UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Homotopia e Aplicações

Taísa Fernanda de Lima Quemel

Orientador: João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2016

Quemel, Taísa Fernanda de Lima.
Homotopia e aplicações / Taísa Fernanda de Lima Quemel. -- São José do Rio Preto, 2016
111 f. : il.

Orientador: João Peres Vieira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria da homotopia. 4. Grupos de homotopia. 5. Espaços fibrados (Matemática) I. Vieira. João Peres. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Comissão Julgadora

Membros Titulares

Prof. Dr. João Peres Vieira

Prof. Dra. Eliris Cristina Rizziolli

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Membros Suplentes

Prof. Dr. Thiago de Melo

Prof. Dr. Dirceu Penteado

Jamais considere seus estudos como uma

obrigação, mas como uma oportunidade invejável para

aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino

do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito

da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.

Albert Einstein

Agradecimentos

A Deus, por todas as vezes que guiou meus pensamentos e deu-me forças para não desistir diante das inúmeras dificuldades. Sou eternamente grata por Caminhar comigo e Ajudar-me na realização desse sonho.

Aos meus pais, Airton e Neilsa, por todo o amor que sentem por mim e por todos os valores que me ensinaram. Obrigada mãe, por todas as vezes que orou para que tudo desse certo. Vocês são meu amor maior.

Aos meus irmãos, Roni e Ruan, por além de grandes irmãos, serem também meus amigos.

Ao meu namorado, Gustavo, por acreditar no meu potencial e sempre motivar-me a ser persistente. Seu apoio simplesmente transformava meus dias em dias melhores.

Aos meus professores da graduação - Unesp, campus de Bauru -, por todo o conhecimento que me acrescentaram, despertando em mim uma paixão ainda maior pela matemática. Em especial, à minha orientadora Cristiane Lázaro, por acreditar na minha capacidade intelectual e incentivar-me a dar esse passo ao mestrado.

Aos meus professores do mestrado, por contribuírem com o imenso crescimento que tive nesses dois últimos anos e em especial ao meu orientador João Peres, por ter me dado um voto de confiança ao aceitar-me como orientanda, pela paciência e dedicação. Seu entusiasmo diante de nossos seminários me encantava e me instigava a aprender sempre mais.

Não poderia deixar de agradecer meus colegas de mestrado que me auxiliaram, pelo saber compartilhado e pela serenidade. Um obrigado especial à minha amiga Daniele Gazetta, por mesmo na distância compartilharmos conhecimentos, inseguranças e superações, encorajando uma a outra.

Enfim, aos familiares e amigos que fizeram parte dessa etapa da minha vida, por todo o incentivo, direta ou indiretamente, e à CAPES, pela bolsa concedida.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar que $\pi_n(X)$ é sempre abeliano quando $n \geq 2$ e que $\pi_1(X)$ é abeliano quando X for um H-espaço e por fim calcular alguns grupos de homotopia utilizando sequência exata de uma fibração.

Palavras-chave: Homotopias, Fibrações, Cofibrações, Sequências exatas, H-espaços, Grupos de homotopia.

Abstract

The goal of this work is to show that $\pi_n(X)$ is always abelian when $n \geq 2$ and that $\pi_1(X)$ is abelian when X is an H-space and finally calculate some homotopy groups using the exact sequence of a fibration.

Keywords: Homotopies, Fibrations, Cofibrations, Exact sequences, H-spaces, Homotopy Groups.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Topologia Algébrica é o ramo da matemática que faz a ligação entre a Topologia e a Álgebra. Nasceu nas últimas décadas do século XIX, quando o matemático francês Henri Poincaré, em 1894, apresentou seus trabalhos, inclusive alguns teoremas que somente foram provados muitos anos depois, em 1931. Fundamentou-se assim a Topologia Algébrica, que baseia-se na associação de estruturas algébricas a um espaço topológico com o objetivo de obter informações sobre esse espaço. No desenvolvimento desta, aparecem dois conceitos que sedimentam essa área da Topologia, a saber: homotopia e homologia, ambos são os fundamentos para estudar os primeiros resultados relevantes da área de Topologia Algébrica.

Aqui, estudaremos o conceito de homotopia e algumas de suas aplicações, baseando-se em [1], notas escritas por Renzo Piccinini durante um curso de pós-graduação no Instituto de Pesquisas Matemáticas. Nosso objetivo é calcular alguns grupos de homotopia utilizando a teoria construída acerca do estudo de fibrações. Para isso, tentamos ao máximo escrever as demonstrações de forma minuciosa e clara, para um melhor entendimento.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

Inicialmente, no capítulo 2, enunciamos algumas definições e resultados necessários para o entendimento dos capítulos posteriores.

No capítulo 3, o objetivo é demonstrar que existe uma bijeção entre dois conjuntos que estudaremos no capítulo 6 (corolário 3.0.1). Definiremos fibrações e cofibrações e veremos um exemplo de cada um desses.

No capítulo 4, veremos o que são os pullbacks e os pushouts e quais hipóteses precisamos para que determinadas aplicações sejam um pullback ou um pushout. Os pullbacks e pushouts serão importantes na construção das sequências de espaços, que veremos no capítulo 5. Essas sequências infinitas de espaços serão construídas e provaremos dois grandes teoremas, a saber Teoremas 5.1.1 e 5.2.1, mostrando que para toda função contínua $f : X \longrightarrow Y$, podemos obter uma sequência exata e infinita de conjuntos, em que a primeira função da sequência é f^* ou f_*, dependendo se estamos com a sequência da fibração ou com a sequência da cofibração.

No capítulo 6, apresentaremos as definições de H-espaços e CoH-espaços, mostraremos que o conjunto $[Z, \Omega X]$ é um grupo e daremos condição para que este seja abeliano. Também definiremos grupo de homotopia e provaremos que $\pi_n(X)$ é sempre abeliano quando $n \geq 2$ e que $\pi_1(X)$ é abeliano quando X é um H-espaço.

Por fim, no capítulo 7, mostraremos que toda função de recobrimento é uma fibração e com isso, usaremos a teoria desenvolvida para calcularmos alguns grupos de homotopia.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados que são fundamentais para o entendimento desse trabalho. Para maiores detalhes, consulte [3], [5] e [6].

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1.1. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Uma **Topologia** de X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;

(ii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$;

(iii) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de elementos de τ, então $\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda \in \tau$.

*Um conjunto X para o qual se tenha definido uma topologia τ é chamado de **espaço topológico**. Dizemos que um subconjunto U de X é um* **conjunto aberto** *de X se $U \in \tau$.*

Definição 2.1.2. *Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$. Se τ é uma topologia em X então a família*

$$\tau_S = \{S \cap U : U \in \tau\}$$

*é uma topologia em S, que chamaremos de **topologia induzida**. Dizemos que S é um **subespaço topológico** de X.*

Exemplo 2.1.1. Se X é um conjunto qualquer, a coleção de todos os subconjuntos de X é uma topologia de X e a denominamos por **topologia discreta**. Neste caso, dizemos também que X é discreto.

Definição 2.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Se $B \subset Y$ é um subconjunto, definimos a **pré-imagem** de B por f, denotada por $f^{\dashv}(B)$, por*

$$f^{\dashv}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Lema 2.1.1. *Se $A \subset X$ e $B \subset Y$ então*

$$A \subset f^{\dashv}(f(A)) \text{ e } f(f^{\dashv}(B)) \subset B.$$

Observamos que a primeira inclusão é uma igualdade se f for injetora, e a segunda inclusão é uma igualdade se f for sobrejetora.

2.2 Base para uma topologia

Definição 2.2.1. *Se X é um conjunto, uma **base** para uma topologia sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (chamados de **elementos básicos**) tais que:*

(i) Para cada $x \in X$, há ao menos um elemento básico B que contém x;

(ii) Se x pertence a interseção de dois elemento básicos B_1 e B_2, então existe um elemento básico B_3 que contém x e tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathcal{B}$ satisfaz estas duas condições, definimos a topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ como segue: um subconjunto U de X é dito aberto em X se para cada $x \in U$, existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$.

Lema 2.2.1. *Se X é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ sobre X então τ é igual a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Este lema nos mostra que cada conjunto aberto U em X pode ser expressado como uma união de elementos básicos.

2.3 Conjuntos abertos e fechados

Definição 2.3.1. *Dizemos que V é uma **vizinhança** de $x \in X$ se existir um aberto W de X tal que $x \in W \subset V$.*

Proposição 2.3.1. *Seja Y um subespaço topológico de X. Se um subconjunto A de X é aberto de Y e Y é subconjunto aberto de X então A é aberto em X.*

Definição 2.3.2. *Um espaço topológico X é chamado de **Hausdorff** se para quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U_x e V_y, respectivamente de x e y, tais que $U_x \cap V_y = \emptyset$.*

Definição 2.3.3. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto F de X é um conjunto **fechado** de X se o conjunto complementar de F em X, $X - F$, é um conjunto aberto de X.*

Proposição 2.3.2. *Seja Y um subespaço topológico de X. Se um subconjunto F de X é fechado de Y e Y é subconjunto fechado de X então F é fechado em X.*

2.4 Continuidade e Homeomorfismo

Definição 2.4.1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que f é **contínua** se para todo aberto U de Y, a pré-imagem $f^{-1}(U)$ for um aberto de X.*

Definição 2.4.2. *Se $f : X \longrightarrow Y$ for uma função contínua, bijetora e sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ for contínua, dizemos que f é um* ***homeomorfismo*** *e que os espaços X e Y são* ***homeomorfos****. Notação: $X \approx Y$.*

Proposição 2.4.1. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo fechado F de Y, a pré-imagem $f^{\dashv}(F)$ é fechada em X.*

Definição 2.4.3. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que f é uma* ***aplicação aberta (fechada)*** *se para todo subconjunto aberto (fechado) U de X a imagem $f(U)$ é um subconjunto aberto (fechado) de Y.*

Teorema 2.4.1. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua e bijetora então f é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma função aberta (fechada).*

Lema 2.4.1. *(**Lema da Colagem**) Sejam X, Y espaços topológicos e A, $B \subset X$ fechados tais que $A \cup B = X$. Se $H : A \longrightarrow Y$ e $K : B \longrightarrow Y$ são funções contínuas satisfazendo $H(x) = K(x)$, $\forall x \in A \cap B$, então a aplicação $G : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$G(x) = \begin{cases} H(x), & x \in A, \\ K(x), & x \in B, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração: Seja $F \subset Y$ fechado qualquer. Mostremos que $G^{\dashv}(F) \subset X$ também é fechado. Temos que $G^{\dashv}(F) = \{x \in X : G(x) \in F\} = \{x \in X : H(x) \in F \text{ ou } K(x) \in F\} = \{x \in X : H(x) \in F\} \cup \{x \in X : K(x) \in F\} = H^{\dashv}(F) \cup K^{\dashv}(F)$.

Como H e K são contínuas, sabemos que $H^{\dashv}(F) \subset A$ e $K^{\dashv}(F) \subset B$ são fechados e assim, como A e B são fechados em X, segue que pela proposição 2.3.2 que $H^{\dashv}(F)$ e $K^{\dashv}(F)$ são fechados em X. Portanto, $G^{\dashv}(F) = H^{\dashv}(F) \cup K^{\dashv}(F)$ é fechado e concluímos que G é contínua.

□

Definição 2.4.4. *Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita* **uniformemente contínua** *se dado* $\epsilon > 0$ *arbitrário existe* $\delta > 0$ *tal que para cada par de pontos* x_1, x_2 *de* X,

$$||x_1 - x_2|| < \delta \Longrightarrow ||f(x_1) - f(x_2)|| < \epsilon.$$

Definição 2.4.5. *Dizemos que uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é um* **homeomorfismo local** *se para todo* $x \in X$ *existir um aberto* $U \subset X$ *com* $x \in U$ *tal que* $V = f(U)$ *é aberto de* Y *e* $f|_U : U \longrightarrow V$ *é um homeomorfismo.*

2.5 Compacidade

Definição 2.5.1. *Seja* X *um conjunto qualquer. Uma* ***cobertura*** *de* X *é uma família* $\{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *tal que* $X = \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$, *em que* L *denota um conjunto de índices. Dizemos ainda que* $\{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *é uma* ***cobertura aberta*** *de* X *se para todo* $\lambda \in L$, G_λ *é um subconjunto aberto de* X.

Uma ***subcobertura*** *é uma subfamília* $\{G_{\lambda_j}\}_{\lambda_j \in L'}$ *de alguma cobertura* $\{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *de* X, $L' \subset L$, *tal que* $X \subset \bigcup_{\lambda_j \in L'} G_{\lambda_j}$. *Além disso, dizemos que a subcobertura é finita quando* L' *é um subconjunto finito de* L.

Definição 2.5.2. *Um espaço topológico* X *é* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de* X *admite uma subcobertura finita.*

Proposição 2.5.1. *Se* X *é um espaço topológico compacto e* $F \subset X$ *é fechado então* F *é compacto.*

Proposição 2.5.2. *Se* X *é um espaço topológico de Hausdorff e* $F \subset X$ *é compacto então* F *é fechado.*

Proposição 2.5.3. *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos e* $f : X \longrightarrow Y$ *uma função contínua e sobrejetora. Se* X *é compacto então* Y *também é compacto.*

Teorema 2.5.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Então $X \times Y$ é compacto se, e somente se, X e Y são compactos.*

Proposição 2.5.4. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então K é fechado e limitado.*

Teorema 2.5.2. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.*

2.6 Conexidade

Definição 2.6.1. *Um espaço topológico X é **conexo** se não existem subconjuntos abertos G e H de X, não vazios, tais que $X = G \cup H$ e $G \cap H = \emptyset$. Caso contrário, dizemos que X é **desconexo**.*

Proposição 2.6.1. *Um espaço topológico X é conexo se, e somente se, os únicos abertos e fechados simultaneamente de X são $\emptyset$ e X.*

Teorema 2.6.1. *A imagem de um espaço conexo por uma função contínua é um espaço conexo.*

2.7 Grupos

Definição 2.7.1. *Um conjunto G é um **semigrupo** se é dotado de uma operação binária associativa.*

Definição 2.7.2. *Um conjunto G munido com uma operação binária*

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

*é um **grupo** se as condições seguintes são satisfeitas:*

(i) a operação $(\cdot)$ é associativa: $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(ii) existe um elemento neutro: $\forall a \in G, \exists e \in G : a \cdot e = a = e \cdot a$;

(iii) todo elemento possui um elemento inverso, isto é, para cada $a \in G$, $\exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$.

*O grupo é **abeliano** ou **comutativo** se a operação deste é comutativa, a saber:* $\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$.

Lema 2.7.1. *Se $(G, \cdot)$ é um grupo e $f : G \longrightarrow H$ é uma função bijetora, podemos munir H com uma estrutura de grupo definindo em H uma operação $\triangle$ da seguinte forma: para quaisquer* h_1, $h_2 \in H$, $h_1 \triangle h_2 = f(f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2))$.

Definição 2.7.3. *Sejam $(G, \cdot)$ e $(H, \triangle)$ dois grupos. Uma função $f : G \longrightarrow H$ é um **homomorfismo** se esta é compatível com as estruturas dos grupos, isto é, se ocorre:*

$$f(a \cdot b) = f(a) \triangle f(b), \forall a, b \in G.$$

*Se além disso, f for uma bijeção, dizemos que f é um **isomorfimo** e que os grupos G e H são **isomorfos**. Notação:* $G \cong H$.

2.8 Categorias e Funtores

Definição 2.8.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste nos seguintes elementos:*

(i) Uma classe de objetos A, B, C, $\ldots$;

(ii) Para cada par de objetos A, B, uma classe de morfismos de A em B, denotados por $f : A \longrightarrow B$;

(iii) Para cada objeto A, um morfismo chamado identidade de A, denotado por $id_A : A \longrightarrow A$;

(iv) Uma operação de composição que associa a cada par de morfismos $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : B \longrightarrow C$ *um morfismo* $g \circ f : A \longrightarrow C$*, chamado morfismo composto de* f *e* g*, tais que os seguintes axiomas são satisfeitos:*

- *Associatividade: Sejam* $f : A \longrightarrow B$*,* $g : B \longrightarrow C$ *e* $h : C \longrightarrow D$*, então* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$*;*

- *Identidade: Para todo objeto* A*, existe um morfismo* $id_A : A \longrightarrow A$ *chamado morfismo identidade de* A*, tal que para todo* $f : A \longrightarrow B$*, tem-se* $f \circ id_A = f$ *e para todo* $g : C \longrightarrow A$*, tem-se* $id_A \circ g = g$*.*

Exemplo 2.8.1. A categoria dos grupos.

Nesta categoria os objetos são os grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos. A composição é dada pela composição usual de funções (composição de homomorfismos de grupos é ainda um homomorfismo de grupos).

Definição 2.8.2. *Se* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *são categorias, então um* ***funtor covariante*** $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *é uma função tal que*

(i) Se A *é objeto de* $\mathcal{C}$ *então* $T(A)$ *é objeto de* $\mathcal{D}$*;*

(ii) Se $f : A \longrightarrow B$ *é morfismo de* $\mathcal{C}$ *então* $T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$ *é morfismo de* $\mathcal{D}$*;*

(iii) Se $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : B \longrightarrow C$ *são morfismos de* $\mathcal{C}$ *então sendo* $T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$ *e* $T(g) : T(B) \longrightarrow T(C)$*,* $T(g) \circ T(f)$ *é morfismo de* $\mathcal{D}$ *e* $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$*;*

(iv) $T(id_A) = id_{T(A)}$*, para todo objeto* A *de* $\mathcal{C}$*.*

Exemplo 2.8.2. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria, então o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é definido por $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo objeto A e $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo f.

Definição 2.8.3. *Um* ***funtor contravariante*** $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$*, em que* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *são categorias, é uma função tal que* *(i) Se A é objeto de $\mathcal{C}$ então $T(A)$ é objeto de $\mathcal{D}$;*

(ii) Se $f : A \longrightarrow B$ é morfismo de $\mathcal{C}$ então $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ é morfismo de $\mathcal{D}$;

(iii) Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são morfismos de $\mathcal{C}$ então sendo $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ e $T(g) : T(C) \longrightarrow T(B)$, $T(f) \circ T(g)$ é morfismo de $\mathcal{D}$ e $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$;

(iv) $T(id_A) = id_{T(A)}$, para todo objeto A de $\mathcal{C}$.

Capítulo 3

Fibrações e Cofibrações

Neste capítulo, demonstramos que existe uma bijeção entre os conjuntos $[\Sigma X, Y]$ e $[X, \Omega Y]$ (vide corolário 3.0.1) e estudamos fibrações e cofibrações.

Seja $\mathcal{C}_0$ a categoria cujos objetos são espaços topológicos com ponto base e cujos morfismos são funções contínuas (aplicações) que preservam ponto base. De agora em diante, os termos "espaço" e "aplicações" referem-se a objetos e morfismos de $\mathcal{C}_0$, respectivamente.

Dados $X, Y \in \mathcal{C}_0$ com pontos base x_0 e y_0, respectivamente, seja $F(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X em Y com a topologia que tem como sub-base de abertos conjuntos da forma

$$M(K, W) = \{f \in F(X, Y) : f(K) \subset W\}$$

onde $K \subset X$ é compacto e $W \subset Y$ é aberto, tal topologia é denominada compacto-aberta.

A aplicação constante $c : X \longrightarrow Y$ que aplica o espaço X no ponto base y_0, isto é, $c(x) = y_0$, $\forall x \in X$, é tomada como ponto base de $F(X, Y)$.

Definição 3.0.1. *Duas aplicações $f_0, f_1 \in F(X, Y)$ são ditas **homotópicas** (notação: $f_0 \sim f_1$)*

se existir uma aplicação $H : X \times I \longrightarrow Y$, *onde* I *é o intervalo unitário* $[0,1]$, *com ponto base 0, tal que*

$$H(x,0) = f_0(x), H(x,1) = f_1(x), \forall x \in X;$$

$$H(x_0,t) = y_0, \forall t \in I.$$

Dizemos que a aplicação H *é uma* ***homotopia*** *ligando* f_0 *e* f_1 *e denotamos este fato por* $H : f_0 \sim f_1$.

Lema 3.0.1. *A relação "homotopia" é uma relação de equivalência.*

Demonstração: De fato, a relação é reflexiva ($f_0 \sim f_0$), uma vez que $H : X \times I \longrightarrow Y$ definida por $H(x,t) = f_0(x), \forall x \in X, \forall t \in I$, dá uma homotopia ligando f_0 a f_0, pois $H(x,0) = f_0(x), H(x,1) = f_0(x), \forall x \in X$ e $H(x_0,t) = f_0(x_0) = y_0, \forall t \in I$. Além disso, é uma relação simétrica ($f_0 \sim f_1 \Rightarrow f_1 \sim f_0$), pois se H é uma homotopia ligando f_0 a f_1 então $K : X \times I \longrightarrow Y$ definida por $K(x,t) = H(x,1-t), \forall x \in X, \forall t \in I$ dá uma homotopia ligando f_1 a f_0, pois $K(x,0) = H(x,1) = f_1(x), K(x,1) = H(x,0) = f_0(x), \forall x \in X$ e $K(x_0,t) = H(x_0,1-t) = y_0, \forall t \in I$.

E finalmente, é uma relação transitiva ($f_0 \sim f_1$ e $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_0 \sim f_2$), pois se H é homotopia ligando f_0 a f_1 e K é homotopia ligando f_1 a f_2, então $G : X \times I \longrightarrow Y$ definida por

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \forall x \in X,$$

dá uma homotopia ligando f_0 a f_2, pois $G(x,0) = H(x,0) = f_0(x), G(x,1) = K(x,1) = f_2(x), \forall x \in X$, e

$$G(x_0,t) = \begin{cases} H(x_0,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x_0,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = y_0, \forall t \in I.$$

Observemos que pelo Lema da Colagem, G é contínua, pois $G|_{X\times[0,\frac{1}{2}]} = H$ e $G|_{X\times[\frac{1}{2},1]} = K$ são funções contínuas e para $t = \frac{1}{2}$ temos $H(x,1) = f_1(x) = K(x,0)$. $\square$

Denotaremos por $[X,Y]$ o conjunto quociente de $F(X,Y)$ pela relação "homotopia".

Olhando para o aspecto funtorial de $F(\ \ ,\ \ )$, temos o seguinte lema:

Lema 3.0.2. *Para todo $Z \in \mathcal{C}_0$ fixado, $F(Z,\ \ )$ é um funtor de $\mathcal{C}_0$ em $\mathcal{C}_0$ covariante na segunda variável e $F(\ \ ,Z)$ é funtor contravariante na primeira variável.*

Mais precisamente, fixando um espaço Z e dada uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, temos que f induz uma aplicação $f_\# : F(Z,X) \longrightarrow F(Z,Y)$ que associa a cada $g \in F(Z,X)$, $f_\#(g) = f \circ g$ e uma aplicação $f^\# : F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$ que associa a cada $g \in F(Y,Z)$, $f^\#(g) = g \circ f$.

Demonstração: De fato, $F(Z,\ \ )$ leva um objeto X de $\mathcal{C}_0$ no objeto $F(Z,X)$ de $\mathcal{C}_0$ e $F(\ \ ,Z)$ leva um objeto X de $\mathcal{C}_0$ no objeto $F(X,Z)$ de $\mathcal{C}_0$, $\forall X \in \mathrm{C}_0$, pois $F(Z,X)$ e $F(X,Z)$ são espaços topológicos com pontos bases $c : Z \longrightarrow X$ que leva todo elemento de Z no ponto base x_0 de X e $c : X \longrightarrow Z$ que leva todo elemento de X no ponto base z_0 de Z, respectivamente. Além disso, $f_\#$ e $f^\#$ são contínuas; com efeito, se $M(K,W)$ é um aberto sub-básico de $F(Z,Y)$, então

$$\begin{aligned}
f_\#^{-1}(M(K,W)) &= \{g \in F(Z,X) : f_\#(g) \in M(K,W), \forall\ K \subset Z \text{ compacto}, \forall\ W \subset Y \text{ aberto}\}\\
&= \{g \in F(Z,X) : (f \circ g) \in M(K,W), \forall\ K \subset Z \text{ compacto}, \forall\ W \subset Y \text{ aberto}\}\\
&= \{g \in F(Z,X) : (f \circ g)(K) \subset W, \forall\ K \subset Z \text{ compacto}, \forall\ W \subset Y \text{aberto}\}\\
&= \{g \in F(Z,X) : g(K) \subset f^{-1}(W), \forall\ K \subset Z \text{ compacto}, \forall\ f^{-1}(W) \subset X \text{ aberto}\}\\
&= M(K, f^{-1}(W)),
\end{aligned}$$

que é um aberto sub-básico de $F(Z,X)$. E se $M(K,W)$ é um aberto sub-básico de $F(X,Z)$, então

$$(f^\#)^{-1}(M(K,W)) = \{g \in F(Y,Z) : f^\#(g) \in M(K,W), \forall\ K \subset X \text{ compacto}, \forall W \subset Z \text{ aberto}\}$$

$$= \{g \in F(Z,X) : (g \circ f) \in M(K,W), \forall\, K \subset X \text{ compacto}, \forall\, W \subset Z \text{ aberto}\}$$

$$= \{g \in F(Z,X) : (g \circ f)(K) \subset W, \forall\, K \subset X \text{ compacto}, \forall\, W \subset Z \text{ aberto}\}$$

$$= \{g \in F(Z,X) : g(f(K)) \subset W, \forall\, f(K) \subset Y \text{ compacto}, \forall\, W \subset Z \text{ aberto}\}$$

$$= M(f(K),W),$$

que é um aberto sub-básico de $F(Y,Z)$. E assim, $F(Z,\ \ )$ leva um morfismo g de $\mathcal{C}_0$ em um morfismo $f_\#$ de $\mathcal{C}_0$ e $F(\ \ ,Z)$ leva um morfismo g de $\mathcal{C}_0$ em um morfismo $f^\#$ de $\mathcal{C}_0$, $\forall g \in \mathcal{C}_0$, já que $f_\# = f \circ g$ é aplicação que preserva ponto base, pois para $c : Z \longrightarrow X$ definida por $c(z) = x_0, \forall z \in Z$, que é o ponto base de $F(Z,X)$, temos que $f_\#(c) = f \circ c$ onde $(f \circ c)(z) = f(x_0) = y_0$, que é o ponto base de $F(Z,Y)$, e $f^\# = g \circ f$ também preserva ponto base, pois para $c : Y \longrightarrow Z$ definida por $c(y) = z_0, \forall y \in Y$, que é o ponto base de $F(Y,Z)$, temos que $f^\#(c) = c \circ f$ onde $(c \circ f)(y) = c(x_0) = z_0$, que é o ponto base de $F(Y,Z)$. $\square$

Lema 3.0.3. *Se I_0 for a categoria dos conjuntos com ponto base e aplicações de conjuntos que preservam ponto base, então $[Z,\ \ ] : \mathcal{C}_0 \longrightarrow I_0$ é um funtor covariante na segunda variável e $[\ \ ,Z] : \mathcal{C}_0 \longrightarrow I_0$ é um funtor contravariante na primeira variável, $\forall Z \in \mathcal{C}_0$ fixado. Assim, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ induz $f_* : [Z,X] \longrightarrow [Z,Y]$ definida por $f_*([g]) = [f \circ g]$, $\forall g \in [Z,X]$, e uma função $f^* : [Y,Z] \longrightarrow [X,Z]$ definida por $f^*([g]) = [g \circ f]$, $\forall g \in [Y,Z]$.*

Demonstração: Temos que f_* é bem definida, pois se $[g] = [h] \in [Z,X]$ então $g \sim h$, isto é, existe uma aplicação $H : Z \times I \longrightarrow X$ tal que $H(z,0) = g(z), H(z,1) = h(z), \forall z \in Z$ e $H(z_0,t) = x_0, \forall t \in I$. Daí, $K : Z \times I \longrightarrow Y$ definida por $K(z,t) = (f \circ H)(z,t)$ é uma homotopia ligando $(f \circ g)$ a $(f \circ h)$, pois $K(z,0) = (f \circ H)(z,0) = f(g(z)) = (f \circ g)(z)$, $K(z,1) = (f \circ H)(z,1) = f(h(z)) = (f \circ h)(z)$, $\forall z \in Z$ e $K(z_0,t) = (f \circ H)(z_0,t) = f(x_0) = y_0$, $\forall t \in I$. Logo, $[f \circ g] = [f \circ h]$, ou seja, $f_*([g]) = f_*([h])$.

Além disso, f_* preserva ponto base. De fato, seja $c : Z \longrightarrow X$ definida por $c(z) = x_0$,

$\forall z \in Z$. Então, $f_*([c]) = [f \circ c]$, onde $(f \circ c)(z) = f(c(z)) = f(x_0) = y_0$, $\forall z \in Z$. Logo, f_* leva ponto base de $[Z, X]$ em ponto base de $[Z, Y]$.

De forma análoga, podemos ver que f^* é bem definida e preserva ponto base. $\square$

Lema 3.0.4. *Se $f, g : X \longrightarrow Y$ são homotópicas e $h : Z \longrightarrow X$ é uma aplicação, então $f \circ h$ é homotópica à $g \circ h$.*

Demonstração: Se H é uma homotopia entre f e g, defina $G : Z \times I \longrightarrow Y$ por $G(z,t) = (H \circ (h \times 1))(z,t)$, $\forall (z,t) \in Z \times I$. Então, G é uma aplicação, pois H e $h \times 1$ o são. Além disso, $G(z,0) = (H \circ (h \times 1))(z,0) = H(h(z),0) = f(h(z)) = (f \circ h)(z)$, $G(z,1) = (H \circ (h \times 1))(z,1) = H(h(z),1) = g(h(z)) = (g \circ h)(z)$, $\forall z \in Z$ e $G(z_0,t) = (H \circ (h \times 1))(z_0,t) = H(h(z_0),t) = H(x_0,t) = y_0$, $\forall t \in I$. Portanto, $f \circ h \sim g \circ h$. $\square$

Lema 3.0.5. *Se $f, g : X \longrightarrow Y$ são homotópicas, então para todo $Z \in \mathcal{C}_0$ fixado, $f_* = g_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$.*

Demonstração: De fato, para quaisquer $[h] \in [Z, X]$ temos que $f_*([h]) = [f \circ h]$. Como, pelo lema anterior, $f \circ h \sim g \circ h$, então $[f \circ h] = [g \circ h]$. Portanto, $f_*([h]) = g_*([h])$, $\forall [h] \in [Z, X]$. Assim, $f_* = g_*$. $\square$

Dois casos particulares de espaços obtidos através do funtor $F(Z, \ \ )$ são aqueles em que Z é o intervalo $I = [0, 1]$ ou a esfera unidimensional S^1. Para todo $X \in \mathcal{C}_0$, definimos $PX = F(I, X)$ como o **espaço dos caminhos** sobre X e $\Omega X = F(S^1, X)$ como o **espaço dos laços** sobre X, baseados em $x_0 \in X$.

Definição 3.0.2. *Chamamos de **avaliação** a aplicação*

$$\mathcal{A} : PX \times I \longrightarrow X$$

definida por $\mathcal{A}(\lambda, t) = \lambda(t)$, $\forall \lambda \in PX, \forall t \in I$.

Mostremos adiante que $\mathcal{A}$ é contínua. Para isso, faremos uso do seguinte lema:

Lema 3.0.6. *Seja I o intervalo unitário $[0,1]$ e $t \in I$. Se $B \subset I$ é um aberto que contém t, então existe $K \subset I$ tal que $t \in K$, $\overline{K}$ é compacto e $\overline{K} \subset B$.*

Demonstração: Como B é um aberto de I contendo t, existe $O \subset I$ aberto tal que $t \in O$ e $\overline{O} \subset B$. E como I é localmente compacto e de Hausdorff, existe $G \subset I$ aberto tal que $t \in G$ e $\overline{G}$ é compacto, pois sendo I localmente compacto, existe tal aberto G em I em que $t \in G \subset K$, onde K é um compacto em I.

