UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

REALIDADE AUMENTADA E O ENSINO DE CÁLCULO: POSSIBILIDADES PARA A CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO

Anderson Luís Pereira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

ANDERSON LUÍS PEREIRA

REALIDADE AUMENTADA E O ENSINO DE CÁLCULO: POSSIBILIDADES PARA A CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciência Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo

Rio Claro - SP

2022

P436r

Pereira, Anderson Luís

Realidade aumentada e o ensino de cálculo : possibilidades para a constituição do conhecimento / Anderson Luís Pereira. -- Rio Claro, 2022

225 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Rosa Monteiro Paulo

1. Fenomenologia. 2. Corpo-próprio. 3. GeoGebra Calculadora 3D. 4. GeoGebra AR. 5. Cálculo Diferencial e Integral. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

ANDERSON LUÍS PEREIRA

REALIDADE AUMENTADA E O ENSINO DE CÁLCULO: POSSIBILIDADES PARA A CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciência Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Comissão examinadora

Prof.ª Dr.ª Rosa Monteiro Paulo (Orientadora)

FEG / UNESP – Guaratinguetá, São Paulo

Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Viggiani Bicudo

IGCE / UNESP - Rio Claro, São Paulo

Prof.ª Dr.ª Fabiane Mondini

ICT / UNESP - Sorocaba, São Paulo

Prof. Dr. Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos

UNICSUL / São Paulo, São Paulo

Prof. Dr. Maurício Rosa

FE / UFRGS - Porto Alegre – RS

Resultado: Aprovado

Rio Claro, SP, 28 de abril de 2022

RESUMO

Nosso objetivo nesta pesquisa é compreender os modos pelos quais se dá a constituição do conhecimento matemático do aluno que com Realidade Aumentada explora assuntos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os dados para a pesquisa foram produzidos em um curso de curta duração, no qual estivemos com alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista, *campus* Guaratinguetá. No curso, os participantes foram convidados a realizar tarefas previamente organizadas que envolviam assuntos do conteúdo de Cálculo, tais como limite, derivada e integral, fazendo explorações com o recurso de Realidade Aumentada do aplicativo *GeoGebra Calculadora 3D*. Gravamos com câmera de vídeo a dinâmica dos oito encontros. Solicitamos que os participantes gravassem os momentos de exploração das tarefas que faziam em seus smartphones. Essas gravações foram transcritas para análise. Em algumas situações, para a clareza do texto, foram inseridos *gifs* dando mais detalhes das atividades. A pesquisa foi desenvolvida em uma perspectiva qualitativa com enfoque fenomenológico, buscando compreender *como se mostra a constituição do conhecimento em Cálculo Diferencial e Integral ao se estar-com a Realidade Aumentada?* O movimento de análise foi feito seguindo o rigor da pesquisa fenomenológica, em que nos envolvemos com a análise ideográfica e nomotética. Para a análise ideográfica, que visa explicitar as particularidades do compreendido, organizamos os dados em cenas significativas, que nos permitiram manter a dinamicidade da comunicação intersubjetiva. Nas cenas, destacamos ideias significativas, que nos levaram às convergências de significado da análise nomotética, buscando generalidades do que se expôs na experiência vivida. Das sínteses compreensivas, foram constituídas três Categorias Abertas: *Investigar assuntos matemáticos como modo de compreensão*, em que se discute os modos pelos quais os participantes investigam com Realidade Aumentada, explorando, elaborando conjecturas, validando resultados; *O movimento do corpo-próprio que potencializa formas de visualizar assuntos matemáticos*, cujo foco de discussão está no movimento do corpo-próprio compreendido como organismo vivo que se dirige para os assuntos que explora, buscando articular sentidos e significados; e *Diálogos que comunicam o compreendido para se fazer entender*, destacando que é na comunicação que o sentido vai se fazendo para o corpo-próprio, constituindo conhecimento matemático com Realidade Aumentada.

Palavras-chave: Fenomenologia; Corpo-próprio; GeoGebra Calculadora 3D; GeoGebra AR; Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

Our objective in this research is to understand the ways in which the student's mathematical knowledge is constituted who, with Augmented Reality, explores Differential and Integral Calculus topics. The data for the research were produced in a short course, in which we were with students of the Mathematics Degree at Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá campus. In the course, participants were invited to perform previously organized tasks that involved Calculus content, such as limit, derivative and integral, making explorations with the Augmented Reality feature of the GeoGebra 3D Calculator app. We recorded the dynamics of the eight meetings with a video camera. We asked the participants to record the moments of exploration of the tasks they were doing on their smartphones. These recordings were transcribed for analysis. In some situations, for the clarity of the text, gifs were inserted giving more details of the activities. The research was developed in a qualitative perspective with a phenomenological focus, seeking to understand *how the constitution of knowledge in Differential and Integral Calculus is shown when being-with Augmented Reality?* The analysis movement was carried out following the rigor of phenomenological research, in which we engaged with ideographic and nomothetic analysis. For the ideographic analysis, which aims to explain the particularities of what is understood, we organized the data into significant scenes, which allowed us to maintain the dynamics of intersubjective communication. In the scenes, we highlight significant ideas, which led us to the convergences of meaning of the nomothetic analysis, seeking generalities of what was exposed in the lived experience. From the comprehensive syntheses, three Open Categories were constituted: *Investigating mathematical topics as a way of understanding*, in which the ways in which participants investigate with Augmented Reality are discussed, exploring, elaborating conjectures, validating results; *The living-body movement that enhances ways of visualizing mathematical topics*, whose discussion focus is on the movement of the living-body understood as a living organism that goes towards the topics it explores, seeking to articulate senses and meanings; and *Dialogues that communicate what is understood to make itself understood*, emphasizing that it is in communication that meaning is made for the living-body, constituting mathematical knowledge with Augmented Reality.

Keywords: Phenomenology; Living-body; GeoGebra 3D Calculator; GeoGebra AR; Differential and Integral Calculus.

AGRADECIMENTOS

Chego ao fim, por hora, de uma caminhada: o curso de doutorado em Educação Matemática. Um caminhar que foi se dando ao longo de pouco mais de quatro anos de estudos. Sem a benção e proteção de Deus, isso certamente não seria possível. Obrigado, Senhor Deus, por permitir que seu filho tenha tantas alegrias na vida e que esteja cercado por tanta gente boa.

Pensando nessas pessoas, sinto-me na obrigação de fazer um singelo agradecimento.

Agradeço à minha professora, orientadora e amiga Rosa Monteiro Paulo. Obrigado por todo cuidado comigo. Sempre muito paciente e prestativa, é inspiração para mim na Educação Matemática e na vida! Sou muito grato por todos os ensinamentos.

Agradeço aos membros da banca, Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Prof.ª Dr.ª Fabiane Mondini, Prof. Dr. Maurício Rosa e Prof. Dr. Márcio Eugen. Vocês foram fundamentais para o avanço desta tese. Muito obrigado por fazerem parte deste momento tão importante para mim.

Agradeço aos meus pais, João e Fátima. Vocês são exemplos de vida para mim. Obrigado por me apoiarem e me ajudarem, sempre! Amo vocês!

Agradeço aos meus irmãos Eder e Ederson. Obrigado por toda a parceria na vida, pelo carinho e por serem inspiração para mim. Amo vocês!

Agradeço à minha noiva, *amore mio*, Gabriele, por estar sempre ao meu lado, me apoiando, se colocando à disposição para ajudar, tornando a caminhada muito mais leve. Eu amo você e sou muito grato por tudo!

Agradeço aos amigos que Rio Claro me deu: Sandro, Dete, Aysha; Egidio, Clênia, Luelmy e Luma; Lahis, Carla e Gabriel! Vocês fazem parte da minha vida. Muito obrigado por todo o carinho e parceria. Amo vocês! Agradeço à Ronilce, Vanessa, Marília, Idalise, Douglas, e Denner por me ajudarem ao longo dessa caminhada de mestrado e doutorado em Rio Claro.

De forma especial, sou eternamente grato à minha grande amiga Ingrid Firme. O início desse caminhar se deu em nossas conversas e, só foi possível, diante de sua disposição em ajudar sempre! Obrigado por me apresentar o PPGEM e por fazer parte dessa minha jornada. Você é sensacional e merece o mundo!

Por fim, agradeço a tod@s professor@s, alun@s e funcionári@s do PPGEM e a todas as pessoas que estiveram comigo ao longo deste processo. Muito obrigado!

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O início do caminho

Esta seção tem como objetivo apresentar ao leitor aspectos gerais do movimento realizado por este pesquisador quando se coloca a investigar. Dando início, diremos da pessoa deste pesquisador que se propõe a realizar uma busca por compreender aquilo que interroga.

Quem pesquisa é este pesquisador que, ao final do curso de mestrado realizado junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp campus Rio Claro, vai para a sala de aula. Após a conclusão da pesquisa (PEREIRA, 2017), cuja proposta foi investigar crenças e concepções de professores acerca do uso das Tecnologias Digitais em aulas de Matemática, o professor / pesquisador dá seus primeiros passos da carreira docente, assumindo aulas de Matemática para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental de escolas da rede pública municipal de Guaratinguetá, interior de São Paulo. Nesse começo, cercado pelos sentimentos de insegurança, dúvida e medo, o professor de Matemática tenta se ambientar em seu novo local de trabalho, com seus alunos, crianças em fase de transição para a adolescência, e seus colegas de profissão. Vai se constituindo professor, sendo professor.

Neste mesmo ano, em 2017, o professor se dispõe a dar continuidade aos seus estudos e participar do processo seletivo para o curso de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM da Unesp *campus* Rio Claro, sendo aprovado. Inicia-se, então, a caminhada desta tese com um projeto de pesquisa que tinha como objetivo investigar a *produção* de conhecimento de alunos, acerca de temas elencados no conteúdo[1] programático de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, quando eles estão com a Realidade Aumentada. Ao longo do caminho, o que pensávamos ser produção não expressava a intenção inicial de pesquisa, que foi compreendida como *constituição* de conhecimento. Mas isso ainda será melhor argumentado adiante, nesta mesma seção.

Ser aluno do doutorado trouxe a oportunidade de contato com alunos do Ensino Superior, justamente na instituição em que me formei professor frequentando o curso de Licenciatura em Matemática na Unesp *campus* Guaratinguetá. Por meio do programa de

---

[1] Quando utilizamos no texto o termo *conteúdo*, estamos nos referindo aos componentes curriculares elencados e presentes nas ementas das disciplinas. Especificamente, nos referimos, à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Estágio Supervisionado em docência no Ensino Superior, pude ministrar 4 disciplinas distintas para alunos de graduação em Licenciatura em Matemática, sob a supervisão de professores do curso. As disciplinas de *Prática de Ensino e Estágio Supervisionado II*, *Desenho Geométrico e Geometria Descritiva*, *Didática Especial da Matemática* e *Matemática Elementar* permitiram que eu tivesse outra experiência em sala de aula. Essas experiências fazem parte de um movimento no qual o professor de Matemática vai se constituindo na ação de ser professor.

Ser professor do curso de Licenciatura, desenvolvendo atividades com professores em formação, permitiu interessantes diálogos sobre a profissão e o modo de ser professor de Matemática: as ações pedagógicas em sala de aula, os desafios, a baixa remuneração, o pouco reconhecimento da profissão por diferentes integrantes da sociedade, as dificuldades dos alunos, dentre outros temas que foram aparecendo no diálogo com os alunos. Isso faz parte de *quem sou* hoje, professor e pesquisador que se coloca a realizar uma investigação neste ambiente de Ensino Superior, que propõe formar um profissional, no sentido de imprimir uma *forma* não definitiva e idealizada, entendendo que o ambiente da Licenciatura é um espaço no qual há a oportunidade de contato com importantes aspectos da profissão que permitem aos futuros professores irem se constituindo professores de Matemática.

O interesse pelo tema Realidade Aumentada (RA) foi desperto ao conhecer trabalhos apresentados e discutidos no encontro anual do grupo *Fenomenologia em Educação Matemática* – FEM, do qual este pesquisador e a orientadora desta pesquisa são membros. Nesse encontro, o Prof. Dr. Maurício Rosa apresentou o desenvolvimento de seus estudos e de algumas pesquisas de seus orientandos de graduação que abordavam o uso da Realidade Aumentada, utilizando o programa *Blender* e o aplicativo para exploração do recurso, *AndAR*. Com as pesquisas de Bulla (2016) e Resende (2016), iniciamos uma caminhada para conhecer a RA. Nossos estudos e contato com o *Blender*, em conjunto com o aplicativo *Aumentaty Author*, possibilitaram a realização de uma oficina na *Semana da Ciência e Tecnologia 2017*, evento realizado pela Unesp *campus* Guaratinguetá e que contou com a participação de alunos dos cursos de graduação dessa instituição (Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Física e Engenharias). A parte prática da oficina envolveu a elaboração e exploração em RA de um Cubo de faces coloridas. Com o Blender, programa para computadores que permite desenvolver conteúdo digital tridimensional, foi proposto aos participantes, organizados em grupos, que construíssem um cubo com faces de cores diferentes. Após a construção, os participantes foram convidados a utilizar o Aumentaty Author e, com a câmera do computador, podiam ter uma experiência do cubo em RA, como se ele estivesse projetado no ambiente físico do participante.

O que ficou dessa experiência? O usuário utilizava o recurso pela tela do computador, o que limitava seus movimentos para visualizar o cubo em sua tridimensionalidade. O uso de marcadores para trazer à tela o conteúdo digital nem sempre funcionava muito bem pois, na tentativa de rotacionar o marcador para visualizar em outra perspectiva, por vezes, o cubo era reposicionado pelo aplicativo e dificultava a visualização de todas as suas faces. Com os avanços da tecnologia, alguns aplicativos permitem uma experiência em RA sem a necessidade do uso de marcadores, evitando que o problema ocorra.

Outro ponto, este com maior influência sobre a nossa decisão de não utilizar esses recursos na pesquisa, é que era preciso conhecer linguagem de programação para elaborar previamente os objetos a serem explorados. Embora o Blender possua recursos para inserir funções de duas variáveis com certa facilidade, quando almejávamos objetos e experiências mais elaboradas, com maior liberdade para a exploração, era preciso programar em linguagem *Python*, o que demandaria estudo de programação. Ainda, havendo de nossa parte (proponentes do curso) uma *programação prévia* dos objetos digitais a serem explorados, entendemos que estaríamos limitando a experiência do usuário e o direcionando “àquilo que deve ser visto”. Essa limitação mostrou-se evidente após termos contato com outro aplicativo.

Dando continuidade nos estudos, conhecemos o recurso de RA do *GeoGebra*. Inicialmente, o aplicativo *GeoGebra AR* [2], estava disponível apenas para usuários de dispositivos móveis (tablets e smartphones) com o sistema operacional *IOs*, tornando sua utilização mais difícil, considerando o custo de mercado desses equipamentos. No decorrer da pesquisa, houve a expansão do recurso para o sistema *Android* por meio do aplicativo *GeoGebra Calculadora 3D* o que facilitou sua utilização, pois há maior número de pessoas cujos equipamentos possuem esse sistema operacional, tornando-o uma opção para o estudo que pretendíamos desenvolver. Além disso, vimos que com o recurso de RA do GeoGebra haveria maior autonomia do usuário, uma vez que ele teria

[2] O recurso de realidade aumentada está disponível para as versões *GeoGebra AR* e *GeoGebra Calculadora 3D*. No texto, iremos nos referir desta forma para dizer da tecnologia de RA do GeoGebra.

maior liberdade para realizar explorações, considerando as ferramentas matemáticas do aplicativo que são colocas à disposição do usuário e a não necessidade do uso de marcadores, evitando problemas enfrentados com outros aplicativos, como no caso do Aumentaty Author.

Este movimento em que este pesquisador se envolveu, de *ir pesquisar*, conforme acreditamos que já tenha sido possível observar, não se deu de modo linear, com um caminho pré-definido, com início e chegada pragmaticamente determinados. Tratou-se de um caminhar de muitas retomadas em que desafios foram surgindo e exigindo ações para que a pesquisa acontecesse. Um deles é relativo à familiaridade com o aplicativo, uma vez que, embora este pesquisador o conhecesse, não havia desenvolvido com ele nenhuma atividade em sala de aula; outro é relativo à própria postura assumida na pesquisa: a fenomenologia, movimento complexo e que envolveu constantes leituras, idas e vindas que, aos poucos, foram permitindo compreender a caminhada investigativa. O que se constitui como compreendido, foi possibilitado pelas leituras realizadas, mas, sobretudo, pelas discussões em que envolveram o outro, pessoas abertas ao diálogo, nas reuniões de orientação, nas reuniões do grupo de estudo com pesquisadores e colegas de orientação em que temas importantes, aqui abordados, foram ganhando significado e puderam ser assumidos na ação de pesquisar.

Este movimento de investigar o que nesta pesquisa de doutorado nos propusemos compreender envolveu um caminhar de muitos desafios, retomadas, mudanças de direção e de muitas inquietações, sempre pensando e dialogando com a pergunta de pesquisa, expressa em forma de texto e que, a todo momento, direcionou o olhar para *aquilo que se propõe investigar*. Ela, a interrogação, foi o que deu direção e possibilitou a clareza para o caminhar na pesquisa.

1.2 Objetivo e pergunta de pesquisa

O objetivo nesta pesquisa é compreender os modos pelos quais se dá a constituição do conhecimento matemático de alunos quando exploram assuntos presentes no conteúdo programático de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral com um aplicativo de Realidade Aumentada. Assim, ao pensarmos no modo como expressaríamos este objetivo pela linguagem, fomos articulando a pergunta de pesquisa que, agora, se explicita desta forma: *como se mostra a constituição do conhecimento em Cálculo Diferencial e Integral ao se estar-com a Realidade Aumentada?*

Para compreender os modos pelos quais essa constituição se dá, desenvolvemos atividades com alunos da Graduação em Licenciatura em Matemática da Unesp *campus* Guaratinguetá, no contraturno de suas aulas, em um curso cujos detalhes serão apresentados na seção 5.2.1 - A proposta do curso e seus participantes.

Neste momento nossa intenção é retomar a pergunta para que ela esteja clara e revele nossa intenção com este estudo. Nos passos iniciais desta tese, como já citado anteriormente, dizíamos do interesse pela produção de conhecimento. Porém, com as leituras realizadas, vimos que o termo *constituição* é o que expressa nossa intenção. Voltamo-nos para o que chamamos de *constituição de conhecimento*, explicitando ao leitor o modo pelo qual, assumindo uma postura fenomenológica, estamos compreendendo seu emprego nesta pesquisa.

1.3 A constituição de conhecimento: explicitando o significado

Quando apresentamos a pesquisa e, com ela, a intenção de compreender aquilo que se coloca para nós como interrogado pela pergunta, entendemos que é preciso deixar claro *isso que se pergunta* e que *se busca compreender*. A produção e a constituição são termos que não serão tratados como sinônimos. São processos complexos e que merecem um cuidado. Mas, o que se diz quando se fala da constituição? Por que não optarmos pelo uso de *produção* ou *construção* de conhecimento?

Em *Fenomenologia: confrontos e avanços* (2000), Bicudo apresenta reflexões sobre a corrente construtivista e o modo como se compreende a *construção* de conhecimento. Resgata, também, uma perspectiva de senso comum de que existem, para o sujeito, “noções e conceitos” que vão sendo construídos/edificados ao longo da vida. Em sua argumentação, a autora não nega tal ideia, mas ressalta que pensar a construção de conhecimento desse modo, pode encobrir aspectos relevantes sobre o tema. Considerando a perspectiva construtivista de *Jean Piaget*, entende-se que o conhecimento é *uma atividade*, e que é construído numa relação *dinâmica* entre sujeito e objeto, sendo estes, aspectos dessa teoria que colaboram para a elaboração do significado de construção. Porém, a autora ressalta que a perspectiva construtivista passa a ser alvo de críticas quando envolve aspectos sociais, históricos e de concepções de realidade nesse processo de construir o conhecimento. A teoria deixa uma lacuna ao não considerar a realidade na qual o conhecimento é edificado/construído e não levantar questões acerca do *sujeito que conhece* e do próprio objeto do qual o conhecimento se refere (BICUDO, 2000).

Por outro lado, segundo uma perspectiva fenomenológica

> [...] podemos compreender construção do conhecimento e construção da realidade como um mesmo movimento no qual o mundo faz sentido para a pessoa, onde sempre se está com o outro, onde se dá atribuição de significados e onde se participa da construção da realidade mundana, que tem a ver com a materialidade histórica. (BICUDO, 2000, p. 29).

A autora mostra que a construção do conhecimento e a construção da realidade são indissociáveis. Fazem parte de um mesmo movimento de sujeitos ao estarem no mundo. Neste ponto, nos deparamos com a necessidade de nos voltar para trabalhos cujo foco esteja no sujeito, entendido como corpo-encarnado que, no mundo, é sempre aberto às possibilidades de conhecer e, por seus modos expressivos, fazer parte do processo de construção / produção da realidade.

Em Rosa e Bicudo (2018), temos uma apresentação de como podemos compreender, da perspectiva da fenomenologia, este processo no qual o sujeito conhece, foco desta pesquisa. Os autores desenvolvem as ideias de constituição e de produção de conhecimento.

Da perspectiva da fenomenologia, a constituição é entendida como uma ação que se dá na vivência do sujeito, sempre situado no *mundo da vida*. Compreende-se a constituição como sendo

> [...] um movimento complexo [...] Abrange muitos atos intencionais da consciência e modos dos sentidos que fazem ao sujeito vivente serem entrelaçados e irem, aos poucos, constituindo uma forma que vai se presentificando à consciência, de maneira que o sujeito pode se dar conta disso que está compreendendo do [*mundo da vida*]. (ROSA; BICUDO, 2018, p.13)

É um processo que envolve atos intencionais da consciência, de um sujeito vivo, que se direciona ao que a ele se apresenta no mundo circundante e experiencia situações diversas, sujeito encarnado que pelos sentidos pode dar-se conta disso que vive, compreendendo o que a ele se mostra.

> A constituição do conhecimento, como compreendida pela fenomenologia, tem como primado a percepção, ato que pelo olhar intencional da consciência se estende ao focado nesse olhar e traz o percebido para os atos da consciência. Nesse movimento [noesis-noema] (ou perceber-percebido), o objeto intencional já se mostra como fenômeno, uma vez que é visto de uma perspectiva, a do [corpo-próprio], e já é percebido e não constatado em sua objetividade. Intencional por ser visado na intencionalidade do ato. Isso quer dizer que o sujeito encarnado de modo atento e indagador dirige seu olhar a um foco, indagando do que se trata ou dirige sua ação a algo que percebe como imperante que faça. Como Merleau-Ponty afirma, meu corpo está onde há algo a fazer. (ROSA; BICUDO, 2018, p. 14)

Para a fenomenologia, este conhecimento que se constitui só é possível tendo como ponto de partida a pessoa, corpo-encarnado, que *se dispõe à...*, no sentido de que a constituição só é possibilidade para *o sujeito* aberto ao perceber, ocorre na percepção daquilo que é abarcado pelos atos intencionais da consciência. Constituição, portanto, se dá na ação corporificada do sujeito intencional.

Este sujeito, tal qual a fenomenologia o entende, nunca é só. Sua vivência se dá no *mundo da vida*, entendido como "o mundo que aí está, onde somos com os outros, sujeitos encarnados, animais, natureza em geral e com a produção sociocultural que, historicamente, também o constitui." (ROSA; BICUDO, 2018, p. 13).

Mundo da vida não é meramente o local físico no qual estamos situados, mas diz de tudo que nele se presentifica para nós, sujeitos intencionais, e onde também está presente o outro, cossujeito, corpo-encarnado que, assim como eu, tem possibilidades de vir-à-ser.

A constituição de conhecimento, como a descrevem Rosa e Bicudo (2018), expõe o movimento do *corpo-próprio* que, por tudo aquilo que lhe chega pelos órgãos dos sentidos, percebe, compreende, interpreta e comunica o compreendido.

Assim, entendemos com os autores

> [...] a constituição do conhecimento enquanto um movimento que ocorre no corpo-próprio, organismo vivo que vivencia experiências. Entretanto, nessa constituição há mais: há a presença do outro, cossujeito que também sente, percebe, realiza atos psíquicos e espirituais e que se faz sentir em sua corporeidade. O cossujeito, sujeito com quem se está no [mundo da vida], também compreende e pode compreender o dito em uma linguagem articulada e expressa em sua materialidade. Responde ao compreendido mediante um movimento dialógico que se consuma em ações materializadas e que pela concordância entre sujeitos intencionais (pessoas) que vivem em uma comunidade e pela repetição disso sobre o que houve concordância, se torna objetivo, passível de ser retomado, repetido, compreendido, vivificado em atos sensoriais, psíquicos e espirituais. A objetividade do que assim se tornou objetivo não é uma objetividade dada, mas constituída por sujeitos em sua carnalidade, que convivem, que se colocam em movimento de saber, ou de fazer algo e que têm suas ações materializadas em produtos histórico-sócio-culturais. (ROSA; BICUDO, 2018, p. 15)

Eis então o caminho até o que os autores entendem por *produção*. É nesse modo do *ser-sendo* que a constituição vai se fazendo para os sujeitos, nas sensações pontuais que se entrelaçam umas com as outras. O que se mostra são fenômenos, aquilo que é essencial e que vai se desdobrando em compreensões, dando sentido ao que é visado. O compreendido é expresso e se materializa na linguagem, tornando-se conhecimento intersubjetivo. À medida em que há concordância acerca do compreendido e dialogado, algo se objetiva. Isso que se objetiva e que se constituiu para os sujeitos, é o que os autores denominam de produto, uma compreensão objetivada.

Estamos interessados no pré-predicativo...

> Entendo que o [mundo da vida] é o mundo já dado e que compreende toda a formação histórica e deve ser interrogado, voltando-se à subjetividade e à intersubjetividade para que se compreenda como nascem os produtos culturais que caracterizam tal mundo. Ele provê o material e o faz de dois modos: como pré-predicativo e como pré-teorético. Pré-predicativo, pois é o mundo da experiência imediata. Pré-teorético, pois nesse mundo já é dada a comunidade, e com ela a linguagem de modo ingênuo. Compete à atitude fenomenológica colocar ambos em evidência, analisar e refletir sobre o material enlaçado no noesis-noema. Esse procedimento é fenomenológico. Não ignora o pré-dado, mas o enlaça. Ao trabalhar com o pré-predicativo dá conta da constituição do objeto pelo sujeito, da visada da ciência natural e da visada da fenomenologia. Ao trabalhar com o pré-teorético, dá conta do formal da ciência exata formal. (BICUDO, 2020, p. 47)

Nesta pesquisa, voltamo-nos para a constituição de conhecimento do aluno ao estar *com* assuntos da disciplina de Cálculo, *com* a Realidade Aumentada, abrindo-se às possibilidades de compreensão. Na sequência do texto, apresentamos o desenvolvido na tese.

1.4 O modo como se apresenta e se estrutura esta tese

> Uma tese em Educação Matemática é uma síntese linear de vários momentos que ficaram desordenados pelo meio do caminho. O leitor de uma tese tem a impressão de que tudo foi muito organizado e de que essas linhas foram escritas calmamente. Os rascunhos, as anotações feitas nos livros, as várias versões da escrita, as diversas reelaborações das atividades, as várias percepções que ficaram de fora, dentre tantas outras coisas, denotam que a escrita de uma tese não é linear e nem tampouco organizada. É um resumo de quatro anos, ou quem sabe, de uma vida acadêmica, de um trabalho coletivo, que nasce com as primeiras angústias como professora, cresce com a elaboração do projeto de pesquisa e toma corpo com as contribuições do orientador, de colegas, dos participantes voluntários e de muita leitura, mesmo aquelas que não as citamos. É também um trabalho solitário, mas não sozinho, pois no decorrer destes anos a mente já não é a mesma, foi impregnada de todo um contexto. (BARBOSA, 2009, p. 175)

A tese: é um produto que expressa em forma de linguagem o caminho que trilhei quando me coloquei em movimento investigativo, buscando compreender a constituição de conhecimento matemático com Realidade Aumentada. Assim como em Barbosa (2009), investigar não foi seguir um caminho linear com início, desenvolvimento e conclusão previamente definidos. Muito pelo contrário, foram 4 anos de muitas idas e vindas. O produto (a tese), demandou organização e clareza na linguagem para expor nossas compreensões que foram sendo constituídas na pesquisa.

A tese é um dos modos do *eu*, sujeito vivente, corpo-próprio, comunicar minhas compreensões acerca do interrogado à comunidade científica (ou a quem interessar). Mas, quais as possibilidades que tenho para me expressar? Diante das possibilidades que a mim se apresentaram, opto por trazer a tese: em formato impresso, disponibilizando cópias físicas em papel; no formato digital, em arquivo do tipo PDF, que apresenta facilidade para acesso ao conteúdo digital da tese, tais como gifs e vídeos, por meio de links; e uma outra possibilidade foi a criação de um site[3], contendo as cenas significativas constituídas na pesquisa e que, conforme entendemos, apresenta certa praticidade no acesso ao conteúdo em gifs. Este movimento será explicitado de modo detalhado na seção 6.1 A organização dos dados: expondo os procedimentos. No decorrer do texto, também apresentamos alguns links (como o anterior 6.1) que direcionam o leitor a uma seção específica da tese, caso ele deseje vê-lo naquele momento.

Esta tese é apresentada e organizada por seções. A primeira, expõe o início de nosso caminhar e traz também o objetivo e pergunta que direcionaram nosso olhar, uma breve explicitação sobre o que entendemos acerca da *constituição* de conhecimento e apresenta o modo como a tese foi organizada.

A segunda seção traz nosso movimento de busca por pesquisas já realizadas no meio acadêmico, que abordam temas que tratamos nesta pesquisa: o Cálculo Diferencial e Integral; as tecnologias digitais como possibilidade para ensinar e aprender essa disciplina; e a tecnologia de Realidade Aumentada para o ensino e para a aprendizagem de Cálculo. Trazemos trabalhos que consideramos relevantes para a compreensão da temática que investigamos, procurando dialogar com os autores.

Na terceira seção apresentamos a Realidade Aumentada, mediante situações de uso desta tecnologia, o que possibilitou expor o modo como ela vem sendo compreendida pelos autores lidos. Trazemos também algumas reflexões teóricas, envolvendo autores da área da filosofia, que nos permitem compreender e explicitar o significado atribuído ao termo *virtual* e *realidade* para que não sejam tomados no senso comum, causando confusão.

Na quarta seção apresentamos nossa compreensão de corpo-próprio diante dos estudos realizados com leituras de autores da fenomenologia, tais como Edmund Husserl e Merleau-Ponty, de modo que seja possível compreendermos o movimento do sujeito que está com a Realidade Aumentada.

[3] Endereço do site: http://gg.gg/tese-cenas-pereira2022

Na quinta seção trazemos aspectos que envolvem a metodologia e postura assumidas na pesquisa e os procedimentos fenomenológicos para a produção e análise de dados.

Na sexta seção se expõe o movimento de análise realizado por este pesquisador, apresentando as Cenas Significativas, os quadros com as Ideias Significativas e com o movimento de convergência em sínteses compreensivas, caminhando para as Categorias Abertas, entendidas como regiões de generalidades que possibilitam explicitar nossa compreensão.

Na sétima seção abrimos um diálogo entre o que se mostra nas Categorias Abertas e os autores lidos para explicitar compreensões acerca do que interrogamos.

Na oitava seção apresentamos considerações possibilitadas pelo caminhar investigativo e inquietações que se abrem em novas possibilidades de continuidade da pesquisa.

Finalizamos com as Referências, trazendo os autores que foram significativos às ideias que aqui estamos apresentando e os Apêndices com o modelo do Termo de Consentimento e as tarefas desenvolvidas com os participantes do curso ao longo dos encontros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção tem como objetivo apresentar o caminhar investigativo que envolveu uma busca por pesquisas realizadas, especialmente em Educação Matemática, para conhecer os apontamentos já feitos por pesquisadores sobre os principais temas de nossa investigação. Voltaremos nosso olhar para as pesquisas que têm como tema a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e seus processos de ensino e de aprendizagem, bem como para aquelas que propõem reflexões acerca do uso das tecnologias digitais, e da Realidade Aumentada, como possibilidade para tratar assuntos dessa disciplina.

2.1 O que se diz do Cálculo Diferencial e Integral?

Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo) é uma disciplina presente na grade curricular de cursos de graduação em Matemática e outros cursos no nível de graduação, por exemplo, em cursos de engenharia, física, biologia e química. A pesquisa de Lima (2012) mostra que o primeiro curso de nível superior oferecido no Brasil com conteúdo de Matemática, teve início em 1810. O curso ocorreu na *Academia Real Militar*, no Rio de Janeiro, que foi criada pelo príncipe D. João VI, na ocasião em que a Família Real Portuguesa habitava no Brasil. Foi a primeira vez que, no Brasil, ofertou-se um curso que abordava assuntos que se assemelham aos que estão presentes hoje nos currículos de Cálculo (LIMA, 2012).

Ao longo dos anos, a disciplina de Cálculo vem se mostrando como um obstáculo a ser superado por alunos de graduação de diversos cursos, apresentando altos índices de reprovação e desistência dos cursistas. Para compreender os motivos pelos quais tenham sido conferidas características tão duras à essa disciplina, ocasionando a evasão e dificuldade de aprendizagem dos alunos, voltamos nossos olhares aos estudos que abordam a temática Cálculo e seus processos de ensino e aprendizagem e, diante do que se mostra relevante à nossa compreensão do tema, estabelecer um diálogo.

Motivada pelas dificuldades no ensino, Maria Cristina Bonomi Barufi (BARUFI, 1999), desenvolveu uma pesquisa na qual se propunha a analisar livros utilizados nas disciplinas de Cálculo, considerando a grande importância que os professores que ministram a disciplina dão a este recurso. Embora transcorridos mais de vinte anos desse estudo, os problemas apontados pela autora com relação ao processo de ensino, não parecem terem sido resolvidos. Ao analisar os índices de reprovação da disciplina em cursos universitários entre 1990 e 1995, a autora verificou que os números expunham um panorama problemático. Como exemplo, diante de dados referentes às disciplinas do Instituto de Matemática e Estatística (Ime), da Universidade de São Paulo (Usp), a autora constatou que a disciplina de *Cálculo para Funções de uma Variável Real*, apresentou 66,9% de taxa de reprovação no ano de 1995, considerando as reprovações de alunos que não atingiram a nota mínima, reprovações por faltas e por desistência do curso. Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, na mesma instituição e ano, a taxa de reprovação foi de 43,8%. Informações referentes a outros institutos da Usp também foram trazidas pela autora constatando que, no ano de 1995, o índice de aprovação em disciplinas de Cálculo no Instituto de Geociências foi de 35,1% (BARUFI, 1999).

Evidenciam-se, portanto, altos índices de reprovação na disciplina, em diversos cursos da instituição e por diversos motivos (rendimento na disciplina, ausências e desistências), mas que também podem estar relacionados à dificuldade de aprendizagem dos alunos que, diante do baixo rendimento, se ausentam das aulas e abandonam os cursos. Essa inferência é uma compreensão explicitada por nós diante do estudo trazido por Barufi (1999), mas também sustentada por nossa vivência como aluno e professor no Ensino Superior.

A pesquisa de doutorado de Garzella (2013), desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), trouxe como proposta analisar práticas pedagógicas de professores que lecionam a disciplina de Cálculo 1 e impactos dessa prática nos alunos, propondo identificar elementos que podem facilitar ou dificultar a relação dos alunos com o conteúdo da disciplina. O foco na disciplina de Cálculo é, assim como em outras pesquisas, justificado pelos altos índices de reprovação de alunos, considerando também aqueles que evadem do curso.

Na fase de produção de dados, Garzella (2013) realiza entrevistas com alunos e professores envolvidos com a disciplina e, posteriormente, pôde acompanhar um semestre de aulas em duas turmas de Cálculo 1, com autorização de professores anteriormente entrevistados. Durante o semestre de observação das aulas,

> Semanalmente, os alunos eram convidados para uma minientrevista sobre a aula da semana, abordando aspectos positivos e negativos de sua vivência na disciplina de Cálculo I. Aproximadamente uma vez ao mês, os professores eram procurados para falar sobre o planejamento, condições de ensino e resultados das turmas. (GARZELLA, 2013, p. 43).

Em sua análise, a autora nota uma influência da qualidade da mediação dos professores na aprendizagem dos alunos. Outro aspecto destacado é o modo como a disciplina é estruturada para ocorrer e que, para a autora, é constituída de “inúmeros aspectos que dificultam a aprendizagem dos alunos. Há um sistema preestabelecido ao qual os alunos precisam se adaptar, se inserir, como um ritual de passagem.” (GARZELLA, 2013, p. 43). Enfatiza que a dinâmica da disciplina não muda o cronograma para respeitar características específicas dos alunos, inclusive deixando pouco tempo para que os alunos explicitem suas dúvidas no decorrer da aula. Conforme Garzella, o modelo de aula era expositivo, o que desmotivava os alunos, que não eram capazes de acompanhar as explicações, fazer anotações, e copiar simultaneamente. Porém, argumenta que

> [...]o Professor A pareceu empenhado em promover a interação com os alunos, durante as aulas, perguntando-lhes, constantemente, se estavam acompanhando a sua explanação. No entanto, as condições estabelecidas para o cronograma da disciplina, pré-definindo os conteúdos a serem abordados em cada aula, dificultava a condução das aulas de maneira mais compassada, de forma a possibilitar uma maior participação dos alunos: isto tornava a aula maçante e desmotivadora [...] (GARZELLA, 2013, p.96).

Não apenas no trecho acima, mas em outros momentos da análise de dados, Garzella diz que a disposição do professor para o diálogo com os alunos, os aproximava e fazia com que os alunos se envolvessem nas aulas. Porém, o pouco tempo e a necessidade de cumprir um cronograma preestabelecido pela instituição, fazem com que o professor dê mais ênfase às aulas expositivas e deixe pouco tempo para o diálogo e às dúvidas dos alunos (GARZELLA, 2013).

> Além de aspectos da prática pedagógica do professor [...] os alunos, os auxiliares didáticos e os próprios professores entrevistados citam outros fatores determinantes para o [baixo] desempenho em Cálculo I. São fatores de natureza externa ao processo da disciplina e que envolvem a adaptação dos calouros à vida universitária, como a mudança de ambiente para os estudos, a saída da casa da família, os compromissos com a busca de moradia e o estabelecimento em uma nova cidade, a diferença no ritmo de estudos, a descontinuidade entre o conteúdo estudado no Ensino Médio e as exigências na universidade e, inclusive, o gerenciamento do tempo para uma nova rotina de estudos, muitas vezes combinada com as festas e celebrações pela entrada na universidade. (GARZELLA, 2013, p. 107)

A pesquisa de Garzella foi tema de uma matéria no *Jornal da Unicamp* e no site G1 – Globo (leia a matéria aqui), apresentando suas conclusões. No mesmo jornal (Jornal da Unicamp), é publicado um artigo com autoria de Marcelo Firer, Sérgio Tozoni e Alberto Saa, com indicação de subscrição de mais de 40 docentes e endossado pela Congregação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – IMECC – Unicamp, em que são feitas considerações sobre o destacado na matéria. Há argumentos que enfatizam o grande número de matrículas anuais de alunos para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral na instituição e os esforços dos organizadores dessas disciplinas em garantir a qualidade de ensino e o atendimento às especificidades desse universo heterogêneo de alunos, no que se refere à formação anterior e ao que almejam para seu futuro (FIRER; TOZONI; SAA, 2013).

Os autores argumentam que o índice médio de reprovação nas disciplinas de Cálculo da instituição, nos últimos 5 anos, foi de 28,5%, diferente da ênfase dada na matéria do jornal que apresentou dados presentes em Garzella (2013), em que foi destacado 77,5% de reprovação de alunos, o que pode levar a uma interpretação tendenciosa desses números (FIRER; TOZONI; SAA, 2013). Porém, compreendemos que tanto na pesquisa de Garzella (2013), como na matéria do jornal, referenciada por Firer, Tozoni e Saa (2013), está claramente sendo mencionado o período para o qual a autora da tese considerou este índice, se referindo ao período de 1997 à 2009, e a variação desta taxa.

> Optou-se pelo período de 1997 a 2009, com a intenção de contemplar uma faixa considerável de dados sobre a questão. A partir dessas consultas, foi possível identificar altas taxas de reprovação e desistência dos alunos na disciplina, variando entre 2,33% a 77,5%. (GARZELLA, 2013, p.2)

Firer, Tozoni e Saa (2013), justificam esses números de reprovados nas disciplinas de Cálculo, argumentando que há uma lacuna na formação prévia desses alunos. Diante disso, entendem que os professores de Cálculo da instituição buscam por modos de auxiliar os alunos em suas dificuldades, “o sucesso de duas turmas distintas que têm aulas com o mesmo professor, que recebem a mesma atenção e fazem a mesma prova é explicada por um único fator: a diferença da formação prévia dos alunos em matemática” (FIRER; TOZONI; SAA, 2013, n.p). Em outro trecho do artigo, os autores reforçam a ideia de que “as deformidades do ensino fundamental e médio em nosso país são tamanhas que, mesmo em uma universidade com a qualidade da Unicamp, precisamos lidar com este tipo de dificuldade.” (FIRER; TOZONI; SAA, 2013, n.p).

Outro obstáculo destacado é o calendário de matrícula de alunos ingressantes que, ao serem convocados ao longo do ano letivo, dificulta ainda mais o desempenho daqueles alunos que teriam dificuldades com a disciplina. Entendem que os professores das disciplinas utilizam instrumentos e estratégias para lidar com as dificuldades dos alunos, oferecendo horários de atendimento às dúvidas e um esquema de monitoria com participação de alunos da Pós-Graduação. Argumentam que “Também são adotadas, já faz tempo, estratégias que incluem listas de exercícios semanais e testes frequentes, estes últimos servindo aos alunos como sinalização das expectativas em relação a sua aprendizagem e um retorno sobre o andamento destas.” (FIRER; TOZONI; SAA, 2013, n.p).

Compreende-se que o artigo quis rebater a matéria que teve como tema a pesquisa de Garzella (2013) e que informações colocadas de modo precipitado, podem tendenciar opiniões daqueles que não acompanham, de fato, a situação. Porém, entendemos também que a pesquisa buscou evidenciar um cenário preocupante, como os próprios autores do artigo assumem, indicando um índice de reprovação médio de 28,5% dos alunos, havendo turmas em que esse índice chega à 77,5%. Outro ponto é o destaque negativo dado à aprendizagem de matemática na Educação Básica, no qual os autores denominam de *deformidades* e que, elas sim, são as grandes responsáveis pela não aprendizagem dos alunos em Cálculo. Os autores não apresentam mais detalhes sobre as afirmações feitas como, por exemplo, quais assuntos são pré-requisitos para os alunos frequentarem o Cálculo, o que e como deve ser ensinado nas disciplinas de Cálculo e o que nelas (nas disciplinas) deve ser enfatizado. Corroboramos a importância dada à disciplina e à aprendizagem de seu conteúdo, bem como, a cautela dos autores em prezar por um ensino de qualidade, mas ainda nos referindo à uma citação do artigo, entendemos que há uma tendência à necessidade de *enquadramento* dos estudantes aos moldes rígidos da instituição: “Como bem observado – acreditamos que de forma elogiosa pela autora da tese – ‘quem não for capaz de cumprir etapas estabelecidas pela coordenação da disciplina, provavelmente será reprovado.’” (FIRER; TOZONI; SAA, 2013, n.p).

Nota-se que há uma preocupação com a culpabilidade em relação aos índices apontados e à falta de compreensão dos assuntos pelos alunos, justificados com os maus resultados da Educação Básica, a própria estrutura do curso que permite a entrada de alunos ao longo do ano, ou da ementa da disciplina que, por envolver muitos assuntos, não oportuniza o diálogo. Em decorrência disso, não se questiona a metodologia assumida pelos professores que, em sua maioria, optam pela aula expositiva.

Outro trabalho cujo tema nos chamou a atenção foi a pesquisa de mestrado de Rafael (2017), que estuda as medidas tomadas por universidades públicas e privadas para reduzir os altos índices de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo. Recorrendo às informações fornecidas pelas secretarias das universidades, bem como, aos questionários respondidos por alunos e professores envolvidos com a disciplina, a autora mostra que estas instituições se valem de estratégias variadas para tentar diminuir esse problema. Algumas estratégias envolvem o uso de tecnologias e outras propõem disciplinas preparatórias e monitorias que, em alguns casos, seriam opcionais para alunos com dificuldade de aprendizagem na disciplina.

A autora aponta um fato interessante: nos casos em que a disciplina preparatória não é obrigatória, o número de alunos participantes não é expressivo. Sobre a opinião dos professores acerca destes processos de intervenção, a autora expõe que eles até concordam com a ação, porém, em alguns casos, discordam da maneira como ocorre. Em algumas situações, a participação dos alunos na disciplina preparatória lhes deu pontos (acréscimos à nota) e isso lhes possibilitou serem aprovados, o que não significa que o aluno tenha aprendido o assunto desenvolvido pela disciplina. Outro apontamento é com relação às disciplinas introdutórias que, apesar de serem consideradas importantes não têm resultado expressivo, pois os professores entendem que a carga horária é baixa para sanar as dificuldades que os alunos apresentam, algumas oriundas de sua formação na Educação Básica. Diante disso, entendem que estas medidas, da forma como ocorrem, são incapazes de solucionar o problema da aprendizagem na disciplina de Cálculo.

A pesquisa de doutorado de Dörr (2017), também foca o elevado número de reprovações e evasão na disciplina de Cálculo e a dificuldade de aprendizagem do assunto pelos alunos. Dörr (2017) analisa os registros escritos de atividades, envolvendo assuntos da disciplina, realizadas por alunos ingressantes dos cursos de Matemática da Universidade de Brasília, e propõe identificar aspectos que possam relacionar suas dificuldades, conceituais ou em processos de manipulações algébricas, com o processo de aprendizagem do conteúdo. Para isso, a autora opta pela criação de um Grupo de Estudos de Cálculo, no formato de um curso de extensão, com dois encontros semanais de aproximadamente duas horas e duração de um semestre. O grupo contou com a participação voluntária de 46 alunos que, durante o curso de graduação, vivenciaram alguma dificuldade em relação à aprendizagem. Foram considerados “alunos com dificuldades” aqueles que já haviam sido reprovados, por algum motivo, na disciplina.

