3},$$

$$\frac{b_0^2}{a_0^2} = \frac{|q_u|}{|q_v|}.$$

Substituindo os valores acima nas expressões p_u'', q_u'' e q_v'' listadas anteriormente, concluímos que

$$\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u), \quad \varepsilon_3 = \text{ sinal } (q_u), \quad \varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_v),$$

e de p_v'' , temos que

$$m = \left| \frac{q_u}{p_u q_v} \right| p_v$$

é o parâmetro modal.

A condição (3.13) segue de $p_u q_v - p_v q_u \neq 0$. ■

Proposição 3.2.1 *Considere um core genérico com apenas um parâmetro modal, digamos $g_0 = [\varepsilon_1 u + Mv, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v]$. Então, g_0 é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente ao core com dois parâmetros modais*

$$h_{1_0} = [\varepsilon_1 u + \mu v, \eta u + \varepsilon_4 v]$$

da forma normal h_1 dada em (2.25) se, e somente se, $M = |\eta|\mu$, com ε_i 's dados de acordo com o Teorema 3.2.1, $\mu = \left| \frac{q_\lambda}{p_\lambda q_v} \right| p_v$ e $\eta = \left| \frac{p_\lambda}{q_\lambda p_v} \right| q_u$.

Demonstração. Se g_0 e h_{1_0} são equivalentes, então existem $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ e $X = [a, b] \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ de forma que

$$h_{1_0} = S \cdot g_0 \circ X.$$

Temos então que

$$\text{a) } \varepsilon_1 a_0^3 s_1^0 = \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad s_1^0 = \frac{1}{a_0^3};$$

$$\text{b) } M a_0 b_0^2 s_1^0 = \mu;$$

$$\text{c) } \varepsilon_3 a_0^2 b_0 s_4^0 = \eta;$$

$$d) \varepsilon_4 b_0^3 s_4^0 = \varepsilon_4 \Rightarrow s_4 = \frac{1}{b_0^3}.$$

Substituindo o valor de s_1^0 e s_4^0 nos itens b) e c) obtemos

$$M = \mu \frac{a_0^2}{b_0^2} \quad (3.14)$$

e

$$\frac{a_0^2}{b_0^2} = \varepsilon_3 \eta. \quad (3.15)$$

Daí, de (3.14) e (3.15) segue

$$M = \varepsilon_3 \mu \eta \Rightarrow M = |\eta| \mu \quad (3.16)$$

como queríamos. Reciprocamente, se $M = |\eta| \mu$, devemos mostrar que g_0 é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente h_{1_0} . Fazendo uma mudança de coordenadas genérica, temos que

$$S \cdot h_{1_0} \circ X = [\varepsilon_1 a_0^3 s_1^0 u + \mu a_0 b_0^2 s_1^0 v, \eta a_0^2 b_0 s_4^0 u + \varepsilon_4 b_0^3 s_4^0 v]. \quad (3.17)$$

Logo, para que h_1^0 e g_0 sejam equivalentes, devemos ter

$$a) \varepsilon_1 a_0^3 s_1^0 = \pm 1 \Rightarrow a_0^3 s_1^0 = 1;$$

$$b) \eta a_0^2 b_0 s_4^0 = \pm 1 \Rightarrow |\eta| a_0^2 b_0 s_4^0 = 1;$$

$$c) \varepsilon_4 b_0^3 s_4^0 = \pm 1 \Rightarrow b_0^3 s_4^0 = 1.$$

Resolvendo as equações acima ficamos com

$$i) s_1^0 = \frac{1}{a_0^3};$$

$$ii) \frac{a_0^2}{b_0^2} = |\eta|;$$

$$iii) s_4^0 = \frac{1}{b_0^3}.$$

Substituindo os valores acima em a), b) e c), concluímos que

$$\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u), \quad \varepsilon_3 = \text{ sinal } (q_u), \quad \varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_v).$$

Além disso, da expressão (3.17) ocorre

$$\mu a_0 b_0^2 s_1^0 = \mu \frac{b_0^2}{a_0^2} = \mu |\eta| = M.$$

Logo, g_0 e h_{1_0} são $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalentes. ■

Segue da proposição acima que o core

$$h_1^c = [\varepsilon_1 u + mv, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v] \quad \text{com} \quad m = \left\lfloor \frac{q_u}{p_u q_v} \right\rfloor p_v$$

é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente ao core

$$h_{1_0} = [\varepsilon_1 u + \mu v, \eta u + \varepsilon_4 v],$$

onde os ε_i 's, μ e η são como na proposição anterior.

Então, podemos observar que não são necessários dois parâmetros modais para o core genérico, como é apresentado em h_{1_0} . Isto mostra-se como uma primeira característica importante do ponto de vista que estamos analisando. O segundo parâmetro modal do core h_{1_0} aparecerá no caminho associado ao core h_1^c , como veremos mais adiante.

Vamos agora calcular o desdobramento do core h_1^c .

Proposição 3.2.2

$$H_1^c = [\varepsilon_1 u + (m + \alpha_3)v + \alpha_1, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2] \quad (3.18)$$

é um desdobramento miniversal de h_1^c , onde os ε_i 's são como no Teorema 3.2.1.

Demonstração. Calculamos o espaço tangente $T\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}(h_1^c)$ usando os seis geradores dados em (2.20). Daí, fazemos o quociente

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)/T\mathcal{K}^{Z_2 \oplus Z_2}(h_1^c)$$

para encontrar os termos de desdobramentos. Desses cálculos, pode-se observar que precisamos da condição

$$m \neq \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4. \quad (3.19)$$

Assim, concluímos que

$$p_1 = [1, 0], \quad p_2 = [0, 1], \quad \text{e} \quad p_3 = [v, 0]$$

são os termos de desdobramento de h_1^c .

Logo,

$$H_1^c = h_1^c + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i = [\varepsilon_1 u + (m + \alpha_3)v + \alpha_1, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2],$$

como desejávamos. ■

Dado o desdobramento H_1^c de h_1^c , o próximo passo é definir um caminho $\bar{\alpha}$ no espaço de parâmetros de desdobramento, de modo que o pull-back $\bar{\alpha}^* H_1^c$ seja equivalente ao problema de bifurcação h_1 . Além disso, queremos encontrar a codimensão do problema de bifurcação $\bar{\alpha}^* H_1^c$ e seus termos de desdobramento. Para isso, usaremos a teoria da formulação por caminhos desenvolvida na primeira parte deste capítulo.

Começamos calculando o discriminante $\Delta_{H_1^c}$, formado pelos pontos singulares de H_1^c , para comprovar que o determinante dos vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c})$ coincide com a expressão do discriminante. Com efeito,

$$\Delta_{H_1^c} = \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_1 \alpha_1 - \varepsilon_3 \alpha_2) (\alpha_1 - \varepsilon_4 \alpha_2 (m + \alpha_3)).$$

Para encontrar os vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c})$ resolvemos a expressão (3.9). Como os termos de desdobramento de h_1^c são $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[v, 0]$, a notação vetorial que usaremos para os derlogs indicará que a primeira linha do vetor refere-se ao termo que acompanha $[1, 0]$, a segunda ao termo que acompanha $[0, 1]$ e a terceira diz respeito a $[v, 0]$. Para outros vetores dos derlogs que calcularemos posteriormente, a notação vetorial sempre estará relacionada com os termos de desdobramento do

core em questão, obedecendo a ordem que os termos de desdobramento são listados, como fizemos acima. Por exemplo, neste caso,

$$[1, 0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [0, 1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } [v, 0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, os vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c})$ são dados por

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \alpha_1^2 \\ -\varepsilon_3 \alpha_2^2 \\ (-\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_3 \alpha_2)(m + \alpha_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 - \varepsilon_4 \alpha_2(m + \alpha_3) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Observe que o determinante dos vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c})$ é igual a expressão que define o discriminante $\Delta_{H_1^c}$.

Considere o caminho $\bar{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\bar{\alpha}(\lambda) = (\varepsilon_2 \lambda, k \lambda, 0)$$

onde $k = \left| \frac{p_u}{q_u p_\lambda} \right| q_\lambda$ e $\varepsilon_2 = \text{sign}(p_\lambda)$. Como $\bar{\alpha}^* H_1^c = H_1^c \circ \bar{\alpha}$, obtemos uma expressão com λ , que denotaremos por h_1^* , dada por

$$h_1^* = [\varepsilon_1 u + m v + \varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + k \lambda]. \quad (3.21)$$

Queremos agora encontrar o desdobramento miniversal de h_1^* e, consequentemente, sua codimensão.

Para isso, usamos o espaço tangente ao caminho $\bar{\alpha}$ que, de acordo com (3.10), é definido por

$$T\mathcal{K}_{\Delta_{H_1^c}}(\bar{\alpha}) = \langle \bar{\alpha}_\lambda \rangle_{\varepsilon_\lambda} + \bar{\alpha}^* \text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c}).$$

Substituindo o caminho $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_2 \lambda, k \lambda, 0)$ na expressão acima, temos que os geradores de $T\mathcal{K}_{\Delta_{H_1^c}}(\bar{\alpha})$ são

$$v_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \lambda \\ k \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \lambda^2 \\ -\varepsilon_3 k^2 \lambda^2 \\ (-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 k) m \lambda \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_4 k m) \lambda \end{pmatrix},$$

onde o primeiro gerador v_1 vem da parcela $\langle \bar{\alpha}_\lambda \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ e os três últimos, da parcela $\bar{\alpha}^* \text{Derlog}^*(\Delta_{H_1^c})$.

Se $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 k m \neq 0$, ou seja, se

$$k m \neq \varepsilon_2 \varepsilon_4, \quad (3.22)$$

obtemos de v_4 o gerador $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Desse modo, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = [0, \lambda v]$ pertence ao espaço tangente $TK_{\Delta_{H_1^c}}(\bar{\alpha})$. Então, podemos eliminá-lo dos demais geradores. Com isso, podemos trocar v_3 por

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \lambda^2 \\ -\varepsilon_3 k^2 \lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando o gerador acima por $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ e somando com λv_2 ficamos com

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (-\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_2 k^2 + k) \lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, se $-\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_2 k^2 + k \neq 0$, ou seja,

$$k \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad \text{e} \quad k \neq 0, \quad (3.23)$$

obtemos de v_3 o gerador

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para o espaço tangente $TK_{\Delta_{H_1^c}}(\bar{\alpha})$. Observe que resta-nos ainda os geradores v_1 e v_2 .

Afirmção: O espaço normal $N\mathcal{K}_{\Delta_{H_1^*}}(\bar{\alpha})$ é gerado por $[0, 1]$, $[v, 0]$ e $[0, \lambda]$, ou na notação vetorial que estamos usando, por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De fato, consideremos a seguinte tabela

geradores	$[1, 0]$	$[\lambda, 0]$	$[v, 0]$	$[0, 1]$	$[0, \lambda]$
v_1	ε_2	0	0	k	0
v_2	0	ε_2	0	0	k
$[0, 1]$	0	0	0	1	0
$[v, 0]$	0	0	1	0	0
$[0, \lambda]$	0	0	0	0	1

A matriz 5×5 dos coeficientes acima tem posto máximo pois seu determinante é não nulo. Logo, pela Álgebra Linear, temos que a afirmação é verdadeira. Assim, um desdobramento miniversal H_1^* de h_1^* é dado por

$$H_1^* = [\varepsilon_1 u + \tilde{m}v + \varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \tilde{k}\lambda + \alpha_1]$$

onde $\tilde{m} \approx m$, $\tilde{k} \approx k$, $\alpha_1 \approx 0$, com $\approx$ indicando suficientemente próximo. Consequentemente, $\text{cod } h_1^* = 3$.

É importante observar que das expressões (3.22) e (3.23) seguem novas condições de reconhecimento para h_1^* . São elas

$$k \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad km \neq \varepsilon_2 \varepsilon_4, \quad q_u \neq 0, \quad p_\lambda \neq 0, \quad q_\lambda \neq 0.$$

Do ponto de vista qualitativo, todas as informações sobre h_1^* são as mesmas que obtivemos anteriormente para h_1 no Capítulo 2. A proposição seguinte faz essa comprovação, mostrando que essas duas formas normais são equivalentes.