Logo, $\overline{G} \subset \overline{K}$ e como K é um compacto contido em um espaço de Hausdorff, temos que K é fechado e daí, $\overline{G} \subset K$, isto é, temos um fechado contido em um compacto, o que nos dá $\overline{G}$ compacto, pela Proposição 2.5.1.

Tome $K = G \cap O \subset I$ em que $t \in K$. Como $K \subset G$ então $\overline{K} \subset \overline{G}$, e sendo $\overline{G}$ compacto, temos que $\overline{K}$ é compacto, e ainda, $\overline{K} \subset \overline{O} \subset B$. $\square$

Lema 3.0.7. *A aplicação $\mathcal{A}$ definida em 3.0.2 é contínua.*

Demonstração: Seja $(\lambda, t) \in PX \times I$ e $W \subset X$ um aberto tal que $\mathcal{A}(\lambda, t) = \lambda(t) \in W$. Como λ é contínua, $\lambda^{-1}(W) \subset I$ é um aberto que contém t. Pelo lema anterior, existe $K \subset I$ tal que $t \in K$, $\overline{K}$ é compacto e $\overline{K} \subset \lambda^{-1}(W)$. Logo, $\lambda(\overline{K}) \subset W$ e $U = M(\overline{K}, W)$ é um aberto de PX que contém λ.

Tomemos $B = U \times K \subset PX \times I$ aberto contendo (λ, t). Assim, $\mathcal{A}(B) \subset W$, pois para todo $(\alpha, s) \in B$, temos que $\alpha(\overline{K}) \subset W$, $s \in K$ e $\mathcal{A}(\alpha, s) = \alpha(s)$. Como $s \in K \subset \overline{K}$, $\mathcal{A}(\alpha, s) \in W$. Portanto, $\mathcal{A}$ é contínua. $\square$

Observação: Se Z é um espaço localmente compacto e regular, a avaliação

$\mathcal{A} : F(Z, X) \times Z \longrightarrow X$ definida por $\mathcal{A}(f, z) = f(z)$ será contínua. Isso segue do fato de que todo espaço regular é de Hausdorff e a demonstração é similar ao caso em que $Z = I$.

Introduzimos agora o conceito de suspensão (reduzida) de um espaço topológico.

Definição 3.0.3. *Dado $X \in \mathcal{C}_0$, chamamos de* ***suspensão*** *de X o espaço obtido de $I \times X$ identificando o sub-espaço $I \times \{x_0\} \cup \dot{I} \times X$, onde $\dot{I} = \{0, 1\}$, a um ponto, que será tomado como o ponto base da suspensão, denotada por ΣX. Em outras palavras,*

$$\Sigma X = \frac{I \times X}{I \times \{x_0\} \cup \dot{I} \times X}.$$

Exemplo 3.0.1. Para $X = I$ com ponto base 0, temos $\Sigma X = D$ em que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$.

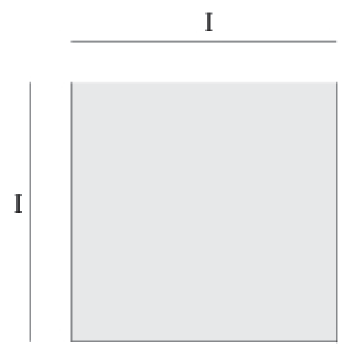

Figura 3.1: $I \times \{0\} \cup \dot{I} \times I$

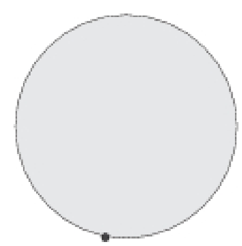

Figura 3.2: ΣI

Exemplo 3.0.2. Para $X = S^1$ com ponto base s_0, temos $\Sigma X = S^2$.

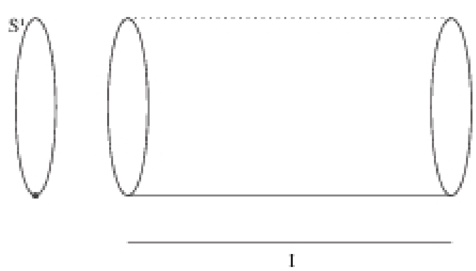

Figura 3.3: $I \times \{s_0\} \cup \dot{I} \times S^1$

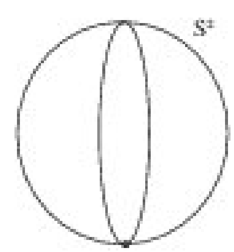

Figura 3.4: ΣS^1

Lema 3.0.8. $\Sigma : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}_0$ *é um funtor covariante.*

Demonstração: Com efeito, Σ aplica todo $X \in \mathcal{C}_0$ em ΣX, que é um espaço topológico com ponto base e portanto um objeto de $\mathcal{C}_0$. E toda $f : X \longrightarrow Y$ contínua com $f(x_0) = y_0$ induz $1 \times f : I \times X \longrightarrow I \times Y$ contínua com $(1 \times f)(0, x_0) = (0, y_0)$ que por sua vez induz $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ contínua dada por $\Sigma f([(t, x)]) = [(t, f(x))]$ e consequentemente, $\Sigma f([(0, x)]) = \Sigma f([(1, x)]) = \Sigma f([(t, x_0)])$.

Para verificar que Σf é contínua basta ver que Σf é definida de modo a comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \times X \arrow[r, "1\times f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & I \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"'] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Assim, para todo aberto $\theta \subset \Sigma Y$, $(\Sigma f)^{-1}(\theta) = \pi_X((1 \times f)^{-1}\pi_Y^{-1}(\theta))$ que é aberto em ΣX, pois π_X é função aberta. $\square$

Agora apresentamos a suspensão de X, ΣX, sob outro ponto de vista. Para tanto são necessárias a definição a seguir.

Definição 3.0.4. *Dados $X \in \mathcal{C}_0$ e a esfera S^1 com ponto base s_0, seja $S^1 \vee X = S^1 \times \{x_0\} \cup \{s_0\} \times X$, denominado **produto wedge** de S^1 com X. Definimos então o espaço $S^1 \wedge X$ como sendo o espaço topológico*

$$\frac{S^1 \times X}{S^1 \vee X}$$

*o qual chamamos de **produto smash** de S^1 com X.*

Lema 3.0.9. $S^1 \wedge X \approx \Sigma X$.

Indicaremos os pontos de $\Sigma X \approx S^1 \wedge X$ por $s \wedge x$, em que $s \in S^1$ e $x \in X$.

Demonstração: Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C}$ como o conjunto dos números complexos da forma $e^{2\pi i\theta}$, parametrizado por $\theta \in I$. Definindo $c : I \longrightarrow S^1$ por $c(t) = e^{2\pi it}$ e considerando

$c \times 1 : I \times X \longrightarrow S^1 \times X$, temos que a funçao $c \times 1$ induz um homeomorfismo

$$\varphi : \frac{I \times X}{I \times \{x_0\} \cup \dot{I} \times X} \longrightarrow \frac{S^1 \times X}{S^1 \times \{x_0\} \cup \{s_0\} \times X}$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} I \times X \arrow[r, "c\times 1"] \arrow[d, "\pi_X"'] & S^1 \times X \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma X \arrow[r, "\varphi"'] & S^1 \wedge X \end{tikzcd}$$

comuta, onde π_X e π são aplicações quocientes.

Com efeito, se $\theta \subset \Sigma X$ é um aberto, então $\varphi(\theta) \subset S^1 \wedge X$ e $\pi^{-1}(\varphi(\theta)) = (c \times 1)(\pi_X^{-1}(\theta))$, que é um aberto de $S^1 \times X$, pois $c \times 1$ é uma aplicação aberta, já que c é uma aplicação aberta. Portanto, $\pi^{-1}(\varphi(\theta))$ é aberto em $S^1 \times X$ e daí, $\varphi(\theta)$ é aberto em $S^1 \wedge X$. Como φ é uma função aberta e contínua, φ é um homeomorfismo. $\square$

Lema 3.0.10. *Sejam $X, Y \in \mathcal{C}_0$ com X de Hausdorff. Se $\Im$ é uma sub-base de Y então os conjuntos $V(K, W) = \{f \in F(X, Y) : f(K) \subset W\}$ onde $K \subset X$ é compacto e $W \in \Im$, formam uma sub-base de abertos para $F(X, Y)$.*

Demonstração: Os conjuntos $M(K, U) = \{f \in F(X, Y) : f(K) \subset U\}$ em que $K \subset X$ é compacto e $U \subset Y$ é aberto formam uma sub-base de abertos para $F(X, Y)$.

É suficiente provar que se $f \in M(K, U)$, com $K \subset X$ compacto e $U \subset Y$ aberto, então existem $K_1, \ldots, K_n \subset X$ compactos e elementos $W_1, \ldots, W_n \in \Im$ tais que

$$f \in V(K_1, W_1) \cap \ldots \cap V(K_n, W_n) \subset M(K, U)$$

. Com efeito, para todo $x \in K$, existe um número finito de elementos de $\Im$, digamos $W_1^x, \ldots, W_{n(x)}^x$ tal que $f(x) \in \bigcap_{j=1}^{n(x)} W_j^x \subset U$. Como f é contínua, existe uma vizinhança U_x de x em K tal que $f(U_x) \subset \bigcap_{j=1}^{n(x)} W_j^x$. Como K é compacto e de Hausdorff, segue que K é regular e portanto para cada x existe um conjunto aberto $V_x \subset K$ tal que

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x \subset K.$$

O conjunto $\{V_x : x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K e como K é compacto, existem $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

Sejam $K_i = \overline{V_{x_i}}$, $i = 1, \ldots, n$. Então, K_i são compactos e, além disso,

$$f(K_i) \subset f(U_{x_i}) \subset \bigcap_{j=1}^{n(x_i)} W_j^{x_i} \subset U, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Isso mostra que para todo $i = 1, \ldots, n$, tomando $W_i = \bigcap_{j=1}^{n(x_i)} W_j^{x_i}$ temos que $f(K_i) \subset W_i$ e portanto $f \in \bigcap_{i=1}^{n} V(K_i, W_i) \subset M(K, U)$ pois se $g \in \bigcap_{i=1}^{n} V(K_i, W_i)$ então $g \in V(K_i, W_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e daí, como $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ temos que $g(K) \subset g(K_{i_0})$, para algum $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim, $g(K) \subset W_{i_0} = \bigcap_{j=1}^{n(x_{i_0})} W_j^{x_{i_0}} \subset U$. Logo, $g \in M(K, U)$. □

Teorema 3.0.1. *Dado um espaço de Hausdorff $X \in \mathcal{C}_0$ e um espaço arbitrário $Y \in \mathcal{C}_0$, existe uma função $\Theta : F(\Sigma X, Y) \longrightarrow F(X, \Omega Y)$ que é contínua e bijetora.*

Demonstração: Definamos Θ da seguinte maneira: dada $\varphi \in F(\Sigma X, Y)$, para cada $x \in X$, $s \in S^1$ arbitrário,

$$[\Theta(\varphi)(x)](s) = \varphi(s \wedge x).$$

Vamos mostrar que Θ está bem definida. Para isso, primeiramente observemos que como $S^1 \times \{x_0\} \cup \{s_0\} \times X$ foi identificado a um ponto, então $\Theta(\varphi)(x) \in F(S^1, Y), \forall x \in X$, pois para cada $x \in X$, $\Theta(\varphi)(x)$ é contínua, visto que φ é contínua e para cada $x \in X$, $\Theta(\varphi)(x) = \varphi \circ \pi_X \circ \psi_x$ onde para cada $x \in X$, $\psi : S^1 \to S^1 \times X$ definida por $\psi_x(s) = (s, x)$ é contínua. Portanto, para cada $x \in X$, $\Theta(\varphi)(x)$ é contínua como composta de contínuas e $[\Theta(\varphi)(x)](s_0) = \varphi(s_0 \wedge x) = y_0$.

Além disso, $\Theta(\varphi)$ leva x_0 no ponto base $c : S^1 \to Y$ definida por $c(s) = y_0$, $\forall s \in S^1$. De fato, $\forall s \in S^1$, $[\Theta(\varphi)(x_0)](s) = \varphi(s \wedge x_0) = y_0 = c(s)$. Portanto, $\Theta(\varphi)(x_0) = c$.

Mostremos então que $\Theta(\varphi) : X \to \Omega Y$ é uma aplicação contínua, ou seja, $\Theta(\varphi)^{-1}$ leva um aberto de ΩY em um aberto de X. Para isso, basta mostrarmos que isso acontece para o caso em que tomamos como aberto de ΩY um conjunto $M(K, W)$ da sub-base de abertos de ΩY.

Com efeito, seja $x \in \Theta(\varphi)^{-1}(M(K, W))$, isto é, $\Theta(\varphi)(x) \in M(K, W)$. Logo, $[\Theta(\varphi)(x)](s) \in W$, $\forall s \in K$. Mas $[\Theta(\varphi)(x)](s) = \varphi(s \wedge x)$, o que significa que $\varphi(K \wedge \{x\}) \subset W$, ou seja, $K \wedge \{x\} \subset \varphi^{-1}(W)$, um aberto de $S^1 \wedge X$, pois φ é contínua. Assim, $\pi_x^{-1}(\varphi^{-1}(W)) = \bigcup_{\mu} (H_\mu \times G_\mu)$ onde $H_\mu \subset S^1$, $G_\mu \subset X$ são abertos.

Como K é compacto, $\pi_X^{-1}(K \wedge \{x\}) \subset \pi_X^{-1}(\varphi^{-1}(W))$ é compacto e portanto pode ser coberto por uma reunião finita de tais conjuntos, digamos que

$$\pi_X^{-1}(K \wedge \{x\}) \subset (H_1 \times G_1) \cup \cdots \cup (H_n \times G_n).$$

Assim, $G = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ é um aberto de X que contém x e se $x' \in G$, $s \in K$, então $[\Theta(\varphi)(x')](s) = \varphi(s \wedge x') \in W$, pois $(s, x') \in \pi_X^{-1}(K \wedge G) \subset K \times G \subset \bigcup_{\mu=1}^{n} (H_\mu \times G_\mu)$ donde $s \wedge x' \in K \wedge G \subset \pi_X \left(\bigcup_{\mu=1}^{n} (H_\mu \times G_\mu) \right) \subset \varphi^{-1}(W)$, pois $\bigcup_{\mu=1}^{n} (H_\mu \times G_\mu) \subset \bigcup_{\mu} (H_\mu \times G_\mu) = \pi_X^{-1}(\varphi^{-1}(W))$. Logo, $s \wedge x' \in \varphi^{-1}(W)$ e portanto $\varphi(s \wedge x') \in W$, donde segue que $\Theta(\varphi)(G) \subset M(K, W)$ e $\Theta(\varphi)$é contínua.

Agora vamos provar que Θ é injetora e sobrejetora.

Sejam φ_1, $\varphi_2 \in F(\Sigma X, Y)$ tais que $\Theta(\varphi_1) = \Theta(\varphi_2)$. Então $[\Theta(\varphi_1)(x)](s) = [\Theta(\varphi_2)(x)](s)$, $\forall x \in X, \forall s \in S^1$, isto é, $\varphi_1(s \wedge x) = \varphi_2(s \wedge x)$, $\forall x \in X, \forall s \in S^1$. Logo, $\varphi_1 = \varphi_2$.

Por outro lado, dado $\psi \in F(X, \Omega Y)$, consideremos $1 \times \psi : S^1 \times X \longrightarrow S^1 \times \Omega$ dada por $(1 \times \psi)(s, x) = (s, \psi(x))$. Fazendo a composição de $(1 \times \psi)$ com a avaliação $A : S^1 \times \Omega Y \longrightarrow Y$, obtemos a função $f := A \circ (1 \times \psi) : S^1 \times X \longrightarrow Y$ dada por $f(s, x) = A(s, \psi(x)) = \psi(x)(s)$.

Notemos que, como f é constante em $S^1 \vee X$, pois $f(s, x_0) = \psi(x_0)(s) = c(s) = y_0$ e $f(s_0, x) = \psi(x)(s_0) = y_0$, segue que está bem definida $\tilde{f} : \Sigma X \longrightarrow Y$ dada por $\tilde{f}(s \wedge x) = f(s, x)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} S^1 \times X \arrow[d, "\pi_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \Sigma X \arrow[r, "\tilde{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

comuta e além disso, $\tilde{f}$ é contínua, pois f é contínua. Então, temos $[\Theta(\tilde{f})(x)](s) = \tilde{f}(s \wedge x) = f(s, x) = \psi(x)(s)$, $\forall x \in X, \forall s \in S^1$. Portanto, $\Theta(\tilde{f})(x) = \psi(x)$, $\forall x \in X$ e assim, $\Theta(\tilde{f}) = \psi$.

Para finalizar a prova, mostremos que Θ é contínua.

Como X é de Hausdorff, pelo Lema anterior temos que

$$V(L, M(K, W)) = \{f \in F(X, \Omega Y) : f(L) \subset M(K, W)\}$$

onde $L \subset X$ é compacto e $M(K, W) \in \Im$, em que $\Im$ é uma sub-base de ΩY, formam uma sub-base de abertos para $F(X, Y)$. Então, basta mostrarmos que $\Theta^{-1}(V(L, M(K, W)))$ é aberto em $F(\Sigma X, Y)$. Temos que

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}(V(L, M(K, W))) &= \{g \in F(\Sigma X, Y) : \Theta(g) \in V(L, M(K, W))\} \\ &= \{g \in F(\Sigma X, Y) : \Theta(g)(L) \subset M(K, W)\} \\ &= \{g \in F(\Sigma X, Y) : [\Theta(g)(L)](K) \subset W\}. \end{aligned}$$

Como $[\Theta(g)(L)](K) = g(K \wedge L)$, então $\Theta^{-1}(V(L, M(K, W))) = \{g \in F(\Sigma X, Y) : g(K \wedge L) \subset W\}$ e como $\pi_X(K \times L) = K \wedge L$, $K \times L$ é compacto em $S^1 \times X$ e π_X é contínua, segue que $K \wedge L$ é um compacto de ΣX.

Portanto, $\Theta^{-1}(V(L, M(K, W))) = M(K \wedge L, W)$ que é um aberto em $F(\Sigma X, Y)$. Assim, Θ é contínua. $\square$

Corolário 3.0.1. *Existe uma bijeção entre os conjuntos* $[\Sigma X, Y]$ *e* $[X, \Omega Y]$.

Demonstração: Definamos $\overline{\Theta} : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$ por $\overline{\Theta}([f]) = [\Theta(f)]$ e mostremos que $\overline{\Theta}$ é uma bijeção.

Primeiramente, verifiquemos que $\overline{\Theta}$ está bem definida. Se $[f_0] = [f_1] \in [\Sigma X, Y]$, então $f_0 \sim f_1$, isto é, existe uma homotopia $H : \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ ligando f_0 a f_1. Então, a função $H \circ (\pi_X \times 1) : S^1 \times X \times I \longrightarrow Y$ leva $\{x_0\} \times X \times I$ e $X \times \{s_0\} \times I$ no ponto base y_0. De fato,

$$(H \circ (\pi_X \times 1))(s_0, x, t) = H(s_0 \wedge x, t) = y_0, \forall x \in X, \forall t \in I;$$

$$(H \circ (\pi_X \times 1))(s, x_0, t) = H(s \wedge x_0, t) = y_0, \forall s \in S^1, \forall t \in I.$$

Logo, $H \circ (\pi_X \times 1)$ induz uma aplicação $H' : S^1 \wedge (X \times I) \longrightarrow Y$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times X \times I \arrow[r, "H \circ (\pi_X \times 1)"] \arrow[d, "q"'] & I \times Y \\
S^1 \wedge (X \times I) \arrow[ur, "H'"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Sendo $\Theta_2 : F(\Sigma(X \times I), Y) \longrightarrow F(X \times I, \Omega Y)$ a função definida como no Teorema anterior, temos que $\Theta_2(H')$ é uma homotopia ligando $\Theta(f_0)$ a $\Theta(f_1)$. Com efeito, $\Theta_2(H') : X \times I \longrightarrow \Omega Y$ dada por $[\Theta_2(H')(x,t)](s) = H'(s \wedge (x,t)) = H' \circ q(s,x,t) = (H \circ (\pi_X \times 1))(s,x,t) = H(s \wedge x, t)$, $\forall s \in S^1$ e $\forall (x,t) \in X \times I$ é tal que $[\Theta_2(H')(x,0)](s) = H(s \wedge x, 0) = f_0(s \wedge x) = [\Theta(f_0)(x)](s), \forall s \in S^1$ e $[\Theta_2(H')(x,1)](s) = H(s \wedge x, 1) = f_1(s \wedge x) = [\Theta(f_1)(x)](s), \forall s \in S^1$, e portanto, $\Theta_2(H')(x,0) = \Theta(f_0)(x), \forall x \in X$ e $\Theta_2(H')(x,1) = \Theta(f_1)(x), \forall x \in X$. Além disso, $[\Theta_2(H')(x_0,t)](s) = H(s \wedge x_0, t) = y_0 = c(s), \forall s \in S^1$.

Portanto, $[\Theta(f_0)] = [\Theta(f_1)]$, ou seja, $\overline{\Theta}([f_0]) = \overline{\Theta}([f_1])$.

Agora, mostremos que $\overline{\Theta}$ é injetora. Para isso, suponhamos $\overline{\Theta}([f_0]) = \overline{\Theta}([f_1])$, isto é, $[\Theta(f_0)] = [\Theta(f_1)]$. Então, existe uma homotopia $K : X \times I \longrightarrow \Omega Y$ ligando $\Theta(f_0)$ a $\Theta(f_1)$

tal que $K(x_0,t)(s) = y_0 = c(s), \forall s \in S^1$. Como Θ_2 é sobrejetora e $K \in F(X \times I, \Omega Y)$, existe $G \in F(\Sigma(X \times I), Y)$ tal que $\Theta_2(G) = K$.

A composição $G \circ q : S^1 \times X \times I \longrightarrow Y$ onde $q : S^1 \times X \times I \longrightarrow S^1 \wedge (X \times I)$ é dada por $q(s,x,t) = s \wedge (x,t)$, envia $\{s_0\} \times X \times I$ e $S^1 \times \{x_0\} \times I$ em y_0. De fato,

$$(G \circ q)(s_0,x,t) = G(s_0 \wedge (x,t)) = y_0, \forall x \in X, \forall t \in I;$$

$$(G \circ q)(s,x_0,t) = G(s \wedge (x_0,t)) = y_0, \forall s \in S^1, \forall t \in I.$$

Assim, $G \circ q$ induz uma aplicação $G' : \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ dada por $G'(s \wedge x, t) = (G \circ (\pi_X \times 1))(s,x,t) = G \circ q(s,x,t)$. Temos então que G' é uma homotopia ligando f_0 a f_1. De fato, $G'(s \wedge x, 0) = G \circ q(s,x,0) = G(s \wedge (x,0)) = [\Theta_2(G)(x,0)](s) = [K(x,0)](s) = [\Theta(f_0)(x)](s) = f_0(s \wedge x)$, $G'(s \wedge x, 1) = G \circ q(s,x,1) = G(s \wedge (x,1)) = [\Theta_2(G)(x,1)](s) = [K(x,1)](s) = [\Theta(f_1)(x)](s) = f_1(s \wedge x)$ e $G'(s_0 \wedge x, t) = G \circ q(s_0,x,t) = G(s_0 \wedge (x,t)) = y_0$, $G'(s \wedge x_0, t) = G \circ q(s,x_0,t) = G(s \wedge (x_0,t)) = y_0$.

Logo, $[f_0] = [f_1]$ e $\overline{\Theta}$ é injetora.

Para finalizar, observemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma X, Y) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\eta_1"'] & F(X, \Omega Y) \arrow[d, "\eta_2"] \\
{[\Sigma X, Y]} \arrow[r, "\overline{\Theta}"'] & {[X, \Omega Y]}
\end{tikzcd}$$

Dada $[f] \in [X, \Omega Y]$, como $\eta_2 \circ \Theta$ é sobrejetora, existe $g \in F(\Sigma X, Y)$ tal que $(\eta_2 \circ \Theta)(g) = [f]$. Tome $\eta_1(g) = [g] \in [\Sigma X, Y]$. Então, $\overline{\Theta}([g]) = \overline{\Theta}(\eta_1(g)) = (\overline{\Theta} \circ \eta_1)(g) = (\eta_2 \circ \Theta)(g) = [f]$. Portanto, $\overline{\Theta}$ é sobrejetora. $\square$

Definição 3.0.5. *Sejam E e B conjuntos quaisquer. Uma aplicação $p : E \longrightarrow B$ é dita uma*

fibração *se, para todo diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd}$$

onde X é um espaço arbitrário, H é uma homotopia de $p \circ h$ e i é a inclusão, existir uma homotopia $G : X \times I \longrightarrow E$ tal que $p \circ G = H$ e $G \circ i = h$.

Exemplo 3.0.3. Dado $B \in \mathcal{C}_0$, seja $p : PB \longrightarrow B$ a aplicação dada por $p(\lambda) = \lambda(1), \forall \lambda \in PB$. Provaremos que p é uma fibração.

Para isso, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & PB \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

em que H é uma homotopia de $p \circ h$ e i é a inclusão. Queremos mostrar que existe uma homotopia $G : X \times I \longrightarrow PB$ tal que $p \circ G = H$ e $G \circ i = h$.

Definamos G por

$$G(x,t)(s) = \begin{cases} h(x,0)(ts+s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1} \\ H(x, ts+s-1), & \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$\forall x \in X, \forall t, s \in I$.

Notemos que G está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{t+1}$ temos que $h(x,0)(ts+s) = h(x,0)(1)$ e $H(x, ts+s-1) = H(x,0) = (H \circ i)(x,0) = (p \circ h)(x,0) = p(h(x,0)) = h(x,0)(1)$.

Como h e H são contínuas, pelo Lema da Colagem temos que G é contínua. Além disso,

$$(G \circ i)(x,0)(s) = G(x,0)(s) = \begin{cases} h(x,0)(s), & 0 \leq s \leq 1 \\ H(x,0), & s = 1 \end{cases} = h(x,0)(s), \forall s \in I.$$

Logo, $(G \circ i)(x,0) = h(x,0), \forall x \in X$, isto é, $G \circ i = h$.

Ainda, $(p \circ G)(x,t) = p(G(x,t)) = G(x,t)(1) = H(x,t), \forall x \in X, \forall t \in I$, ou seja, $p \circ G = H$.

Portanto, p é fibração.

A situação dual à de uma fibração é aquela representada por uma cofibração, a saber:

Definição 3.0.6. *Sejam B e E conjuntos arbitrários. Uma aplicação $q : B \longrightarrow E$ é uma* ***cofibração*** *se, para todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \times I \arrow[dr, dashed, "G"] & E \times \{0\} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h"] \\ B \times I \arrow[u, "q\times 1"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

tal que $H(x,0) = h(q(x),0), \forall x \in B$, existir uma homotopia $G : E \times I \longrightarrow X$ tal que $G \circ (q \times 1) = H$ e $G \circ i = h$.

Exemplo 3.0.4. Dado $B \in \mathcal{C}_0$, o **cone** CB sobre B é o espaço obtido de $B \times I$ por identificação do sub-espaço $B \vee I = B \times \{0\} \cup \{b_0\} \times I$ a um ponto, que será tomado como ponto base de $CB = B \wedge I$. Podemos tomar B como sub-espaço de CB, a imersão sendo dada pela aplicação $q : B \longrightarrow CB$ definida por $q(x) = x \wedge 1, \forall x \in B$. Mostraremos que q é uma cofibração.

De fato, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} CB \times I & CB \times \{0\} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h"] \\ B \times I \arrow[u, "q\times 1"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

tal que $H(x,0) = h(q(x),0), \forall x \in B$.

Seja $G : CB \times I \longrightarrow X$ definida por

$$G(x \wedge s, t) = \begin{cases} h(x \wedge (ts+s), 0), & 0 \le s \le \frac{1}{t+1}, \\ H(x, ts+s-1), & \frac{1}{t+1} \le s \le 1, \end{cases}$$

$\forall x \in X, \forall s,t \in I$.

Temos que G está bem definida, pois para $s = \dfrac{1}{t+1}$ temos $h(x \wedge (ts+s), 0) = h(x \wedge 1, 0)$ e $H(x, ts+s-1) = H(x,0) = h(q(x),0) = h(x \wedge 1, 0)$. Como h e H são contínuas, pelo Lema da Colagem, G é contínua. Ainda, $(G \circ (q \times 1))(x,t) = G(q(x),t) = G(x \wedge 1, t) = H(x,t), \forall x \in X, \forall t \in I$, isto é, $G \circ (q \times 1) = H$ e,

$$(G \circ i)(x \wedge s, 0) = G(x \wedge s, 0) = \begin{cases} h(x \wedge s, 0), & 0 \leq s \leq 1 \\ H(x,0), & s = 1 \end{cases} = h(x \wedge s, 0), \forall x \wedge s \in CB,$$

isto é, $G \circ i = h$.

Portanto, q é cofibração.

Capítulo 4

Pullbacks e Pushouts

Neste capítulo, veremos o que são os pullbacks e os pushouts e quais hipóteses precisamos para que determinadas aplicações sejam um pullback ou um pushout. Os pullbacks e pushouts serão importantes na construção das sequências de espaços, que veremos no capítulo posterior.

Definição 4.0.1. *Um **pullback** de duas aplicações em $\mathcal{C}_0$ com mesmo codomínio $f_1 : X_1 \longrightarrow A$ e $f_2 : X_2 \longrightarrow A$ é um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & A \end{tikzcd}$$

com a seguinte propriedade universal: se $i_1' : Z' \longrightarrow X_1$ e $i_2' : Z' \longrightarrow X_2$ são tais que $f_1 \circ i_1' = f_2 \circ i_2'$, então existe uma aplicação $h : Z' \longrightarrow Z$ tal que $i_1 \circ h = i_1'$ e $i_2 \circ h = i_2'$.

A aplicação h pode ser vista no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "i_1'"] \arrow[ddr, bend right, "i_2'"'] & & \\ & Z \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & X_2 \arrow[r, "f_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Um particular pullback de f_1, f_2 é obtido tomando-se Z como sendo o espaço $M(f_1, f_2) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$ com a topologia induzida pela topologia produto de $X_1 \times X_2$; definimos $i_1 : Z \longrightarrow X_1$ por $i_1(x_1, x_2) = x_1$ e $i_2 : Z \longrightarrow X_2$ por $i_2(x_1, x_2) = x_2$.

Da forma como definimos Z, i_1 e i_2, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & A \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Provemos agora que este diagrama tem a propriedade universal.

Se $i'_1 : Z' \longrightarrow X_1$ e $i'_2 : Z' \longrightarrow X_2$ são tais que $f_1 \circ i'_1 = f_2 \circ i'_2$, definamos $h : Z' \longrightarrow Z$ por $h(z') = (i'_1(z'), i'_2(z'))$, $\forall z' \in Z'$. Temos que h está bem definida, pois $f_1(i'_1(z')) = f_2(i'_2(z'))$ e $h(z'_0) = (i'_1(z'_0), i_2(z'_0)) = (x_1^0, x_2^0)$. Além disso, $(i_1 \circ h)(z') = i_1(i'_1(z'), i'_2(z')) = i'_1(z')$, $\forall z' \in Z'$, isto é, $i_1 \circ h = i'_1$ e $(i_2 \circ h)(z') = i_2(i'_1(z'), i'_2(z')) = i'_2(z')$, $\forall z' \in Z'$, ou seja, $i_2 \circ h = i'_2$.

Dualmente, temos a noção de pushout.

Definição 4.0.2. *Dadas duas aplicações em $\mathcal{C}_0$ com mesmo domínio $g_1 : A \longrightarrow X_1$ e $g_2 : A \longrightarrow X_2$, um **pushout** de g_1, g_2 é um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_2 \arrow[r, "j_2"'] & K \end{tikzcd}$$

com a seguinte propriedade universal: se $j'_1 : X_1 \longrightarrow K'$ e $j'_2 : X_2 \longrightarrow K'$ são tais que $j'_1 \circ g_1 = j'_2 \circ g_2$, então existe uma aplicação $k : K \longrightarrow K'$ tal que $k \circ j_1 = j'_1$ e $k \circ j_2 = j'_2$.