Como resultado de sua investigação, Dörr (2017) compreende que boa parte das dificuldades dos alunos está associada aos assuntos da Matemática do Ensino Fundamental e que culminam em dificuldades para desenvolver as tarefas propostas no curso. Em suas conclusões de pesquisa, a autora afirma que os participantes “demonstram ter compreendido conceitos como Limites, conhecem as regras de derivação ou integração, porém falham nos processos operatórios mais simples” (DÖRR, 2017, p. 189). Entende que os estudantes são conscientes de seus obstáculos e manifestam desejo de superá-los. Porém, colocamos aqui em questão a influência dessas dificuldades na compreensão de conceitos mais avançados da matemática apresentada no Ensino Superior. Entendemos a importância da aplicação correta de técnicas e procedimentos para calcular e, fica claro aqui, que essas dificuldades dos alunos estão mais relacionadas às manipulações e processos algébricos do que com as ideias e conceitos do Cálculo. A questão é: o que é priorizado nas disciplinas de Cálculo? Há que se priorizar determinados processos em detrimento de compreensões de ideias e conceitos? São questionamentos que para nós vão se apresentando e que, conforme entendemos, merecem um cuidado.

As ações da universidade, dos professores e educadores matemáticos caminham na mesma direção apontada pelos alunos: percebe-se que estão cientes dessas dificuldades e demonstram preocupação com a situação. Voltam-se para a busca de alternativas visando auxiliar os alunos a superar tais obstáculos. Uma dessas alternativas é, por exemplo, a criação de um curso de Fundamentos de Matemática I, como o implantado na universidade da pesquisa de Dörr, no ano de 2016, para que os alunos ingressantes pudessem ser assistidos em suas dificuldades e sentirem-se capazes de acompanhar a disciplina de Cálculo (DÖRR, 2017). Porém, novamente nos indagamos para *o que se prioriza*, quando na apresentação dessas propostas de soluções.

Procurando conhecer um pouco mais sobre os trabalhos em Educação Matemática que focam o Cálculo, voltamo-nos para o *VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* – SIPEM, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM e realizado em novembro de 2018. Como o evento é organizado em Grupos de Trabalho e tem um grupo específico para o Ensino Superior, visitamos os anais do evento, considerando os trabalhos do *Grupo de Trabalho 4 (GT4), Educação Matemática no Ensino Superior*.

Voltamo-nos para esse evento por ser internacional, por congregar pesquisadores em Educação Matemática e por trazer trabalhos acerca do Cálculo que contribuem para o movimento que nos envolvemos, ao buscar clareza sobre a temática que nos interessa na pesquisa. Este movimento envolve também vivências deste pesquisador que, enquanto ser vivente, ou seja, aberto às possibilidades de vivenciar situações no Ensino Superior como aluno e como professor, compreendendo junto a outros alunos, colegas de turma e de anos posteriores, o que permite constituir uma visão da disciplina de Cálculo e que, na pesquisa, nos leva a dialogar com os textos visitados, procurando explicitar o compreendido.

Do VII SIPEM destacamos, inicialmente, o trabalho de Rodrigues e Neves (2018) que expõe os procedimentos utilizados pelos alunos ingressantes do curso de Matemática de uma universidade pública para resolver problemas de otimização. Para isso, é proposta uma tarefa (Figura 1) que envolve "problemas de aplicação dos conceitos de máximo e mínimo de funções de uma variável real" (RODRIGUES; NEVES, 2018, p.5).

As autoras referenciam estudos acadêmicos que trazem como aspectos negativos nos cursos de Cálculo o alto índice de reprovação e abandono dos alunos e a dificuldade da aprendizagem de assuntos da disciplina. Um deles é o de Dörr, Muniz e Neves (2016), que

> [...] em pesquisa realizada por meio da extensão universitária, em uma universidade pública do Distrito Federal, junto a estudantes de CDI, concluíram que eles apresentavam dificuldades em relação às operações e propriedades fundamentais dos números reais, frações, exponenciais, simplificações e fatoração de expressões algébricas. Os autores alertam que parte significativa dos estudantes, mesmo entre os já reprovados na disciplina, ainda apresentavam deficiências em cálculos algébricos, sinalizando que tópicos curriculares importantes dos ensinos fundamental e médio não foram compreendidos. (RODRIGUES; NEVES, 2018, p.4).

Compreende-se a importância conferida aos processos de manipulação algébrica e que são fatores que prejudicam a aprendizagem na disciplina de Cálculo. As autoras, referenciando Dörr, Munis e Neves (2016), dizem que os alunos têm dificuldades em assuntos como números reais, frações, exponenciais e manipulações envolvendo expressões algébricas, concluindo que não foram compreendidos quando tratados na Educação Básica (RODRIGUES; NEVES, 2018).

A proposta de tarefa das autoras foi realizada por um grupo de 40 alunos, conforme dissemos, recém ingressantes no curso de graduação em Matemática.

Figura 1- Atividade proposta aos alunos

Mostre que dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de área máxima:

a) Utilizando seus conhecimentos de Cálculo I.

b) Utilizando apenas seus conhecimentos do Ensino Médio.

c) Você conhece o Teorema da Desigualdade das Médias? Tente resolver o problema utilizando esse método, sabendo que:
Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ verifica-se a seguinte desigualdade:

$$m_{geométrica} \leq m_{aritmética}$$
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

Fonte: (RODRIGUES; NEVES, 2018, p. 7)

A análise das respostas dos participantes, leva Rodrigues e Neves (2018) a concluírem que eles não conseguiram solucionar os problemas, fosse utilizando procedimentos do Cálculo ou do Ensino Médio. A principal dificuldade encontrada é com relação aos conceitos e processos de manipulação algébrica. As autoras argumentam que para "além dos erros conceituais e erros algébricos, os estudantes têm dificuldades de entendimento de enunciados de questões aplicadas." (RODRIGUES; NEVES, 2018, p. 10). Compreendem que, mesmo os alunos que demonstravam certa compreensão acerca de determinado assunto, se deparam com obstáculos relacionados aos assuntos do Ensino Médio.

Bianchini, Lima e Gomes (2018), expõem parte de um estudo que envolve oitenta trabalhos apresentados no GT4 dos SIPEM de anos anteriores e que trazem como tema o ensino e a aprendizagem nas disciplinas de Cálculo, Álgebra Linear e Análise Matemática. No mapeamento, evidenciam-se algumas lacunas de estudos em tópicos referentes a estas disciplinas. Com relação ao Cálculo, tema predominante dos trabalhos apresentados (32% do total de cento e cinquenta e três trabalhos do GT-4), os autores apontam a inexistência de trabalhos que envolvem temas considerados importantes como sequências e séries, integrais múltiplas e suas mudanças de variáveis, funções vetoriais, derivadas direcionais e vetor gradiente, integrais de linhas e equações diferenciais. Embora sejam elencados pelos autores como importantes, no texto, não há argumentos para reafirmar tal posição.

Os autores entendem que, nos trabalhos do GT-4, predominam estudos que envolvem o Cálculo por se tratar de uma disciplina relevante aos alunos de cursos de Matemática, mas, também, para outras áreas da ciência (BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2018). Consideramos que essa predominância se dá em decorrência da reputação conferida à disciplina ao longo dos anos, que faz, inclusive, com que ela apareça em diversos trabalhos como uma disciplina com altos índices de reprovação e com assuntos que são difíceis de aprender.

Em sua dissertação de mestrado em Matemática, vinculada ao programa PROFMAT, Araújo (2020) propõe um estudo relacionando conceitos e aplicações desenvolvidos em disciplinas de Cálculo com possibilidades de que sejam explorados no Ensino Médio, entendendo que desenvolver estas ideias nesse ciclo de ensino, com uma metodologia que possibilite uma associação entre gráficos e suas funções, usando propriedades de derivada e integral, possa auxiliar na compreensão desses conceitos. Para

Araújo (2020, p.21), a ausência desses assuntos na Educação Básica "[...] torna o Cálculo uma disciplina "vilã" nos currículos superiores dos cursos de exatas ou outros onde ela é exigida, e como consequência a taxa de reprovação nela é altíssima". O autor propõe também um estudo sobre alguns conceitos que entende como *pré-requisitos* para o estudo do Cálculo, tais como: razão e proporção; expressões algébricas; equações e funções; e a geometrização de problemas e aplicações de limites de séries sem necessariamente se ater às definições formais de limite (ARAÚJO, 2020).

Trata-se de um estudo teórico e de uma proposta de implementação que apresenta tarefas que envolvem conceitos do Cálculo e, também, assuntos matemáticos entendidos como importantes para a compreensão do Cálculo. Nas conclusões, o autor explicita que

> Os objetivos atingidos foram a geometrização de problemas e as definições de derivada e integral sem a definição formal de limite, sendo que os tópicos de Cálculo foram produzidos baseados em demonstrações, visualizações geométricas e aplicações das propriedades, de modo a facilitar o entendimento por parte do aluno de ensino médio. (ARAÚJO, 2020, p. 108)

Como não há uma aplicação da proposta, o estudo não apresenta uma análise de resultados de uma implementação, o que, conforme entendemos, poderia corroborar com as inferências feitas na pesquisa.

Para a especificidade do contexto em que esta pesquisa é desenvolvida, consideraremos um trabalho de conclusão de curso de Graduação realizado por Pereira (2019), cuja proposta foi estudar os índices de permanência e continuidade de alunos que frequentaram as disciplinas de Cálculo em cursos de graduação da Unesp *campus* Guaratinguetá, entre os anos de 2015 e 2018. A pesquisa traz como principais apontamentos uma melhora neste índice, quando comparado com o de anos anteriores. No período proposto, o índice de aprovação nos cursos da disciplina foi de 61,87%. Outro aspecto é uma maior taxa de reprovação de alunos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física e Licenciatura em Matemática, comparados com os índices dos cursos de Engenharia. Segundo Pereira (2019, p. 77), "os cursos de engenharia apresentam maior índice de aprovação, com 64,74%, seguido pelo curso de matemática com 54%, e depois temos o curso de física com 49,58%".

A maior parte dos trabalhos para os quais nos voltamos dão destaque às dificuldades que alunos apresentam na aprendizagem do conteúdo da disciplina. Há a preocupação em propor reflexões para a diminuição dos obstáculos geradores dessa dificuldade. Parece ser um caminho natural a ser trilhado. Assim como também é pensar em outros modos de abordar os assuntos de Cálculo com recursos que antes não nos estavam à mão.

Dentre esses recursos que anteriormente não faziam parte das aulas de Matemática, estão as Tecnologias Digitais (TD) e, a partir deste ponto, voltamos nosso olhar para os trabalhos que as consideram como possibilidades para o ensino e a aprendizagem em Cálculo.

2.2 O Cálculo e as Tecnologias Digitais

Neste rol de trabalhos que tem como objeto de estudo a disciplina de Cálculo, temos aqueles que se voltam, de maneira específica, para os recursos tecnológicos, para as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação ou, simplesmente, para as Tecnologias Digitais (TD).

Fazendo uma busca no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, nos deparamos com diversos trabalhos cujo tema era Cálculo e as tecnologias. Para refinar a busca consideramos trabalhos realizados nos últimos vinte anos, no âmbito das ciências humanas, especificamente na área de Ensino. A partir da leitura dos resumos, elegemos seis trabalhos que são vinculados à Educação Matemática e que enfatizam as tecnologias como possibilidades para o ensino e a aprendizagem de assuntos da disciplina.

A pesquisa de doutorado de Jussara de Loyola Araújo (2002) analisa as discussões que ocorrem entre alunos da disciplina de Cálculo, quando estão com as tecnologias informáticas, mais especificamente com o aplicativo Maple, desenvolvendo atividades na perspectiva da Modelagem Matemática.

A autora destaca que o uso da tecnologia em atividades de Modelagem Matemática abriu outras possibilidades para que ocorram a investigação e a interação entre os sujeitos de sua pesquisa. Porém, faz a ressalva de que a utilização das tecnologias não é uma garantia de que isso ocorra. Destaca a necessidade de um “convite às investigações”, feito pelo próprio professor ou pelos colegas de turma, e que traz como possibilidade o diálogo, num movimento que a autora chama de *negociação de significado* (ARAUJO, 2002).

Avançando em suas considerações, a autora argumenta que

> [...] foi solicitado aos alunos que buscassem situações do cotidiano para serem estudadas, e que utilizassem, para isso, o conteúdo matemático e o computador, mas quando surgiu a possibilidade da constituição de cenários para investigação envolvendo essas situações do cotidiano, obstáculos foram colocados. (ARAÚJO, 2002, p. 161).

Segundo a autora, a interação entre seres humanos e tecnologias abriu possibilidades de investigação. Porém, isso não evitou os obstáculos de ver a matemática em contextos cotidianos. Uma justificativa para tal obstáculo pode ser a imagem que se tem da Matemática, como desvinculada das situações da realidade, levando à dificuldade de relacionar a Matemática da sala de aula com as atividades cotidianas. Esse modo de compreender a Matemática é decorrente da forma pela qual ela é tratada no ambiente escolar. Compreendemos que os apontamentos de Araújo (2002) vão ao encontro de uma prática de ensino da matemática que prioriza a transmissão de técnicas para efetuar cálculos, sem que ele (aluno) tenha a oportunidade de desenvolver compreensões que explicitem o significado desses assuntos que, tal qual entendemos, poderiam auxiliá-lo a ver a Matemática em diferentes ramos da vida.

Em sua dissertação de mestrado, Domenico (2006) volta-se para as dificuldades que alunos de cursos de Educação Superior apresentam com relação aos assuntos tratados em Cálculo, justificando que advém de um baixo aproveitamento dos estudos da matemática proposta nos ensinos fundamental e médio. Um dos fatores apontados pelo autor para a ocorrência dessa dificuldade é que anteriormente, no Ensino Médio, eram abordadas em aulas de matemática noções de limites e derivada e que, assim, " [...] os ingressantes nos cursos de Exatas e Tecnologia, ao se depararem com Cálculo Diferencial e Integral conheciam todos os fundamentos mínimos para um bom aproveitamento desse Programa de Aprendizagem." (DOMENICO, 2006, p. 21). Talvez a ideia de que propor noções prévias acerca desses assuntos possa auxiliar em sua compreensão. Porém, questionamos se a Educação Básica é o momento ideal para que essas ideias sejam propostas, visto que já possui suas especificidades. Embora o autor afirme tais contribuições, não traz estudos para embasar as compreensões expressas em sua pesquisa.

Avançando, o autor sugere o uso das tecnologias como alternativa para ajudar os alunos a superarem dificuldades com assuntos de Cálculo, de forma mais específica, o objeto de aprendizagem denominado *X-Linha*. Esse objeto é parte da plataforma de aprendizagem Eureka, utilizada à época em cursos da *Pontifícia Universidade Católica do Paraná* - PUCPR, e foi apresentado aos alunos como complementação ao estudo de assuntos da disciplina de Cálculo, por exemplo, no estudo de derivadas e máximos e mínimos de funções, favorecendo a interação entre os alunos e entre eles e o tutor da disciplina (DOMENICO, 2006). O autor salienta que essa interação é possível devido a plataforma possuir recursos comunicativos, tais como chats, correio eletrônico e fórum, em que o contato entre alunos e tutores pode se dar de formas síncronas e assíncronas.

O autor destaca a importância do professor para que o recurso se torne efetivamente uma ferramenta de aprendizagem para os alunos, podendo vir a complementar o que é trabalhado nas aulas. Domenico (2006) destaca o desconhecimento e a resistência dos docentes da disciplina de Cálculo em considerar o recurso para suas aulas, embora, durante a pesquisa, tenham afirmado a intenção de conhecê-lo.

Na análise da pesquisa o autor enfatiza que os alunos afirmavam pouco conhecer o aplicativo, pois não haviam sido estimulados por seus professores. Por outro lado, os professores argumentam encontrar dificuldades para tal estímulo sem que haja uma posterior “compensação”, por exemplo, revertendo em nota para alunos que fizessem uso da ferramenta. Porém, segundo entendem, trata-se de materiais e recursos que poderiam favorecer a compreensão do aluno, e isso, por si só, já deveria ser uma motivação (DOMENICO, 2006).

Compreende-se dos apontamentos feitos por Domenico (2006) que o uso da tecnologia proposta se trata de um complemento para as ações de ensino dos professores, um *recurso a mais*, e não parte de sua metodologia, ou mesmo, estratégia.

Em sua tese de doutoramento, Barbosa (2009) objetiva investigar como os sujeitos de sua pesquisa produzem conhecimento acerca dos assuntos *função composta* e *regra da cadeia*, da perspectiva do construto teórico *seres-humanos-com-mídias*. O grupo de alunos participantes constituiu um coletivo denominado *alunos-com-tecnologias* e desenvolveu atividades numa abordagem gráfica com o aplicativo *Winplot*. Nessa perspectiva, as tecnologias são entendidas como o que “[...] transformam o modo como o conhecimento é produzido, reorganizando a forma de interagir e pensar” (BARBOSA, 2009, p.6).

A autora destaca a produção de conhecimento nesse ambiente mediante o desenvolvimento das tarefas, ressaltando que o processo de visualização é potencializado pelas tecnologias, pois possibilitam a formulação de conjecturas, validadas ou refutadas, no entrelaçamento do que se mostrou nas representações gráficas e nas discussões entre os alunos. Conclui que as potencialidades das TIC auxiliam professores na proposta de tarefas envolvendo assuntos do Cálculo numa abordagem diferente daquela que se atém estritamente aos procedimentos algébricos e que pouco consideram a visualização. A visualização e as representações múltiplas são potencializadas pelo *Winplot* e podem se abrir em possibilidades para a produção de conhecimento dos alunos (BARBOSA, 2009).

Para a autora,

> A produção do conhecimento matemático ocorreu nas discussões com o parceiro e, fundamentalmente, no processo de interpretação individual, expresso na forma oral, na forma escrita, ou na ação de trabalhar com o computador. Esse processo individual não significa um indivíduo sozinho, mas imbricado de todo um coletivo que pensa junto com ele (BARBOSA, 2009, p.160).

Como *coletivo que pensa*, entende-se em Barbosa (2009), todos os envolvidos nesse ambiente, ou seja, os alunos, o professor e as tecnologias.

A autora destaca a importância de uma mudança de postura do professor, para que ele repense sua prática e sua função de educador, como de um facilitador da aprendizagem e não a de um transmissor de conhecimento. Ressalta, ainda, que sua pesquisa não se constitui em uma “receita pronta” para ser aplicada aos alunos de modo que eles venham a aprender os assuntos tratados na disciplina de Cálculo. Antes, é uma proposta que pode inspirar a elaboração de outras tarefas adequadas ao contexto específico no qual o professor está atuando (BARBOSA, 2009). Percebe-se o foco na compreensão das ideias relacionadas ao Cálculo e não, como mencionado pela autora, nos procedimentos e manipulações algébricas. Tira o foco do professor, tratado, por vezes, como detentor e transmissor de conhecimento, e foca no aluno, no sujeito, naquele que é capaz de desenvolver conhecimento nesse ambiente denominado de *coletivo que pensa*.

Na pesquisa de mestrado de Miquelino (2012), o autor se ateve a analisar como as tecnologias influenciam o desenvolvimento profissional de professores da disciplina de Cálculo em quatro Instituições de Ensino Superior da cidade de Uberaba, estado de Minas Gerais. Foram contatados 14 professores que ministram a disciplina e que aceitaram participar das entrevistas. A escolha por professores de Cálculo se deu em decorrência de ser ela uma disciplina presente em diversos cursos de graduação e em razão dos obstáculos que ela apresenta que, segundo o autor, são de cunho epistemológico e didático, que acarreta os altos índices de reprovação de alunos (MIQUELINO, 2012).

O foco desse trabalho está no professor, ou seja, em sua prática e desenvolvimento profissional pois, como entende o autor, quando se pensa numa mudança frente aos obstáculos anteriormente expostos, é preciso pensar na ação do professor.

> As transformações que são necessárias exigem uma participação mais efetiva dos professores – não há inovação no ensino, se não houver o envolvimento e

> o comprometimento dos docentes. Assim como, a prática da investigação e da atitude reflexiva, a autonomia são elementos imprescindíveis para a aprendizagem e o desenvolvimento profissional. (MIQUELINO, 2012, p. 104).

No diálogo com os professores, Miquelino (2012) apresenta alguns motivos apontados por eles para se especializarem no uso das tecnologias, de modo mais específico, para o ensino de assuntos do Cálculo. Os professores entendem que elas (as tecnologias) são facilitadoras do processo de aprendizagem e que possuem potencial para estimular o desenvolvimento de habilidades como a de criação de associações, estabelecimento de comparações e análise e que possuem potencial de estimular um maior envolvimento por parte dos alunos, aumentando a participação e colaboração.

Outros apontamentos caminham na direção de enfatizar que as tecnologias potencializam, sobretudo, a visualização de conceitos da disciplina, pois permitem que assuntos do Cálculo sejam explorados em “seus aspectos, geométrico e dinâmico[...] [permitindo] [...] simular e explorar situações, fazer conjecturas, refutá-las ou validá-las; estimulam a criatividade e o interesse pelo estudo da disciplina.” (MIQUELINO, 2012, p. 106). O autor destaca, ainda, que os professores entrevistados mencionam o uso do *Datashow*, evidenciando que eles utilizam o aplicativo em suas aulas em conjunto com um projetor, ou seja, para expor determinada maneira de resolver um exercício ou para apresentar algum assunto da disciplina em uma abordagem denominada pelo autor de *instrucionista*.

O autor conclui que as tecnologias fazem parte do desenvolvimento profissional dos professores quando estes consideram sua importância para a aprendizagem de assuntos da disciplina e contribui para a prática educativa à medida que põe sob reflexão os métodos utilizados para ensinar com elas (MIQUELINO, 2012).

Compreende-se que a concepção de uso das tecnologias por parte dos professores pode estar vinculada à uma provável acomodação dos modos tradicionais de ensinar. Projetar o material da aula em Datashow, mesmo que seja de um aplicativo matemático, acaba por limitar a experiência do aluno com o assunto, isso sem falar na simples transposição de ideias em forma de textos e imagens estáticas de livros didáticos para uma apresentação, por exemplo.

Miranda (2018) desenvolve sua pesquisa com alunos de engenharia visando analisar suas compreensões sobre integral dupla. Para a pesquisa o assunto é explorado a partir de atividades desenvolvidas em um ambiente com a tecnologia e a representação figural por meio de impressão 3D. Para as tarefas, a autora usa um applet do aplicativo GeoGebra para obter as representações gráficas dos sólidos impressos em 3D, denominadas na pesquisa de esculturas matemáticas.

A autora destaca que a proposta possui potencial para desenvolver importantes concepções sobre integral dupla como volume de um sólido e, também, concepções sobre os significados do cálculo da primeira e segunda integral (MIRANDA, 2018). Considera, ainda, o desenvolvimento de metáforas por parte dos participantes, como a associação dos gráficos de funções com objetos que já conhecem, por exemplo, *pista de skate* e *rampa*. Outras metáforas como *risco, linha,* para se referir à reta; *espaçada,* para se referir a planos; *onda*, para se referir às representações das funções seno e cosseno.

Em sua tese de doutorado, Backendorf (2020) traz como proposta de investigação, analisar, da perspectiva da teoria da abstração reflexionante de Jean Piaget, o modo pelo qual ocorre a compreensão do conceito de integral dupla, trazendo como alternativa o uso de um applet do GeoGebra. Segundo essa teoria, é por meio das experiências que o sujeito conhece o mundo, no sentido de que o conhecimento é construído a partir da interação sujeito e objeto (BACKENDORF, 2020).

Para atingir os objetivos da pesquisa, Backendorf (2020) se propôs a entrevistar 7 alunos de Engenharia cursantes da disciplina de Cálculo 1 da UNIVATES, campus Lajeado/RS. Os alunos foram entrevistados enquanto desenvolviam uma tarefa proposta para esse estudo e que envolveu o assunto de integral dupla e o uso de uma construção já pronta (applet) no GeoGebra. Esse applet permitia inserir funções que representam determinado sólido (que era projetado pelo aplicativo na tela do dispositivo) e encontrar o valor referente ao seu volume (aproximado) como resultado de uma soma dos volumes dos prismas retangulares construídos a partir de sua base.

Na análise dos dados, a autora conclui que o uso do aplicativo contribuiu para o desenvolvimento de conceitos matemáticos e que, essa compreensão, foi favorecida pela interação envolvendo os estudantes e o applet, sem deixar de considerar como importante a intervenção da pesquisadora durante o processo, mediando e planejando a tarefa (BACKENDORF, 2020).

Esses trabalhos nos permitem ver que se mantém a preocupação com os altos índices de evasão e reprovação na disciplina de Cálculo. As principais causas explicitadas estão relacionadas à dificuldade de aprendizagem em assuntos da disciplina, sobretudo, inferindo que tais dificuldades estão relacionadas à defasagem na aprendizagem de assuntos matemáticos da Educação Básica. Com as afirmações apresentadas nesses trabalhos, compreende-se que tais dificuldades podem estar vinculadas à manipulação e aplicação de regras e técnicas para calcular. Compreendemos que há uma tendência para que se priorize as manipulações para calcular em detrimento dos significados a serem desenvolvidos em Cálculo.

Outro fator de destaque é dado às opções metodológicas para o ensino de assuntos do Cálculo e a ênfase que se dá ao tratamento algébrico em detrimento dos aspectos geométricos. Pesquisadores se voltam para a temática buscando alternativas para o ensino que diminuam as dificuldades dos alunos. Dentre essas, evidencia-se um recurso: as Tecnologias Digitais.

Nota-se pelos trabalhos que há divergências sobre o uso das tecnologias para ensinar e aprender. Em alguns casos, esse uso ainda está muito relacionado com práticas tradicionais de ensino, em que o professor é o detentor do conhecimento e deve transmiti-lo, "depositá-lo" no aluno, como no caso em que se usa o Datashow e slides para *expor* ideias ou mostrar aos alunos o modo como ele, professor, resolveu a situação. Esse modo de uso determina o que deve ou não ser visto e compreendido. Em outros casos, há a criação de uma plataforma digital para que o aluno tenha acesso ao material da disciplina em sua casa. Outras pesquisas avançam para uma concepção de uso da tecnologia que favoreça maior interação do aluno, e possibilite fazer exploração e investigação. São concepções distintas de uso das tecnologias e que nos provocam a pensar até que ponto as tecnologias estão sendo utilizadas para se ensinar e aprender? Até que ponto elas auxiliam nesses processos? Poderiam ser apenas um outro modo para exposição e reprodução de um método de ensino, dito tradicional? O que se mostra é que há um modo de ensinar que já vem sendo utilizado há anos e que, pelos trabalhos apresentados, vê-se a manutenção de diversos obstáculos à aprendizagem.

Esse modo pelo qual as pesquisas vão trazendo as tecnologias, para favorecer a aprendizagem em Cálculo, nos faz interessados em conhecer uma tecnologia específica, a Realidade Aumentada. A seguir, trazemos alguns elementos que nos permitam dizer dessa tecnologia.

2.3 Realidade Aumentada e o Cálculo

Considerando o foco desta investigação, voltamo-nos para trabalhos que tematizassem o ensino de Cálculo com a Realidade Aumentada. Os trabalhos analisados nos permitem explicitar alguns temas e questões que neles são enfatizados e que são relevantes para compreender a região de inquérito da nossa pesquisa.

O primeiro trabalho que trazemos, expõe atividades desenvolvidas com alunos do Ensino Médio para tratar assuntos de Geometria Espacial. Nele, interpretamos a importância da visualização, que também será destacada no ensino de Cálculo.

Trata-se da dissertação de mestrado de Valentim (2017), que investiga um aplicativo de Realidade Aumentada com o aplicativo NIZ, usado em computadores. Com ele, os alunos observam sólidos geométricos e têm a possibilidade de manipulá-los. As atividades foram desenvolvidas com 60 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular de Duque de Caxias, no Rio de Janeiro.

O autor justifica a opção pelo NIZ devido sua praticidade de uso e por entender que ele permite realizar explorações necessárias ao desenvolvimento de ideias tratadas na disciplina de Geometria Espacial. Trata-se de um aplicativo que usa marcadores. Para a pesquisa foi proposta uma atividade de criação de um cubo cujas faces têm marcadores diferentes. A Figura 2 apresenta o cubo com os marcadores construídos (VALENTIM, 2017).

Figura 2 - Cubo de marcadores

Fonte: Valentim (2017, p.31)

Quando a câmera do dispositivo capta o marcador de uma das faces do cubo, o objeto digital aparece na tela, como o mostrado na Figura 3. É possível rotacionar, diminuir e ampliar os objetos digitais clicando em botões dispostos na tela do computador.

Figura 3 - Sólidos geométricos gerados pelo NIZ

Fonte: (VALENTIM, 2017, p. 32)

Em suas conclusões, o autor argumenta que

> [...] um aluno se queixou que tinha problemas em visualizar as imagens desenhadas no método tradicional. Esse aluno mesmo tinha dificuldade em visualizar a figura em três dimensões pois as via como algo “chapado” em duas dimensões como estavam desenhadas em uma superfície plana. (VALENTIM, 2017, p. 39).

Segundo o que interpreta Valentim (2017), o aluno, ao realizar manipulações com o aplicativo, identifica uma diferença entre visualizar o sólido desenhado no papel “chapado” (ou visto na tela do computador) e a projeção em Realidade Aumentada que é tridimensional e permite que o aluno, ao mover o cubo, veja as outras faces do objeto. Destaca, ainda, o envolvimento dos alunos nas atividades propostas (VALENTIM, 2017).

Embora seja um aplicativo que possibilita uma experiência em Realidade Aumentada, entendemos que seu uso em um computador limita a experiência do usuário, quando comparado com outras opções que podem ser utilizadas em smartphones, por exemplo.

A pesquisa de Moussa (2016) tem como objetivo analisar aspectos da visualização favorecidos pela construção de gráficos tridimensionais. Para tanto, usou um aplicativo de Realidade Aumentada desenvolvido para smartphone e tablet com sistema operacional Android. Para desenvolver o aplicativo *GráficosRA*, o autor utilizou o *Android Studio* e a biblioteca *ARToolKit*, com o recurso de marcadores. Ou seja, quando a câmera do dispositivo capta um marcador (um código previamente gerado e impresso em papel), o objeto digital aparece na tela, como se estivesse projetado no ambiente físico do usuário.

Um exemplo de uso do aplicativo em Moussa (2016) está representado na Figura 4. Ao Fundo, podemos observar uma folha com o marcador e, na cor verde, o gráfico tridimensional *projetado* e seu posicionamento no espaço com os eixos x, y e z.

Figura 4 - Gráfico de uma das atividades propostas na pesquisa

Fonte: (MOUSSA, 2016, p. 44)

O autor relata que o GráficosRA foi eficaz para o objetivo determinado: explorar a visualização tridimensional de gráficos, conforme relato dos professores e alunos que o utilizaram. Um dos professores diz que o aplicativo auxiliou os alunos na resolução dos exercícios, mas, destaca o autor, algumas dificuldades foram evidenciadas e alguns cuidados são necessários. Por exemplo, o aplicativo apresentou problemas em alguns dispositivos devido às versões do Android, que não suportavam os gráficos em RA. Relativamente aos marcadores, é necessário cuidado, pois se o marcador possuir simetria em seu formato, o objeto pode ser reposicionado pelo aplicativo durante a exploração e dificultar a percepção tridimensional (MOUSSA, 2016).

Em um artigo publicado no VI Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2017), Pereira *et al.* (2017) apresentam, como possibilidade para o ensino de Cálculo, um aplicativo para a visualização de superfícies quádricas - o EducAR Quadrics. Conforme os autores, esse aplicativo possibilita mover tanto o marcador como o próprio dispositivo, permitindo analisar as superfícies projetadas que, pelo movimento, vão sendo vistas de diferentes perspectivas. É possível, também, pela modificação de alguns parâmetros, alterar a superfície projetada.

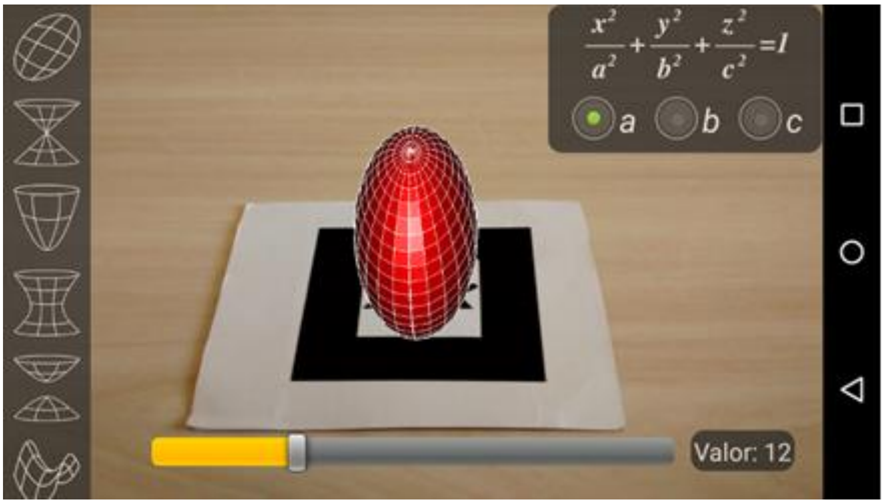
O estudo contou com a participação de 37 alunos de diversos cursos de graduação na área de ciências exatas do Instituto de Ciências Exatas e Engenharias da Universidade

Federal de Juiz de Fora. Os participantes já haviam cursado a disciplina de Cálculo 2 em seus respectivos cursos.

Porém, antes da aplicação das atividades, os autores realizaram um estudo piloto com 32 alunos da mesma instituição, o que permitiu correções no aplicativo que seria utilizado na pesquisa. Após apontamentos dos participantes do estudo piloto, os autores entenderam que para aperfeiçoar o recurso era preciso inserir, por exemplo, a possibilidade de o usuário realizar modificações nos parâmetros da função que estudavam.

Após o desenvolvimento das tarefas, os autores relatam que os participantes consideraram que o aplicativo contribui para a aprendizagem de assuntos do Cálculo e que é de fácil manuseio. A possibilidade de alterar valores dos parâmetros e ver a mudança do gráfico em tempo real, foi um aspecto destacado como positivo, por facilitar a exploração, o que não é um recurso disponível na maior parte dos aplicativos educativos que permitem explorar em RA (PEREIRA *et al.*, 2017).

Figura 5 - Tela do smartphone durante o uso do *EducAR* - *Quadrics*



Fonte: (PEREIRA *et al.*, 2017, p. 598)

No entanto, os autores ressaltam que, apesar da avaliação positiva, os alunos destacaram o que consideraram uma limitação, pois o aplicativo restringia a representação de algumas funções. Ou seja, não era possível inserir uma equação e ver sua representação gráfica, como acontece no GeoGebra Calculadora 3D. A impossibilidade de rotacionar a superfície sobre o marcador, também foi destacada como um aspecto desfavorável.

A pesquisa de Schaun (2019), investigou como alunos da disciplina de Cálculo da Universidade Federal de Pelotas compreendem conceitos de superfícies quádricas com o uso da Realidade Aumentada para visualizar objetos tridimensionais. A autora realizou com os alunos uma tarefa que foi preparada e proposta por ela, usando aplicativos de RA. Os dados dessa pesquisa se constituíram da folha de resposta dos alunos participantes e um questionário respondido por eles. Houve ainda entrevistas com os professores das turmas para saber aspectos de sua formação e como consideram o uso de tecnologias na disciplina de Cálculo.

A autora optou pelo uso do *MateAR*, aplicativo desenvolvido pelo Instituto Tecnológico e de Estudos Superiores de Monterrey no México, que usa marcadores para projetar via tela dos smartphones (com o sistema operacional *Android*) objetos matemáticos, tais como: “elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos e um sétimo marcador, que necessita da descrição algébrica da quádrica que se deseja projetar, possibilitando, por exemplo, a variação de eixos.” (SCHAUN, 2019, p.40).

Inicialmente a pesquisadora acompanhou aulas em duas turmas de disciplinas de Cálculo da Universidade em que a pesquisa ocorreu. Isso a auxiliou na elaboração da tarefa que, posteriormente, foi realizada com os estudantes. Ela destaca a dificuldade que encontrou relativamente a colaboração dos professores das turmas, pois muitos não estavam dispostos a permitir que suas turmas fizessem parte desse estudo. Desse modo, a tarefa foi desenvolvida com apenas duas turmas (SCHAUN, 2019).

Em suas conclusões, Schaun (2019) argumenta que o uso do aplicativo auxiliou estudantes na compreensão de gráficos tridimensionais relacionados às características de superfícies quádricas, assim como, proporcionou uma mudança na dinâmica da sala de aula, uma vez que houve maior disposição e participação dos alunos na atividade e uma mudança de postura do professor, que acompanhou o desenvolvimento da proposta.

A pesquisa de mestrado de Schuster (2020), traz como proposta investigar como ela, enquanto professora e pesquisadora, constitui conhecimento matemático ao estar com a tecnologia de realidade aumentada. No decorrer da pesquisa, Schuster fez gravações de vídeos de diferentes momentos, incluindo os de seus estudos quando participou de um curso de extensão: *Cyberformação com professores de matemática: o uso de Tecnologias de Realidade Aumentada*, oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Esse curso teve duração de 40 horas, distribuídas entre encontros presenciais, leituras, planejamento de uma tarefa e seu desenvolvimento com alunos da Educação Básica. Os participantes tiveram contato com o programa Blender e o aplicativo AndAR. Porém, Schuster também relata que fez uso, em seus estudos, do aplicativo GeoGebra Calculadora 3D. Constituíram-se dados da pesquisa os registros das

> [...] anotações da pesquisadora/professora em diferentes momentos (no curso de extensão, no planejamento individual e coletivo da atividade, nas orientações com o seu orientador e conversas com o grupo de pesquisa), nas quais foram registradas informações, dúvidas e atitudes consideradas importantes e que pudessem responder à pergunta diretriz da investigação [...]; gravações de áudio e vídeo, pois armazenam as falas e as imagens importantes para a análise; e-mails; e conversas através do aplicativo WhatsApp, as quais também serviram para a produção de dados, principalmente durante as discussões em grupo e com o grupo de pesquisa. (SCHUSTER, 2020, p. 59)

Como resultado de seu movimento de autoanálise da experiência vivida em seus estudos envolvendo assuntos da matemática e a RA, Schuster (2020) compreende que pôde constituir conhecimento: Com-Holográficos; pela Oralidade-com-TD de RA; e Com-o-Cybercorpo, da perspectiva do corpo-próprio-com-TD de RA. Entende que, diante das possibilidades que lhes foram abertas pela RA, constituiu conhecimento

> [...] pela maneira que a professora/pesquisadora se transforma ao estar no contexto de RA, se materializando com os holográficos; ao conversar consigo mesma e com a TD de RA, trabalhando e pensando com a TD de RA maneiras para resolver problemas que foram acontecendo naquele contexto específico, criado pela RA, propiciando assim uma aprendizagem situada; e por meio do seu movimento corpóreo ao estar nesse ambiente, por exemplo, caminhando em torno dos holográficos ali projetados e, também, utilizando-se desses movimentos para que pudesse resolver as questões que fossem surgindo naquele contexto, assim, evidenciando o ato de saber-fazer-com-TD de RA. (SCHUSTER, 2020, p. 108).

Dentre os assuntos explorados pela autora em seus estudos, estão: pontos de máximos, mínimos e pontos de sela; curvas de nível; e domínio e imagem de funções de duas variáveis.

Da perspectiva de uma Cyberformação com a RA, Schuster (2020) se envolve num movimento em que lhe é possível pensar-com a RA. Dessa perspectiva, a RA é mais do que um modo ágil e fácil para desempenhar uma tarefa. Ela (a RA) abre possibilidades para que se pense *com* ela, faz parte do próprio movimento de pensar do sujeito. Isso permite que a autora vá constituindo conhecimento com os *holográficos*, movendo-se para explorá-los e explicitando suas compreensões.

Nosso movimento para compreender estudos realizados, possibilitou conhecer algumas experiências de ensino de matemática com a RA. Mostra-se que os aplicativos apresentam diferentes características e permitem tratar aspectos distintos do ensino de matemática, realizando exploração com a RA. Pelo que enfatizam os autores, os aplicativos de RA contribuem para explorar a visualização, uma característica importante à compreensão matemática. No entanto, por ser uma tecnologia recente em termos de discussão para o ensino, percebe-se que ainda há um longo caminho a percorrer e vários obstáculos a serem vencidos, como descreve Moussa (2016) ao se deparar com problemas no uso dos marcadores para o aplicativo GráficosRA.

Esses obstáculos vão sendo identificados no uso dos aplicativos e, como entendemos, vão sendo ultrapassados pelos desenvolvedores ao levarem em consideração as pesquisas que estão sendo desenvolvidas e os avanços das tecnologias, que vão nos *colocando à mão* outras possibilidades. O uso de marcadores, por exemplo, já vem sendo substituído por dispositivos que são capazes de reconhecer superfícies planas no ambiente físico do usuário. Com isso, aplicativos como o GeoGebra, permitem que o usuário *veja* os objetos digitais em sincronia com os do espaço físico em que está, como se estivesse em cima de uma mesa, por exemplo.

Compreende-se que a Realidade Aumentada solicita de nós (sujeito vivente que somos) um *modo* distinto de lidar com as tecnologias que, apesar das limitações que os aplicativos ainda possuem, merece estudo mais detalhado para que se evidencie as possibilidades que se abrem ao trabalho do professor e, à constituição de conhecimento do professor e do aluno, nesta pesquisa, de modo específico, acerca do ensino de Cálculo.

Desse modo, ao visitar estudos já realizados, vamos compreendendo o *lugar* desta pesquisa no âmbito da Educação Matemática. Ela, nos permitiu direcionar nosso olhar (enquanto objetivo de pesquisa) e entender que ainda há muito a ser compreendido acerca da constituição de conhecimento em Cálculo. Nesta pesquisa, buscamos compreensões acerca dos *modos pelos quais* alunos do curso de Licenciatura em Matemática constituem conhecimento ao fazerem explorações com aplicativo de RA, em uma perspectiva fenomenológica, que considera a percepção o primado do conhecimento.

3 REALIDADE AUMENTADA: EXPLICITANDO COMPREENSÕES

Nesta seção, iremos apresentar o conceito de Realidade Aumentada (RA) que, na maioria de nossas leituras, vem acompanhado de uma comparação com o de Realidade Virtual. Trata-se de uma tecnologia em constante desenvolvimento, o que faz com que seu conceito e modos de utilização sejam revisitados com certa frequência. Um exemplo disso é o uso de smartphones, tablets e outros dispositivos tecnológicos móveis que, recentemente, tomaram conta de nossas rotinas diárias, fazendo parte de diversas de nossas tarefas e que passaram a possibilitar outros modos de imersão a serem experienciados/vividos pelo(a) usuário/pessoa.

Assim, em nossa exposição, traremos algumas situações nas quais se pode ver sua utilização e expor o modo como a RA vem sendo compreendida pelos autores lidos. Em seguida, propomos um olhar que se volte para aspectos filosóficos que envolvem o tema pois, ao assumir nesta pesquisa a postura fenomenológica, entendemos que os termos *realidade aumentada* e *virtual* merecem nossa atenção. De que realidade dizem esses conceitos, senão da realidade vivida por nós, sujeitos sempre abertos às possibilidades de vivenciar as coisas do/no mundo?

3.1 O significado atribuído à tecnologia Realidade Aumentada

O conceito de Realidade Aumentada não é algo tão novo como alguns podem pensar. Trata-se de uma tecnologia que vem ganhando avanços com relação aos recursos e formas de acesso que, atualmente, se destacam nos negócios, no entretenimento, e se tornando cada vez mais presente em diversas áreas e no dia a dia.

Segundo Cláudio Kirner, os conceitos relacionados à Realidade Aumentada (RA) e à Realidade Virtual (RV) surgiram no início da década de 60 e, em decorrência dos constantes avanços tecnológicos, sofreram algumas modificações (KIRNER, 2011).

Para o autor, a RV

> [...] é uma interface computacional que permite ao usuário interagir, em tempo real, em um espaço tridimensional gerado por computador, usando seus sentidos, através de dispositivos especiais.
>
> O usuário pode perceber o mundo virtual, através de uma janela constituída pela tela do monitor ou pela tela de projeção, ou ser inserido no mundo virtual [...] ou de salas com multiprojeção (cavernas) e dispositivos de interação. (KIRNER, 2011, p. 31).

A definição de RV apresentada por Kirner em 2011, propõe que o usuário desse sistema pode *participar* e *perceber* o *mundo*, denominado pelo autor de *virtual*, de diferentes formas: pode utilizar a tela de um computador; pode voltar-se para uma tela de projeção; pode ser imerso em uma caverna de multiprojeção; pode utilizar equipamentos multissensoriais, como óculos de projeção e equipamentos que podem captar os movimentos de seu corpo e reproduzi-los no *mundo virtual*. Assim, para que a pessoa tenha uma experiência com esse conteúdo digitalizado, é necessário utilizar equipamentos relacionados às tecnologias informáticas, permitindo com que ela (a pessoa) sinta-se imersa nesse *ambiente* informacional, denominado na área da informática de *virtual*.

Ao avançarmos em nossos estudos, considerando também nossa vivência enquanto sujeitos encarnados no mundo da vida, compreendemos que há o entendimento de que, o usuário de um computador, por exemplo, já está participando desse ambiente e se empenhando nas possibilidades que a ele (usuário) se abrem, assim como também o é possível aos usuários de óculos de projeção em RV e equipamentos multissensoriais. Mas, o que se modifica entre as duas experiências possíveis com o ambiente virtual? A experiência *imersiva* de um usuário com o computador nesse ambiente é a mesma daquela em que o usuário faz uso de óculos e sensores que reconhecem o movimento de seu corpo e lhe permitem mover-se nesse ambiente? São questões que vão se colocando e que, mais adiante, pretendemos retomar.