Proposição 3.2.3 *A forma normal*

$$h_1^* = [\varepsilon_1 u + mv + \varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \varepsilon_5 \lambda]$$

é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a

$$h_1 = [\varepsilon_1 u + \mu v + \varepsilon_2 \lambda, \eta u + \varepsilon_4 v + \varepsilon_5 \lambda]$$

onde $\varepsilon_1 = \text{sinal}(p_u)$, $\varepsilon_2 = \text{sinal}(p_\lambda)$, $\varepsilon_3 = \text{sinal}(q_u)$, $\varepsilon_4 = \text{sinal}(q_v)$, $\varepsilon_5 = \text{sinal}(q_\lambda)$,

$$\mu = \left| \frac{q_\lambda}{q_v p_\lambda} \right| p_v, \quad \eta = \left| \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right| q_u \quad e \quad m = \left| \frac{q_u}{q_v p_u} \right| p_v.$$

Demonstração. Sejam $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$ e $X = [a, b] \in \vec{\mathcal{E}}_{x,y}(Z_2 \oplus Z_2)$. Para mostrar que h_1 é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente a h_1^* fazemos uma mudança de coordenadas $S \cdot h_1^* \circ X$ como no Teorema 3.2.1. Daí, se $[p'', q'']$ é o resultado final desta mudança temos

- $p''_u = \varepsilon_1 a_0^3 s_1^0$,
- $p''_v = \mu a_0 b_0^2 s_1^0$,
- $p''_\lambda = \varepsilon_2 a_0 \Lambda'(0) s_1^0$,
- $q''_u = \eta a_0^2 b_0 s_4^0$,
- $q''_v = \varepsilon_4 b_0^3 s_4^0$,
- $q''_\lambda = \varepsilon_5 b_0 \Lambda'(0) s_4^0$.

Para obtermos a equivalência entre as duas formas normais devem ocorrer

$$|\varepsilon_1| a_0^3 s_1^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_1^0 = \frac{1}{a_0^3},$$

$$|\varepsilon_2| a_0 \Lambda'(0) s_1^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda'(0)}{a_0^2} = 1,$$

$$|\varepsilon_4| b_0^3 s_4^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_4^0 = \frac{1}{b_0^3},$$

$$|\eta| a_0^2 b_0 s_4^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0^2}{b_0^2} = \frac{1}{|\eta|},$$

$$|\varepsilon_5|b_0\Lambda'(0)s_4^0 = 1 \Rightarrow \frac{\Lambda'(0)}{b_0^2} = 1.$$

Substituindo os valores encontrados acima nas expressões $p_u'', p_v'', p_\lambda'', q_u'', q_v'', q_\lambda''$, obtemos a forma normal h_1^* com parâmetro modal m , como queríamos. ■

Observe que a partir do core h_1^c foi possível obter um problema de bifurcação h_1^* que é $Z_2 \oplus Z_2$ -equivalente à forma normal h_1 , dada em (2.25). Ainda a respeito do core h_1^c , as condições de reconhecimento (3.11) nada dizem sobre p_v , podendo ocorrer, eventualmente, $m = 0$. Daí, ao considerarmos esta condição, obtemos do core h_1^c um novo core dado por

$$h_{10}^c = [\varepsilon_1 u, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v].$$

A mesma análise que fizemos para o core h_1^c pode ser feita para h_{10}^c . Assim, de maneira esquemática, juntamos os resultados obtidos a partir de h_{10}^c como seguem.

core	$h_{10}^c = [\varepsilon_1 u, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v]$
condições de reconhecimento	$p_v = 0, p_u \neq 0, q_u \neq 0 \text{ e } q_v \neq 0$
desdobramento do core	$H_{10}^c = [\varepsilon_1 u + \alpha_3 v + \alpha_1, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2]$
discriminante	$\Delta_{H_{10}^c}$
vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_{10}^c})$	$v_{1_{H_{10}^c}}, v_{2_{H_{10}^c}}, v_{3_{H_{10}^c}}$
caminho associado	$\bar{\alpha} = (\varepsilon_2 \lambda, k \lambda, 0); \quad k = \left \frac{p_u}{p_\lambda q_u} \right q_\lambda; \quad \varepsilon_2 = \text{sign}(p_\lambda)$
forma normal	$\bar{\alpha}^* H_{10}^c = h_{10}^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + k \lambda]$

termos de desdobramento $[0, 1], [0, \lambda]$ e $[v, 0]$

novas cond. reconhecimento $k \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3, p_\lambda \neq 0, q_\lambda \neq 0$

codimensão $\text{cod } h_{10}^* = 3$

desdobramento miniversal $H_{10}^* = [\varepsilon_1 u + \alpha_3 v + \varepsilon_2 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \tilde{k} \lambda + \alpha_1]$

com

$\varepsilon_1 = \text{sinal}(p_u), \varepsilon_2 = \text{sinal}(p_\lambda), \varepsilon_3 = \text{sinal}(q_u)$ e $\varepsilon_4 = \text{sinal}(q_v)$,

$$\Delta_{H_{10}^c} = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3) (\varepsilon_3 \alpha_2 - \varepsilon_1 \alpha_1),$$

$$v_{1_{H_{10}^c}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_{2_{H_{10}^c}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_1 \alpha_1^2 \\ 0 \\ -\varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_3 + \varepsilon_3 \alpha_2 \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$v_{3_{H_{10}^c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 - \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Além de h_1^c e h_{10}^c , outras formas normais para os cores podem ser obtidas degenerando-se as condições (3.11). São elas,

se $p_u q_v - p_v q_u = 0$, temos $h_2^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 u^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 u + \varepsilon_4 v];$

se $p_u = 0$, temos $h_5^c = [\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v]$;

se $q_v = 0$, temos $h_6^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v^2]$;

se $q_u = 0$, temos $h_9^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \varepsilon_4 v]$.

Os ε_i 's que aparecem acima, são dados na tabela do próximo teorema.

A classificação dos problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes via formulação por caminhos será feita a partir dos cores citados acima. De fato, após obtidos esses cores, encontramos seus respectivos desdobramentos e, em seguida, definimos um caminho de tal forma que o pull-back do desdobramento pelo caminho nos dará outras formas normais para os problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. Completamos esse estudo encontrando os termos de desdobramento dessas formas normais através dos espaços tangentes aos caminhos. Faremos a classificação até codimensão 3.

Teorema 3.2.2 (*Classificação de bifurcações $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes via formulação por caminhos*) Se $g = [p, q] \in \tilde{\mathcal{E}}_{x,y,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ satisfizer as condições de reconhecimento da tabela a seguir para as formas normais h_j^* , com $j = 2, 5, 6$ e 9 , então g é equivalente a h_j^* .



Formas Normais

$$\begin{aligned}h_2^* &= [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 u^2 + \varepsilon_3 \lambda, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 u + \varepsilon_4 v + \kappa \lambda] \\h_5^* &= [\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \kappa \lambda] \\h_6^* &= [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v^2 + \kappa \lambda] \\h_9^* &= [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_3 \lambda, \varepsilon_4 v + \kappa \lambda]\end{aligned}$$

Forma Normal	Condições Reconhecimento	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	Parâmetro Modal	Termos Desdobramento
h_2^*	$p_u q_v - p_v q_u = 0$ $p_u, q_v, p_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_2,$ $p_v q_\lambda - p_\lambda q_v \neq 0$	p_u	p_v	p_λ	q_v	$\rho_2 q_v$	$\kappa = \left \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right q_\lambda$	$[u, 0]$ $[0, \lambda]$ $[0, 1]$
h_5^*	$p_u = 0$ $p_\lambda, q_v, q_\lambda, p_{uu}, p_v, q_u$ $p_v q_\lambda - p_\lambda q_v \neq 0$	p_{uu}	p_v	q_u	q_v	p_λ	$\kappa = \left \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right q_\lambda$	$[0, 1]$ $[u, 0]$ $[0, \lambda]$
h_6^*	$q_v = 0$ $p_u, p_\lambda, q_\lambda, p_v, q_u, q_{vv},$ $p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0$	p_u	p_v	q_u	q_{vv}	p_λ	$\kappa = \left \frac{p_u}{q_u p_\lambda} \right q_\lambda$	$[0, v]$ $[0, \lambda]$ $[0, 1]$
h_9^*	$q_u = 0$ $p_u, p_\lambda, q_\lambda, p_v, q_v,$ $p_v q_\lambda - p_\lambda q_v \neq 0$	p_u	p_v	p_λ	q_v		$\kappa = \left \frac{p_v}{q_v p_\lambda} \right q_\lambda$	$[0, u]$ $[0, \lambda]$ $[0, 1]$

$$\rho_2 = q_{uv} p_u p_v^2 - q_{vv} p_u^2 p_v - q_{uu} p_v^3 - p_{uv} q_v p_u p_v + p_{vv} q_v p_u^2 + p_{uu} q_v p_v^2$$

Demonstração. Faremos a demonstração para h_2^* de modo mais detalhado. Para as demais formas normais omitiremos alguns cálculos e apresentaremos os resultados apenas de forma esquemática.

De fato, começamos fazendo $p_u q_v - p_v q_u = 0$ em (3.11). Isto nos fornece o core

$$h_2^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 u^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 u + \varepsilon_4 v] \quad (3.24)$$

onde $\varepsilon_1 = \text{ sinal } (p_u)$, $\varepsilon_2 = \text{ sinal } (p_v)$, $\varepsilon_4 = \text{ sinal } (q_v)$ e $\varepsilon_5 = \text{ sinal } (\rho_2 q_v)$ com

$$\rho_2 = q_{uv} p_u p_v^2 - q_{vv} p_u^2 p_v - q_{uu} p_v^3 - p_{uv} p_v^3 - p_{uv} q_v p_u p_v + p_{vv} q_v p_u^2 + p_{uu} q_v p_v^2.$$

As condições de reconhecimento são: $p_u \neq 0, q_v \neq 0, \rho_2 \neq 0$.

O desdobramento H_2^c do core h_2^c é dado por

$$H_2^c = [(\varepsilon_1 + \alpha_3)u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 u^2 + \alpha_1, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2].$$

A expressão do discriminante $\Delta_{H_2^c}$ é a seguinte

$$\begin{aligned} \Delta_{H_2^c} = & \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_4 \alpha_1 - \varepsilon_2 \alpha_2) (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3^2 + 3\varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3^2 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 - \\ & - \alpha_1 \alpha_3^2 - 2\varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 - \varepsilon_5 \alpha_2^2 \alpha_3^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_5 \alpha_2^2 \alpha_3 - \varepsilon_5 \alpha_2^2 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4\varepsilon_5 \alpha_1^2 - \\ & - 4\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_1 \alpha_2^2) (\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_3^2 - 4\varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 + 4\alpha_2). \end{aligned}$$

Os vetores do $\text{Derlog}^*(\Delta_{H_2^c})$, representados de forma que as linhas do vetor coluna indiquem os coeficientes dos termos de desdobramento $[1, 0], [0, 1]$ e $[u, 0]$, respectivamente, são dados, através da expressão (3.9), por

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1(\varepsilon_4 \alpha_1 - \varepsilon_2 \alpha_2) + A\alpha_3 \\ 2\alpha_2(\varepsilon_4 \alpha_1 - \varepsilon_2 \alpha_2) + B\alpha_3 \\ 2\varepsilon_1(\varepsilon_4 \alpha_1 - \varepsilon_2 \alpha_2) + C\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 \alpha_1 (\varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 - \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 - 2\varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2\varepsilon_4 \alpha_2^2) + D\alpha_3 \\ 2\varepsilon_1 \alpha_2 (\varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 - \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 - 2\varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2\varepsilon_4 \alpha_2^2) + E\alpha_3 \\ -6\varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 + 4\varepsilon_4 \alpha_1^2 + 2\varepsilon_4 \alpha_2^2 + F\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 \alpha_1 (3\alpha_2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 - 4\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2^2) + G\alpha_3 \\ 2\varepsilon_1 \alpha_2 (3\alpha_2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 - 4\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2^2) + H\alpha_3 \\ -2\varepsilon_2 \varepsilon_5 (-\varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 - 2\varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2\varepsilon_4 \alpha_2^2) + I\alpha_3 \end{pmatrix},$$

onde

$$A = \varepsilon_1 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2$$

$$B = \varepsilon_1 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2 \alpha_3 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_2^2$$

$$C = -3\varepsilon_2 \alpha_2 + 4\varepsilon_4 \alpha_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_2 \alpha_3$$

$$D = -5\varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_2 + 4\varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1^2 - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4\varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2^2$$

$$E = -5\varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2^2 + 4\varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_2 - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2^2 \alpha_3 + 4\varepsilon_4 \alpha_2^3$$

$$F = -4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 \alpha_3 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_5 \alpha_2 \alpha_3^2 + 2\varepsilon_4 \alpha_2^2 \alpha_3$$

$$G = -\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_1 \alpha_3 + 8\alpha_1 \alpha_2$$

$$H = -\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2 \alpha_3 + 8\alpha_2^2$$

$$I = -4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 + 5\varepsilon_1 \alpha_2 + 3\alpha_2 \alpha_3 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \alpha_2^2.$$