A aplicação k pode ser vista no diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, bend left, "j_1'"] & \\
X_2 \arrow[r, "j_2"'] \arrow[drr, bend right, "j_2'"'] & K \arrow[dr, "k"] & \\
 & & K'
\end{tikzcd}$$

Um particular pushout de g_1, g_2 é obtido como se segue: tomemos $X_1 \vee X_2 = X_1 \times \{x_2^0\} \cup \{x_1^0\} \times X_2$ onde x_1^0 e x_2^0 são pontos base de X_1 e X_2, respectivamente. A seguir definimos

$$K = C(g_1, g_2) = \frac{X_1 \vee X_2}{(g_1(a), x_2^0) \sim (x_1^0, g_2(a))},$$

$\forall a \in A$. O ponto base de $C(g_1, g_2)$ é $[(x_1^0, x_2^0)]$. Definimos $j_1 : X_1 \longrightarrow K$ por $j_1(x_1) = [(x_1, x_2^0)]$, $\forall x_1 \in X_1$, e $j_2 : X_2 \longrightarrow K$ por $j_2(x_2) = [(x_1^0, x_2)]$, $\forall x_2 \in X_2$.

Então, temos que $(j_1 \circ g_1)(a) = j_1(g_1(a)) = [(g_1(a), x_2^0)] = [(x_1^0, g_2(a))] = j_2(g_2(a)) = (j_2 \circ g_2)(a)$, $\forall a \in A$ e o diagrama é comutativo. Além disso, se $j_1' : X_1 \longrightarrow K'$ e $j_2' : X_2 \longrightarrow K'$ são tais que $(j_1' \circ g_1)(a) = (j_2' \circ g_2)(a)$, $\forall a \in A$, defina $k : K \longrightarrow K'$ por $k([(x_1, x_2^0)]) = j_1'(x_1)$, $\forall x_1 \in X_1$ e $k([(x_1^0, x_2)]) = j_2'(x_2)$, $\forall x_2 \in X_2$.

Temos que k está bem definida, pois $k([(x_1^0, x_2^0)]) = j_1'(x_1^0)$ e $k([(x_1^0, x_2^0)]) = j_2'(x_2^0)$, mas $j_1'(x_1^0) = j_1'(g_1(a_0)) = j_2'(g_2(a_0)) = j_2'(x_2^0)$. Então, $(k \circ j_1)(x_1) = k([(x_1, x_2^0)]) = j_1'(x_1)$, $\forall x_1 \in X_1$, isto é, $k \circ j_1 = j_1'$, e $(k \circ j_2)(x_2) = k([(x_1^0, x_2)]) = j_2'(x_2)$, $\forall x_2 \in X_2$, ou seja, $k \circ j_2 = j_2'$.

Teorema 4.0.1. *Se $f_1 : X_1 \longrightarrow A$ for uma fibração e $f_2 : X_2 \longrightarrow A$ for uma aplicação qualquer, então $i_2 : M(f_1, f_2) \longrightarrow X_2$ é uma fibração.*

Demonstração: Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & M(f_1, f_2) \arrow[d, "i_2"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

onde X é um espaço qualquer, i é a inclusão e H é uma homotopia de $i_2 \circ h$.

Devemos provar que existe uma homotopia $\bar{G} : X \times I \longrightarrow M(f_1, f_2)$ tal que $i_2 \circ \bar{G} = H$ e $\bar{G} \circ i = h$. Pela construção do pullback usando $Z = M(f_1, f_2)$ temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M(f_1, f_2) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & A \end{tikzcd}$$

onde $i_1(x_1, x_2) = x_1$ e $i_2(x_1, x_2) = x_2$.

Então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "i_1 \circ h"] \arrow[d, "i"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X \times I \arrow[r, "f_2 \circ H"'] & A \end{tikzcd}$$

Como f_1 é fibração, existe uma homotopia $G : X \times I \longrightarrow X_1$ tal que $f_1 \circ G = f_2 \circ H$ e $G \circ i = i_1 \circ h$.

Definamos $\bar{G} : X \times I \longrightarrow M(f_1, f_2)$ por $\bar{G}(x,t) = (G(x,t), H(x,t))$, $\forall (x,t) \in X \times I$. Como G e H são contínuas, segue que $\bar{G}$ é contínua. Ainda, $(i_2 \circ \bar{G})(x,t) = i_2(G(x,t), H(x,t)) = H(x,t)$, $\forall (x,t) \in X \times I$, ou seja, $i_2 \circ \bar{G} = H$ e $(\bar{G} \circ i)(x,0) = \bar{G}(x,0) = (G(x,0), H(x,0)) = ((G \circ i)(x,0), (H \circ i)(x,0)) = ((i_1 \circ h)(x,0), (i_2 \circ h)(x,0)) = h(x,0)$, $\forall x \in X$, isto é, $\bar{G} \circ i = h$.

Portanto, i_2 é fibração. $\square$

Teorema 4.0.2. *Se $g_1 : A \longrightarrow X_1$ for uma cofibração e $g_2 : A \longrightarrow X_2$ for uma aplicação qualquer, então $j_2 : X_2 \longrightarrow C(g_1, g_2)$ será uma cofibração.*

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \times I \arrow[r, "j_1 \times 1"] & C(g_1, g_2) \times I & C(g_1, g_2) \times \{0\} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h"] \\ A \times I \arrow[u, "g_1 \times 1"] \arrow[r, "g_2 \times 1"'] & X_2 \times I \arrow[u, "j_2 \times 1"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

onde $H(x,0) = h(j_2(x),0)$, $\forall x \in X_2$ e $(j_1 \times 1) \circ (g_1 \times 1) = (j_2 \times 1) \circ (g_2 \times 1)$ em que $j_1 : X_1 \longrightarrow C(g_1,g_2)$ é definida por $j_1(x_1) = [(x_1, x_2^0)]$, $\forall x_1 \in X_1$, e $j_2 : X_2 \longrightarrow C(g_1,g_2)$ é definida por $j_2(x_2) = [(x_1^0, x_2)]$, $\forall x_2 \in X_2$. De fato, $((j_1 \times 1) \circ (g_1 \times 1))(a,t) = (j_1 \times 1)(g_1(a),t) = ([(g_1(a), x_2^0)], t) = ([(x_1^0, g_2(a))], t) = (j_2 \times 1)(g_2(a),t) = ((j_2 \times 1) \circ (g_2 \times 1))(a,t)$, $\forall (a,t) \in A \times I$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times I & X_1 \times \{0\} \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "h\circ(j_1\times1)"] \\
A \times I \arrow[u, "g_1\times1"] \arrow[r, "H\circ(g_2\times1)"'] & X
\end{tikzcd}$$

onde $i'(x_1,0) = (x_1,0)$, $\forall x_1 \in X_1$, tal que $(H \circ (g_2 \times 1))(a,0) = H(g_2(a),0) = h(j_2(g_2(a)),0) = h([(x_1^0, g_2(a))],0) = h([(g_1(a), x_2^0)],0) = h(j_1(g_1(a)),0) = h((j_1 \circ g_1)(a),0) = (h \circ (j_1 \times 1))(g_1(a),0)$, $\forall a \in A$. Logo, como g_1 é uma cofibração, existe uma aplicação $G : X_1 \times I \longrightarrow X$ tal que $G \circ (g_1 \times 1) = H \circ (g_2 \times 1)$ e $(G \circ i')(x_1,0) = G(x_1,0) = (h \circ (j_1 \times 1))(x_1,0)$, $\forall x_1 \in X_1$.

Definamos $\bar{G} : C(g_1,g_2) \times I \longrightarrow X$ por $\bar{G}([(x_1^0, x_2)],t) = H(x_2,t)$, $\forall x_2 \in X_2$ e $\bar{G}([(x_1, x_2^0)],t) = G(x_1,t)$, $\forall x_1 \in X_1$.

Temos que $\bar{G}$ é bem definida, pois $\forall a \in A$, $\bar{G}([(x_1^0, g_2(a))],t) = H(g_2(a),t) = (H \circ (g_2 \times 1))(a,t) = (G \circ (g_1 \times 1))(a,t) = G(g_1(a),t) = \bar{G}([(g_1(a), x_2^0)],t)$. Como G e H são contínuas, $\bar{G}$ é contínua.

Agora, basta verificarmos que $\bar{G} \circ (j_2 \times 1) = H$ e $\bar{G} \circ i = h$. De fato, $(\bar{G} \circ (j_2 \times 1))(x_2,t) = \bar{G}(j_2(x_2),t) = \bar{G}([(x_1^0, x_2)],t) = H(x_2,t)$, $\forall (x_2,t) \in X_2 \times I$; $(\bar{G} \circ i)([(x_1^0, x_2)],0) = \bar{G}([(x_1^0, x_2)],0) = H(x_2,0) = h(j_2(x_2),0) = h([(x_1^0, x_2)],0)$, $\forall x_2 \in X_2$ e $(\bar{G} \circ i)([(x_1, x_2^0)],0) = \bar{G}([(x_1, x_2^0)],0) = G(x_1,0) = (G \circ i')(x_1,0) = (h \circ (j_1 \times 1))(x_1,0) = h(j_1(x_1),0) = h([(x_1, x_2^0)],0)$, $\forall x_1 \in X_1$.

Portanto, j_2 é uma cofibração. $\square$

Casos particulares: Nos diagramas

$$\begin{tikzcd} M(p,f) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & PB \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} CB \arrow[r, "j_1"] & C(q,f) \\ B \arrow[u, "q"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

as aplicações p e i_2 são fibrações, o que nos é garantido pelo Exemplo 3.0.3 e pelo Teorema 4.0.1 e, além disso, as aplicações q e j_2 são cofibrações, o que nos é garantido pelo Exemplo 3.0.4 e pelo Teorema 4.0.2.

A partir de agora denotaremos $M(p,f)$ por M_f e $C(q,f)$ por C_f.

Capítulo 5

Sequência exata de uma função

Neste capítulo, construímos sequências infinitas de espaços e provamos dois grandes teoremas, a saber Teoremas 5.1.1 e 5.2.1, mostrando que para toda função contínua $f : X \longrightarrow Y$, podemos obter uma sequência exata e infinita de conjuntos, em que a primeira função da sequência é f^* ou f_*, dependendo se estamos com a sequência da fibração ou com a sequência da cofibração.

5.1 Sequência da fibração

No que segue, considere $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação em $\mathcal{C}_0$, a fibração $p : PY \longrightarrow Y$ e o pullback

$$\begin{tikzcd} M_f \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & PY \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

onde i_2 é uma fibração (vide Teorema 4.0.1).

Agora, tomemos o espaço $i_2^{\dashv}(\{x_0\})$ onde x_0 é o ponto base de X. Se $(\lambda, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\})$, então $\lambda(1) = p(\lambda) = f(x_0) = y_0$ e consequentemente, podemos identificar $i_2^{\dashv}(\{x_0\})$ com ΩY, via a aplicação que a cada par $(\lambda, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\})$ associa a função $\bar{\lambda} : S^1 = \frac{I}{0\sim 1} \longrightarrow Y$ definida por $\bar{\lambda}([t]) = \lambda(t)$, $\forall t \in I$.

Com efeito, vamos mostrar que $\varphi : i_2^{\dashv}(\{x_0\}) \longrightarrow \Omega Y$ definida por $\varphi(\lambda, x_0) = \bar{\lambda}$ onde $\bar{\lambda} : S^1 = \frac{I}{0\sim 1} \longrightarrow Y$ é dada de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ S^1 \arrow[ur, "\bar{\lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

comute, é um homeomorfismo.

Sejam $\varphi(\lambda_1, x_0) = \varphi(\lambda_2, x_0) \in \Omega Y$, então $\bar{\lambda_1} = \bar{\lambda_2}$ e assim, $\bar{\lambda_1}([t]) = \bar{\lambda_2}([t])$, $\forall [t] \in S^1$, isto é, $\bar{\lambda_1}(\pi(t)) = \bar{\lambda_2}(\pi(t))$, ou seja, $(\bar{\lambda_1} \circ \pi)(t) = (\bar{\lambda_2} \circ \pi)(t)$, $\forall t \in I$. Logo, $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$, $\forall t \in I$ e portanto, $\lambda_1 = \lambda_2$ e φ é injetora. Também, φ é sobrejetora, pois para cada $\bar{\lambda} \in \Omega Y$, tome $\lambda : I \longrightarrow Y$ definida por $\lambda(t) = (\bar{\lambda} \circ \pi)(t)$, $\forall t \in I$ e então $\varphi(\lambda, x_0) = \bar{\lambda}$.

Além disso, φ é contínua, pois considerando um aberto de ΩY qualquer dado por $M(K, W) = \{\lambda \in \Omega Y : \lambda(K) \subset W\}$, onde $K \subset S^1$ é compacto e $W \subset Y$ é aberto, temos que

$$\begin{aligned} \varphi^{\dashv}(M(K,W)) &= \{(\alpha, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\}) : \varphi(\alpha, x_0) = \bar{\alpha} \in M(K,W)\} \\ &= \{(\alpha, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\}) : \bar{\alpha}(K) \subset W\} \\ &= \{(\alpha, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\}) : (\bar{\alpha} \circ \pi)(\pi^{\dashv}(K)) \subset W\} \\ &= \{(\alpha, x_0) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\}) : \alpha(\pi^{\dashv}(K)) \subset W\}, \end{aligned}$$

onde $\pi^{\dashv}(K) \subset I$ é compacto, pois este é um fechado em I, que é compacto.

Logo, $\varphi^{\dashv}(M(K,W)) = (M(\pi^{\dashv}(K), W) \times X) \cap i_2^{\dashv}(\{x_0\})$, que é um aberto de $i_2^{\dashv}(\{x_0\})$.

Para finalizar, verifiquemos que φ é aberta.

Seja $(M(J, W) \times X) \cap i_2^{\dashv}(\{x_0\})$ um aberto de $i_2^{\dashv}(\{x_0\})$, onde $J \subset I$ é compacto e $W \subset Y$ é aberto.

Temos que $\varphi((M(J,W)\times X)\cap i_2^{\dashv}(\{x_0\}))=\{\varphi(\lambda,x_0)=\bar{\lambda}\in\Omega Y:\lambda(J)\subset W\}=\{\bar{\lambda}\in\Omega Y:\bar{\lambda}(\pi(J))\subset W\}$, onde $\pi(J)\subset S^1$ é compacto e $W\subset Y$ é aberto.

Logo, $\varphi((M(J,W)\times X)\cap i_2^{\dashv}(\{x_0\}))=M(\pi(J),W)$, que é um aberto em ΩY. Portanto, φ é um homeomorfismo.

Desse modo, obtemos uma sequência de espaços

$$\Omega Y \xrightarrow{j} M_f \xrightarrow{i_2} X \xrightarrow{f} Y$$

onde $j:\Omega Y\longrightarrow M_f$ é a inclusão dada por $j(\bar{\lambda})=(\lambda,x_0)$, $\forall\bar{\lambda}\in\Omega Y$.

Esta sequência pode ser estendida indefinidamente para a esquerda, do seguinte modo: para toda $f:X\longrightarrow Y$ definimos $\Omega f:\Omega X\longrightarrow\Omega Y$ por $(\Omega f(\bar{\alpha}))([t])=(f\circ\bar{\alpha})([t])$, $\forall\bar{\alpha}\in\Omega X$, $\forall[t]\in S^1$. Observemos que Ωf é contínua e preserva ponto base. Logo, temos a sequência

$$\ldots\longrightarrow\Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega j} \Omega M_f \xrightarrow{\Omega i_2} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{j} M_f \xrightarrow{i_2} X \xrightarrow{f} Y.$$

Esta sequência é chamada de **sequência da fibração** induzida pela aplicação f. Queremos associar a esta uma sequência de conjuntos e mais adiante, uma sequência de grupos abelianos.

Como foi visto no capítulo 3, dado $Z\in\mathcal{C}_0$, uma aplicação $f:X\longrightarrow Y$ induz uma função $f_*:[Z,X]\longrightarrow[Z,Y]$ definida por $f_*([g])=[f\circ g]$, $\forall[g]\in[Z,X]$.

À função f_* estão associados um subconjunto de $[Z,X]$, que indicamos por $f_*^{\dashv}([c])=Kerf_*$ e um subconjunto de $[Z,Y]$, que indicamos por Imf_*, definidos da seguinte maneira: se $c:Z\longrightarrow Y$ é a aplicação constante que leva todo $z\in Z$ em y_0, o **núcleo** de f_* é o conjunto $Kerf_*=\{[g]\in[Z,X]:f_*([g])=[c]\}$; por outro lado, a **imagem** de f_* é o conjunto $Imf_*=\{[h]\in[Z,Y]:\exists[g]\in[Z,X]\ com\ f_*([g])=[h]\}$.

Definição 5.1.1. *Uma sequência de conjuntos*

$$[Z,X]\xrightarrow{f_*}[Z,Y]\xrightarrow{g_*}[Z,W]$$

*é **exata** se $Imf_* = Kerg_*$.*

Teorema 5.1.1. *Para todo $Z \in \mathcal{C}_0$, a sequência da fibração induzida pela aplicação $f : X \longrightarrow Y$*

$$\ldots \longrightarrow \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega j} \Omega M_f \xrightarrow{\Omega i_2} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{j} M_f \xrightarrow{i_2} X \xrightarrow{f} Y$$

induz uma sequência infinita e exata de conjuntos

$$\ldots \longrightarrow [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(\Omega j)_*} [Z, \Omega M_f] \xrightarrow{(\Omega i_2)_*} [Z, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{j_*} [Z, M_f] \xrightarrow{i_{2*}} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y].$$

Demonstração: A prova deste teorema será feita em etapas.

1. $Im(i_{2*}) = Kerf_*$

Consideremos $f \circ i_2 : M_f \longrightarrow Y$ dada por $(f \circ i_2)(\lambda, x) = f(x) = p(\lambda) = \lambda(1)$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$ e seja $H : M_f \times I \longrightarrow Y$ definida por $H((\lambda, x), t) = \lambda(t)$, $\forall ((\lambda, x), t) \in M_f \times I$.

Então, $H((\lambda, x), 0) = \lambda(0) = y_0 = c(\lambda, x)$ onde $c : M_f \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0, $H((\lambda, x), 1) = \lambda(1) = (f \circ i_2)(\lambda, x)$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$ e $H((c', x_0), t) = c'(t) = y_0$ em que $c' : I \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0, $\forall t \in I$. Isto é, H é uma homotopia entre c e $f \circ i_2$. Logo, $[f \circ i_2] = [c]$. Daí, se $[g] \in Im(i_{2*})$, existe $[h] \in [Z, M_f]$ tal que $i_{2*}([h]) = [i_2 \circ h] = [g]$. Assim, $f_*([g]) = f_*([i_2 \circ h]) = [f \circ (i_2 \circ h)] = [(f \circ i_2) \circ h] = [c'']$ onde $c'' : Z \longrightarrow Y$ é dada por $c''(z) = y_0$, $\forall z \in Z$, pois $f \circ i_2 \sim c : M_f \longrightarrow Y$ implica pelo Lema 1.1 que $(f \circ i_2) \circ h \sim c \circ h = c'' : Z \longrightarrow Y$. Portanto, $[g] \in Kerf_*$, ou seja, $Im(i_{2*}) \subset Kerf_*$.

Por outro lado, se $[g] \in Kerf_*$, então temos que $f_*([g]) = [f \circ g] = [c'']$ em que $c'' : Z \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0.

Logo, $c'' \sim f \circ g$, isto é, existe uma aplicação $H : Z \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(z, 0) = c''(z) = y_0$, $H(z, 1) = (f \circ g)(z)$, $\forall z \in Z$ e $H(z_0, t) = y_0$, $\forall t \in I$. Observemos que $\forall z \in Z$, a aplicação $H(z,\ ) : I \longrightarrow Y$ dada por $H(z,\ )(t) = H(z, t)$ satisfaz $H(z,\ )(0) = H(z, 0) = y_0$ e $p(H(z,\ )) = H(z,\ )(1) = H(z, 1) = (f \circ g)(z) = f(g(z))$.

Logo, $(H(z,\ ), g(z)) \in M_f$. Defina $h : Z \longrightarrow M_f$ por $h(z) = (H(z,\ ), g(z))$, $\forall z \in Z$. Note que $h(z_0) = (H(z_0,\ ), g(z_0)) = (c, x_0)$, onde $c : I \longrightarrow Y$ é a aplicação $c(t) = y_0$, $\forall t \in I$, h é contínua, pois H e g são contínuas e $[h] \in [Z, M_f]$.

Assim, $i_{2*}([h]) = [i_2 \circ h] = [g]$, pois $(i_2 \circ h)(z) = i_2(h(z)) = i_2(H(z,\ ), g(z)) = g(z)$, $\forall z \in Z$. Portanto, $Ker f_* \subset Im(i_{2*})$.

2. $Im j_* = Ker(i_{2*})$

Temos que $i_2 \circ j : \Omega Y \longrightarrow X$ é definida por $(i_2 \circ j)(\lambda) = i_2(\lambda, x_0) = x_0$, $\forall \lambda \in \Omega Y$, isto é, $i_2 \circ j$ é a aplicação constante que leva todo elemento de ΩY em x_0.

Se $[h] \in Im j_*$, então existe $[k] \in [Z, \Omega Y]$ tal que $j_*([k]) = [j \circ k] = [h]$. Temos que mostrar que $i_{2*}([h]) = [i_2 \circ h] = [c]$ em que $c : Z \longrightarrow X$ é a aplicação constante em x_0. De fato, $i_{2*}([h]) = i_{2*}([j \circ k]) = [i_2 \circ (j \circ k)] = [(i_2 \circ j) \circ k] = [c]$. Portanto, $Im j_* \subset Ker(i_{2*})$.

Por outro lado, seja $[g] \in Ker(i_{2*})$, isto é, $i_{2*}([g]) = [i_2 \circ g] = [c]$, onde $c : Z \longrightarrow X$ é a aplicação constante em x_0. Assim, $i_2 \circ g \sim c$, ou seja, existe uma aplicação $H : Z \times I \longrightarrow X$ tal que $H(z, 0) = (i_2 \circ g)(z)$, $H(z, 1) = c(z) = x_0$, $\forall z \in Z$ e $H(z_0, t) = x_0$, $\forall t \in I$.

Temos que mostrar que $[g] \in Im j_*$, isto é, que existe $[h] \in [Z, \Omega Y]$ tal que $j_*([h]) = [j \circ h] = [g]$. Para isso, vamos construir uma aplicação $g' : Z \longrightarrow M_f$ homotópica a g e tal que $g'(z) \in i_2^{-1}(\{x_0\}) \approx \Omega Y$, $\forall z \in Z$. Em verdade, g' enviará Z em $i_2^{-1}(\{x_0\}) \subset M_f$ e como $i_2^{-1}(\{x_0\}) \approx \Omega Y$ teremos $h : Z \longrightarrow \Omega Y$ tal que $j \circ h \sim g$. Com efeito, considerando a fibração $i_2 : M_f \longrightarrow X$ (vide Teorema 4.0.1) e o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & M_f \arrow[d, "i_2"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

em que $i(z) = (z, 0)$, $\forall z \in Z$, como $(H \circ i)(z) = H(z, 0) = (i_2 \circ g)(z)$, $\forall z \in Z$, isto é, $H \circ i = i_2 \circ g$, o diagrama é comutativo.

Logo, existe uma homotopia $G : Z \times I \longrightarrow M_f$ tal que $G \circ i = g$ e $i_2 \circ G = H$. Assim, $g(z) = (G \circ i)(z) = G(z, 0)$, $\forall z \in Z$. Defina $g' : Z \longrightarrow M_f$ por $g'(z) = G(z, 1)$, $\forall z \in Z$. Logo, temos $g \sim g'$.

Ainda, $i_2(g'(z)) = (i_2 \circ G)(z, 1) = H(z, 1) = x_0$, $\forall z \in Z$, ou seja, $g'(z) \in i_2^{\dashv}(\{x_0\}) \approx \Omega Y$. Desse modo, g' define a aplicação $h' : Z \longrightarrow i_2^{\dashv}(\{x_0\})$ dada por $h'(z) = g'(z) = (\lambda(z), x_0)$. Como $i_2^{\dashv}(\{x_0\}) \approx \Omega Y$ via $\varphi : i_2^{\dashv}(\{x_0\}) \longrightarrow \Omega Y$ dada por $\varphi(\lambda, x_0) = \bar{\lambda}$ onde $\bar{\lambda} : S^1 \longrightarrow Y$ é definida de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
S^1 \arrow[ur, "\bar{\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

comute, defina $h := \varphi \circ h' : Z \longrightarrow \Omega Y$.

Como $h(z) = \varphi(h'(z)) = \varphi(g'(z)) = \varphi(\lambda(z), x_0) = \lambda(\bar{z})$ então $(j \circ h)(z) = j(\overline{\lambda(z)}) = (\lambda(z), x_0) = g'(z) = G(z, 1)$, $\forall z \in Z$. Portanto, G é uma homotopia entre g e $j \circ h$. Logo, $j_*([h]) = [j \circ h] = [g]$ e $Ker(i_{2*}) \subset Imj_*$.

3. $Im(\Omega f)_* = Kerj_*$

Se $[g] \in Im(\Omega f)_*$, então existe $[h] \in [Z, \Omega X]$ tal que $(\Omega f)_*([h]) = [\Omega f \circ h] = [g]$. Mostremos que $j_*([g]) = [j \circ g] = [c]$ em que $c : Z \longrightarrow M_f$ é a aplicação constante em (λ, x_0), onde $\lambda : I \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0. Note que $j \circ \Omega f : \Omega X \longrightarrow M_f$ envia todo $\bar{\alpha} \in \Omega X$ em $(j \circ \Omega f)(\bar{\alpha}) = j(\Omega f(\bar{\alpha})) = (\Omega f(\bar{\alpha}), x_0)$. Definamos $H : \Omega X \times I \longrightarrow M_f$ por $H(\bar{\alpha}, t) = ((\Omega f(\bar{\alpha}))_t, x_0)$, $\forall (\bar{\alpha}, t) \in \Omega X \times I$, onde $(\Omega f(\bar{\alpha}))_t \in \Omega Y$ é tal que $(\Omega f(\bar{\alpha}))_t([s]) = (\Omega f(\bar{\alpha}))([st])$, $\forall [s] \in S^1$.

Temos que H é contínua, $H(\bar{\alpha}, 0) = ((\Omega f(\bar{\alpha}))_0, x_0) = ((\Omega f(\bar{\alpha}))([0]), x_0) = ((f \circ \bar{\alpha})([0]), x_0) = (\lambda, x_0) = c'(\bar{\alpha})$, onde $c' : \Omega X \longrightarrow M_f$ é a aplicação constante em (λ, x_0) e $\lambda : I \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0, $H(\bar{\alpha}, 1) = ((\Omega f(\bar{\alpha}))_1, x_0) = ((\Omega f(\bar{\alpha})), x_0) = (j \circ \Omega f)(\bar{\alpha})$, $\forall \bar{\alpha} \in \Omega X$ e denotando $c'' : S^1 \longrightarrow X$ a aplicação constante em x_0, temos que $H(c'', t) = ((\Omega f(c''))_t, x_0) =$

(λ', x_0), $\forall t \in I$, em que $\lambda' : S^1 \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0.

Logo, H é uma homotopia entre c' e $j \circ \Omega f$. Desse modo, temos que $j_*([g]) = j_*([\Omega f \circ h]) = [j \circ (\Omega f \circ h)] = [(j \circ \Omega f) \circ h] = [c' \circ h] = [c]$, onde $c : Z \longrightarrow M_f$ é a aplicação constante em (λ, x_0). Portanto, $Im(\Omega f)_* \subset Ker j_*$.

Agora, consideremos $[g] \in Ker j_*$, isto é, $j_*([g]) = [j \circ g] = [c]$ em que $c : Z \longrightarrow M_f$ é a aplicação constante em $(\lambda, x_0), \lambda : I \longrightarrow Y$ aplicação constante em y_0 e seja $H : Z \times I \longrightarrow M_f$ a homotopia entre c e $j \circ g$, ou seja, $H(z, 0) = (\lambda, x_0), H(z, 1) = (j \circ g)(z)$, $\forall z \in Z$ e $H(z_0, t) = (\lambda, x_0)$, $\forall t \in I$.

Para $z \in Z$ fixado, defina $\lambda(z, t) = (i_1 \circ H)(z, t)$ e $h(z, t) = (i_2 \circ H)(z, t)$, $\forall t \in I$. Note que $f(h(z, t)) = (f \circ i_2 \circ H)(z, t) = (p \circ i_1 \circ H)(z, t) = p(\lambda(z, t)) = \lambda(z, t)(1)$ e como $(j \circ g)(z) = (g(z), x_0)$, então $\lambda(z, 1) = (i_1 \circ H)(z, 1) = i_1(g(z), x_0) = g(z)$, onde $g(z) \in \Omega(Y)$, e $h(z, 1) = (i_2 \circ H)(z, 1) = i_2(g(z), x_0) = x_0$.

Além disso, $\lambda(z, 0) = (i_1 \circ H)(z, 0) = i_1(\lambda, x_0) = \lambda$, onde $\lambda : I \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0, $h(z, 0) = (i_2 \circ H)(z, 0) = i_2(\lambda, x_0) = x_0$ e como H é contínua, $h(z,\ ) : I \longrightarrow X$ dada por $h(z,\ )(t) = h(z, t) = (i_2 \circ H)(z, t)$, $\forall t \in I$, é contínua e $h(z,\ )(0) = h(z, 0) = x_0 = h(z, 1) = h(z,\ )(1)$. Logo, $h(z,\ )$ é um laço sobre X baseado em x_0.

Definamos $\tilde{h} : Z \longrightarrow \Omega X$ por $\tilde{h}(z)([t]) = h(z, t)$, $\forall z \in Z$, $\forall [t] \in S^1$ e $K : Z \times I \longrightarrow \Omega Y$ por

$$K(z, t)([s]) = \begin{cases} \lambda(z, t)(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \circ h)(z, (2s - 1)(1 - t) + t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$\forall (z, t) \in Z \times I$, $\forall [s] \in S^1$. Temos que K está bem definida, pois $K(z, t)([0]) = \lambda(z, t)(0) = (i_1 \circ H)(z, t)(0) = y_0$, $K(z, t)([1]) = (f \circ h)(z, 1) = f(x_0) = y_0$ e como $K(z, t)([\frac{1}{2}]) = \lambda(z, t)(1) = (f \circ h)(z, t)$ e $\lambda(z, t), (f \circ h)(z, t)$ são contínuas, segue que K e contínua.

Ainda,

$$K(z,0)([s]) = \begin{cases} y_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \circ h)(z, 2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$K(z,1)([s]) = \begin{cases} g(z)([2s]), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ y_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$\forall z \in Z$, $\forall [s] \in S^1$ e

$$\begin{aligned} K(z_0,t)([s]) &= \begin{cases} \lambda(z_0,t)(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \circ h)(z_0, (2s-1)(1-t)+t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} i_1(\lambda, x_0)(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ f(x_0), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= y_0 \\ &= \bar{\lambda}(t), \end{aligned}$$

onde $\bar{\lambda} : S^1 \longrightarrow Y$ é a aplicação constante em y_0.

Logo K é uma homotopia entre $K(z,0) : S^1 \longrightarrow Y$ e $K(z,1) : S^1 \longrightarrow Y$.

Mostremos que $f \circ (\tilde{h}(z)) : S^1 \longrightarrow Y$ que envia cada $[s] \in S^1$ em $f(h(z,s))$, é homotópica à $K(z,0)([s])$.