Por ora, vamos retomar a RV e a RA. Podemos entender a RV como uma imersão do usuário em um ambiente desenvolvido por meio das tecnologias informáticas, em que há a interação dele (o usuário) com o que lhe vai sendo apresentado em forma de conteúdo digital.

Já em relação à RA, Kirner diz que ela

> [...] é uma interface baseada na sobreposição de informações virtuais geradas por computador (envolvendo imagens estáticas e dinâmicas, sons espaciais e sensações hápticas) com o ambiente físico do usuário, percebida através de dispositivos tecnológicos e usando as interações naturais do usuário, no mundo físico (KIRNER, 2011, p. 32).

Dependendo do grau de imersão do usuário, determinado sobretudo pelo equipamento que utiliza, a RV permite que ele (o usuário) se veja imerso em um ambiente totalmente artificial / digital, no qual ele pode até mesmo perder a presença dos objetos materiais que estão a sua volta, no mundo físico. Na RA, compreendemos que a proposta é de que o usuário não perca a visão do espaço físico em que está, mas que, com um dispositivo tecnológico seja possível "adicionar" a este espaço elementos / objetos digitais. A RA não está separada da realidade do mundo físico (ou da realidade mundana) e permite ao sujeito vivenciar os objetos digitais de outra maneira. Com isso, o usuário pode visualizar os elementos digitais e os elementos do mundo físico como se coexistissem no mesmo ambiente. Essa é a principal característica da RA, o sentimento de coexistência de objetos físicos e digitais.

Ronald T. Azuma (1997), diz que o conceito de RA diverge entre autores da área. Para alguns, a tecnologia RA apenas se remete ao uso de Head-Mounted Displays - HMD. Os HMDs são equipamentos no formato de capacetes, com os quais o usuário pode experienciar a tecnologia RA. Com os avanços tecnológicos, esse dispositivo vem sendo aperfeiçoado e, atualmente, trata-se do que há de mais moderno quando o assunto é RA e RV. Podemos ver um exemplo de HMD na Figura 6.

Figura 6 - Utilização do HMD *HoloLens 2*

Fonte: Site da empresa Microsoft.

Os óculos de RA *HoloLens 2* são desenvolvidos pela empresa Microsoft. Utilizando esse dispositivo, o usuário é lançado no ambiente que a empresa chama de Realidade Misturada ou Mista, assim nomeado pela possibilidade de misturar a RV e a RA. Em vídeos do canal *Microsoft Developer* na plataforma YouTube, um deles chamado *Intro to Building Apps for HoloLens 2 Using Unity and Mixed Reality Toolkit - BRK1003*, é possível acompanhar uma apresentação do dispositivo, com algumas de suas características e modos de utilização. Em outro vídeo, há pessoas que estão no palco onde ocorre a apresentação e, por utilizarem os óculos, elas veem os mesmos objetos digitalizados, uma vez que os seus dispositivos estão conectados e projetam um mesmo *cenário*.

Nas lentes dos óculos são exibidas informações digitais, sendo possível a interação do usuário com esse conteúdo em sincronia com os objetos físicos. A interação com os recursos é possível por meio de comandos de voz, *clicando* nos objetos como se eles fossem botões, arrastando e soltando, aumentando e diminuindo, e por meio de um recurso que reconhece o movimento dos olhos do usuário.

Figura 7 – Usuária do *Hololens 2* movendo controles digitalizados

Fonte: Canal Microsoft Developer: **https://www.youtube.com/watch?v=P8og3nC5FaQ**

Com o *Hololens 2*, o usuário pode utilizar recursos já produzidos pela empresa ou criar as próprias experiências imersivas, através de um serviço adicional chamado *Microsoft Azure*[4].

Porém, para Azuma (1997), não devemos nos restringir ao uso desses equipamentos para definir a RA. Para o autor, o conceito que envolve a aplicação desta tecnologia deve ser caracterizado por um sistema que apresenta a combinação de três importantes características:

1- Reunir *real* e *virtual* (conteúdo digital);

2 - Proporcionar a *interação em tempo real*;

3 - Apresentar registro em *3 dimensões* (3D).

Tais características nos permitem entender que não basta que um sistema possibilite ver a sobreposição de imagens digitais no espaço físico para dizer que se trata de RA; filmes como Jurassic Park, Space Jam, dentre outros, não possuem a possibilidade de interação, por exemplo, o que não os caracteriza como um sistema de RA (AZUMA, 1997), mesmo que tenham reunido elementos digitalizados com elementos do espaço físico. Corroboramos com a concepção de RA que Azuma propõe e entendemos que o

[4] Mais informações no site https://www.microsoft.com/en-us/p/hololens-2/91pnzzznzwcp?activetab=pivot%3aoverviewtab

aplicativo GeoGebra AR atende às características apresentadas pelo autor para que seja denominado de RA.

Neste momento da tese, retomamos questões há pouco levantadas, com as quais somos instigados a pensar nas semelhanças e diferenças entre experiências que envolvem diferentes tipos de dispositivos e tecnologias, tais como, computadores, smartphones, tablets e HMD, bem como, diferentes aplicativos e mídias, entendendo que essas variações permitem distintas *sensações* de *imersão*.

Para Janet Horowitz Murray (2003), no livro *Hamlet on the Holodeck: the future of narrative in cyberspace*, a *imersão* recebe um capítulo exclusivo da obra e é tratada em analogia à experiência física de estarmos submersos, imergir na água, num ambiente estranho, porém, com uma sensação agradável. Numa analogia com a experiência de mergulho no fundo do mar, por exemplo, mesmo utilizando óculos, equipamentos para respiração e acompanhado de um monitor, trata-se de uma experiência estranha por natureza. No entanto, não deixa de ser uma experiência prazerosa, à medida em que vamos nos familiarizando com o ambiente, o estranhamento vai dando lugar ao prazer. A leitura de um livro, por exemplo, pode nos permitir uma experiência imersiva quando dizemos que *mergulhamos* na história, o que significa que nos envolvemos com a narrativa, com os personagens, ambientes, situações e temos "a sensação de estarmos envolvidos por uma realidade completamente estranha, tão diferente quanto a água e o ar, que se apodera de toda a nossa atenção, de todo o nosso sistema sensorial." (MURRAY, 2003, p.102). Voltando nossa atenção para o lido, entendemos que *somos* no mundo da vida.

A leitura de Murray (2003) nos permite compreender que há diferenças nos tipos de *imersões* vividas nesses contextos. Fazendo uma comparação entre o processo de leitura de um livro e as possibilidades abertas ao sujeito pelos recursos tecnológicos, tais como computadores e, por exemplo, as infindas interações que a internet possibilita, a autora argumenta que, com a tecnologia dos computadores e acesso ao ambiente virtual, abre-se a possibilidade de uma intensificação na participação e imersão dos usuários. Tal como Murray (2003), entendemos que os recursos tecnológicos podem tornar essas experiências mais participativas e envolventes, por oferecerem possibilidades diversas de narrativas e, sobretudo, por requererem nossa participação e exigirem diferentes sentidos, por exemplo, visual, auditivo e cinestésico.

A autora destaca o poder imersivo que os avanços tecnológicos do ciberespaço permitem, com recursos para a criação de uma situação espetaculosa, que clamam por nossa atenção e nos prendem imersos em suas narrativas.

> À medida que o meio artístico digital ganha maturidade, os escritores terão cada vez mais experiência em inventar esses objetos virtuais verossímeis e em inseri-los dentro de momentos dramáticos específicos que intensifiquem nossa sensação de participação imersiva, dando-nos algo muito prazeroso para fazer. (MURRAY, 2003, p.113)

Avançando nas ideias propostas por Murray (2003), compreendemos que na sociedade contemporânea vive-se um momento de ampliação exponencial na gama de dispositivos e recursos tecnológicos que possibilitam outros modos de imersão. O que nos faz pensar assim são as interações favorecidas por smartphones, tablets, HMDs, enfim, dispositivos desenvolvidos e relacionados às tecnologias informáticas, dentre as quais, a RA. Esses recursos até pouco tempo não faziam parte de nossas vidas e atualmente nos auxiliam em muitas de nossas rotinas diárias. Para o que nos interessa neste trabalho, vamos apresentar alguns exemplos de uso da RA.

3.2 A Realidade Aumentada: algumas de suas aplicações possíveis

Buscando compreender *o que é a Realidade Aumentada*, vimos situações de uso dessa tecnologia em diversos setores, como na indústria e no entretenimento.

Em um artigo publicado na *Harvard Business Review*, Michael Porter e James Heppelmann (PORTER; HEPPELMANN, 2017) discutem o uso da RA nas empresas da área dos negócios. Os autores propõem que a RA terá destaque como nova interface na relação que envolve os seres humanos e as máquinas. Destacam que a RA possibilita, aos usuários, o acesso à informação, modificando o modo como as pessoas trabalham com instruções e interagem com produtos, aspectos que consideram favoráveis para o ramo dos negócios. A *Boeing* e a *AccuVein* são exemplos de empresas que investem em tecnologia RA e já apresentam bons resultados, como no caso da Boeing que pôde acompanhar uma redução de 35% do tempo necessário para mostrar aos seus funcionários *trainees*, o processo de montagem de asas de aeronaves. Para a *AccuVein*, a utilização de dispositivos que têm como princípio de funcionamento a RA auxilia seus funcionários nos momentos em que precisam localizar as veias de pacientes para a retirada de material sanguíneo, ação necessária em vários tipos de exames. Como podemos ver na Figura 8 a seguir, a empresa possui um equipamento que usa o calor do corpo para localizar as veias dos pacientes e as representa por meio de uma imagem digital sobre a pele do paciente.

Figura 8 - Equipamento que localiza veias do paciente.

Fonte: Vídeo do site da empresa Accuvein.

A empresa encontrou na RA uma forma de melhorar a qualidade dos serviços prestados, reduzindo custos de procedimentos, aumentando a eficácia dos atendimentos e, como consequência, oferecendo segurança e uma maior satisfação aos clientes, em situações que são muito delicadas, normalmente.

A empresa que desenvolve jogos eletrônicos *Nintendo* também investe na tecnologia RA e obteve sucesso ao criar o game *Pokémon GO*. Trata-se de um aplicativo para dispositivos móveis no formato de um game no qual o usuário utiliza o recurso de RA para *caçar* os simpáticos bichinhos chamados de Pokémon. Os Pokémons podem ser encontrados em vários locais (físicos) de cidades do mundo todo, levando o usuário a se deslocar por ruas de sua cidade, por exemplo, para encontrar diferentes tipos de Pokémons, arremessar uma bola e capturá-los para sua coleção. Na Figura 9, podemos ver imagens do game.

Figura 9 - Imagens do aplicativo Pokémon GO

Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicativos de redes sociais como o *Instagram* também utilizam a RA com o recurso de filtros, o que permite aos usuários se caracterizarem de diversas formas, inclusive adicionando objetos digitais às suas características físicas. Os usuários podem assumir características físicas de animais como, por exemplo, de um cachorro. Em alguns casos é possível a interação com esses objetos e, com um movimento de olhos, por exemplo, é possível mover as suas orelhas de cão.

Uma empresa que tem feito grande investimento em RA é a *Google*. Uma das principais empresas do ramo da tecnologia, a Google vem cada vez mais incorporando recursos de RA em seus produtos. Um exemplo disso é o recurso RA no site Google Pesquisa. O principal buscador de informações da internet, o Google Pesquisa torna possível observar imagens tridimensionais de animais, inclusive com a emissão de efeitos sonoros característicos, levando você a um minizoológico. Por exemplo, na página do Google Pesquisa, faça uma busca em seu smartphone com a palavra *Tigre*. No resultado da pesquisa, o Google coloca à disposição do usuário a opção *Veja em 3D*, que dá acesso a uma imagem tridimensional do tigre. Para alguns dispositivos, também está disponível a função de Realidade Aumentada, clicando em *Veja em seu espaço*. Pronto, você pode ver o Tigre em uma representação tridimensional, com movimentos e sons, e caminhar ao redor dele, observando suas características de diferentes perspectivas. Veja na Figura 10, um vídeo clicando na imagem ou utilizando o *QRCode* ao lado.

Figura 10 - Representação tridimensional do tigre em Realidade Aumentada.

Fonte: Elaborado pelo autor

O recurso também está disponível para outros animais, inclusive para alguns já extintos ou com risco de extinção, como no caso do Dinossauro e do urso Panda, respectivamente. Com o aplicativo de Realidade Aumentada, as pessoas podem conhecer esses animais, identificar suas características físicas, os sons que emitem, reações, como se eles coabitassem o mesmo ambiente físico.

Outro recurso interessante é o *Google Arts and Culture*[5]. O site que também foi desenvolvido em forma de aplicativo disponível para uso em dispositivos móveis, possibilita ao usuário acesso à uma série de museus ao redor do mundo, proporcionando um tour digital em que se pode percorrer os corredores de museus com alguns cliques, que direcionam para onde se quer olhar e seguir pelos corredores disponíveis. Mais recentemente, a Google incorporou o recurso de audioguia em alguns museus, possibilitando que o usuário tenha acesso às obras de arte, observando-as e obtendo informações sobre elas. O site possui também recursos interativos que permitem maior participação do usuário, tais como, quizzes, quebra-cabeças, caça-palavras, imagens de obras para colorir como bem desejar, dentre outros recursos. No aplicativo para dispositivos móveis, é possível que o usuário utilize o recurso de RA chamado *Art Projector*, em que ele pode ter uma experiência com obras de arte como, por exemplo, a Mona Lisa de Leonardo da Vinci. O aplicativo permite, com a RA, posicionar essa e outras obras de arte no ambiente físico em que o usuário está, para que ele possa se mover e explorar a obra, se aproximando, se afastando, observando aspectos da obra como se a própria tela em que o artista produziu estivesse fisicamente ali, na sala de sua casa, por exemplo.

Esses são alguns modos de utilização da RA em diferentes setores, que oportunizam uma experiência imersiva e possibilitam a interação, combinando objetos digitais com aqueles do ambiente físico. Interessa-nos, ainda, conhecer como a RA está sendo tratada no contexto da Educação.

3.3 Aplicativos de RA na Educação

Quando nos voltamos para aplicativos de RA que vêm sendo desenvolvidos e disponibilizados com fins educativos, notam-se avanços tanto no modo como ela é disponibilizada quanto relativamente ao seu acesso por professores e alunos.

[5] Site Google Arts and Culture: https://artsandculture.google.com/

A Editora Enovus[6], em parceria com a empresa Massfar, por exemplo, utiliza tecnologias de RA e RV em seus livros didáticos com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma maior interação com os assuntos apresentados nos livros impressos.

Figura 11 - Smartphone capta o marcador e apresenta os objetos em 3D.

Fonte: Vídeo do Youtube. Canal: Massfar Realidade Aumentada.

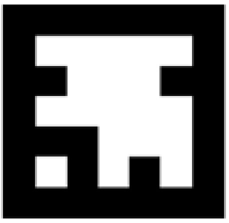
Com o livro didático em mãos e um smartphone com o aplicativo de RA instalado, é possível que o aluno explore corpos celestes do sistema solar. Na representação da Figura 11, vê-se o planeta Terra e seu satélite, a Lua, que o orbita num movimento rotacional. Determinadas imagens do livro funcionam como uma espécie de *código* para o aplicativo que o interpreta e traz à tela do dispositivo o objeto digital. Este modo de utilizar a tecnologia RA, por meio de códigos que são captados por um aplicativo, envolve os chamados *marcadores*.

É possível observar outro exemplo de como esta aplicação funciona com o uso do aplicativo *Scope*[7], desenvolvido pela empresa *Aumentaty*. Em um smartphone com o Scope previamente instalado pode-se captar, com a câmera do smartphone, imagens do ambiente físico. Quando a câmera do dispositivo capta e reconhece um código, o marcador (gerado através do aplicativo), o objeto digital aparece de forma síncrona com o ambiente capturado pela câmera.

[6] Informações retiradas do site da editora: https://editoraenovus.com.br/realidade-aumentada-em-apostilas-e-livros-didaticos/

[7] Aplicativo de Realidade Aumentada que reconhece marcadores e traz à tela do dispositivo os elementos digitais em sincronia com o ambiente físico captado pela câmera. Mais informações podem ser vistas no site http://www.aumentaty.com/indexEN.php

Figura 12 - Modelo de marcador



Fonte: Site da empresa Augmentaty

O *Scope* possui um acervo de objetos digitais desenvolvidos e compartilhados entre seus usuários. A Figura 13, a seguir, mostra um livro impresso que tem como recurso adicional a tecnologia de RA, por meio de um aplicativo instalado em um tablet.

Figura 13 - Uso da RA por meio de um tablet

Fonte: Site da empresa Aumentaty.

Nos casos apresentados anteriormente é preciso que os objetos digitais e seus marcadores sejam pré-definidos, desenvolvidos e configurados para que o usuário tenha a experiência com a RA. Os objetos digitais e marcadores são, de certa forma, limitados ao que os seus desenvolvedores propõem.

No entanto, existem outros modos de explorar a RA sem a necessidade de uso de um marcador. Como exemplo, temos o aplicativo GeoGebra, utilizado para o ensino de Matemática. Por meio do aplicativo *GeoGebra Augmented Reality* (GeoGebra AR), disponível para o sistema operacional *iOS*, é possível ter uma experiência com assuntos de matemática em RA.

Mais recentemente, o recurso de RA foi disponibilizado também para dispositivos com o sistema operacional *Android*, na versão *Geogebra Calculadora 3D*, por meio de um botão em que o usuário pode optar pela visualização em 3D, já normalmente disponibilizada pelo aplicativo, e a visualização com a tecnologia de RA.

O GeoGebra AR[8] é uma das versões mais recentes do aplicativo que possibilita trabalhar assuntos da Matemática com a RA. Com ele, é possível que o usuário crie gráficos de funções e objetos matemáticos em 3D, que podem ser visualizados em sincronia com o espaço físico em que o usuário está, por meio de um smartphone. Destaca-se a possibilidade de *posicionar* o objeto digital sobre uma superfície plana e, com a movimentação do dispositivo, o usuário pode vê-lo (o objeto) em perspectivas variadas. Nesse aplicativo não é necessário o uso de marcadores, já que o dispositivo reconhece superfícies planas, e possibilita, ao usuário, *posicionar* o objeto e explorá-lo. Nesse caso, o dispositivo deve possuir uma configuração de hardware mínima (hardware de sensores de movimento: acelerômetro e giroscópio) para que o aplicativo, por meio das imagens captadas pela câmera, identifique superfícies no ambiente e *posicione* o objeto.

Na Figura 14, que também possui um vídeo produzido como exemplo de uso do GeoGebra AR, vê-se um cubo planificado e posicionado sobre uma mesa. Ao mover um *Controle Deslizante*, ferramenta do aplicativo, pode-se *abrir* e *fechar* o cubo, isto é, planificá-lo e depois retomar sua forma tridimensional, e a movimentação do usuário permite a visualização desse cubo em diferentes posições.

Figura 14 - Cubo planificado posicionado sobre uma mesa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

[8] Iremos nos referir desta forma para dizer da tecnologia de RA do GeoGebra.

Nesse aplicativo também é possível, à medida que inserimos equações, gerar gráficos digitais como se estivessem projetados no ambiente físico, podendo ser rotacionados, transladados, ampliados e reduzidos. Alguns detalhes diferenciam o GeoGebra AR de outros aplicativos de RA analisados e mencionados na seção de Revisão Bibliográfica. Um deles é que ele não exige o uso de marcadores para que o objeto digital faça parte do cenário de exploração que tem como ponto de partida o espaço físico do usuário. Outro detalhe que, como entendemos, pode ser significativo à constituição do conhecimento, é que, ao usuário, é dada a liberdade de inserir equações de seu interesse, e optar pelas ferramentas do aplicativo de acordo com o que desejar explorar, efetuando modificações, por exemplo, nas equações e analisando a variação de seus gráficos.

Considerando os apontamentos de Moussa (2016) e Pereira *et al.* (2017) e dos recursos que pudemos analisar do GeoGebra AR, optamos por utilizá-lo no curso proposto para a pesquisa, entendendo que ele possibilita aos participantes realizar explorações de modo mais livre. Porém, antes de discutir a proposta do curso, ainda nos intriga o sentido dessa *realidade* que é adjetivada pelo termo *aumentada* devido ao conteúdo *virtual*. Assumindo uma postura fenomenológica na pesquisa, consideramos importante entender essa realidade aumentada.

3.4 De que se trata esta *realidade* que denominam aumentada pelo *virtual*?

As definições de Realidade Aumentada e Realidade Virtual de Kirner (2011) e Azuma (1997) nos instigam a interrogar os significados que são atribuídos aos termos *realidade* e *virtual*, já que se mostram como aspectos relevantes nas definições desses autores e outros que se dedicam à temática. Conforme fomos adentrando o tema, nos deparamos com denominações do tipo *mundo virtual*, *ambiente virtual*, *mundo cibernético*, ideias por vezes tratadas de modo ingênuo, isto é, sem uma explicitação ou reflexão, mas que de maneira formal, nos remetem à concepção de ciberespaço[9], que a todo o momento retomam o termo *virtual* e, neste momento da pesquisa, buscamos compreendê-lo.

Uma busca no *Dicionário de Filosofia* de Nicola Abbagnano, retorna o termo *virtual* como “O mesmo que potencial (v.).” (ABBAGNANO, 1998, p.1003). Podemos

[9] Compreendido da perspectiva de Bulla e Rosa (2017, p.299) como “ambiente cibernético sustentado materialmente por obra das TD e dos seres humanos, no qual as ações, as informações e as ideias são executadas, desenvolvidas ou construídas.”

entender que aquilo que é virtual, segundo esta definição, trata-se de algo que é dotado de *potência*.

Quando avançamos na busca pelo significado de potência, no mesmo dicionário, temos que “Em geral o princípio ou a possibilidade de uma mudança qualquer” (ABBAGNANO, 1998, p.782). Essa é uma definição dada por Aristóteles e que, pelo próprio filósofo, é seguida de outras definições específicas que, em geral, dizem da capacidade de realizar, sofrer ou resistir a mudanças, de si ou de outras coisas. O dicionário aponta que essa definição praticamente não sofreu alterações ao longo dos anos, permanecendo a mesma (ABBAGNANO, 1998).

No uso comum, nos deparamos com compreensões que de modo ingênuo associam o termo *virtual* como sendo aquilo que não é *real*. Para *Pierre Lévy* (1996), podemos estar diante de um equívoco quando entendemos o virtual como uma mera oposição ao real, como associado ao que não existe em uma materialidade física. Caminhando nessa mesma perspectiva, o termo *real* é comumente relacionado ao que “tenho” em uma materialidade, às características físicas ou concretas dos objetos. Logo, no senso comum, real tem um sentido oposto ao de virtual, já que este possui características associadas ao que “não tenho”, até mesmo, dando a sensação de que se trata de uma ilusão (LÉVY, 1996).

Abandonando o significado de senso comum e caminhando em direção a uma perspectiva filosófica, entende-se o virtual como aquilo que possui característica de força, dotado de uma potência de vir a ser, de tornar-se ato ou de atualizar-se, fazendo sentido compará-lo com aquilo que pode vir a ser atual. Para Lévy, “virtualidade e atualidade são apenas duas maneiras de ser diferentes.” (LÉVY, 1996, p.15).

Bicudo (2010), ao analisar o modo pelo qual alguns autores entendem a Realidade Virtual, dentre eles Lévy (1996), afirma que a maioria tende, de modo equivocado, a separar o real e o virtual, considerando a realidade como sendo o mundo dotado de características físicas, assim como também apontou Lévy (1996). Para a autora, temos consciência de que aquilo que nos é apresentado nas telas dos dispositivos tecnológicos (digitalizado pelas tecnologias informáticas) nem sempre diz de nossa realidade física mundana, e nem sempre solicita de nós as mesmas ações que temos na vivência mundana.

Os ambientes virtuais proporcionam projeções e ações em ambientes livres que, por vezes, vão além dos cenários que fazem parte de nossa realidade mundana ou realidade física. Este outro ambiente que se apresenta através da tela de um computador ou smartphone, por exemplo, não se trata da realidade física que as pessoas vivenciam, mas possuem potencial de existência (BICUDO, 2010).

Da perspectiva da fenomenologia, a autora entende que

> [...] se analisarmos a concepção de virtual como posta na dimensão ontológica [...] podemos afirmar:
>
> . que a realidade virtual é, tão-somente, uma modalidade do real;
>
> . que o espaço onde as ações, entendidas como atualizações do virtual, se estabelecem é o espaço da realidade mundana, entendida segundo a concepção da física contemporânea na qual espaço-tempo são uma das dimensões do real. (BICUDO, 2010, p. 131).

O virtual é um dos modos de ser do real por se dar no espaço-tempo em que vivemos, no mundo da experiência vivida, *mundo da vida*. Na fenomenologia, este mundo da vida é entendido como o *onde*, o solo no qual se dá a existência humana em sua totalidade, sempre com o *outro* (seu semelhante) e com as *coisas*, existência carregada de historicidade, isto é, de modos de ser histórico (BICUDO, 2010).

Em *Realidade e cibermundo: Horizontes filosóficos e educacionais antevistos* (2010), Bicudo e Rosa apresentam sua compreensão sobre o virtual. Para isso, partem de ideias que tratam o termo com ingenuidade, assim como apontado em Levy (1999) e Bicudo (2010), relacionando real e virtual com o que existe enquanto materialidade física no mundo objeto e avançam, considerando estudos já desenvolvidos por Granger (1995), Deleuze (1988) e Levy (2005), para compreender o virtual de outro modo. Para eles,

> [...] realidade virtual é tão-somente uma modalidade do real, e que o espaço onde as ações, entendida como atualizações do virtual, se estabelecem é o espaço da realidade mundana, entendida segundo a concepção da física contemporânea onde espaço/tempo são uma das dimensões do real. (BICUDO; ROSA, 2010, p.38).

Voltando-se de modo específico para o ciberespaço, os autores destacam modos pelos quais a atualização do virtual pode se dar nesse espaço. Argumentam que elas, as atualizações, são mantidas e sustentadas pelas tecnologias informáticas que, inclusive, definem o modo como podem se dar, se materializar, por exemplo, em forma de linguagem. “Mais do que isso, esse referencial é o próprio aparato científico e tecnológico que dá sustentação às atualizações no ciberespaço, bem como fornece o sistema operatório para que essas atualizações ocorram (BICUDO; ROSA, 2010, p.33).

A participação no ciberespaço, logo, com o virtual, envolve uma materialidade, modo pelo qual é possível que o virtual se atualize para a pessoa. Para fazer parte do ambiente virtual, é necessário que a pessoa faça uso de dispositivos como computadores, óculos de projeção, smartphones, denominados *hardwares*, para acessar os *softwares*, aplicativos e todo o conteúdo produzido pela tecnologia informacional, desenvolvidos por meio de programação.

Entendemos o ambiente virtual, ou os objetos digitais presentificados pela tecnologia de Realidade Aumentada, como sendo mais uma dessas *coisas* com as quais o ser humano tem possibilidade de estar no mundo, na perspectiva do *ser-aí-com-as-coisas*. Dessa perspectiva o humano é o *ser* vivente que a todo momento se lança às possibilidades de *vir-à-ser* no mundo da vida, abrindo-se e fazendo vir ao encontro o que a ele se presentifica, tendo no *ambiente virtual*, mais um modo de lançar-se no mundo.

Da perspectiva da fenomenologia de Heidegger (2015), o ser-aí diz de um ente privilegiado, denominado pelo filósofo como *Dasein* e diz de nossa possibilidade de existir e vivenciar situações diversas no *mundo da vida* em que o *aí* do ser sempre se faz presente. Diz também que o *ser* (humano) vivencia *com* os outros, seus semelhantes que, igualmente, possuem possibilidades, e as coisas do mundo, que não possuem abertura para vir-à-ser. Este *ser é* no mundo. O *com* é a abertura para ser e fazer vir ao encontro, um existencial humano no qual ele - o *ser* - sempre é aberto às possibilidades de vir a ser. Desse modo, o *ser* é no mundo com os outros e com as *coisas*. Para Bicudo (2020, p. 34), "A coisa é o fenomenal. O fenomenal se faz sentir nas sensações pontuais na carnalidade do corpo-encarnado e em cuja dinamicidade vai se entrelaçando de maneira que indícios da coisa vão se configurando.". Isso que nos é dado a perceber, entrelaçado nas sensações dos órgãos dos sentidos, vai se mostrando e na abertura possibilita a compreensão. A coisa é tudo isso que se mostra na abertura do *ser* em suas possibilidades de vivência.

A RA para nós, ao assumirmos uma postura fenomenológica de investigação, se presentifica/atualiza como *coisa* no momento em que podemos, enquanto seres viventes no mundo da vida, nos lançar às possibilidades abertas de sermos-com-objetos-digitais, sermos-com-RA, em modos de interação com objetos digitais, sem que se perca o contato com o espaço/tempo do mundo físico, no qual sempre somos. É nessa *abertura*, que a todo momento *somos*, em que o virtual (o que já existia em forma de potência) pode atualizar-se e fazer parte de minha experiência vivida.

Retomando o nome dado a esta subseção, que apresentamos como uma interrogação, e refletindo sobre o que se apresentou nos estudos realizados até então, interpreta-se que os significados atribuídos à RA caminham numa direção em que há uma separação entre real e virtual, realidade física e objetos digitais. Podemos ver esses objetos como se estivessem projetados no ambiente físico e, tal qual compreendemos das leituras realizadas, esta realidade passa a ser *aumentada* como se a ela fosse ou pudessem ser adicionados outros objetos dispostos no espaço físico. Não corroboramos com esse modo ingênuo de compreender a RA.

Por meio de dispositivos desenvolvidos pelas tecnologias informáticas, estes objetos podem ser vistos (em sua forma digital) no espaço físico, tornando-se possibilidade para que o humano o experiencie. Tornam-se presentes para o corpo vivente que, ao dar-se conta dos objetos digitais em RA (que se atualizam por meio de recursos tecnológicos), abarca o que lhe chega pelos órgãos do sentido, compreendendo-o nas vivências que fluem em seu corpo-vivente.

Em *Fenomenologia: confrontos e avanços* (2000), Bicudo se demora na explicitação do modo como compreende a construção de conhecimento, explicitando que construção de conhecimento e construção da realidade fazem parte de um mesmo movimento,

> [...] no qual o mundo faz sentido para a pessoa, onde ocorre o processo de significação, onde se explicitam as significações e onde participamos da construção da realidade mundana [...] Trata-se de uma realidade *criada/construída*, em constante atualização efetuada pela *forma/ação* da rede de significações explicitas." (BICUDO, 2000, p.41).

Nesse sentido, podemos compreender a realidade como dinâmica, como sempre em construção[10] e vivenciada pelo corpo-encarnado. Essa construção se dá na experiência vivida, nas compreensões que vão sendo articuladas (tendo como primado a percepção) e que, pelo pensamento e pela linguagem, vão fazendo sentido para o sujeito. O compreendido é capaz de ser expresso e, junto ao outro, pode se articular em outras compreensões, tornando conhecimento edificado, construído, produzido, à medida em que é validado e que ganha significação, constituindo assim uma rede de significações explícitas (BICUDO, 2000). Realidade, então, é compreendida como vivida pelo sujeito que participa ativamente de sua constituição e produção, na temporalidade e

[10] Em ocasião da defesa, a autora (Bicudo) ressalta que desde o estudo citado (BICUDO, 2000) vem focando essa questão: a da construção do conhecimento e da realidade. Assim, em estudos atuais, não se refere mais à construção da realidade. Porém, assume a visão da historicidade do *Lebenswelt*, como explicitada por Husserl em *A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental: Uma Introdução à Filosofia Fenomenológica*

espacialidade. Não se trata de uma realidade dada e passível de ser compreendida objetivamente, mas constituída e produzida por nós, corpo-encarnado que somos ao estar no mundo da vida.

Da perspectiva da fenomenologia, a realidade virtual é compreendida como um dos modos de ser do real por ser, para o sujeito *disposto à...* abertura para as possibilidades de vivenciar o que a ele se faz presente no mundo. Na concepção fenomenológica a pessoa vivencia, em sua singularidade, enquanto corpo-encarnado, aquilo para o que se volta no mundo da vida. Não faz sentido falar em "realidade aumentada" já que é realidade à medida que é percebida pelo sujeito, que passa a ser foco de seu olhar, objeto para a consciência. Porém, como se trata de uma tecnologia já dotada de uma nomenclatura, iremos continuar utilizando este termo para nos referirmos ao aplicativo, mas deixamos claro o significado que realidade tem para nós.

Nesta pesquisa, consideramos a possibilidade de *ser-com-realidade-aumentada* ao estudar assuntos da disciplina de Cálculo. Ou seja, consideramos o aplicativo de RA e procuramos compreender as possibilidades abertas à constituição de conhecimento matemático pelo aluno, ao estar-com a RA. Neste movimento de busca de compreensão, realizamos leituras que nos permitem dizer do solo no qual nos movemos e, durante a escrita desta tese, vão sendo articuladas interpretações que abrem caminhos a serem ainda explicitados.

4 O MOVIMENTO DO CORPO-PRÓPRIO AO ESTAR-COM-RA

> *Sujeito-vivente, sujeito-encarnado, corpo-próprio são maneiras de dizer desse organismo singular, complexo, que nunca é sem a materialidade de seu corpo, carne e osso, nem do solo em que se encontra com os outros. (ROSA; BICUDO, 2018, p. 14)*

Nesta seção, apresentamos o estudo que fizemos acerca da concepção de corpo-próprio, tal como a fenomenologia o compreende. Recorremos tanto à obra *Fenomenologia da Percepção* de Merleau-Ponty (2018), quanto a trabalhos que se voltaram ao estudo de suas ideias, especialmente aqueles que têm como foco o movimento do corpo-próprio. Porém, com o percorrer dos trabalhos e discussões ao longo da pesquisa, percebemos que a ideia de corpo para a fenomenologia tem suas raízes e contribuições de Edmund Husserl, sobretudo, nas obras *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie: Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie* e *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Drittes Buch: Die Phänomenologie und die - Ideen II* (MISSAGGIA, 2017).

Nossa intenção é poder estabelecer um diálogo que permita explicitar, ao leitor, o que se compreende acerca da constituição do conhecimento com a Realidade Aumentada. Entendemos que a RA é mais um modo pelo qual o corpo-próprio habita o mundo da vida, aberto às possibilidades de perceber e compreender as *coisas*, de constituir conhecimento. Como salientado anteriormente, na fenomenologia, a constituição de conhecimento se dá para o sujeito em seus atos de consciência, sempre intencionais, na abertura ao horizonte que a ele se apresenta como possibilidades de vivências.

> O corpo é o veículo do ser no mundo, e ter um corpo é, para um ser vivo, juntar-se a um meio definido, confundir-se com certos projetos e empenhar-se continuamente neles. [...] sei que os objetos têm várias faces porque eu poderia fazer a volta em torno deles, e neste sentido tenho consciência do mundo por meio de meu corpo. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 122).

Logo, entender o modo pelo qual a fenomenologia compreende o corpo-próprio é o que nos propomos nesta seção, para avançarmos nas compreensões do movimento do sujeito com o aplicativo de RA.

4.1 A fenomenologia e o corpo-próprio

A fenomenologia de Edmund Husserl tem como objetivo o estudo dos fenômenos. Em Bicudo (1994), o termo fenômeno é traduzido como *aquilo que se mostra*. Ora, isso que se mostra apenas se mostra para alguém, corpo-próprio que ao estar no mundo da vida é *abertura*, se dispõe ao que vai se mostrando em seus atos da consciência intencional, ao perceber. A pessoa, entendida como *ser*, com possibilidades de vir-à-ser, se move e se coloca nesta condição, movendo-se e constituindo-se no mundo, sempre com o outro. O corpo não é somente materialidade, pois como *abertura* se lança para algo. O corpo, então, é corpo-próprio, veículo do ser no mundo (MERLEAU-PONTY, 2018).

Embora a ideia de corpo-próprio tenha ganhado notoriedade na fenomenologia, sobretudo, pelos trabalhos de Merleau-Ponty (2018), Missaggia (2017) propõe que

> [...] é digno de nota que a filosofia husserliana não apenas influenciou o fenomenólogo francês [Merleau-Ponty] também nesse aspecto, como tem suas próprias contribuições ao tema. A noção de corpo é importante, portanto, em primeiro lugar, para desmistificar a ideia de Husserl como um idealista que nada tem a dizer sobre questões 'empíricas' ou sobre o ser humano enquanto 'ser no mundo'" (MISSAGGIA, 2017, p.196).

De fato, quando nos propomos um olhar para o volume 2 da obra *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica* (HUSSERL, 2005), entendemos a importância dada por Husserl à ideia de corpo, como fundamental para a percepção. Husserl expõe suas compreensões sobre os modos pelos quais podemos entender o corpo, a partir de uma dualidade *Körper* (enquanto objeto físico, matéria) e *Leib* (corpo vivo).

> Todas as sensações causadas têm sua LOCALIZAÇÃO, ou seja, são diferenciadas pelos locais da corporalidade aparente e pertencem fenomenalmente a ela. O corpo, portanto, é originalmente constituído de duas maneiras: por um lado é uma coisa física, a MATÉRIA, tem sua extensão, à qual entram suas propriedades materiais semelhantes; por outro lado, eu o encontro, e SINTO "nele" e "dentro" dele: o calor nas costas da mão, o frio nos pés, as sensações do toque nas pontas dos dedos. [...] A mão repousa sobre a mesa. Experimento a mesa como algo duro, frio, liso. Movendo minha mão sobre a mesa tenho uma experiência dela e de suas determinações [enquanto coisa]. Ao mesmo tempo, porém, em todos os momentos posso prestar atenção na mão e encontro nela sensações táteis, sensações de suavidade e frio, etc.; no interior da mão, correndo paralelamente ao movimento experimentado, sensações de movimento, etc. [...] meu corpo, entrando em relação física com outras coisas materiais (golpe, pressão, sacudida, etc.), não apenas proporciona a experiência de eventos físicos relacionados ao corpo e às coisas, mas também eventos corporais específicos da espécies que chamamos de UBIESTESIAS [sensações localizadas]. Tais eventos carecem nas "meras" coisas materiais. [...] duas coisas sem vida também se tocam, mas o toque do corpo condiciona as sensações nele ou dentro dele.[11] (HUSSERL, 2005, p.185-186, tradução nossa)

---

[11] Texto original: Todas las sensaciones ocasionadas tienen su LOCALIZACIÓN, esto es, se diferencian por los sitios de la corporalidad aparente y pertenecen fenomenalmente a ella. El cuerpo, por ende, se constituye primigeniamente de manera dobre: por un lado es cosa física, MATERIA, tiene su extensión, a la cual ingresan sus propiedades materiales similares haya; por outro lado, encuentro em él, y SIENTO "en" él y "dentro" de él: el calor en el dorso de la mano, el frío en los pies, las sensaciones de toque en las puntas de los dedos. [...] La mano descansa sobre la mesa. Experimento la mesa como algo duro, frío, liso. Moviendo la mano sobre la mesa tengo experiencia de ella y de sus determinaciones cósicas. A la vez, empero, em todo momento puedo poner atención en la mano y encuentro en ella

Para Husserl (2005), o corpo, em suas experiências com os objetos do mundo, é compreendido como *órgão perceptivo*. O corpo possui forma material que nos permite relacionar com a materialidade física do mundo, mas que, para Husserl, apenas se compara aos objetos materiais físicos por abstração. Diferente dos demais objetos do espaço físico, nosso corpo é *corpo vivo*, que sente o mundo, percebe-o e constitui-se nele.

> [...] o corpo vivente se constitui de modo duplo: é coisa física, matéria, hylé, que permite objetivar suas "[...] qualidades [...] mas também é 'órgão' que, sensorialmente, sente tais sensações. Por exemplo, há a sensação proveniente da picada de um inseto na mão esquerda e o sentir a dor decorrente" (HUSSERL, 2002[12] *apud* ROSA; BICUDO, 2018, p.24).

Porém, o corpo vivo não é apenas um corpo que recebe o que lhe chega pelos órgãos do sentido. Há mais do que a sensação de uma picada em minha pele. Há, como acima explicitado, o resultado daquilo que me chega pelas sensações, há o sentimento de um incomodo, de dor (ROSA; BICUDO, 2018). Não há para Husserl uma separação bem definida entre a sensação e o sentimento dela decorrente no corpo vivente, "a maneira como vivenciamos todos esses momentos se dá de modo unificado: a sensação de muito frio já vem acompanhada do sentimento de desconforto [...] A unidade de todas as sensações do corpo se relaciona, além disso, com a própria ideia do corpo vivo" (MISSAGGIA, 2017, p. 203)

> [...] Husserl explicita em *Ideen II* que embora o corpo seja um objeto como os demais, sujeitos às mesmas leis e propriedades, ele possui características que o tornam distinto dos demais *corpos* com os quais nos relacionamos. Nosso próprio corpo pode, assim como todos os objetos, ser por nós visto e tocado. Mas o fato de nosso corpo ser o "portador das sensações" faz com que, ao ser tocado, ele também perceba o toque: o corpo é, de fato, simultaneamente ativo e passivo na faculdade tátil. [...] E assim também com as demais faculdades: nosso corpo pode, como qualquer objeto, ser visto, mas ele é também, ao mesmo tempo, o corpo que vê. (MISSAGGIA, 2017, p.202)

Podemos compreender o corpo como um organismo vivo, é *órgão da vontade*, "o ÚNICO OBJETO que pela vontade do meu eu puro é MOVIVEL DE MANEIRA IMEDIATAMENTE ESPONTÂNEA e meio para produzir um movimento espontâneo mediado de outras coisas"[13] (HUSSERL, 2005, p. 191, tradução nossa). É corpo com movimentos livres, espontâneos, diferente dos demais objetos físicos que, embora possam

---

sensaciones táctiles, sensaciones de lisura y de frío, etc.; en el interior de la mano, corriendo paralelamente al movimiento experimentado, sensaciones de movimiento, etcétera. [...] mi cuerpo, al entrar en relación física con otras cosas materiales (golpe, presión, sacudida, elc.), no depara meramente la experiencia de sucesos físicos referidos al cuerpo y a las cosas, sino también, sucesos corporales específicos de la especie que llamamos UBIESTESIAS. Tales sucesos faltan em las "meras" cosas materiales. [...] dos cosas sin vida también se tocan, pero el toque del cuerpo condiciona sensaciones em él o dentro de él.

[12] HUSSERL, E. Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica – v.II. Torino: Biblioteca Einaudi, 2002.

[13] [...] el ÚNICO OBJETO que para la voluntad de mi yo puro es MOVIBLE DE MANERA INMEDIATAMENTE ESPONTÁNEA y medio para producir un movimiento espontâneo mediato de otras *cosas*.

ser movidos, não possuem a espontaneidade e, se são capazes de serem movidos, apenas o são de modo mecânico ou espontaneamente movidos de modo mediado, pelo corpo vivente.

> O corpo, embora seja, em determinado aspecto, exclusivamente físico e semelhante, portanto, aos demais objetos do mundo, possui também a propriedade diferencial de ser corpo animado [...] com elementos de natureza psíquica e não *material*. [...] *Leib* possui a peculiaridade de ser o corpo propriamente perceptivo porque é sempre a partir dele, enquanto corpo *animado*, que a percepção é possível. Na experiência concreta do mundo da vida, no mais das vezes, já nos pensamos enquanto corpo vivo. (MISSAGGIA, 2017, p. 204)

A fenomenologia entende o corpo vivente como uma totalidade, constituída pelas esferas corpórea (sensória), psíquica e espiritual. É nesse organismo vivo que a vivência se dá em sua totalidade (ROSA; BICUDO, 2018)

> A esfera sensória, carnal, realiza atos concernentes ao sentir e perceber, a psíquica ao gostar, desejar, comparar e a espiritual aos atos que realizam ajuizamentos de melhor que, pior que, maior, menor etc. Essas esferas não são separadas, porém entrelaçadas na própria unidade do corpo-próprio. Os atos duram, têm uma temporalidade, são dinâmicos e fazem acontecer. Entretanto, não são abstratos, mas se dão na materialidade carnal que, por sua vez, não é uma massa sem forma e sem direção. É um organismo vivo que, de modo intencional, sempre se dirige a algo buscando saber do que se trata ou para dar conta de uma solicitação, de algo a fazer." (ROSA; BICUDO, 2018, p. 15)

Na obra *Fenomenologia da Percepção* (2018), com primeira versão datada de 1945, Maurice Merleau-Ponty apresenta o modo como é possível compreender o ser humano, da perspectiva do *corpo-próprio*. O autor propõe reflexões acerca das tentativas da psicologia clássica e da fisiologia de darem conta de explicar, de acordo com suas perspectivas teóricas, o corpo humano e suas ações no mundo objetivo, como uma união de conteúdos psíquicos e fisiológicos.

Contrapondo essas perspectivas, para Merleau-Ponty, o corpo não pode ser compreendido como uma composição de partes justapostas: cabeça, tronco e demais membros. Não pode, também, ser concebido como um par: corpo e psique. Na "interpretação fenomenológica o corpo vivente abrange o espírito, pois como salientado nas obras husserlianas, todos os seres humanos vivenciam experiências e delas podem se dar conta." (SILVA, 2017, p. 25). Esse *dar-se conta* é a capacidade reflexiva, exclusiva do ser humano que se volta para as vivências, buscando compreendê-las. (SILVA, 2017).

> [...] a vivência, ou o experienciado, é percebida e refletida no fluxo dos atos da consciência. /.../ [Ela] não diz de uma realidade meramente subjetiva, pois é experiência do que está lá para nós em um campo onde o mundo e experiência que dele temos são dados em um movimento de conexão e articulação e não isoladamente. (BICUDO, 2011, p. 33-34).

Assim, a experiência vivida é o fluxo da vida se dando e sendo percebido na medida em que se dá, na abertura do corpo vivente. Opondo-se a objetivação do corpo entendido como uma soma de partes, Merleau-Ponty nos convida a entender o corpo-próprio como o "meio de contato" com o mundo e com o outro, como possibilidade para a vivência.