Tomando o caminho $\bar{\alpha} = (\varepsilon_3 \lambda, k \lambda, 0)$ com $k = \left| \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right| q_\lambda$ e $\varepsilon_3 = \text{sinal}(p_\lambda)$ temos que

$$\bar{\alpha}^* H_2^c = h_2^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 u^2 + \varepsilon_3 \lambda, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 u + \varepsilon_4 v + k \lambda].$$

O espaço tangente $TK_{\Delta_{H_2^c}}(\bar{\alpha})$ é, de acordo com (3.10), gerado por quatro elementos. Um gerador corresponde ao vetor derivada com respeito a λ do caminho $\bar{\alpha}$ e os outros três são dados por $\bar{\alpha}^* \text{Derlog}(\Delta_{H_2^c})$, ou seja, devemos substituir $\alpha_1 = \varepsilon_3 \lambda$, $\alpha_2 = k \lambda$ e $\alpha_3 = 0$ nos vetores do derlog calculados acima. Assim, ficamos com

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\varepsilon_3(\varepsilon_4 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 k) \lambda^2 \\ 2k(\varepsilon_4 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 k) \lambda^2 \\ 2\varepsilon_1(\varepsilon_4 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 k) \lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 \varepsilon_3(\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_5 k) \lambda^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3(-2\varepsilon_2 \varepsilon_3 k + 2\varepsilon_4 k^2) \lambda^3 \\ 2\varepsilon_1 k(\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_5 k) \lambda^2 + 2\varepsilon_1 k(-2\varepsilon_2 \varepsilon_3 k + 2\varepsilon_4 k^2) \lambda^3 \\ (-6\varepsilon_2 \varepsilon_3 k + 4\varepsilon_4 + 2\varepsilon_4 k^2) \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 \varepsilon_3(3k - 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_3) \lambda^2 - 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_3 k^2 \lambda^3 \\ 2\varepsilon_1 k(3k - 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_3) \lambda^2 - 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 k^3 \lambda^3 \\ -2\varepsilon_2 \varepsilon_5(-\varepsilon_2 \varepsilon_5 k + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_3) \lambda - 2\varepsilon_2 \varepsilon_5(-2\varepsilon_2 \varepsilon_3 k + 2\varepsilon_4 k^2) \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Dos vetores acima, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\lambda^3 \\ \mathcal{M}_\lambda^3 \\ \mathcal{M}_\lambda^2 \end{pmatrix} \subset T\mathcal{K}_{\Delta_{H_2^*}}(\bar{\alpha}),$$

onde $\mathcal{M}_\lambda$ é o ideal maximal de $\mathcal{E}_\lambda$. Deste modo, os cálculos são feitos módulo os termos em $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\lambda^3 \\ \mathcal{M}_\lambda^3 \\ \mathcal{M}_\lambda^2 \end{pmatrix}$. Daí, ficamos com

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\varepsilon_3(\varepsilon_4\varepsilon_3 - \varepsilon_2k)\lambda^2 \\ 2k(\varepsilon_4\varepsilon_3 - \varepsilon_2k)\lambda^2 \\ 2\varepsilon_1(\varepsilon_4\varepsilon_3 - \varepsilon_2k)\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_5k)\lambda^2 \\ 2\varepsilon_1k(\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_5k)\lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1\varepsilon_3(3k - 2\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_3)\lambda^2 \\ 2\varepsilon_1k(3k - 2\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_3)\lambda^2 \\ -2\varepsilon_2\varepsilon_5(-\varepsilon_2\varepsilon_5k + \varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_3)\lambda \end{pmatrix}.$$

Ao efetuar cálculos para obter geradores para o espaço tangente e, consequentemente, para o espaço normal ao caminho $\bar{\alpha}$, concluímos que se

$$k \neq \varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_3 \quad \text{e} \quad k \neq 0,$$

ou seja, se tivermos novas condições de reconhecimento para h_2^* dadas por

$$k \neq \varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_3, \quad p_v \neq 0, \quad p_\lambda \neq 0, \quad q_\lambda \neq 0,$$

os termos de desdobramento de h_2^* , formado pelos geradores do espaço normal de $\bar{\alpha}$, são dados por

$$[0, 1], \quad [0, \lambda] \quad \text{e} \quad [u, 0].$$

Portanto, $\text{cod } h_2^* = 3$ e o desdobramento miniversal de h_2^* é

$$H_2^* = [(\varepsilon_1 + \alpha_3)u + \varepsilon_2v + \varepsilon_5u^2 + \varepsilon_3\lambda, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4u + \varepsilon_4v + \tilde{k}\lambda + \alpha_1].$$

A partir de agora, para as demais formas normais daremos as informações de maneira esquemática.

$$\text{core} \quad h_5^c = [\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v]$$

$$\text{condições de reconhecimento} \quad p_u = 0, p_v \neq 0, q_v \neq 0, q_u \neq 0 \quad \text{e} \quad p_{uu} \neq 0$$

$$\text{desdobramento do core} \quad H_5^c = [\varepsilon_1 u^2 + \alpha_3 u + \varepsilon_2 v + \alpha_1, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2]$$

$$\text{discriminante} \quad \Delta_{H_5^c}$$

$$\text{vetores do Derlog}^*(\Delta_{H_5^c}) \quad v_{1_{H_5^c}}, v_{2_{H_5^c}}, v_{3_{H_5^c}}$$

$$\text{caminho associado} \quad \bar{\alpha} = (\varepsilon_5 \lambda, k \lambda, 0); \quad k = \left| \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right| q_\lambda; \quad \varepsilon_5 = \text{sinal}(p_\lambda)$$

$$\text{forma normal} \quad \bar{\alpha}^* H_5^c = h_5^* = [\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + k \lambda]$$

$$\text{termos de desdobramento} \quad [0, 1], [0, \lambda] \quad \text{e} \quad [u, 0]$$

$$\text{outra cond. reconhecimento} \quad k \neq \varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5, \quad p_\lambda \neq 0, \quad q_\lambda \neq 0$$

$$\text{codimensão} \quad \text{cod } h_5^* = 3$$

$$\text{desdobramento miniversal} \quad H_5^* = [\varepsilon_1 u^2 + \alpha_3 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v + \tilde{k} \lambda + \alpha_1]$$

com

$$\varepsilon_1 = \text{sinal}(p_{uu}), \quad \varepsilon_2 = \text{sinal}(p_v), \quad \varepsilon_3 = \text{sinal}(q_u) \quad \text{e} \quad \varepsilon_4 = \text{sinal}(q_v),$$

$$\Delta_{H_5^c} = \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_2 \alpha_1 - \varepsilon_4 \alpha_2) (\varepsilon_3 \alpha_2 \alpha_3^3 - \alpha_1 \alpha_3^2 - \varepsilon_1 \alpha_2^2 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_3 \varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \varepsilon_1 \alpha_1^2 + 4 \alpha_1 \alpha_2^2) (-\varepsilon_1 - \varepsilon_1 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 + 2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_1 \alpha_3 + 4 \alpha_1),$$

$$v_{1_{H_5^c}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1\alpha_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_3^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\varepsilon_4\alpha_1^2 - 2\varepsilon_2\alpha_1\alpha_2 \\ -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_2^2\alpha_3 + 2\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2 \\ -2\varepsilon_2\varepsilon_3\alpha_1 + 4\varepsilon_4\alpha_1\alpha_3 - \varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_2\alpha_3^2 - \varepsilon_2\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$v_{2_{H_5^c}} = \begin{pmatrix} -4\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_1^2\alpha_2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1^2 + A_1\alpha_3 \\ -4\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2^2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2 + A_2\alpha_3 \\ 4\varepsilon_4\alpha_1^2 - 2\varepsilon_2\alpha_1\alpha_2 + A_3\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$v_{3_{H_5^c}} = \begin{pmatrix} -4\varepsilon_3\alpha_1^2 - \varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1\alpha_3^2 + \varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_3 + 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 8\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2^2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2 \\ -4\varepsilon_3\alpha_1\alpha_2 - \varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3^2 + \varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3 + 8\alpha_2^2\alpha_3 - 8\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_2^3 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_2^2 \\ -4\varepsilon_3\alpha_1\alpha_3 + 2\varepsilon_2\varepsilon_4\alpha_1 + 3\alpha_2\alpha_3^2 + 4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2 - 4\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_2^2\alpha_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2 - 3\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2^2 + 4\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1^2$$

$$A_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_2^2 - 3\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_2^2\alpha_3 + 4\varepsilon_4\alpha_2^3 + 4\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_2$$

$$A_3 = -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_1\alpha_3 - 4\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_1\alpha_2 + \varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3 - \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1\alpha_2\alpha_3^2 + 2\varepsilon_4\alpha_2^2\alpha_3.$$

$$\text{core} \quad h_6^c = [\varepsilon_1u + \varepsilon_2v, \varepsilon_3u + \varepsilon_4v^2]$$

$$\text{condições de reconhecimento} \quad q_v = 0, p_u \neq 0, q_u \neq 0, p_v \neq 0 \text{ e } q_{vv} \neq 0$$

$$\text{desdobramento do core} \quad H_6^c = [\varepsilon_1u + \varepsilon_2v + \alpha_1, \varepsilon_3u + \alpha_3v + \varepsilon_4v^2 + \alpha_2]$$

$$\text{discriminante} \quad \Delta_{H_6^c}$$

$$\text{vetores do Derlog}^*(\Delta_{H_6^c}) \quad v_{1_{H_6^c}}, v_{2_{H_6^c}}, v_{3_{H_6^c}}$$

caminho associado	$\bar{\alpha} = (\varepsilon_5 \lambda, k \lambda, 0); \quad k = \left \frac{p_u}{p_\lambda q_u} \right q_\lambda; \quad \varepsilon_5 = \text{sign}(p_\lambda)$
forma normal	$\bar{\alpha}^* H_6^c = h_6^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v^2 + k \lambda]$
termos de desdobramento	$[0, 1], [0, \lambda] \quad \text{e} \quad [0, v]$
novas cond. reconhecimento	$k \neq \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_5, \quad p_\lambda \neq 0, \quad q_\lambda \neq 0$
codimensão	$\text{cod } h_6^* = 3$
desdobramento miniversal	$H_6^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_5 \lambda, \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 v^2 + \alpha_3 v + \tilde{k} \lambda + \alpha_1]$

com

$$\varepsilon_1 = \text{sign}(p_u), \varepsilon_2 = \text{sign}(p_v), \varepsilon_3 = \text{sign}(q_u) \text{ e } \varepsilon_4 = \text{sign}(q_{vv}),$$

$$\Delta_{H_6^c} = \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_1 \alpha_1 - \varepsilon_3 \alpha_2) (\varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3^2 - \varepsilon_4 \alpha_1^2 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \varepsilon_4 \alpha_2^2 + 4 \alpha_1^2 \alpha_2) (\alpha_3^2 - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \alpha_3 + 1 - 4 \varepsilon_4 \alpha_2 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1),$$

$$v_{1_{H_6^c}} = \begin{pmatrix} 2 \varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3 - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1^2 \alpha_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3^2 \\ 4 \varepsilon_1 \alpha_2^2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3 - 2 \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3^2 \\ 4 \varepsilon_1 \alpha_2 \alpha_3 - 2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \alpha_2 - \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_3^2 \end{pmatrix},$$