Defina $K_1 : S^1 \times I \longrightarrow Y$ por

$$K_1([s],t) = \begin{cases} y_0, & 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ f(h(z, \frac{2s-t}{2-t})), & \frac{t}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$\forall ([s],t) \in S^1 \times I$. Temos que K_1 está bem definida, pois $K_1([0],t) = y_0$ e $K([1],t) = y_0$ e é contínua, pois quando $s = \frac{t}{2}$, temos $K_1([\frac{t}{2}],t) = y_0$. Além disso, $K_1([s],0) = f(h(z,s))$ e $K_1([s],1) = K(z,0)([s])$, $\forall [s] \in S^1$.

Agora, mostremos que $g(z) : S^1 \longrightarrow Y$ que envia cada $[s] \in S^1$ em $g(z)[s]$, é homotópica à $K(z,1)([s])$.

Definamos $K_2 : S^1 \times I \longrightarrow Y$ por

$$K_2([s],t) = \begin{cases} g(z)([\frac{2s}{2-t}]), & 0 \leq s \leq \frac{2-t}{2}, \\ y_0, & \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$\forall([s],t) \in S^1 \times I$.

Temos que K_2 está bem definida, pois $K_2([0],t) = g(z)([0]) = y_0 = K_2([1],t)$ e K_2 é contínua, pois para $s = \frac{2-t}{2}$ temos que $K_2([\frac{2-t}{2}],t) = g(z)([1]) = y_0$. Ainda, $K_2([s],0) = g(z)([s])$ e $K_2([s],1) = K(z,1)([s])$, $\forall[s] \in S^1$.

Logo, $f \circ (\tilde{h}(z)) \sim g(z)$, isto é, $[f \circ (\tilde{h}(z))] = [g(z)]$, ou seja, $[(\Omega f \circ \tilde{h})(z)] = [g(z)]$ e assim $(\Omega f \circ \tilde{h})(z) \sim g(z)$, $\forall z \in Z$.

Note que $(\Omega f \circ \tilde{h})(z_0)([t]) = \Omega f(\tilde{h}(z_0))([t]) = (f \circ \tilde{h}(z_0))([t]) = f(\tilde{h}(z_0)([t])) = f(x_0) = y_0 = c_{y_0}([t])$, $\forall[t] \in S^1$. Logo, $(\Omega f \circ \tilde{h})(z_0) = c_{y_0}$. Note também que $g(z_0) = c_{y_0}$.

Assim, para $z = z_0$, $H^{z_0} : S^1 \times I \longrightarrow Y$ dada por $H^{z_0}([t],s) = y_0 = c_{y_0}([t])$ dá uma homotopia entre $(\Omega f \circ \tilde{h})(z_0)$ e $g(z_0)$.

Ainda, como $(\Omega f \circ \tilde{h})(z) \sim g(z)$, $\forall z \in Z$, então, para $z \neq z_0$, existe uma homotopia $H^z : S^1 \times I \longrightarrow Y$ tal que $H^z([t],0) = (\Omega f \circ \tilde{h})(z)([t])$, $H^z([t],1) = g(z)([t])$, $\forall[t] \in S^1$ e $H^z([0],t) = y_0$, $\forall s \in I$.

Desse modo, definamos $G : Z \times I \longrightarrow \Omega Y$ por $G(z,s) = H^z_s$, onde $H^z_s : S^1 \longrightarrow Y$ é dada por $H^z_s([t]) = H^z([t],s)$, $\forall[t] \in S^1$. Assim, $G(z,0) = H^z_0$ e como $H^z_0([t]) = H^z([t],0) = (\Omega f \circ \tilde{h})(z)([t])$, $\forall[t] \in S^1$, segue que $H^z_0 = (\Omega f \circ \tilde{h})(z), \forall z \in Z$; $G(z,1) = H^z_1$ e como $H^z_1([t]) = H^z([t],1) = g(z)([t])$, $\forall[t] \in S^1$, temos que $H^z_1 = g(z), \forall z \in Z$, $G(z_0,s) = H^{z_0}_s$ e $H^{z_0}_s([t]) = H^{z_0}([t],s) = c_{y_0}([t])$, $\forall[t] \in S^1$, isto é $H^{z_0}_s = c_{y_0}$.

Daí, $\Omega f \circ \tilde{h} \sim g$, isto é, $[\Omega f \circ \tilde{h}] = [g]$. Portanto, $(\Omega f)_*([\tilde{h}]) = [g]$ e concluímos que $Ker j_* \subset Im(\Omega f)_*$.

A prova da exatidão nos outros estágios é perfeitamente análoga, com exceção dos casos

$Ker(\Omega^n i_2)_* \subset Im(\Omega^n j)_*$, $n = 1, 2, \ldots$, onde a demonstração análoga a de 2 só poderá ser feita após a seguinte observação: em 2, ao mostrarmos que $Ker(i_{2*}) \subset Imj_*$, necessitamos do fato de $i_2 : M_f \longrightarrow X$ ser uma fibração. Por outro lado, temos que $\Omega^n M_f \approx M_{\Omega^n f}$ e assim, $\Omega^n i_2 : \Omega^n M_f \longrightarrow \Omega^n X$ poderá ser tomada como uma fibração e com isso, prova-se a generalização de 2.

De fato, defina $\varphi : \Omega M_f \longrightarrow M_{\Omega f}$ por $\varphi(\Theta) = (\beta, \alpha)$ onde $\beta : I \longrightarrow \Omega Y$ é dada por $\beta(t)(\pi(s)) = i_1(\Theta(\pi(s)))(t)$ e $\alpha : S^1 \longrightarrow X$ é dada por $\alpha(\pi(s)) = i_2(\Theta(\pi(s)))$. Então φ é bem definida, pois $p(\beta) = \beta(1)(\pi(s)) = i_1(\Theta(\pi(s)))(1) = p(i_1(\Theta(\pi(s))))$, $\Omega f(\alpha) = (f \circ \alpha)(\pi(s)) = f(i_2(\Theta(\pi(s))))$ e como $(i_1(\Theta(\pi(s))), i_2(\Theta(\pi(s)))) \in M_f$, $p(i_1(\Theta(\pi(s)))) = f(i_2(\Theta(\pi(s))))$, com inversa também bem definida $\psi : M_{\Omega f} \longrightarrow \Omega M_f$ definida por $\psi(\beta, \alpha) = \bar{\Theta}$ onde $\bar{\Theta} : S^1 \longrightarrow M_f$ é dada por $\bar{\Theta}(\pi(s)) = (\lambda, \alpha(\pi(s)))$ onde $\lambda : I \longrightarrow Y$ é definido por $\lambda(t) = \beta(t)(\pi(s))$. Note que uma é inversa da outra.

Com efeito, se $\Theta \in \Omega M_f$ então $(\psi \circ \varphi)(\Theta) = \psi(\beta, \alpha) = \bar{\Theta}$ onde $\bar{\Theta} : S^1 \longrightarrow M_f$ é tal que $\bar{\Theta}(\pi(s)) = (\lambda, \alpha(\pi(s)))$ onde $\lambda : I \longrightarrow Y$ é definido por $\lambda(t) = \beta(t)(\pi(s)) = i_1(\Theta(\pi(s)))(t)$ e assim, $\lambda = i_1(\Theta(\pi(s)))$ e $\alpha(\pi(s)) = i_2(\Theta(\pi(s)))$.

Logo, $\bar{\Theta}(\pi(s)) = (i_1(\Theta(\pi(s))), i_2(\Theta(\pi(s)))) = \Theta(\pi(s))$, ou seja, $\bar{\Theta} = \Theta$ e $(\psi \circ \varphi)(\Theta) = \Theta$. E se $(\beta, \alpha) \in M_{\Omega f}$ então $(\varphi \circ \psi)(\beta, \alpha) = \varphi(\bar{\Theta}) = (\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ onde $\bar{\beta} : I \longrightarrow \Omega Y$ é tal que $\bar{\beta}(t)(\pi(s)) = i_1(\bar{\Theta}(\pi(s)))(t) = \lambda(t) = \beta(t)(\pi(s))$ e assim, $\bar{\beta}(t) = \beta(t)$, $\forall t \in I$, isto é, $\bar{\beta} = \beta$ e $\bar{\alpha} : S^1 \longrightarrow X$ é tal que $\bar{\alpha}(\pi(s)) = i_2(\bar{\Theta}(\pi(s))) = \alpha(\pi(s))$, $\forall \pi(s) \in S^1$ e daí, $\bar{\alpha} = \alpha$ e portanto $(\varphi \circ \psi)(\beta, \alpha) = (\beta, \alpha)$. Logo, φ é bijetora.

Mostremos que φ é contínua e aberta.

Note que $\varphi' : \Omega(PY) \longrightarrow P(\Omega Y)$ definida por $\varphi'(\gamma)(t)(\pi(s)) = \gamma(\pi(s))(t)$ é contínua. De fato, seja $M(K_1, M(K_2, W))$ um aberto básico de $P(\Omega Y)$, onde $K_1 \subset I$, $K_2 \subset S^1$ são compactos e $W \subset Y$ é aberto. Então,

$$\begin{aligned}
\varphi'^{-1}(M(K_1, M(K_2, W))) &= \{\gamma \in \Omega(PY) : \varphi'(\gamma) \subset M(K_1, M(K_2, W))\} \\
&= \{\gamma \in \Omega(PY) : \varphi'(\gamma)(K_1)(K_2) \subset W\} \\
&= \{\gamma \in \Omega(PY) : \gamma(K_2)(K_1) \subset W\} \\
&= M(K_2, M(K_1, W)),
\end{aligned}$$

que é um aberto básico de $\Omega(PY)$.

Agora, considere as funções $\Omega i_2 : \Omega M_f \longrightarrow \Omega X$ dada por $\Omega i_2(\Theta) = i_2 \circ \Theta$, que é contínua e $\varphi' \circ \Omega i_1 : \Omega M_f \longrightarrow P(\Omega Y)$, que também é contínua, já que é a composta de duas funções contínuas. Assim, $\bar{\varphi} : \Omega M_f \longrightarrow P(\Omega Y) \times \Omega X$ definida por $\bar{\varphi} = (\varphi' \circ \Omega i_1, \Omega i_2)$ é contínua.

Sendo $i : M_{\Omega f} \longrightarrow P(\Omega Y) \times \Omega X$ a inclusão e considerando $M_{\Omega f}$ com a topologia induzida da topologia produto de $P(\Omega Y) \times \Omega X$, temos que $\bar{\varphi} = i \circ \varphi$ e tomando $(U \times V) \cap M_{\Omega f}$ um aberto de $M_{\Omega f}$, $\varphi^{-1}((U \times V) \cap M_{\Omega f}) = \varphi^{-1}(i^{-1}(U \times V)) = (i \circ \varphi)^{-1}(U \times V) = \bar{\varphi}^{-1}(U \times V)$, que é aberto em ΩM_f, pois $\bar{\varphi}$ é contínua.

Consideremos agora o aberto básico $A = M(K, (M(K_1, W_1) \times W_2) \cap M_f)$ de ΩM_f, onde $K \subset S^1$, $K_1 \subset I$ são compactos e $W_1 \subset Y$, $W_2 \subset X$ são abertos. Temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \{\varphi(\Theta) = (\beta, \alpha) \in M_{\Omega f} : \Theta(K) \subset M(K, (M(K_1, W_1) \times W_2) \cap M_f)\} \\
&= \{(\beta, \alpha) \in M_{\Omega f} : i_1(\Theta(K)(K_1) \subset W_1, i_2(\Theta(K)) \subset W_2, i_1(\Theta(K))(1) = f(i_2(\Theta(K)))\} \\
&= \{(\beta, \alpha) \in M_{\Omega f} : \beta(K_1)(K) \subset W_1, \alpha(K) \subset W_2 \text{ e } i_1(\Theta(K))(1) = f(i_2(\Theta(K)))\} \\
&= (M(K_1, M(K, W_1)) \times M(K, W_2)) \cap M_{\Omega f},
\end{aligned}$$

que é um aberto de $M_{\Omega f}$. Logo, φ é aberta.

Portanto, φ é um homeomorfismo.

Para mostrar que $\Omega^n M_f \approx M_{\Omega^n f}$, fazemos uma indução sobre n em que o primeiro passo da indução é o que foi feito acima. Por hipótese de indução temos que $\Omega^{n-1} M_f \approx M_{\Omega^{n-1} f}$. Então

$\Omega^n M_f = \Omega(\Omega^{n-1} M_f) \approx \Omega M_{\Omega^{n-1} f}$, pois se $f : X \longrightarrow Y$ é homeomorfismo com inversa contínua f^{-1} então $\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ também é um homeomorfismo com inversa contínua $(\Omega f)^{-1}$. Pelo primeiro passo da indução temos que $\Omega M_{\Omega^{n-1} f} \approx M_{\Omega(\Omega^{n-1} f)} = M_{\Omega^n f}$ e o resultado segue.

Para provarmos que de fato $\Omega^n i_2 : \Omega^n M_f \longrightarrow \Omega^n X$ é uma fibração, mostremos primeiramente que se $p : PB \longrightarrow B$ é uma fibração, então Ωp também é uma fibração.

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "i"'] & \Omega PB \arrow[d, "\Omega p"] \\ X \times I \arrow[r, "H'"'] & \Omega B \end{tikzcd}$$

em que H' é uma homotopia de $\Omega p \circ h'$ e i é a inclusão.

Definamos $G' : X \times I \longrightarrow \Omega PB$ por

$$G'(x,t)(\pi(s)) = \begin{cases} h'(x,0)(\pi((t+1)s)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1}, \\ H'(x,(t+1)s-1) \circ \pi, & \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$\forall (x,t) \in X \times I$, $\forall \pi(s) \in S^1$.

Note que G' está bem definida, pois para $s = \frac{1}{t+1}$ temos que $G'(x,t)(\pi(s)) = \begin{cases} h'(x,0)(\pi(1)), \\ H'(x,0) \circ \pi, \end{cases}$ e $(H'(x,0) \circ \pi)(s) = (H' \circ i)(x,0) \circ \pi(s) = ((\Omega p \circ h')(x,0) \circ \pi)(s) = p(h'(x,0) \circ \pi)(s) = (h'(x,0) \circ \pi)(1)(s)$, $\forall s \in I$, isto é, $h'(x,0)(\pi(1)) = H'(x,0) \circ \pi$. Além disso, G' é contínua, $((G' \circ i)(x,0))(\pi(s)) = (G'(x,0))(\pi(s)) = \begin{cases} h'(x,0)(\pi(s)), & 0 \leq s \leq 1, \\ H'(x,0) \circ \pi, & s = 1, \end{cases}$ e como $H'(x,0) \circ \pi = h'(x,0)(\pi(1))$ segue que $G' \circ i = h'$.

Ainda, $(\Omega p \circ G')(x,t)(\pi(s)) = \Omega p(G'(x,t))(\pi(s)) = p(G'(x,t) \circ \pi)(s) = G'(x,t)(\pi(1))(s) = H'(x,t) \circ \pi(s) = H'(x,t)(\pi(s))$, $\forall (x,t) \in X \times I$, $\forall \pi(s) \in S^1$, ou seja, $\Omega p \circ G' = H'$.

Logo, Ωp é fibração.

Fazendo indução sobre n, vamos mostrar que se p é fibração então $\Omega^n p$ é fibração. O primeiro passo da indução é o que foi feito acima. Suponha como hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para $n-1$, ou seja, se p é fibração então $\Omega^{n-1}p$ é fibração. Pelo primeiro passo da indução, $\Omega(\Omega^{n-1}p) = \Omega^n p$ é uma fibração e segue o resultado.

Agora, no diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n M_f \arrow[r, "\Omega^n i_1"] \arrow[d, "\Omega^n i_2"'] & \Omega^n PY \arrow[d, "\Omega^n p"] \\
\Omega^n X \arrow[r, "\Omega^n f"'] & \Omega^n Y
\end{tikzcd}$$

considere o homeomorfismo $\varphi : \Omega^n M_f \longrightarrow M_{\Omega^n f}$, a fibração $i'_2 : M_{\Omega^n f} \longrightarrow \Omega^n X$ e a aplicação $i'_1 : M_{\Omega^n f} \longrightarrow \Omega^n PY$. Então $i'_2 \circ \varphi = \Omega^n i_2$ e $i'_1 \circ \varphi = \Omega^n i_1$. Como i'_2 é fibração, sendo

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\varphi\circ h"] \arrow[d, "i"'] & M_{\Omega^n f} \arrow[d, "i'_2"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & \Omega^n X
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo onde $Y \in \mathcal{C}_0$, H é uma homotopia, i é a inclusão de $Y \times \{0\}$ em $Y \times I$ e $h : Y \times \{0\} \longrightarrow \Omega^n M_f$ aplicação qualquer, existe uma homotopia $G : Y \times I \longrightarrow M_{\Omega^n f}$ tal que $G \circ i = \varphi \circ h$ e $i'_2 \circ G = H$. Logo, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "i"'] & \Omega^n M_f \arrow[d, shift left, "\varphi"] \arrow[dd, bend left=60, "\Omega^n i_2"] \\
 & M_{\Omega^n f} \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "i'_2"'] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & \Omega^n X
\end{tikzcd}$$

é comutativo e consequentemente $\bar{G} = \varphi^{-1} \circ G : Y \times I \longrightarrow \Omega^n M_f$ satisfaz $\bar{G} \circ i = h$ e $\Omega^n i_2 \circ \bar{G} = H$.

De fato, $(\bar{G} \circ i)(y,0) = (\varphi^{-1} \circ G \circ i)(y,0) = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ h)(y,0) = h(y,0)$, $\forall y \in Y$ e $(\Omega^n i_2 \circ \bar{G})(y,t) = (i'_2 \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ G)(y,t) = (i'_2 \circ G)(y,t) = H(y,t)$, $\forall (y,t) \in Y \times I$.

Portanto, $\Omega^n i_2$ é fibração e isso conclui a prova do teorema. $\square$

A sequência exata do teorema anterior assume uma forma importante quando assumimos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma fibração. Antes de a examinarmos neste contexto, vamos definir o conceito de "tipo de homotopia".

Definição 5.1.2. *Dizemos que dois espaços X e Y têm o mesmo* ***tipo de homotopia*** *ou que são* ***homotopicamentes equivalentes*** *se existem aplicações $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$, onde 1_X e 1_Y são as aplicações identidade de X e de Y, respectivamente.*

Definição 5.1.3. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma fibração, o espaço $f^{-1}(y_0)$ é chamado* ***fibra*** *de f.*

Lema 5.1.1. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma fibração, o espaço $f^{-1}(y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia que M_f.*

Demonstração: Lembremos que $M_f = \{(\lambda, x) \in PY \times X : \lambda(1) = f(x)\}$ e seja $F = f^{-1}(y_0)$. Definamos $g : F \longrightarrow M_f$ por $g(x) = (\lambda_0, x)$, $\forall x \in F$, onde $\lambda_0 \in PY$ é dado por $\lambda_0(t) = y_0$, $\forall t \in I$. Como $x \in F$, $f(x) = y_0 = \lambda_0(1)$ e portanto g está bem definida.

Agora, definamos $H : M_f \times I \longrightarrow Y$ por $H((\lambda, x), t) = \lambda(1-t)$, $\forall((\lambda, x), t) \in M_f \times I$. Temos que H é bem definida, é contínua e além disso, $H((\lambda, x), 0) = \lambda(1) = f(x)$, $H((\lambda, x), 1) = \lambda(0) = y_0$ e $H((\lambda_0, x_0), t) = \lambda_0(1-t) = y_0$.

Em particular, $H((\lambda, x), 0) = f(x) = f(i_2(\lambda, x)) = (f \circ i_2)(\lambda, x)$, onde $i_2 : M_f \longrightarrow X$ é a projeção no segundo fator.

Construamos o diagrama

$$\begin{tikzcd} M_f \times \{0\} \arrow[r, "\bar{i_2}"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ M_f \times I \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

em que i é a inclusão e $\bar{i_2}((\lambda, x), t) = x$, $\forall(\lambda, x) \in M_f$. Note que o diagrama é comutativo, pois $(H \circ i)((\lambda, x), 0) = H((\lambda, x), 0) = f(x) = f(\bar{i_2}((\lambda, x), 0)) = (f \circ \bar{i_2})((\lambda, x), 0)$, $\forall(\lambda, x) \in M_f$.

Como f é uma fibração, existe uma homotopia $G : M_f \times I \longrightarrow X$ tal que $G \circ i = \bar{i_2}$ e $f \circ G = H$. Consideremos a aplicação $h : M_f \longrightarrow X$ definida por $h(\lambda, x) = G((\lambda, x), 1)$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$. Logo, $h(M_f) \subset F$, pois $f(h(\lambda, x)) = f(G((\lambda, x), 1)) = (f \circ G)((\lambda, x), 1) = H((\lambda, x), 1) = y_0$, isto é, $h(\lambda, x) \in F$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$. Seja $\bar{h} : M_f \longrightarrow F$ dada por $\bar{h}(\lambda, x) = h(\lambda, x)$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$.

Mostremos que $\bar{h} \circ g \sim 1_F$ e $g \circ \bar{h} \sim 1_{M_f}$.

Definamos $K : F \times I \longrightarrow F$ por $K(x,t) = G((\lambda_0, x), 1-t)$, $\forall (x,t) \in F \times I$, que é bem definida, pois $f(K(x,t)) = f(G((\lambda_0, x), 1-t)) = (f \circ G)((\lambda_0, x), 1-t) = H((\lambda_0, x), 1-t) = \lambda_0(t) = y_0$; é contínua, $K(x,0) = G((\lambda_0, x), 1) = h(\lambda_0, x) = \bar{h}(\lambda_0, x) = \bar{h}(g(x)) = (\bar{h} \circ g)(x)$, $K(x,1) = G((\lambda_0, x), 0) = G(i((\lambda_0, x), 0)) = (G \circ i)((\lambda_0, x), 0) = \bar{i_2}((\lambda_0, x), 0) = x = 1_F(x)$, $\forall x \in F$. Além disso, $K(x_0, t) = G((\lambda_0, x_0), t) = x_0$, $\forall t \in I$, isto é, K é uma homotopia entre $\bar{h} \circ g$ e 1_F.

Por outro lado, definamos $L : M_f \times I \longrightarrow M_f$ por $L((\lambda, x), t) = (\lambda_t, G((\lambda, x), 1-t))$, $\forall ((\lambda, x), t) \in M_f \times I$, onde $\lambda_t : I \longrightarrow Y$ é dado por $\lambda_t(s) = \lambda(st)$, $\forall s \in I$. Observemos que L é bem definida, pois $\lambda_t(1) = \lambda(t)$ e $f(G((\lambda, x), 1-t)) = (f \circ G)((\lambda, x), 1-t) = H((\lambda, x), 1-t) = \lambda(t) = \lambda_t(1)$; L é contínua, $L((\lambda, x), 0) = (\lambda_0, G((\lambda, x), 1)) = (\lambda_0, h(\lambda, x)) = (\lambda_0, \bar{h}(\lambda, x)) = g(\bar{h}(\lambda, x)) = (g \circ \bar{h})(\lambda, x)$ e $L((\lambda, x), 1) = (\lambda_1, G((\lambda, x), 0)) = (\lambda_1, (G \circ i)((\lambda, x), 0)) = (\lambda_1, \bar{i_2}((\lambda, x), 0)) = (\lambda_1, x) = (\lambda, x) = 1_{M_f}(\lambda, x)$, $\forall (\lambda, x) \in M_f$. Além disso, $L((\lambda_0, x_0), t) = ((\lambda_0)_t, G((\lambda_0, x_0), 1-t)) = (\lambda_0, x_0)$, $\forall t \in I$, pois $(\lambda_0)_t(s) = \lambda_0(st) = y_0 = \lambda_0(s)$, $\forall s \in I$ e G é uma homotopia. Logo, L é uma homotopia entre $g \circ \bar{h}$ e 1_{M_f}.

Portanto, $f^{-1}(y_0)$ e M_f são homotopicamentes equivalentes. □

Teorema 5.1.2. *Existe uma função bijetora $[Z, F] \longrightarrow [Z, M_f]$, $\forall Z \in \mathcal{C}_0$.*

Demonstração: De fato, considere $g_* : [Z, F] \longrightarrow [Z, M_f]$ definida por $g_*([j]) = [g \circ j]$, $\forall [j] \in [Z, F]$. Então g_* é injetora, pois se $g_*([j_1]) = g_*([j_2])$ então $[g \circ j_1] = [g \circ j_2]$, ou seja,

$g \circ j_1 \sim g \circ j_2$. Logo, $\bar{h} \circ g \circ j_1 \sim \bar{h} \circ g \circ j_2$. Como $\bar{h} \circ g \sim 1_F$, segue que $1_F \circ j_1 \sim 1_F \circ j_2$, ou seja, $j_1 \sim j_2$ e portanto, $[j_1] = [j_2]$. Ainda, g_* é sobrejetora, pois se $[k] \in [Z, M_f]$ tome $[\bar{h} \circ k] \in [Z, F]$. Então, $g_*([\bar{h} \circ k]) = [g \circ \bar{h} \circ k]$. Como $g \circ \bar{h} \sim 1_{M_f}$ segue que $g \circ \bar{h} \circ k \sim 1_{M_f} \circ k = k$. Logo, $[g \circ \bar{h} \circ k] = [k]$ e portanto $g_*([\bar{h} \circ k]) = [k]$ e g_* é sobrejetora.

Corolário 5.1.1. *Existe uma função bijetora* $[Z, \Omega^n F] \longrightarrow [Z, \Omega^n M_f]$.

Demonstração: Mostremos isso fazendo indução sobre n. O primeiro passo da indução é mostrarmos que $(\Omega g)_* : [Z, \Omega F] \longrightarrow [Z, \Omega M_f]$ definida por $(\Omega g)_*([k]) = [\Omega g \circ k]$, $\forall [k] \in [Z, \Omega F]$, é uma bijeção. Com efeito, se $(\Omega g)_*([k_1]) = (\Omega g)_*([k_2])$ então $[\Omega g \circ k_1] = [\Omega g \circ k_2]$, isto é, $\Omega g \circ k_1 \sim \Omega g \circ k_2$. Logo, $\Omega \bar{h} \circ \Omega g \circ k_1 \sim \Omega \bar{h} \circ \Omega g \circ k_2$, mas como $\bar{h} \circ g \sim 1_F$ temos que para todo $\alpha \in \Omega F$, $\bar{h} \circ g \circ \alpha \sim 1_F \circ \alpha = \alpha$, ou seja, $(\Omega \bar{h})(g \circ \alpha) \sim \alpha$ e assim, $(\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha) \sim 1_{\Omega F}(\alpha)$.

Afirmação: $(\Omega \bar{h} \circ \Omega g) \sim 1_{\Omega F}$.

Para tanto, veja que que $(\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha_0)([t]) = \Omega \bar{h}(g \circ \alpha_0)([t]) = (\bar{h} \circ g \circ \alpha_0)([t]) = (\bar{h} \circ g)(x_0) = \bar{h}(\lambda_0, x_0) = x_0 = G((\lambda_0, x_0), 1) = x_0 = \alpha_0([t])$, $\forall [t] \in S^1$, ou seja, $(\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha_0) = \alpha_0$. Também, $1_{\Omega F}(\alpha_0) = \alpha_0$. Assim para $\alpha = \alpha_0$ temos a homotopia $H^{\alpha_0} : S^1 \times I \longrightarrow F$ dada por $H^{\alpha_0}([t], s) = \alpha_0([t])$ e como $(\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha) \sim 1_{\Omega F}(\alpha)$, $\forall \alpha \in \Omega F$, para $\alpha \neq \alpha_0$ existe a homotopia $H^\alpha : S^1 \times I \longrightarrow F$ tal que $H^\alpha([t], 0) = (\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha)([t])$, $H^\alpha([t], 1) = 1_{\Omega F}(\alpha)([t]$, $\forall [t] \in S^1$ e $H^\alpha([0], s) = x_0$, $\forall s \in I$.

Definamos então $G : \Omega F \times I \longrightarrow \Omega F$ por $G(\alpha, s) = H^\alpha_s$ onde $H^\alpha_s : S^1 \longrightarrow F$ é dada por $H^\alpha_s([t]) = H^\alpha([t], s)$, $\forall [t] \in S^1$. Logo, $G(\alpha, 0) = H^\alpha_0$ e como $H^\alpha_0([t]) = H^\alpha([t], 0) = (\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha)([t])$, $\forall [t] \in S^1$, segue que $H^\alpha_0 = (\Omega \bar{h} \circ \Omega g)(\alpha), \forall \alpha \in \Omega F$; $G(\alpha, 1) = H^\alpha_1$ e como $H^\alpha_1([t]) = H^\alpha([t], 1) = 1_{\Omega F}(\alpha)([t])$, $\forall [t] \in S^1$, temos que $H^\alpha_1 = 1_{\Omega F}(\alpha), \forall \alpha \in \Omega F$; $G(\alpha_0, s) = H^{\alpha_0}_s$, mas $H^{\alpha_0}_s = H^{\alpha_0}([t], s) = \alpha_0([t])$, $\forall [t] \in S^1$, ou seja, $H^{\alpha_0}_s = \alpha_0$.

Portanto, $\Omega \bar{h} \circ \Omega g \sim 1_{\Omega F}$. Desse modo, $k_1 \sim k_2$, isto é, $[k_1] = [k_2]$ e $(\Omega g)_*$ é injetora.

Além disso, se $[j] \in [Z, \Omega M_f]$ podemos tomar $[\Omega\bar{h} \circ j] \in [Z, \Omega F]$ e como $g \circ \bar{h} \sim 1_{M_f}$, para todo $\beta \in \Omega M_f$ temos que $g \circ \bar{h} \circ \beta \sim 1_{M_f} \circ \beta = \beta$ e daí, $\Omega g(\bar{h} \circ \beta) \sim \beta$ e logo $(\Omega g \circ \Omega\bar{h})(\beta) \sim 1_{\Omega M_f}(\beta)$, ou seja, $\Omega g \circ \Omega\bar{h} \sim 1_{\Omega M_f}$. Logo, $\Omega g \circ \Omega\bar{h} \circ j \sim 1_{\Omega M_f} \circ j$ e assim, $(\Omega g)_*([\Omega\bar{h} \circ j]) = [\Omega g \circ \Omega\bar{h} \circ j] = [j]$ e $(\Omega g)_*$ é sobrejetora.

Suponha como hipótese de indução que $(\Omega^{n-1} g)_* : [Z, \Omega^{n-1} F] \longrightarrow [Z, \Omega^{n-1} M_f]$ é bijeção. Pelo primeiro passo da indução, $(\Omega(\Omega^{n-1} g))_* = (\Omega^n g)_*$ é uma bijeção e o resultado segue.

Observe que se $i : F \longrightarrow X$ for a inclusão então $i \circ \bar{h} \sim i_2$, pois como $g \circ \bar{h} \sim 1_{M_f}$ então $i_2 \circ g \circ \bar{h} \sim i_2 \circ 1_{M_f} = i_2$, mas $(i_2 \circ g)(x) = i_2(g(x)) = i_2(\lambda_0, x) = x = i(x)$, $\forall x \in F$, ou seja, $i_2 \circ g = i$. Portanto, $i \circ \bar{h} \sim i_2$.

Seja $\partial = \bar{h} \circ j : \Omega Y \longrightarrow F$, onde $j : \Omega Y \longrightarrow M_f$ é definido por $j(\lambda) = (\lambda, x_0)$, $\forall \lambda \in \Omega Y$.

Então a sequência abaixo é exata:

$$\ldots \longrightarrow [Z, \Omega F] \xrightarrow{(\Omega i)_*} [Z, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{\partial_*} [Z, F] \xrightarrow{i_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y] \tag{5.1}$$

De fato:

1. Exatidão em $[Z, X]$

Temos que $Im(i)_* = i_*([Z, F]) = i_*(\bar{h}_*([Z, M_f]))$, pois $\bar{h}_*$ é bijetora, desde que $g_* \circ \bar{h}_* = (g \circ \bar{h})_* = (1_{M_f})_* = 1_{[Z, M_f]}$ e $\bar{h}_* \circ g_* = (\bar{h} \circ g)_* = (1_F)_* = 1_{[Z,F]}$. Logo, $Im(i)_* = Im(i_* \circ \bar{h}_*) = Im(i_{2*}) = Ker f_*$, pelo Teorema 5.1.1.