> O corpo próprio é entendido como *Leib*, corpo com movimento intencional. Nele, estão compreendidas todas as experiências vivenciadas, sendo ele, também, ponto zero para novas experiências. Ele realiza e se realiza em movimento, assumindo perspectivas diversas e pondo-se em movimento no [mundo da vida] que incessantemente vai se configurando junto às também incessantes configurações e reconfigurações deste corpo. (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2018, p. 158-159).

Dessa perspectiva, o corpo-próprio é entendido pelos autores como ponto inicial demarcador de experiências com o qual o sujeito *é* em movimento, doando-se em aberturas, sempre de maneira intencional. Intencionalidade é entendida como modo de ser intencional do sujeito sempre *direcionado à...* que, em seus atos da consciência, se constitui no mundo. O corpo-próprio se constitui a todo momento, lançando-se em seus atos intencionais àquilo que a ele se mostra no horizonte de possibilidades de *vir-à-ser*.

A motricidade é entendida como modo de ser do corpo-próprio que se move intencionalmente, realizando possibilidades. Motricidade, então, é a realização do ato cinestésico no/pelo corpo-vivente sempre disposto de modo intencional ao mundo. O corpo-próprio enquanto ser movente, move-se e faz mover, ligado por seus "fios intencionais aos objetos dados" (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 153). Não movemos apenas um corpo objetivo, conjunto de massa muscular, ossos e nervos que caminha em direção a algo que está dado no espaço objetivo, "Não é nunca nosso corpo objetivo que movemos, mas nosso corpo fenomenal /.../ enquanto potência de tais e tais regiões do mundo, que se levantava em direção aos objetos" (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 153-154) que são percebidos.

Para compreender isso, vamos considerar um exemplo dado por Merleau-Ponty (2018). Quando vejo um copo de água, não é necessário mobilizar cada um dos membros do corpo para saciar a minha sede, como se primeiro fosse necessário localizar minha mão e dedos, depois antebraço, braço, minhas pernas para me deslocar e, enfim, ir até o copo, pegá-lo e beber a água. Percebo meu corpo como potência para a realização de tais atos e me dou conta dessas possibilidades, da virtualidade que a mim se oferece e se abre quando vejo o copo de água e sei, por meu corpo, que posso ir até o copo e beber a água.

“O fundo do movimento concreto é o mundo” (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 158), onde a percepção é possível.

> A percepção, assevera, dá-se no presente contextuado em um horizonte temporal, onde passado e futuro também estão presentes em um fluxo de retensões e de pró-tensões. Percepção e percebido, portanto, dão-se no mundo-horizonte, em perspectivas, quando o sentido vai se pondo e a significação se processando. [...] a percepção oferece verdades como *presenças*, dizendo com isso tratar-se de uma verdade percebida com nitidez no momento em que o sentido se faz para o sujeito. [...] o sentido sempre se efetua de modo a ir além de si, expressando-se, e, com isso, processando a significação. Expressa-se no corpo-encarnado, manifestando as modalidades de existência. (BICUDO, 2000, p. 31-32)

A percepção é, então, ato corpóreo com o qual lançamos diferentes olhares para o mundo da experiência vivida.

> Merleau-Ponty afirma que a percepção é um ato que nos dá as coisas do mundo como presença, no instante do agora em que o ato de perceber se realiza. Não nos dá as coisas percebidas de forma imediata, mas, gradativamente, através de perspectivas tomadas pelo corpo próprio que, em movimentos intencionais, busca a percepção do todo junto às percepções diversas e distintas do que vai se mostrando em cada ato de perceber. São as diferentes perspectivas assumidas pelo corpo próprio em movimento que trazem à percepção peculiaridades e nuanças qualitativas que dizem do todo do objeto percebido. (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2018, p. 161).

É no movimento do corpo-próprio que a percepção se dá e o sentido se faz para o sujeito. Sendo a percepção um acontecimento na corporeidade, a experiência do corpo, o movimento, abre um campo criador de sentido. As coisas do mundo se doam ao sujeito na percepção, são abarcadas pelo movimento intencional do sujeito.

> Os movimentos acompanham nosso acordo perceptivo com o mundo. Situamo-nos nas coisas dispostos a habitá-las com todo nosso ser. As sensações aparecem associadas a movimentos e cada objeto convida à realização de um gesto, não havendo, pois, representação, mas criação, novas possibilidades de interpretação das diferentes situações existenciais. (NÓBREGA, 2008, p. 142)

Nesse movimento em que o sujeito se volta para as coisas do mundo, ele vai se constituindo e compreendendo o mundo à sua volta. Isso que o sujeito compreende, o que a ele se doa na percepção, não se dá de maneira imediata e única, mas por perfis. Se dá em possibilidades de compreensão que são abertas na percepção à medida que ele se movimenta e experiencia os objetos de diferentes perspectivas.

Esse modo de compreender a percepção é possível, segundo Nóbrega (2008), ao entendermos e assumirmos a concepção merleaupontyana que rompe com a ideia de corpo-objeto que tem sensações pontuais e dissociadas e que, pelos órgãos dos sentidos, recebe passivamente o que lhe é externo. Essa ruptura permite colocar a percepção como fundada no sujeito encarnado, no corpo-próprio que “olha, sente e, nessa experiência do corpo fenomenal reconhece o espaço como expressivo e simbólico” (NÓBREGA, 2008, p.142).

> Ele [o sujeito] pode experienciar uma diversidade de objetos e pode experienciar um mesmo objeto em diversos modos de mover-se; pode ir em sua direção com ou sem uma teorização que o subentenda; pode realizar a variação do mesmo na imaginação; pode intuitivamente antever suas faces que não se mostram ou pode ir até o mesmo para tocá-lo, vê-lo, senti-lo. (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2018, p. 162)

Conforme se entende com Merleau-Ponty, o movimento e o sentir são essenciais à percepção uma vez que tudo que a nós se apresenta, assim o faz, sensivelmente e de um só golpe, “Os sentidos comunicam-se entre si e abrem-se à estrutura da coisa” (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 308). Porém, conforme destaca Nóbrega (2008), nós desaprendemos a considerar a experiência corpórea por privilegiarmos uma razão sem corpo e, agora, é preciso retomar o sentido da percepção identificando-a “com os movimentos do corpo /.../ [redimensionando] a compreensão de sujeito no processo de conhecimento”. (NÓBREGA, 2008, p. 142).

> Não é o sujeito epistemológico que efetua a síntese, é o corpo, quando sai de sua dispersão, se ordena, se dirige por todos os meios para um termo único de seu movimento e, quando, pelo fenômeno da sinergia, uma intenção única se concebe nele. Nós só retiramos a síntese do corpo objetivo para atribui-la ao corpo fenomenal, quer dizer, ao corpo enquanto ele projeta em torno de si um certo “meio”, enquanto suas “partes” se reconhecem dinamicamente umas às outras, e seus receptores se dispõem de maneira a tornar possível, por sua sinergia, a percepção do objeto. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 312).

A percepção já está “pressuposta em toda noção de objeto, sendo ela que realiza a abertura primeira para o mundo” (MERLEAU-PONTY, 1992, p. 46). Nesse sentido, meu corpo *é* o que me permite mover e perceber o mundo.

Para Merleau-Ponty, aquilo que nos chega pelas sensações ganha sentido na experiência perceptiva, “assim como na visão os dois olhos colaboram” para que o visto se funda em uma única visão do objeto visado.

> [...] enquanto meu corpo é não uma soma de órgãos justapostos, mas um sistema sinérgico do qual todas as funções são retomadas e ligadas no movimento geral do ser no mundo, enquanto ele é a figura imobilizada da existência. Há um sentido em dizer que vejo sons ou que ouço cores, se a visão ou a audição não são a simples posse de um *quale* opaco, mas a experiência de uma modalidade da existência. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 314).

Os sentidos se comunicam, se traduzem uns nos outros e se sintetizam, sem que, para que os compreendamos, precisemos de uma explicação científica ou de uma ideia. A síntese que se efetua (dos diversos sentidos) não é intelectual, mas corpórea. É com meu corpo-próprio que minha experiência se realiza e é realizadora. O movimento de meu corpo não é um mero deslocamento de um corpo objetivo no espaço é, antes, “um projeto... ‘um movimento virtual’, é o fundamento da unidade dos sentidos.” (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 314).

4.2 O corpo-próprio com a RA

Procurando entender o que significa estar-com a RA, vamos adentrando pelo que nos diz a compreensão do corpo-próprio acima explicitada. Num contexto de ensino, que nos interessa nesta pesquisa, consideramos que o aluno, sujeito vivente que é, pode *se dar conta* do que faz com essa tecnologia. Abre-se para as possibilidades de ver, de se mover e fazer modificações, experienciando objetos digitais sem perder de vista o contato com o mundo físico e seu horizonte. O objeto é percebido por perfis, por perspectivas, que vão fazendo sentido no movimento compreensivo do corpo-próprio.

> Meu corpo é a textura comum de todos os objetos [...]. É ele que dá sentido não apenas ao objeto cultural, mas ainda a objetos culturais como as palavras. [...] nós não reduzimos a significação da palavra e nem mesmo a significação do percebido a uma soma de "sensações corporais", mas dizemos que o corpo, enquanto tem "condutas", é este estranho objeto que utiliza suas próprias partes como simbólica geral do mundo, e através do qual, por conseguinte, podemos "frequentar" este mundo, "compreendê-lo" e encontrar uma significação para ele. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 315-317).

Com o aplicativo de RA o corpo-próprio se movimenta, ele *é* no mundo e se constitui nele à medida em que *assume* a posição de abertura. Dirige-se aos objetos digitais, em seus modos de ser presente, pode movimentar-se, direcionando-se para vê-los. O corpo-próprio é quem se posiciona e vê, sente, percebe. O ato de percepção vai se desdobrando em outros atos de compreensão e interpretação do objeto visto, e é expresso.

O visto, os objetos em RA, se mostra por meio da tela do smartphone que o sujeito tem nas mãos. Mostra-se ao corpo-próprio que se volta para a tela do dispositivo, procurando compreendê-los: “O sujeito da sensação não é nem um pensador que nota uma qualidade, nem um meio inerte que seria afetado ou modificado por ela; é uma potência que co-nasce em um certo meio de existência ou se sincroniza com ele.” (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 285). O sujeito é sempre essa *potência*, que conhece o modo pelo qual *é* e *se dirige* no/ao mundo de suas vivências, dando-se conta de suas possibilidades de habitá-lo e constituir-se nele, por meio dessas compreensões que vão sendo favorecidas.

Cada objeto solicita de meu corpo uma ação, um modo de me dirigir a ele (NOBREGA, 2008). Há, nos exemplos de uso da RA estudados até aqui, elementos que corroboram com Nobrega, como no caso dos animais em 3D disponíveis nas ferramentas Google. Nesse caso, o usuário pode olhar, através da tela do dispositivo, para animais como um tigre, posicionados no seu ambiente físico. Pode aproximar-se do tigre para ver os detalhes de sua face, se afastar para vê-lo por inteiro, dar a volta para vê-lo de uma perspectiva diferente, pode ouvir seus ruídos e sons característicos, acompanhar alguns de seus movimentos como se ele estivesse ali, fisicamente, junto a si, no mesmo ambiente. À medida em que me movo e me lanço ao objeto digital tigre da RA, enquanto corpo-próprio que sou, me disponho a um modo de ver, de ouvir, me movimento para ter acesso às características físicas do tigre e, mesmo que eu não execute todas essas ações, eu sei por meu corpo que posso dirigir-me ao tigre (digital) e explorar suas características com a RA. O tigre é dado ao corpo-próprio, por sua fisionomia, pela cor característica, pelo som que ouço de seu rugido, se faz pela RA um objeto sensível.

> Aquele que sente e o sensível não estão um diante do outro como dois termos exteriores, e a sensação não é uma invasão do sensível naquele que sente. É meu olhar que subtende a cor, é o movimento de minha mão que subtende a forma do objeto, ou antes meu olhar acopla-se à cor, minha mão acopla-se ao duro e ao mole, e nessa troca entre o sujeito da sensação e o sensível não se pode dizer que um aja e que o outro padeça, que um dê sentido ao outro. Sem a exploração de meu olhar ou de minha mão, e antes que meu corpo se sincronize a ele, o sensível é apenas uma solicitação vaga. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 288-289).

Nesse sentido, o sujeito que percebe e o percebido não são tratados como separados, ou ainda, não há uma maneira hierárquica de relacionar as sensações. Com a RA, à medida em que me movo, faço também mover o objeto para mim, à medida em que eu o modifico, faço também com que ele se modifique para mim. Meu olhar se acopla ao objeto que solicita de mim um modo de ver. O mover de meu corpo se acopla ao objeto que solicita de mim um movimento que se dá em acordo com o objeto. Os objetos da RA, em seu modo de se tornar presente digital, solicitam do corpo-próprio ações para os experienciar e fazer deles parte da experiência vivida. Quando digo que "vejo" o objeto em RA, não apenas estou olhando para ele. Meu corpo o vê, meu corpo se movimenta de certo modo para ir em sua direção, meu corpo-vivente o percebe.

5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Apresentamos nesta seção, os procedimentos que fizeram parte de nossa caminhada investigativa, bem como, os aspectos metodológicos assumidos. Não queremos dizer que ao iniciar nossa jornada já tínhamos todas nossas ações metodicamente traçadas, ou que fizemos a opção por seguirmos pragmaticamente um determinado modelo de fazer pesquisa. Seguindo a postura fenomenológica de pesquisar, não temos um movimento único que garanta fielmente o sucesso da investigação. Trata-se de um movimento que vai se dando com o próprio desenrolar da pesquisa, com o próprio *estar-com* a sua pesquisa e seus cossujeitos, orientadora, colegas de curso, autores lidos e as ações que vão se mostrando necessárias e sendo constituídas por este pesquisador.

> De maneira um tanto ingênua, ouve-se falar em método fenomenológico, como se fosse um método que definisse como proceder, seguindo o exemplo do método positivista. Mas o método fenomenológico foi motivo de constantes retomadas pelo próprio Husserl, cujo modo de ser sempre descontente com o já clareado, via ali regiões obscuras. Portanto, não há um método fenomenológico, mas há procedimentos pautados na filosofia fenomenológica explicitada, enquanto uma atitude assumida como um modo de ser e de pesquisar. (BICUDO, 2020, p. 33)

Assim, assumimos essa postura, esse modo de ser e de pesquisar que Bicudo propõe, de uma filosofia fenomenológica como *atitude,* uma ação a ser empreendida pelo ser-no-mundo que se coloca ao investigar fenomenologicamente. Portanto, nesta seção, mais do que concepções teóricas, explicitamos o caminhar investigativo deste pesquisador, elucidando as ações que se mostram necessárias para garantir a realização deste estudo e a legitimidade dos procedimentos dos quais nos utilizamos para compreender o interrogado.

5.1 A pesquisa qualitativa com enfoque fenomenológico

Ao dizermos que esta pesquisa é *qualitativa,* como o próprio adjetivo que acompanha o termo pesquisa indica, nos remetemos a uma busca por qualidades do investigado. Para Bicudo (2011), há diferenças entre pesquisas qualitativas e as pesquisas qualitativas de abordagem fenomenológica. Uma dessas diferenças está na forma como ambas tomam para si o par sujeito/objeto ou fenômeno/percebido.

De modo geral, segundo a autora, as pesquisas qualitativas em Educação e em Educação Matemática, tendem a tomar sujeito/objeto como separados. Nessa concepção de pesquisa, as qualidades são pertencentes ao objeto e são passíveis de serem observadas em suas múltiplas características formando, portanto, o par objeto/observado (BICUDO, 2011).

A pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica assume uma postura na qual não se separa o percebido daquele que percebe. Isso porque se entende, em fenomenologia, que a qualidade se doa e pode ser percebida *na* percepção de quem a percebe. O percebido é sempre percebido por alguém, o que indica que o par fenômeno / percebido não pode ser separado. Então, a qualidade se doa *tal qual é* para o sujeito que se volta intencionalmente ao interrogado buscando compreender o que se mostra, o que se doa à essa compreensão, o fenômeno percebido (BICUDO, 2011).

Pesquisas qualitativas de abordagem fenomenológica, segundo Machado (1994), têm, nas expressões dos sujeitos, aquilo que é relevante para a compreensão do investigado. Cabe ao pesquisador abrir-se ao que em seu caminhar investigativo *vai se mostrando*, tão livre quanto possível de pré-conceitos ou pré-suposições que o levem a julgar *a priori* o que se mostra, ou a determinar o que deve ou não ser visto.

> [...] Fenomenologia diz, então: [...] deixar e fazer ver por si mesmo aquilo que se mostra, tal como se mostra a partir de si mesmo. É este o sentido formal da pesquisa que traz o nome de fenomenologia. Com isso, porém, não se faz outra coisa do que exprimir a máxima formulada anteriormente - "para as coisas elas mesmas!" (HEIDEGGER, 2015, p. 74).

A máxima fenomenológica citada por Heidegger, já é trazida por Husserl, e nos permite entender que o pesquisador fenomenólogo deve *ir em direção às coisas mesmas*[14], deve compreender o que interroga pelo seu modo de se mostrar, pelo que a ele (pesquisador) se revela, se doa à compreensão, sem procurar explicações ou justificativas para isso que se mostra.

Desse modo, ao assumir a postura fenomenológica, o pesquisador deixa-se conduzir pelo desejo de querer saber, buscando *conscientemente* por uma compreensão do interrogado.

> Estar *consciente* não quer dizer que, a todo o momento, estejamos refletindo sobre nossos atos. Apenas diz que percebemos, ou seja, sabemos que estamos agindo. A consciência sempre está lá, nos atos que realizamos. É um movimento intencional mantido na intencionalidade. Esta é um conceito nuclear da fenomenologia. É complexo e difícil de explicá-lo. Mas, conforme entendo, pode ser compreendido a um primeiro olhar como um fio invisível que nos contata às coisas e as traz à consciência como percebidas. (BICUDO, 2020, p.35, grifo nosso)

---

[14] Conforme Merleau-Ponty (2018, p. 4) “Retornar às coisas mesmas é retornar a este mundo anterior ao conhecimento do qual o conhecimento sempre *fala*, e em relação ao qual toda determinação científica é abstrata, significativa e dependente, como a geografia em relação à paisagem — primeiramente nós aprendemos o que é uma floresta, um prado ou um riacho.”.

Para Bicudo, a *consciência* é movida e mantida pela intencionalidade, um voltar-se atentamente para este algo que se intenciona, colocando em movimento o corpo-próprio, conduzido por este *fio invisível*, que traz à percepção aquilo que se doa ao perceber.

Nesta pesquisa, assumimos a postura de nos deixar guiar por aquilo que se mostra, se doa à nossa compreensão, à luz do que é interrogado e expresso pela pergunta de pesquisa. Ao estar com os alunos discutindo assuntos da disciplina de Cálculo, conduzimo-nos na postura de pesquisadores, durante toda a caminhada, movendo-nos atentamente às possibilidades abertas à constituição do conhecimento matemático do aluno, quando eles *estão-com-realidade-aumentada*.

Da perspectiva da fenomenologia proposta por Heidegger (2015), o *estar-com* diz da postura humana empreendida pelo corpo-próprio, situado espaço-temporal e historicamente, que se lança às possibilidades de existência no *mundo da vida*.

Em Bicudo (2011, p. 30), o termo alemão *Lebenswelt*, cunhado por Husserl e traduzido para as línguas latinas como *mundo da vida*, diz de uma

> [...] espacialidade (modos de sermos no espaço) e a temporalidade (modo de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividades e de conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende na medida em que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande na medida em que o sentido vai se fazendo para cada um de nós e para a cultura da comunidade em que estamos inseridos. (BICUDO, 2011, p.30).

Compõe também a concepção de mundo da vida aspectos de natureza cognitiva, toda a gama de conhecimento humano desenvolvido ao longo da história, logo espaço e temporalmente situados.

Entendemos que nossos sujeitos de pesquisa são seres viventes no mundo da vida e, da perspectiva da fenomenologia, os modos pelos quais eles vivenciam as situações que envolvem atividades de Cálculo com a RA podem possibilitar a compreensão do que nesta pesquisa nos propomos a investigar.

5.2 Procedimento de produção de dados

5.2.1 A proposta do curso e seus participantes

Para a produção de dados[15] desta pesquisa realizamos um curso de curta duração, com a intenção de explorar com os participantes assuntos abordados na disciplina de Cálculo por meio da tecnologia de RA. Este curso foi composto de 8 encontros presenciais, com duração de duas horas cada um e se deu entre os dias 05 de setembro e 31 de outubro de 2019.

Para participar do curso convidamos alunos da Graduação em Licenciatura em Matemática da Unesp, campus Guaratinguetá. Os encontros aconteceram fora do período de aulas regulares das turmas para que a participação fosse voluntária. Tiveram possibilidade para participar do curso, 6 alunos. Outros alunos demonstraram curiosidade e interesse pela temática, mas, por motivos diversos, como falta de horário e outros compromissos, não puderam participar. Destes 6 participantes, dois ainda frequentavam aulas da disciplina de CDI-2, outros três já haviam participado e sido aprovados nas disciplinas de cálculo, e uma aluna estava com a disciplina de CDI-2 trancada para concluí-la em seu último ano de curso. No curso de Licenciatura em Matemática da Unesp de Guaratinguetá, o conteúdo referente ao Cálculo é distribuído em duas disciplinas anuais: Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI-1), na grade do primeiro ano e Cálculo Diferencial e Integral 2 (CDI-2), a ser realizada no segundo ano.

5.2.2 O curso: da preparação à sua realização

Durante a fase de elaboração do curso, tive a oportunidade de contar com a colaboração de uma professora que lecionava uma das disciplinas de Cálculo na instituição em que o curso ocorreu. O diálogo com a professora foi fundamental para a seleção dos assuntos, organização das tarefas a serem propostas e da dinâmica que poderia desenvolver com os participantes nos encontros.

Esses diálogos possibilitaram entender algumas das dificuldades apresentadas por alunos em aulas como, por exemplo, a dificuldade na compreensão de gráficos de funções de duas variáveis no espaço tridimensional; ou como na compreensão de ideias envolvendo limites. Tais dificuldades foram apontadas pela professora como obstáculos

[15] Compreendemos os dados na pesquisa fenomenológica conforme Bicudo (2020), tratado de modo detalhado ainda nesta seção.

para os alunos na compreensão e resolução de tarefas que lhes são propostas em Cálculo. Estes, não por acaso, foram temas abordados em tarefas do curso.

Outro momento muito importante de diálogo com a professora se deu ao final do primeiro encontro do curso. Nessa conversa, consideramos que seria melhor organizar os participantes em duplas para explorar as tarefas. Em duplas, a comunicação entre eles seria favorecida. Optamos então, na continuidade do curso, por trabalharmos com as duplas.

As tarefas propostas são do livro *Cálculo, volume 2*, de James Stewart (2013), e algumas com pequenas modificações. Trata-se do livro texto adotado no curso de Licenciatura. A escolha das tarefas foi feita em conjunto com a professora considerando-se as possibilidades de exploração com a RA e a contribuição para a compreensão de assuntos do Cálculo, considerados como de maior complexidade. Essas tarefas são apresentadas de modo mais detalhado no Apêndice B desta pesquisa.

No decorrer dos encontros, contamos com a colaboração de uma aluna de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática que auxiliou com a gravação em vídeo e participou do diálogo com os alunos.

No primeiro encontro, foi feita uma apresentação do que tínhamos como proposta no curso. Os participantes foram convidados a preencher o *Termo de Consentimento Livre e Esclarecido* (Apêndice A) concordando com a participação na pesquisa e permitindo o uso dos dados produzidos. Também foi apresentada aos participantes a Realidade Aumentada por meio de alguns exemplos de uso, para então iniciar com as tarefas de exploração da tecnologia. As primeiras foram de familiarização com o GeoGebra Calculadora 3D e seu recurso de RA, o qual, ao longo do texto, denominamos de *GeoGebra AR*.

Nos encontros seguintes, a dinâmica envolvia a realização das tarefas pelos alunos. Esta dinâmica ocorreu até o quinto encontro. As tarefas desenvolvidas abordaram assuntos de funções de duas variáveis, tais como *Superfícies Cilíndricas e Quádricas*, *Limites* e *Derivadas Direcionais*. No sexto encontro, foi solicitado que os alunos, em duplas, considerassem os assuntos que estudavam na disciplina e propusessem uma tarefa para ser apresentada aos colegas. Assim, a dinâmica deste encontro bem como dos seguintes, sétimo e oitavo, foi modificada; o encontro 6 destinou-se à pesquisa e elaboração da tarefa pelas duplas e, nos encontros 7 e 8, deram-se as apresentações. Os temas eleitos pelas duplas envolveram os assuntos de *Integral Dupla*, *Plano Tangente* e *Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis*.

Durante todos os encontros, foi necessário o uso de smartphones compatíveis com o GeoGebra AR. O aplicativo GeoGebra já era de conhecimento dos alunos, que haviam utilizado em algumas disciplinas do curso de graduação. Porém, a maior parte deles não conhecia o recurso de Realidade Aumentada do aplicativo, apenas um dos participantes disse que tinha conhecimento superficial. No decorrer dos encontros, foi proposto que eles gravassem a tela de seus dispositivos durante a exploração para, posteriormente, compartilhar esses registros conosco. Para isso, foram utilizados recursos de gravação de tela dos smartphones e o aplicativo *DURecorder*[16] em um dos dispositivos que não apresentava recurso de gravação. Essas gravações em vídeo tornaram-se parte dos dados a serem analisados. Nos encontros, sempre que havia um momento de exploração com o GeoGebra AR, era solicitada a gravação. Porém, nem sempre elas foram realizadas ou compartilhadas conosco.

Todos os oito encontros foram filmados com câmera e, posteriormente, os diálogos e expressões dos sujeitos foram transcritos, tornando-se também dados a serem analisados.

Entendemos que tanto as gravações em vídeo (das telas dos smartphones e da câmera filmadora), quanto a transcrição, são registros da experiência vivida que mostram os sujeitos explorando assuntos de Cálculo com a RA. Com esses registros, enquanto pesquisador, movo-me intencionalmente, colocando-me aberto ao que se mostra nas suas ações, para compreender as *possibilidades à constituição do conhecimento matemático desses alunos que investigam assuntos de Cálculo Diferencial e Integral com a RA*.

5.3 A análise dos dados: uma busca existencial pela compreensão

Caminhamos, no processo investigativo, intencionalmente movidos pelo interesse em compreender o interrogado: a constituição do conhecimento matemático do aluno em Cálculo ao estar-com a Realidade Aumentada. Buscando um modo de organizar e analisar os dados produzidos, volto-me para a experiência vivida *com* os participantes e deixo-me orientar pelo que se revela relevante à compreensão do interrogado.

[16] Aplicativo que faz gravações da tela de smartphones com sistema operacional Android. Mais informações em https://du-recorder.br.uptodown.com/android

Assumindo a postura fenomenológica, entende-se que a análise foca as *descrições* dos dados da experiência vivida.

> A fenomenologia entende o dado como o que chega ao sujeito que, de modo atento, olha para algo querendo saber do [que] se trata. Esse algo poderia ser visto como a "coisa", que nos escapa ao conhecimento, mas que se doa aos nossos sentidos, em seus modos de doação. [...] A coisa é o fenomenal. O fenomenal se faz sentir nas sensações pontuais na carnalidade do corpo-encarnado e em cuja dinamicidade vai se entrelaçando de maneira que indícios da coisa vão se configurando. Quando o sujeito se dirige de modo intencional ao que está solicitando sua atenção, o fenomenal a ele se mostra como "fenômeno", percebido então como uma totalidade que se destaca de um fundo, o solo mundano em que se situa. (BICUDO, 2020, p. 34)

Assim, o que é chamado de *dado* na pesquisa fenomenológica tem seu significado indicando para *aquilo que é dado à compreensão,* como o que se mostra *tal qual é* e *se doa*. Nesse sentido, os dados da pesquisa são descrições, relatos da experiência vivida que não se restringem à transcrição do discurso falado, mas procura expressar as diversas formas de comunicação que se presentificam na experiência vivida, como gestos, fisionomias, etc. Portanto, as descrições devem procurar relatar a experiência vivida tal qual ela ocorreu, isto é, sem que sejam feitos julgamentos interpretativos e avaliativos *a priori*, uma vez que elas são consideradas "exposição do vivido como sentido ou percebido" (BICUDO, 2020, p. 45-46).

Em nossa pesquisa mostra-se relevante considerar o expresso pelos sujeitos nos momentos em que eles estão com a RA. Por isso fizemos as gravações em câmera e das telas dos smartphones, registrando a vivência no curso. Ao descrevê-la, precisamos considerar os aspectos que dizem do modo como isso ocorreu.

5.3.1 A constituição das Cenas Significativas

Buscando por um modo de organizar e analisar o descrito, vimos que as *Cenas Significativas* poderiam ser relevantes, uma vez que, conforme destacam Detoni e Paulo (2011), elas são uma possibilidade para dados registrados em forma de vídeos, que capturam diferentes modos de expressão, e que não se limitam à linguagem oral e escrita. Pode-se, nas Cenas Significativas, dar dinamicidade ao diálogo, trazendo os gestos expressivos que são "apagados" na linguagem escrita que "não dá conta de dizer do que os sujeitos da pesquisa procuram expressar […] [excluindo-se], das descrições que privilegiam a fala, a complexidade de dados que se constituem por gestos, fisionomias, ações" (DETONI; PAULO, 2011, p. 99).

Compreendemos que, também, a organização dos dados da pesquisa em Cenas Significativas é um modo de o pesquisador não privilegiar recortes do vivido em trechos de fala de cada um de seus sujeitos, mas de dar destaque à comunicação no grupo que se volta atentamente para o que está sendo explorado e expõe compreensões.

Detoni e Paulo vão abrindo a ideia do que para eles se constituem nas Cenas Significativas e mostram os procedimentos que seguiram no tratamento dos dados produzidos em suas pesquisas. Afirmam que esse modo de organização dos dados "aponta como o sentido do todo se impõe nas descrições das ações dos sujeitos, levando-nos a considerá-las em conjuntos significativos articulados" (DETONI; PAULO, 2011, p. 100). E é exatamente este conjunto articulado que se mostra significativo para a compreensão do interrogado que permite aos autores conceber a ideia de *Cena Significativa*, possibilitando um olhar para as descrições. Entende-se, pelo exposto, que esse modo de organização dos dados é relevante para que a vivência na pesquisa possa ser considerada "em seus atos totais de compreensão, expressão e comunicação" (DETONI; PAULO, 2011, p. 101).

O registro em vídeo, em nossa pesquisa, mostrou-se como de maior abrangência de captura de expressões, comparado ao registro em áudio. Permitiu captar gestos e expressões corporais de que os sujeitos se valem para comunicar ideias, para concordar ou discordar de algo. Porém, mesmo as gravações em vídeo captam determinado espaço limitado pelo ângulo de abrangência da câmera, um dentre tantos momentos de todo um horizonte de possibilidades. Não temos a totalidade da experiência vivida e o "*o que olhar*" da câmera depende de quem determina "*o que se olha*". Complementarmente, nos registros em vídeo das telas dos smartphones, o "*o que olhar*" é eleito pelos próprios sujeitos que vivenciam as tarefas com a RA, mostrando-se momentos específicos de suas explorações no curso.

A combinação desses registros – os vídeos da captura da câmera e das telas dos smartphones dos alunos – traz elementos para descrevermos a vivência no curso e organizarmos o transcrito em Cenas Significativas, tornando possível, na análise, nos voltarmos para as "fisionomias dos gestos e dos olhares, às circunstâncias espaço-temporais em que cada sujeito *entra* no discurso coletivo, e, enfim, à maneira como ele vive os momentos desse coletivo" (DETONI; PAULO, 2011, p. 106). Desse modo, consideramos que a organização dos dados em Cenas Significativas é importante em nossa pesquisa, pois dá a possibilidade de expor a fluidez de ações que não se deixa captar por uma única fala ou gesto.

> Na complexidade desse fluxo, passamos a compreender a necessidade de ampliar a unidade do texto escrito que gira em torno de um *núcleo de significação*, descapitalizando determinada expressão do sentido global e apresentando todo esse entorno. Chegamos, assim, a olhar para a *cena* que mostra esse *núcleo de significado*. (DETONI; PAULO, 2011, p. 106).

A *cena* expõe um fluxo de acontecimentos, considerando os atos dos sujeitos em sua totalidade, com modos de expressão variados que dizem do entorno deste momento da experiência vivida que é *significativo* para que o pesquisador compreenda o interrogado.

Procurando expor os atos totais expressos pelos sujeitos participantes do curso, além das transcrições textuais, para dar dinamismo aos gestos e as falas, recorremos aos Gifs animados.

5.3.2 Gifs animados como uma possibilidade de acesso à experiência vivida no curso

Quando nos voltamos para os registros em vídeo do curso, vimos que os sujeitos ao estarem com a RA projetam gráficos, fazem alterações em suas equações e acompanham ao modificações simultaneamente, movem-se com os smartphones para visualizarem de diferentes perspectivas os objetos. Entendemos que esses modos de estar-com-RA são importantes para compreender aspectos da constituição de conhecimento com RA.

Mas, como trazer na tese esses momentos que fizeram parte de nosso movimento compreensivo? Uma tentativa de dar conta disso foi produzir Gifs animados, que trazem pequenos recortes das gravações em vídeos e podem ajudar na compreensão do que *o texto não diz*.

Os gifs foram elaborados utilizando o site *Ezgif*[17] que possui diversos recursos para edição e conversão de arquivos de vídeo e, dentre eles, a criação de gifs animados. Para armazená-los, usamos o site Google Drive, ferramenta de hospedagem na nuvem, cujo acesso aos gifs se dá por meio de compartilhamento de arquivos com outros usuários.

Ao longo da tese, os leitores podem acessar os gifs de duas maneiras. Uma delas é clicando no *link* (texto destacado na cor azul). Mas os *links* são acessíveis para leitura da tese no formato PDF ou online, e não para o texto impresso. Então, optamos por

[17] Para mais informações, acesse o site www.ezgif.com.

construir, também, os *QR Codes*. Utilizando o site gg.gg, foi possível gerar os QR Codes, códigos em forma de imagem (Figura 15) e que permitem ao usuário de um dispositivo com internet e câmera digital, acessar conteúdo hospedado na nuvem.

Figura 15 - QR Code de um dos gif

Fonte: Elaborado pelo autor

Desse modo, ao longo da tese e, principalmente, nos momentos das cenas que entendemos serem importantes à compreensão do leitor, trazemos esses gifs.

5.3.3 O individual e o todo: caminhando da análise ideográfica para a nomotética

Antes que se inicie o "olhar" para os dados, consideramos importante abordar dois aspectos envolvidos no movimento compreensivo que é relevante para deixar e fazer ver o fenômeno, tal como se mostra, isto é, livre de pré-conceitos ou pré-julgamentos.

A constituição das cenas é o primeiro passo na organização dos dados, iniciando a análise ideográfica. Ao voltar nosso olhar para as descrições do vivido no curso, buscando compreensões acerca daquilo que interrogamos, nos deixamos conduzir por aquilo que se mostra relevante à constituição do conhecimento em Cálculo com a RA.

Visando manter o rigor da pesquisa fenomenológica, é fundamental que estejamos abertos àquilo que vai se mostrando, tão livres quanto possível de pressupostos teóricos que nos façam pré-determinar ou pré-julgar isso que vai se mostrando, tomando como algo já objetivado. A fenomenologia questiona, coloca em questão, o conhecimento científico. Não o nega, mas o coloca em "suspensão", o coloca "entre parênteses", numa postura de *epoché*.

> Na *epoché* fenomenológica, esclarece Wilhem Szilasi (1973, p.89), o estado de coisas (*Sachverhalt*) objetivo é posto entre parênteses não com o fito de negar a existência do mundo, mas sim para se "olhar" o efetivo ser do existente. Nas palavras de Husserl: "Deve-se primeiro perder o mundo pela *epoché* para reconquistá-lo depois em uma autoconsciência (*Selbstbesinnung*) universal." (1973b, p.193)[18]. (MARTINI, 1999, p. 47)

[18] HUSSERL, E. *Cartesianische meditationem und pariser vorträge*. Den Haag: Martinus Nijhoff, Husserliana, 1973b. t. 1.

Por "entre parênteses" o conhecimento histórico constituído não significa que com a *epoché* o estamos negando ou contestando. Porém, "ao operarmos a *epoché* não perdemos o mundo para a fenomenologia, simplesmente iremos ganhá-lo como *cogitatum*, quer dizer, *como correlato de minha intencionalidade*" (MARTINI, 1999, p. 49).

Na análise dos dados, colocamos *em suspensão* nossos conhecimentos prévios, nossas compreensões oriundas das leituras efetuadas sobre RA e constituição de conhecimento, para nos voltarmos para o vivido no curso com os participantes e deixar e fazer ver o que se mostra nesse movimento de comunicação que é explicitado nas Cenas Significativas acerca da constituição de conhecimento.

Essa análise envolve dois movimentos: o da *análise ideográfica* e da *análise nomotética* (MACHADO, 1994). Eles não são movimentos dicotômicos ou hierárquicos, mas carregam especificidades e visam a estrutura do fenômeno. Evidenciam um modo de proceder, da postura fenomenológica, que intenciona "o retorno às coisas mesmas" e que se dá no encontro com as essências, o *eidos*, aquilo que se mostra para o sujeito "que se volta para…". Isso que se mostra, revela-se através de "[...] sínteses mais abrangentes do dito e interpretado, buscando as estruturas das experiências vividas que revelam o modo de ser do fenômeno" (BICUDO, 2011, p. 58).

Nesse movimento de análise fenomenológica, nos voltamos atentamente para os dados da pesquisa, à luz da interrogação. Com as descrições, são efetuadas leituras tantas vezes quantas forem necessárias, "para que o sentido das experiências vividas pelo sujeito seja existencialmente compreendido" (BICUDO, 2011, p. 57), tornando-se possível a articulação das *Unidades de Sentido* (US). As US são trechos destacados pelo pesquisador quando ele se volta para as descrições e julga que tais trechos sejam significativos para a compreensão do interrogado. Nesta pesquisa, conforme salientamos, não destacamos trechos de falas individuais, pois optamos pela organização dos dados em Cenas Significativas. Assim, consideramos os *núcleos de significado* que, segundo Detoni e Paulo (2011, p. 102), vão sendo constituídos "nos movimentos de interpretação do pesquisador" e procuram ser um "polo de convergência de falas, gestos, fisionomias, compreensões intersubjetivas, entre outros atos de expressão".

Com as cenas constituídas, o pesquisador volta-se para elas e busca por *ideias* que se manifestam nas falas. Tais ideias expõem interpretações do pesquisador acerca do manifesto pelos sujeitos em sua forma de dizer individual, mas, também, no diálogo com o outro.

> Além de ver essas manifestações em cada sujeito, uma atribuição comum de significados que o grupo todo de sujeitos intencionados na experiência deixa ressaltar na iminência do intersubjetivo. Cada sujeito articula compreensões que necessitam ser comunicadas ao outro. Há, portanto, sempre a experiência da alteridade, que se expressa numa rede comum de significados constituídos. (DETONI; PAULO, 2011, p. 118)

O movimento interpretativo avança à medida que transcende o discurso individual e se aproxima das generalidades, que permitem dizer do fenômeno buscando colocar em destaque os invariantes. Caminha-se, portanto, no movimento interpretativo da análise individual (ideográfica) em direção às regiões de generalidade (nomotética). Trata-se de um movimento de análise que articula convergências de sentidos e significados e possibilita a constituição de *categorias abertas*. As categorias expressam generalidades acerca do investigado, ou seja, expressam aquilo que de modo geral se mostra ao pesquisador como invariante em relação ao todo.

A discussão das categorias envolve uma síntese reflexiva na qual é possível dialogar com a literatura na área da Educação e Educação Matemática acerca dos temas que circundam a região de inquérito da pesquisa, em nosso caso, a constituição de conhecimento em Cálculo ao estar com a Realidade Aumentada.

6 A ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção, temos como objetivo apresentar ao leitor o movimento de análise de dados produzidos nesta pesquisa. Trata-se de um caminhar para o qual assumimos a postura fenomenológica como um modo de compreender o interrogado nos deixando conduzir por aquilo que se mostra relevante acerca da constituição do conhecimento em Cálculo, quando o sujeito está-com a RA.

6.1 A organização dos dados: expondo os procedimentos

Terminado o curso, passamos a transcrever as gravações em vídeo procurando tornar texto aberto à interpretação os registros dos 8 encontros.

Conforme dissemos, trazemos para o texto da transcrição o recurso dos gifs, dando ao leitor acesso a pequenos recortes dos vídeos com imagens em movimento, pois as palavras podem não dar conta do que foi expresso/comunicado pelo participante em seus atos totais de expressão. Com isso tem-se, nas cenas significativas, as opções de *links* e *QR Codes* que direcionam o leitor aos gifs. Para os leitores da tese trazemos, ainda, a opção de acesso às cenas e seu conteúdo digital por meio de um site produzido no aplicativo Google Sites. Basta que o leitor acesse o site http://gg.gg/tese-cenas-pereira2022.

Relembramos que as cenas foram constituídas no movimento de leitura do texto transcrito, quando este pesquisador a ele se lança e se deixa conduzir por aquilo que se mostra relevante à compreensão do interrogado. No total, foram organizadas 25 cenas que aqui estão apresentadas na forma de quadros. Cada cena está em um quadro específico e traz o fluxo de acontecimentos de determinado momento do curso, o núcleo de significado interpretado pelo pesquisador. Criamos códigos para que seja possível nos referirmos a cada uma delas, conforme segue:

Figura 16 – Quadro que apresenta as Cenas Significativas

Cena 2 - E2A1a - Superfícies cilíndricas: paralelas, geratriz e curva plana.

Descrição: Partindo da definição de *Superfície Cilíndrica* presente em Stewart (2013), os participantes exploram a equação **z = x²**.

Anderson: "O cilindro é uma superfície constituída de todas as retas chamadas geratrizes que são paralelas a uma reta dada". O que é essa geratriz? Ou então, mais adiante, diz: "e que passam por uma curva plana". Que curva plana é essa aí, que gerou este objeto?

(*Analisando a curva z=x²*) **Alex**: Não, não é um cilindro. Vou chamar de telha (*risos*). **Anderson**: Isso é um cilindro? Olhem para a definição de cilindro. **Alex**: Mas é (*cilindro*). Não, não sei. **Anderson**: Coloquem aí **y = 0**. **Alex**: É um plano. **Anderson**: O que gerou a intersecção? **Alex**: Uma parábola. Mas um cilindro não tem que estar fechado? (*Observando o gráfico da equação e percebendo que ele não tem sua forma "fechada" para ser denominado cilindro*). **Henrique:** Não. No meu ponto de vista cilindro é tudo que na

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 16, temos um exemplo de como os quadros são apresentados no texto. Neste caso, temos um recorte da segunda cena ou ***Cena 2***, seguida por um código que indica o encontro no qual a cena ocorreu e a atividade a qual ela se refere. O código ***E2A1*** diz de uma cena relativa ao segundo encontro, **E2**, e durante a realização da tarefa[19] 1 desse encontro, **A1**. Esse código é seguido do nome que atribuímos à cena, no caso da Cena 2, *Superfícies cilíndricas: paralelas, geratriz e curva plana*. Quando vimos ser necessário, o item ***Descrição*** foi inserido. Nele trazemos detalhes entendidos como importantes para a compreensão do cenário / momento daquela cena. No caso da Cena 2, a descrição é inserida para explicitar o ponto de partida das discussões. ***Descrição:*** *Partindo da definição de Superfície Cilíndrica presente em Stewart (2013), os participantes exploram a equação* ***z = x²****.*

Abaixo de cada quadro que apresenta uma cena, foram criadas linhas que trazem as *Ideias Significativas* interpretadas pelo pesquisador para explicitar aspectos relevantes da vivência dos participantes que nos conduzem à compreensão acerca do que na pesquisa se interroga. É importante dizer que, embora na apresentação do texto, as ideias significativas sejam uma última linha inserida logo após a cena, no movimento interpretativo elas foram destacadas após a organização das 25 cenas. Neste movimento que procura destacar o que, naquela cena, é central à compreensão do fenômeno, a postura

[19] Embora estejamos considerando que foram propostas *tarefas* aos participantes do curso, entendemos que nas cenas há uma *atividade* deles por conta do seu envolvimento ao explorarem as tarefas.

do pesquisador de deixar e fazer ver o que se mostra é fundamental para nossa compreensão acerca da constituição de conhecimento em Cálculo com RA.

No texto descritivo das cenas, optamos por destacar em **negrito** algumas informações indicando objetos matemáticos presentes nas falas dos participantes como, por exemplo, *valores*, *eixos* e *expressões*. Também estão em negrito os nomes[20] dos participantes quando eles dão início em suas falas.

Ao longo das cenas, mostrou-se importante, em certos momentos, esclarecer ações e falas dos participantes que, por vezes, podem causar confusão ou que permitem elucidar o que o sujeito expressou e não está em sua fala (através de gestos, por exemplo). Assim, no texto da cena, esse esclarecimento é apresentado entre *parênteses* e em *itálico*, para evitar confundir com o texto das falas dos participantes.

6.2 As Cenas Significativas

Apresentamos, a seguir, as cenas constituídas pelo pesquisador nas leituras das transcrições dos encontros do curso.

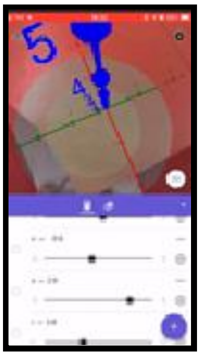
Quadro 1: Cena 1 - E1A2 - Explorando a equação da esfera

Cena 1 - E1A2 - Explorando a equação da esfera
Pesquisador: Agora nós vamos digitar a equação da esfera $(x - \mathbf{m})^2 + (y - \mathbf{n})^2 + (z - \mathbf{o})^2 = \mathbf{r}^2$. Aí, por que o **m**, **n** e **o**? Se você variar o controle deslizante do **r**, o que acontece? **Participantes**: Aumenta a esfera. Aumenta o raio. Fica maior né?! Ou fica menor! **Pesquisador**: E o **m, n e o**? **Hércules**: Sim, a posição. Em cada eixo. O **o** varia em **z**. **Fabrícia**: Gente, como que entra dentro? **Hércules**: Entrar é só entrar nela, se aproximar dela. **Fabrícia**: Ah, entendi. **Hércules**: Eu estou no centro dos eixos. Eu estou na origem, eu sou a origem! 