$$v_{2_{H_6^c}} = \begin{pmatrix} -4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1^2 \alpha_2 - 2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 + B_1 \alpha_3 \\ -4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2^2 - 2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_2^2 + B_2 \alpha_3 \\ 4 \varepsilon_1 \alpha_2^2 - 2 \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 + B_3 \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$v_{3_{H_6^c}} = \begin{pmatrix} -2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \alpha_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3 + 8 \alpha_1^2 \alpha_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 - 8 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1^3 \\ -2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3 + 8 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_2 \alpha_2^2 - 8 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \alpha_2 + 3 \alpha_1 \alpha_3^2 - 4 \varepsilon_2 \alpha_2 \alpha_3 - 4 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1^2 \alpha_3 + 4 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1^2 + 4 \varepsilon_1 \alpha_1^3 - 3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1^2 \alpha_3 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 \\
B_2 &= \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 + 4 \varepsilon_1 \alpha_1^2 \alpha_2 - 3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_2^2 \\
B_3 &= -4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3 + 2 \varepsilon_1 \alpha_1^2 \alpha_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \alpha_1 \alpha_3^2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \alpha_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3.
\end{aligned}$$

$$\text{core} \quad h_9^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \varepsilon_4 v]$$

$$\text{condições de reconhecimento} \quad q_u = 0, p_u \neq 0, q_v \neq 0 \text{ e } p_v \neq 0$$

$$\text{desdobramento do core} \quad H_9^c = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \alpha_1, \alpha_3 u + \varepsilon_4 v + \alpha_2]$$

$$\text{discriminante} \quad \Delta_{H_9^c}$$

$$\text{vetores do Derlog}^*(\Delta_{H_9^c}) \quad v_{1_{H_9^c}}, v_{2_{H_9^c}}, v_{3_{H_9^c}}$$

$$\text{caminho associado} \quad \bar{\alpha} = (\varepsilon_3 \lambda, k \lambda, 0); \quad k = \left| \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right| q_\lambda; \quad \varepsilon_3 = \text{sinal}(p_\lambda)$$

$$\text{forma normal} \quad \bar{\alpha}^* H_9^c = h_9^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_3 \lambda, \varepsilon_4 v + k \lambda]$$

$$\text{termos de desdobramento} \quad [0, 1], \quad [0, \lambda] \quad \text{e} \quad [0, u]$$

$$\text{novas cond. reconhecimento} \quad k \neq \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4, \quad p_\lambda \neq 0, \quad q_\lambda \neq 0$$

$$\text{codimensão} \quad \text{cod } h_9^* = 3$$

$$\text{desdobramento miniversal} \quad H_9^* = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \varepsilon_3 \lambda, \alpha_3 u + \varepsilon_4 v + \tilde{k} \lambda + \alpha_1]$$

com

$$\varepsilon_1 = \text{sinal}(p_u), \varepsilon_2 = \text{sinal}(p_v), \varepsilon_3 = \text{sinal}(p_\lambda) \text{ e } \varepsilon_4 = \text{sinal}(q_v),$$

$$\Delta_{H_9^c} = \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_4 \alpha_2 - \varepsilon_2 \alpha_1) (\alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \alpha_2),$$

$$v_{1_{H_9^c}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_{2_{H_9^c}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$v_{3_{H_9^c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_4 \alpha_2^2 \\ \varepsilon_2 \alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_4 \alpha_2 \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

■

Encerramos o capítulo comparando os Teoremas de Classificação 2.8.3 (via técnicas clássicas segundo Golubitsky e Schaeffer) e 3.2.2 (via Formulação por Caminhos). As formas normais do Teorema 2.8.3 podem ser obtidas a partir da classificação que estamos propondo com a formulação por caminhos. De fato, pela Proposição 3.2.3 $h_1 \sim h_1^*$. Do mesmo modo, segue que

$$h_2 \sim h_2^*,$$

$$h_5 \sim h_5^*,$$

$$h_6 \sim h_6^*.$$

Para obtermos as outras formas normais do Teorema 2.8.3 fazemos

$$h_3 \sim H_1^c \circ (\varepsilon_6 \lambda, \varepsilon_7 \lambda + \varepsilon_8 \lambda^2, 0),$$

$$h_4 \sim H_1^c \circ (\varepsilon_6 \lambda, \varepsilon_7 \lambda + \varepsilon_9 \lambda^2, 0),$$

$$h_7 \sim H_1^c \circ (\varepsilon_{11} \lambda^2, \varepsilon_7 \lambda, 0),$$

$$h_8 \sim H_1^c \circ (\varepsilon_6 \lambda, \varepsilon_{10} \lambda^2, 0),$$

com $\varepsilon_6 = \text{senal}(p_\lambda)$, $\varepsilon_7 = \text{senal}(q_\lambda)$, $\varepsilon_8 = \text{senal}(\rho_3 p_\lambda)$, $\varepsilon_9 = \text{senal}(\rho_4 p_\lambda)$, $\varepsilon_{10} = \text{senal}(q_{\lambda\lambda})$, $\varepsilon_{11} = \text{senal}(p_{\lambda\lambda})$ e ρ_3, ρ_4 são dados como na tabela da página 40.

Além disso, podemos tirar outras conclusões a respeito das formas normais h_i 's. De fato, se em h_1 tivermos, eventualmente, $\mu = 0$ ou $\eta = 0$, segue que

$$h_1 \sim h_9^*, \quad \text{se } \eta = 0$$

e

$$h_1 \sim h_{10}^*, \quad \text{se } \mu = 0.$$

Ou seja, concluímos que a forma normal h_1 apresentada em (2.25) pode ser obtida pela formulação por caminhos, a partir de três cores distintos: h_1^c, h_9^c e h_{10}^c . A mesma análise podemos fazer para as formas normais h_3, h_4, h_7 , e h_8 se, eventualmente, os parâmetros modais forem nulos. Em outras palavras, podemos associar alguns caminhos aos desdobramentos dos cores de forma que

$$\text{se } \mu = 0, \quad h_3 \sim H_{10}^c \circ \bar{\alpha}_1;$$

$$\text{se } \eta = 0, \quad h_4 \sim H_9^c \circ \bar{\alpha}_2;$$

$$\text{se } \eta = 0, \quad h_7 \sim H_9^c \circ \bar{\alpha}_3;$$

$$\text{se } \mu = 0, \quad h_8 \sim H_{10}^c \circ \bar{\alpha}_4,$$

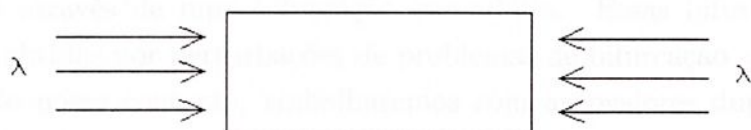
com $\bar{\alpha}_i$ caminhos convenientes e η, μ dados de acordo com a tabela de classificação da página 40.



Capítulo 4

Aplicação Física

Estamos interessados em estudar a envergadura de uma placa retangular elástica, com determinadas condições de fronteira, quando aplicamos uma força de compressão λ uniformemente distribuída nas extremidades dos lados verticais conforme a figura seguinte.



Quando λ é suficientemente grande, a placa começa a deformar-se apresentando várias envergaduras menores em forma de ondas, ao longo de sua superfície. Note que este tipo de envergadura admite um comportamento diferente daquele que ocorre com um bastão, por exemplo. No bastão, a envergadura causada ao aplicarmos uma força externa em suas extremidades tem a forma de um arco simples. A razão deste comportamento diferente é que vamos supor a placa apoiada ao longo de seus lados, o que faz com que o deslocamento se anule na fronteira. Além de comportamentos diferentes, podemos perceber também que a envergadura de uma placa requer um

estudo mais complexo do que a de um bastão.

Para fins de conveniência, em nosso tratamento teórico escolhemos uma escala de comprimento de tal forma que a placa tenha largura π e comprimento $l\pi$. Então, a placa não deformada é parametrizada por

$$\Omega = \{(z_1, z_2) : 0 < z_1 < l\pi, 0 < z_2 < \pi\}, \quad (4.1)$$

onde $l = \frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$ é o que chamaremos de *razão da placa*. Iremos supor $l > 1$.

A placa por ser elástica, tem um valor crítico da força de envergadura λ_c para o qual, além desse valor, ela começa a sofrer mudanças.

Quando a força λ excede o valor crítico λ_c a placa deforma-se apresentando uma configuração com um certo número de envergaduras k . Em certos experimentos, quando a força λ aumenta muito além do valor crítico da força de envergadura, a placa muda para uma nova configuração com um número de envergaduras aumentando de uma unidade, ou seja, passando para $k + 1$. Este fenômeno é conhecido como *mode jumping*, foi observado experimentalmente por Stein em [19] e será o foco do nosso estudo.

Vários autores, entre eles Bauer em [21], sugerem que o *mode jumping* pode ser explicado através de uma bifurcação secundária. Essas bifurcações são frequentemente obtidas por perturbações de problemas de bifurcação com autovalores múltiplos. No nosso contexto, trabalharemos com autovalores duplos. Assim, a estratégia é desdobrar a bifurcação perto desse autovalor duplo e ver como as bifurcações secundárias ocorrem. Daí, o *mode jumping* ocorre quando o ramo de solução primária perde estabilidade através de uma bifurcação secundária. Entretanto, Golubitsky e Schaeffer em [23], mostraram que a presença de autovalores duplos, no caso da placa, não é suficiente para que o problema de bifurcação exiba um *mode jumping*. De fato, eles mostraram que combinar propriedades de autovalores duplos com certas condições de fronteira do problema é essencial para modelar este fenômeno. É neste contexto que torna-se possível relacionar as técnicas de teoria de Singularidades aplicadas à teoria de Bifurcação, desenvolvidas nos capítulos anteriores, com o problema físico proposto, sendo a teoria que vamos apresentar uma forma alternativa da resolução de um problema que, a princípio, foi resolvido por meio de equações diferenciais parciais.



Sendo assim, nosso objetivo neste capítulo é apresentar as equações que modelam matematicamente o comportamento da placa, conhecidas como equações de von Kármán; analisar algumas condições de fronteira para o problema; usar o processo de Liapunov-Schmidt para reduzirmos nosso problema original para uma equação de bifurcação que será equivalente a forma normal h_1 , dada em (2.41). Usando as técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores, teremos todas as informações que desejamos sobre o problema de bifurcação h_1 . Consequentemente, estudar a ocorrência do mode jumping é qualitativamente equivalente a analisar o que acontece com os diagramas de bifurcação perturbados de h_1 . Nesta análise, os parâmetros modais nos darão informações precisas a respeito da ocorrência deste fenômeno físico.

Outra motivação para o estudo das equações que regem esta aplicação física é que este fenômeno foi feito de forma experimental por Stein em [19]. Em seu experimento, Stein usou uma placa de razão $l = 5.38$ e o modelo inicial tinha 5 envergaduras (isto é, foi descrito para $k = 5$). Essa configuração persistiu até aproximadamente 1,7 vezes a força de envergadura crítica. Neste ponto, a placa mudou de repente e violentamente para uma nova configuração com 6 envergaduras. Outros aumentos de λ conduziram a mudanças para 7 envergaduras, 8 e finalmente um eventual colapso da placa. Na análise que faremos a seguir, estaremos interessados apenas em estudar como se deu a mudança de $k = 5$ para $k = 6$. Isto porque para as mudanças de configuração seguintes, a placa começa se deformar, perdendo sua elasticidade.

4.1 Formulação Matemática do Problema

As equações matemáticas que modelam este problema físico são as chamadas equações de von Kármán. Estas equações envolvem duas funções desconhecidas: a função de deslocamento $w(z_1, z_2)$ e a função stress de Airy $\phi(z_1, z_2)$. No domínio Ω as equações são dadas por

$$\Delta^2 w = [\phi, w] - \lambda w_{z_1 z_1}, \quad (4.2)$$

$$\Delta^2 \phi = -\frac{1}{2}[w, w] \quad (4.3)$$



onde λ é a força externa, Δ^2 é o operador biarmônico em x e y dado por derivadas de quarta ordem e o colchete é um operador bilinear definido por

$$[u, v] = u_{z_1 z_1} v_{z_2 z_2} - 2u_{z_1 z_2} v_{z_1 z_2} + u_{z_2 z_2} v_{z_1 z_1}. \quad (4.4)$$

A justificativa física das equações de von Kármán se dá pela Teoria da Elasticidade e Mecânica dos Meios Contínuos, entre outros. Em um breve comentário a seguir, vamos tentar interpretar um pouco a Física que aparece no problema.