2. Exatidão em $[Z, F]$

Temos que $Im(\partial_*) = \partial_*([Z, \Omega Y]) = (\bar{h}_* \circ j_*)([Z, \Omega Y]) = \bar{h}_*(Im(j_*)) = \bar{h}_*(Ker(i_{2*}))$ pelo Teorema 5.1.1. Mas $\bar{h}_*(Ker(i_{2*})) = Ker(i_*)$, pois se $[l] \in Ker(i_{2*})$ então $i_*(\bar{h}_*([l])) = (i_* \circ \bar{h}_*)([l]) = (i \circ \bar{h})_*([l]) = (i_{2*})([l]) = [c]$, onde $c : Z \longrightarrow X$ é a aplicação constante em x_0, isto é, $\bar{h}_*(Ker(i_{2*})) \subset Ker(i_*)$. Por outro lado, se $[k] \in Ker(i_*)$, $i_*([k]) = [c]$. Como $\bar{h}_*$ é bijetora, existe $[m] \in [Z, M_f]$ tal que $[k] = \bar{h}_*([m])$; logo $i_*(\bar{h}_*([m])) = [c]$ e assim, $[m] \in Ker(i_{2*})$ e $[k] \in \bar{h}_*(Ker(i_{2*}))$. Portanto, $Ker(i_*) \subset \bar{h}_*(Ker(i_{2*}))$.

3. Exatidão em $[Z, \Omega Y]$

Primeiro, $Im(\Omega f)_* \subset Ker(\partial_*)$, pois se $[k] \in Im(\Omega f)_* = Ker(j_*)$, pelo Teorema 5.1.1, então $\partial_*([k]) = (\bar{h}_* \circ j_*)([k]) = \bar{h}_*(j_*([k])) = \bar{h}_*([d])$, onde $d : Z \longrightarrow M_f$ é a aplicação constante em (λ_0, x_0). Mas $\bar{h}_*([d]) = [\bar{h} \circ d] = [c']$, $c' : Z \longrightarrow F$ aplicação constante em x_0. Logo, $\partial_*([k]) = [c']$ e portanto $[k] \in Ker(\partial_*)$. Agora, seja $[l] \in Ker(\partial_*)$, então $\partial_*([l]) = [c']$, ou seja, $(\bar{h} \circ j)_*([l]) = \bar{h}_*(j_*([l])) = [c']$. Logo, $j_*([l]) \in Ker(\bar{h}_*)$ e como $\bar{h}_*$ é bijetora, $Ker(\bar{h})_* = [\tilde{c}]$, $\tilde{c} : Z \longrightarrow \Omega Y$ aplicação constante em y_0. Assim, $j_*([l]) = [\tilde{c}]$, ou seja, $[l] \in Ker(j_*) = Im(\Omega f)_*$, pelo Teorema 5.1.1. Logo, $Ker(\partial_*) \subset Im(\Omega f)_*$.

Para a exatidão nos outros níveis prosseguimos da mesma maneira como provamos a exatidão em 1, 2 e 3, usando o fato de que $(\Omega^n \bar{h})_*$ é bijetora, $\forall n$, e a sequência do Teorema 5.1.1 é exata.

Esta sequência 5.1 é denominada **sequência exata da fibração** $f : X \longrightarrow Y$.

Observemos que, como pelo Corolário 3.0.1 existe uma bijeção entre $[\Sigma X, Y]$ *e* $[X, \Omega Y]$, para todo $Z \in \mathcal{C}_0$, podemos afirmar que as sequências

$$\ldots \longrightarrow [\Sigma^2 Z, Y] \longrightarrow [\Sigma Z, M_f] \longrightarrow [\Sigma Z, X] \longrightarrow [\Sigma Z, Y] \xrightarrow{j_*} [Z, M_f] \xrightarrow{(i_2)_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

e

$$\ldots \longrightarrow [\Sigma^2 Z, Y] \longrightarrow [\Sigma Z, F] \longrightarrow [\Sigma Z, X] \longrightarrow [\Sigma Z, Y] \xrightarrow{\partial_*} [Z, F] \xrightarrow{i*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

no caso em que $f : X \longrightarrow Y$ for uma fibração, são exatas, onde $\Sigma^n Z = \Sigma(\Sigma^{n-1} Z)$.

No caso particular em que $Z = S^n$, mostraremos no futuro que o conjunto $[S^n, X]$ tem estrutura de grupo abeliano, se $n \geq 2$. Estes são chamados de **grupos de homotopia** de X.

5.2 Sequência da cofibração

No que segue considere $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação de $\mathcal{C}_0$, a cofibração $q : X \longrightarrow CX$ definida por $q(x) = x \wedge 1$, $\forall x \in X$ e construamos o pushout

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[r, "j_1"] & C_f \\ X \arrow[u, "q"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

em que j_2 também é uma cofibração (vide Teorema 4.0.2),

$$C_f = \frac{CX \vee Y}{(q(x), y_0) \sim ((x_0 \wedge 0), f(x))},$$

$j_1(x \wedge t) = [(x \wedge t, y_0)]$, $\forall x \wedge t \in CX$ e $j_2(y) = [(x_0 \wedge 0, y)]$, $\forall y \in Y$.

Tomemos o espaço $\frac{C_f}{j_2(Y)}$ obtido de C_f identificando $j_2(Y)$ a um ponto e seja $i : C_f \longrightarrow \frac{C_f}{j_2(Y)}$ a aplicação quociente. Observemos que $\frac{C_f}{j_2(Y)}$ coincide com ΣX. Para a prova desse fato, considere $\tilde{i} : CX \longrightarrow \frac{CX}{q(X)}$ a aplicação quociente e $\bar{j_1} : \frac{CX}{q(X)} \longrightarrow \frac{C_f}{j_2(Y)}$ definida por $\bar{j_1}([x \wedge t]) = [[(x \wedge t, y_0)]]$, $\forall [x \wedge t] \in \frac{CX}{q(X)}$. Note que $\bar{j_1}$ é bem definida, pois se $[x_1 \wedge t_1] = [x_2 \wedge t_2]$ então $x_1 \wedge t_1 = q(a)$ e $x_2 \wedge t_2 = q(b)$, $a, b \in X$, mas $q(a) = a \wedge 1$ e $q(b) = b \wedge 1$. Logo, $x_1 \wedge t_1 = a \wedge 1$ e $x_2 \wedge t_2 = b \wedge 1$.

Devemos provar que $[(a \wedge 1, y_0)] = j_2(y_1) = [(x_0 \wedge 0, y_1)]$ e $[(b \wedge 1, y_0)] = j_2(y_2) = [(x_0 \wedge 0, y_2)]$ para alguns $y_1, y_2 \in Y$. Mas $[(a \wedge 1, y_0)] = [(q(a), y_0)] = [(x_0 \wedge 0, f(a))] = j_2(f(a))$ e $[(b \wedge 1, y_0)] = [(q(b), y_0)] = [(x_0 \wedge 0, f(b))] = j_2(f(b))$. Assim, $[[(a \wedge 1, y_0)]] = [[(b \wedge 1, y_0)]]$ em $\frac{C_f}{j_2(Y)}$.

Suponha que $\bar{j_1}([x \wedge t]) = [[(x_0 \wedge 0, y_0)]]$, com $y \in Y$. Como $[[(x \wedge t, y_0)]] = \bar{j_1}([x \wedge t])$, temos $[(x \wedge t, y_0)] = j_2(\bar{y})$, para algum $\bar{y} \in Y$. Mas $j_2(\bar{y}) = [(x_0 \wedge 0, \bar{y})]$. Logo, $x \wedge t = q(a)$ e $\bar{y} = f(a)$ para algum $a \in X$. Daí, $[x \wedge t] = [q(a)]$, $a \in X$ e portanto $\bar{j_1}$ é injetora.

Provemos que $\bar{j_1}$ é sobrejetora. Dado $[[(x \wedge t, y)]] \in \frac{C_f}{j_2(Y)}$, tome $[(x \wedge t, y)] \in C_f$ tal que $i([(x \wedge t, y)]) = [[(x \wedge t, y)]]$. Mas $[(x \wedge t, y)] \in C_f$ implica que: (i) $(x \wedge t, y) = (x_0 \wedge 0, y)$ ou (ii) $(x \wedge t, y) = (x \wedge t, y_0)$. Se ocorrer (i), $[(x \wedge t, y)] = [(x_0 \wedge 0, y)] = j_2(y)$ e então $[[(x \wedge t, y)]] = [[(x_0 \wedge 0, y)]] = [[(x_0 \wedge 0, y_0)]]$, pois $[(x_0 \wedge 0, y_0)] = j_2(y_0)$. Tomando $[x_0 \wedge 0] \in \frac{CX}{q(X)}$, temos $\bar{j_1}([x_0 \wedge 0]) = [[(x_0 \wedge 0, y_0)]] = [[(x \wedge t, y)]]$. Se ocorrer (ii), tome $[x \wedge t] \in \frac{CX}{q(X)}$ e então $\bar{j_1}([x \wedge t]) = [[(x \wedge t, y_0)]] = [[(x \wedge t, y)]]$. Logo, $\bar{j_1}$ é sobrejetora.

Seja Θ um aberto de $\frac{C_f}{j_2(Y)}$, então $\bar{j_i}^{\dashv}(\Theta) = \tilde{i}(j_1^{\dashv}(i^{\dashv}(\Theta)))$ é aberto em $\frac{CX}{q(X)}$, pois i e j_1 são contínuas e $\tilde{i}$ é aberta. Logo, $\bar{j_1}$ é contínua.

Para mostrar que $\bar{j_1}$ é aberta, basta mostrar que j_1 é aberta, pois dado $\theta \subset \frac{CX}{q(X)}$ aberto, temos que $\bar{j_1}(\theta) = i(j_1(\tilde{i}^{\dashv}(\theta)))$ é aberto em $\frac{C_f}{j_2(Y)}$, pois $\tilde{i}$ é aplicação quociente e i, j_1 são abertas. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{l} & CX \vee Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ CX & \xrightarrow[j_1]{} & C_f \end{array}$$

onde $p(x,t) = x \wedge t$, $l(x,t) = (x \wedge t, y_0)$ e $p'(x \wedge t, y) = [(x \wedge t, y)]$. Como l é aberta, pois se $U \subset X \times I$ é aberto, então $l(U) = p(U) \times \{y_0\}$, que é aberto em $CX \vee Y$, ja que $p(U)$ é aberto em CX, segue que se $A \subset CX$ é aberto então $j_1(A) = p'(l(p^{\dashv}(A)))$ é aberto em C_f, pois p é aplicação quociente e l, p' são abertas.

Logo, $\bar{j_1}$ é um homeomorfismo e como $\Sigma X = \frac{CX}{q(X)}$, pois em CX identificamos $X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$ a um ponto e quando fazemos $\frac{CX}{q(X)}$, identicamos $I \times \{x_0\} \cup \{0,1\} \times X$ a um ponto, ou seja, obtemos a suspensão de X, $\Sigma X \approx \frac{C_f}{j_2(Y)}$.

Assim, temos uma aplicação $i : C_f \longrightarrow \Sigma X$ e desse modo, obtivemos uma sequência de espaços e funções

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j_2} C_f \xrightarrow{i} \Sigma X$$

que pode ser extendida indefinidamente para a direita com a seguinte técnica: dada uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, definimos a função $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ por $\Sigma f([(t,x)]) = [(t, f(x))]$, $\forall [(t,x)] \in \Sigma X$. Lembremos que Σf é contínua e preserva ponto base.

Temos então a sequência infinita

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j_2} C_f \xrightarrow{i} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j_2} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma^2 X \longrightarrow \dots$$

onde $\Sigma^n X$ é definido indutivamente por $\Sigma^n X = \Sigma(\Sigma^{n-1} X)$.

A sequência acima é denominada **sequência da cofibração** induzida pela aplicação f.

Teorema 5.2.1. *Para todo espaço $Z \in \mathcal{C}_0$, a sequência da cofibração induzida pela aplicação $f : X \longrightarrow Y$*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j_2} C_f \xrightarrow{i} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j_2} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma^2 X \longrightarrow \dots$$

induz uma sequência exata de conjuntos

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{j_2^*} [C_f, Z] \xleftarrow{i^*} [\Sigma X, Z] \xleftarrow{(\Sigma f)^*} [\Sigma Y, Z] \xleftarrow{(\Sigma j_2)^*} [\Sigma C_f, Z] \xleftarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma^2 X, Z] \longleftarrow \dots$$

Demonstração: Faremos a prova por etapas:

1. $Im(j_2^*) = Ker f^*$

Seja $[k] \in Im(j_2^*)$, ou seja, $j_2^*([l]) = [l \circ j_2] = [k]$ para algum $[l] \in [C_f, Z]$. Consideremos a composição $j_2 \circ f : X \longrightarrow C_f$, que é dada por $(j_2 \circ f)(x) = [(x_0 \wedge 0, f(x))]$, $\forall x \in X$ e definamos a aplicação $H : X \times I \longrightarrow C_f$ por $H(x,t) = [(x \wedge t, y_0)]$, $\forall (x,t) \in X \times I$. Note que H é bem definida e é contínua. Além disso, $H(x, 0) = [(x \wedge 0, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)] = c(x)$ em que $c : X \longrightarrow C_f$ é a aplicação constante em $[(x_0 \wedge 0, y_0)]$, $H(x,1) = [(x \wedge 1, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, f(x))] = (j_2 \circ f)(x)$, $\forall x \in X$ e $H(x_0, t) = [(x_0 \wedge t, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$, $\forall t \in I$. Logo, H é uma homotopia entre c e $j_2 \circ f$. Desse modo, $f^*([k]) = f^*([l \circ j_2]) = [l \circ j_2 \circ f] = [l \circ c]$, pois $c \sim j_2 \circ f$ implica $l \circ c \sim l \circ j_2 \circ f$. Portanto, $f^*([k]) = [\tilde{c}]$ onde $\tilde{c} = l \circ c : X \longrightarrow Z$ é a aplicação constante em z_0. Portanto, $[k] \in Ker f^*$ e $Im(j_2^*) \subset Ker f^*$.

Por outro lado, se $[g] \in Kerf^*$ então $f^*([g]) = [g \circ f] = [\tilde{c}]$, isto é, $\tilde{c} \sim g \circ f$. Logo, existe uma homotopia $G : X \times I \longrightarrow Z$ tal que $G(x,0) = \tilde{c}(x)$, $G(x,1) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in X$ e $G(x_0,t) = z_0$, $\forall t \in I$. Defina $h : C_f \longrightarrow Z$ por $h([(x_0 \wedge 0, y)]) = g(y)$, $\forall y \in Y$ e $h([(x \wedge t, y_0)]) = (g \circ f)(x)$, $\forall (x \wedge t) \in CX$. Note que $h([(x_0 \wedge 0, y_0)]) = g(y_0) = z_0 = (g \circ f)(x_0)$. Logo, h é contínua e $j_2^*([h]) = [h \circ j_2] = [g]$, pois $\forall y \in Y$ temos que $(h \circ j_2)(y) = h([(x_0 \wedge 0, y)]) = g(y)$. Portanto, $[g] \in Im(j_2^*)$ e $Kerf^* \subset Im(j_2^*)$.

2. $Im(i)^* = Ker(j_2^*)$

Temos que $i \circ j_2 : Y \longrightarrow \Sigma X$ é definida por $(i \circ j_2)(y) = i([(x_0 \wedge 0, y)]) = [[(x_0 \wedge 0, y)]] = [[(x_0 \wedge 0, y_0)]]$, $\forall y \in Y$, ou seja, $i \circ j_2$ é a aplicação constante em $[[(x_0 \wedge 0, y_0)]]$. Se $[l] \in Im(i^*)$, então existe $[k] \in [\Sigma X, Z]$ tal que $i^*([k]) = [k \circ i] = [l]$. Logo, $j_2^*([l]) = j_2^*([k \circ i]) = [k \circ i \circ j_2] = [c]$, $c : Y \longrightarrow Z$ aplicação constante em z_0. Logo, $[l] \in Ker(j_2^*)$, isto é, $Im(i^*) \subset Ker(j_2^*)$.

Agora, se $[g] \in Ker(j_2^*)$, então $j_2^*([g]) = [g \circ j_2] = [c]$, ou seja, $g \circ j_2 \sim c$. Assim, existe uma homotopia $H : Y \times I \longrightarrow Z$ tal que $H(y,0) = (g \circ j_2)(y), H(y,1) = c(y) = z_0$, $\forall y \in Y$ e $H(y_0,t) = z_0$, $\forall t \in I$. Construamos o diagrama

$$\begin{tikzcd} C_f \times I & C_f \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "g"] \\ Y \times I \arrow[u, "j_2 \times 1"] \arrow[r, "H"'] & Z \end{tikzcd}$$

em que $i'([(x \wedge t, y)]) = ([(x \wedge t, y)], 0)$. Como j_2 é uma cofibração, existe uma homotopia $G : C_f \times I \longrightarrow Z$ tal que $G \circ (j_2 \times 1) = H$ e $G \circ i' = g$. Assim, $g([(x \wedge t, y)]) = (G \circ i')([(x \wedge t, y)]) = G([(x \wedge t, y)], 0)$, $\forall [(x \wedge t, y)] \in C_f$. Defina $g' : C_f \longrightarrow Z$ por $g'([(x \wedge t, y)]) = G([(x \wedge t, y)], 1)$ e desse modo temos $g \sim g'$. Por outro lado, $g' \circ j_2 : Y \longrightarrow Z$ é dada por $(g' \circ j_2)(y) = g'([(x_0 \wedge 0, y)]) = G([(x_0 \wedge 0, y)], 1) = G \circ (j_2 \times 1)(y, 1) = H(y,1) = c(y) = z_0$, $\forall y \in Y$, isto é, $g' \circ j_2 = c$. Portanto, g' induz uma aplicação $h : \frac{C_f}{j_2(Y)} \longrightarrow Z$ tal que $h \circ i = g'$. Como $\frac{C_f}{j_2(Y)} \approx \Sigma X$, temos $h : \Sigma X \longrightarrow Z$. Logo, $i^*([h]) = [h \circ i] = [g'] = [g]$ e assim, $[g] \in Im(i^*)$ e

$Ker(j_2^*) \subset Im(i^*)$.

3. $Im(\Sigma f)^* = Ker(i^*)$

Seja $[g] \in Im(\Sigma f)^*$ então existe $[h] \in [\Sigma Y, Z]$ tal que $(\Sigma f)^*([h]) = [h \circ \Sigma f] = [g]$. Mostremos que $i^*([g]) = [g \circ i] = [c]$, onde $c : C_f \longrightarrow Z$ é a aplicação constante em z_0. Observe que $\Sigma f \circ i : C_f \longrightarrow \Sigma Y$ é definida por $(\Sigma f \circ i)([(x \wedge t, y_0)]) = \Sigma f([[(x \wedge t, y_0)]]) = \Sigma f([x \wedge t]) = \Sigma f([(t, x)]) = [(t, f(x))]$ e $(\Sigma f \circ i)([(x_0 \wedge 0, y)]) = \Sigma f([[(x_0 \wedge 0, y)]]) = \Sigma f([[(x_0 \wedge 0, y_0)]]) = \Sigma f([x_0 \wedge 0]) = \Sigma f([(0, x_0)]) = [(t, y_0)]$ (aqui estamos usando as identificações $\Sigma X = \frac{C_f}{j_2(Y)}$ e $\Sigma X = \frac{CX}{q(X)}$). Definamos $H : C_f \times I \longrightarrow \Sigma Y$ por $H([(x \wedge t, y)], s) = [(st, f(x))]$, $\forall([(x \wedge t, y)], s) \in C_f \times I$. Temos que $H([(x \wedge t, y)], 0) = [(0, f(x))] = [(0, y_0)] = c'([(x \wedge t, y)])$, onde $c' : C_f \longrightarrow \Sigma Y$ é a aplicação constante em $[(0, y_0)]$, $H([(x \wedge t, y)], 1) = [(t, f(x))] = (\Sigma f \circ i)([(x \wedge t, y)])$, $\forall [(x \wedge t, y)] \in C_f$ e $H([(x_0 \wedge 0, y_0)], s) = [(0, y_0)]$, $\forall s \in I$. Logo, H é uma homotopia entre c' e $\Sigma f \circ i$. Assim, $i^*([g]) = i^*([h \circ \Sigma f]) = [h \circ \Sigma f \circ i] = [h \circ c'] = [c]$, isto é, $[g] \in Ker(i^*)$ e portanto, $Im(\Sigma f)^* \subset Ker(i^*)$.

Por outro lado, seja $[g] \in Ker(i^*)$, ou seja, $i^*([g]) = [g \circ i] = [c]$ e seja $K : C_f \times I \longrightarrow Z$ a homotopia entre c e $g \circ i$, isto é, $K([(x \wedge t, y)], 0) = c([(x \wedge t, y)]) = z_0$, $K([(x \wedge t, y)], 1) = (g \circ i)([(x \wedge t, y)])$, $\forall [(x \wedge t, y)] \in C_f$ e $K([(x_0 \wedge 0, y_0)], s) = z_0$, $\forall s \in I$. Definamos $h : \Sigma Y \longrightarrow Z$ por $h([(t, y)]) = K([(x_0 \wedge 0, y)], t)$, $\forall [(t, y)] \in \Sigma Y$. Note que $(h \circ \Sigma f)([(t, x)]) = h([(t, f(x))]) = K([(x_0 \wedge 0, f(x))], t) = K([(x_0 \wedge 1, y)], t) = K([(x_0 \wedge 0, y_0)], t) = z_0$, $\forall [(t, x)] \in \Sigma X$. Defina $G : \Sigma X \times I \longrightarrow Z$ por $G([(t, x)], s) = K([(x \wedge t, y_0)], s)$, $\forall([(t, x)], s) \in \Sigma X \times I$. Temos que $G([(t, x)], 0) = K([(x \wedge t, y_0)], 0) = z_0 = (h \circ \Sigma f)([(t, x)])$, $G([(t, x)], 1) = K([(x \wedge t, y_0)], 1) = (g \circ i)([(x \wedge t, y_0)]) = g([[(x \wedge t, y_0)]]) = g([x \wedge t]) = g([(t, x)])$, $\forall [(t, x)] \in \Sigma X$, novamente usando as identificações $\Sigma X = \frac{C_f}{j_2(Y)}$ e $\Sigma X = \frac{CX}{q(X)}$, e $G([(0, x_0)], s) = K([(x_0 \wedge 0, y_0)], s) = z_0$, $\forall s \in I$. Logo, $h \circ \Sigma f \sim g$ e assim, $(\Sigma f)^*([h]) = [h \circ \Sigma f] = [g]$, isto é, $[g] \in Im(\Sigma f)^*$ e $Ker(i^*) \subset Im(\Sigma f)^*$.

A demonstração da exatidão nos outros estágios é análoga, desde que feita a seguinte observação: a prova da inclusão $Ker(\Sigma^n j_2)^* \subset Im(\Sigma^n i)^*$ segue do fato de $\Sigma^n C_f$ e $C_{\Sigma^n f}$ serem homeomorfos e assim, $\Sigma^n j_2 : \Sigma^n Y \longrightarrow \Sigma^n C_f$ será uma cofibração. Provemos então que $\Sigma^n C_f \approx C_{\Sigma^n f}$ e que $\Sigma^n j_2$ é uma cofibração.

Defina $\varphi : C_{\Sigma f} \longrightarrow \Sigma C_f$ por $\varphi([([[(t_1,x)] \wedge s, [(0,y_0)]])]) = [(t_1,[(x \wedge s, y_0)])]$, $\forall [(t_1,x)] \wedge s \in C(\Sigma X)$ e $\varphi([([[(0,x_0)] \wedge 0, [(t_2,y)]])]) = [(t_2,[(x_0 \wedge s0, y)])]$, $\forall [(t_2,y)] \wedge s \in \Sigma Y$.

Verifiquemos que φ está bem definida.

Sejam $[([[(t_1,x)] \wedge s_1, [(0,y_0)]])] = [([[(t_2,x_2)] \wedge s_2, [(0,y_0)]])] \in C_{\Sigma f}$, então $([[(t_1,x)] \wedge s_1, [(0,y_0)]]) \sim ([[(t_2,x_2) \wedge s_2, [(0,y_0)]]) = ([[(t_2,x_2) \wedge s_2, \Sigma f([(0,x_0)])]))$, o que significa que $[(t_1,x_1)] \wedge s_1 = [(t_2,x_2)] \wedge s_2$ ou $[(t_1,x_1)] \wedge s_1 = \bar{q}([(0,x_0)]) = [(0,x_0)] \wedge 1$ e $[(t_2,x_2)] \wedge s_2 = [(0,x_0)] \wedge 0$. Analisando todas as possibilidades temos: **1.**$[(t_1,x_1)] = [(t_2,x_2)]$ e $s_1 = s_2$ ou **2.**$[(t_1,x_1)] = [(0,x_0)]$ e $s_2 = 0$ ou **3.**$[(t_2,x_2)] = [(0,x_0)]$ e $s_1 = 0$ ou **4.**$s_1 = s_2 = 0$ ou **5.**$[(t_1,x_1)] = [(t_2,x_2)] = [(0,x_0)]$.

Precisamos mostrar que $[(t_1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)])] = [(t_2,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])]$, ou seja, $(t_1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])$. Para isso, analisemos os casos que vimos acima.

Se ocorrer **1** então $s_1 = s_2$ e as possibilidades são:

$i) t_1 = t_2$ e $x_1 = x_2 \Longrightarrow (t_1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)])$

$ii) t_1 = t_2 = 0 \Longrightarrow (0,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$iii) t_1 = t_2 = 1 \Longrightarrow (1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$iv) t_1 = 0$ e $t_2 = 1 \Longrightarrow (0,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$v) t_1 = 1$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0,[(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$vi) x_1 = x_2 = x_0 \Longrightarrow (t_1,[(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2,[(x_0 \wedge s_2, y_0)])$

$vii) t_1 = 0$ e $x_2 = x_0 \Longrightarrow (0,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2,[(x_0 \wedge s_1, y_0)])$

$viii) t_1 = 1$ e $x_2 = x_0 \Longrightarrow (1,[(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2,[(x_0 \wedge s_1, y_0)])$

$ix) x_1 = x_0$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (t_1,[(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0,[(x_2 \wedge s_1, y_0)])$

$x) x_1 = x_0$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1, [(x_2 \wedge s_1, y_0)])$

Se ocorrer **2** então $s_2 = 0$ e as possibilidades são:

$i) t_1 = 0 \Longrightarrow (0, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_2 \wedge 0, y_0)])$

$ii) t_1 = 1 \Longrightarrow (1, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_2 \wedge 0, y_0)])$

$iii) x_1 = x_0 \Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_2 \wedge 0, y_0)])$

Se ocorrer **3** então $s_1 = 0$ e as possibilidades são:

$i) t_2 = 0 \Longrightarrow (t_1, [(x_1 \wedge 0, y_0)]) \sim (0, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$ii) t_2 = 1 \Longrightarrow (t_1, [(x_1 \wedge 0, y_0)]) \sim (1, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$iii) x_2 = x_0 \Longrightarrow (t_1, [(x_1 \wedge 0, y_0)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge s_2, y_0)])$

Se ocorrer **4** então $s_1 = s_2 = 0$ e assim:

$(t_1, [(x_1 \wedge 0, y_0)]) \sim (t_2, [(x_2 \wedge 0, y_0)])$

Se ocorrer **5**, as possibilidades são:

$i) t_1 = 0$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (0, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$ii) t_1 = 0$ e $t_2 = 1 \Longrightarrow (0, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$iii) t_1 = 0$ e $x_2 = x_0 \Longrightarrow (0, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge s_2, y_0)])$

$iv) t_1 = 1$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (1, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$v) t_1 = 1$ e $t_2 = 1 \Longrightarrow (1, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$vi) t_1 = 1$ e $x_2 = x_0 \Longrightarrow (1, [(x_1 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge s_2, y_0)])$

$vii) x_1 = x_0$ e $t_2 = 0 \Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (0, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$viii) x_1 = x_0$ e $t_2 = 1 \Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (1, [(x_2 \wedge s_2, y_0)])$

$ix) x_1 = x_0$ e $x_2 = x_0 \Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge s_1, y_0)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge s_2, y_0)])$

Logo, obtemos o que queríamos.

Agora, sejam $[([(0, x_0)] \wedge 0, [(t_1, y_1)])] = [([(0, x_0)] \wedge 0, [(t_2, y_2)])] \in C_{\Sigma f}$, então $([(0, x_0)] \wedge 1, [(t_1, y_1)]) = ([(0, x_0)] \wedge 0, [(t_1, y_1)]) \sim ([(0, x_0)] \wedge 0, [(t_2, y_2)])$, o que significa que $[(t_1, y_1)] =$

$[(t_2, y_2)]$ ou $[(t_1, y_1)] = [(0, y_0)]$ e $[(t_2, y_2)] = \Sigma f([(0, x_0)]) = [(0, y_0)]$. Analisando todas as possibilidades temos: **1.**$t_1 = t_2$ e $y_1 = y_2$ ou **2.**$t_1 = t_2 = 0$ ou **3.**$t_1 = t_2 = 1$ ou **4.**$t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ ou **5.**$t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ ou **6.**$y_1 = y_2 = y_0$ ou **7.**$t_1 = 0$ e $y_2 = y_0$ ou **8.**$t_1 = 1$ e $y_2 = y_0$ ou **9.**$y_1 = y_0$ e $t_2 = 0$ ou **10.**$y_1 = y_0$ e $t_2 = 1$.

Queremos provar que $[(t_1, [(x_0 \wedge 0, y_1)])] = [(t_2, [(x_0 \wedge 0, y_2)]$, isto é, $(t_1, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$. Verifiquemos:

1. $\Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (t_1, [(x_0 \wedge 0, y_1)])$

2. $\Longrightarrow (0, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (0, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

3. $\Longrightarrow (1, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (1, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

4. $\Longrightarrow (0, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (1, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

5. $\Longrightarrow (1, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (0, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

6. $\Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge 0, y_0)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge 0, y_0)])$

7. $\Longrightarrow (0, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge 0, y_0)])$

8. $\Longrightarrow (1, [(x_0 \wedge 0, y_1)]) \sim (t_2, [(x_0 \wedge 0, y_0)])$

9. $\Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge 0, y_0)]) \sim (0, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

10. $\Longrightarrow (t_1, [(x_0 \wedge 0, y_0)]) \sim (1, [(x_0 \wedge 0, y_2)])$

Portanto, φ é bem definida.

Para verificarmos se φ é injetora, suponha $\varphi([([(t_1, x)] \wedge s, [(0, y_0)])]) = [(0, [(x_0 \wedge 0, y_0)])]$. Então $[(t_1, [(x \wedge s, y_0)])] = [(0, [(x_0 \wedge 0, y_0)])]$. Logo, $t_1 = 0$ ou $t_1 = 1$ ou $[(x \wedge s, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$, ou seja, $(x \wedge s, y_0) \sim (x_0 \wedge 0, y_0)$ e assim, $x \wedge s = q(x_0) = x_0 \wedge 1$, isto é, $x = x_0$ ou $s = 0$. Temos que

i)$t_1 = 0 \Longrightarrow [([(t_1, x)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(0, x)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(0, x_0)] \wedge 0, [(0, y_0)])]$

ii)$t_1 = 1 \Longrightarrow [([(t_1, x)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(1, x)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(0, x_0)] \wedge 0, [(0, y_0)])]$

iii)$x = x_0 \Longrightarrow [([(t_1, x)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(t_1, x_0)] \wedge s, [(0, y_0)])] = [([(0, x_0)] \wedge 0, [(0, y_0)])]$

iv)$s=0 \Longrightarrow [([(t_1,x)]\wedge s,[(0,y_0)])]=[([(t_1,x)]\wedge 0,[(0,y_0)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(0,y_0)])]$

Suponha agora que $\varphi([([(0,x_0)]\wedge 0,[(t_2,y)])])=[(0,[(x_0\wedge 0,y_0)])]$, ou seja, $[(t_2,[(x_0\wedge 0,y)])]=[(0,[(x_0\wedge 0,y_0)])]$. Logo, $t_2=0$ ou $t_2=1$ ou $[(x_0\wedge 0,y)]=[(x_0\wedge 0,y_0)]$, ou seja, $y=y_0$. Temos que:

i)$t_2=0 \Longrightarrow [([(0,x_0)]\wedge 0,[(t_2,y)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(0,y)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(0,y_0)])]$

ii)$t_2=1 \Longrightarrow [([(0,x_0)]\wedge 0,[(t_2,y)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(1,y)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(0,y_0)])]$

iii)$y=y_0 \Longrightarrow [([(0,x_0)]\wedge 0,[(t_2,y)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(t_2,y_0)])]=[([(0,x_0)]\wedge 0,[(0,y_0)])]$

Sendo assim, φ é injetora.