[20] Na pesquisa, para preservar a identidade dos participantes, foram utilizados nomes fictícios.

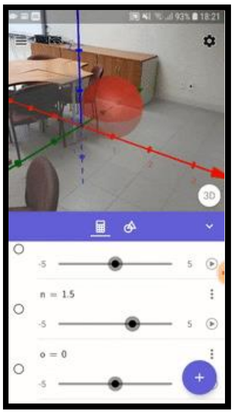
[...]

Fabrícia: Ah, entendi. (*O professor pesquisador diz para a participante ir até a esfera se movendo com o smartphone. A participante faz um movimento de aproximação em direção à esfera com o aparelho e percebe que o objeto permanece parado onde está e se surpreende com o ocorrido, e consegue observar a esfera por dentro. A participante se move pelo* **eixo z**, *num movimento de descida transpondo os pontos 6, 5, 4, 3. A participante faz mais algumas variações dos controles deslizantes e observa as variações de posição e dimensão da esfera*).



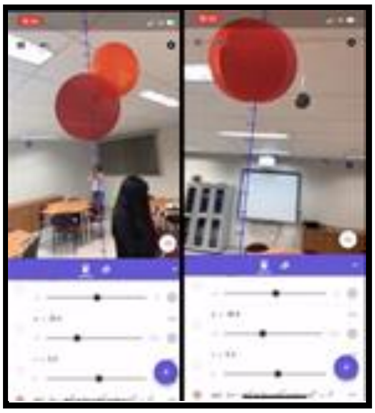
[...]

Helen: (*A participante movimenta os controles deslizantes de modo que todos indiquem o valor 0. Observa a posição da esfera, que se encontra no centro dos eixos (0,0,0). Movimenta cada um dos controles deslizantes e, após se dar conta da variação, retorna ao valor 0 de cada controle. Modifica também o controle que altera o raio da esfera, aumentando a partir de 0, acompanhando as modificações na tela. Aproxima-se da esfera e começa a se mover no interior do objeto*). **Helen:** Eu estou dentro da esfera!



[...]

Hércules: Coisa impressionante, multi linda! Agora, vamos tentar fazer isso! (*Participante observa que no teto do laboratório estão penduradas várias esferas, representando o sistema solar. Então,* *focaliza com a câmera do seu smartphone a esfera que representa o Sol e decide posicionar a esfera digital no mesmo local, fazendo variações para que ela tenha a mesma posição e tamanho que a representação do Sol presente fisicamente na sala. Vê que não consegue fazer com que a esfera digital se desloque verticalmente para cima até atingir a altura do Sol. Então, muda o limite de altura do controle deslizante que altera os valores ao longo do eixo* **z**, *altera o raio da esfera e consegue o que queria*).



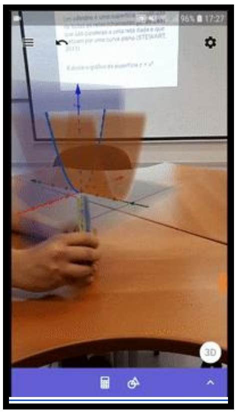
Ideias Significativas

Usa o aplicativo para investigar a posição e tamanho da esfera em relação ao sistema tridimensional de coordenadas

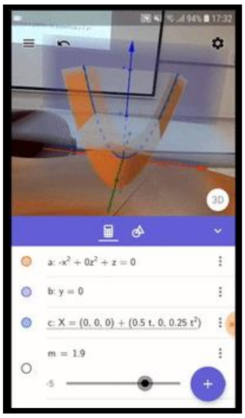
Relaciona o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente (buscam aproximar o objeto digital com objetos do espaço físico)

Quadro 2: Cena 2- E2A1a - Superfícies cilíndricas: paralelas, geratriz e curva plana

Cena 2 - E2A1a - Superfícies cilíndricas: paralelas, geratriz e curva plana.
Descrição: Partindo da definição de *Superfície Cilíndrica* presente em Stewart (2013), os participantes exploram a equação $\mathbf{z = x^2}$.
Pesquisador: "O cilindro é uma superfície constituída de todas as retas chamadas geratrizes que são paralelas a uma reta dada". O que é essa geratriz? Ou então, mais adiante, diz: "e que passam por uma curva plana". Que curva plana é essa aí, que gerou este objeto? (*Analisando a curva $z=x^2$*) **Alessandro**: Não, não é um cilindro. Vou chamar de telha (*risos*). **Pesquisador**: Isso é um cilindro? Olhem para a definição de cilindro. **Alessandro**: Mas é (*cilindro*). Não, não sei. **Pesquisador**: Coloquem aí $\mathbf{y = 0}$. **Alessandro**: É um plano. **Pesquisador**: O que gerou a intersecção? **Alessandro**: Uma parábola. Mas um cilindro não tem que estar fechado? (*Observando o gráfico da equação e percebendo que ele não tem sua forma "fechada" para ser denominado cilindro*). **Hélio:** Não. No meu ponto de vista cilindro é tudo que na projeção aqui dá tudo reta. *(Olhando a superfície de uma posição lateral, como podemos observar na Figura a seguir*).  **Hélio**: É que para mim, se você visse de lado, assim, parecia que ia ter um monte de reta… uma do lado da outra. Assim, assim, assim… até montar a parábola com todas as retas (*O participante tenta explicar que as retas estão uma ao lado da outra utilizando duas canetas que estavam em sua mão, enquanto o outro participante observa o objeto digital e o que o colega representa com o movimento das mãos e das canetas).*



Pesquisador: Formando o que? **Hélio**: Você imagina que seja um cilindro parabólico né?! Você tem um monte de reta assim… (*indicando que as retas estão uma ao lado da outra, com as canetas, no sentido vertical*). **Pesquisador**: Ah, entendi. Bom, você pode tentar observar melhor isso daí traçando um plano, **z = m**. E se vocês manipularem o **m** e criarem a intersecção entre a superfície e esse plano, você vai ver que vão ser várias retas paralelas. Observem aí. **Hélio:** Aí olha… as duas retas aqui (*O participante manipula o controle deslizante e observa as retas que são geradas pela intersecção do plano com a superfície).*



Alessandro: Ah, agora eu entendi. Paralela a uma reta dada. As retas, verdade! E a geratriz é essa última, né?! (*ao dizer "essa última", o participante refere-se à reta intersecção do plano com a superfície em* ***z = 0****, sob o* ***eixo y***).

[...]

Pesquisador: Bom, tudo bem? É cilindro? **Fabrícia**: Sim. **Pesquisador:** Helen, você está meio afastadinha. Aí, você conseguiu observar? **Helen**: Eu estou, mas eu estou conseguindo acompanhar aqui. **Fabrícia**: Aqui ó, vou mexendo e as retas da intersecção são paralelas. **Helen**: Ah sim.

Ideias Significativas
Usa a RA para analisar a intersecção de planos com a superfície gerando retas paralelas e compreender a definição de Superfícies Cilíndricas.
Faz analogia do objeto digital com objetos do espaço físico (buscam aproximar o objeto digital com objetos do espaço físico)

Quadro 3: Cena 3 - E2A1c - Associação de $x^2 + y^2 = m$ e $y^2 + z^2 = n$

Cena 3 - E2A1c - Associação de $x^2 + y^2 = m$ e $y^2 + z^2 = n$.
Pesquisador: Bom, pensando a partir do que vocês já fizeram aí (*explorando características do gráfico de* $x^2 + y^2 = m$), digitem isso daqui (*a equação* $y^2 + z^2 = n$). Podem deixar a outra superfície aí. O que vocês acham que vai acontecer? **Helen**: Vai formar um cilindro deitado. **Alessandro**: Paralelo à **x**... ao **eixo x**. Ele vai tombar 90º. **Pesquisador**: Tem alguma relação entre as geratrizes e o…**Hélio**: O eixo vai ser paralelo ao **x**. No outro, o eixo era paralelo ao **z**. **Alessandro**: Se todas as escolas tivessem computadores com GeoGebra, né? **Hélio**: Hum, agora eu estou entendendo, qual é a vantagem dessa Realidade Aumentada. Você consegue ver de vários ângulos (*referindo-se às posições diferentes em que pode observar o objeto*) **Alessandro:** Só que no 3D você também consegue. **Hélio:** Só que lá é ruim. Você tem que ficar arrastando assim, com o dedo. **Alessandro:** é.
Ideias Significativas
Relaciona a representação gráfica de superfícies cilíndricas com sua forma algébrica
Destaca o movimento do corpo-próprio para analisar os gráficos de equações cilíndricas

Quadro 4: Cena 4 - E2A2a - Explorando a Superfície Quádrica

Cena 4 - E2A2a - Explorando a Superfície Quádrica

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = p$$

Descrição: Foi proposto aos participantes gerar os planos **x = m**, **y = n** e **z = o**, e criar as intersecções desses planos com a superfície gerada. Os controles deslizantes **m**, **n** e **o**, permitiam a variação da posição dos planos e suas intersecções com a superfície.

Hélio: Vai dar um elipsóide. Ah, tem que traçar cortes em **x**, **y** e **z**. E todos os cortes vão ser elipses, menos em **y**. Vai ser circunferência no corte com **y**. **Alessandro**: Não, em **y** também será elipse, olhe a equação. Não tem como ser circunferência. **Hélio:** Realmente. (*Para observar os cortes feitos na superfície, o participante se levanta e se posiciona em um local onde possa observar as formas que são geradas com a intersecção*).

Alessandro: Só deixa eu ver uma coisa aqui (*Pede o smartphone ao outro participante e observa a intersecção por outro ângulo de visualização*). **Alessandro:** Ah tá. Do jeito que estava parecia que era uma esfera, não… uma circunferência.

Helen: Várias questões do professor de Geometria Analítica, era isso: **x = 0**, **y = 0** e **z = 0**. Aí depois tinha que determinar as retas de intersecção, as projeções… só que ele não deixava usar isso daqui não. E seria muito mais fácil de visualizar.
Ideias Significativas
Explora a forma da figura gerada (quádrica) pela intersecção do plano com o elipsóide
Considera que a visualização dos objetos matemáticos pode favorecer compreensões nas aulas de Geometria Analítica

Quadro 5: Cena 5 - E2A2b - Diálogos sobre $z = y^2 - x^2$

Cena 5 - E2A2b - Diálogos sobre $z = y^2 - x^2$
Descrição: Ao observar a equação, os participantes fazem muitas inferências quanto ao tipo de gráfico que será representado no aplicativo. Porém, demonstram também algumas incertezas em suas falas. São afirmações colocadas no campo das possibilidades. Após um momento de conversa, representam a equação no GeoGebra AR e realizam a exploração, retomando aquilo que haviam apontado anteriormente.

Alessandro: Mas estranho. Porque quando o **z** variar, o que vai acontecer? **Hélio**: Vão ser duas retas. Se você variar o **z** vai ser uma constante. O **x** se passar para lá fica **$y^2 = x^2 + k$**. Então **y** fica **raiz de $x^2 + k$**. E **raiz de menos $x^2 + k$**.

Alessandro: Verdade. **Hélio**: As duas retas fazem o traço por **z**. Faz o traço por **z** aí (*no aplicativo*). Coloca aí o plano no **z**. Coloca aí **z** é igual a uma constante… **z = o**.

Alessandro: Deu a batatinha (*risos*) (*referindo-se ao gráfico da equação e comparando ao formato de uma batata Pringles*). **Alessandro**: Mas por que não vai ser uma hipérbole, então? **Hélio**: É hipérbole sim (*o participante observa a intersecção entre a superfície e o plano* ***z = o*** *e, à medida em que move o controle deslizante, percebe que tratam-se de hipérboles*). O traço (*intersecção)* por **z** é uma hipérbole. **Alessandro**: Viu, eu sabia que tinha alguma hipérbole. Então vai ser uma hipérbole com eixo dela paralelo à **y** mesmo. **Hélio**: Só que os dois vão ficar divididos por **k**. **Alessandro:** Só que ali tem o menos. Tem várias coisas (*risos*).

[...]

Jennifer: **z = o** vai ser o que? Uma hipérbole, né? **Helen**: Sim, hipérboles. Gostei (*enquanto explora o gráfico*). Muito interessante. Agora eu passo de GA (*Geometria Analítica*).

[...]

Pesquisador: Não sei (*o nome da superfície gerada pela equação nesta atividade*). É isso que eu quero saber (*risos*). Como eu falei pra vocês, essas intersecções dão nome a essas superfícies. E as intersecções geraram que tipo de curvas?

Helen: Parábolas e hipérboles. Parabolóide Hiperbólico! (*risos*). **Helen**: Nossa, que interessante! Parábola, parábola, hipérbole… Parabolóide Hiperbólico! **Auxiliar**: Eu nunca tinha parado para pensar que os cortes dão nome. **Helen**: Sim! Eu falo que agora eu vou passar de GA. Se eu não passar agora eu não passo mais.

[...]

Hélio: Ei, eu entendi um erro. Lembra que eu falei que iria dar uma parábola e depois eu disse que iria dar menos a parábola? **Alessandro**: Sim. **Hélio**: Isso daí é a hipérbole! Ia gerar duas parábolas.

Ideias Significativas
Levantam hipóteses acerca da representação gráfica de superfícies quádricas analisando sua forma algébrica
Com o aplicativo busca compreender superfícies quádricas e sua nomenclatura
Faz analogia entre o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente

Quadro 6: Cena 6 - E3A1 - Coeficientes m, n, o e p na equação

$mx^2 + ny^2 + oz^2 = p^2$

Cena 6 - E3A1 - Coeficientes m, n, o e p na equação $mx^2 + ny^2 + oz^2 = p^2$

Descrição: Manipulando os controles deslizantes **m**, **n**, **o** e **p** e, consequentemente, os valores dessas constantes na equação, os participantes observaram a variação no gráfico da superfície gerada pela equação.

Alessandro: E se mover o **m**? Se mover o **m** vai dar uma elipse**. Hélio:** Não, não… nem sempre. **Alessandro**: Não, não é uma elipse não.

Alessandro: Não, se mover o **m**?! **Hélio:** Só que se mover para o negativo aí já dá... já dá o carretel de pipa lá (*associando o gráfico representado na tela com um carretel de linha de costura, também utilizada para empinar pipas*).

[...]

Alessandro: Nossa, ele formou um cilindro, acho. **Hélio**: Ah, formou! É porque o **n** tá zero, né?! **Alessandro**: É verdade. Cilindro!

Hélio: O **o** deve ser a mesma coisa também (*o participante movimenta o controle deslizante para verificar se, movendo o controle **o**, é possível obter um cilindro*).

[...]

Hélio: Agora deixa eu ver se colocar dois negativos (*o participante movimenta os valores de dois controles deslizantes para valores negativos*). **Hélio**: É, os dois negativos, vira… **Alessandro**: Ah, um hiperbolóide de duas folhas. **Hélio:** Isso, hiperbolóide de duas folhas.

Hélio: E se colocar os três negativos?! É, os três negativos, não dá nada, né?! Porque não tem como os três negativos dar um. Porém, se você jogar o **p** ali para negativo, aí ele volta naquele formato de esfera e elipse. Muito bem! Deu para ver legal.

[...]

Hércules: Nossa, virou uma calha, volta lá. Olha!!! **Helen**. Sim, nossa que lindo. **Hércules**: zerou o **n**. O **n** tá onde? **Helen**: O **n** está em **y**. **Hércules**: Então, zerou o **y**… deu as duas folhas.

Ideias Significativas
Faz analogia entre o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente
Levanta hipóteses e explora representações gráficas de superfícies e suas formas algébricas

Quadro 7: Cena 7 - E3A1 - “Um” olhar para o tridimensional de

$mx^2 + ny^2 + oz^2 = p^2$

Cena 7 - E3A1 - “Um” olhar para o tridimensional de $mx^2 + ny^2 + oz^2 = p^2$

Descrição: Após um período de exploração, foi solicitado que fizessem movimentações nos controles para representar os seguintes objetos: **- uma esfera**; **- uma superfície cilíndrica** e; **- um elipsóide**.

Parte da atividade solicitava que, quando eles construíssem cada um desses objetos, realizassem um *print* (*captura fotográfica da tela*) com o objeto. Em seguida, solicitamos que compartilhassem conosco esta imagem pelo *Google Drive*.

Após, o professor/pesquisador apresentou essas imagens projetadas no *Datashow* e levantou alguns questionamentos sobre as características dos objetos e de suas representações.

Os participantes conversam sobre os *print* registrados pelas duplas quando foram convidados a representar graficamente objetos tridimensionais.

Hércules: É uma bela visão (*risos*). **Participantes**: É um caderno. Um chinelo e um dedo (*risos*). **Helen**: É, a gente viu de cima. **Pesquisador**: Mas alguém duvida que isso daí é um cilindro? **Hércules**: É que a gente olhou de cima. **Pesquisador**: Será que se não tivesse a equação ali, os eixos… será que a gente iria falar que aquilo ali é um cilindro? **Hércules**: Não sei se essa visão seria... se essa visão é mais confusa. Porque essa visão de cima, essa visão meio torta dele, às vezes a gente poderia pensar que era outra coisa. **Hélio**: Talvez a gente pudesse pensar que isso era um cone. **Pesquisador**: Eu estava pensando exatamente no cone. Porque parece que ele faz assim, não é? (*movimento com as mãos de afunilar o cilindro*). Que ele vai fechando. Mas não é! Vocês observaram que é um cilindro, correto? **Hércules**: É que a gente olhou de outra perspectiva. Isso que ajuda a ver. Com essa imagem parada assim já não ajuda.

[...]

Pesquisador: Eu tinha preparado essa atividade aqui para que nós pudéssemos investigar um pouco essas variações nessas constantes que acompanham as variáveis **x**, **y** e **z**. **Hércules**: Porque nas imagens paradas, nos *print*, às vezes fica meio confuso. E isso que a gente faz aqui (*durante os momentos de exploração do curso*), as variações, a gente fica olhando para todo lado. E a gente vai olhando de diferentes perspectivas. **Helen**: Eu achei interessante porque foi a partir de uma equação só. E podemos fazer variações e observar o que ocorre, e nós fizemos tudo. **Pesquisador**: E nós fizemos todas as superfícies da semana passada? **Hércules**: Quais foram as da semana passada (*esse participante havia faltado ao encontro anterior*)? **Participante**: Faltou a superfície de sela. **Pesquisador**: Mas a superfície apareceu aí para vocês na hora que vocês fizeram as manipulações? **Alessandro**: Eu acho que nem a parábola apareceu também. **Hélio**: Mas para aparecer a parábola, um dos três termos lá teria que ser linear, não poderia estar elevado ao quadrado. **Hércules**: Verdade! Por isso não apareceu também a calha parabólica.

[...]

Pesquisador: Na elipse, no elipsóide na verdade, dependendo de onde você olhar ele, você pode observar diferentes formas aparecendo. **Hércules**: Ele pode parecer uma esfera, se você olhar retinho assim num plano. **Helen**: Dependendo do valor que você deixar também, porque se você deixou só um pouquinho diferente vai ser uma elipse. Mas você vai conseguir observar que mudou só um pouquinho? **Hércules**: Sim, com certeza (*concordando com a participante)*. Mas uma esfera é um elipsóide, não é?! **Pesquisador**: Sim, um elipsóide só que ela… **Hércules**: Os dois focos da elipse estão no mesmo lugar.

[...]

Jennifer: Eu já tinha usado o GeoGebra mas não na parte de realidade aumentada. Então, dá uma outra visão quando você vê a figura e tudo mais. **Pesquisador**: O que vocês veem de diferente? Porque vocês falam que é bonito, que é legal e que é uma outra forma de ver a figura. **Hélio**: Acho que o que tem de diferente é que você consegue ver uma superfície assim, como se ela estivesse aqui

na nossa sala, se você quer ver ela de lado, você só chega e vira assim para ver o lado. Se você quer ver ela de baixo, é só você se deitar e olhar por baixo. É como se fosse essa mesa aqui. **Hércules**: Acho que o diferente do Geogebra 3D do computador, do celular, que a gente já usava antes (*referindo-se à versão do GeoGebra sem o recurso de RA*), por exemplo, é que ali ainda é um negócio 2D. Na realidade aumentada você tem a perspectiva toda, ainda não é um negócio 3D, mas parece muito mais 3D mesmo, muito mais tridimensional. Por exemplo, quando a gente desenha na lousa, tem toda uma distorção, é uma idealização, um recorte. **Helen**: O que eu achei interessante, como na semana passada, foi que a gente fazia intersecções e os cortes, porque eu não sabia que tinha esse recurso no Geogebra. Eu acho que deu outra visão.
Ideias Significativas
Visualiza tridimensionalmente em RA e destaca características de objetos matemáticos
Levanta hipóteses e explora representações gráficas de superfícies e suas formas algébricas
Faz analogia do objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente
Corpo-próprio muda de posição para ver as características do objeto digital
Considera que a RA dá uma “quase” presença do objeto digital (materialidade)

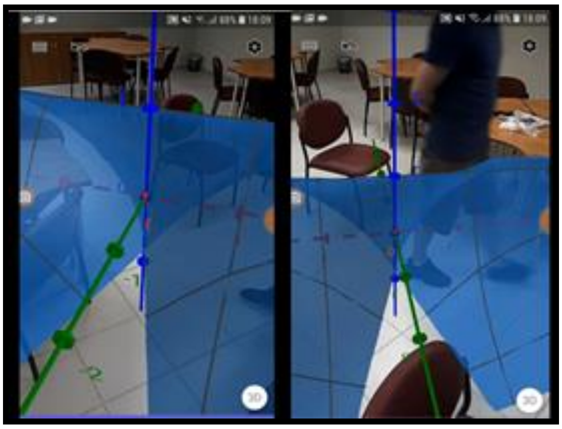
Quadro 8: Cena 8 - E3A2 - A *bagunça* do limite

Cena 8 - E3A2 - A *bagunça* do limite:

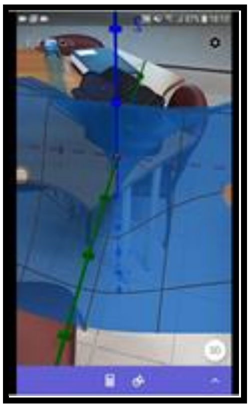
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

Descrição: Neste momento, os participantes são convidados a analisar o gráfico da função acima e a não existência de seu limite no ponto (0,0).

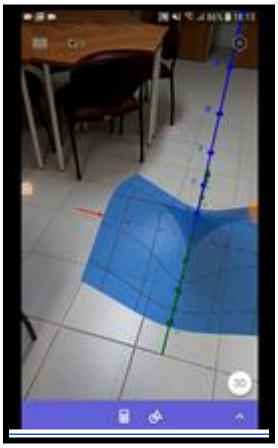
Alessandro: Eu não sei se existe. **Hélio**: Ah, tá parecendo que existe sim. **Alessandro**: Ah, verdade. Todos tendem para o mesmo… apesar que não, olha! Apesar que ela é igual de todas as perspectivas. Apesar que não. A ideia é que todos tendam para o mesmo lugar, eu acho. **Hélio**: Agora está dando para ver… parece que ela está se afundando no zero.



Alessandro: Então, está estranho. Será que todos tem que tender para um mesmo ponto? **Hélio**: É. Porque é o que é limite, né?! Ir para um valor. **Alessandro:** Eu acho que não… (*não existe).* Eu não sei dizer, na verdade. **Hélio**: Não dá para ver direito. Mas está parecendo que existe sim. É onde está batendo no **eixo z**, aqui. **Pesquisador:** E aí, existe ou não existe? Se existe, é quanto? **Hélio**: Bom, parece bater no 1. [...] **Pesquisador**: E agora? **Hélio**: Aqui está fundão. Aí depois ele começa a subir. E parece bastante que ele vai subindo até o 1. **Alessandro**: Mas não é… olha lá a parte de baixo. Ah, não sei.



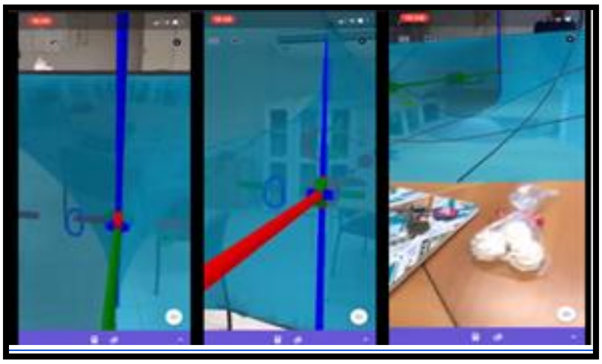
Alessandro: Tem aquela parte ali que parece amassada. Eu acho que não existe porque se você virar a figura (*o participante se move para ver a superfície de outra perspectiva*)… olha aqui para você ver. Se você olhar daqui é **1**. E se você virar a figura, vai passar no **-1**.



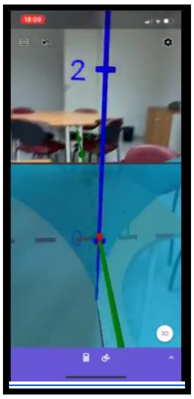
Alessandro: Vamos dizer que estes daqui são os caminhos... esses riscos pretos aqui. **Hélio**: É verdade! Tem caminho que vai para **1** e tem o de baixo que vai para o **-1**. **Alessandro:** É. Então não existe.

[...]

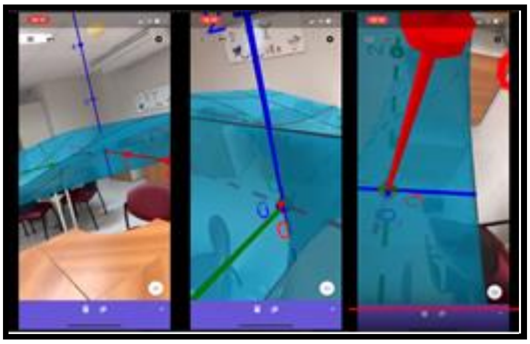
Hércules: Aí, agora vamos mexer. A gente tem que entrar no zero, vamos entrar nele. O que é indo para o zero, porque é o zero que a gente quer. Olha...



Hércules: Vamos pensar! Qual que é o **x**? É o vermelho (*fazendo referência a cor de cada eixo*). O **y**, que é o verde. Vindo pelo verde aqui olha… o que é?! Quando **x** e **y** tendem à zero (*referindo-se ao ponto (0,0), considerado para a verificação do limite*), a função vai para onde? O **z** é o que? O **z** vale quanto? Olha, aqui em cima ele ta meio para **2**… não… para **1**. E aqui embaixo, o **z** também está aqui embaixo, ele vai para **-1**. No **-1** e no **1**.



Hércules: É, porque, olha! Bate aqui embaixo, bate aqui em cima. Ele está indo para o **-1**... Ele está indo para o **1** e para o **-1**. Então, está meio esquisito. Mas eu não entendi essas coisas… complicado, né?! Mas é meio bagunçado. Olha aqui, vem ver um negócio aqui. Olha esse túnel… porque olha aqui… bate aqui em baixo e bate aqui em cima. Me lembra o gráfico de uma função… como que é mesmo?! Daquela que é, por exemplo, **seno de π sobre x**, umas coisas assim, que tem no cálculo 1, lembra? Que não tendia a nada... que ele vai tender em cima e em baixo, lembra? Ah, intuitivamente eu falaria que ele não existe (*o limite da função*). Mas eu não lembro direito das coisas aqui. **Helen**: Esquisito. **Hércules:** Não é?!



[...]

Pesquisador: Mas por que vocês acham que não existe?

Hércules: Eu não lembro da definição bem direitinho. Meio que parece que ele está alternando, o **z** está meio bagunçado, ele tem vários valores ali, onde chega o zero. **Pesquisador**: É, e como estamos falando do limite, é o limite em um ponto, e este ponto é o (0,0). E ali, onde você está falando, é o **z**, que você está falando que tá bagunçado. E você viu o que bagunçado? **Hércules**: Não dá para ver onde esse **z** está quando o **x** e o **y** é igual a 0. Não parece que está num lugar só, como deveria estar para que houvesse limite.

[...]

Hércules: Caminho seria a direção que você segue. Então, se você olhar de uma perspectiva, parece que o **z** é **-1**, sei lá. Se olhar de outra perspectiva, é **1**. Não sei. **Jennifer**: É que se você olhar de cima assim, por exemplo, os valores que ele vai abrindo, eles estão tendendo ao mesmo valor ali no eixo, só que a hora que você vê que se aproxima do 0, o de cima está no **1** e essa figura, parece que é duas se encaixando assim, está no **-1**. Acho que é a única diferença porque o resto aí vai tender tudo ao mesmo valor.

[...]

Pesquisador: Então o que ele (*Hércules*) fez foi considerar, caminhando pelo **eixo x**. Com isso você fixa o **y = 0**. E aí vai tender para **1**. Agora caminhando ao longo do eixo **y**, fixando o **x = 0**, aí vocês mostraram para mim que o valor de **z** estava indo para **-1**. Então, como caminhos diferentes tendem a valores diferentes, o limite não existe. Lógico, o exercício disse que o limite não existia. Mas vocês conseguiram perceber através da observação da imagem, que esse limite realmente não poderia existir, sem fazer os cálculos que o autor apresentou no livro, por exemplo.

Hércules: Isso é o tipo de coisa que a gente não conseguiria observar. Com o desenho estático a gente não conseguiria ver isso daí, ficaria muito difícil. Porque a gente tinha que olhar do lado, para o outro, por cima, por baixo, para a gente ver que **z** estava assumindo valores diferentes. Tudo isso é

complicado de desenhar, por exemplo, de tirar uma foto. Se tirasse o print ficaria complicado também de fazer isso. Esse negócio de limite é muito difícil imaginar. Em cálculo dois era uma coisa que eu tinha muita dificuldade. Era muito difícil pensar e imaginar esses caminhos [...]
Ideias Significativas
Corpo-próprio muda de posição para ver tridimensionalmente o gráfico da função e explora os "caminhos" para verificar a existência do limite da função
Levanta hipóteses e explora a representação geométrica, considerando a definição de limite.
Discutem a existência do limite de uma função, buscando uma solução coerente com o enunciado da tarefa

Quadro 9: Cena 9 - E3A2 - Os caminhos para o limite

Cena 9 - E3A2 - Os caminhos para o limite

Descrição: Para auxiliar na visualização dos caminhos, foi proposto aos participantes que criassem no aplicativo os planos **x = 0** e **y = 0**, e gerassem as curvas de intersecção entre esses planos e a superfície.

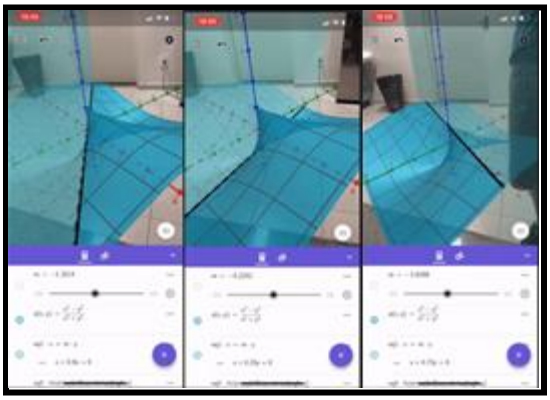
Hércules: Vamos criar a intersecção de superfície. Deixa eu ver se funciona aqui. Olha aí, funcionou! Agora vamos criar a intersecção… essa e essa. Ai, que bonito. Olha isso, a intersecção. Então se eu estiver indo por essa direção ele bate aqui e por essa direção ele bate aqui. Olha… vem ver! Legal né?! **-1** e **1**.

Helen: Então, quando ele vem… **Hércules**: Pelo plano, né?! **x = 0** e **y = 0**… depende do plano que você se aproxima… porque esse é o caminho. Muito legal de observar assim. **Hércules**: E se a gente for por outro caminho? Vamos tentar ir por outro caminho. Um caminho, quer ver, olha… vamos fazer um plano, um plano inclinado, **x = y**. Aí vamos fazer a intersecção. Olha aí… porque é por todas as direções, né?! Teoricamente. Vamos observar agora aqui… olha só, cruzando o zero. Olha, que legal!. **Helen**: Então aí ele não existe?! **Hércules**: É porque por cada direção ele é diferente. Por um *(caminho)* é **1**, por outro é **0**, e por outro é **-1**!

Hércules: Vamos fazer por outro plano? Porque isso é fantástico! Porque é uma coisa muito difícil de visualizar. Cálculo 2 a gente não conseguia visualizar desse jeito. Vamos fazer mais um plano. Qual outro plano a gente poderia… tem que ser em **x** e **y**… vamos tentar **x = 4y**, para mudar a angulação. Não sei onde está este plano. Aqui, eu acho. Opa, cadê agora… intersecção… aqui! Olha aqui, olha. Esta outra reta está no… não tá no **1** não, tá quase. Então, muitas direções. **Hércules**: Pesquisador, a gente fez por várias direções. Cada uma deu uma coisa diferente. **Helen**: Eu quero ver uma agora que o limite existe.

[...]

(*Logo após o encerramento do encontro, os participantes estavam reunidos ao sair da sala, momento em que um deles decide utilizar um recurso do aplicativo, criando um plano* ***x = my****, com controle deslizante, que havia utilizado para constatar a existência ou não do limite da Atividade 3. Fazendo variações no controle deslizante e observando as modificações no gráfico, constata que variando os caminhos, o valor da função no ponto (0,0) muda. Logo, o limite para aquela função, no ponto determinado, não existe.*



Ideias Significativas
Exploram os "caminhos" para a verificação de limites de funções de duas variáveis
Corpo-próprio muda de posição para explorar os caminhos e verificar o limite de funções de duas variáveis

Com o aplicativo, cria uma estratégia para explorar os caminhos para verificação do limite
Compara a exploração dos caminhos em RA com outras formas vividas nas aulas de Cálculo

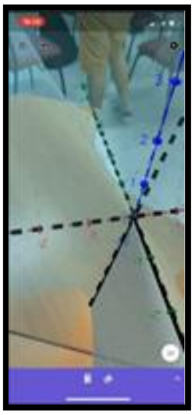
Quadro 10: Cena 10 - - E3A3 - O limite existe

Cena 10 - E3A3 - O limite existe

Descrição: Nesta atividade, os participantes são convidados a verificar o limite de uma função, caso ele exista.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Helen: Pode fazer já, os planos? **Hércules**: Vamos entrar ali no meio, vamos olhar, olha ele por baixo. Não tem nada ali, como tinha naquele outro. Não parece que tá indo pra outro lugar, tá vendo? Agora vamos traçar alguns planos pra ver. **x = y**, **x = 0** e **y = 0**. Já é o suficiente acho, né?! Assim, não é o suficiente, mas... Agora, intersecção de todo mundo. **Helen**: Vai tender tudo a zero?! **Hércules**: Aí foi, os três. Olha isso. Este daqui está até inclinado aqui. Está vendo, todos estão no zero. Espera aí, deixa eu apertar aqui, vamos ver… dá nos três, olha. São três retas… tá inclinada aqui, no plano **x = y**. Olha que bonito…



Hércules: A gente poderia fazer uma coisa meio doida. A gente poderia fazer um plano com controle deslizante. Aí a gente pode… Vamos fazer isso. Vai ficar muito bonito. **Helen**: **x = m**… **Hércules**: **x = my**. Vamos fazer isso. Agora. Opa, já está interceptado… perfeito. Olha isso daqui! Que coisa linda!!!

Helen: Nossa, ficou muito bom! (*risos*). A gente fez um plano com controle deslizante e aí agora, na hora que a gente mexe o plano, tipo…(*movimento de girar com as mãos)*. **Pesquisador:** Mostra a intersecção? **Helen**: Isso. Olha lá, vai tudo para o zero. **Hércules**: E eu posso aumentar o **m**. Agora sim… olha! Aí vai variando o plano, está vendo (*enquanto mostra o movimento a outro participante*)? Aí todos os lados, o plano corta no zero.

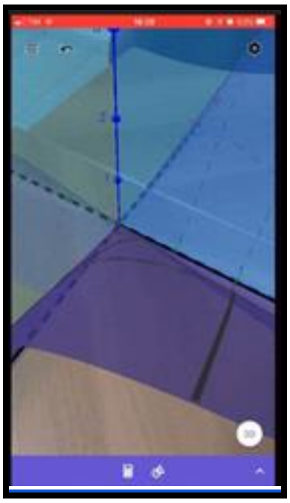
[...]

Hércules: É quase uma demonstração! Então, por vários caminhos… por todos os caminhos diferentes, ao redor… por todos caminhos a gente… **Alessandro:** Ah, sim. Por infinitas retas! Nossa, muito interessante. **Hércules:** Perfeito. É quase uma demonstração, olha que legal! C.q.d. por GeoGebraAR (*" c.q.d. - Como queríamos demonstrar", fazendo referência à frase comumente utilizada em demonstrações em livros de Cálculo*). **Alessandro:** Sim! C.q.d. por GeoGebra. **Hércules**: "Por GeoGebra, podemos considerar que…" (*risos*).

[...]

Jennifer: Ficou estranho, né?! **Fabrícia:** Parece um papel amassado. **Jennifer**: Deixa eu colocar aqui… **Fabrícia:** Colocou os planos? **Jennifer:** É que tá verdinho… não dá pra ver (*se referindo aos planos*). Acho que agora foi, né? O pretinho. **Fabrícia:** Sim. **Jennifer:** Não sei se adiantou alguma coisa. **Fabrícia:** Eu acho que existe sim, olha! Tá vendo? As duas (*retas*). Os pretinhos (*as retas de intersecção*) estão na mesma direção (*ambas retas cortam o eixo z no ponto (0,0)*).

Jennifer: É, eu não tô conseguindo ver isso na figura. O porquê que eles existem. **Fabrícia:** É, a gente não está conseguindo ver muito bem não. **Jennifer:** Eu sei que existe. Mas na figura não estou conseguindo enxergar direito o porquê. **Pesquisador:** Por que você acha que ele existe? **Jennifer:** Não, assim… fazendo o cálculo eu sei que ele existe. Mas na figura eu não estou conseguindo enxergar. **Pesquisador**: O que tem que acontecer na figura? O que tem que acontecer, diante da definição? Nós estávamos falando de caminhos, não era isso? Nas duas dimensões, bastava olharmos para a direita e para a esquerda. Mas aqui, são três (*dimensões*). Então, são infinitos caminhos que podemos nos aproximar do ponto. Então, você tem que observar como se comporta a curva, próximo desse ponto. Então assim, por aqui… você até traçou o plano em **x = 0**, o plano em **y = 0**… e você viu que tende ao mesmo valor. E qual é? **Jennifer / Fabrícia**: zero. **Pesquisador:** Agora, você tem que observar como se comporta ela (*a curva*). Se todos os caminhos que vocês seguiram foram para o zero também. Essa curva é diferente da outra? O que vocês acharam? Nas proximidades do ponto (0,0). Vamos pegar um caminho aleatório… este daqui. Está indo para onde? Estou descendo e está indo pra onde (*o professor/pesquisador se move percorrendo a superfície do gráfico, partindo de um local, na direção de (0,0)*) ?



Jennifer: Tudo está indo para o zero, para a origem. **Pesquisador:** Ele (*outro participante*), fez um plano com controle deslizante e que, variando, sempre vai mostrando a intersecção. E sempre vai dando uma reta passando ali pelo (0,0), pela origem. **Hércules:** Aqui olha… vou variando e por todos os lados, tende a zero. **Jennifer / Fabrícia:** hum…entendi. [...] **Alessandro**: Olha lá. Vamos tentar até (0,0) de novo. **Hélio:** Tá difícil de ver embaixo. **Alessandro:** É. Vamos tentar em outra direção. Ah, eu não sei não. Na verdade, acho que todo mundo vai para o mesmo, pra **0**, né?! Ou não. Verdade, acho que... Tá vendo? Olha! Aqui também vai pra **0**. **Hélio:** Eu também acho. Faz a intersecção aí. **Alessandro:** É, se você tentar dessa vez para o (0,0) vai existir. Vamos ver **y = x**. É a bissetriz, não é?! Bissetriz! **Hélio:** Teste da bissetriz. Eu acho que dá **0**. Resumindo, zero em tudo. No da parábola deve dar **0** também, eu acho. Difícil é provar que existe. É mais fácil provar quando não existe. É, nos cálculos, sim. **Alessandro**: Verdade, é mais fácil provar que não existe. Porque você tem infinitos caminhos para provar que é igual.
Ideias Significativas
Levanta hipóteses sobre como construir “todos os caminhos” para verificar o limite da função
Faz exploração para validar hipóteses
Corpo-próprio muda de posição para verificar a existência do limite da função
Consideram que com a RA podem construir uma validação matemática semelhante a uma demonstração

Quadro 11: Cena 11 - E4A1 - Um outro limite

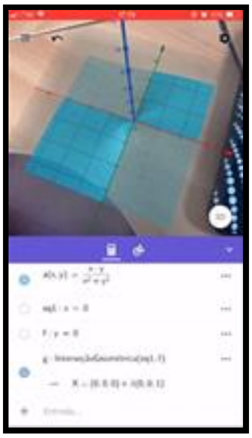
Cena 11 - E4A1 - Um outro limite

Descrição: Nesta atividade, os participantes são convidados a verificar a existência ou não do limite para a função, quando (*x*,*y*) tendem à (0,0):

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Jennifer: Mas não dá **0**. Não tem que dar **0**?! Dá quase **1**, olha. Porque parece que, sei lá... não parece que tá indo para o **1**?! Nem é **1**. **Fabrícia:** Não, é quase **1**.

Jennifer: Deve ser que está tendendo, né?! **Fabrícia:** Mas você viu que está formando dois quadrados?! **Jennifer:** Mas tem essa pontinha, que une os dois. Parece que ele sobe um pouquinho assim. **Fabrícia:** Vamos pôr os planos para ver. **Jennifer:** Tenta fazer a intersecção com ele de novo, com os planos **x = 0** e **y = 0**.



Jennifer: Hércules, aquela intersecção você só criou os planos **x = 0** e **y = 0** e depois a intersecção entre eles? **Hércules:** A gente fez uma reta, digo, um plano **x** igual a alguma coisa **y**.

Porque tem que ser um plano variável, **y = bx**. Aí, você varia o **b**, que é controle deslizante. Aí o **b** vai variando este plano. Aí, você cria a intersecção do plano com a função. Porque daí saiu uma reta que cruza o **(0,0)**, o **eixo z**, em algum ponto. Aí você vai variando e vai vendo que cada hora a reta cruza num ponto diferente. Então, o limite diverge… e ele não existe.

[...]

Pesquisador: Se vocês quiserem observar melhor, tentem se mover e observar os caminhos que levam até o ponto. **Jennifer:** Então eu acho que não existe. **Fabrícia:** Acho que um está tendendo a **0**, e outro está tendendo a $\frac{1}{2}$. **Jennifer:** Olha nessa curva está indo para quase **1**. Nessa outra, aqui do lado... **Fabrícia:** Está indo para **0**.

[...]

Hércules: Legal quando o limite existia, né?! Quando ele existia ficava sempre no mesmo negócio, no mesmo ponto. **Pesquisador**: Isso. Você usou para verificar que o limite existia, certo?! (*o participante explica que utilizou, em outra atividade, a mesma ferramenta para verificar que o limite da função existia*) **Hércules:** Sim. Independente do caminho que você seguisse, quando você se aproximava para (0,0) tendia sempre para o mesmo valor, que era **0**. Então esse limite existe? Sim. O limite existe e é **0**.

Ideias Significativas

Corpo-próprio muda de posição para analisar os caminhos e verificar a existência do limite da função

Expressam o compreendido acerca da existência do limite de uma função

Usam o aplicativo para expor um modo de realizar a exploração

Quadro 12: Cena 12 – E4A2 – A profundidade do lago

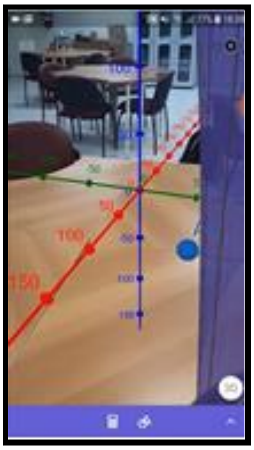
Cena 12 – E4A2 – A profundidade do lago

Descrição: Nesta atividade, os participantes são convidados a pensar sobre uma atividade que propõe a seguinte situação:

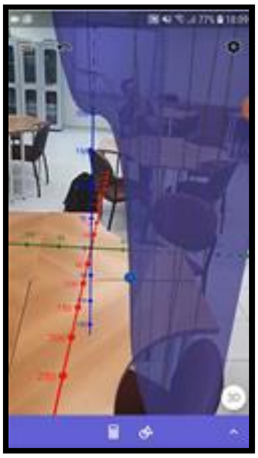
> Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas **(x,y)** é $\mathbf{z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3}$, em que **x**, **y** e **z** são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto **(80,60)** em direção a boia, que está localizada no ponto **(0,0)**.

a) A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover?
b) Como você pensou para responder esta questão?
c) Qual a profundidade aproximada do lago no ponto **(80,60)**?
d) Qual a profundidade do lago no ponto **(0,0)**?

Hélio: Achei. **Pesquisador:** Achou o quê? **Hélio:** Ah, o ponto. **Pesquisador:** E onde está o ponto? **Hélio:** Ah, é aquela bola ali.



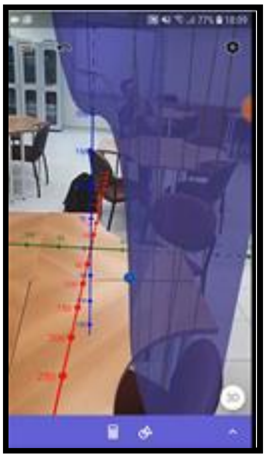
Alessandro: Mas eu não estou entendendo. É um lago? **Pesquisador:** E o que é este **A**? **Alessandro:** É o ponto, do barco. É onde o barco está. E a origem tá lá, olha. **Pesquisador:** Então vai para a origem. Como que vai para a origem? Não é isso que o exercício está pedindo?! **Alessandro:** Eu não estou vendo o lago, para falar a verdade (*risos*). **Pesquisador:** É, realmente não tem o lago aí. Pense então no que a função representa para a gente. **Hélio:** Bom, eu achei que a função fosse a superfície do lago. Mas na verdade não é bem assim. A função é a profundidade. Então, quer dizer que se a gente jogar **(80,60)** no **z**… olha, pensa bem! No **0**, a profundidade é **200**. **Alessandro:** No **(0,0)** a profundidade é **200**.