Considere um corpo $\mathcal{B}$. Uma deformação ou configuração de $\mathcal{B}$ é uma aplicação $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciável, invertível que preserva orientação. Os pontos de $\mathcal{B}$ são chamados pontos materiais e serão denotados por X e suas imagens por ψ são chamados de pontos espaciais e serão denotados por x . Um movimento de $\mathcal{B}$ é uma família de deformações parametrizadas pelo tempo denotada por $x = \psi(X, t) = \psi_t(X)$. A partir do conceito de movimento, podemos de maneira habitual, definir velocidade e aceleração. O passo seguinte é introduzir o conceito de força. Na mecânica existem basicamente dois tipos de forças: força de contato e força a distância. A primeira, referida à unidade de área, age na fronteira $\partial\mathcal{B}$. A segunda, oriunda de campos potenciais, como a gravidade por exemplo, refere-se à unidade de massa ou de volume do corpo. Sejam τ e b os campos de forças de contato e a distância, respectivamente, sobre um corpo durante um movimento ψ . Então, dada uma região qualquer $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, geralmente, existem forças internas de stress atuando em $\mathcal{P}$. Seja $\mathbf{t}(x, t, N)$ a força que representa esse stress em $\mathcal{P}$. Assim, $\mathbf{t}$ é a força por unidade de área deformada produzida em $\mathcal{P}$ pelo material exterior a $\mathcal{P}$. Note a dependência de $\mathbf{t}$ em N ; a força de contato sobre um ponto do corpo depende da normal à superfície sobre a qual esta força é exercida. A força do vento sobre uma folha, por exemplo, depende da direção da folha em relação ao vento. Como nosso objetivo é descrever as forças que atuam na placa Ω , considerando uma subregião $\mathcal{O} \subset \Omega$, o stress interno em $\mathcal{O}$ será descrito por $\mathbf{t}$.

Assim, dada uma parte $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, existe um campo vetorial $\mathbf{t}$ tal que a força total de contato $f_c(\mathcal{P}, \psi)$ no movimento ψ é dada por

$$f_c(\mathcal{P}, \psi) = \int_{\partial\psi(\mathcal{P}, t)} \mathbf{t}(y, N, t) \, dA \quad (4.5)$$

onde $\partial\psi(\mathcal{P}, t)$ é a fronteira de $\psi(\mathcal{P}, t)$ e dA é um elemento de área.

A segunda lei de Newton generalizada para meios contínuos afirma que a força total sobre uma parte do corpo $\mathcal{B}$ é igual a derivada do momento linear em relação ao tempo e que o momento total das forças é igual a derivada temporal do momento angular.

Essa lei fornece duas expressões que são as chamadas equações do balanço de forças e momento. Elas podem ser encontradas em [26] e, por meio delas, provamos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 (*Teorema de Cauchy*) *Seja $\mathbf{t}$ a força descrita nas condições acima atuando em $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. Então,*

(a) *$\mathbf{t}$ é uma função linear que depende de N*

$$\mathbf{t}(x, t, N) = \sigma(x, t)N$$

(b) *σ é simétrico,*

onde N é o vetor normal com relação a $\mathcal{P}$.

Demonstração. Ver [26]. Observamos apenas que a existência do tensor de stress σ é consequência do balanço de forças e o fato de σ ser simétrico é devido ao balanço do momento angular. ■

Assim, a força de contato (4.5) pode ser reescrita em termos do tensor de stress por

$$f_c(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\psi(\mathcal{P}, t)} \sigma(x, t)N \, dA. \quad (4.6)$$

Daí, pelo teorema da divergência, temos que

$$\int_{\partial\psi(\mathcal{P}, t)} \sigma(x, t)N \, dA = \int_{\psi(\mathcal{P}, t)} \operatorname{div} \sigma \, dx.$$

Com base nesses breves comentários da teoria de elasticidade desenvolvidos acima, temos que em nosso problema da placa podemos pensar

$$\mathcal{B} = \{(z_1, z_2, z_3) : 0 < z_1 < l\pi, 0 < z_2 < \pi, -\delta < z_3 < \delta\}$$

e

$$\psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3) + u(z_1, z_2, z_3),$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é uma função deslocamento.

Considerando uma região isolada $\mathcal{O} \subset \Omega \subset \mathcal{B}$, temos que a i -ésima coordenada da força exercida em $\mathcal{O}$ pelo material exterior a $\mathcal{O}$ é, de acordo com (4.6), dada por

$$F_i = \sum_{j=1}^2 \int_{\partial\mathcal{O}} \sigma_{ij} N_j \, dA \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

onde N_j é um vetor normal exterior.

Note que o tensor aparece como ferramenta matemática para descrever que a componente da força em uma direção depende também da outra direção.

Para encontrarmos as equações de equilíbrio do conjunto de forças em cada subregião, aplicamos o teorema da divergência em (4.7) o que resulta em

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (4.8)$$

As equações de von Kármán (4.2) e (4.3) podem ser deduzidas de (4.8) baseadas em duas aproximações as quais estão entrelaçadas de modo sutil. Primeiramente é suposto que a placa é muito fina, isto é, δ é desprezível e que os deslocamentos que ocorrem são pequenos e predominantemente na z_3 -direção (u_3). Assim, a função deslocamento w que aparece nas equações de von Kármán é dada por $w = u_3$.

Pode-se, também, mostrar que

$$\sigma_{11} = \phi_{z_2 z_2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\phi_{z_1 z_2}, \quad \sigma_{22} = \phi_{z_1 z_1},$$

onde ϕ é a função stress de Airy.

A descrição mais detalhada das equações de von Kármán podem ser encontradas em [20] e [23].

As soluções das equações de von Kármán são consideradas como uma aproximação razoável para as posições de equilíbrio da placa.

Ainda a respeito das equações de von Kármán, observe que $\Delta^2 \phi = -\frac{1}{2}[w, w]$ diz que se certas derivadas de segunda ordem de w são não nulas, isto permite o



surgimento de stress na placa. Do mesmo modo, $\Delta^2 w = [\phi, w] - \lambda w_{z_1 z_1}$ descreve o equilíbrio do deslocamento: $\Delta^2 w$, uma combinação de derivadas de quarta ordem, é não nula em resposta ao stress, seja ele interno transmitido através da ϕ ou externo transmitido por λ .

A função stress de Airy que aparece em nosso contexto é típica de problemas da Física-Matemática. Podem ser encontradas, por exemplo, na Mecânica Quântica relacionada à Aproximação WKB para a equação de Schrödinger.

Podemos associar às equações de von Kármán condições de fronteira que descrevem corretamente o estado físico da placa. Para o deslocamento w vamos considerar, convenientemente, os casos

- a) $I(w)$: simplesmente apoiada em toda fronteira, ou seja,

$$w = \Delta w = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

e

- b) $II(w)$: simplesmente apoiada nas fronteiras horizontais e fixada nas verticais, ou seja,

$$w = \Delta w = 0 \text{ em } 0 < z_1 < l\pi, \quad z_2 = 0 \quad \text{e} \quad z_2 = \pi$$

e

$$w = w_N = 0 \text{ em } 0 < z_2 < \pi, \quad z_1 = 0 \quad \text{e em} \quad z_1 = l\pi,$$

onde o subscrito $_N$ indica derivada na direção normal.

Para ϕ consideraremos apenas a condição

$$I(\phi) : \quad \phi_N = (\Delta\phi)_N = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Estas condições são as mesmas usadas por Golubitsky e Schaeffer em [23]. Veremos que ao combinar as condições $II(w)$ e $I(\phi)$ temos a ocorrência de mode jumping. Entretanto, ao combinar $I(w)$ e $I(\phi)$ não. Stein considerou a condição de fronteira $II(w)$ como sendo a melhor aproximação em seu experimento. A interpretação física desta condição diz que a placa não pode rodar ou transladar. O stress é absorvido pela fronteira. A condição $I(w)$ é frequentemente estudada mas difícil de ocorrer



fisicamente, senão impossível. Embora esta condição esteja relacionada com o fato de não ocorrer mode jumping, iremos tratá-la por questões de comparação. Note que para a função stress ϕ estamos considerando apenas uma condição de fronteira $I(\phi)$. Esta é conhecida como condição de Neumann e segue das equações de Mecânica Contínua. As razões de considerarmos essa condição para ϕ é por esta ser a mais realista para o experimento.

É claro que do ponto de vista matemático é interessante estudarmos outras condições de fronteira para ϕ e w . Holder e Schaeffer em [24], por exemplo, consideram também para ϕ a condição de Dirichlet dada por

$$II(\phi) : \quad \phi = \Delta\phi = 0.$$

Além disso, esses autores mostram que o mode jumping ocorre com as combinações $II(w), I(\phi)$ ou $II(\phi)$, mas não ocorre com $I(w), I(\phi)$ ou $II(\phi)$.

O que impede a análise de outras combinações de condição de fronteira é a limitação de ferramentas matemáticas. Neste trabalho, bem como em [23] e [24], a análise de Fourier tem papel fundamental para avaliar os parâmetros modais que nos darão precisamente a ocorrência do mode jumping. Em utilizar outras combinações, falta essa ferramenta. Para superar esta dificuldade é necessário investir em outras técnicas. Em [25], por exemplo, ao utilizar outras condições para ϕ e para w , os autores desenvolveram ferramentas numéricas de discretização para poder analisá-las.

Voltando às equações de von Kármán, de (4.3) podemos escrever

$$\phi = -\frac{1}{2}\Delta^{-2}[w, w] \tag{4.9}$$

no espaço de funções não constantes com condição de fronteira $\phi_N = (\Delta\phi) = 0$ em $\partial\Omega$. Com isso, estamos dizendo que Δ^2 é invertível no subespaço

$$\{\phi \in \mathcal{H}^2(\Omega) : \phi \text{ satisfaz } I(\phi)\} / \mathbb{R} \subset \mathcal{H}^2(\Omega), \text{ onde}$$

$$\mathcal{H}^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq 2, \exists g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$



Nesta notação, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, com $\alpha_i \geq 0$ inteiro: $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ e $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}}$. Além disso, $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$, onde $C_c(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω .

Substituindo (4.9) em (4.2) obtemos a expressão

$$\Delta^2 w + \lambda w_{z_1 z_1} = C(w) \quad (4.10)$$

onde $C(w)$ é dado por

$$C(w) = -\frac{1}{2}[\Delta^{-2}[w, w], w]. \quad (4.11)$$

Para finalizar esta seção, vamos enunciar um lema que será utilizado posteriormente nos cálculos das derivadas das equações reduzidas, obtidas a partir do processo de Liapunov-Schmidt.

Lema 4.1.1 *Se u, v, w são funções suaves em Ω e se v e w anulam-se em $\partial\Omega$ então*

$$\int_{\Omega} u[v, w] \, dA = \int_{\Omega} [u, v]w \, dA.$$

Demonstração. Ver [1], p. 445. ■

4.2 Condições de Fronteira para a Placa Simplesmente Apoiada

A combinação $I(w)$ e $I(\phi)$ é clássica na literatura e tem sido estudada por muitos autores. Podemos ver, por exemplo, [27]. Vamos abordá-la por questões de comparação com o caso da próxima seção. No final, veremos que a placa sujeita a estas condições de fronteira não apresentará mode jumping.

De fato, começamos nossa análise observando que $w = 0$ é solução de (4.10) para qualquer valor de λ . A linearização de (4.10) em $w = 0$ é dada por

$$\Delta^2 w + \lambda w_{z_1 z_1} = 0. \quad (4.12)$$



A justificativa disto se deve ao fato de que Δ^2 é linear e que $C(w)$, dada em (4.11), é homogêneo do terceiro grau, ou seja,

$$C(tw) = t^3 C(w).$$

Então, ao fazer a linearização de (4.10) em $w = 0$, devemos calcular a derivada de $C(w)$ em $w = 0$ numa direção qualquer v , ou seja,

$$C'(0)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(tv) - C(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 C(v)}{t} = C(v) \lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0.$$

Queremos, a partir de agora, encontrar as soluções não triviais da equação (4.12) em Ω , as quais satisfazem as condições de fronteira $I(w)$. Estas soluções serão chamadas de auto-funções. Para encontrá-las, utilizamos a técnica das variáveis separadas, ou seja, escrevemos

$$w(z_1, z_2) = u(z_1)v(z_2).$$

Então,

$$\frac{u^{(4)} + \lambda u''}{u} + 2 \frac{u''}{u} \frac{v''}{v} + \frac{v^{(4)}}{v} = 0.$$

Como estamos admitindo as condições de fronteira $I(w)$, então u, v satisfazem

$$u(0) = u(l\pi) = u''(0) = u''(l\pi) = 0$$

e

$$v(0) = v(\pi) = v''(0) = v''(\pi) = 0.$$

As únicas funções não triviais u, v condizentes com estas condições de fronteira são

$$u(z_1) = \sin\left(\frac{kz_1}{l}\right) \quad \text{e} \quad v(z_2) = \sin(mz_2)$$

para quaisquer inteiros k e m .