Facilmente podemos ver que φ é sobrejetora, pois todo elemento de ΣC_f ou é da forma $[(t,[(x\wedge s,y_0)])]$ e assim, tomando $[([(t,x)]\wedge s,[(0,y_0)])]\in C_{\Sigma f}$ temos que $\varphi([([(t,x)]\wedge s,[(0,y_0)])])=[(t,[(x\wedge s,y_0)])]$ ou é da forma $[(t,[(x_0\wedge 0,y)])]$ e daí, tomando $[([(0,x_0)]\wedge 0,[(t,y)])]\in C_{\Sigma f}$ temos que $\varphi([([(0,x_0)]\wedge 0,[(t,y)])])=[(t,[(x_0\wedge 0,y)])]$.

Observe o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
((I\times X)\times I)\vee(I\times Y) \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "(\pi_X\times 1)\vee\pi_Y"'] & I\times((X\times I)\times Y) \arrow[d, "1\times(p\vee 1_Y)"] \\
(\Sigma X\times I)\vee\Sigma Y \arrow[d, "\bar{p}\vee 1_{\Sigma Y}"'] & I\times(CX\vee Y) \arrow[d, "1\times p'"] \\
C(\Sigma X)\vee\Sigma Y \arrow[d, "p_1"'] & I\times C_f \arrow[d, "p_2"] \\
C_{\Sigma f} \arrow[r, "\varphi"'] & \Sigma C_f
\end{tikzcd}$$

em que $\pi_X: I\times X\longrightarrow \Sigma X$, $\pi_Y: I\times Y\longrightarrow \Sigma Y$, $p: X\times I\longrightarrow CX$, $\bar{p}:\Sigma X\longrightarrow C(\Sigma X)$, $p': CX\vee Y\longrightarrow C_f$, p_1 e p_2 são aplicações quocientes e l' é definida por $l'(((t_1,x),s),(0,y_0))=(t_1,((x,s),y_0))$ e $l'(((0,x_0),0),(t_2,y))=(t_2,((x_0,0),y_0))$.

Note que l' é contínua e aberta. Logo, como cada uma das aplicações quocientes acima também é contínua e aberta, pela comutatividade do diagrama, segue que φ também é contínua e aberta.

Portanto, φ é um homeomorfismo.

Faremos agora uma indução sobre n para mostrarmos que $\Sigma^n C_f \approx C_{\Sigma^n f}$. O primeiro passo da indução é o que foi feito acima e tomemos como hipótese de indução que $\Sigma^{n-1} C_f \approx C_{\Sigma^{n-1} f}$. Logo, $\Sigma^n C_f = \Sigma(\Sigma^{n-1} C_f) \approx \Sigma(C_{\Sigma^{n-1} f})$, pois se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo com inversa contínua f^{-1} então $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ também é um homeomorfismo com inversa contínua Σf^{-1}. Pelo primeiro passo da indução temos que $\Sigma(C_{\Sigma^{n-1} f}) \approx C_{\Sigma(\Sigma^{n-1} f)} = C_{\Sigma^n f}$ e daí, $\Sigma^n C_f \approx C_{\Sigma^n f}$, como queríamos.

Para provarmos que de fato $\Sigma^n j_2 : \Sigma^n Y \longrightarrow \Sigma^n C_f$ é uma cofibração, vamos mostrar que se $q : X \longrightarrow CX$ é uma cofibração então Σq também é uma cofibração.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(CX) \times I & \Sigma(CX) \times \{0\} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h"] \\
\Sigma X \times I \arrow[u, "\Sigma q \times 1"] \arrow[r, "H'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

tal que $H'([(t,x)], s) = h(\Sigma q([(t,x)]), 0)$, $\forall [(t,x)] \in \Sigma X$. Seja $G : \Sigma(CX) \times I \longrightarrow Y$ definida por

$$G([(t_1, x \wedge t_2)], s) = \begin{cases} h([(t_1, x \wedge (st_2 + t_2))], 0), & 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{s+1}, \\ H'([(t_1, x)], st_2 + t_2 - 1), & \frac{1}{s+1} \leq t_2 \leq 1, \end{cases}$$

$\forall ([t_1, x \wedge t_2], s) \in \Sigma(CX) \times I$. Note que G está bem definida e como para $t_2 = \frac{1}{s+1}$ temos que $h([(t_1, x \wedge (st_2 + t_2))], 0) = h([(t_1, x \wedge 1)], 0)$ e $H'([(t_1, x)], st_2 + t_2 - 1) = H'([(t_1, x)], 0) = h(\Sigma q([(t_1, x)]), 0) = h([(t_1, x \wedge 1)], 0)$, e h e H' são contínuas, segue pelo Lema da Colagem que G é contínua. Além disso, $(G \circ i)([(s, x \wedge t)], 0) = G([(s, x \wedge t)], 0) = \begin{cases} h([(s, x \wedge t)], 0), & 0 \leq t \leq 1, \\ H'([(s, x)], t - 1), & t = 1, \end{cases}$ $= h([(s, x \wedge t)], 0)$, $\forall [(s, x \wedge t)] \in \Sigma(CX)$, ou seja, $G \circ i = h$ e $(G \circ (\Sigma q \times 1))([(t,x)], s) = G([(t, x \wedge 1)], s) = H'([(t,x)], s)$, $\forall ([(t,x)], s) \in \Sigma X \times I$, isto é, $G \circ (\Sigma q \times 1) = H'$. Portanto,

Σq é cofibração.

Fazendo indução sobre n, provemos que se q é cofibração então $\Sigma^n q$ também é cofibração. O primeiro passo da indução é o que foi feito acima e como hipótese de indução vamos supor que $\Sigma^{n-1}q$ é cofibração. Logo, pelo primeiro passo da indução temos que $\Sigma(\Sigma^{n-1}q) = \Sigma^n q$ é também uma cofibração.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^n(CX) \arrow[r, "\Sigma^n j_1"] & \Sigma^n C_f \\
\Sigma^n X \arrow[u, "\Sigma^n q"] \arrow[r, "\Sigma^n f"'] & \Sigma^n Y, \arrow[u, "\Sigma^n j_2"']
\end{tikzcd}$$

o homeomorfismo $\varphi : C_{\Sigma^n f} \longrightarrow \Sigma^n C_f$, a cofibração $j_2' : \Sigma^n Y \longrightarrow C_{\Sigma^n f}$ e $j_1' : \Sigma^n(CX) \longrightarrow C_{\Sigma^n f}$. Então temos $\varphi \circ j_2' = \Sigma^n j_2$ e $\varphi \circ j_1' = \Sigma^n j_1$. Como j_2' é cofibração, podemos considerar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{\Sigma^n f} \times I & C_{\Sigma^n f} \times \{0\} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h\circ(\varphi\times 1_{\{0\}})"] \\
\Sigma^n Y \times I \arrow[u, "j_2'\times 1_I"] \arrow[r, "H"'] & Z
\end{tikzcd}$$

em que $Z \in \mathcal{C}_0$, $h : \Sigma^n C_f \times \{0\} \longrightarrow Z$ aplicação qualquer e $H(x,0) = (h \circ (\varphi \times 1_{\{0\}}))(j_2'(x), 0)$ e assim, existe uma homotopia $G : C_{\Sigma^n f} \times I \longrightarrow Z$ tal que $G \circ i = h \circ (\varphi \times 1_{\{0\}})$ e $G \circ (j_2' \times 1_I) = H$. Desse modo, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^n C_f \times I \arrow[d, shift left, "\varphi^{-1}\times 1_I"] & \Sigma^n C_f \times \{0\} \arrow[l, "i'"'] \arrow[dd, "h"] \\
C_{\Sigma^n f} \times I \arrow[u, shift left, "\varphi\times 1_I"] & \\
\Sigma^n Y \times I \arrow[u, "j_2'\times 1_I"] \arrow[r, "H"'] \arrow[uu, bend left=60, "\Sigma^n j_2\times 1_I"] & Z
\end{tikzcd}$$

em que $i' = (\varphi \times 1_I) \circ i \circ (\varphi^{-1} \times 1_{\{0\}})$, é tal que $H(x,0) = (h \circ (\varphi \times 1_{\{0\}}))(j_2'(x), 0) = h((\varphi \circ j_2')(x), 0)$ e $\bar{G} = G \circ (\varphi^{-1} \times 1_I) : \Sigma^n C_f \times I \longrightarrow Z$ satisfaz $\bar{G} \circ i' = h$ e $\bar{G} \circ ((\varphi \times 1_I) \circ (j_2' \times 1_I)) = H$. De fato,

$(\bar{G} \circ i')(x,0) = (G \circ (\varphi^{-1} \times 1_I) \circ (\varphi \times 1_I) \circ i \circ (\varphi^{-1} \times 1_{\{0\}}))(x,0) = (G \circ i \circ (\varphi^{-1} \times 1_{\{0\}}))(x,0) =$

$(h \circ (\varphi \times 1_{\{0\}}) \circ (\varphi^{-1} \times 1_{\{0\}}))(x,0) = h(x,0)$, $\forall x \in \Sigma^n C_f$ e $(\bar{G} \circ ((\varphi \times 1_I) \circ (j_2' \times 1_I)))(x,0) =$

$(G \circ (\varphi^{-1} \times 1_I) \circ (\varphi \times 1_I) \circ (j_2' \times 1_I))(x,0) = (G \circ (j_2' \times 1_I))(x,0) = H(x,0)$, $\forall x \in \Sigma^n Y$.

Portanto, $\Sigma^n j_2$ é uma cofibração e concluímos a prova do Teorema. $\square$

Lema 5.2.1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma cofibração. Então, os espaços C_f e $\dfrac{Y}{f(X)}$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração: Definamos $k : C_f \longrightarrow \dfrac{Y}{f(X)}$ do seguinte modo:

$$k([(x \wedge t, y_0)]) = [y_0], \forall x \in X, t \neq 1;$$

$$k([(x \wedge 1, y_0)]) = k([(x_0 \wedge 0, f(x))]) = [y_0], \forall x \in X;$$

$$k([(x_0 \wedge 0, y)]) = [y], \forall y \in Y - f(X).$$

Observe que k é contínua e bem definida desde que $\forall y \in Y - f(X)$, $[(x_0 \wedge 0, y)] = [(x_0 \wedge 0, y')] \Leftrightarrow y = y'$.

Por outro lado, note que $j_2 \circ f$ é homotópica à aplicação constante $c : X \longrightarrow C_f$ dada por $c(x) = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$ via $K : X \times I \longrightarrow C_f$ definida por $K(x,t) = [(x \wedge (1-t), y_0)]$, $\forall (x,t) \in X \times I$, pois $K(x,0) = [(x \wedge 1, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, f(x))] = (j_2 \circ f)(x)$, $K(x,1) = [(x \wedge 0, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)] = c(x)$, $\forall x \in X$ e $K(x_0, t) = [(x_0 \wedge (1-t), y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$, $\forall t \in I$.

Deformaremos j_2 em uma aplicação k' tal que $k' \circ f = c$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \times I & Y \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "j_2"] \\
X \times I \arrow[u, "f \times 1_I"] \arrow[r, "K"'] & C_f
\end{tikzcd}$$

em que $i'(y) = (y,0)$ e $K(x,0) = j_2(f(x))$. Como f é uma cofibração, existe uma homotopia $G : Y \times I \longrightarrow C_f$ tal que $G \circ i' = j_2$ e $G \circ (f \times 1_I) = K$. Seja $k' = G(\ ,1) : Y \longrightarrow C_f$ dada por

$k'(y) = G(y,1)$, $\forall y \in Y$. Desse modo, como $G(y,0) = (G \circ i')(y) = j_2(y)$, $\forall y \in Y$, segue que $j_2 \sim k'$. Além disso, $(k' \circ f)(x) = k'(f(x)) = G(f(x),1) = (G \circ (f \times 1_I))(x,1) = K(x,1) = c(x)$, $\forall x \in X$, ou seja, $k' \circ f = c$. Assim, $k'(f(X)) = c(X)$ e portanto k' induz uma aplicação $\bar{k}' : \frac{Y}{f(X)} \longrightarrow C_f$ dada por $\bar{k}'([y]) = k'(y)$.

Provemos que $\bar{k}' \circ k \sim 1_{C_f}$ e $k \circ \bar{k}' \sim 1_{\frac{Y}{f(X)}}$.

Observemos primeiramente que para todo $x \wedge t \in CX$, $(\bar{k}' \circ k)([(x \wedge t, y_0)]) = \bar{k}'([y_0]) = k'(y_0) = G(y_0, 1) = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$ e para todo $y \in Y - f(X)$, $(\bar{k}' \circ k)([(x_0 \wedge 0, y)]) = \bar{k}'([y]) = k'(y) = G(y,1)$.

Definamos $H_1 : C_f \times I \longrightarrow C_f$ por

$$H_1([(x \wedge t, y_0)], s) = [(x \wedge ts, y_0)], \forall x \wedge t \in CX, \forall s \in I;$$

$$H_1([(x_0 \wedge 0, y)], s) = G(y, 1-s), \forall y \in Y - f(X), \forall s \in I.$$

Temos que H_1 é bem definida e é contínua. Também, H_1 é uma homotopia entre $\bar{k}' \circ k$ e 1_{C_f}, pois $H_1([(x \wedge t, y_0)], 0) = [(x \wedge 0, y_0)] = [(x_0 \wedge 0, y_0)] = (\bar{k}' \circ k)([(x \wedge t, y_0)])$, $\forall x \wedge t \in CX$ e $H_1([(x_0 \wedge 0, y)], 0) = G(y,1) = (\bar{k}' \circ k)([(x_0 \wedge 0, y)])$, $\forall y \in Y - f(X)$; $H_1([(x \wedge t, y_0)], 1) = [(x \wedge t, y_0)] = 1_{C_f}([(x \wedge t, y_0)])$, $\forall x \wedge t \in CX$ e $H_1([(x_0 \wedge 0, y)], 1) = G(y, 0) = j_2(y) = [(x_0 \wedge 0, y)] = 1_{C_f}([(x_0 \wedge 0, y)])$, $\forall y \in Y - f(X)$; e ainda, $H_1([(x_0 \wedge 0, y_0)], s) = [(x_0 \wedge 0, y_0)]$, $\forall s \in I$.

Agora, definamos $H_2 : \dfrac{Y}{f(X)} \times I \longrightarrow \dfrac{Y}{f(X)}$ por $H_2([y], s) = (k \circ G)(y, 1-s)$, $\forall y \in Y - f(X)$ e $\forall s \in I$, que é bem definida e contínua. Note que $H_2([y], 0) = (k \circ G)(y, 1) = (k \circ k')(y) = (k \circ \bar{k}')([y])$, $H_2([y], 1) = (k \circ G)(y, 0) = k(j_2(y)) = k([(x_0 \wedge 0, y]) = [y] = 1_{\frac{Y}{f(X)}}([y])$, $\forall [y] \in \dfrac{Y}{f(X)}$ e $H_2([y_0], s) = (k \circ G)(y_0, 1-s) = k([(x_0 \wedge 0, y_0)]) = [y_0]$, $\forall s \in I$. Logo, H_2 é uma homotopia entre $k \circ \bar{k}'$ e $1_{\frac{Y}{f(X)}}$. Segue que C_f e $\dfrac{Y}{f(X)}$ são homotopicamente equivalentes. $\square$

Definição 5.2.1. *Se $f : X \longrightarrow Y$ for uma cofibração, chamamos o espaço $\dfrac{Y}{f(X)}$ de* ***cofibra***

de f.

No caso em que $f : X \longrightarrow Y$ é uma cofibração, a sequência exata do Teorema 5.2.1 poderá ser escrita na forma

$$[X,Z] \stackrel{f^*}{\longleftarrow} [Y,Z] \stackrel{(k\circ j_2)^*}{\longleftarrow} \left[\frac{Y}{f(X)}, Z\right] \stackrel{(i\circ \bar{k}')^*}{\longleftarrow} [\Sigma X, Z] \stackrel{(\Sigma f)^*}{\longleftarrow} [\Sigma Y, Z] \stackrel{(\Sigma k\circ j_2)^*}{\longleftarrow} \left[\Sigma\frac{Y}{f(X)}, Z\right] \stackrel{(\Sigma i\circ \bar{k}')^*}{\longleftarrow} \dots$$

onde $k \circ j_2 : Y \longrightarrow \dfrac{Y}{f(X)}$ é a aplicação quociente.

Capítulo 6

Estruturas de grupo sobre os conjuntos $[Z, X]$

Neste capítulo, apresentamos as definições de H-espaços e CoH-espaços, mostramos que o conjunto $[Z, \Omega X]$ é um grupo e damos condição para que este seja abeliano. Também definimos grupo de homotopia e provamos que $\pi_n(X)$ é sempre abeliano quando $n \geq 2$ e que $\pi_1(X)$ é abeliano quando X é um H-espaço.

6.1 H-espaços

Definição 6.1.1. *Um espaço $X \in \mathcal{C}_0$ é um H-**espaço** se, e somente se, existir uma aplicação $\mu : X \times X \longrightarrow X$, chamada H-**multiplicação** tal que, sendo $i : X \vee X \longrightarrow X \times X$ a inclusão e $\Sigma : X \vee X \longrightarrow X$ a aplicação definida por $\Sigma(x_0, x) = x$ e $\Sigma(x, x_0) = x$, $\forall x \in X$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[dr, "\mu"] & \\ X \vee X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\Sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

é homotópico-comutativo, isto é, $\mu \circ i \sim \Sigma$.

Definição 6.1.2. *Um H-espaço X é **homotópico-associativo**, ou simplesmente **associativo**, se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

for homotópico-comutativo, ou seja, $\mu \circ (\mu \times 1) \sim \mu \circ (1 \times \mu)$.

Lema 6.1.1. *Se X for um H-espaço associativo, para todo $Z \in \mathcal{C}_0$, então $[Z, X]$ é um semi-grupo com elemento neutro.*

Demonstração: Dados $[f], [g] \in [Z, X]$, definimos o produto $[f] \cdot [g] = [\mu \circ (f \times g) \circ d]$, onde $d : Z \longrightarrow Z \times Z$ é a aplicação diagonal dada por $d(z) = (z, z)$, $\forall z \in Z$.

Mostremos que se $[f] = [f']$ e $[g] = [g']$ então $[\mu \circ (f \times g) \circ d] = [\mu \circ (f' \times g') \circ d]$. Sejam $H : Z \times I \longrightarrow X$ e $G : Z \times I \longrightarrow X$ homotopias entre f e f' e g e g', respectivamente. Definamos $K : Z \times I \longrightarrow X$ por $K(z, t) = (\mu \circ (H \times G) \circ \bar{d})(z, t)$ onde $\bar{d} : Z \times I \longrightarrow (Z \times I) \times (Z \times I)$ é dada por $\bar{d}(z, t) = ((z, t), (z, t))$. Logo, $K(z, 0) = (\mu \circ (H \times G) \circ \bar{d})(z, 0) = (\mu \circ (H \times G))((z, 0), (z, 0)) = \mu(f(z), g(z)) = (\mu \circ (f \times g))(z, z) = (\mu \circ (f \times g) \circ d)(z)$, $K(z, 1) = (\mu \circ (H \times G) \circ \bar{d})(z, 1) = (\mu \circ (H \times G))((z, 1), (z, 1)) = \mu(f'(z), g'(z)) = (\mu \circ (f' \times g'))(z, z) = (\mu \circ (f' \times g') \circ d)(z)$, $\forall z \in Z$ e $K(z_0, t) = (\mu \circ (H \times G) \circ \bar{d})(z_0, t) = (\mu \circ (H \times G))((z_0, t), (z_0, t)) = \mu(x_0, x_0) = x_0$, $\forall t \in I$. Portanto, a operação é bem definida.

Seja $c : Z \longrightarrow X$ a aplicação constante em x_0. Para provarmos que $[c]$ é o elemento neutro do produto definido, temos que mostrar que $[f] \cdot [c] = [f]$ e $[c] \cdot [f] = [f]$, isto é, $\mu \circ (f \times c) \circ d \sim f$ e $\mu \circ (c \times f) \circ d \sim f$. Para isso, observemos que $c \times f = i \circ \overline{c \times f}$ onde $i : X \vee X \longrightarrow X \times X$ é a inclusão e $\overline{c \times f} : Z \times Z \longrightarrow X \vee X$ é dado por $\overline{c \times f}(z_1, z_2) = (x_0, f(z_2))$. Então, $\mu \circ (c \times f) \circ d = \mu \circ i \circ \overline{c \times f} \circ d$. Como X é H-espaço, $\mu \circ i \sim \Sigma$ e portanto, $\mu \circ (c \times f) \circ d \sim \Sigma \circ \overline{c \times f} \circ d$. Mas $(\Sigma \circ \overline{c \times f} \circ d)(z) = (\Sigma \circ \overline{c \times f})(z, z) = \Sigma(x_0, f(z)) = f(z)$, $\forall z \in Z$. Portanto, $\mu \circ (c \times f) \circ d \sim f$.

Por outro lado, $f \times c = i \circ \overline{f \times c}$ onde $\overline{f \times c}(z_1, z_2) = (f(z_1), x_0)$. Então, $\mu \circ (f \times c) \circ d = \mu \circ i \circ \overline{f \times c} \circ d \sim \Sigma \circ \overline{f \times c} \circ d = f$, pois $\forall z \in Z$, $(\Sigma \circ \overline{f \times c} \circ d)(z) = (\Sigma \circ \overline{f \times c})(z, z) = \Sigma(f(z), x_0) = f(z)$.

Provemos agora que o produto definido é associativo, ou seja, dados $[f], [g], [h] \in [Z, X]$, $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$, ou equivalentemente, $[f] \cdot [\mu \circ (g \times h) \circ d] = [\mu \circ (f \times g) \circ d] \cdot [h]$, ou seja, $\mu \circ (f \times (\mu \circ (g \times h) \circ d)) \circ d \sim \mu \circ ((\mu \circ (f \times g) \circ d) \times h) \circ d$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d"'] & Z \times Z \arrow[r, "d\times 1"] & (Z \times Z) \times Z \arrow[r, "(f\times g)\times h"] & (X \times X) \times X \arrow[r, "\mu\times 1"] & X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\
& Z \times Z \arrow[r, "1\times d"'] & Z \times (Z \times Z) \arrow[r, "f\times(g\times h)"'] & X \times (X \times X) \arrow[ur, "1\times\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como $(f\times g)\times h\circ(d\times 1)\circ d = f\times(g\times h)\circ(1\times d)\circ d$ e $\mu\circ(\mu\times 1) \sim \mu\circ(1\times\mu)$, pois X é H-espaço associativo, segue que $\mu \circ (\mu \times 1) \circ (f \times g) \times h \circ (d \times 1) \circ d \sim \mu \circ (1 \times \mu) \circ f \times (g \times h) \circ (1 \times d) \circ d$. Mas $(\mu \circ (\mu \times 1) \circ (f \times g) \times h \circ (d \times 1) \circ d)(z) = (\mu \circ (\mu \times 1) \circ (f \times g) \times h \circ (d \times 1))(z, z) = (\mu\circ(\mu\times 1)\circ(f\times g)\circ h)(d(z), z) = (\mu\circ(\mu\times 1))((((f\times g)\circ d)(z), h(z)) = \mu((\mu\circ(f\times g)\circ d)(z), h(z)) = \mu\circ((\mu\circ(f\times g)\circ d)\times h)(z, z) = (\mu\circ((\mu\circ(f\times g)\circ d)\times h)\circ d)(z)$ e $(\mu\circ(1\times\mu)\circ f\times(g\times h)\circ(1\times d)\circ d)(z) = (\mu\circ(1\times\mu)\circ f\times(g\times h)\circ(1\times d))(z, z) = (\mu\circ(1\times\mu)\circ f\times(g\times h))(z, d(z)) = (\mu\circ(1\times\mu))(f(z), ((g\times h)\circ d)(z)) = \mu(f(z), (\mu\circ(g\times h)\circ d)(z)) = \mu\circ(f\times(\mu\circ(g\times h)\circ d))(z, z) = (\mu\circ(f\times(\mu\circ(g\times h)\circ d)\circ d)(z)$, $\forall z \in Z$.

Portanto, segue que $\mu \circ (f \times (\mu \circ (g \times h) \circ d)) \circ d \sim \mu \circ ((\mu \circ (f \times g) \circ d) \times h) \circ d$. $\square$

Um exemplo importante de H-espaço associativo é discutido no Lema seguinte:

Lema 6.1.2. *Para todo $X \in \mathcal{C}_0$, o espaço dos laços ΩX é um H-espaço associativo.*

Demonstração: Definamos $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ por

$$\mu(\alpha,\beta)([t]) = \begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \forall(\alpha,\beta) \in \Omega X \times \Omega X \ e \ \forall [t] \in S^1.$$

Note que μ é bem definida, pois $\mu(\alpha,\beta)([0]) = \alpha([0]) = x_0 = \beta([1]) = \mu(\alpha,\beta)([1])$ e é contínua, pois $\alpha([1]) = x_0 = \beta([0])$.

Sejam $c : S^1 \longrightarrow X$ o laço constante em x_0 e a homotopia $H : (\Omega X \vee \Omega X) \times I \longrightarrow \Omega X$ definida por

$$H((\alpha,c),s)([t]) = \begin{cases} \alpha([\frac{2t}{s+1}]), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ x_0, & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e

$$H((c,\beta),s)([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ \beta([\frac{2t-1+s}{s+1}]), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\forall \alpha, \beta \in \Omega X$, $\forall s \in I$, $\forall [t] \in S^1$.

Observe que H é bem definida, pois $H((\alpha,c),s)([0]) = \alpha([0]) = x_0 = H((\alpha,c),s)([1])$ e $H((c,\beta),s)([0]) = x_0 = \beta([1]) = H((c,\beta),s)([1])$ e é contínua, pois para $t = \frac{s+1}{2}$, $H((\alpha,c),s)([\frac{s+1}{2}]) = \alpha([1]) = x_0$ e para $t = \frac{1-s}{2}$, $H((c,\beta),s)([\frac{1-s}{2}]) = \beta([0]) = x_0$.

Além disso, $H((\alpha,c),0)([t]) = \begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = \mu(\alpha,c)([t]) = (\mu \circ i)(\alpha,c)([t])$, $\forall \alpha \in \Omega X$ e $H((c,\beta),0)([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = \mu(c,\beta)([t]) = (\mu \circ i)(c,\beta)([t])$, $\forall \beta \in \Omega X$, ou seja, $H(\ ,0) = \mu \circ i$; $H((\alpha,c),1)([t]) = \begin{cases} \alpha([t]), & 0 \leq t \leq 1, \\ x_0, & t = 1, \end{cases} = \alpha([t]) = \Sigma(\alpha,c)([t])$, $\forall \alpha \in \Omega X$ e $H((c,\beta),1)([t]) = \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ \beta([t]), & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} = \beta([t]) = \Sigma(c,\beta)([t])$, $\forall \beta \in \Omega X$, isto é, $H(\ ,1) = \Sigma$; $H((c,c),s)([t]) = x_0$, $\forall s \in I$, $\forall [t] \in S^1$.

Portanto, $\mu \circ i \sim \Sigma$ e ΩX é H-espaço.

Provemos que $\mu \circ (\mu \times 1) \sim \mu \circ (1 \times \mu)$. Inicialmente, observemos que em decorrência da definição de μ, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega X$ e $\forall t \in I$, temos que $(\mu \circ (\mu \times 1))(\alpha, \beta, \gamma)([t]) = \mu(\mu(\alpha, \beta), \gamma)([t]) =$

$$\begin{cases} \mu(\alpha, \beta)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = \begin{cases} \alpha([4t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \beta([4t-1]), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \text{ e}$$

$$(\mu \circ (1 \times \mu))(\alpha, \beta, \gamma)([t]) = \mu(\alpha, \mu(\beta, \gamma))([t]) = \begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(\beta, \gamma)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta([4t-2]), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma([4t-3]), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} .$$

Definamos $G : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X$ por

$$G((\alpha, \beta, \gamma), s)([t]) = \begin{cases} \alpha([\frac{4t}{s+1}]), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ \beta([4t-s-1]), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ \gamma([\frac{4t-2-s}{2-s}]), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} ,$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega X$, $\forall s \in I$, $\forall [t] \in S^1$.

Observe que G é bem definida, pois $G((\alpha, \beta, \gamma), s)([0]) = \alpha([0]) = x_0 = \gamma([1]) = G((\alpha, \beta, \gamma), s)([1])$ e é contínua, pois para $t = \frac{s+1}{4}$ temos $G((\alpha, \beta, \gamma), s)([\frac{s+1}{4}]) = \alpha([1]) = x_0 = \beta([0])$ e para $t = \frac{s+2}{4}$ temos $G((\alpha, \beta, \gamma), s)([\frac{s+2}{4}]) = \beta([1]) = x_0 = \gamma([0])$.

Além disso, $G((\alpha, \beta, \gamma), 0)([t]) = \begin{cases} \alpha([4t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \beta([4t-1]), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = (\mu \circ (\mu \times 1))(\alpha, \beta, \gamma)([t])$, ou seja, $G((\alpha, \beta, \gamma), 0) = (\mu \circ (\mu \times 1))(\alpha, \beta, \gamma)$, ou ainda, $G(\ ,0) = \mu \circ (\mu \times 1)$; $G((\alpha, \beta, \gamma), 1)([t]) =$

$\begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta([4t-2]), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma([4t-3]), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} = (\mu \circ (1 \times \mu))(\alpha, \beta, \gamma)([t])$, isto é, $G((\alpha, \beta, \gamma), 1) = (\mu \circ (1 \times \mu))(\alpha, \beta, \gamma)$, ou ainda, $G(\ , 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ e $G((c, c, c), s)([t]) = x_0$, $\forall s \in I$, $\forall [t] \in S^1$.

Portanto, ΩX é H-espaço associativo. $\square$

Teorema 6.1.1. *Dados $X, Z \in \mathcal{C}_0$, o conjunto $[Z, \Omega X]$ é um grupo.*

Demonstração: Em vista dos Lemas anteriores, $[Z, \Omega X]$ é um semi-grupo com elemento neutro. Basta então mostrarmos que todo elemento $[f] \in [Z, \Omega X]$ possui um elemento inverso.

Dado $f : Z \longrightarrow \Omega X$, para todo $z \in Z$, tomemos o laço $f(z) \in \Omega X$ e definamos $h : Z \longrightarrow \Omega X$ por $h(z)([t]) = f(z)([1-t])$, $\forall z \in Z$, $\forall [t] \in S^1$. Note que $h(z)([0]) = f(z)([1]) = f(z)([0]) = h(z)([1])$ e h é contínua. Chamando $c : Z \longrightarrow \Omega X$ a aplicação constante em α_0, onde $\alpha_0 : S^1 \longrightarrow X$ é a aplicação constante em x_0, mostremos que $[f] \cdot [h] = [h] \cdot [f] = [c]$, ou seja, $\mu \circ (f \times h) \circ d \sim c$ e $\mu \circ (h \times f) \circ d \sim c$.