Hélio: Agora, no **(80,60)**, a profundidade vai ser ou maior ou menor. Aí vai se ele está indo... se está ficando mais raso ou mais profundo. Deixa eu ver. **Alessandro:** Não consigo ver. **Hélio:** Deixa eu tentar uma coisa rápido?! **Alessandro:** Pode tentar (*o participante digita no campo Entrada **f (80,60)**. Deste modo, obtém o valor da função no ponto **(80,60)**, e a profundidade do barco naquele ponto, que é de **112m***).

Alessandro: Então a profundidade vai ser **112**? **Hélio:** Sim. **Alessandro:** E agora, qual era a pergunta? **Hélio:** Ah, quer dizer que tá ficando mais raso… **Alessandro:** Não, está ficando mais fundo. **Hélio:** Não, está ficando mais raso. Se a profundidade é menor. **Alessandro:** Não, ele está se aproximando da origem. E na origem a gente viu que a profundidade é **200**. **Hélio:** Ah é! Quer dizer que está ficando mais fundo.

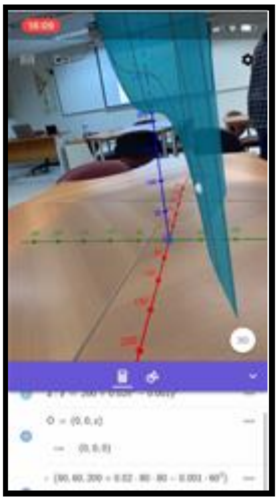
Hélio: Eu vou tirar aqui agora, olha. Vou tirar aqui então e colocar vírgula **112** (*o participante coloca a terceira coordenada do **ponto A**, local inicial do barco, inserindo o valor de **112**, que obteve no aplicativo*). Aí olha, você viu, agora pegou certo o ponto. Agora ele está na função.



Hélio: Fiz errado. Veja aqui (*o participante modifica a coordenada **z**, do ponto **B**, inicialmente localizado na origem dos eixos, obtendo **B = (0,0,200)***). **Hélio:** Agora sim. Aqui, olha. Agora dá para ver melhor.

[...]

Hércules: Tá. Hum, achei os pontos. Agora… hum, boa ideia a deles (*o participante opta por inserir as coordenadas **(80,60)** na função profundidade. Logo, o ponto **P**, localização inicial do barco, toca a superfície da função.*

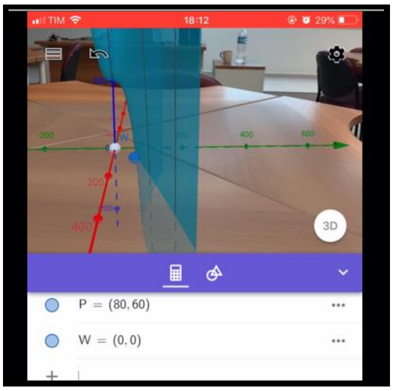


Hércules: Aí, garoto! Na origem, **x** e **y** são iguais a **0**. Então vai dar **200** (*o ponto O, destino do barco, se desloca da origem, para a posição **(0,0,200)***). Esta função representa a profundidade, né?! Em direção à boia que está… a água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa? Hum, interessante. Tá, vamos ver. Vamos usar a intersecção.

Hércules: Tá, vamos fazer um plano… tá, vamos na observação porque eu não preciso fazer esse negócio (*o plano e a intersecção*). Tá! O pescador está aqui. A profundidade dele é essa (*clica no ponto **P***). Quando ele vai chegando na boia, a profundidade vai aumentando, aumentando, aumentando… até chegar aqui (*clicando no ponto **O = (0,0,200)***). Porque a profundidade é esta daqui. Aqui é o **100**, então aqui é **200** (*se movendo no **eixo z**, passando pelo **100**, até chegar no ponto **O**, que está no **200***).

[...]

Pesquisador: Então vamos pensar mais um pouco. Coloque lá no ponto **(80,60)**. A partir daí, ele vai se mover para o ponto **(0,0)**, certo?! Na direção deste ponto. O que indica para você a função **$z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$**? Leia a atividade. **Fabrícia:** É a função que indica a profundidade. A profundidade é o **z**. **Pesquisador**: Então, olhando para o aplicativo, você sai de onde e vai até onde? **Fabrícia:** Sai daqui e vai até lá. Então aqui no **(80,60)** indica que está mais próximo da superfície. **Pesquisador:** E isso me indica o que? **Fabrícia:** Que é menos profundo. Então se ele se move, está aumentando a profundidade, isso? **Pesquisador:** Acho que sim, né?

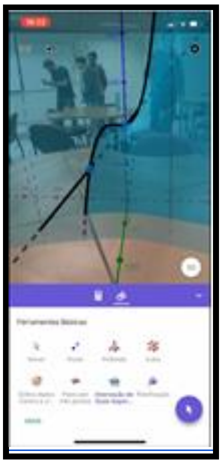


Fabrícia: Agora eu entendi. Porque o azul (*gráfico da função)* é o **z**, certo?! Então ele está mais próximo em **z**. Então ele tende a estar mais fundo. Porque a gente está falando de profundidade e o z indica isso. No caso ele está mais no raso e ele está indo para o mais fundo.

Alessandro: Ah, agora tem como criar um plano, com três pontos. **Hélio:** Que três pontos? **Alessandro:** Ache o ponto médio. **Hélio:** Não adianta. Tem que ser três pontos que não esteja na mesma reta. **Alessandro:** É verdade né?! Se não pode dar infinitos planos né?! Faz todo sentido. **Hélio**: Eu quero traçar o plano, porque eu quero ver o caminho. Esta reta aqui não está seguindo realmente a função (*reta que liga os pontos* ***A (80,60,112)*** *e* ***B (0,0,200)***). Vamos pensar. Este plano, ele não depende de **z**. Então a gente sabe que o **z** é igual a **0**. Professor, a gente quer criar um plano que trace o caminho assim, olha. **Pesquisador:** Então, vamos lá. Para criar um plano vocês têm o quê aí? Tem que ser um plano que passa por onde?! **Hélio:** Tem que ser um plano que passe por esses dois pontos aqui (***A*** e ***B***) e não dependa de **z**. **Pesquisador:** Para criar um plano, você consegue criar com dois pontos? **Hélio:** Não dá. **Pesquisador:** Então, precisa de um terceiro? **Hélio:** Isso. **Pesquisador:** Será que a gente não tem um terceiro ponto? O ponto (0,0) não pertence a esta função?! **Hélio:** Pertence. Mas é o (0,0,200). Mas se coloca o (0,0) aí dá certinho, né, o plano?! Vou tentar. Agora consegui. Agora vamos criar o plano. **Alessandro:** Tem que clicar nos três pontos. **Hélio:** É difícil acertar aqui (*risos*). Pronto, agora foi. Vamos só criar a intersecção do plano com a superfície. Aí, olha… agora foi. Tá ficando mais profundo mesmo. Aumentou a profundidade. **Alessandro:** Ficou mais fundo. **Hélio:** Olha aqui o caminho. Conseguimos!

[...]

Hércules: Eu queria fazer a intersecção. **Participante:** Mas o Pesquisador conseguiu fazer essa intersecção. **Hércules:** Bom, deixa eu usar a ferramenta de intersecção. Olha lá! Agora gerou. Sim, gerou a intersecção entre o plano e a função, deu uma curva. Agora está certinha. Dá pra ver como variou.



[...]

Pesquisador: E tem a pergunta: qual a profundidade do lago no ponto? **Hélio:** Então, eu transformei o **z** numa função **f (x, y)** e só escrevi embaixo **f(80,60)**. Aí ele deu, ali na barra de comando. **Pesquisador:** E quanto que deu lá? **Hélio: 112**. **Pesquisador:** Hum, bem legal. Aí você já encontrou o valor exato da profundidade. **Pesquisador:** E a profundidade do lago no ponto **(0,0)**? **Hércules:** É **200**. É a profundidade da boia. **Alessandro:** Este é bem mais fácil de perceber. É só olhar na origem e ver que ele toca o **z** no **200**. **Pesquisador:** Isso é algo que quando eu estava pensando na atividade… que poderia ser uma dificuldade em perceber que a profundidade está aumentando. Porque o que o **z** indica pra mim? A profundidade! E parece que ali você está subindo, né?! **Hércules**: Bom, eu tinha identificado isso daí, que estava ficando mais profundo. Então, não adianta ficar pensando só na função. Então, estamos pensando na situação e no aplicativo, estamos pensando na função e no gráfico. Um gráfico de profundidade e são coisas separadas, né?! **Pesquisador**: Como assim?! **Hércules**: A função fala da profundidade, só. Não fala do lugar. Não fala sobre o formato do lago, por exemplo.

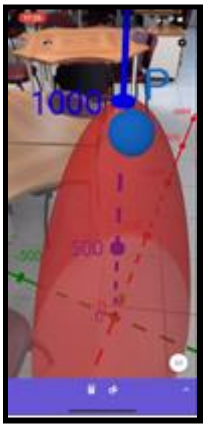
Ideias Significativas
Explora gráficos e os elementos representados no espaço de coordenadas tridimensional
Expõe o raciocínio matemático, o modo como compreende a tarefa e interpreta o resultado obtido
Discutem a tarefa para ver um modo de, com a RA, propor uma solução coerente

Quadro 13: Cena 13 – E5A1 – A posição e sentido

Cena 13 – E5A1 – A posição e sentido

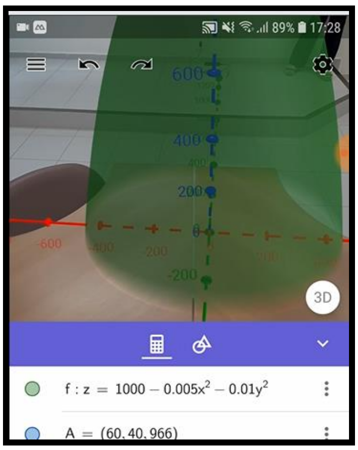
Descrição: Neste momento, os participantes são convidados a investigar a equação que representa a altitude de uma montanha **$z = 1000 – 0,005x^2 - 0,01y^2$.** Nesta atividade, os eixos **x** e **y** são utilizados para direcionar os deslocamentos na montanha, de acordo com os pontos cardeais.

Hércules: Muito interessante (*observando a projeção do gráfico e relacionando-a com o objeto que ela representa, altitude de uma montanha*). Agora, vamos continuar o enunciado para olhar o resto. Estava maravilhado com a montanha. **P**, é um ponto… ah, a gente está em um ponto. Parece muito o Pão de Açúcar, realmente. **P=(60,40,966)**. Tá, agora eu criei o ponto **P**. Olha só, a gente está quase chegando.



[...]

Alessandro: Deixa eu ver. Então, Leste… Oeste… Norte… negativo é Sul. Então, a gente está olhando para o Norte. **Hélio:** Olha, ele está batendo certinho. Olhando para o Norte.

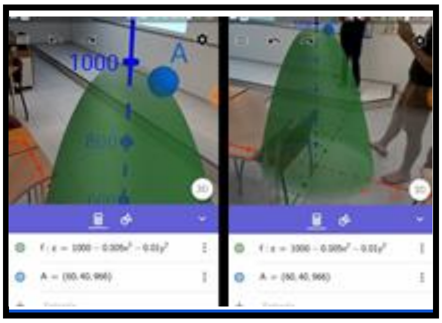


Pesquisador: Então, o **y** apontando para o positivo é o Norte. Então, se eu estiver caminhando para o **y** negativo, eu estou caminhando para o Sul. **Hércules**: Exatamente, é o oposto. **Pesquisador:** O Leste é o **x** positivo, o Oeste é apontando para o **x** negativo.

Alessandro: Isso lembra muito construção civil. **Hércules:** Você mexe com construção civil? **Alessandro:** A gente usa isso para poder projetar. Eu fiz (*curso*) técnico.

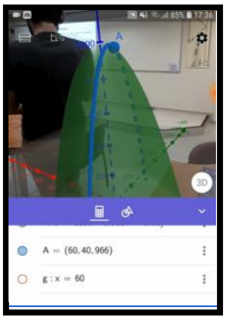
[...]

Pesquisador: Agora vem as perguntinhas: se você andar exatamente para o Sul, você vai começar a subir ou a descer a montanha? **Alessandro:** Pera aí. Então vamos lá! Red… Sul… não, espera aí. O Sul é para lá. Não, Norte-Sul. **Hélio:** Se ele vir pro Sul ele vai descer né?! **Alessandro:** Não. Se ele olhar para o Sul, ele vai dar uma subida. O Sul é para cá. O Norte é para lá. **Hélio**: Não, o Sul é para cá, olha. **Alessandro:** Não. Negativo, olha aqui. **Hélio:** Mira no ponto. **Alessandro:** O ponto está aqui, olha. Lá é Norte. O Sul é para cá. O Norte é sentido positivo do **y**, e o **y** é verde. Esse lado aqui... (*o participante está posicionado próximo aos pontos negativos do eixo y*) **Hélio:** Então aqui é o Sul?! **Alessandro:** Aqui é o Sul. Ele está do outro lado, ele vai ter que vir para cá e ele vai ter que vir um pouco pra cima. **Hélio:** Mas ele vai ter que descer aqui. Ele não tá do outro lado. **Alessandro:** Ele tá do outro lado. Vem aqui para você ver. **Hélio:** Ah, pior. Ele vai subir um pouquinho e depois vai descer. Realmente. **Alessandro**: Ele vai dar uma subidinha e vai descer.



[...]

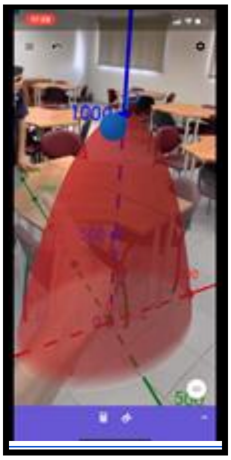
Pesquisador: Então, a direção que você vai caminhar vai ser esta aqui (*direcionando o smartphone e apontando para o sentido Norte-Sul*). Então, por que o plano?! (*o participante tem a ideia de criar um plano*). **Hélio:** É, eu vou fazer a intersecção aqui e aí vai dar para ver, não é isso?! **Pesquisador:** É, porque aí vai estar o caminho que você vai seguir na direção Norte-Sul. Porque ele deu a direção para você, não é isso?! **Hélio:** Sim. É que agora eu tirei, mas eu tinha feito o **x = 60**. **Pesquisador:** E qual a direção, é para lá que você está indo ou é para cá? **Hélio:** É Norte-Sul. Então é para cá.



Hélio: Tem que olhar no **y**, do positivo para o negativo. Ah, eu vou vir daqui para cá.
Alessandro: Ele está no Norte, está mais para o Norte.

[...]

Hércules: Se for para o Sul vai subir né?! (*O participante se posiciona junto ao eixo negativo do **y** e indica com as mãos o sentido a ser considerado positivo-negativo do **y***) Não está no topo ainda. Vai subir. Vai subir um pouquinho antes de descer. Começar a subir um pouquinho, sim! Vai subir um pouquinho depois vai descer bastante.



Ideias Significativas
Faz analogia entre o objeto digital e objetos do espaço físico do ambiente

Exploram gráficos em coordenadas tridimensionais e analisam os elementos requeridos pelo enunciado
Expõe pela RA o raciocínio e o modo como resolveu a tarefa
Discutem a tarefa para ver, com a RA, um modo de chegar a uma solução coerente
Criam estratégias para ver e interpretar o significado de direção que está sendo solicitado na tarefa

Quadro 14: Cena 14 – E5A1 – Taxa de variação

Cena 14 – E5A1 – Taxa de variação

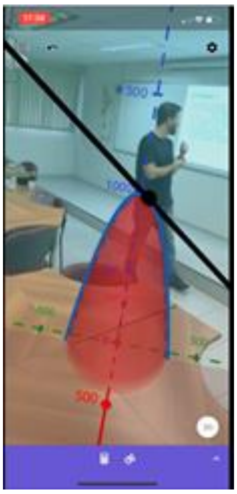
Descrição: Os participantes são convidados a investigar a equação e, no ponto **A(60,40,966)**, apontar a taxa de variação em uma determinada direção.

$$Z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$$

Pesquisador: Então, ele deu uma direção para você e perguntou se ia subir ou ia descer. **Alessandro**: A que taxa? **Hélio:** A que taxa, aí seria a derivada. **Hércules:** É, a derivada. **Pesquisador:** A que taxa, seria a taxa de variação, naquele ponto. E sim, taxa de variação é a derivada. E o que está relacionado com a taxa de variação? **Hércules:** A reta tangente. Mas aí como é uma superfície, tem que ter um plano cortando, né?! **Alessandro:** É, um plano. **Pesquisador:** E vocês conseguem fazer este plano? **Hércules**: Ele tem que ser perpendicular. **Alessandro:** Ah tá. Porque de acordo com que ele vai mudando, vai mudando a taxa, né?! **Hélio:** Cortando a figura, né?! Na direção Norte-Sul.

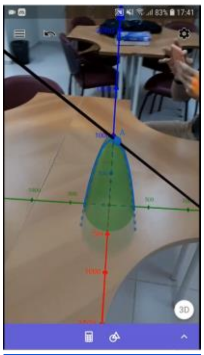
Hércules: Como ele é perpendicular, certinho, dá pra pensar nesse ponto aqui, dá para pensar como no **z = 0**, porque ele vai estar no mesmo plano. Eu acho que… o **y** vai ser fixo, né?! Porque ele é paralelo ao eixo **y**. Então **y** é fixo, e a gente pode mudar o **x** e o **z** e vão ter pontos pertencentes. **Alessandro:** Você está falando do **y** fixo na direção Norte-Sul? **Hércules:** Sim, porque como é paralelo ao eixo... **Alessandro:** Mas aí não vai… Mas aí o **x** vai ser fixo. Porque o **y** que vai assumir vários valores. **Hércules:** Hum, É verdade. Faz sentido. É, porque ele corta **x = 60**. Aliás, acho que isso já é a equação do plano, não?! **Pesquisador**: Mas para que então traçar o plano? [...] **Hércules:** Aí, deu certo. Agora vamos fazer a intersecção, para ter essa curva que é o nosso trajeto (*curva em azul de interseção entre a superfície e o plano* ***x = 60***).

Hércules: Aí a gente pode observar certinho tudo. Temos uma curva. Como que eu faço essa reta, reta tangente? Tem a ferramenta, mais fácil. Aha! Temos uma tangente ao ponto, com relação a esta curva. **Pesquisador**: E ele está subindo ou descendo? **Hércules:** Está subindo. **Pesquisador**: O que te indica isso? **Hércules:** Claramente está subindo. Porque ela é positiva né?! É uma reta tangente positiva. Então a taxa de variação dela está crescendo, é crescente. Muito bom. O que não é tão claro porque este ponto é gigante, agora ficou mais claro.

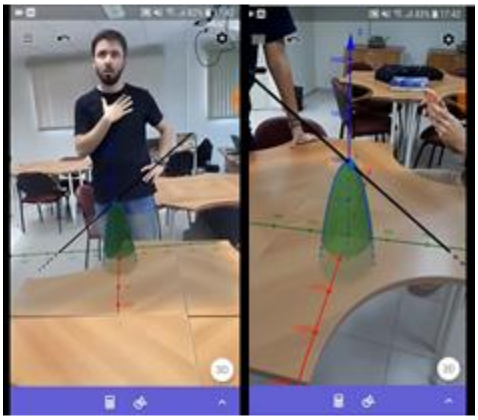


[...]

Pesquisador: Agora, para onde você está indo? **Hélio:** Do Norte para o Sul. **Alessandro:** Não, nós estamos no Norte. Então é daqui para cá. É daqui que olha. **Hélio:** É. Daqui tá subindo.



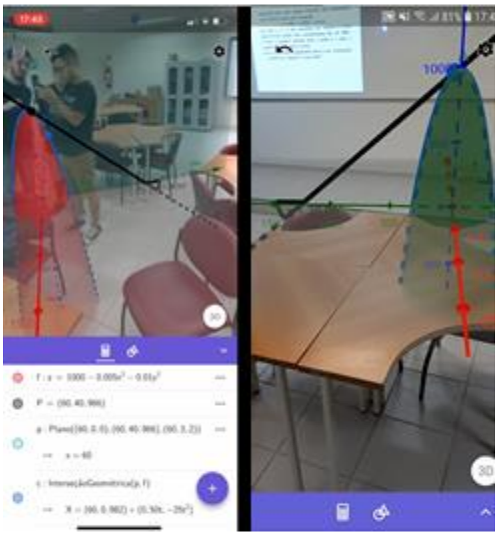
Hélio: É que na verdade a gente tem que olhar dali. Porque daqui, parece que está descendo, só que ele tá subindo. **Pesquisador:** Por que você acha que está subindo? **Hélio:** Porque daqui dá uma ideia de projeção do plano **zy**. Porque se você olhar na projeção do plano **zy**, a reta tá crescente. Quer dizer que a altura da montanha está crescente em relação a **y**.



Pesquisador: Sua taxa de variação aí é positiva ou negativa? **Alessandro / Hélio:** É positiva. **Pesquisador:** Quer dizer o quê? No sentido que você está indo, ela está fazendo o quê? **Hélio:** Está crescente. **Alessandro:** Eu deduzi pela intersecção. Uma parábola. Então, se ela tá subindo... (*então é crescente*).

Pesquisador: Agora, o que podemos fazer para achar essa taxa? O valor dela. O que é a taxa de variação? **Hércules:** É a tangente, né? **Alessandro:** É o ângulo. **Hélio:** É o ângulo da reta tangente. **Pesquisador**: É a tangente do ângulo que a reta tangente forma com o plano. Vocês conseguem traçar este ângulo aí? **Hélio:** Acho que consegue. Dá para fazer ângulo com plano? Usando a reta e o plano? **Hércules:** Ah, olha o ângulo aqui (*observando o ângulo que a reta tangente faz com o plano **xy***).

Hércules: Dá para fazer por Pitágoras (*risos*). Porque dá pra ver mais ou menos onde é que ela toca, né?! Ou dá pra medir o ângulo com uma ferramenta do GeoGebra, porque tem uma ferramenta para medir ângulo, né?! **Hélio:** Acho que é melhor achar com o aplicativo, né?! Vamos ver. Pior que eu não sei fazer reta. Aqui, o **x** vai no **60**. Eu vou ter que jogar **(60,0,0)**. **Alessandro:** Tem como você fazer isso que eu falei. Usa a ferramenta. **Hélio:** Tá. **Pesquisador:** Quanto deu aí? **Hélio:** 38,66°.



Hércules: Agora é só achar a tangente que a gente tem a taxa de variação. A gente vai na calculadora… a gente pega aqui, tangente de alfa. Pronto, tá aqui, **0,8**.

Alessandro: Incrível, né?! **Pesquisador:** Vocês conseguiram aí? **Alessandro:** Conseguimos o ângulo. **Pesquisador:** Tem que calcular agora a tangente do ângulo. Calculando a tangente do ângulo, o Hércules conseguiu chegar no **0,8**. **Hércules:** Poxa, que legal. Desse problema foi muito certinho.

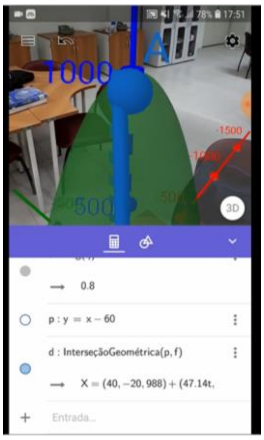
Ideias Significativas
Com a RA verifica as hipóteses elaboradas
Com a RA procura ver as retas tangentes e analisar a taxa de variação
Usa recursos do aplicativo para ver e determinar o ângulo formado pela reta tangente e o plano xy
Mobilizam conhecimento matemático para explorar a tarefa e encontrar sua solução
Corpo-próprio muda de posição para ver de outra perspectiva a direção requerida na tarefa
Discutem a atividade para ver, com a RA, e chegar a uma solução coerente

Quadro 15: Cena 15 – E5A1 – A taxa de variação em outra direção

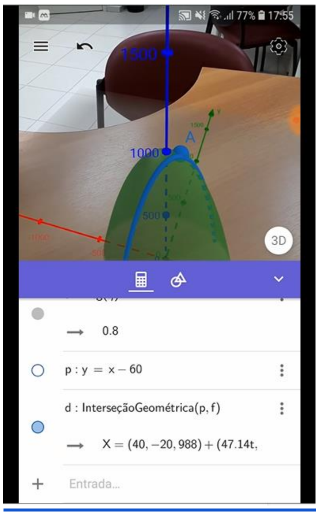
Cena 15 – E5A1 – A taxa de variação em outra direção

Descrição: Os participantes investigam a taxa de variação em outra direção, como solicitado na atividade, caminhando para a direção NorOeste. Buscando por uma resposta para esta questão, os participantes pensam em como criar o plano que passe pelo ponto e que esteja na direção correta.

Hélio: Então, dá pra colocar **x + 60 = y**… ou **x – 60**… porque daí ele vai assim pra direita… no ponto. Vou tentar. Vou chegar bem perto do ponto e vou traçar. Cadê, cadê?! **Pesquisador:** Deu certo? O plano está passando no ponto? **Hélio:** Sim, bem legal. **Pesquisador:** Mostra aí para mim. Olha, parece que não está passando certinho no ponto não. **Hélio:** Ah, deve ser coisa do GeoGebra hein, professor?! (*risos*). **Pesquisador:** Não sei, heim?! **Hércules:** Não tá batendo? **Hélio**: Não tá batendo muito bem não. **Hércules**: Na equação do plano tem mais coisa, porque ele desloca em **x** e em **y**, né?! Os dois são deslocados. Eu lembrei agora da equação do plano.

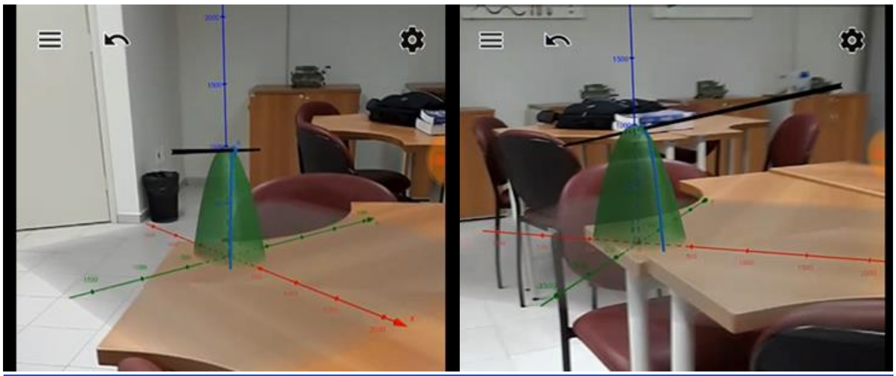


Hélio: Será?! É verdade! **Pesquisador**: Vamos tentar traçar a tangente então?! **Hélio**: Ah, mas está errado, professor. Vamos traçar mesmo assim? Não deu, porque não está tangenciando o ponto. **Pesquisador:** Exato. Então, tem que pensar um pouco na equação do plano. Outra coisa, verifique se ele está na direção correta. **Hélio:** Calma aí. Vamos ir reto. NorOeste é pra cá?! Ah tá! NorOeste é Norte-Oeste, é tipo aqui olha. É o positivo do **y**, ele tá aqui. **Pesquisador:** Agora você tem que olhar para o positivo do **x** ou o negativo do **x**? **Hélio:** Agora tem que ser negativo do **x**. Aqui eu troquei. Na verdade está marcando o Nordeste. Então aqui na verdade seria **– x + 60**. **Pesquisador:** Então, qual é a direção? **Hélio:** É para lá, né?! Está trocado. Tem que ser pra lá. (*indicando que a direção do plano criado não está ainda na direção correta*).



Hélio: Então, tem que colocar **y + 40 = - (x – 60)**. **Alessandro:** Não vai. Porque quando o **y** for **0**, **x** não vai ser nem essa coordenada. **Hélio**: O **y** ele tem que ir pra frente, eu coloquei **+** e na verdade é **-**. **Pesquisador:** E agora, passou pelo ponto. **Hélio:** Sim, agora passou mesmo.

Alessandro: A gente está no Norte. A gente quer NorOeste. NorOeste é pra onde? Aqui é **y** positivo. Então, agora a gente está caindo. **Hélio:** Não, eu ainda estou perdido geograficamente. Vamos para o lugar certo, porque aqui a gente está meio perdido. O Norte é o **y** positivo. **Alessandro**: **x** negativo e **y** positivo. A gente tem que ir daqui pra cá agora. Então a gente está caindo, agora. Descendo.



Alessandro: É, porque daqui pra cá parece que equilibrou. Mas dá pra ver a inclinação dela. Se você pegar daqui, parece que ela está reta. Eu acho que a inclinação dela é menor, desta vez. **Hélio:** Estamos descendo. Agora eu consegui ver. **Alessandro:** Nossa, é muito legal isso. Porque a reta tangente aponta para a direção certinho. **Hélio:** Não é tão fácil de ver, porque a reta é muito pouco inclinada. Então, não é na hora que você vê. **Pesquisador**: Então, você está dizendo que teve dificuldade em ver que estava descendo? **Hélio:** É, de começo eu tive dificuldade. Porque ela está bem pouco inclinada, assim. **Alessandro:** Dependendo do ponto que você vê no desenho, você não consegue ver essa inclinação. **Pesquisador:** E dependendo do lugar que olhar, você conseguiu ver

que estava descendo? **Alessandro:** Exatamente. Isso é um ponto positivo dessa Realidade Aumentada. Porque dependendo do ângulo que você estiver, você consegue enxergar sim. **Hélio:** Sim. Se pegar o lugar certo dá pra ver tranquilo que tá decrescendo. **Pesquisador:** Legal. E o exercício pergunta assim pra gente: "Em que direção a inclinação é maior?" **Alessandro**: No pé do morro (*risos*). Ah tá… entre as duas?! **Pesquisador:** Por que o Alessandro disse "no pé do morro"? **Alessandro:** Porque no pé do morro a inclinação é perpendicular. Não… bem próximo de uma perpendicular. **Pesquisador:** Ah sim… verdade. Agora, nesta pergunta ele quer saber em qual direção, naquele ponto, a inclinação é maior, comparando as duas direções que a gente acabou de analisar. **Hélio**: Ah, é a primeira. **Alessandro**: Mas tem que pensar na externa (*o participante chama atenção para a necessidade de atentar para o ângulo externo entre a reta tangente e o plano **xy***) que dá negativa agora. A inclinação da reta, da (*direção*) Noroeste. **Hélio**: Não, mas o que dá a inclinação é a tangente. A primeira é maior. **Alessandro**: É, visivelmente a primeira é maior mesmo. **Hércules:** É a primeira, sem dúvida. O ângulo era 30 e pouco e a segunda era só 8 graus. Então a tangente (*valor da tangente)* era maior.
Ideias Significativas
Corpo-próprio muda de posição para escolher uma perspectiva que possibilite analisar mais detalhadamente a inclinação da reta tangente
Observam a inclinação e taxa de variação da reta tangente a um ponto e comparam com a de outras retas
Discutem, analisando a representação de planos na forma algébrica e geométrica

Quadro 16: Cena 16 – E5A1 – Outras direções e suas taxas de variação

Cena 16 – E5A1 – Outras direções e suas taxas de variação

Descrição: Os participantes investigam em que direção estará a maior taxa de variação, no ponto dado na atividade. Buscando por uma resposta para esta questão, uma das duplas pensa em criar um plano variável, que sempre passe pelo ponto e, com isso, permita a verificação de todas as retas tangentes possíveis entre o ponto e a curva de intersecção da superfície com o plano variável.

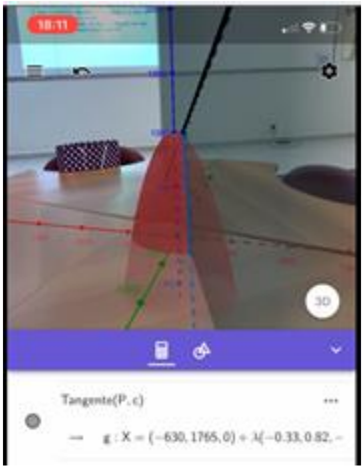
Pesquisador: Neste mesmo ponto, há uma direção em que a taxa de elevação seja maior? Você está nesse ponto, precisa pensar na direção em que a inclinação, a taxa de variação é maior. Qual é?

Hélio: Acho que dá pra fazer um plano, que tangencia o ponto. É! Um plano paralelo à **z**. Todos os planos paralelos a **z** e que contém o ponto. Igual o que a gente fez na aula passada. Tipo: **y = mx**. Aí vai variando. Eu vou tentar. Acho que vai ficar melhor quando eu fizer. **Alessandro:** Eu não entendi, um plano paralelo a **z**? **Hélio:** Que passa pelo (*ponto*) **A**. **Alessandro:** Mas eu acho que é um plano só.

Hércules: Eu pensei uma coisa muito interessante. A gente poderia fazer um plano variável. Pra gente poder ver em todas as direções como que vai mudando. Vamos criar o plano (*o participante digita no campo entrada, a equação que, parar ele, passa pelo ponto (60,40,966) e cria a intersecção entre esse plano e a superfície. Após, ele usa a ferramenta Reta Tangente e cria a reta que tangencia a curva de intersecção no ponto*).

$$\left(\frac{x - 60}{a}\right) + (y - 40) = 0$$

Hércules: Agora reta tangente. Entre (*o ponto*) **P** e (*a curva de intersecção*) **c**.



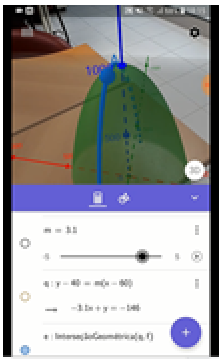
Hércules: A gente se mexe para dar certo o negócio (*risos*). Já temos a reta. Agora falta só o ângulo. Vamos lá, ângulo!

Hércules: Pronto! Temos um ângulo. Agora é só a gente… deixa eu aumentar esse **a** para ficar bonito (*aumentar a variação do controle deslizante*). Colocar este **a** máximo de 200… não, tem que ser menor… vamos colocar 25, tá bom. Agora muda para cá… **20**.. **36**… **44**… O máximo é aqui, mais ou menos **44** graus. Ah, basicamente **45**. Dá pra ver aqui até. Aparentemente este é o maior. Então temos aqui um plano variável e eu fui vendo em todas as direções qual que era a maior inclinação. O maior ângulo. **Pesquisador:** E ele (*o plano*) passa pelo (*ponto*) **P**? **Hércules:** Sim, ele tá passando pelo ponto. Porque eu fiz um plano tangente, aquele plano que a gente fez, que corta **P** e é perpendicular ao plano **ax = y**. Aí eu coloquei **(x – 60)/ a**… aí variando este **a**, o plano gira.

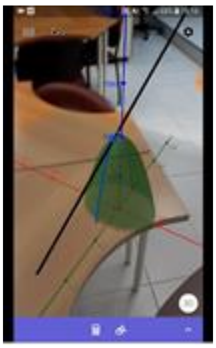
Hércules: Bom, temos a direção, (ângulo) **45º**. Então a taxa de variação vai ser, tangente de 45º que é… **1** né?! Um! Então, aparentemente o maior é esse. Caramba, que legal. Dá pra gente ver a distância igual aquele cara calculando aquele negócio de pirâmide. Tem aquele cara. Pelo menos, assim… aquela demonstração intuitiva. Assim, eu tava lendo muito. Eu estou lendo isso na Matemática, sobre esse negócio de demonstração de Euclides e o pessoal exagera no Euclides. Porque o Euclides não era tão assim… no sentido de que ele não era tão formalista. Era uma questão muito mais pedagógica. Uma questão de muito mais: “Ah, mas por que ele usava só régua e compasso?!”. Mas é que era mais fácil, né?! Porque era o que todo mundo tinha. Pessoal usava régua graduada, sim. Por que não?! Pode usar para demonstrar! Então eu posso usar o GeoGebraAR para demonstrar. Os Gregos usavam, então eu posso.

[...]

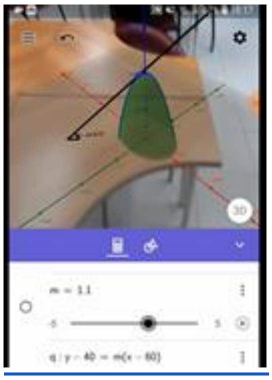
Hélio: Aí professor, era isso daqui que eu queria (***y – 40 = m (x – 60)***). **Alessandro**: Hélio, mas eu acho que… **Pesquisador:** E ele (*o plano*) sempre passa pelo ponto **A**? **Hélio:** Sim, sempre. **Alessandro:** Então a reta tangente vai ser a mesma, a inclinação vai ser a mesma. **Hélio:** Por quê?! Não! Ela vai mudar. **Alessandro**: Não sei. **Hélio:** Vamos chegar perto. Vamos comprovar. Aí olha… estamos olhando perto. Aí, confirmado, passa pelo ponto.



Alessandro: Sim. Agora é só fazer a reta tangente. **Hélio**: É, eu estou posicionado para apertar… aí, olha. Olha a inclinação que fez aqui… que tamanho.



Alessandro: Agora mexe o controle deslizante. **Pesquisador**: Qual vai ser a maior inclinação? **Hélio**: Não sei. É, só olhando assim… **Pesquisador**: A maior taxa de elevação vai estar…? **Hélio**: Onde houver a maior inclinação, né?! **Pesquisador:** E como você vai saber onde é? **Hélio**: Eu tenho que colocar o ângulo e ver onde o ângulo é maior. Tá conseguindo acompanhar, Alessandro? **Alessandro:** Eu estou meio… não estou conseguindo ver ainda. **Hélio**: Aí olha! Fiz o Beta (*ângulo entre a reta tangente e o plano* ***xy***). Vamos ver onde é que esse negócio fica grande. Aí, tá subindo, tá subindo… aí, professor… chega até o **44** hein?! **44**… **44,8**… **44,9**… é, parece que é **45** mesmo.



Alessandro: Deixa eu ver, Hélio. **Pesquisador:** Tentem ver, em que direção que está caminhando, a reta tangente, que dá essa maior inclinação. **Alessandro:** Ah, tá. Verde é Norte-Sul. Aqui (vermelho) Leste-Oeste… sudoeste.

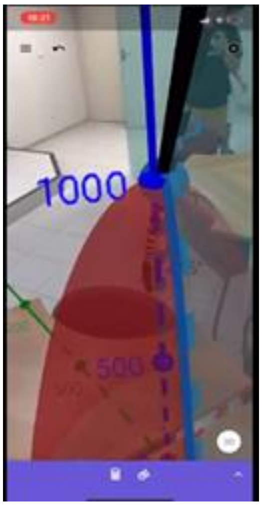
Ideias Significativas
Exploram a reta tangente e sua inclinação em relação ao plano xy
Analisam conjecturas com a RA e validam considerando-a uma "quase *demonstração"*
Usam a RA para verificar o raciocínio matemático
Explicitam compreensões da tarefa, atentos ao entendimento do outro

Quadro 17: Cena 17 – E5A1 – Uma hipótese criada

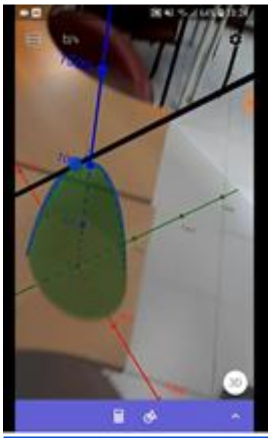
Cena 17 – E5A1 – Uma hipótese criada

Descrição: Neste momento, o pesquisador apresenta uma hipótese de que a maior inclinação esteja apontando na direção do ponto de máximo da superfície.

Pesquisador: [...] pra mim, quando o exercício diz "qual a maior taxa de elevação", então ele quer subir. **Hélio:** Ah sim. Então ele está em direção ao pico, certo?! **Pesquisador**: Será que tem alguma coisa a ver, o pico com essa maior inclinação?! **Alessandro**: É, porque se ele está apontando para o pico. O pico é o ponto mais alto. **Hélio:** Ah, eu acho que deve ter. **Pesquisador:** Certo. O que é o pico? **Alessandro:** É o ponto mais alto da montanha. **Pesquisador**: E na matemática ele é o que pra gente? **Alessandro/Hélio/Hércules**: É o ponto de máximo. **Pesquisador**: E será que tem alguma relação? **Alessandro:** Ah, faz sentido. Porque se sua reta estiver apontando para o maior ponto, que é o ponto mais alto… a inclinação vai ser maior. **Hélio**: Só que não é muito claro. **Alessandro:** Se ela estiver passando pelo ponto apontando para o pico, vai ser a maior inclinação. Mas aí vai ser uma secante, se a reta for para o pico. **Hélio:** Uhum (*concordando)*. Eu ainda não consegui entender muito bem o porquê não. **Alessandro**: Deve ter alguma relação, né?! **Hélio:** Ah professor, eu acho que quando ela está direcionada para o pico… não, não é isso não. **Pesquisador:** Bom, o que eu pensei?! Se você está num ponto, o que vai te dar a sua maior inclinação? Apontando para onde você vai subir mais. **Hércules:** De fato. Mas observando aqui eu não consigo concluir nada. Pelo menos, eu não sinto precisão suficiente para concluir alguma coisa ou não. **Pesquisador:** O que você diz? **Hércules:** Esta relação com o ponto de máximo. Não to vendo relação não. O plano não tá cortando necessariamente o pico.



Hélio: É, eu tinha pensado nisso. **Hélio:** Porque parece que quanto mais o ponto sobe, mais ele vai se aproximar de zero, né?! Tanto que no pico a inclinação é zero. **Pesquisador:** Bem observado. Concordo. Se você colocar um ponto móvel nesta intersecção e fazer o deslocamento, na hora que você chega no pico, ele vai para o ponto zero (0,0,1000). E a taxa de variação vai ser o que? **Hélio:** Ah, no pico? É zero. **Alessandro:** É verdade. Tem relação. Porque o pico vai ser o ponto mais alto. Não tem noção apontar tipo assim, porque não vai para o alto. Porque o mais alto que ele vai poder chegar é o pico, entendeu? **Hélio:** Acho que o que dá pra dizer é que apontando para o pico é que tem mais variação de altura. Por isso que inclina mais… acho que é isso. Mas não sei se é isso não. **Alessandro**: Eu pensei tipo assim, mas e se eu pegar uma inclinação e apontar, igual eu falei, do pé da montanha… mas se eu fizer uma inclinação assim, ela vai apontar para o… espaço. Mas o maior ponto que vai poder chegar na montanha é esse daí. **Hélio**: Professor, eu to vendo um negócio aqui também… na real, eu não sei mas parece que quando ela está mais perto aqui, do eixo menor, ela inclina mais também. **Pesquisador**: Do eixo menor? **Hélio:** É, porque olha… se tivesse puxado pra cá, olha… aqui ela está mais alargada. O vermelho é **x** né?! Ela está mais alargada no **x** do que no **y**. **Pesquisador:** Hum, legal. Mas a inclinação lá é maior? **Hélio:** Eu não sei. Ah, deu menor.



[...]

Pesquisador: Eu entendi o que você disse (*se referindo ao que o participante disse, de verificar a inclinação da reta tangente no pé da montanha*). Mas lembra que você está neste ponto! Neste ponto, a maior inclinação, a maior taxa de elevação, é a que a gente observou. Eu acho que esta que você falou, ao longo do eixo… **Hélio**: **x**. Deu menor. **Pesquisador**: Se você colocar um outro ponto lá, e buscar a inclinação, ou variar como você fez aí no mesmo ponto, você terá taxas de variações diferentes. Como o Alessandro falou, se você colocar um ponto ali, no pé da montanha, a inclinação vai ser o que, maior ou menor? **Hélio:** Vai ser maior. **Pesquisador:** Vai ser maior, né?! Vai ser quase perpendicular, né? O que difere é, “naquele ponto”, a maior taxa de elevação será naquela direção… a que encontramos. **Hércules**: sim, de fato.

Alessandro: Se ele perguntasse em qualquer ponto da montanha a gente poderia falar que é a base?! Ou seria algum ponto bem próximo à base? Porque daí seria quase perpendicular. **Hélio:** Acho que sim. Acho que seria um ponto bem próximo à base e acho que seria mais pra cá, também… no eixo menor (*eixo em que a coordenada da superfície assume valores menores, referindo-se ao eixo* ***y***). Em um dos extremos do eixo menor (*y*).