Assim,

$$w(z_1, z_2) = \sin\left(\frac{kz_1}{l}\right) \sin(mz_2) \tag{4.13}$$

é uma auto-função de (4.12) que satisfaz as condições de fronteira $I(w)$.



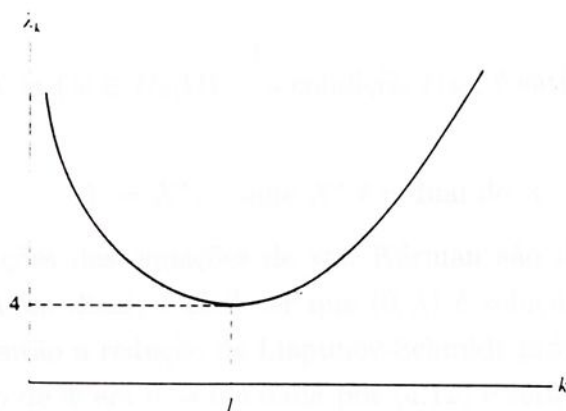
Então, para determinar para quais valores de λ (4.12) tem uma solução não trivial, é suficiente substituir (4.13) em (4.12) e resolver a expressão em λ . Daí, obtemos

$$\lambda = \left(\frac{k}{l} + m^2 \frac{l}{k} \right)^2. \quad (4.14)$$

Como pela equação (4.14) λ é crescente em m , o primeiro autovalor para um dado l é quando $m = 1$. Então, de (4.14) temos

$$\lambda_k = \left(\frac{k}{l} + \frac{l}{k} \right)^2.$$

O gráfico de λ_k por k , se pensarmos k como uma variável contínua, é dado pela curva



que tem um ponto de mínimo em $k = l$. Então, o único modo para que o primeiro autovalor seja um autovalor duplo é para

$$\lambda_k = \lambda_{k+1}$$

com $k < l < k + 1$. Isso acontece precisamente quando

$$l = \sqrt{k(k+1)}. \quad (4.15)$$

Observe que estamos interessados em autovalores duplos, pois mode jumping envolve competição entre os modos distintos. Como a variável k é discreta, segue que para os autovalores serem duplos, os valores de k deverão ser consecutivos.

Agora, vamos nos concentrar na redução de Liapunov-Schmidt de (4.10) para obter equações de bifurcação reduzidas que nos darão as soluções do problema de von Kármán. O processo de Liapunov-Schmidt está explicado passo a passo no apêndice. Aqui, faremos apenas um caso particular.

Devido a (4.10), o sistema de equações (4.2) e (4.3) pode ser reescrito como

$$\Phi(w, \lambda) = \Delta^2 w + \lambda w_{z_1 z_1} + \frac{1}{2} [\Delta^{-2} [w, w], w] \quad (4.16)$$

com as mesmas condições de fronteira para w e ϕ . Observe que Δ^{-2} é o operador inverso de Δ^2 e que ao reescrevermos as equações de von Kármán como acima, temos que

$$\Phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y,$$

com

$$X = \{w \in \mathcal{H}_2(\Omega) : \text{a condição } I(w) \text{ é satisfeita}\}$$

e

$$Y = X^*, \text{ onde } X^* \text{ é o dual de } X.$$

Logo, as soluções das equações de von Kármán são dadas pelas soluções da equação (4.16). Além disso, é fácil ver que $(0, \lambda)$ é solução trivial de (4.16) para todo λ . Faremos então a redução de Liapunov-Schmidt próximo a $w = 0$ e $\lambda = \lambda^*$.

A linearização de Φ em $w = 0$ é dada por (4.12) e será denotada por

$$L = (d\Phi)_{0, \lambda^*}.$$

De (4.13), se $l = \sqrt{k(k+1)}$ então as funções que satisfazem

$$\Delta^2 w + \lambda w_{z_1 z_1} = 0$$

são as auto-funções

$$w_1(z_1, z_2) = \sin \left(\sqrt{\frac{k}{k+1}} z_1 \right) \sin z_2, \quad w_2(z_1, z_2) = \sin \left(\sqrt{\frac{k+1}{k}} z_1 \right) \sin z_2. \quad (4.17)$$

Assim, o núcleo do operador L , $\ker L$, é 2-dimensional gerado por w_1 e w_2 .

Definimos o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(t)v(t)dt. \quad (4.18)$$

O operador linear L é Fredholm de índice zero, isto é,

- i) $\ker L$ é gerado por w_1 e w_2 , onde $\|w_i\|^2 = \langle w_i, w_i \rangle = 1$;
- ii) $\operatorname{Im} L = (\ker L)^\perp$. Note que esta condição pode ser verificada devido a L ser auto-adjunto.

Da condição ii), segue que podemos escrever

$$X = \ker L + (\ker L)^\perp = \ker L + \operatorname{Im} L.$$

Considere as projeções $\mathbb{P} : Y \longrightarrow \operatorname{Im} L$ e $(I - \mathbb{P}) : Y \longrightarrow \ker L$. Como o $\ker L$ é gerado por w_1 e w_2 , temos que

$$(I - \mathbb{P})(u) = \langle w_1, u \rangle w_1 + \langle w_2, u \rangle w_2 = (\langle w_1, u \rangle, \langle w_2, u \rangle), \quad \forall u \in Y.$$

A equação (4.16) é equivalente ao sistema

- a) $\mathbb{P}\Phi(w, \lambda) = 0$,
- b) $(I - \mathbb{P})\Phi(w, \lambda) = 0$.

Dado $w \in X$ podemos escrever $w = u + v$, com $u \in \ker L$ e $v \in \operatorname{Im} L$. Usando o Teorema da Função Implícita para resolver a equação $\mathbb{P}\Phi(u + v, \lambda) = 0$ implicitamente, obtemos v escrito como função de u e λ , ou seja, existe uma única função $V(u, \lambda)$ tal que

$$\mathbb{P}\Phi(u + V(u, \lambda), \lambda) = 0.$$

Portanto, a equação de bifurcação é dada por

$$(I - \mathbb{P})\Phi(u + V(u, \lambda), \lambda) = 0, \quad u = xw_1 + yw_2 \in X.$$

Esta equação pode ser reescrita como $g(u, \lambda) = g(x, y, \lambda) = (0, 0)$, com

$$g : \ker L \times \mathbb{R} \longrightarrow (\operatorname{Im} L)^\perp$$

definida por

$$g(x, y, \lambda) = (\langle w_1, \Phi(xw_1 + yw_2 + V(x, y, \lambda), \lambda) \rangle, \langle w_2, \Phi(xw_1 + yw_2 + V(x, y, \lambda), \lambda) \rangle).$$

Concluimos então que, como o $\ker L$ é 2-dimensional e $\ker L = (\operatorname{Im} L)^\perp$, a redução de Liapunov-Schmidt de Φ próximo de $w = 0, \lambda = \lambda^*$ é dada pelo par de equações

$$g_i(x, y, \lambda) = \langle w_i, \Phi(xw_1 + yw_2 + V(x, y, \lambda), \lambda) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.19)$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $g = (g_1, g_2)$.

Afirmamos agora que $g = (g_1, g_2)$ comuta com o grupo $Z_2 \oplus Z_2$, ou seja, g_1 é ímpar em x e par em y enquanto g_2 é par em x e ímpar em y . De fato, primeiramente observamos que as simetrias das equações de von Kármán para o problema da placa são dadas pelas reflexões

- a) $R_1 w = -w$ - reflexão através do plano da placa não deformada,
- b) $R_2 w = w \circ \theta$ - reflexão através do menor eixo de Ω onde
 $\theta(z_1, z_2) = (l\pi - z_1, z_2),$
- c) $R_1 \circ R_2$ - composição das duas reflexões,

e que $\Phi(w, \lambda)$ é equivariante com respeito as duas reflexões R_1 e R_2 , ou seja,

$$\Phi(R_i w, \lambda) = R_i \Phi(w, \lambda). \quad (4.20)$$

Em [1], p. 300, é mostrado que a simetria do problema Φ é herdada pelas equações reduzidas. Observe que

- i) $R_1 w_1 = -w_1, \quad R_1 w_2 = -w_2,$
- ii) $R_2 w_1 = (-1)^{k+1} w_1, \quad R_2 w_2 = (-1)^k w_2.$

Podemos concluir que o grupo das reflexões $\{I, R_1, R_2, R_1 \circ R_2\}$ é isomorfo ao grupo $Z_2 \oplus Z_2$ e sua ação no espaço bidimensional $\ker L$ é isomorfa a ação do grupo

$Z_2 \oplus Z_2$ sobre o $\mathbb{R}^2$ dada por (2.1). Além disso, o operador linearizado L é auto-adjunto onde o produto interno em questão é (4.18). Também, como já havíamos visto, temos que $(\text{Im } L)^\perp = \ker L$ e a ação do grupo na imagem de g é idêntica. Foi mostrado no capítulo 2 que sobre estas condições as equações reduzidas tem a forma (2.7) que é precisamente o que afirmamos anteriormente.

No capítulo 2, desenvolvemos os resultados básicos da Teoria de Singularidades para problemas de bifurcação $Z_2 \oplus Z_2$ -equivariantes. Em particular, na seção 2.10, consideramos a forma normal (2.41), por razões já explicadas. De [23] (p. 225, proposição 5.15), temos que a forma reduzida g da equação de von Kármán, pode ser dada pela forma normal (2.41), ou seja, $g = h_1 = [u + \mu v - \lambda, \eta u + v - \lambda]$. Assim, para aplicarmos os resultados do capítulo 2 e avaliar os parâmetros modais μ e η que nos darão as informações sobre a ocorrência ou não do mode jumping, precisamos calcular as derivadas da g .

Devido a simetria, as derivadas de ordem três de g com respeito a x e a y serão as primeiras derivadas não nulas a aparecerem no desenvolvimento de Taylor de g . Em geral, avaliar as derivadas de terceira ordem, conforme podemos ver no apêndice, requer que operador linearizado L seja invertível. Entretanto, observe que Φ é ímpar em w , ou seja,

$$\Phi(-w, \lambda) = -\Phi(w, \lambda).$$

Então, para $w = 0$ temos que

$$(d^2\Phi)_{0,\lambda} = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_\lambda = 0.$$

Em outras palavras, o inconveniente dos termos contendo L^{-1} nas expressões das derivadas da g anula-se pela simetria.