Primeiramente, observe que para todo $z \in Z$ e para todo $[t] \in S^1$ temos:

$$
\begin{aligned}
(i)\ (\mu \circ (f \times h) \circ d)(z)([t]) &= (\mu \circ (f \times h))(z, z)([t]) \\
&= \mu(f(z), h(z))([t]) \\
&= \begin{cases} f(z)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(z)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(z)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2-2t]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
(ii)\ (\mu \circ (h \times f) \circ d)(z)([t]) &= (\mu \circ (h \times f))(z,z)([t]) \\
&= \mu(h(z), f(z))([t]) \\
&= \begin{cases} h(z)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(z)([1-2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

Definamos $H_1 : Z \times I \longrightarrow \Omega X$ por $H_1(z,s)([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ f(z)([2t-s]), & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2-2t-s]), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0, & \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$

$\forall (z,s) \in Z \times I$, $\forall [t] \in S^1$.

Observe que $H_1(z,s)([0]) = x_0 = H_1(z,s)([1])$ e H_1 é contínua, pois para $t = \dfrac{s}{2}$ temos $H_1(z,s)([\frac{s}{2}]) = x_0 = f(z)([0])$, para $t = \dfrac{1}{2}$ temos $H_1(z,s)([$
$frac12]) = f(z)([1-s])$ e para $t = \dfrac{2-s}{2}$ temos que $H_1(z,s)([\frac{2-s}{2}]) = f(z)([0]) = x_0$. Ainda,

$$\begin{aligned}
H_1(z,0)([t]) &= \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ f(z)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2-2t]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ x_0, & t = 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(z)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2-2t]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= (\mu \circ (f \times h) \circ d)(z)([t])
\end{aligned}$$

,

$$
\begin{aligned}
H_1(z,1)([t]) &= \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([0]), & t = \frac{1}{2}, \\ f(z)([0]), & t = \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= x_0 \\
&= \alpha_0([t]) \\
&= c(z)([t]), \forall z \in Z, \forall [t] \in S^1
\end{aligned}
$$

e $H_1(z_0, s)([t]) = x_0, \forall s \in I, \forall [t] \in S^1$. Logo, $\mu \circ (f \times h) \circ d \sim c$.

Definamos $H_2 : Z \times I \longrightarrow \Omega X$ por $H_2(z,s)([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ f(z)([1-2t+s]), & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2t+s-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0, & \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$

$\forall (z,s) \in Z \times I$, $\forall [t] \in S^1$.

Observe que $H_2(z,s)([0]) = x_0 = H_2(z,s)([1])$ e H_2 é contínua, pois para $t = \dfrac{s}{2}$ temos $H_2(z,s)([\frac{s}{2}]) = x_0 = f(z)([1])$, para $t = \dfrac{1}{2}$ temos $H_2(z,s)([\frac{1}{2}]) = f(z)([s])$ e para $t = \dfrac{2-s}{2}$ temos que $H_2(z,s)([\frac{2-s}{2}]) = f(z)([1]) = x_0$. Ainda,

$$
\begin{aligned}
H_2(z,0)([t]) &= \begin{cases} x_0, & t = 0, \\ f(z)([1-2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ x_0, & t = 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(z)([1-2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([2-1t]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= (\mu \circ (h \times f) \circ d)(z)([t])
\end{aligned}
$$

$$H_2(z,1)([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(z)([1]), & t = \frac{1}{2}, \\ f(z)([1]), & t = \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$
$$= x_0$$
$$= \alpha_0([t])$$
$$= c(z)([t]), \forall z \in Z, \forall [t] \in S^1$$

e

$$H_2(z_0,s)([t]) = x_0, \forall s \in I, \forall [t] \in S^1.$$

Desse modo, $\mu \circ (h \times f) \circ d \sim c$ e segue o resultado. □

Veremos agora que sob certas condições em Z, $[Z, \Omega X]$ é um grupo abeliano.

6.2 CoH-espaços

Definição 6.2.1. *Um espaço $Z \in \mathcal{C}_0$ é um **CoH-espaço** se existir uma aplicação $\nu : Z \longrightarrow Z \vee Z$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & Z \times Z \\ Z \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "\nu"'] & Z \vee Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

é homotópico-comutativo, isto é, $i \circ \nu \sim d$, onde d é a aplicação diagonal e i é a inclusão.

Teorema 6.2.1. *Se Z for um CoH-espaço então $[Z, \Omega X]$ é um grupo abeliano.*

Demonstração: Devemos provar que para quaisquer $[f], [g] \in [Z, \Omega X]$, se Z é um CoH-espaço então $[f] \cdot [g] = [g] \cdot [f]$, ou seja, $\mu \circ (f \times g) \circ d \sim \mu \circ (g \times f) \circ d$.

Como Z é um CoH-espaço, temos que $i \circ \nu \sim d$ e como ΩX é um H-espaço, temos $\mu \circ i' \sim \Sigma$, onde $i' : \Omega X \vee \Omega X \longrightarrow \Omega X \times \Omega X$ é a inclusão. Além disso, $((f \times g) \circ i)(z_0, z) = (f \times g)(z_0, z) = (\alpha_0, g(z)) = i'(\alpha_0, g(z)) = i'(f(z_0), g(z)) = (i' \circ (f \vee g))(z_0, z)$ e $((f \times g) \circ i)(z, z_0) = (f \times g)(z, z_0) = (f(z), \alpha_0) = i'(f(z), \alpha_0) = i'(f(z), g(z_0)) = (i' \circ (f \vee g))(z, z_0)$, $\forall z \in Z$, isto é, $(f \times g) \circ i = i' \circ (f \vee g)$. Logo, $\mu \circ (f \times g) \circ d \sim \mu \circ (f \times g) \circ i \circ \nu = \mu \circ i' \circ (f \vee g) \circ \nu \sim \Sigma \circ (f \vee g) \circ \nu$.

Em particular, se $c : Z \longrightarrow \Omega X$ é a aplicação constante em α_0 então $f' = \Sigma \circ (f \vee c) \circ \nu \sim \mu \circ (f \times c) \circ d$ e como $\mu \circ (f \times c) \circ d \sim f$, conforme vimos na demonstração do Lema 6.1.1, temos $f' \sim f$. De forma análoga, $g' = \Sigma \circ (c \vee g) \circ \nu \sim \mu \circ (c \times g) \circ d$ e como $\mu \circ (c \times g) \circ d \sim g$, segue que $g' \sim g$.

Observe que para cada $z \in Z$, ou $f'(z) = \alpha_0$ ou $g'(z) = \alpha_0$, pois se $\nu(z) \in \{z_0\} \times Z$ então $f'(z) = (\Sigma \circ (f \vee c) \circ \nu)(z) = (\Sigma \circ (f \vee c))(\nu(z)) = \Sigma(\alpha_0, \alpha_0) = \alpha_0$ e se $\nu(z) \in Z \times \{z_0\}$ então $g'(z) = (\Sigma \circ (c \vee g) \circ \nu)(z) = (\Sigma \circ (c \vee g))(\nu(z)) = \Sigma(\alpha_0, \alpha_0) = \alpha_0$. Desse modo, $(f' \times g') \circ d$ é uma aplicação de Z em $\Omega X \vee \Omega X$, ou seja, $(f' \times g') \circ d = i' \circ (f' \vee g') \circ d$. Assim, $\mu \circ (f' \times g') \circ d = \mu \circ i' \circ (f' \vee g') \circ d \sim \Sigma \circ (f' \vee g') \circ d = \Sigma \circ (g' \vee f) \circ d$, pois $(\Sigma \circ (f' \vee g') \circ d)(z) =$
$$(\Sigma \circ (f' \vee g'))(z, z) = \begin{cases} \Sigma(\alpha_0, g'(z)), & f'(z) = \alpha_0, , \\ \Sigma(f'(z), \alpha_0), & g'(z) = \alpha_0 \end{cases} = \begin{cases} g'(z), & f'(z) = \alpha_0, \\ f'(z), & g'(z) = \alpha_0, \end{cases}$$
e $(\Sigma \circ (g' \vee f') \circ$
$$d)(z) = (\Sigma \circ (g' \vee f'))(z, z) = \begin{cases} \Sigma(g'(z), \alpha_0), & f'(z) = \alpha_0, , \\ \Sigma(\alpha_0, f'(z)), & g'(z) = \alpha_0 \end{cases} = \begin{cases} g'(z), & f'(z) = \alpha_0, \\ f'(z), & g'(z) = \alpha_0, \end{cases}, \forall z \in Z.$$

Mas $\Sigma \circ (g' \vee f') \circ d \sim \mu \circ i' \circ (g' \vee f') \circ d = \mu \circ (g' \times f') \circ d \sim \mu \circ (g \times f) \circ d$.

Assim, $\mu \circ (f \times g) \circ d \sim \mu \circ (f' \times g') \circ d \sim \Sigma \circ (g' \vee f') \circ d \sim \mu \circ (g \times f) \circ d$ e concluímos o que queríamos. □

Lema 6.2.1. *Qualquer que seja $Z \in \mathcal{C}_0$, ΣZ é um CoH-espaço.*

Demonstração: Lembremos que

$$\Sigma Z = \frac{I \times Z}{I \times \{z_0\} \cup \dot{I} \times Z}$$

e que indicamos os elemento de ΣZ por $[(t, z)]$. Ainda, lembremos que $I \times \{z_0\} \cup \dot{I} \times Z$ foi identificado ao ponto $[(0, z_0)]$ - ponto base de ΣZ.

Definamos $\nu : \Sigma Z \longrightarrow \Sigma Z \vee \Sigma Z$ por $\nu([(t,z)]) = \begin{cases} ([(2t, z)], [(0, z_0)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(0, z_0)], [(2t-1, z)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $\forall [(t, z)] \in \Sigma Z$. Note que ν é bem definida, pois

$\nu([(t, z_0)]) = \begin{cases} ([(2t, z_0)], [(0, z_0)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(0, z_0)], [(2t-1, z_0)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = ([(0, z_0)], [(0, z_0)]),$

$\nu([(0, z)]) = ([(0, z)], [(0, z_0)]) = ([(0, z_0)], [(0, z_0)])$ e

$\nu([(1, z)]) = ([(0, z_0)], [(1, z)]) = ([(0, z_0)], [(0, z_0)])$.

Além disso, ν é contínua, pois para $t = \frac{1}{2}$, $\nu([(\frac{1}{2}, z)]) = ([(1, z)], [(0, z_0)]) = ([(0, z_0)], [(0, z_0)]) = ([(0, z_0)], [(0, z)])$.

Precisamos mostrar que $i \circ \nu \sim d$. Para esse fim, definamos $H : \Sigma Z \times I \longrightarrow \Sigma Z \times \Sigma Z$ por

$$H([(t, z)], s) = \begin{cases} ([(2t - st, z)], [(st, z)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(st + (1-s), z)], [(2t - 1 + s(1-t), z)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\forall ([(t, z)], s) \in \Sigma Z \times I$.

Observe que H é bem definida, pois

$H([(t, z_0)], s) = \begin{cases} ([(2t - st, z_0)], [(st, z_0)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(st + (1-s), z_0)], [(2t - 1 + s(1-t), z_0)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = ([(0, z_0)], [0, z_0]),$

$H([(0, z)], s) = ([(0, z)], [(0, z)]) = ([(0, z_0)], [(0, z_0)])$ e $H([(1, z)], s) = ([(1, z)], [(1, z)]) = ([(0, z_0)], [(0, z_0)])$ e é contínua, pois para $t = \frac{1}{2}$, $H([(\frac{1}{2}, z)], s) = ([(1 - \frac{s}{2}, z)], [(\frac{s}{2}, z)])$. Além disso,

$$H([(t, z)], 0) = \begin{cases} ([(2t, z)], [(0, z)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(1, z)], [(2t-1, z)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = \begin{cases} ([(2t, z)], [(0, z_0)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(0, z_0)], [(2t-1, z)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$= (i \circ \nu)([(t,z)]),$

$$H([(t,z)],1) = \begin{cases} ([(t,z)],[(t,z)]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ([(t,z)],[(t,z)]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = ([(t,z)],[(t,z)]) = d([(t,z)]), \forall [(t,z)] \in \Sigma Z$$

e $H([(0,z_0)],s) = ([(0,z_0)],[(0,z_0)]), \forall s \in I$.

Portanto, $i \circ \nu \sim d$. □

Em [4], podemos ver que $\Sigma S^{n-1} \approx S^n$.

Teorema 6.2.2. *Para todo espaço $Z, X \in \mathcal{C}_0$ e todo inteiro $n \geq 2$, $[Z, \Omega^n X]$ e $[\Sigma^n Z, X]$ são grupos abelianos e para todo inteiro $n \geq 1$, são isomorfos.*

Demonstração: Pelo Corolário 3.0.1, $[\Sigma Z, X] \longrightarrow [Z, \Omega X]$ é uma bijeção, para quaisquer $Z, X \in \mathcal{C}_0$.Vamos supor que $[\Sigma^{n-1} Z, X] \longrightarrow [Z, \Omega^{n-1} X]$ é bijeção, $\forall Z, X \in \mathcal{C}_0$. Então

$$[\Sigma^n Z, X] = [\Sigma(\Sigma^{n-1} Z), X] \longleftrightarrow [\Sigma^{n-1} Z, \Omega X] \longleftrightarrow [Z, \Omega^{n-1}(\Omega X)] = [Z, \Omega^n X].$$

Logo, existe uma bijeção entre $[\Sigma^n Z, X]$ e $[Z, \Omega^n X]$.

Como $[Z, \Omega^n X] = [Z, \Omega(\Omega^{n-1} X)]$, o Teorema 6.1.1 nos garante que $[Z, \Omega^n X]$ é um grupo. Logo, pelo Lema 2.7.1, $[\Sigma^n Z, X]$ também é um grupo.

Por outro lado, para $n = 2$ temos $[Z, \Omega^2 X] = [Z, \Omega(\Omega X)] \longleftrightarrow [\Sigma Z, \Omega X]$ e como ΣZ é um CoH-espaço, segue que $[\Sigma Z, \Omega X]$ é abeliano e para $n \geq 3$ temos $[Z, \Omega^n X] = [Z, \Omega^{n-1}(\Omega X)] \longleftrightarrow [\Sigma^{n-1} Z, \Omega X] = [\Sigma(\Sigma^{n-2} Z), \Omega X]$ e como $\Sigma(\Sigma^{n-2} Z)$ é CoH-espaço então $[\Sigma(\Sigma^{n-2} Z), \Omega X]$ é abeliano. Logo, para $n \geq 2$, $[Z, \Omega^n X]$ é abeliano e como temos uma bijeção entre $[Z, \Omega^n X]$ e $[\Sigma^n Z, X]$, segue que $[\Sigma^n Z, X]$ também é abeliano.

Como $[Z, \Omega^n X]$ é grupo, $\forall n \geq 1$, e existe uma bijeção $\bar{\Theta} : [\Sigma^n Z, X] \longrightarrow [Z, \Omega^n X]$ temos que $[\Sigma^n Z, X]$ é um grupo com a operação $\triangle$ definida da seguinte forma: dados $[f], [g] \in [\Sigma^n Z, X]$, definamos $[f] \triangle [g] = \bar{\Theta}^{-1}(\bar{\Theta}([f]) \cdot \bar{\Theta}([g]))$, onde $\cdot$ é a operação de grupo de $[Z, \Omega^n X]$. Então,

$\bar{\Theta}([f] \triangle [g]) = \bar{\Theta}(\bar{\Theta}^{-1}(\bar{\Theta}([f]) \cdot \bar{\Theta}([g]))) = \bar{\Theta}([f]) \cdot \bar{\Theta}([g])$. Portanto, $\bar{\Theta}$ é um isomorfismo de grupos. $\square$

Definição 6.2.2. *Sejam (X, μ) e (X', μ') dois H-espaços. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X'$ é uma* ***H-aplicação*** *se comutar com as multiplicações μ e μ', isto é, se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X' \times X' & \xrightarrow{\mu'} & X' \\ {\scriptstyle f\times f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ X \times X & \xrightarrow[\mu]{} & X \end{array}$$

for homotópico-comutativo, ou seja, $f \circ \mu \sim \mu' \circ (f \times f)$.

Teorema 6.2.3. *Se X e X' são H-espaços associativos e $f : X \longrightarrow X'$ é uma aplicação então f induz um homomorfismo de grupos $(\Omega f)_* : [Z, \Omega X] \longrightarrow [Z, \Omega X']$, $\forall Z \in \mathcal{C}_0$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que toda aplicação $f : X \longrightarrow X'$ define uma H-aplicação $\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega X'$ dada por $\Omega f(\alpha) = f \circ \alpha$, $\forall \alpha \in \Omega X$. De fato, vimos no Lema 6.1.2 que ΩX e $\Omega X'$ são H-espaços associativos via as multiplicações $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ e $\mu' : \Omega X' \times \Omega X' \longrightarrow \Omega X'$ definidas por $\mu(\alpha, \beta)([t]) = \begin{cases} \alpha([2t]), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta([2t-1]), & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$, $\forall \alpha, \beta \in \Omega X$, $\forall [t] \in S^1$ e $\mu'(\alpha', \beta')([t]) = \begin{cases} \alpha'([2t]), & 0 \le t \le \frac{1}{2},, \\ \beta'([2t-1]), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$, $\forall \alpha', \beta' \in \Omega X'$, $\forall [t] \in S^1$.

Mas

$$
\begin{aligned}
(\Omega f \circ \mu)(\alpha, \beta)([t]) &= \begin{cases} \Omega f(\alpha)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \Omega f(\beta)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (f \circ \alpha)([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (f \circ \beta)([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\
&= \mu'(f \circ \alpha, f \circ \beta)([t]) \\
&= \mu'(\Omega f(\alpha), \Omega f(\beta))([t]) \\
&= (\mu' \circ (\Omega f \times \Omega f))(\alpha, \beta)([t]), \forall (\alpha, \beta) \in \Omega X \times \Omega X, \forall [t] \in S^1,
\end{aligned}
$$

isto é, $\Omega f \circ \mu = \mu' \circ (\Omega f \times \Omega f)$. Logo, $\Omega f \circ \mu \sim \mu' \circ (\Omega f \times \Omega f)$ e Ωf é uma H-aplicação.

Definamos $(\Omega f)_* : [Z, \Omega X] \longrightarrow [Z, \Omega X']$ por $(\Omega f)_*([g]) = [\Omega f \circ g]$, $\forall [g] \in [Z, \Omega X]$. Logo, dados $[g], [h] \in [Z, \Omega X]$, temos

$$(\Omega f)_*([g] \cdot [h]) = (\Omega f)_*([\mu \circ (g \times h) \circ d]) = [\Omega f \circ (\mu \circ (g \times h) \circ d)]$$

e

$$(\Omega f)_*([g]) \cdot (\Omega f)_*([h]) = [\Omega f \circ g] \cdot [\Omega f \circ h] = [\mu' \circ ((\Omega f \circ g) \times (\Omega f \circ h)) \circ d].$$

Note que para todo $(z_1, z_2) \in Z \times Z$, $((\Omega f \times \Omega f) \circ (g \times h))(z_1, z_2) = (\Omega f \times \Omega f)(g(z_1), h(z_2)) = ((\Omega f \circ g)(z_1), (\Omega f \circ h)(z_2)) = ((\Omega f \circ g) \times (\Omega f \circ h))(z_1, z_2)$, ou seja, $(\Omega f \times \Omega f) \circ (g \times h) = (\Omega f \circ g) \times (\Omega f \circ h)$. Além disso, como $\Omega f \circ \mu = \mu' \circ (\Omega f \times \Omega f)$, temos que

$$\Omega f \circ \mu \circ (g \times h) \circ d = \mu' \circ (\Omega f \times \Omega f) \circ (g \times h) \circ d = \mu' \circ ((\Omega f \circ g) \times (\Omega f \circ h)) \circ d.$$

Portanto, $(\Omega f)_*$ é homomorfismo de grupos. $\square$

Observe agora o diagrama

$$\begin{tikzcd}
[\Sigma Y, Z] \arrow[r, "\bar{\Theta}_1"] \arrow[d, "(\Sigma f)^*"'] & [Y, \Omega Z] \arrow[d, "f^*"] \\
[\Sigma X, Z] \arrow[r, "\bar{\Theta}_2"'] & [X, \Omega Z]
\end{tikzcd}$$

em que $\bar{\Theta}_1$ e $\bar{\Theta}_2$ são isomorfismos (Teorema 6.2.2), $(\Sigma f)^*$ é dada por $(\Sigma f)^*([h]) = [h \circ \Sigma f]$ e f^* definida por $f^*([g]) = [g \circ f]$ é um homomorfismo. Com efeito, se $[g], [h] \in [Y, \Omega Z]$ então $f^*([g] \cdot_1 [h]) = f^*([(\mu \circ (g \times h) \circ d_Y)]) = [(\mu \circ (g \times h) \circ d_Y) \circ f]$ e $f^*([g]) \cdot_2 f^*([h]) = [g \circ f] \cdot_2 [h \circ f] = [\mu \circ ((g \circ f) \times (h \circ f)) \circ d_X]$. Mas para qualquer $x \in X$, temos que $((\mu \circ (g \times h) \circ d_Y) \circ f)(x) = (\mu \circ (g \times h))(f(x), f(x)) = (\mu \circ ((g \circ f) \times (h \circ f)))(x, x) = (\mu \circ ((g \circ f) \times (h \circ f)) \circ d_X)(x)$, ou seja, $f^*([g] \cdot_1 [h]) = f^*([g]) \cdot_2 f^*([h])$.

Veja ainda que o diagrama acima é comutativo. De fato, se $[g] \in [\Sigma Y, Z]$ então $(f^* \circ \bar{\Theta}_1)([g]) = f^*([\Theta_1(g)]) = [\Theta_1(g) \circ f]$ onde $(\Theta_1(g) \circ f)(x)([t]) = \Theta_1(g)(f(x))([t]) = g([(t, f(x))]) = (g \circ \Sigma f)([(t, x)])$, $\forall x \in X$, $\forall [t] \in S^1$ e $(\bar{\Theta}_2 \circ (\Sigma f)^*)([g]) = \bar{\Theta}_2([g \circ \Sigma f]) = [\Theta_2(g \circ \Sigma f)]$ onde $\Theta_2(g \circ \Sigma f)(x)([t]) = (g \circ \Sigma f)([(t, x)])$, $\forall x \in X$, $\forall [t] \in S^1$.

Logo, $\Theta_1(g) \circ f = \Theta_2(g \circ \Sigma f)$ e portanto, $f^* \circ \bar{\Theta}_1 = \bar{\Theta}_2 \circ (\Sigma f)^*$. Assim, $(\Sigma f)^* = \bar{\Theta}_2^{-1} \circ f^* \circ \bar{\Theta}_1$ e daí, $(\Sigma f)^*$ também é um homomorfismo de grupos.

Desse modo, podemos afirmar que as sequências infinitas

$$\ldots \longrightarrow \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega j} \Omega M_f \xrightarrow{\Omega i_2} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{j} M_f \xrightarrow{i_2} X \xrightarrow{f} Y$$

e

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j_2} C_f \xrightarrow{i} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j_2} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma^2 X \longrightarrow \ldots$$

induzem as sequências infinitas e exatas de homomorfismos de grupos

$$\ldots \longrightarrow [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(\Omega j)_*} [Z, \Omega M_f] \xrightarrow{(\Omega i_2)_*} [Z, \Omega X] \xrightarrow{(\Omega f)_*} [Z, \Omega Y]$$

e

$$[\Sigma X, Z] \xleftarrow{(\Sigma f)^*} [\Sigma Y, Z] \xleftarrow{(\Sigma j_2)^*} [\Sigma C_f, Z] \xleftarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma^2 X, Z] \xleftarrow{(\Sigma^2 f)^*} [\Sigma^2 Y, Z] \longleftarrow \ldots,$$

respectivamente.

6.3 O grupo $\pi_n(X)$

Definição 6.3.1. *O grupo $\pi_n(X) = [S^n, X]$ é dito o* ***n-ésimo grupo de homotopia*** *de $X \in \mathcal{C}_0$, $\forall n \geq 0$.*

Teorema 6.3.1. *Para todo inteiro $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ é abeliano.*

Demonstração: Temos que $\pi_n(X) = [S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X] \cong [S^{n-1}, \Omega X] = [\Sigma S^{n-2}, \Omega X]$ e como ΣS^{n-2} é CoH-espaço, segue pelo Teorema 6.2.1 que $[\Sigma S^{n-2}, \Omega X] \cong \pi_n(X)$ é abeliano, $\forall n \geq 2$. $\square$

Teorema 6.3.2. *Se X for H-espaço com ponto base x_0, então $\pi_1(X)$ é abeliano.*

Demonstração: Sejam $\alpha = [f]$, $\beta = [g] \in \pi_1(X)$. Queremos mostrar que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Como X é H-espaço com ponto base x_0, existe uma aplicação $\mu : X \times X \longrightarrow X$ tal que $\mu(\ \ , x_0) \sim 1_X$, $\mu(x_0, \ \ ) \sim 1_X$ e $\mu(x_0, x_0) = x_0$.

Definamos $h : S^1 \longrightarrow X$ por $h([t]) = \mu(f([t]), g([t]))$, onde f e g são os representantes de α e β.

Observemos que se $f \sim f'$ e $g \sim g'$, então $\mu \circ (f, g) \sim \mu \circ (f', g')$ onde $(f, g) : S^1 \longrightarrow X \times X$ e $(f', g') : S^1 \longrightarrow X \times X$ são dadas por $(f, g)([t]) = (f([t]), g([t]))$ e $(f', g')([t]) = (f'([t]), g'([t]))$, $\forall [t] \in S^1$, respectivamente. De fato, sejam $H : f \sim f'$ e $G : g \sim g'$ e defina $K : S^1 \times I \longrightarrow X$ por $K([t], s) = (\mu \circ (H, G))([t], s)$, $\forall ([t], s) \in S^1 \times I$, onde $(H, G) : S^1 \times I \longrightarrow X \times X$ é dada por $(H, G)([t], s) = (H([t], s), G([t], s))$. Então, $K([t], 0) =$

$(\mu \circ (H,G))([t],0) = \mu(H([t],0), G([t],0)) = \mu(f([t]), g([t])) = (\mu \circ (f,g))([t]),\ K([t],1) = (\mu \circ (H,G))([t],1) = \mu(H([t],1), G([t],1)) = \mu(f'([t]), g'([t])) = (\mu \circ (f',g'))([t]),\ \forall [t] \in S^1$ e $K([0],s) = (\mu \circ (H,G))([0],s) = \mu(H([0],s), G([0],s)) = \mu(x_0,x_0) = x_0,\ \forall s \in I.$

Defina $\Theta : S^1 \longrightarrow X$ por $\Theta([t]) = \mu(\bar{f}([t]), \bar{g}([t]))$, onde $\bar{f}([t]) = \begin{cases} f([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ e $\bar{g}([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $\forall [t] \in S^1$.

Como $\bar{f} = f * c$ e $\bar{g} = c * g$ onde $c : S^1 \longrightarrow X$ é a aplicação constante em x_0, temos que $f \sim \bar{f}$ e $g \sim \bar{g}$. Logo, $h = \mu \circ (f,g) \sim \mu \circ (\bar{f}, \bar{g}) = \Theta$. Portanto, temos $[h] = [\Theta]$.

Afirmação: $[\Theta] = [f * g]$

Para provarmos isso, basta mostrarmos que $\Theta \sim f * g$.

Temos $\Theta([t]) = \mu(\bar{f}([t]), \bar{g}([t])) = \begin{cases} \mu(f([2t]), x_0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(x_0, g([2t-1])), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $\forall [t] \in S^1$.

Sejam $\psi : X \times I \longrightarrow X$ e $\varphi : X \times I \longrightarrow X$ homotopias entre $\mu(\ \ , x_0)$ e 1_X e $\mu(x_0, \ \ )$ e 1_X, respectivamente. Definamos $L : S^1 \times I \longrightarrow X$ por

$$L([t],s) = \begin{cases} \psi(f([2t]), s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(g([2t-1]), s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\forall ([t],s) \in S^1 \times I$. Então L é contínua, pois para $t = \frac{1}{2}$, $\psi(f([1]), s) = \psi(x_0, s) = x_0 = \varphi(x_0, s) = \varphi(g([0]), s)$. Temos que $L([t],0) = \begin{cases} \psi(f([2t]), 0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(g([2t-1]), 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $= \begin{cases} \mu(f([2t]), x_0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(x_0, g([2t-1])), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $= \Theta([t])$, $L([t],1) = \begin{cases} \psi(f([2t]), 1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(g([2t-1]), 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $= \begin{cases} f([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $= (f * g)([t])$, $\forall [t] \in S^1$ e $L([0],s) = \psi(f([0]), s) = \psi(x_0, s) = x_0$, $\forall s \in I$.

Portanto, $\Theta \sim f * g$. Logo, $[h] = [\Theta] = [f * g] = [f] \cdot [g] = \alpha \cdot \beta$.

Vamos agora provar que $[h] = \beta \cdot \alpha$ e o resultado seguirá. Para isso, definamos $\Gamma : S^1 \longrightarrow X$ por $\Gamma([t]) = \mu(\tilde{f}([t]), \tilde{g}([t]))$, onde $\tilde{f}([t]) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ e $\tilde{g}([t]) = \begin{cases} g([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $\forall [t] \in S^1$.

Como $\tilde{f} = c * f$ e $\tilde{g} = g * c$, temos que $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$. Logo, $h = \mu \circ (f, g) \sim \mu \circ (\tilde{f}, \tilde{g}) = \Gamma$. Portanto, $[h] = [\Gamma]$.

Afirmação: $[\Gamma] = [g * f]$

Temos $\Gamma([t]) = \mu(\tilde{f}([t]), \tilde{g}([t])) = \begin{cases} \mu(x_0, g([2t])), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(f([2t-1]), x_0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ $\forall [t] \in S^1$.

Definamos $M : S^1 \times I \longrightarrow X$ por

$$M([t], s) = \begin{cases} \varphi(g([2t]), s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(f([2t-1]), s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases},$$

$\forall ([t], s) \in S^1 \times I$. Então M é contínua, pois para $t = \frac{1}{2}$ temos que $\varphi(g([1]), s) = \varphi(x_0, s) = x_0 = \psi(x_0, s) = \psi(f([0]), s)$. Ainda, $M([t], 0) = \begin{cases} \varphi(g([2t]), 0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, , \\ \psi(f([2t-1]), 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ $= \begin{cases} \mu(x_0, g([2t])), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, , \\ \mu(f([2t-1]), x_0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \Gamma([t])$, $M([t], 1) = \begin{cases} \varphi(g([2t]), 1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(f([2t-1]), 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} =$ $\begin{cases} g([2t]), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f([2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} = (g * f)([t])$, $\forall [t] \in S^1$ e $M([0], s) = \varphi(g([0]), s) = \varphi(x_0, s) = x_0$, $\forall s \in I$.

Portanto, $\Gamma \sim g * f$. Logo, $[h] = [\Gamma] = [g * f] = [g] \cdot [f] = \beta \cdot \alpha$. $\square$

Capítulo 7

Aplicações sobre fibrações

Neste último capítulo, mostramos que toda função de recobrimento é uma fibração e com isso, usamos a teoria desenvolvida para calcularmos alguns grupos de homotopia.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas. Note que $\mathcal{C}_0$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$.

Definição 7.0.1. *Sejam X, $\tilde{X} \in \mathcal{C}$ e $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que p é uma* **função de recobrimento** *se para todo $x \in X$ existir um aberto U de X contendo x tal que $p^{-1}(U)$ é uma reunião disjunta de abertos $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$ tais que $p_{|_{\tilde{U}_\alpha}} : \tilde{U}_\alpha \longrightarrow U$ é um homeomorfismo.*

Exemplo 7.0.1. A aplicação $ex : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $ex(t) = (cos2\pi t, sen2\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é uma função de recobrimento.

De fato, seja $w \in S^1$ e consideremos os conjuntos

$$A = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\};$$

$$B = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\};$$

$$C = \{(x,y) \in S^1 : x < 0\};$$

$$D = \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}.$$

Temos que w pertence a algum dos abertos acima de S^1.