Ideias Significativas

Exploram as derivadas direcionais e explicitam compreensões

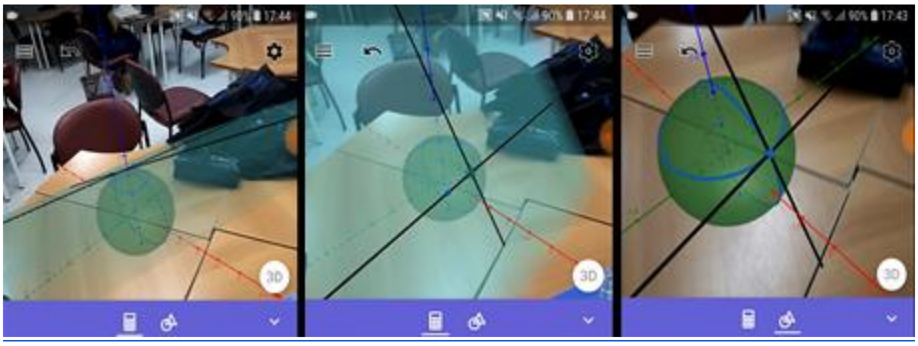
Levantam hipóteses e verificam qual a maior taxa de inclinação de retas tangentes

Identificam que faltam elementos para relacionar a maior inclinação da reta tangente com o ponto de máximo da superfície

Quadro 18: Cena 18 – E6A1 – Preparando a atividade: plano tangente

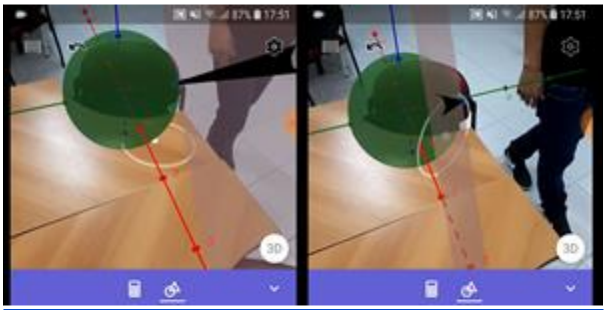
Cena 18 – E6A1 – Preparando a atividade: plano tangente
Auxiliar: O que vocês estão pensando, meninos? **Hélio**: Nós estamos pensando no plano tangente. Porque se construir uma reta que se movimenta no plano, dá pra ver num determinado ponto várias direções que ele pode tomar e se vai crescer ou decrescer. [...] **Hélio**: É só fazer uma reta aqui, uma já foi, é só fazer a outra. Duas retas já tem um plano. **Pesquisador**: Tangente à que? **Hélio**: Tangente a este ponto. Eu queria fazer esse ponto variar, mas não consigo (*o participante tenta criar um ponto que pertença a uma esfera e que se mova em sua superfície*). **Pesquisador**: Você não consegue mover ele aí? **Alessandro**: Na verdade, a gente queria mover ele aí, na superfície. **Hélio**: Sim, porque aí iria ser legal. **Alessandro**: Isso. Daí entra em aplicações de derivada? Sim, né? Aplicações de derivadas parciais, né? Plano tangente, que é uma aplicação, a variação. **Hélio**: Acho que eu tive uma ideia: essa ferramenta “plano perpendicular”, será que só de colocar no ponto já vai? Nossa! **Alessandro**: Conseguiu? **Hélio**: Acho que sim. Deixa eu ver aqui. **Hélio**: Aí professor, agora eu achei uma ferramenta e consegui traçar um plano que passa pelo ponto e corta a esfera. Agora é só criar a intersecção, traçar a tangente e depois achar outro plano. Depois, montar o plano tangente. **Pesquisador**: Mas você criou um plano de que jeito? **Hélio**: Com a ferramenta Plano Perpendicular. **Pesquisador**: Ok. Mas o plano é perpendicular à quê? **Hélio**: perpendicular ao ponto. **Pesquisador**: Perpendicular ao ponto? **Hélio**: É, só cliquei no ponto e cliquei na figura. **Pesquisador**: Use a ferramenta plano perpendicular, clique no ponto, e depois no plano que você já criou. **Hélio**: Ah, é verdade. Perpendicular ao plano. Deu um plano paralelo a **xz**. Eu preciso de um paralelo ao **xy** agora. Vou tentar. Aí olha… cliquei no ponto e… parece que ele não reconhece o plano (*o participante tenta utilizar uma das ferramentas do aplicativo para criar um plano que passe por um ponto e que seja perpendicular ao plano anteriormente criado, mas a ferramenta não funciona como ele queria que funcionasse).* **Hélio**: Ele seria perpendicular ao eixo **z**, não é? Vou tentar com ele então. Consegui! **Alessandro**: Deu certo? **Hélio**: Sim. Eu apertei no plano e agora foi. **Pesquisador**: E o que representa isso agora? **Hélio**: Agora é a parte mais fácil... **Pesquisador**: Porque isso daí não é o plano tangente, certo? **Alessandro**: Mas para construir o plano tangente a gente precisa de dois planos no caso. **Hélio**: Eu vou traçar a intersecção destes dois planos com o objeto (*esfera*). Aí eu vou traçar duas retas tangentes ao ponto e a essas duas intersecções. Depois é só criar um plano com essas duas retas. **Hélio**: É, Alessandro… agora vamos ver a mágica acontecer. Vai ficar legal, né, professor? Essa parte eu não fiz ainda. Mas eu vou traçar uma reta no

plano tangente, que varia em várias direções. Aí vai dar pra ver em todas as direções, onde é que ela vai crescer.



Alessandro: Incrível... **Hélio**: Agora eu vou apagar as retas. **Alessandro**: Só deixa o plano e o ponto, que é mais importante. **Hélio**: Não, o ponto tá aqui. **Alessandro**: O ponto tem que deixar. Porque é tangente ao ponto e que pertence a superfície… era o ponto **B**. Nossa, ficou muito bom.

Hélio: Agora não acabou ainda. **Pesquisador**: Hum, legal. Que conteúdo você está abordando aí? **Alessandro:** Plano tangente. **Hélio**: Sim, derivadas direcionais. **Pesquisador**: E essa reta que você quer criar e que passa pelo ponto e pelo plano ela representa o quê? **Hélio**: É uma derivada direcional e ela pertence ao plano. O plano é composto por todas estas retas tangentes, que passam por este ponto. Eu estava pensando em usar uma reta, pegar um ponto e mirar um ponto no plano. Aí essa reta eu posso mover de acordo com o ponto. O ponto tem que ficar só no plano. **Hélio**: Deixa eu ver se está tangente mesmo (*o participante se move para verificar de outra perspectiva o plano, a reta tangente e o ponto*).



Hélio: Tenta mexer o outro ponto. Se mexer o outro ponto a reta muda? **Alessandro**: Sim, varia em todas as direções. **Hélio**: Deixa eu ver. Ah, é isso mesmo, maravilha! **Hélio:** A gente pode mover a reta tangente usando este outro ponto aqui e ter várias retas tangentes ao ponto em várias direções.

Só não tem o controle deslizante, mas a gente pode mover aqui pela tela mesmo. Essa reta vai ficar só no plano.

Alessandro: Ah tá. É a reta tangente na direção do ponto que está movendo. Ah, é esse o sentido da derivada direcional?! Eu nunca entendi. Eu tô percebendo agora. Por isso que tem o sentido né? Você apontar para uma direção. Porque a reta tangente pode ter várias direções. Mas direcionar com o ponto, você está indicando uma direção específica. **Hélio**: Mas isso aí pensando em movimento. Porque se essa esfera fosse a função "profundidade", por exemplo, que eu tô vendo aqui, o verde (*eixo*) é o **y**, então nesse ponto aqui, do menor para o maior, eu tô ficando no ponto mais profundo.

[...]

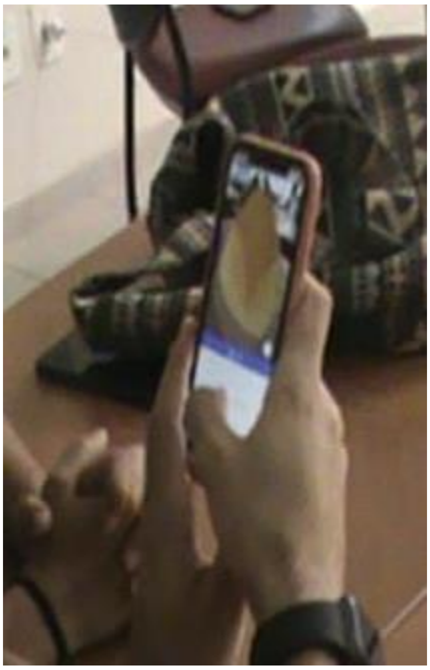
Alessandro: A gente conseguiu montar o plano tangente. Essa atividade era para montar o plano tangente. Porque às vezes a gente sabe calcular mas não sabe o que era o plano tangente. A gente calculou um plano tangente, mas tem infinitos planos tangentes. Nossa atividade é mostrar o que é o plano tangente. **Hélio**: Seria legal a gente mostrar algum exercício, porque esfera, a gente nem imagina nada que seja no formato de uma esfera, só uma bola.

Ideias Significativas
Criam o plano tangente contendo todas as derivadas direcionais de um ponto em uma superfície para expor compreensões
Corpo-próprio muda de posição para explorar as características da reta tangente, retomando o conceito de derivada direcional
Interpretam o significado de Derivadas Direcionais
Buscam por alternativas para contextualizar o conceito de derivada direcional

Quadro 19: Cena 19 – E6A1 – Preparando a atividade: integral dupla

Cena 19 – E6A1 – Preparando a atividade: integral dupla

Pesquisador: E neste caso, que conteúdo matemático está sendo abordado na atividade? **Hércules:** Integral dupla. **Pesquisador:** Está bem. Agora você tem que pensar o que essa atividade pode favorecer para que o aluno aprenda o conceito de integral dupla. **Hércules**: Acho que aqui, pode favorecer para ver a divisão em partes menores (*da região abaixo da superfície*), enxergar a definição de integral pelo aumento de número de quadradinhos (*número de quadrados em que se divide a área projetada pela superfície no plano **xy***) que vai tendendo para valores mais parecidos com a função. Quanto maior o número de quadradinhos, mais vai ser aproximado da superfície. Eu acho que essa observação já é uma coisa muito positiva, esta aproximação com o valor real da região abaixo da superfície. Eu acredito que pelo público-alvo, são pessoas que já sabem a parte numérica de integral (*seus colegas de grupo*), mas que às vezes falta alguma coisa para entender o conceito do que é integral. Gente, dá para ver também a questão da parte de baixo, como ele pega a parte negativa, ele monta também os retângulos (*prismas*) na parte de baixo. **Hércules:** A gente pode aumentar o **m** e o **n** (*controles deslizantes que controlam o número de retângulos em que se divide a área projetada pela superfície em **xy***). Tá vendo aqui? Aí aumenta o número de retângulos.



Helen: A gente pode fazer um paralelo com o cálculo 1, quando estávamos trabalhando no plano **xy**. Muito interessante! Olha aqui!!! Bom, eu achei esse negócio bem interessante. Uma boa ferramenta para definição de integral.

Ideias Significativas
Analisam o volume abaixo da superfície e expõe o conceito de Integral Dupla
Consideram que com RA o aluno articula o cálculo da integral com a compreensão conceitual

Quadro 20: Cena 20 – E7A1 – Sobre integrais duplas e o infinito

Cena 20 – E7A1 – Sobre integrais duplas e o infinito

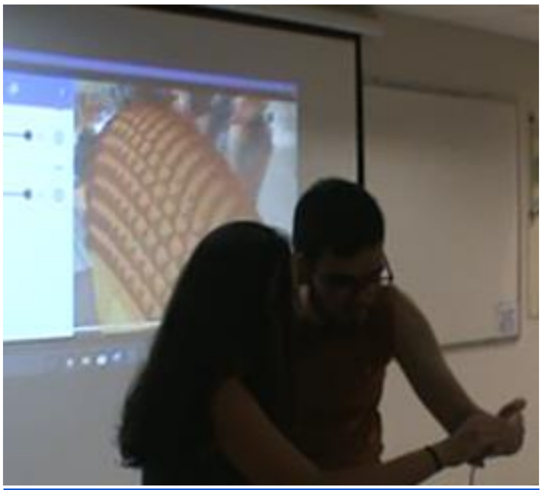
Descrição: Apresentação de uma das duplas de participantes que abordou o tema "Integrais Duplas". Para a atividade, a dupla pede para os participantes abrirem uma construção já pronta no Geogebra e refletirem sobre o conceito de Integral.

Hércules: A gente vai integrar justamente essa somatória da função, multiplicada pelo Delta, que é **Delta x** vezes **Delta y**, que é o volume desse paralelepípedo. Aí você veio aqui no livro, tem aqui né, uma exemplificação de como é, e uma imagem aqui para representar como ficaria em 3D, de como seria a aproximação com os paralelepípedos. Só que fica mais legal a gente fazer isso no GeogebraAR. Vamos abrir aqui agora o applet que eu pedi para vocês pesquisarem.

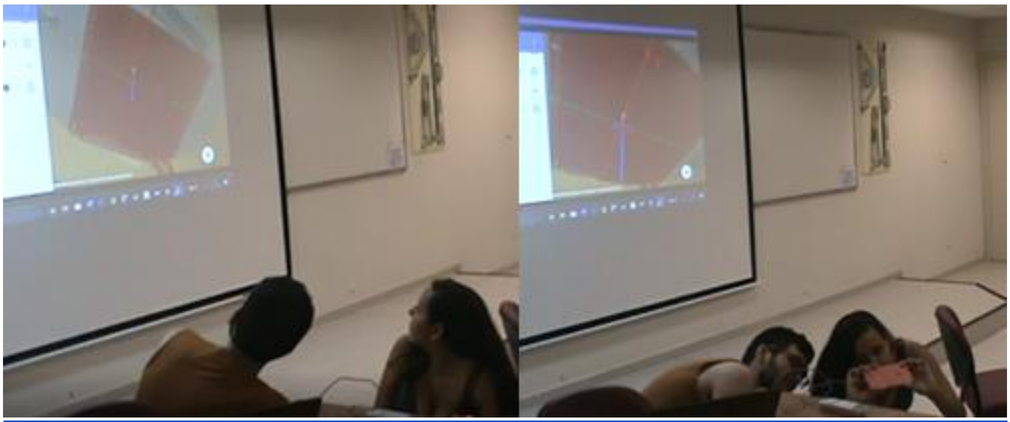
Hércules: Aí aqui a gente vem para a função e aqui a gente pode mexer com os controles deslizantes. Eles são bem interessantes. E aí a gente pode ver esse **a** e esse **b** por exemplo. O **a**, se a gente for mexer no **a**, ele vai mudando aqui no **eixo x**, que é o limite de integração no **eixo x**, do lado direito aqui. Então se a gente observar, ele vai aumentando a área da região abaixo. Vocês podem ver aqui, uma coisa que não tem no livro, que é quando é para baixo, quando é negativo, né?! O que a gente observou bastante, né Helen?! E agora a gente pode escolher a região que a gente quer. O **a** e **b** que é do outro lado (*referindo-se aos limites de integração do **eixo** x*), depois tem o **c** e o **d**, que é com **y** (*limites de integração do **eixo** y*).

[...]

Hércules: Ainda depois, a gente tem um mais legal, que é onde a gente vai ver o infinito aqui. **Pesquisador**: Até agora, vocês estavam mexendo nos limites de integração, certo? Mas o número de retângulos… **Hércules**: É o mesmo. Por exemplo, assim, tava dividindo aqui em cinco, um dos lados da região, em cinco o outro. Aí agora a gente pode fazer esse negócio, que é colocar 20 (*divisões*). Agora está em 5 por 20. Já está aproximando um pouco mais (*aproximando o volume dos prismas ao volume abaixo da superfície*). E aí a gente pode jogar o outro para 20 também. Aí o celular já começa a ficar meio devagar. É aí que dá para ver o negócio aumentando (*referindo-se ao aumento do número de retângulos da base e, consequentemente, no número de prismas sob a superfície*).



Pesquisador: Tem como entrar nela (*região dos prismas*) um pouquinho? Para a gente observar os retângulos sendo formados. **Helen**: Não dá para ver direito. E se for por baixo?



Hércules: Olha que legal. Dá para ver a região como ela é por baixo. Então é a região **R** cortada. O que é muito legal (*região delimitada pelos limites de integração em* ***x*** *e em* ***y*** *subdividida em retângulos*).

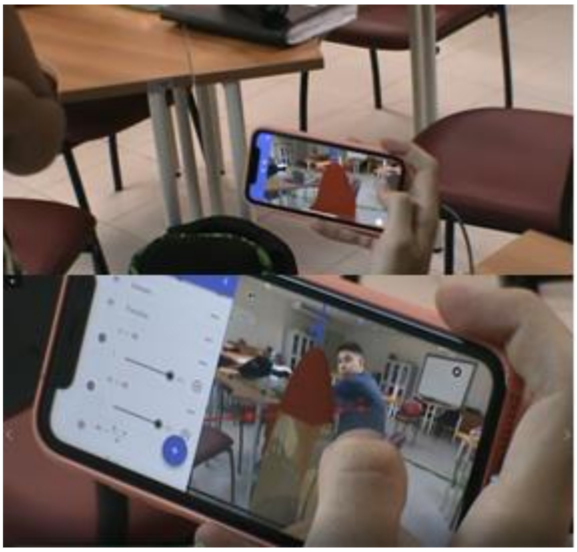
Hércules: Se aumenta a quantidade de retângulos, o máximo que puder, mais preciso vai ser esse valor. E aí a noção de limite, porque eu posso aumentar quanto puder. Por isso a integral é a somatória dos retângulos e a integral é o limite quando o número de retângulos for infinito (*entendemos aqui que o participante se confundiu e utilizou o termo "retângulo" considerando apenas a base dos prismas projetados em RA*).

[...]

Hércules: Vamos tentar de novo aqui, porque agora vamos tentar fazer tendendo ao infinito, que é a parte mais legal. Então, vamos tender para o infinito!

Hércules: Agora, eu vou aumentar o implemento aqui, e vou colocar no 40, para tentar chegar mais perto do infinito. **Pesquisador**: O que estes **m** e **n** fazem? **Hércules**: Eles controlam o número de retângulos em cada dimensão, no **m** e no **n**. Bom, vamos lá.

Hércules: Então, eu vou aumentar aqui o número de retângulos. **Auxiliar**: Que legal! **Hércules**: Vamos ver até onde ele vai. Gente, vocês estão vendo isso daqui?



Hércules: Eu aumentei para 40 e 40. **Alessandro**: Você voltou para aquela figura? **Hércules**: Sim. Eu acho que aqui fica mais fácil de ver. Ele tá mais para cima (*o gráfico da função*), porque para baixo fica pior de enxergar. **Alessandro**: E aumentou a região **R**? **Hércules**: Não, eu deixei a região, a mesma. O que eu aumentei foi o número de retângulos. Então, são 40 retângulos por 40 retângulos. Logo, por ser 40 por 40, são 1600 paralelepípedos. Por isso que trava (*risos*). E assim ele vai se aproximando muito do volume né? **Pesquisador**: Volta lá um pouquinho. O que você está enxergando daí?

Alessandro: Eu estou vendo um parabolóide. **Pesquisador**: Você vê uma rugosidade ou outra. Mas, de modo geral, ele se aproxima muito do formato da superfície, ou do parabolóide. **Hércules**: Exatamente, uma rugosidade. Porque ele é muito próximo do parabolóide. [...]

Helen: Eu acho que auxiliou bastante. Como a gente já fez Cálculo 2, a gente fazia isso desenhando, no caderno. Então a gente não fazia todos os paralelepípedos. A gente fazia um no meio (*da região*) para mostrar, para ter mais ou menos a noção que era a mesma coisa que a gente fazia na integral simples. Mas aí na hora que a gente visualiza mesmo, dá para ter total noção de como funciona, de como a gente calcula os limites da integração.

[...]

Helen: De acordo com o número de retângulos, quanto mais retângulos, mais próximo do valor exato, do volume da função. **Pesquisador**: Todos vocês conseguem perceber isso? **Helen**: Quando tem poucos retângulos você percebe que as pontinhas saem e são maiores. E na hora que a gente coloca mais retângulos, as pontinhas ficam mais certinhas, elas saem menos da função. **Hércules**: Eu estava pensando naquele momento a gente fazer desaparecer a função, para poder observar direitinho… para ver como é diferente com o número pequenos de paralelepípedos e aí depois fazer para um número grande de paralelepípedos, para ver como se aproxima do formato da função. Eu vou tentar fazer de novo aqui.

Hércules: Vem todo mundo olhar aqui de novo. Olha aqui! Vendo assim, ele não tem muito a ver com um parabolóide. Aí quando a gente aumenta, ele vai tomando forma… **Pesquisador**: Tem como trazer a função de volta? **Hércules**: Sim

Pesquisador: Pega os limites de integração direitinho? **Hércules**: Pega. E aí a gente pode desativar e ativar e ver a função. Isso é muito legal. Esse é o 20 por 20, dá para tentar colocar o 40 por 40, fica mais parecido com um parabolóide ainda.

Hércules: E eu acho legal essa noção... que a gente pode ir chegando bem próximo de que realmente é a função, e ir aumentando o número de retângulos até chegar bem próximo do que realmente é o volume da função. A gente não chegou, às vezes, direito... Ficava bem próximo. Imagina, daqui a uns dois, três anos, o celular cada vez melhor. Imagina que loucura vai ficar. Imagina a gente aumentando 60 por 60.

Ideias Significativas
Estabelecem relações entre as representações algébrica e geométrica dos limites de integração
Exploram os limites de integração e sua visualização gráfica
Consideram que com a RA a análise gráfica é diferente das representações no livro didático
Com a RA, podem explorar os limites de integração quando há regiões abaixo do plano xy
Analisam a ideia de infinito envolvida no conceito de integral aumentando as divisões na região de integração
Corpo-próprio muda de posição para visualizar as variações do número de divisões da região de integração
Articulam a ideia de infinito e de limite, explorando com a RA o conceito de integral como somatória do volume de infinitos prismas

Quadro 21: Cena 21 – E7A1 – A integral abaixo do plano xy

Cena 21 – E7A1 – A integral abaixo do plano xy
Descrição: Durante a apresentação da atividade, a dupla propõe observar o comportamento de uma segunda função, em que fosse possível ver a região abaixo do plano **xy** e os prismas formados na "parte negativa" do processo de integração.
Hércules: […] legal é que neste modelo (*de atividade*) dá para trocar a função também. Então, a gente tem esse parabolóide que é mais simples, que a gente vê sempre, né?! Mas a gente pode montar outra coisa aqui (*projetar no aplicativo*). Vamos montar uma sela aqui. Vamos colocar aqui $\mathbf{x^2 - y^2}$. Vamos lá, está carregando. **Helen**: E aí dá para ver o negativo também. Bom, mas aí vocês conseguem ver aqui? O negativo, que está lá embaixo. **Pesquisador**: O negativo é quando ele… **Hércules**: É quando a função está para baixo. E é uma coisa que não tem no livro, não tem muito exemplo disso aqui no livro. **Hércules**: Agora a gente pode ver aqui [...] para poder ver a parte negativa da função, ele encaixando bem certinho. Bom, vocês podem observar aqui, como ela encaixa certinho na função.  **Hércules**: Como eu falei, no livro não tem muita coisa de "para baixo", da parte negativa. Não se pensa muito nisso, né?! E aqui a gente consegue ver espacialmente o negativo, o que vai gerar. O que é muito legal.
Ideias Significativas
Exploram o gráfico para compreender a integral com região abaixo do plano xy
Considera a possibilidade de investigar tarefas que não são comuns nos livros didáticos

Quadro 22: Cena 22 – E7A1 – Reflexões sobre o GeogebraAR

Cena 22 – E7A1 – Reflexões sobre o GeogebraAR
Pesquisador: Então, eu vejo muita coisa interessante. Vamos pensar na disciplina de cálculo. Mas antes, eu queria deixar claro que não estou julgando a forma como o professor faz em sala de aula. Eu entendo a importância que tem para eles em priorizar a forma algébrica com muitos dos conceitos que eles trazem lá. O que eu quero que vocês coloquem em reflexão agora é que: será que o aplicativo auxiliaria na compreensão do conceito de integral dupla ou de um outro conceito matemático? Por que não o uso? Por que não levar isso para sala de aula? Talvez o aplicativo seja um diferencial para outros alunos que ainda não entenderam, não compreenderam o conceito do que é integral, de o que é integral dupla? **Hércules:** Eu paro pra pensar e pra gente já é uma coisa interessante. Para pensar na engenharia, por exemplo, que já é mais aplicação. Eles gostam de ver algo mais concreto. Para eles também é uma ferramenta muito interessante nesse sentido, (*para*) eles entenderem melhor o conceito, porque às vezes é muita decoreba. [...] **Pesquisador**: Precisamos avançar no conceito. E a de vocês (*a atividade*) eu achei bem bacana. Acho que muita coisa ajudaria sim o aluno entender. Muita coisa interessante para ser levada para a sala de aula. **Auxiliar**: Eu só estou falando por falar, já fiz cálculo 2 há um tempinho, mas o que eu acho legal para quando a gente olha para esse tipo de situação é que a gente resolve algebricamente, muita coisa né? Pergunta assim, por exemplo: O que significa esse valor? Algumas questões de aplicação mesmo, sempre tenho mais dificuldade. Se tiver lá: integre! Você faz. Agora, ele fala lá, algo tem a área máxima... a área mínima... já é mais difícil de você resolver quando você precisa aplicar o conceito numa situação. Se a professora coloca lá “integre”, você pega as letras e as regras. Agora pega uma situação que você precisa, por exemplo, como você disse, na atividade da boia, você tem que se mover, ver a profundidade... eu acho que isso que faz a diferença. É você entender o que é uma integral, uma derivada, uma reta tangente. **Hércules:** Eu acho que uma coisa que aconteceu, não tem muito a ver, mas tem. A gente tem exercitado muito aqui a questão do 3D, da realidade aumentada, a questão das intersecções. O que é uma coisa que eu nunca tinha mexido muito no Geogebra. Por exemplo, ontem estávamos fazendo exercício da professora de Geometria Euclidiana, na parte espacial, e tinha que achar um triângulo numa pirâmide e era meio complicado porque eu não sabia se a altura de uma face batia com a altura da outra. E era uma coisa que a gente queria confirmar. A gente mexeu com essas retas que a gente faz com o GeogebraAR e bateu certinho. Funcionou e foi muito legal observar desse jeito assim. Porque eu não tinha ideia de como provar isso, algebricamente. E a gente foi lá e fez assim e deu

certo. **Pesquisador**: Mas foi tentando, na tentativa e erro? **Hércules**: Não, eu criei as alturas. Então, eu fiz uma perpendicular usando a base e o ponto e eu não sabia se elas iriam se cruzar num pontinho comum ou não. E elas se encontraram. Aí tudo que eu tinha feito lá, supondo que ia acontecer, estava certo. Eu não tinha certeza que isso aconteceria, mas eu segui os passos para resolver o exercício. Aí eu pensei: "vamos dar uma olhada nesse negócio!" (*no GeogebraAR*). E realmente deu certo.

[...]

Hércules: Quando a gente usou o controle deslizante para mostrar que o limite existia. Isso é fantástico! É quase uma demonstração. Em todos os sentidos que você olhava era aquilo. Então é isso! **Auxiliar**: Sabe o que eu fico pensando? Quando vocês falam de "demonstração". Por que a gente fala assim "é quase uma demonstração"? Fico pensando: por que, não é? **Hércules**: Para mim é! Inclusive, vamos pensar na época de Euclides, porque tinha que usar a régua e o compasso. O pessoal não usava só régua e compasso. Naquele livro que fez isso e pronto. Misturava-se muito o exemplo com a prova, é um negócio muito interessante. **Auxiliar**: Igual quando você faz o triângulo no Geogebra, mede os ângulos internos e da 180°. Aí você pode mexer os lados do triângulo e para qualquer medida de lado que você colocar dá 180. Isso não é uma prova? **Hércules**: Aí você pode usar um controle deslizante. Muito bom! Que cobre uma área quase tudo, bem amplo, e você aperta lá para trocar e vai continuar. Isso que eu acho legal. Que nem a gente fez com o limite, construir uma reta de intersecção que gira quase tudo, abrangendo todos os caminhos, e sempre dá aquele valor. Então, pela definição do que é limite, está provado que o limite existe. Fica muito evidente. **Auxiliar**: Eu fico pensando, o que falta para que a gente possa validar isso?

Hércules: No exercício da montanha, que a gente foi procurar o maior ângulo, lembra? Consegui verificar que o ângulo diminui, aí depois aumentava e depois diminui de novo. Mas a gente conseguiu verificar que era naquele lugar que tinha o maior ângulo. A do barco foi legal, só que a da montanha a função era a montanha, muito legal isso. Você mexe com o próprio formato. E a gente resolveu o exercício sem conta nenhuma, né?

Alessandro: Eu acho que é uma forma lúdica de aprendizagem. Porque você está interagindo. O lúdico no sentido de que você aprende brincando, vamos dizer assim. Porque, eu gosto muito dessa parte lúdica de matemática. Tanto que quando eu vou desenvolver atividades do PIBID eu penso em atividades lúdicas, porque o que eu vejo na escola que eu vou é que os alunos ficam muito na parte teórica e o que eu vejo desse Geogebra da realidade aumentada é esse contato. Porque você pode olhar, andar e ver do outro lado, abaixar e olhar de baixo e ver de todos os ângulos. E aí você tem uma interação maior com a matemática em si.

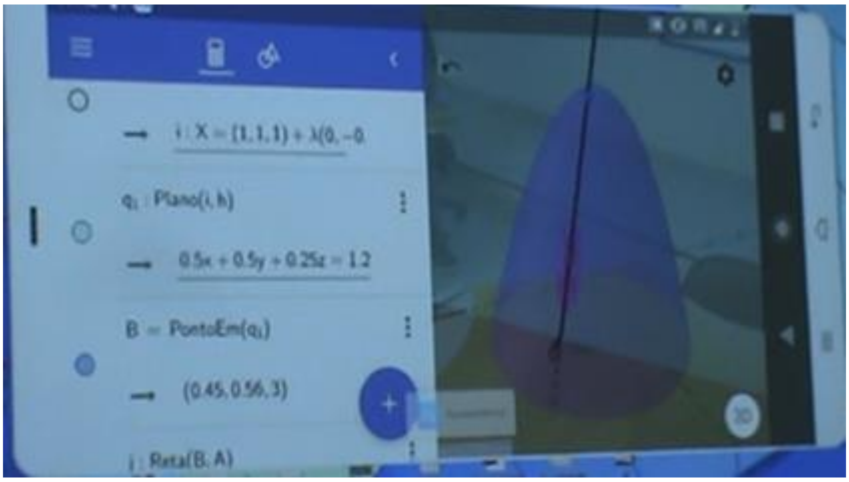
Ideias Significativas

Consideram que a RA auxilia na compreensão do conceito e poderia ajudar alunos de engenharia
Explicitam que o movimento e a visualização com a RA auxiliaram na compreensão de conceitos e favoreceram o desenvolvimento de tarefas
Com a RA expressa o raciocínio matemático e compreensões de demonstrações feitas em aulas de Geometria Euclidiana
Consideram que o visto com a RA é uma “quase demonstração” do limite de uma função de duas variáveis
Faz analogia entre o gráfico em RA da função que representa uma montanha e a montanha da realidade física
Entendem a RA como forma lúdica de aprender matemática, que permite interagir com o objeto
Consideram que com a RA podem analisar de diferentes perspectivas: “olhar, andar e ver do outro lado, abaixar e olhar de baixo e ver de todos os ângulos”

Quadro 23: Cena 23 – E8A1 – Derivadas Direcionais e Plano Tangente

Cena 23 – E8A1 – Derivadas Direcionais e Plano Tangente
Descrição: Esta é a atividade apresentada por uma das duplas de participantes e que envolveu o assunto de plano tangente e derivadas direcionais.
Hélio: O plano tangente, ele contém todas as derivadas direcionais daquele ponto. Então, se a gente mexe ali no ponto, a gente tem as derivadas direcionais naquele ponto. Porque todas essas retas vão tangenciar, são todas as retas tangentes. **Pesquisador**: O que isso indica? Ou, em que isso pode ajudar você? **Hélio**: Aí ele vai ajudar, vai indicar se numa determinada direção a função cresce ou decresce. Dá para ver tudo isso daqui, desse jeito, em todas as direções. **Pesquisador**: O que quer dizer a derivada direcional? Ou melhor, o que quer dizer a derivada? Nós estamos pensando sempre em retas tangentes. E aí a gente está vendo todas as retas tangentes que passam por este ponto e que formam o plano. O que quer dizer a derivada? **Hélio**: Quer dizer taxa de variação, numa determinada direção. **Pesquisador**: Certo, agora há uma variação da taxa de variação num determinado ponto, numa determinada direção? Quem indica isso para mim? **Hélio**: O ângulo. **Pesquisador**: Qual ângulo? **Hélio**: Que eu vou colocar. É o ângulo entre a reta e o plano **xy**. Vamos usar a ferramenta *ângulo* aqui do GeoGebra. Aqui. **Pesquisador**: Deu quanto? **Hélio**: Deu 49º. **Pesquisador**: Lembram que a gente fez o da montanha? (*atividade de encontros anteriores*) **Alessandro**: Mas o da montanha a gente usou uma reta. **Pesquisador**: Sim, foi uma reta só. Mas acho que a gente conseguiu também variar. **Hércules**: Uma pergunta aqui: derivada direcional. Que eu me lembre, derivada direcional a gente pega em relação a **x** é no plano **y = 0**, em relação a **y**, quando **x = 0**. E a derivada direcional é quando a gente corta com o plano no meio. Nesse meio tempo, a gente vê a inclinação dessa reta. Mas a gente varia ela dessa forma (*participante explica seu raciocínio fazendo um movimento com as mãos para indicar uma rotação em torno de um eixo horizontal*) e não assim (*fazendo um movimento em várias direções e sentidos*).

Pesquisador: De qual reta você está falando? Aquela ali é a reta tangente. O que está acontecendo ali é que eles construíram um plano que contém todas as retas tangentes, que tangenciam aquele ponto. Isso que deu origem ao plano. **Hélio**: Aí você variando a direção, a gente vai mudando o ponto aqui (*ponto que faz a reta tangente mudar de direção 360º, sempre pertencendo ao plano*), o ângulo vai variando e a taxa de variação também varia. E apontando aqui para o meio (*em direção ao* ***eixo z***) a gente percebe que a gente tem a inclinação maior dele, de 70,5º mais ou menos.



[...]

Pesquisador: Isso ajuda na compreensão do conceito? **Alessandro**: Isso que eu queria falar. Eu estou tendo cálculo 2 e, mesmo assim, tive que retomar os conceitos. Então com a ajuda do Geogebra eu consegui assimilar muito melhor. Na compreensão. Então quando eu lia os conceitos e jogava no GeoGebra, foi muito mais fácil para mim, pelo menos, enxergar. Então essa questão do plano tangente. Porque no livro fala "é análogo à reta tangente à curva". Então depois você faz para a superfície e as derivadas parciais. Com o Geogebra foi mais fácil enxergar essa analogia que o livro fez.

Ideias Significativas
Veem, com a RA, que o plano tangente é aquele que contém todas as retas que tangenciam um ponto de uma superfície
Compreendem o conceito de Derivadas Direcionais ao visualizarem o plano tangente e as retas tangentes
Discutem o significado de derivadas direcionais

Quadro 24: Cena 24 – E8A2 – Máximos e mínimos

<table>
<tr><td>

Cena 24 – E8A2 – Máximos e mínimos

</td></tr>
<tr><td>

Descrição: Esta é a atividade apresentada por uma das duplas de participantes e se propôs a desenvolver um estudo acerca da ideia de máximos e mínimos de funções de duas variáveis, locais e absolutos, a partir de derivadas parciais. Para tal, a dupla propôs a exploração da função:

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

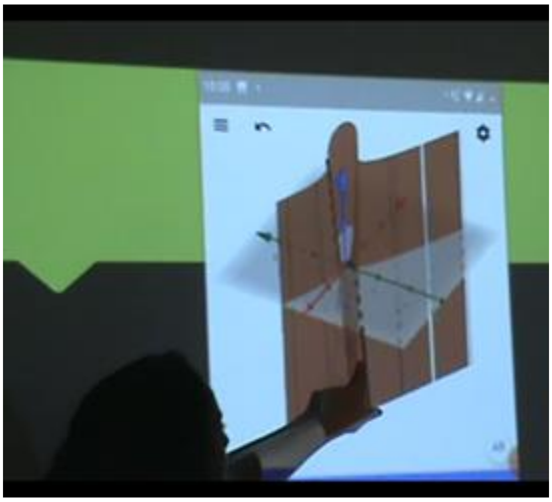
</td></tr>
<tr><td>

Hélio: Aqui é um ponto de inflexão, né? Aqui olha… é onde muda a concavidade. **Alessandro**: Parece que é na origem (0,0,0). **Fabrícia**: E por que na origem? **Jennifer**: Porque aqui ela está descendo e aqui ela está subindo.

[...]

Jennifer: Tem algum máximo e mínimo local ou absoluto? **Hélio**: Absoluto? Absoluto acho que não tem não. O máximo e mínimo local seria o ponto de sela, né?! E como não é máximo nem mínimo então é sela. **Jennifer**: É, ali na origem é certo. A gente já viu que é um ponto de sela. Aí aqui, não sei se dá para perceber, tem um pedacinho não sei se dá pra ver. Aqui é – 8, aí depois ela sobe né. Então aqui seria um mínimo local (*utilizando um print da tela do aplicativo preparado anteriormente para fazer a apresentação, a dupla procura explicar porque concluíram que, determinado ponto do gráfico, é um ponto de mínimo local*). **Alessandro**: É um máximo e mínimo local né?! **Jennifer**: Não, é só um mínimo local. **Hércules**: Ah, eu olhei aqui agora e deu para ver. Ele está bem escondidinho né? (*utilizando o seu smartphone com o GeoGebraAR para visualizar o que o grupo apresentava).*

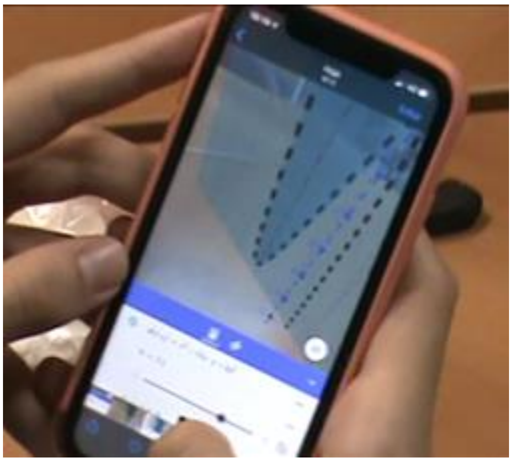
</td></tr>
</table>



[...]

Fabrícia: É, dá para colocar na RA também. Aqui dá pra ver certinho. **Jennifer**: É, se vocês quiserem colocar na RA também, podem colocar. **Fabrícia**: Aqui a gente tá vendo o ponto de sela e onde ele é o mínimo. **Pesquisador**: Está bem. Você consegue visualizar o mínimo aí? Quanto ele seria mais ou menos? **Fabrícia**: Esse daqui olha, é o **-5**. Então, **-10**… ele está ali no **-8**. A gente fez o cálculo também.

Pesquisador: Entre o **-5** e o **-10**, né?! **Fabrícia**: Sim, a gente pode pegar pelos espacinhos (*referindo-se a escala numérica presente no **eixo z***). Nossa, na realidade aumentada ficou muito melhor. Deu pra ver certinho. **Hércules**: Nossa, consegui aqui. Pelo que eu vi tá próximo de **-10**. Aqui, a intersecção mostra que tá quase no **-10**. **Jennifer**: Se a gente for fazer as derivadas, as derivadas parciais os pontos críticos são **2** e **1**. E quando a gente substitui (*até tocar o gráfico da função*), dá **-8**. E aí a gente vê que o mínimo deu **-8**.



[...]

Pesquisador: Na hora que vocês estavam montando a atividade, foi difícil ou foi fácil para vocês acharem estes valores de máximo e mínimo? **Fabrícia**: Sim, foi fácil. **Jennifer**: É mais fácil ver na imagem, né?! Bem mais fácil do que ver uma função assim e já falar "Qual é o máximo e mínimo dessa função?". Vendo a imagem é muito mais fácil. **Pesquisador**: E por que o **-8** não é um ponto de mínimo absoluto? **Fabrícia**: Porque aparece ali que tem mais pontos pra baixo. **Jennifer**: É legal discutir isso: por que não tem um mínimo absoluto? Aí vendo a imagem a gente consegue ver que a superfície dele é infinita pra baixo e pra cima. Por isso que a gente não pode determinar que é um mínimo absoluto. **Pesquisador**: E um máximo, vocês conseguiram ver? **Hércules**: Nessa função? **Pesquisador**: Sim. **Hércules**: Ah, parecia que não tinha. **Jennifer**: Às vezes quando tem um e outro (*ponto de máximo e mínimo*) a gente já fala que é ponto de sela. Mas, o que é um ponto de sela? Eu também aprendi assim só em relação ao cálculo. Aí quando a gente foi pesquisar é que a gente viu, colocou na imagem lá que tem uma curvinha numa direção, uma curvinha lá na outra… a que decresce e a que cresce… tem essa voltinha aí que deu para perceber. Aí deu para perceber mesmo o que é um ponto de sela, não só no algebrismo (*referindo-se às técnicas de manipulação algébrica*).

Ideias Significativas
Identificam com a RA o ponto de inflexão ou ponto de sela
Corpo-próprio muda de posição para ver um ponto de mínimo da função que estava "escondido" na representação da função quando usam o print
Atribuem um valor aproximado para o ponto de mínimo da função

Compreendem a ideia de pontos de mínimos absoluto e local
Discutem o significado de ponto de máximos, mínimos e de inflexão
Exploram e compreendem o conceito de ponto de sela

Quadro 25: Cena 25 – E8A2: - Parando para pensar...

Cena 25 – E8A2: - Parando para pensar...
Descrição: No momento de encerramento das atividades do curso, os participantes fazem algumas observações sobre a experiência vivida nos encontros.
Alessandro: Parando para pensar aqui nas atividades que cada um trouxe, ninguém quis cálculo, né? A gente só observou. Porque quando a gente estava discutindo aqui que, durante as aulas, pra pensar nos cálculos para ver se estaria certo. Aqui não. Foi tudo através de observação. A gente fez e observou né?! **Helen**: É legal porque dá pra ver mesmo. Eu aprendi cálculo na decoreba. Ah, "faz assim e assim!". Tá, mas pra que? Aí assim, agora eu vi o que acontece atrás das contas que a gente faz. **Hércules**: Eu acho que o controle do Geogebra 3D é mais difícil. Acho que a RA ajuda muito nessa questão de "se mexer", na visualização… No 3D parece que ele fica pequeno e com a RA ele fica grande, mais fácil de enxergar. **Hélio**: Eu acho que chama mais atenção. Você poder observar a figura assim... desperta mais o interesse.
Ideias Significativas
Consideram que a RA possibilita realizar investigações sobre os assuntos
Consideram que com a RA compreendem o porquê das manipulações algébricas
Entendem que o movimento com a RA lhes dá possibilidades de *ver*

6.3 Caminhando rumo àquilo que se mostra: as Ideias Significativas

Dando continuidade ao movimento de análise, com as cenas já constituídas, fizemos leituras para compreender o sentido do todo e organizamos, em cada cena, as Ideias Significativas. Elas são, portanto, expressões de nossa interpretação e que permitem entender aspectos (ou perspectivas) do interrogado. Agora, nos voltamos para elas procurando entendê-las e, para nos referirmos a cada uma delas, criamos um código: $\mathbf{I_n}$ que indica o número da ideia significativa e $\mathbf{C_n}$, a cena a que ela pertence. Dessa forma, por exemplo, o código **I4C2** diz da ideia significativa **4** que foi destacada na cena **2**. Destacamos ao todo 90 Ideias Significativas que apresentamos no Quadro 26, a seguir.