No apêndice temos as expressões das derivadas de g . Assim, de acordo com as notações usadas no capítulo 2, temos, por exemplo, que se $g = (g_1, g_2) = [p, q]$ então

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_1}{\partial x^3} = \frac{1}{6} \langle w_1, d^3\Phi(w_1, w_1, w_1) \rangle = \\ &= \frac{1}{6} \langle w_1, [\Delta^{-2}[w_1, w_1], w_1] + [\Delta^{-2}[w_1, w_1], w_1] + [\Delta^{-2}[w_1, w_1], w_1] \rangle = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \langle w_1, [\Delta^{-2}[w_1, w_1], w_1] \rangle \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \langle [w_1, w_1], \Delta^{-2}[w_1, w_1] \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \langle \Delta^{-1}[w_1, w_1], \Delta^{-1}[w_1, w_1] \rangle = \frac{1}{2} \|\Delta^{-1}[w_1, w_1]\|^2.
\end{aligned}$$

Na igualdade $\star$ usamos o lema 4.1.1. Observe também que

$$\begin{aligned}
[w_1, w_1] &= 2w_{1z_1z_1} w_{1z_2z_2} - 2w_{1z_1z_2}^2 = \frac{k^2}{l^2} \cos(2z_2) - \frac{k^2}{l^2} \cos\left(\frac{2k}{l} z_1\right) = \\
&= \frac{k^2}{l^2} \cos\left(\frac{k'_1}{l} z_1\right) \cos(k'_2 z_2) - \frac{k^2}{l^2} \cos\left(\frac{k''_1}{l} z_1\right) \cos(k''_2 z_2).
\end{aligned}$$

onde $k'_1 = 0 = k''_2$, $k'_2 = 2$ e $k''_1 = 2k$, ou seja, $[w_1, w_1]$ é uma combinação linear finita de produtos envolvendo cossenos. Usando algumas identidades trigonométricas, o mesmo ocorrerá com $\Delta^{-1}[w_1, w_1]$. De fato,

$$\Delta^{-1}[w_1, w_1] = \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{2k}{l} z_1\right) + \frac{k^2}{l^2} \cos(2z_2) \right).$$

Daí pela definição (4.18) de produto interno, segue

$$\|\Delta^{-1}[w_1, w_1]\|^2 = \frac{8}{256} \frac{k^2 + (k+1)^2}{(k+1)^2}.$$

Consequentemente,

$$p_u = \frac{4}{256} \frac{k^2 + (k+1)^2}{(k+1)^2}.$$

Analogamente, podemos calcular as outras derivadas de g que são dadas por

$$\begin{aligned}
\text{a) } p_v &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_1}{\partial y^2 \partial x} = \frac{1}{2} (\langle \Delta^{-1}[w_1, w_1], \Delta^{-1}[w_2, w_2] \rangle + 2\|\Delta^{-1}[w_1, w_2]\|^2) = \\
&= \frac{2}{128} \left\{ 6 + \frac{1}{(2(2k+1)^2 + 1)^2} \right\}; \\
\text{b) } p_\lambda &= \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial \lambda} = \langle w_1, (d\Phi)_\lambda w_1 \rangle = \|w_{1z_1}\|^2 = \frac{k^2}{4l^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } q_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_2}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{2} (< \Delta^{-1}[w_1, w_1], \Delta^{-1}[w_2, w_2] > + 2 \|\Delta^{-1}[w_1, w_2]\|^2) = \\ &= \frac{2}{128} \left\{ 6 + \frac{1}{(2(2k+1)^2 + 1)^2} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } q_v &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_2}{\partial y^3} = \frac{1}{2} < [w_2, w_2], \Delta^{-2}[w_2, w_2] > = \frac{1}{2} < \Delta^{-1}[w_2, w_2], \Delta^{-1}[w_2, w_2] > = \\ &= \frac{1}{2} \|\Delta^{-1}[w_2, w_2]\|^2 = \frac{4}{256} \frac{k^2 + (k+1)^2}{k^2}; \end{aligned}$$

$$\text{e) } q_\lambda = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial \lambda} = < w_2, (d\Phi)_\lambda w_2 > = \|w_{2z_1}\|^2 = \frac{(k+1)^2}{4l^2}.$$

Da mesma forma como no caso de $[w_1, w_1]$, temos que $[w_i, w_j]$ é uma combinação linear finita de produtos do tipo

$$\cos \left(\frac{k_1 z_1}{l} \right) \cos (k_2 z_2), \quad (4.21)$$

onde k_1 e k_2 são inteiros não negativos, o mesmo ocorrendo com $\Delta^{-1}[w_i, w_j]$.

Esses cálculos podem ser encontrados com maiores detalhes em [23].

Assim, de acordo com (2.26), segue das expressões acima que os parâmetros modais de $g = h_1$ são dados por

$$\mu = \left| \frac{q_\lambda}{q_v p_\lambda} \right| p_v = \frac{(k+1)^2}{k^2 + (k+1)^2} \left\{ 6 + \frac{1}{[2(2k+1)^2 + 1]^2} \right\}$$

$$\text{e} \quad \eta = \left| \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right| q_u = \frac{k^2}{k^2 + (k+1)^2} \left\{ 6 + \frac{1}{[2(2k+1)^2 + 1]^2} \right\}. \quad (4.22)$$

Os parâmetros modais acima certamente satisfazem

$$\mu > 1, \quad \eta > 1 \quad (4.23)$$

para todos valores de k ; de fato, $\mu > 3$ e η tende a 3 quando k tende ao infinito.

Nos cálculos acima assumimos $l = \sqrt{k(k+1)}$. Para valores de l próximos a $\sqrt{k(k+1)}$ podemos analisar o problema como um desdobramento a um parâmetro

do caso ideal onde (4.15) é satisfeita. Basta toma $\sigma = l - l^*$, com l^* próximo de l . Tal desdobramento pode ser fatorado através de um desdobramento miniversal (2.43). Os diagramas de bifurcação perturbados podem ser vistos na figura 2.3. Devido a (4.23), os diagramas de bifurcação relevantes são aqueles da região (1), para o qual não há ocorrência de mode jumping. Além disso, o primeiro mode bifurcado permanece estável quando λ aumenta.

4.3 Condições de Fronteira Fixada

Nesta seção vamos tratar das condições de fronteira $II(w)$ e $I(\phi)$ que são as que descrevem de forma mais apropriada o experimento de Stein. A condição de fronteira $II(w)$ consiste em

- i) $w = w_N = 0$ nos lados verticais ($z_1 = 0, \quad z_1 = l\pi, \quad 0 < z_2 < \pi$),
- ii) $w = \Delta w = 0$ nos lados horizontais ($z_2 = 0, \quad z_2 = \pi, \quad 0 < z_1 < l\pi$).

Para a função de Airy manteremos a condição $I(\phi)$, ou seja,

$$\phi = (\Delta\phi)_N = 0.$$

Os cálculos para este caso tem muito em comum com o caso anterior e, portanto, vamos nos concentrar no que existe de diferente entre eles.

Em geral é impossível achar explicitamente os valores de λ para os quais (4.16) tem uma solução não-trivial com estas condições de fronteira, ao contrário do caso anterior quando demos explicitamente qual era a solução λ . Entretanto, estamos interessados nos casos especiais dos valores de l para os quais o primeiro autovalor é duplo. Isto é mais fácil do que tentar encontrar a auto-função geral de (4.16). Podemos usar a técnica das variáveis separadas como fizemos no caso anterior, em (4.12) olhando para soluções da forma

$$w(z_1, z_2) = f(z_1) \text{sen}(mz_2). \quad (4.24)$$

Tomamos novamente $m = 1$ para obtermos o menor autovalor. Colocando $m = 1$ em (4.24) e substituindo em (4.12) obtemos

$$f^{(4)} + (\lambda - 2)f'' + f = 0, \quad (4.25)$$



$$f(0) = f'(0) = f(l\pi) = f'(l\pi) = 0.$$

Para qualquer λ , (4.25) tem quatro soluções linearmente independentes, as quais tem a forma e^{pz_1} , para algum $p \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \leq 4$ as exponenciais são reais, isto é, não oscilatório, e é impossível satisfazer as condições de fronteira. Então assumimos que $\lambda > 4$. Para tal λ , a solução geral de (4.25) tem a forma

$$C_1 \cos(az_1) + C_2 \sin(az_1) + C_3 \cos(bz_1) + C_4 \sin(bz_1), \quad (4.26)$$

onde

$$a = \sqrt{N - M}, \quad b = \sqrt{N + M}, \quad N = \frac{\lambda}{2} - 1, \quad M = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \lambda}. \quad (4.27)$$

As duas condições de fronteira em $z_1 = 0$ eliminam duas das quatro constantes em (4.26). Então f pode ser reescrita como combinação linear de duas funções

$$\phi(z_1) = b \sin(az_1) - a \sin(bz_1), \quad \psi(z_1) = \cos(az_1) - \cos(bz_1).$$

Queremos escolher l tal que o autovalor seja duplo. Então teremos que ter

$$\phi(l\pi) = \psi(l\pi) = \phi'(l\pi) = \psi'(l\pi) = 0. \quad (4.28)$$

Segue de (4.28) que

$$a = \frac{k}{l}, \quad b = \frac{k + 2n}{l} \quad (4.29)$$

para alguns inteiros positivos. De (4.27) obtemos

$$a^2 + b^2 = \lambda - 2, \quad b^2 - a^2 = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}.$$

Eliminando λ destas equações segue

$$ab = 1.$$

Então (4.29) implica que $l = \sqrt{k(k + 2n)}$. Desde que estamos interessados no menor autovalor vamos considerar $n = 1$, e daí,

$$l = \sqrt{k(k + 2)}. \quad (4.30)$$

Então, se l satisfaz (4.30), a primeira bifurcação é de um autovalor duplo. As auto-funções associadas são

$$\begin{aligned} w_1(z_1, z_2) &= \left\{ \frac{k+2}{k} \sin \left(\frac{kz_1}{l} \right) - \sin \left(\frac{(k+2)z_1}{l} \right) \right\} \sin z_2, \\ w_2(z_1, z_2) &= \left\{ \cos \left(\frac{kz_1}{l} \right) - \cos \left(\frac{(k+2)z_1}{l} \right) \right\} \sin z_2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A idéia da redução de Liapunov-Schmidt é exatamente análoga a que fizemos no caso anterior e, como consequência, obtemos que as equações reduzidas aqui tem a mesma $Z_2 \oplus Z_2$ -simetria. Maiores detalhes podem ser encontrados em [23]. Vamos nos concentrar apenas em avaliar os parâmetros modais e em quais regiões do plano modal- $\mu\eta$ eles se encaixam.

Podemos calcular os modais para todos os valores de k e isto é feito em [23], mas como aqui estamos interessados no experimento de Stein, que observou o mode jumping de um mode com cinco envergaduras para um com seis, analisaremos apenas o caso em que $k = 5$. Consideremos então o caso $k = 5$ e as duas auto-funções w_1 e w_2 descrevendo configurações com cinco e seis envergaduras, respectivamente. Isto pode não ser evidente a princípio, mas pode ser visto pelo gráficos destas funções. Quando $k = 5$, o valor da razão da placa dado por (4.30) é

$$l^* = 5.92, \quad (4.32)$$

e os valores dos parâmetros modais são

$$\mu = 1.0875, \quad \eta = 0.9715. \quad (4.33)$$

Note que $\mu\eta = 1.0565 > 1$, ou seja, os valores de μ e η estão na região (2) da figura 2.1. Os diagramas de bifurcação associados podem ser obtidos da figura 2.2. Os valores (4.33) indicam que o mode com seis envergaduras associado com w_2 é estável, e o mode com cinco envergaduras é instável.

A análise acima aplica-se com $l^* = 5.92$ enquanto no experimento de Stein, temos

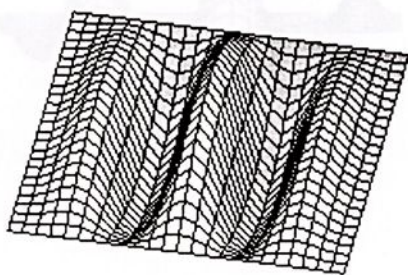
$$l = 5.38. \quad (4.34)$$



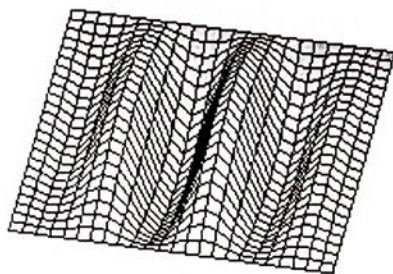
Consideremos uma família de problemas de bifurcação a um parâmetro obtida variando-se l como desdobramento do caso idealizado (4.32). Tal desdobramento pode ser fatorado através de outro desdobramento miniversal (2.43) para l próximo de l^* . Assumimos que (4.34) é próximo o bastante de l^* para esta fatoração ser possível. O próximo passo é relacionar $l - l^*$ com o parâmetro de desdobramento σ em (2.43). Isto é feito de modo rigoroso em [23]. Com isso, podemos olhar para os diagramas de bifurcação do problema físico quando $l \approx l^*$ para alguma região apropriada da figura 2.3. Em particular, esta análise estabelece mode jumping se, e somente se, a região (2) com $\sigma > 0$ da figura 2.3 é selecionada para esse processo. Portanto, concluímos que o mode jumping ocorre combinando as condições de fronteira $II(w)$ e $I(\phi)$, consideradas as mais realistas para o experimento.

A seguir, ilustramos o mode jumping desenhando os gráficos das autofunções w_1 e w_2 , para $k = 5$ e $l = 5.92$, através do MAPLE V.