Suponha $w \in A$. Então $ex^{\dashv}(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$, onde $I_k = (k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})$. Assim $ex^{\dashv}(A)$ é uma reunião disjunta de abertos da reta. Além disso, $ex_{|_{I_k}}$ é bijetora, contínua e aberta, ou seja, é um homeomorfismo, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Os casos $w \in B$, $w \in C$ e $w \in D$ são análogos, o que prova que ex é uma função de recobrimento.

No capítulo 3 introduzimos a noção de fibração na categoria $\mathcal{C}_0$. Este conceito pode ser extendido à categoria $\mathcal{C}$, e é neste sentido que o resultado a seguir deve ser entendido.

Teorema 7.0.1. *Uma função de recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é uma fibração.*

Para a prova deste teorema, provaremos inicialmente o seguinte lema:

Lema 7.0.1. *Sejam $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma função de recobrimento e $f, g : Y \longrightarrow \tilde{X}$ funções contínuas definidas num espaço conexo Y e tais que $p \circ f = p \circ g$. Se existir um ponto $y \in Y$ tal que $f(y) = g(y)$ então f e g coincidirão em todo Y.*

Demonstração: Sejam $Y_1 = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ e $Y_2 = \{y \in Y : f(y) \neq g(y)\}$. Provaremos que Y_1 e Y_2 são abertos em Y.

Dado $y_0 \in Y_1$, como $(p \circ f)(y_0) = p(f(y_0)) \in X$ e p é uma função de recobrimento, existe um aberto $U \subset X$ contendo $p(f(y_0))$ tal que $p^{\dashv}(U) = \bigcup_{\alpha} \tilde{U}_\alpha$, onde $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$ são abertos e $p_{|_{\tilde{U}_\alpha}} : \tilde{U}_\alpha \longrightarrow U$ são homeomorfismos. Suponhamos $f(y_0) \in \tilde{U}_{\alpha_0}$ e tomemos $V = f^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_0}) \cap g^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_0})$, que é aberto em Y, pois f e g são funções contínuas. Como $y_0 \in f^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_0})$ e $f(y_0) = g(y_0)$, temos que $y_0 \in g^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_0})$ e assim, $y_0 \in V$. Por outro lado, para todo $y \in V$ temos $f(y)$, $g(y) \in \tilde{U}_{\alpha_0}$.

Como $(p \circ f)(y) = (p \circ g)(y)$, isto é, $p(f(y)) = p(g(y))$, $\forall y \in Y$ e $p_{|_{\tilde{U}_{\alpha_0}}}$ é um homeomorfismo, segue que $f(y) = g(y)$. Logo, $y \in Y_1$, $\forall y \in V$. Portanto, para todo $y_0 \in Y_1$, existe um aberto V de Y tal que $y_0 \in V \subset Y_1$, ou seja, Y_1 é aberto em Y.

Agora, dado $y_0 \in Y_2$, como p é uma função de recobrimento, existe um aberto $U \subset X$ como no caso anterior. Como $f(y_0) \neq g(y_0)$, existirão dois abertos disjuntos $\tilde{U}_{\alpha_1}, \tilde{U}_{\alpha_2} \subset \tilde{X}$ tais que $f(y_0) \in \tilde{U}_{\alpha_1}$ e $g(y_0) \in \tilde{U}_{\alpha_2}$, pois se $f(y_0)$ e $g(y_0)$ pertencessem a um mesmo aberto $\tilde{U}_\alpha$, como $(p \circ f)(y_0) = (p \circ g)(y_0)$, ou seja, $p(f(y_0)) = p(g(y_0))$ e $p_{|_{\tilde{U}_\alpha}}$ é um homeomorfismo, teríamos $f(y_0) = g(y_0)$, contradizendo a hipótese. Seja $V = f^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_1}) \cap g^{\dashv}(\tilde{U}_{\alpha_2})$ subconjunto de Y. Temos que V é aberto em Y, já que f e g são funções contínuas. Além disso, $y_0 \in V$. Falta mostrarmos que $V \subset Y_2$. De fato, para todo $y \in V$ sabemos que $f(y) \in \tilde{U}_{\alpha_1}$ e $g(y) \in \tilde{U}_{\alpha_2}$ e como $\tilde{U}_{\alpha_1}$ e $\tilde{U}_{\alpha_2}$ são disjuntos, segue que $f(y) \neq g(y)$, ou seja, $y \in Y_2$. Portanto, Y_2 é aberto em Y.

Desse modo, Y é reunião disjunta de dois abertos em que um deles, Y_1, por hipotese é não vazio. Como Y é conexo, concluímos que $Y_2 = \emptyset$ e portanto, $Y = Y_1$, ou seja, $f = g$ em Y. $\square$

Demonstração do Teorema 7.0.1**:**

Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

onde p é uma função de recobrimento, Y é um espaço arbitrário de $\mathcal{C}$, H é uma homotopia de $p \circ h$ e i é a inclusão.

Suponhamos por um momento que provamos que para todo $y \in Y$ existe um aberto $N_y \subset Y$ contendo y e uma homotopia $G'_y : N_y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
N_y \times \{0\} \arrow[r, "h_{|_{N_y \times \{0\}}}"] \arrow[d, "i'"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
N_y \times I \arrow[r, "H_{|_{N_y \times I}}"'] \arrow[ur, "G'_y"] & X
\end{tikzcd}
\tag{7.2}
$$

comuta, ou seja, $G'_y \circ i' = h_{|_{N_y \times \{0\}}}$ e $p \circ G'_y = H_{|_{N_y \times I}}$.

Em particular, consideremos N_{y_1} e N_{y_2} com as homotopias G'_{y_1} e G'_{y_2} respectivamente e suponhamos $y \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$. Então, $G'_{y1_{|_{\{y\} \times I}}}$ e $G'_{y2_{|_{\{y\} \times I}}}$ são aplicações do espaço conexo $\{y\} \times I$ em $\tilde{X}$, tais que, em vista da comutatividade do diagrama 7.2, $G'_{y1_{|_{\{y\} \times I}}}(y, 0) = (G'_{y1_{|_{\{y\} \times I}}} \circ i')(y, 0) = h_{|_{\{y\} \times \{0\}}}(y, 0) = (G'_{y2_{|_{\{y\} \times I}}} \circ i')(y, 0) = G'_{y2_{|_{\{y\} \times I}}}(y, 0)$ e $p \circ G'_{y1_{|_{\{y\} \times I}}} = H_{|_{\{y\} \times I}} = G'_{y2_{|_{\{y\} \times I}}}$. Pelo Lema 7.0.1, temos que $G'_{y1_{|_{\{y\} \times I}}} = G'_{y2_{|_{\{y\} \times I}}}$ e como $y \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$ é arbitrário, segue que $G'_{y1_{|_{(N_{y1} \cap N_{y2}) \times I}}} = G'_{y2_{|_{(N_{y1} \cap N_{y2}) \times I}}}$.

Definamos $G : Y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ da seguinte forma: como para cada $y \in Y$, existe um aberto $N_y \subset Y$ e contendo y, temos que $\{y\} \subset N_y \subset Y$ e portanto, $Y = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} N_y \subset Y$, ou seja, $Y = \bigcup_{y \in Y} N_y$. Assim, dado $x \in Y$, $x \in N_y$ para algum $y \in Y$. Definamos $G(x, t) = G'_y(x, t)$. Então G é contínua e bem definida, desde que, se $x \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$ temos que $G'_{y_1}(x, t) = G'_{y_2}(x, t)$.

Verifiquemos que G assim definida, torna o diagrama 7.1 comutativo. Com efeito, $(G \circ i)(x, 0) = G(x, 0) = G'_y(x, 0) = (G'_y \circ i')(x, 0) = h_{|_{N_y \times \{0\}}}(x, 0) = h(x, 0)$, $\forall x \in Y$ e $(p \circ G)(x, t) = (p \circ G'_y)(x, t) = H_{|_{N_y \times I}}(x, t) = H(x, t)$, $\forall (x, t) \in Y \times I$. Portanto, p é fibração.

Mostremos agora que para todo $y \in Y$, existem abertos $N_y \subset Y$ contendo y e aplicações G'_y comutando o diagrama 7.2.

Consideremos o espaço $H(\{y\} \times I) \subset X$. Como p é função de recobrimento, sabemos que para todo $x \in H(\{y\} \times I)$ existe um aberto $U \subset X$ contendo x tal que $p^{\dashv}(U) = \bigcup_{\alpha} \tilde{U}_\alpha$, em que $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$ são abertos disjuntos e $p_{|_{\tilde{U}_\alpha}} : \tilde{U}_\alpha \longrightarrow U$ são homeomorfismos.

Para cada U acima, seja $V_U = H^{\dashv}(U)$. Como H é contínua, segue que V_U são abertos em $Y \times I$ e tomando em $Y \times I$ a topologia produto, $V_U = \bigcup_{\alpha} (V_\alpha \times I_\alpha)$, onde V_α são abertos de Y e I_α são abertos de I.

Consideremos a família $\mathcal{H}$ dos abertos básicos $V_\alpha \times I_\alpha$ tomando-se todos os abertos U definidos acima e tais que $y \in V_\alpha$, $\forall \alpha$. Temos que $\mathcal{H}$ é uma cobertura aberta de $\{y\} \times I$ e como $\{y\} \times I$ é compacto, existe um número finito de abertos $V_{\alpha_1} \times I_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} \times I_{\alpha_n}$ tais que

$$\{y\} \times I \subset \bigcup_{i=i}^{n} (V_{\alpha_i} \times I_{\alpha_i}).$$

Assim, podemos tomar números reais $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = 1$ e o aberto $N_y = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ de forma que para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, $H(N_y \times [t_{i-1}, t_i])$ está contido em um aberto U de X tal que $p^{\dashv}(U) = \bigcup_{\alpha} \tilde{U}_\alpha$, $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{X}$ são abertos e $p_{|_{\tilde{U}_\alpha}} : \tilde{U}_\alpha \longrightarrow U$ são homeomorfismos.

Fixando $y \in Y$, construamos a aplicação G'_y definindo-se para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ uma aplicação $G'^{i}_y : N_y \times [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \tilde{X}$ tal que

a) $p \circ G'^{i}_y = H_{|_{N_y \times [t_{i-1}, t_i]}}$;

b) $G'^{i}_y \circ i' = h_{|_{N_y \times \{0\}}}$;

c) $G'^{i-1}_y(x, t_{i-1}) = G'^{i}_y(x, t_{i-1})$, $\forall i = 2, \ldots, m$, $\forall x \in Y$.

As aplicações G'^{i}_y serão definidas indutivamente sobre i.

Sabemos que $H(N_y \times [0, t_1])$ está contido em algum aberto $U \subset X$ tal que $p^{\dashv}(U) = \bigcup_{\alpha} \tilde{U}^1_\alpha$ e $p|_{\tilde{U}^1_\alpha} : \tilde{U}^1_\alpha \longrightarrow U$ são homeomorfismos, em que $\tilde{U}^1_\alpha \subset \tilde{X}$ são abertos. Como os abertos $\tilde{U}^1_\alpha$

são dois a dois disjuntos, então $\{V_\alpha^1\}$, onde $V_\alpha^1 = i_0^{\dashv} \circ h^{\dashv}_{N_y\times\{0\}}(\tilde{U}_\alpha^1)$ são abertos de N_y, é uma cobertura aberta e disjunta de N_y (aqui, $i_0 : N_y \longrightarrow N_y \times \{0\}$ é a aplicação $i_0(x) = (x,0)$). Tomemos $G'^1_{y,\alpha} : V_\alpha^1 \times [0,t_1] \longrightarrow \tilde{X}$ como sendo a composição

$$(p_{|_{U_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|_{V_\alpha^1\times[0,t_1]}}.$$

Definamos $G'^1_\alpha : N_y \times [0,t_1] \longrightarrow \tilde{X}$ da seguinte forma: dado $(x,t) \in N_y \times [0,t_1]$, $\exists!\alpha$ tal que $x \in V_\alpha^1$. Então, $G'^1_y(x,t) = G'^1_{y,\alpha}(x,t)$.

Note que $(p \circ G'^1_y)(x,t) = (p \circ G'^1_{y,\alpha})(x,t) = (p \circ (p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|V_\alpha^1\times[0,t_1]})(x,t) = p((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|N_y\times[0,t_1]}(x,t)) = p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}}((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|N_y\times[0,t_1]}(x,t)) = H_{|N_y\times[0,t_1]}(x,t)$ e $(G'^1_y \circ i')(x,0) = (G'^1_{y,\alpha} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|_{V_\alpha^1\times[0,t_1]}} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ H_{|_{N_y\times I}} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ p \circ h_{|_{N_y\times\{0\}}})(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}})^{-1} \circ p_{|_{\tilde{U}_\alpha^1}} \circ h_{|_{N_y\times\{0\}}})(x,0) = h_{|_{N_y\times\{0\}}}(x,0)$.

Suponhamos que G'^{i-1}_y tenha sido definida para $1 < i \leq m$, satisfazendo $a)$, $b)$ e $c)$.

Novamente, $H(N_y \times [t_{i-1},t_i])$ está contido em algum aberto $U \subset X$ tal que $p^{\dashv}(U) = \bigcup_\alpha \tilde{U}_\alpha^i$ e $p_{|_{\tilde{U}_\alpha^i}} : \tilde{U}_\alpha^i \longrightarrow U$ são homeomorfismos em que $\tilde{U}_\alpha^i \subset \tilde{X}$ são abertos. Definamos

$$V_\alpha^i = \{x \in N_y : G'^{i-1}_y(x,t_{i-1}) \in \tilde{U}_\alpha^i\}.$$

Se $\alpha \neq \beta$, como $\tilde{U}_\alpha^i \cap \tilde{U}_\beta^i = \emptyset$, segue que V_α^i são dois a dois disjuntos. Logo, $\{V_\alpha^i\}$ é uma cobertura aberta e disjunta de N_y. Tomemos $G'^i_y : V_\alpha^i \times [t_{i-1},t_i] \longrightarrow \tilde{X}$ como sendo a composta

$$(p_{|_{\tilde{U}_\alpha^i}})^{-1} \circ H_{|_{V_\alpha^i\times[t_{i-1},t_i]}}.$$

Definamos $G'^m_y : N_y \times [t_{m-1},1] \longrightarrow \tilde{X}$ da seguinte forma: para cada $(x,t) \in N_y \times [t_{m-1},1]$, $\exists!\alpha$ tal que $x \in V_\alpha^m$. Então, $G'^m_y(x,t) = G'^m_{y,\alpha}(x,t)$.

Observe que $(p\circ G'^m_y)(x,t) = (p\circ G'^m_{y,\alpha})(x,t) = (p\circ(p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1}\circ H_{|V_\alpha^m\times[t_{m-1},1]})(x,t) = p((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1}\circ H_{|N_y\times[t_{m-1},1]}(x,t)) = p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}}((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1} \circ H_{|N_y\times[t_{m-1},1]}(x,t)) = H_{|N_y\times[t_{m-1},1]}(x,t)$, $(G'^m_y \circ i')(x,0) = (G'^m_{y,\alpha} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1} \circ H_{|_{V_\alpha^m\times[t_{m-1},1]}} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1} \circ H_{|_{N_y\times I}} \circ i')(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1} \circ$

$p \circ h_{|_{N_y \times \{0\}}})(x,0) = ((p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}})^{-1} \circ p_{|_{\tilde{U}_\alpha^m}} \circ h_{|_{N_y \times \{0\}}})(x,0) = h_{|_{N_y \times \{0\}}}(x,0)$ e $\forall x \in N_y$, $G_y'^m(x, t_{m-1}) = G_{y,\alpha}'^m(x,t_{m-1}) = G_{y,\alpha}'^{m-1}(x,t_{m-1}) = G_y'^{m-1}(x,t_{m-1})$. Logo, as condições $a)$, $b)$ e $c)$ são satisfeitas.

Defina $G_y' : N_y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ por

$$G_y'(x,t) = \begin{cases} G_y'^1(x,t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ G_y'^2(x,t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots & \\ G_y'^m(x,t), & t_{m-1} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$\forall (x,t) \in N_y \times I$. Logo, G_y' é bem definida, contínua e comuta o diagrama 7.2. $\square$

Observação 7.0.1. O Teorema 7.0.1 também é válido na categoria $\mathcal{C}_0$ dos espaços topológicos com ponto base. No entanto, durante a demonstração as funções parciais G_y' não precisam ser morfismos de $\mathcal{C}_0$, a menos que N_y contenha o ponto base y_0.

7.1 Aplicações

1. Os grupos de homotopia $\pi_n(S^1)$ são triviais, para todo $n \geq 2$.

De fato, consideremos a função de recobrimento, e portanto fibração, $ex : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $ex(t) = (cos 2\pi t, sen 2\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Observe que $ex(0) = (1,0)$, isto é, ex leva ponto base de $\mathbb{R}$ em ponto base de S^1. Além disso, $F = ex^{-1}(\{(1,0)\}) = \mathbb{Z}$.

Consideremos a sequência exata de homotopia da fibração $ex : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$\ldots \longrightarrow [S^n, F] \xrightarrow{(\Sigma i)_*} [S^n, \mathbb{R}] \xrightarrow{(\Sigma ex)_*} [S^n, S^1] \xrightarrow{\partial_*} [S^{n-1}, F] \xrightarrow{i_*} [S^{n-1}, \mathbb{R}] \xrightarrow{(ex)_*} [S^{n-1}, S^1] \longrightarrow \ldots,$$

ou ainda,

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{(\Sigma i)_*} \pi_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{(\Sigma ex)_*} \pi_n(S^1) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{(ex)_*} \pi_{n-1}(S^1) \longrightarrow \ldots$$

Como $F = \mathbb{Z}$ é discreto e as aplicações preservam ponto base, para todo $n \geq 1$, $\pi_n(F) = \{[c]\} = 0$, pois se $f : S^n \longrightarrow F = \mathbb{Z}$ é contínua, como S^n é conexo, $f(S^n)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$ e então $f(S^n)$ é um ponto. Mas como $f(e_1) = z_0$, onde z_0 é ponto base de $F = \mathbb{Z}$ e $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ é ponto base de S^n, segue que $f(S^n) = \{z_0\}$. Portanto, f é a aplicação constante em z_0, em que denotamos por c.

Então, para $n \geq 2$, $\pi_{n-1}(F) = 0 = \pi_n(F)$ e assim, $\pi_n(\mathbb{R}) \cong \pi_n(S^1)$, $\forall n \geq 2$.

Como $\mathbb{R}$ é contrátil, $\mathbb{R}$ tem mesmo tipo de homotopia que um ponto de $\mathbb{R}$. Logo, toda $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, é homotópica a uma função constante.

Portanto, $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$, $\forall n \geq 1$. Assim, $\pi_n(S^1) = 0$, $\forall n \geq 2$.

2. Os grupos de homotopia $\pi_r(P_n(\mathbb{R}))$ são triviais quando $2 \leq r < n$ e $\pi_1(P_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$, em que $P_n(\mathbb{R}) = \dfrac{S^n}{x \sim -x}$ é o espaço projetivo n-dimensional.

Com efeito, consideremos a função $p : S^n \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ dada por $p(x) = [x]$, $\forall x \in S^n$.

Veja que p é um homeomorfismo local. De fato, seja $x \in S^n$ e consideremos os conjuntos:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 0\};$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} < 0\};$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_n > 0\};$$

$$A_4 = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_n < 0\};$$

$$\vdots$$

$$A_{2n+1} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0\}.$$

$$A_{2n+2} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_1 < 0\}.$$

Observe que x pertence a algum dos abertos A_i, $i \in \{1, 2, ..., 2n+2\}$. Suponhamos $x \in A_1$, os outros casos são análogos.

Precisamos mostrar que $p(A_1)$ é aberto em $P_n(\mathbb{R})$ e como $P_n(\mathbb{R})$ tem a topologia quociente, basta mostrarmos que $p^{-1}(p(A_1))$ é aberto em S^n. Mas $p^{-1}(p(A_1)) = A_1 \cup A_2$, que é aberto em S^n. Além disso, $p_{|_{A_1}} : A_1 \longrightarrow p(A_1)$ é um homeomorfimo, ou seja, p é um homeomorfismo local.

Usando esse fato, provemos agora que p é uma função de recobrimento. Com efeito, dado $\bar{x} \in P_n(\mathbb{R})$, qualquer, como p é sobrejetora, existe $x \in S^n$ tal que $p(x) = \bar{x}$. Como p é um homeomorfismo local, existe um aberto $U \subset S^n$ com $x \in U$ e $p(U) = V$ aberto em $P_n(\mathbb{R})$. Logo, $\bar{x} \in V$, $p^{-1}(V) = U$ e $p_{|_U} : U \longrightarrow V$ é homeomorfismo.

Assim, p é uma função de recobrimento e portanto, uma fibração. Note que p preserva ponto base e $F = p^{-1}(\{[e_1]\}) = \{e_1, -e_1\}$, ou seja, p é uma fibração com fibra discreta F constituída por apenas dois pontos.

Consideremos a sequência exata de homotopia da fibração $p : S_n \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$

$$\ldots \longrightarrow [S^r, S^n] \longrightarrow [S^r, P_n(\mathbb{R})] \longrightarrow [S^{r-1}, F] \longrightarrow \ldots \longrightarrow [S^0, F] \xrightarrow{i_*} [S^0, S^n] \xrightarrow{p_*} [S^0, P_n(\mathbb{R})],$$

ou equivalentemente,

$$\ldots \longrightarrow \pi_r(S^n) \longrightarrow \pi_r(P_n(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{r-1}(F) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(S^n) \xrightarrow{p_*} \pi_0(P_n(\mathbb{R})).$$

Sendo F discreto, temos $\pi_r(F) = 0$, $\forall r \geq 1$ e em vista da exatidão da sequência, temos $\pi_r(S^n) \cong \pi_r(P_n(\mathbb{R}))$, $\forall r \geq 2$. É conhecido que fixado n, $\pi_r(S^n) = 0$ quando $1 \leq r < n$ (vide [4], Teorema 11.10, cap II). Logo, $\pi_r(P_n(\mathbb{R})) = 0$ quando $2 \leq r < n$.

Por outro lado, $\pi_1(S^n) = 0 = \pi_0(S^n)$. Logo, $\pi_1(P_n(\mathbb{R})) \cong \pi_0(F)$ e como F tem duas componentes conexas, $\pi_0(F) \cong \mathbb{Z}_2$. Portanto, $\pi_1(P_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$.

3. O grupo de homotopia $\pi_1(S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Para a prova desta afirmação, a cada função $f : S^1 \longrightarrow S^1$, associamos um inteiro que definimos por **grau de** f, o qual provamos ser o mesmo para duas funções homotópicas $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$. Daí, mostramos que a aplicação $grau : \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $grau[f] = grau(f)$ é um isomorfismo.

Lema 7.1.1. *Seja x_0 o ponto base de um compacto $X \subset \mathbb{R}^n$ e suponhamos que X seja convexo em x_0, ou seja, $[x_0, x] \subset X$, $\forall x \in X$. Seja 1 o ponto base de S^1 e $f : X \longrightarrow S^1$ uma aplicação de $\mathcal{C}_0$. Então, existe $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f' \in \mathcal{C}_0$, tal que $ex \circ f' = f$.*

Demonstração: Mediante uma translação de X podemos supor que $x_0 = (0, ..., 0) = 0$. Por outro lado, como f é contínua e X é compacto, f é uniformemente contínua. Logo, dado $\epsilon = 2$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, x' \in X$,

$$||x - x'|| < \epsilon \Longrightarrow ||f(x) - f(x')|| < 2.$$

Como X é limitado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||\frac{x}{n}|| < \delta$, $\forall x \in X$ e assim, para todo inteito j tal que $0 \leq j < n$, temos

$$\left|\left|\frac{(j+1)}{n}x - \frac{j}{n}x\right|\right| = \left|\left|\frac{x}{n}\right|\right| < \delta.$$

Logo,

$$\left|\left|f(\frac{j+1}{n}x) - f(\frac{j}{n}x)\right|\right| < 2,$$

isto é,

$$\frac{f(\frac{j+1}{n}x)}{f(\frac{j}{n}x)} \in S^1 - \{-1\}.$$

Logo, para todo inteiro j com $0 \leq j < n$, definamos a função $g_j : X \longrightarrow S^1 - \{-1\}$ por

$$g_j(x) = \frac{f(\frac{j+1}{n}x)}{f(\frac{j}{n}x)}, \forall x \in X.$$

Note que $f(x) = g_0(x).g_1(x).\ldots.g_{n-1}(x)$. Por outro lado, a restrição da função exponencial $ex : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ao intervalo $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ é um homeomorfismo entre $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ e $S^1 - \{-1\}$.

Definamos $lg : S^1 - \{-1\} \longrightarrow (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ como sendo a inversa de ex e seja $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f'(x) = (lg \circ g_0)(x) + \ldots + (lg \circ g_{n-1})(x)$, $\forall x \in X$. Logo, $(ex \circ f')(x) = g_0(x).\ldots.g_{n-1}(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Ainda, $g_j(0) = 1$ e assim, $(lg \circ g_j)(0) = lg(1) = (lg \circ ex)(0) = 0$, ou seja, $f'(0) = 0$. $\square$

Observação 7.1.1. Como $ex : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ é uma função de recobrimento e X é um espaço conexo, dado $f : X \longrightarrow S^1$, pelo Lema 7.0.1, a função $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $ex \circ f' = f$ é única.

Seja α um laço em S^1, isto é, uma função $\alpha : I \longrightarrow S^1$ que leva $\dot{I} = \{0, 1\}$ em $1 \in S^1$. Como I é convexo em 0, existe uma única função $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(0) = 0$ e que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "ex"] \\ I \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\alpha"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Como $(ex \circ \alpha')(1) = \alpha(1) = 1$, segue que $\alpha'(1)$ é um inteiro.

Definição 7.1.1. *O inteiro $\alpha'(1)$ é chamado de* **grau de** f.

Lema 7.1.2. *Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow S^1$ dois laços homotópicos. Então $grau(\alpha) = grau(\beta)$.*

Demonstração: Seja $H : I \times I \longrightarrow S^1$ a homotopia entre α e β, ou seja, $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$, $\forall t \in I$ e $H(0, s) = H(1, s) = 1$, $\forall s \in I$. Como $I \times I$ é compacto, convexo em $(0, 0)$, $H(0, 0) = 1$ e $ex(0) = 1$, pelo Lema 7.1.1 temos que existe $H' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $H'(0, 0) = 0$ e $ex \circ H' = H$.

Observe que $(ex \circ H')(0,s) = H(0,s) = 1$ e $(ex \circ H')(1,s) = H(1,s) = 1$ e portanto, $H'(0,s)$ e $H'(1,s)$ são inteiros. Como I é conexo e $H'(0,\ \ ),\ H'(1,\ \ ) : I \longrightarrow \mathbb{Z}$ são contínuas, segue que $H'(0,s)$ e $H'(1,s)$ são constantes, não dependendo de s e como $H'(0,0) = 0$, segue que $H'(0,s) = 0$, $\forall s \in I$.

Vamos provar que $grau(\alpha) = H'(1,0)$ e $grau(\beta) = H'(1,1)$. Como $H'(1,s)$ é constante, $grau(\alpha) = H'(1,0) = H'(1,1) = grau(\beta)$.

De fato, $(ex \circ H')(t,0) = H(t,0) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$ e $H'(0,0) = 0$. Portanto, $H'(1,0) = grau(\alpha)$. Também, $(ex \circ H')(t,1) = H(t,1) = \beta(t)$, $\forall t \in I$, com $H'(0,1) = 0$, garantindo que $H'(1,1) = grau(\beta)$. $\square$

O Lema nos mostra que à classe $[\alpha] \in \pi_1(S^1)$ podemos associar um inteiro, definindo $grau[\alpha]$ como sendo o grau de um representante qualquer de $[\alpha]$.

Mostremos agora que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 7.1.1. *A aplicação grau* $: \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *é um isomorfismo.*

Demonstração: Dados os laços $\alpha, \beta \in \Omega S^1$ baseados em $1 \in S^1$, definimos $\alpha \cdot \beta \in \Omega S^1$ por $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t).\beta(t)$, $\forall t \in S^1$.

Sejam α', $\beta' \in F(I, \mathbb{R})$ tais que $ex \circ \alpha' = \alpha$, $ex \circ \beta' = \beta$ e $\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$. Logo, $grau(\alpha) = \alpha'(1)$ e $grau(\beta) = \beta'(1)$. Por outro lado, $(\alpha' + \beta')(0) = 0$ e $ex \circ (\alpha' + \beta')(t) = (ex \circ \alpha')(t).(ex \circ \beta')(t) = \alpha(t).\beta(t) = (\alpha \cdot \beta)(t)$, $\forall t \in S^1$.

Logo, $grau(\alpha \cdot \beta) = (\alpha' + \beta')(1) = \alpha'(1) + \beta'(1) = grau(\alpha) + grau(\beta)$.

Temos que $\pi_1(S^1) = [S^1, S^1] = [\Sigma S^0, S^1] = [S^0, \Omega S^1]$. Logo, a estrutura multiplicativa de $\pi_1(S^1)$ é dada pela H-multiplicação de ΩS^1, isto é, $\mu : \Omega S^1 \times \Omega S^1 \longrightarrow \Omega S^1$ é dada por $\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$. Em outras palavras, $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Assim, se provarmos que $\alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta$, estará demonstrado que a aplicação *grau* é um homomorfismo, pois

$$grau([\alpha] \cdot [\beta]) = grau([\alpha * \beta]) = grau(\alpha \cdot \beta) = grau(\alpha) + grau(\beta).$$

Defina $H : I \times I \longrightarrow S^1$ por

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t - ts).\beta(st), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(\frac{2t-s+1}{2}).\beta(2t-1+s(1-t)), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ \alpha(1).\beta(2t-1+s(1-t)), & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$\forall (t,s) \in I \times I$.

Observe que $H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta)(t)$, $H(t,1) = \alpha(t).\beta(t) = (\alpha \cdot \beta)(t)$, $\forall t \in I$ e $H(0,s) = 1 = H(1,s)$, $\forall s \in I$.

Portanto, $\alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta$.

Dado $n \in \mathbb{Z}$, tome $\alpha'_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'_n(t) = tn$ e defina $\alpha_n : I \longrightarrow S^1$ por $\alpha_n(t) = (ex \circ \alpha'_n)(t)$, $\forall t \in I$. Note que $\alpha_n(0) = (ex \circ \alpha'_n)(0) = ex(0) = 1$ e $\alpha_n(1) = (ex \circ \alpha'_n)(1) = ex(n) = 1$. Logo, $\alpha_n \in \pi_1(S^1)$ e $grau([\alpha_n]) = grau\ \alpha_n = \alpha'_n(1) = n$. Logo, a aplicação *grau* é um epimorfismo.

Suponha que $grau[\alpha] = \alpha'(1) = 0$. Então, $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é um laço, pois $\alpha'(0) = 0 = \alpha'(1)$. Mas $\mathbb{R}$ é contrátil, logo, α' é homotópico ao laço constante $c : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, $\alpha = ex \circ \alpha' \sim ex \circ c = c'$, $c' : S^1 \longrightarrow S^1$ a aplicação constante. Daí, $[\alpha] = [c']$ e assim, a aplicação *grau* é um monomorfismo.

Portanto, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Piccinini, R. A.: *Homotopia*. Notas de aula de curso de pós-graduação do Instituto de Pesquisas Matemáticas, USP.

[2] Piccinini, R. A.: *Lectures on Homotopy Theory*. Amsterdam New York, N.Y., U.S.A.: North-Holland: Distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co, 1992.

[3] Munkres, J. R.: *Topology, A First Course*. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1975.

[4] Bredon, G. E.: *Topology and Geometry*. Graduate texts in mathematics; 139, 1993.

[5] Rotman, J. J.: *An Introduction to Homological Algebra*. New York, Springer, 1979.

[6] Garcia, A.: Lequain, Y. A. E.: *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 2013.

[7] Lima, E. L.: *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 1977.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 10/03/2016

Assinatura do autor