5 envergaduras

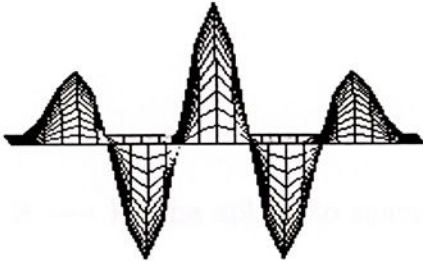


6 envergaduras

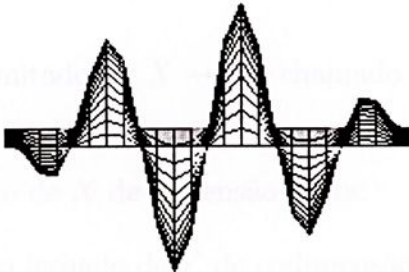


De outro ângulo podemos perceber melhor

5 envergaduras



6 envergaduras



Apêndice

Consideremos $\Phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$ uma aplicação suave entre espaços de Banach tal que $\Phi(0, 0) = 0$.

O nosso objetivo é utilizar a redução de Liapunov-Schmidt para descrever as soluções da equação $\Phi(w, \lambda) = 0$ numa vizinhança da origem. O parâmetro real é devido ao problema proposto no capítulo 4, mas poderíamos tratar de parâmetros em $\mathbb{R}^k$, para algum k .

Um operador linear limitado $L : X \rightarrow Y$ é chamado de *Fredholm* se as seguintes condições acontecem:

- i) $\ker L$ é um subespaço de X de dimensão finita.
- ii) $\text{Im } L$ é um subespaço fechado de Y de codimensão finita.

Definição 4.3.1 Se L é Fredholm, o índice de L , denotado por $i(L)$, é dado por

$$i(L) = \dim \ker L - \text{codim } \text{Im } L.$$

Nas aplicações tratadas aqui, o operador de Fredholm L tem índice zero.

Proposição 4.3.1 Se $L : X \longrightarrow Y$ é Fredholm, então existem subspaços fechados M e N de X e Y , respectivamente, tais que

- a) $X = \ker L \oplus M$,
- b) $Y = N \oplus \text{Im } L$.

Demonstração. Ver [1], p. 290. ■



O processo de redução obedece aos seguintes passos:

PASSO 1. Decompor os espaços de Banach X e Y em

a) $X = \ker L \oplus M$,

b) $Y = N \oplus \operatorname{Im} L$,

onde $L = (d\Phi)$.

Esta decomposição é possível devido a proposição 4.3.1.

PASSO 2. Transformamos a equação $\Phi(w, \lambda) = 0$ em um sistema de duas equações dadas por

a) $\mathbb{P}\Phi(w, \lambda) = 0$,

b) $(I - \mathbb{P})\Phi(w, \lambda) = 0$,

onde $\mathbb{P} : Y \longrightarrow \operatorname{Im} L$ é o operador projeção associado a divisão de Y dada no passo 1.

PASSO 3. Pelo passo 1, dado $w \in X$, podemos escrever $w = u + v$ tal que $u \in \ker L$ e $v \in M$.

Daí,

$$0 = \mathbb{P}\Phi(w, \lambda) = \mathbb{P}\Phi(u + v, \lambda).$$

Consideremos a função F definida por

$$F(u, v, \lambda) = \mathbb{P}\Phi(u + v, \lambda) = 0.$$

Então,

$$(dF) = (d(\mathbb{P}\Phi)) = \mathbb{P}(d\Phi) = \mathbb{P}L = L.$$

Observe que na segunda igualdade usamos o fato de $\mathbb{P}$ ser linear e na última igualdade o fato de que $\mathbb{P}$ projeta sobre $\operatorname{Im} L$.



Como L é a diferencial com respeito a w , segue que

$$L : X \longrightarrow \text{Im } L.$$

Usando a divisão de X dada no passo 1 temos que a restrição

$$L|_M : M \longrightarrow \text{Im } L$$

é invertível. De fato, $L|_M$ é injetora, pois na restrição não estamos considerando os elementos do $\ker L$, e obviamente sobre a imagem, temos que $L|_M$ é sobrejetora.

Daí, pelo Teorema da Função Implícita generalizado para espaços de Banach, temos que v é escrito em função das variáveis u e λ , ou seja,

$$v = V(u, \lambda).$$

Então, resolvemos a equação

$$\mathbb{P}\Phi(u + v, \lambda) = \mathbb{P}\Phi(u + V(u, \lambda), \lambda) = 0.$$

PASSO 4. Definimos $\bar{\phi} : \ker L \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tal que

$$\bar{\phi}(u, \lambda) = (I - \mathbb{P})\Phi(u + V(u, \lambda), \lambda).$$

PASSO 5. Escolhemos uma base $v_1, v_2, \dots, v_n$ para o $\ker L$ e uma base $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*$ para $(\text{Im } L)^\perp$.

Então, definimos $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_n),$$

onde

$$g_i = \langle v_i^*, \bar{\phi}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \lambda) \rangle \quad (4.35)$$

e o produto interno $\langle, \rangle$ é definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi) v(\xi) d\xi.$$



As equações (4.35) são as equações reduzidas do processo de Liapunov- Schmidt.

Expressões para as Derivadas das Equações Reduzidas

Antes de apresentarmos as expressões para as derivadas das equações reduzidas, introduziremos uma notação invariante para derivada de ordem superior para funções de várias variáveis.

Se $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, definimos o operador diferencial de ordem k como

$$(d^k \Phi)_{y,\lambda}(v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial}{\partial t_1} \dots \frac{\partial}{\partial t_k} \Phi(y + \sum_{i=1}^k t_i v_i, \lambda)|_{t'_i=0}. \quad (4.36)$$

Note que $(d^k \Phi)_{y,\lambda}$ é simétrico, k -linear. Por exemplo, para $k = 2$, temos o operador bilinear

$$(d^2 \Phi)_{y,\lambda}(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j}(y, \lambda) v_i w_j.$$

Para obtermos as derivadas das g_i 's, derivamos a expressão (4.35). Com isso, ficamos com

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k} = \langle v_i^*, (d^2 \Phi)(v_j, v_k) \rangle;$$

$$\frac{\partial^3 g_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} = \langle v_i^*, V \rangle, \text{ onde}$$

$$V = (d^3 \Phi)(v_j, v_k, v_l) - (d^2 \Phi)(v_j, w_{lk}) - (d^2 \Phi)(v_k, w_{lj}) - (d^2 \Phi)(v_l, w_{kj})$$

e

$$w_{st} = L^{-1} \mathbb{P} (d^2 \Phi)(v_s, v_t);$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \lambda} = \langle v_i^*, \Phi_\lambda \rangle;$$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial \lambda} = \langle v_i^*, (d\Phi)_\lambda v_j - (d^2\Phi)(v_j, L^{-1} \mathbb{P} \Phi_\lambda) \rangle,$$

e assim sucessivamente, onde nesta notação $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Observe que no problema da placa no capítulo 4, $n = 2$ pois o $\ker L$ é um espaço bidimensional. Daí, usamos a notação (x, y) ao invés de (x_1, x_2) , nas expressões para as derivadas das equações reduzidas. Além disso,

$$\ker L = (\text{Im } L)^\perp.$$

Logo, $v_i = v_i^*$, para $i = 1, 2$. Temos ainda que a expressão $(d^3\Phi)(v_j, v_k, v_l)$ que aparece nas derivadas acima é dada por

$$(d^3\Phi)(v_j, v_k, v_l) = [\Delta^{-2}[v_j, v_k], v_l] + [\Delta^{-2}[v_k, v_l], v_j] + [\Delta^{-2}[v_l, v_j], v_k],$$

com $j, k, l \in \{1, 2\}$.

Para maiores detalhes do processo de redução de Liapunov-Schmidt com simetria, ver [1], p. 300.

Referências Bibliográficas

- [1] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G., *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. I, Applied Mathematics and Sciences, 51, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] Golubitsky, M. & Stewart, I. & Schaeffer, D. G., *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. II, Applied Mathematics and Sciences, 69, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] Furter, J. E. & Sitta, A. M., *Path formulation for $\mathbb{D}_3$ -equivariant bifurcation problems*, Preprint, 2000.
- [4] Manoel, M. G., *$\mathbb{D}_n$ -simetria em bifurcação de ponto estacionário*, Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, 1991.
- [5] Manoel, M. G. & Stewart, I., *Degenerate bifurcations with $Z_2 \oplus Z_2$ -simmetry*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 8, pp. 1653-1667, 1999.
- [6] Furter, J. E. & Sitta, A. M. & Stewart, I., *Algebraic path formulation for equivariant bifurcation problems*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124, pp. 275-304, 1998.
- [7] Montaldi, J., *The path formulation of bifurcation theory*, in *Dinamics, bifurcation and simmetry: new trends and new tools* (ed. P. Chossat), Nato ASI Series 437, Kluwer, Dordrecht, pp. 259-278, 1994.



- [8] Golubitsky, M. & Guillemin, V., *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [9] Bruce, J. W., *Functions on discriminants*, J. London Math. Soc. 30, pp. 551-567, 1984.
- [10] Gaffney, T., *Some new results in the classification theory of bifurcation problems*, in *Multiparameter bifurcation theory* (eds. Golubitsky, M. and Guckenheimer, J.), Contemporary Mathematics 56, Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 97-116, 1986.
- [11] Gibson, C. G., *Singular points of smooth mappings*, Pitman, London, 1979.
- [12] Damon, J., *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$* , Memoirs of the American Mathematical Society 306 (AMS, Providence RI), 1984.
- [13] Damon, J., *Deformation of sections of singularities and Gorenstein surface singularities*, Am. Jour. of Maths. 109, pp. 695-722, 1987.
- [14] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [15] Tadini, W. M., *Funções pares e funções ímpares*, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Departamento de Matemática, Campo Grande, 1988.
- [16] Vanderbauwhede, A., *Local bifurcation and symmetry*, Research Notes in Math. 75, Pitman, Boston, 1982.
- [17] Locci, V., *O problema do reconhecimento em teoria de bifurcação*, Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, 1990.
- [18] Cox, D. & Little, J. & O'Shea, D., *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 185, Springer-Verlag, 1998.
- [19] Stein, M., *Loads and deformations of buckled rectangular plates*, NASA technical report R-40, 1959.



- [20] Stoker, J. J., *Nonlinear elasticity*, New York: Gordon and Breach, 1968.
- [21] Bauer, L. & Keller, H. & Reiss, E., *Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation*, SIAM J. Appl. Math., 17 pp. 101-122, 1975.
- [22] Patiño, J., *Introdução à teoria da elasticidade*, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.
- [23] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G., *Boundary conditions and mode jumping in the buckling of a rectangular plate*, Commun. Math. Phys. 69, pp. 209-236, 1979.
- [24] Holder, E. J. & Schaeffer, D. G., *Boundary conditions and mode jumping in the von Kármán equations*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 15, No. 3, 1984.
- [25] Gervais, J. J. & Oukit, A. & Pierre, R., *Finite element analysis of the buckling and mode jumping of a rectangular plate*, Dynamics and Stability of Systems, Vol. 12, No. 3, 1997.
- [26] Marsden, J. E. & Hughes, J. R., *Mathematical foundations of elasticity*, New York, 1983.
- [27] Chow, S. N. & Hale, J. & Mallet-Paret, J., *Applications of generic bifurcations I, II*, Arch. Rat. Mech. Anal., 59, pp. 159-188, 1975 ; 62, pp. 209-235, 1976.
- [28] Chow, S. N. & Hale, J., *Methods of bifurcations theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [29] Landau, L. & Lifchitz, E., *Théorie de l'Élasticité*, Éditions MIR, VII, Moscou, 1967.
- [30] Sitta, A. M., *Teoria de singularidades e problemas de bifurcação com simetria nos parâmetros*, Tese de Doutorado, USP-São Carlos, 1993.
- [31] Bridges, T. J. & Furter, J. E., *Singularity theory and equivariant symplectic maps*, Springer Lectures Notes 1558, Heidelberg, 1993.



- [32] Mond, D. & Montaldi, J., *Deformations of maps on complete intersections, Damon's $\mathcal{K}_V$ -equivalence and bifurcations*, Preprint, University of Warwick, 1991.
- [33] Bruns, W. & Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 39, 1993.
- [34] Chadam, J., *Pattern formation: simmetry, methods and applications*, Fields Institute Communication, Vol. 5, 1996.
- [35] Velasco, E. A. G., *Fourier analysis and boundary value problems*, Academic Press, 1996.
- [36] Damon, J., *Topological equivalence of bifurcation problems*, Nonlinearity 1, pp. 311-331, 1988.