Quadro 26 – As Ideias Significativas

Código	Ideia Significativa
I1C1	**Usa o aplicativo para investigar a posição e tamanho da esfera em relação ao sistema tridimensional de coordenadas**
I2C1	**Relaciona o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente (buscam aproximar o objeto digital com objetos do espaço físico)**
I3C2	**Usa a RA para analisar a intersecção de planos com a superfície gerando retas paralelas e compreender a definição de Superfícies Cilíndricas.**
I4C2	**Faz analogia do objeto digital com objetos do espaço físico (buscam aproximar o objeto digital com objetos do espaço físico)**
I5C3	**Relaciona a representação gráfica de superfícies cilíndricas com sua forma algébrica**
I6C3	**Destaca o movimento do corpo-próprio para analisar os gráficos de equações cilíndricas**
I7C4	**Explora a forma da figura gerada (quádrica) pela intersecção do plano com o elipsóide**
I8C4	**Considera que a visualização dos objetos matemáticos pode favorecer compreensões nas aulas de Geometria Analítica**
I9C5	**Levantam hipóteses acerca da representação gráfica de superfícies quádricas analisando sua forma algébrica**
I10C5	**Com o aplicativo busca compreender superfícies quádricas e sua nomenclatura**

Código	Ideia Significativa
I11C5	Faz analogia entre o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente
I12C6	Faz analogia entre o objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente
I13C6	Levanta hipóteses e explora representações gráficas de superfícies e suas formas algébricas
I14C7	Visualiza tridimensionalmente em RA e destaca característica de objetos matemáticos
I15C7	Levanta hipóteses e explora representações gráficas de superfícies e suas formas algébricas
I16C7	Faz analogia do objeto digital com objetos do espaço físico do ambiente
I17C7	Corpo-próprio muda de posição para ver as características do objeto digital
I18C7	Considera que a RA dá uma “quase” presença do objeto digital (materialidade)
I19C8	Corpo-próprio muda de posição para ver tridimensionalmente o gráfico da função e explora os “caminhos” para verificar a existência do limite da função
I20C8	Levanta hipóteses e explora a representação geométrica, considerando a definição de limite.
I21C8	Discutem a existência do limite de uma função, buscando uma solução coerente com o enunciado da tarefa
I22C9	Exploram os “caminhos” para a verificação de limites de funções de duas variáveis
I23C9	Corpo-próprio muda de posição para explorar os caminhos e verificar o limite de funções de duas variáveis
I24C9	Com o aplicativo, cria uma estratégia para explorar os caminhos para verificação do limite
I25C9	Compara a exploração dos caminhos em RA com outras formas vividas nas aulas de Cálculo
I26C10	Levanta hipóteses sobre como construir “todos os caminhos” para verificar o limite da função

Código	Ideia Significativa
I27C10	Faz exploração para validar hipóteses
I28C10	Corpo-próprio muda de posição para verificar a existência do limite da função
I29C10	Consideram que com a RA podem construir uma validação matemática semelhante a uma demonstração
I30C11	Corpo-próprio muda de posição para analisar os caminhos e verificar a existência do limite da função
I31C11	Expressam o compreendido acerca da existência do limite de uma função
I32C11	Usam o aplicativo para expor um modo de realizar a exploração
I33C12	Explora gráficos e os elementos representados no espaço de coordenadas tridimensional
I34C12	Expõe o raciocínio matemático, o modo como compreende a tarefa e interpreta o resultado obtido
I35C12	Discutem a tarefa para ver um modo de, com a RA, propor uma solução coerente
I36C13	Faz analogia entre o objeto digital e objetos do espaço físico do ambiente
I37C13	Exploram gráficos em coordenadas tridimensionais e analisam os elementos requeridos pelo enunciado
I38C13	Expõe pela RA o raciocínio e o modo como resolveu a tarefa
I39C13	Discutem a tarefa para ver, com a RA, um modo de chegar a uma solução coerente
I40C13	Criam estratégias para ver e interpretar o significado de direção que está sendo solicitado na tarefa
I41C14	Com a RA verifica as hipóteses elaboradas
I42C14	Com a RA procura ver as retas tangentes e analisar a taxa de variação
I43C14	Usa recursos do aplicativo para ver e determinar o ângulo formado pela reta tangente e o plano xy

Código	Ideia Significativa
I44C14	**Mobilizam conhecimento matemático para explorar a tarefa e encontrar sua solução**
I45C14	**Corpo-próprio muda de posição para ver de outra perspectiva a direção requerida na tarefa**
I46C14	**Discutem a atividade para ver, com a RA, e chegar a uma solução coerente**
I47C15	**Corpo-próprio muda de posição para escolher uma perspectiva que possibilite analisar mais detalhadamente a inclinação da reta tangente**
I48C15	**Observam a inclinação e taxa de variação da reta tangente a um ponto e comparam com a de outras retas**
I49C15	**Discutem, analisando a representação de planos na forma algébrica e geométrica**
I50C16	**Exploram a reta tangente e sua inclinação em relação ao plano xy**
I51C16	**Analisam conjecturas com a RA e validam considerando-a uma "quase *demonstração*"**
I52C16	**Usam a RA para verificar o raciocínio matemático**
I53C16	**Explicitam compreensões da tarefa, atentos ao entendimento do outro**
I54C17	**Exploram as derivadas direcionais e explicitam compreensões**
I55C17	**Levantam hipóteses e verificam qual a maior taxa de inclinação de retas tangentes**
I56C17	**Identificam que faltam elementos para relacionar a maior inclinação da reta tangente com o ponto de máximo da superfície**
I57C18	**Criam o plano tangente contendo todas as derivadas direcionais de um ponto em uma superfície para expor compreensões**
I58C18	**Corpo-próprio muda de posição para explorar as características da reta tangente, retomando o conceito de derivada direcional**
I59C18	**Interpretam o significado de Derivadas Direcionais**
I60C18	**Buscam por alternativas para contextualizar o conceito de derivada direcional**

Código	Ideia Significativa
I61C19	**Analisam o volume abaixo da superfície e expõe o conceito de Integral Dupla**
I62C19	**Consideram que com RA o aluno articula o cálculo da integral com a compreensão conceitual**
I63C20	**Estabelecem relações entre as representações algébrica e geométrica dos limites de integração**
I64C20	**Exploram os limites de integração e sua visualização gráfica**
I65C20	**Consideram que com a RA a análise gráfica é diferente das representações no livro didático**
I66C20	**Com a RA, podem explorar os limites de integração quando há regiões abaixo do plano xy**
I67C20	**Analisam a ideia de infinito envolvida no conceito de integral aumentando as divisões na região de integração**
I68C20	**Corpo-próprio muda de posição para visualizar as variações do número de divisões da região de integração**
I69C20	**Articulam a ideia de infinito e de limite, explorando com a RA o conceito de integral como somatória do volume de infinitos prismas**
I70C21	**Exploram o gráfico para compreender a integral com região abaixo do plano xy**
I71C21	**Considera a possibilidade de investigar tarefas que não são comuns nos livros didáticos**
I72C22	**Consideram que a RA auxilia na compreensão do conceito e poderia ajudar alunos de engenharia**
I73C22	**Explicitam que o movimento e a visualização com a RA auxiliaram na compreensão de conceitos e favoreceram o desenvolvimento de tarefas**
I74C22	**Com a RA expressa o raciocínio matemático e compreensões de demonstrações feitas em aulas de Geometria Euclidiana**
I75C22	**Consideram que o visto com a RA é uma “quase demonstração” do limite de uma função de duas variáveis**

Código	Ideia Significativa
I76C22	**Faz analogia entre o gráfico em RA da função que representa uma montanha e a montanha da realidade física**
I77C22	**Entendem a RA como forma lúdica de aprender matemática, que permite interagir com o objeto**
I78C22	**Consideram que com a RA podem analisar de diferentes perspectivas: “olhar, andar e ver do outro lado, abaixar e olhar de baixo e ver de todos os ângulos”**
I79C23	**Veem, com a RA, que o plano tangente é aquele que contém todas as retas que tangenciam um ponto de uma superfície**
I80C23	**Compreendem o conceito de Derivadas Direcionais ao visualizarem o plano tangente e as retas tangentes**
I81C23	**Discutem o significado de derivadas direcionais**
I82C24	**Identificam com a RA o ponto de inflexão ou ponto de sela**
I83C24	**Corpo-próprio muda de posição para ver um ponto de mínimo da função que estava “escondido” na representação da função quando usam o print**
I84C24	**Atribuem um valor aproximado para o ponto de mínimo da função**
I85C24	**Compreendem a ideia de pontos de mínimos absoluto e local**
I86C24	**Discutem o significado de ponto de máximos, mínimos e de inflexão**
I87C24	**Exploram e compreendem o conceito de ponto de sela**
I88C25	**Consideram que a RA possibilita realizar investigações sobre os assuntos**
I89C25	**Consideram que com a RA compreendem o porquê das manipulações algébricas**
I90C25	**Entendem que o movimento com a RA lhes dá possibilidades de *ver***

Fonte: Elaborado pelo autor

6.4 As convergências em sínteses compreensivas

Das Ideias Significativas, tomadas em sua singularidade, alguns aspectos comuns passaram a ser evidenciados e vão fazendo sentido ao pesquisador à luz da pergunta orientadora da pesquisa. Ressaltamos que nesse movimento interpretativo nos mantemos na postura fenomenológica, em que

> [...] o fenômeno é posto em suspensão, quando o pesquisador se despe de referenciais teóricos prévios. Ficam, é claro, os pressupostos vivenciais – ou o pré-vivido, pré-reflexivo -, que ligam pesquisador e pesquisado, o que impede o cômodo distanciamento que possibilita a neutralidade. (GARNICA, 1997, p. 116).

Dando continuidade ao movimento interpretativo buscando convergências e divergências de sentidos e significados expressos pelas Ideias Significativas, nos perguntamos o que as Ideias Significativas nos diziam acerca do interrogado. O olhar atento permitia ver que uma mesma ideia convergia ou se articulava à mais de um tema constituído no discurso, mostravam-se as convergências. No Quadro 27, apresentamos o que foi constituído nesse movimento de busca, sínteses compreensivas do que a nós se mostra significativo.

Quadro 27 – Primeiro movimento de síntese compreensiva

Ideias Significativas	Primeira síntese compreensiva
I1C1, I3C2, I7C4, I27C10, I29C10, I30C11, I37C13, **I51C16,** I56C17, **I65C20, I69C20, I71C21, I78C22, I87C24, I88C25**	Explorar para compreender assuntos matemáticos
I24C9, I27C10, I31C11, I34C12, I38C13, I40C13, **I43C14,** I44C14, **I52C16, I54C17,** I57C18, **I61C19, I62C19, I64C20, I66C20, I67C20, I69C20, I70C21, I74C22, I75C22, I77C22, I79C23**	Criar possibilidades para explorar e expor o compreendido
I5C3, I9C5, I13C6, I15C7**,** I20C8, I26C10, I41C14, I49C15, **I51C16,** I55C17, I63C20, **I75C22, I77C22, I78C22, I84C24, I89C25**	Levantamento e verificação de hipóteses pela exploração de conceitos matemáticos relacionando suas formas geométrica e algébrica.
I10C5, I14C7, I22C9, I33C12, I42C14, I43C14, I45C14, I48C15, I59C18, **I61C19, I64C20, I65C20, I66C20, I67C20, I68C20, I69C20, I70C21, I73C22, I75C22, I78C22, I80C23**, I82C24**, I83C24, I84C24, I85C24, I90C25**	Visualização para a compreensão de conceitos e objetos matemáticos
I6C3, I17C7, I18C7, I19C8, I23C9, I28C10, I30C11, I45C14, I47C15, I58C18, **I68C20, I73C22, I78C22, I83C24**, **I85C24, I90C25**	O movimento do corpo-próprio para visualizar o gráfico tridimensional
I2C1, I4C2, I11C5, I12C6, I16C7, I36C13, I60C18, I76C22,	Aproximar objetos digitais à objetos da realidade física
I21C8, I32C11, I35C12, I39C13, I46C14, **I49C15**, I53C16, **I54C17,** I81C23, I86C24,	Diálogo para compreender enunciados e conceitos matemáticos
I8C4, I25C9, I62C19, **I65C20, I71C21, I72C22, I74C22, I77C22**	Levantam conjecturas favoráveis ao uso da RA para compreender assuntos matemáticos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuando o movimento interpretativo, compreendemos que determinadas zonas de convergência dizem de um mesmo tema e, voltando-nos para o que se mostra, elaboramos regiões mais abrangentes, conforme se explicita no Quadro 28, no qual apresentamos as Categorias Abertas. Salienta-se, porém, que as categorias não são independentes umas das outras, elas dialogam em um vai e vem que não permite considerá-las como conjuntos disjuntos. Não há que se dizer de investigação e exploração, por exemplo, sem dizer dos modos pelos quais o sujeito investiga e explora com a RA, movendo o corpo, movendo-se com o aplicativo, para visualizar em diferentes perspectivas. Não haveria o enunciado e a comunicação com a RA, se não houvesse a possibilidade do ver com o aplicativo e da exploração que executam e que permite a comunicação entre os sujeitos que buscam por um modo de dizer. Mas, tal qual entendemos, as categorias concentram aspectos relevantes para compreendermos os modos pelos quais os sujeitos constituem conhecimento acerca de assuntos de Cálculo ao estarem com a RA, sendo tais aspectos evidenciados na vivência com o aplicativo e na abertura àquilo que mostrou como horizonte de possibilidades ao sujeito.

Quadro 28 – Segundo movimento de síntese compreensiva

<table>
<tr><th>Primeira síntese compreensiva</th><th>Categorias Abertas</th></tr>
<tr><td>Explorar para compreender assuntos matemáticos</td><td rowspan="3">Investigar assuntos matemáticos como modo de compreensão</td></tr>
<tr><td>Criar possibilidades para explorar e expor o compreendido</td></tr>
<tr><td>Levantamento e verificação de hipóteses pela exploração de conceitos matemáticos relacionando suas formas geométrica e algébrica</td></tr>
<tr><td>Visualização para a compreensão de conceitos e objetos matemáticos</td><td rowspan="3">O movimento do corpo-próprio que potencializa formas de ver os assuntos matemáticos</td></tr>
<tr><td>O movimento do corpo-próprio para visualizar o gráfico tridimensional</td></tr>
<tr><td>Aproximar objetos digitais à objetos da realidade física</td></tr>
<tr><td>Diálogo para compreender enunciados e conceitos matemáticos</td><td rowspan="2">Diálogos que comunicam o compreendido para se fazer entender</td></tr>
<tr><td>Levantam conjecturas favoráveis ao uso da RA para compreender assuntos matemáticos</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

As Categorias Abertas serão, na próxima seção deste trabalho, discutidas para que o movimento compreensivo / interpretativo do pesquisador possa, no diálogo com os autores lidos, explicitar sua compreensão do interrogado, isto é, dizer da constituição do conhecimento em Cálculo quando se está-com a RA.

7 DISCUTINDO AS CATEGORIAS ABERTAS

Nesta seção, trazemos o movimento efetuado para a explicitação das Categorias Abertas constituídas ao longo da pesquisa e a busca pela compreensão dos modos pelos quais os sujeitos constituem conhecimento matemático, de assuntos tratados em disciplinas de Cálculo, ao estarem-com a Realidade Aumentada.

Adiantamos que, embora elas sigam uma ordem de apresentação, não há uma ordem de prevalência que indique que uma das categorias é mais ou menos relevante que outra. Apenas seguimos uma ordem de apresentação de acordo como se deu na análise dos dados.

Antes de iniciar, salientamos que, embora tenham sido constituídas três categorias, elas não são excludentes. Com isso, queremos dizer que a análise permitiu compreender que, embora separadas por uma ideia invariante, o que permitiu a convergência entre ideias significativas e possibilitou a constituição das categorias abertas, elas dialogam, se conversam.

7.1 Investigar assuntos matemáticos como modo de compreensão

Nesta categoria aberta, temos ideias significativas que nos permitiram entender que os participantes da pesquisa constituem conhecimento ao se colocarem abertos à exploração, levantando hipóteses, verificando suas inferências, validando ou refutando-as, numa postura de investigar o que a eles vai se mostrando com RA acerca de assuntos do Cálculo.

Os participantes exploram gráficos envolvendo *Superfícies Cilíndricas e Quádricas* com RA, como na situação em que criam planos de intersecção entre essas superfícies. Na Cena 2, foi apresentada uma definição de Stewart (2013) para superfície cilíndrica e, em seguida, propostas tarefas com equações que puderam ser inseridas no aplicativo e analisadas com RA. Destacamos, para poder dialogar, aspectos significativos dessa cena.

> (*Analisando a curva* $z=x^2$) **Alessandro**: Não, não é um cilindro. Vou chamar de telha (*risos*). **Pesquisador**: Isso é um cilindro? Olhem para a definição de cilindro. **Alessandro**: Mas é (*cilindro*). Não, não sei. **Pesquisador**: Coloquem aí **y = 0**. **Alessandro**: É um plano. **Pesquisador**: O que gerou a intersecção? **Alessandro**: Uma parábola. Mas um cilindro não tem que estar fechado? (*Observando o gráfico da equação questiona se ele não deveria ter sua forma "fechada" para ser denominado cilindro*). [...]

Hélio: É que para mim, se você visse de lado, assim, parecia que ia ter um monte de reta… uma do lado da outra. Assim, assim, assim… até montar a parábola com todas as retas (*O participante tenta explicar que as retas estão uma ao lado da outra utilizando duas canetas que estavam em sua mão, enquanto o outro participante observa o objeto digital e o que o colega representa com o movimento das mãos e das canetas*). [...]

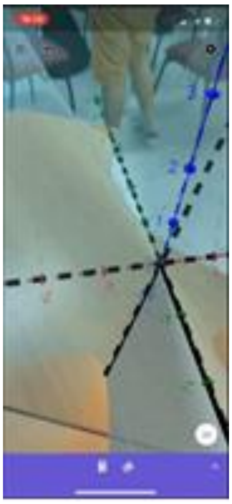
Pesquisador: Formando o que? **Hélio**: Você imagina que seja um cilindro parabólico né?! Você tem um monte de reta assim… (*indicando com as canetas que as retas estão uma ao lado da outra, no sentido vertical*). **Pesquisador**: Ah, entendi. Bom, você pode tentar observar melhor isso daí traçando um plano, **z = m**. E se vocês manipularem o **m** e criarem a intersecção entre a superfície e esse plano, você vai ver que vão ser várias retas paralelas. Observem aí. **Hélio:** Aí olha… as duas retas aqui (*O participante manipula o controle deslizante e observa as retas que são geradas pela intersecção do plano com a superfície).*

Alessandro: Ah, agora eu entendi. Paralela a uma reta dada. As retas, verdade! E a geratriz é essa última, né?! (*ao dizer "essa última", o participante se refere à reta intersecção do plano com a superfície em* ***z = 0****, sob o* ***eixo y***).

Os participantes tentam, instigados pelo pesquisador, apontar elementos matemáticos presentes na definição, utilizando o GeoGebra AR e seus recursos. No decorrer da atividade, vão compreendendo o que são *reta geratriz*, *retas paralelas* e *curva plana*, fazendo explorações com RA. Um dos participantes, para expressar ao colega o que vê, posiciona as canetas para indicar o paralelismo entre a geratriz e as demais retas que constituem a superfície, enquanto o outro olha na tela do smartphone e procura identificar a reta geratriz e as paralelas, na superfície projetada em RA.

Nas atividades do curso os participantes apresentaram um modo de utilização frente à RA que possibilitou o levantamento de hipóteses acerca do estudo, por exemplo, de *Limites*. Na atividade, foi apresentada uma definição de Limite de funções de duas variáveis de Stewart (2013). Segundo a definição, considerando um ponto, para que o limite de uma função exista, todos os *caminhos* da função que se aproximam desse ponto, precisam tender a um mesmo valor. Se por dois caminhos distintos, eu me aproximo de valores diferentes, o limite não existe. Trazemos um recorte da Cena 10, com uma situação em que os participantes foram convidados a explorarem em RA o gráfico de uma função de duas variáveis e responder se o limite da função existe ou não.

> **Hércules**: Vamos entrar ali no meio, vamos olhar, olha ele por baixo. Não tem nada ali, como tinha naquele outro. Não parece que tá indo pra outro lugar, tá vendo? Agora vamos traçar alguns planos pra ver. **x = y**, **x = 0** e **y = 0**. Já é o suficiente acho, né?! Assim, não é o suficiente, mas... Agora, intersecção de todo mundo. **Helen**: Vai tender tudo a zero?! **Hércules**: Aí foi, os três. Olha isso. Este daqui está até inclinado aqui. Está vendo, todos estão no zero. Espera aí, deixa eu apertar aqui, vamos ver… dá nos três, olha. São três retas… tá inclinada aqui, no plano **x = y**. Olha que bonito…



Analisando o expresso na cena, os participantes Hércules e Helen buscam por modos de ver o que acontece com o gráfico da função, olhando-o por baixo e *entrando no meio*, em que o corpo-próprio se coloca em movimento para observar o gráfico à medida em que se aproxima do ponto considerado para verificação do limite, ou seja, o ponto de coordenadas (0,0). Avançam em um diálogo no qual vão fazendo inferências diante do visto. Utilizam recursos do aplicativo que, conforme acreditam, vão ajudá-los a compreender o que a eles vai se mostrando de modo a sustentar suas respostas. O participante Hércules cria os planos **x=0**, **y=0** e **x=y** e, posteriormente, utilizando a ferramenta *Intersecção de Superfícies*, observa as intersecções, caminhando por elas, verificando o que representam, o modo como estão dispostas no espaço tridimensional e, todas elas, caminham para o mesmo valor (zero no **eixo z**) quando o participante se move e faz mover o gráfico, aproximando-se da origem (0,0). Mesmo assim, o participante entende que observar esses três caminhos não é o suficiente para concluir que o limite dessa função existe. Ele precisa verificar todas as aproximações possíveis em relação ao ponto (do gráfico da função). Para isso, ele tem uma ideia, expressa na continuação da cena.

> **Hércules:** A gente poderia fazer uma coisa meio doida. A gente poderia fazer um plano com controle deslizante. Aí a gente pode… vamos fazer isso. Vai ficar muito bonito. **Helen**: **x = m**… **Hércules**: **x = my**. Vamos fazer isso. Agora. Opa, já está interceptado… perfeito. Olha isso daqui! Que coisa linda!!! (*O participante cria um plano paralelo ao eixo z, e um controle deslizante que permite rotacionar o plano em relação ao próprio eixo, o que lhe permite ver suas intersecções com a superfície e que, por qualquer dos caminhos que se aproximam do ponto (0,0), o eixo z é interceptado no valor 0).*

> **Helen**: Nossa, ficou muito bom! (*risos*). A gente fez um plano com controle deslizante e aí agora, na hora que a gente mexe o plano, tipo… (*movimento de girar com as mãos)*. **Pesquisador:** Mostra a intersecção? **Helen**: Isso. Olha lá, vai tudo para o zero. **[...]** olha! Aí vai variando o plano, está vendo (*enquanto mostra o movimento a outro participante*). Aí todos os lados, o plano corta no zero.

Com o aplicativo, os participantes criam outra possibilidade para explorar o gráfico da função, o plano **x = my**, com um *Controle Deslizante* para **m.** Fazem modificações que tornam possível observar a intersecção do plano (móvel) com o gráfico. Assim, Helen conclui que agora pode constatar que todas as intersecções, ao se aproximarem da origem (ponto considerado para a existência do limite) *vão... caminham...* interceptam o valor zero no eixo **z**.

Em um recorte feito na Cena 11, ocorrida em outro encontro do curso, temos uma retomada dessa atividade e do compreendido por Hércules nesse momento.

> **Hércules**: Legal quando o limite existia, né?! Quando ele existia ficava sempre no mesmo negócio, no mesmo ponto. **Pesquisador**: Isso. Você usou para verificar que o limite existia, certo?! (*o participante explica que utilizou, em outra atividade, a mesma ferramenta para verificar que o limite da função existia*) **Hércules:** Sim. Independente do caminho que você seguisse, quando você se aproximava para (0,0) tendia sempre para o mesmo valor, que era **0**. Então esse limite existe? Sim. O limite existe e é **0**.

Os participantes observam, analisando o que a eles se mostra ao estarem-com-RA, fazendo movimentos se aproximando e se afastando, caminhando ao redor do gráfico para olharem de outras perspectivas, o que possibilita, diante de uma postura de abertura ao que vai se mostrando, ao explorar assuntos matemáticos com RA, o desenvolvimento de conjecturas que, diante de um processo de *reflexão* vai se articulando em compreensões.

> As vivências não são um conteúdo de experiência, mas um fluir da ação que ocorre em sua imediaticidade. Enquanto ela ocorre, não é refletida, ainda que dela tenhamos ciência, pois sabemos, de modo passivo, que estamos realizando tais e tais atos. Por exemplo, sabemos que estamos andando, comendo, olhando. Entretanto, podem se tornar foco sobre o qual o ato de refletir se volte para compreender a experiência havida, quando, então, a vivência já fluiu e outra experiência está se dando, aquela de refletir sobre o vivenciado. (BICUDO; AFONSO DA SILVA, 2018, p. 159)

A reflexão é entendida como um movimento do corpo vivente que, ao retomar o percebido na percepção quando *está atento à...*, *volta-se para...* e *dá-se conta de...*, solicita/mobiliza atos da consciência, tais como os de comparação, imaginação e expressão, para que o visto/percebido seja contextualizado, conectado aos modos de ser e de existir do sujeito, possibilitando que o pensado seja refletido e se constitua em compreensões.

> Esse *estar atento* ou *dar-se conta de* refletem ações reflexivas. Refletir é próprio da constituição da pessoa. Toda pessoa tem possibilidade de refletir, do mesmo modo, por exemplo, que toda pessoa tem possibilidade de realizar ações de somar, de calcular distâncias, de posicionar-se espaço-temporalmente em termos de mais próximo, de mais distante, antes, depois. (BICUDO, 2018, p. 38)

Refletir é ato da consciência que retoma o percebido e o coloca como pensamento que, no fluxo da consciência, vai se articulando em compreensões, possibilitando ao sujeito constituir conhecimento e constituir-se no mundo da vida.

O movimento reflexivo, está presente em diversas situações ao longo das cenas. Na Cena 16, por exemplo, destaca-se em outra tarefa, na qual é proposto que os participantes, ao observarem o gráfico de $\mathbf{z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2}$ e, o ponto **A(60,40,966)**, apontem a taxa de variação em uma determinada direção. Quando estão buscando por uma resposta para indicar em que direção se dá a maior taxa de variação, uma das duplas sugere criar um plano variável, que sempre passe pelo ponto A, para verificar todas as retas tangentes possíveis entre o ponto e a curva de intersecção da superfície com o plano variável.

> **Hélio**: Acho que dá pra fazer um plano, que tangencia o ponto. É! Um plano paralelo à **z**. Todos os planos paralelos a **z** e que contém o ponto. Igual o que a

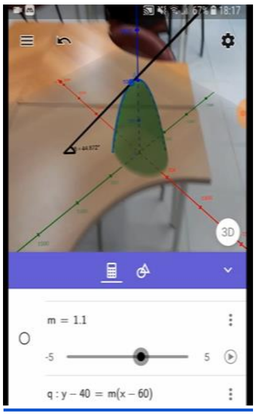
gente fez na aula passada. Tipo: **y = mx**. Aí vai variando. Eu vou tentar. Acho que vai ficar melhor quando eu fizer. [...]

Hércules: Eu pensei uma coisa muito interessante. A gente poderia fazer um plano variável pra poder ver em todas as direções como que vai mudando. Vamos criar o plano (*o participante digita no campo entrada, a equação que, parar ele, passa pelo ponto (60,40,966) e cria a intersecção entre esse plano e a superfície. Após, ele usa a ferramenta Reta Tangente e cria a reta que tangencia a curva de intersecção no ponto*).

$$\left(\frac{x - 60}{a}\right) + (y - 40) = 0$$

Compreendemos que os participantes assumem uma atitude de mobilização de conhecimentos, tanto de assuntos matemáticos, quanto das ferramentas do GeoGebra AR, para verificar, graficamente, o que se pede na tarefa. Criam um plano variável que intercepta o gráfico da função e, utilizando a ferramenta *Controle Deslizante*, alteram o valor da constante da equação para variar a posição do plano e analisar a reta tangente. Neste caso, o plano precisa passar sempre pelo ponto A para ter todas as retas tangentes a esse ponto e, dentre elas, verificar aquela que forma com o plano **xy** o ângulo de maior valor (essa reta lhes dará a direção da maior taxa de variação). Há uma mobilização de conhecimentos matemáticos para testar a hipótese levantada e encontrar a equação do plano que intercepta o gráfico e passa sempre pelo ponto A. Para responder a tarefa e indicar a direção com maior taxa de variação, os alunos se lembram que a reta tangente que forma com o plano xy o maior ângulo é a que aponta essa direção. À medida em que analisam e formulam hipóteses vão, junto ao que vai se mostrando em RA, validando ou refutando-as, até concluírem que o maior ângulo apresentado no aplicativo é de 45 grau.

Pesquisador: Qual vai ser a maior inclinação? **Hélio**: Não sei. É, só olhando assim… **Pesquisador**: A maior taxa de elevação vai estar…? **Hélio**: Onde houver a maior inclinação, né?! **Pesquisador:** E como você vai saber onde é? **Hélio**: Eu tenho que colocar o ângulo e ver onde o ângulo é maior. Tá conseguindo acompanhar, Alessandro? **Alessandro:** Eu estou meio… não estou conseguindo ver ainda. **Hélio**: Aí olha! Fiz o Beta (*ângulo entre a reta tangente e o plano **xy***). Vamos ver onde é que esse negócio (referindo-se ao ângulo) fica grande. Aí, tá subindo, tá subindo… aí, professor… chega até o **44** hein?! **44**… **44,8**… **44,9**… é, parece que é **45** mesmo.



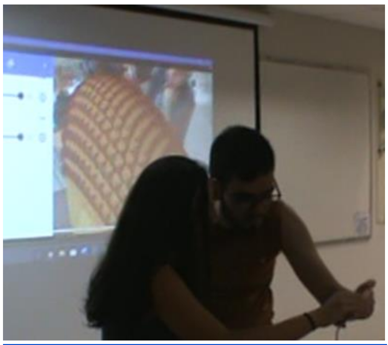
Alessandro: Deixa eu ver, Hélio. **Pesquisador:** Tentem ver, em que direção que está caminhando, a reta tangente, que dá essa maior inclinação. **Alessandro:** Ah, tá. Verde é Norte-Sul. Aqui (vermelho) Leste-Oeste… sudoeste.

A tarefa propõe que a orientação dos pontos cardeais seja feita de acordo com os sentidos positivos e negativos dos eixos x e y. Com a RA, os participantes podem compreender o solicitado e, ao serem instigados pelo pesquisador, voltam-se para o gráfico e não têm dificuldades em fazer a associação.

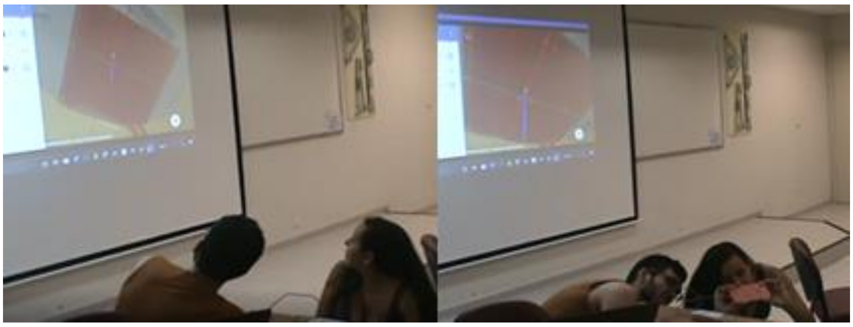
A Cena 20 ocorreu durante uma atividade em que a dupla Hércules e Helen apresentam seus estudos sobre *Integral Dupla* para os demais participante do curso. Hércules, em sua exposição, mostra entender como a RA pode auxiliar a compreensão dos limites de integração.

Hércules: Aí aqui a gente vem para a função e aqui a gente pode mexer com os controles deslizantes. Eles são bem interessantes. E aí a gente pode ver esse **a** e esse **b** por exemplo. O **a**, se a gente for mexer no **a**, ele vai mudando aqui no **eixo x**, que é o limite de integração no **eixo x**, do lado direito aqui. Então se a gente observar, ele vai aumentando a área da região abaixo. Vocês podem ver aqui, uma coisa que não tem no livro, que é quando é para baixo, quando é negativo, né?! O que a gente observou bastante, né Helen?! E agora a gente pode escolher a região que a gente quer. O **a** e **b** que é do outro lado (*referindo-se aos limites de integração do **eixo** x*), depois tem o **c** e o **d**, que é com **y** (*limites de integração do **eixo** y*).

Hércules: Ainda depois, a gente tem um mais legal, que é onde a gente vai ver o infinito aqui. **Pesquisador**: Até agora, vocês estavam mexendo nos limites de integração, certo? Mas o número de retângulos… **Hércules**: É o mesmo. Por exemplo, assim, tava dividindo aqui em cinco, um dos lados da região, em cinco o outro. Aí agora a gente pode fazer esse negócio, que é colocar 20 (*divisões*). Agora está em 5 por 20. Já está aproximando um pouco mais (*aproximando o volume dos prismas ao volume abaixo da superfície*). E aí a gente pode jogar o outro para 20 também. Aí o celular já começa a ficar meio devagar. É aí que dá para ver o negócio aumentando (*referindo-se ao aumento *do número de retângulos da base e, consequentemente, no número de prismas sob a superfície*).



Pesquisador: Tem como entrar nela (*região dos prismas*) um pouquinho? Para a gente observar os retângulos sendo formados? **Helen**: Não dá para ver direito. E se for por baixo?

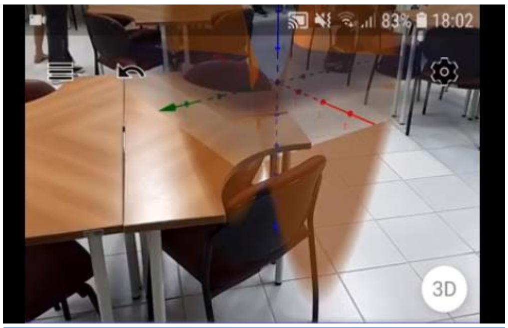


Hércules: Olha que legal. Dá para ver a região como ela é por baixo. Então é a região **R** cortada. O que é muito legal (*região delimitada pelos limites de integração em **x** e em **y** subdividida em retângulos*). [...] **Hércules**: Se aumenta a quantidade de retângulos, o máximo que puder, mais preciso vai ser esse valor. E aí a noção de limite, porque eu posso aumentar quanto puder. Por isso a integral é a somatória dos retângulos e a integral é o limite quando o número de retângulos for infinito.

Mostra-se nesse recorte de cena que os participantes estabelecem relação entre o que conhecem teoricamente sobre os limites de integração de uma função e o que veem com a RA, ao fazerem modificações utilizando um controle deslizante. Os participantes expressam a compreensão de que estes limites de integração determinam a área do **plano xy** que indica a região de integração. Convidados pelo pesquisador, os participantes buscam outros modos de ver a região de integração e se agacham para buscar uma nova perspectiva. A exploração com a RA leva os participantes a expressarem compreensões de conceitos importantes no estudo das Integrais Duplas, tais como, o que significa a região de integração, o que são os limites de integração e em que eles interferem nessa região de integração, bem como, em que o número de divisões dessa região influencia no cálculo do volume dos prismas para se aproximar cada vez mais da ideia de integral. Hércules expressa a compreensão de que, aumentando o número de divisões da região de integração, tanto quanto ele quiser, poderá *ver* o infinito, pois quanto maior o número de divisões, mais o volume desses prismas se aproxima do volume da região formada pela superfície e o **plano xy**.

Na Cena 5, destacamos algumas Ideias Significativas que mostram os participantes explorando assuntos matemáticos para estabelecer relações entre a representação gráfica (de superfícies cilíndricas e quádricas) e sua forma algébrica.

> **Alessandro**: Mas estranho. Porque quando o **z** variar, o que vai acontecer? **Hélio**: Vão ser duas retas. Se você variar o **z** vai ser uma constante. O **x** se passar para lá fica **$y^2 = x^2 + k$**. Então **y** fica **raiz de $x^2 + k$**. E **raiz de menos $x^2 + k$**.
>
> **Alessandro**: Verdade. **Hélio**: As duas retas fazem o traço por **z**. Faz o traço por **z** aí (*no aplicativo*). Coloca aí o plano no **z**. Coloca aí **z** é igual a uma constante… **z = o**.
>
> **Alessandro**: Deu a batatinha (*risos*) (*referindo-se ao gráfico da equação e comparando ao formato de uma batata Pringles*). **Alessandro**: Mas por que não vai ser uma hipérbole, então? **Hélio**: É hipérbole sim (*o participante observa a intersecção entre a superfície e o plano* ***z = o*** *e, à medida em que move o controle deslizante, percebe que tratam-se de hipérboles*). O traço (*intersecção)* por **z** é uma hipérbole. **Alessandro**: Viu, eu sabia que tinha alguma hipérbole. Então vai ser uma hipérbole com eixo dela paralelo à **y** mesmo. **Hélio**: Só que os dois vão ficar divididos por **k**. **Alessandro:** Só que ali tem o menos. Tem várias coisas (*risos*).



> **Hélio**: Ei, eu entendi um erro. Lembra que eu falei que iria dar uma parábola e depois eu disse que iria dar menos a parábola? **Alessandro**: Sim. **Hélio**: Isso daí é a hipérbole! Ia gerar duas parábolas.

O diálogo dos participantes expressa observações acerca do gráfico da equação $z = y^2 - x^2$. Nota-se que, antes mesmo de eles projetarem o gráfico em RA, fazem inferências quanto ao tipo de gráfico que será gerado no aplicativo. Porém, demonstram algumas incertezas em suas falas, e fazem conjecturas sobre a forma gráfica da equação. Após conversarem, representam a equação no GeoGebra AR para explorar as conjecturas. À medida em que vão dialogando, retomam o que haviam dito anteriormente e validam ou refutam as conjecturas iniciais. Entendemos que os participantes iniciam a atividade buscando analisar qual será a representação gráfica da equação, talvez seguindo uma postura que têm em sala de aula. No entanto mostra-se uma abertura à exploração com a

RA, para ver a relação entre o gráfico e a equação que o representa, possibilitando modos de compreender tais relações que os levam a entender que se trata de um parabolóide hiperbólico.

Ao analisar o vivido com os participantes no curso, mostra-se o movimento de constituição de conhecimento. O diálogo entre eles, vai se revelando nos modos de eles se envolverem com as conjecturas, construírem argumentos e buscarem validação, sempre junto ao outro. Há um envolvimento com a *investigação*.

No livro *Investigações Matemáticas em Sala de Aula*, com primeira versão de 2003, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) expressam o significado para o termo *investigação* e, na concepção dos autores, ele nos remete à busca por algo do qual não se sabe e se deseja compreender. Porém, entendem que vem sendo empregado em diferentes contextos, sem necessariamente possuírem o mesmo significado. Por exemplo, entre os matemáticos, "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 13).

Segundo esses autores, podemos assumir que no contexto de ensino e aprendizagem matemática, investigar é formular "as nossas próprias questões e [procurar] responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso". (PONTE, 2003, p.2)

Na experiência vivida com os sujeitos no curso, entendemos que com a RA eles fazem investigação. À medida em que vão observando os gráficos de funções e os objetos matemáticos neles presentes, vão buscando por compreensões acerca do que se mostra, do visado e visto, abrindo-se em possibilidades de compreender matemática.

> Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito a argumentação, a demonstração e avaliação do trabalho realizado. Esses momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 20)

Na citação anterior, os autores trazem quatro etapas do trabalho de matemáticos quando estão envolvidos em uma investigação matemática. Embora estejam se referindo às condutas de matemáticos ao produzirem conhecimentos matemáticos (no texto, exemplificados por Poincaré e Andrew Wiles), entendemos em nosso movimento interpretativo que os participantes do curso se envolvem com um processo investigativo. Com a RA, eles percorreram um caminho no qual esses momentos destacados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) vão sendo explicitados.

Nas tarefas propostas e desenvolvidas com RA eles se voltam para a construção e análise de gráficos buscando compreender o que lhes é solicitado. Para isso, eles formulam hipóteses e procuram por modos de validá-las ou refutá-las, fazem observações e testes, buscam modos de expressarem o compreendido nesse movimento do corpo-próprio que se lança à investigação. O sujeito se dispõe à... se abre às possibilidades de... e vai constituindo conhecimento matemático, ao investigar.

O modo pelo qual o corpo-próprio tem acesso e se dirige aos objetos em RA se difere de quando estão com um computador, por exemplo. Compreendemos que os participantes assumem uma postura de abertura, em que o corpo-próprio se move em modos de ser e de se dirigir aos objetos em RA, o que possibilita ver os objetos matemáticos. São compreensões que vão se revelando e corroborando com o já explicitado em Schuster (2020).

Retomando Merleau-Ponty,

> É meu olhar que subtende a cor, é o movimento de minha mão que subtende a forma do objeto, ou antes meu olhar acopla-se à cor, minha mão acopla-se ao duro e ao mole, e nessa troca entre o sujeito da sensação e o sensível não se pode dizer que um aja e que o outro padeça, que um dê sentido ao outro. Sem a exploração de meu olhar ou de minha mão, e antes que meu corpo se sincronize a ele, o sensível é apenas uma solicitação vaga. (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 288-289).

Quando Helen deseja olhar da “melhor forma” a região de integração, se move para olhar por baixo, num movimento de investigação, o que nos permite compreender que o corpo-próprio se acoplou aos modos de ser-com-RA. Helen “sabe” que para visualizar a parte de baixo do gráfico com a RA basta abaixar-se e se dispõe a isso. Esse modo de ver que possibilita a investigação só está ali, no campo de possibilidades de Helen, pela RA.

> O que importa para a orientação do espetáculo não é meu corpo tal como de fato ele é, enquanto coisa no espaço objetivo, mas meu corpo enquanto sistema de ações possíveis, um corpo virtual cujo ‘lugar” fenomenal é definido por sua tarefa e por sua situação. Meu corpo está ali onde ele tem algo a fazer (MERLEAU-PONTY, 2018, p.336)

Hércules, quando explora uma esfera com a RA, move-se e faz com que ela se mova para ele. Posiciona-se *dentro* da esfera, gira e observa a posição do objeto em relação ao espaço tridimensional e conclui que ele (Hércules) *está* na origem do gráfico, que ele *é* a origem. Em outro momento do curso, movimenta-se e *entra no meio* do gráfico, para analisar os caminhos na função que se aproximam de um ponto e verificar a existência do limite. Mais do que ver os objetos, ao estar-com-RA, o corpo-próprio está *imerso* neles, se *funde* com eles, possibilitando modos de exploração do que a ele vai se mostrando.

Compreendemos que a RA, em seus modos de presença, solicita do usuário ações para que o corpo-próprio experiencie os objetos digitais, tornando-os parte da experiência vivida. Com a RA o corpo-próprio dá-se conta dos objetos em RA, não apenas os vê, mas busca por modos de compreendê-los: se movimenta em sua direção, percebendo, compreendendo, interpretando e explicitando o visto.

> [...] as TD não são entendidas como **próteses**, pois não substituirão o ser humano e nem parte deste [...] Da mesma forma, as TD na produção do conhecimento não são entendidas como **ferramentas**, pois elas não ocupam um papel de suplementação para o ser humano, como uma chave de fenda, por exemplo, que é usada para tornar o trabalho mais ágil, mais eficiente ou mais econômico. Ou seja, a mídia está presente no próprio pensar. Compreendendo as TD como presentes no movimento de produzir conhecimento, falamos do pensar-com-TD, de forma a se perceber com elas, assim como de produzir conhecimento nas relações com o mundo e com os outros.” (ROSA; BICUDO, 2018, p. 24, grifo dos autores)

Dessa perspectiva, entendemos que a RA, como uma Tecnologia Digital que é, está presente no próprio pensar do corpo vivente, nesse movimento do corpo-próprio que, ao estar-com-RA, se percebe com ela e pensa-com-RA, aberto às possibilidades de constituir conhecimento.

Tal qual estamos interpretando, há um diferencial da RA para outros aplicativos: posso vivenciar com o movimento de meu corpo os objetos em RA, numa sintonia na qual o corpo-próprio está *com* eles, acoplado a seus modos possíveis de os experienciar, junto a eles, enquanto fazem parte do meu horizonte de possibilidades de vir-à-ser. O corpo-próprio *está com* o objeto digital em RA, olha por baixo, pelos lados, aproxima-se e afasta-se, analisando o que vai se mostrando, investigando com RA, e vai compreendendo matemática.

7.2 O movimento do corpo-próprio que potencializa formas de ver os assuntos matemáticos

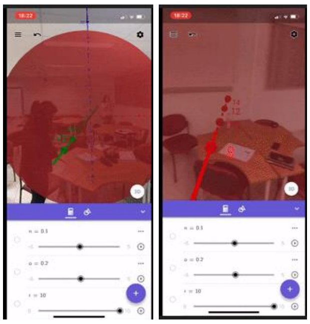
Esta categoria foi constituída por Ideias Significativas que expressam modos pelos quais os participantes, em uma atitude de movimento para *ver*, buscam compreender o que a eles vai se mostrando em Realidade Aumentada. Da perspectiva assumida, a fenomenológica, trata-se de um movimento do corpo-próprio para compreender aquilo que é proposto nas tarefas do curso e que, pela RA, permitiu entender relações dos gráficos projetados em sua tridimensionalidade com os objetos do espaço físico e, com isso, a impressão de que os objetos digitais podem ser experienciados tais como objetos do espaço físico.

> **Hércules**: Porque nas imagens paradas, nos prints, às vezes fica meio confuso. E isso que a gente faz aqui (*durante os momentos de exploração das tarefas*), as variações, a gente fica olhando para todo lado. E a gente vai olhando de diferentes perspectivas. **Helen**: Eu achei interessante porque foi a partir de uma equação só. E podemos fazer variações e observar o que ocorre, e nós fizemos tudo.
>
> [...]
>
> **Jennifer**: Eu já tinha usado o Geogebra, mas não na parte de realidade aumentada. Então, dá uma outra visão quando você vê a figura e tudo mais. **Pesquisador**: O que vocês veem de diferente? Porque vocês falam que é bonito, que é legal e que é uma outra forma de ver a figura. **Hélio**: Acho que o que tem de diferente é que você consegue ver uma superfície assim, como se ela estivesse aqui na nossa sala, se você quer ver ela de lado, você só chega e vira assim para ver o lado. Se você quer ver ela de baixo, é só você se deitar e olhar por baixo. É como se fosse essa mesa aqui.

Na Cena 7, em um momento de diálogo, os participantes comparam os gráficos tridimensionais em RA com aqueles que são representados de modo estático, como os prints registrados na tarefa ou as imagens presentes em livros didáticos. Entendem que com a RA eles podem *olhar* de *diferentes perspectivas* e *para todos os lados* os gráficos projetados, fazer modificações na equação e, simultaneamente, acompanhar a modificação gráfica. Mais do que isso, é como se a superfície fosse um objeto físico que para ver eles podem se abaixar, olhar dos lados, "*é como se fosse essa mesa aqui*".

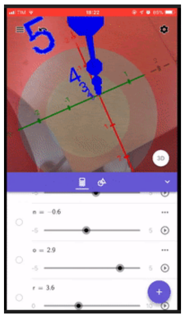
Na Cena 1, interpretamos o movimento do corpo-próprio que se dispõe para explorar os objetos em RA.

> **Pesquisador**: E o **m, n e o**? **Hércules**: Sim, a posição. Em cada eixo. O **o** varia em **z**. **Fabrícia**: Gente, como que entra dentro? **Hércules**: Entrar é só entrar nela, se aproximar dela. **Fabrícia**: Ah, entendi. **Hércules**: Eu estou no centro dos eixos. Eu estou na origem, eu sou a origem!



[...]

Fabrícia: Ah, entendi. (*O professor pesquisador diz para a participante ir até a esfera se movendo com o smartphone. A participante faz um movimento de aproximação em direção à esfera com o aparelho e percebe que o objeto permanece parado onde está e se surpreende com o ocorrido, e consegue* *observar a esfera* *por dentro. A participante se move pelo* ***eixo z****, num movimento de descida transpondo os pontos 6, 5, 4, 3. A participante faz mais algumas variações dos controles deslizantes e observa as variações de posição e dimensão da esfera*).



Os participantes se movem buscando compreender, no caso da tarefa de exploração, a esfera e sua localização no espaço tridimensional. Utilizando alguns controles deslizantes para modificar constantes na equação da esfera, fazem variações e observam suas relações com o que é projetado em RA. Eles vão se movimentando e conhecendo a RA (trata-se de uma das primeiras atividades do curso), compreendendo modos de analisar o que desejam conhecer e buscando alternativas para a exploração. Ao se verem onde queriam *estar*, se percebem *sendo*. Hércules, em dado momento, posiciona-se *dentro* da esfera e, ao mover-se, encontra-se na origem dos eixos do gráfico, e afirma: "*eu sou a origem!*".

O ser-em, ao contrário, significa uma constituição de ser da presença e é um *existencial*. Com ele, portanto, não se pode pensar no ser simplesmente dado de uma coisa corpórea (o corpo vivo do humano) "dentro" de um ente simplesmente dado. O ser-em não pode indicar que uma coisa simplesmente dada está, espacialmente, "dentro de outra" porque, em sua origem, o "em" não significa de forma alguma uma relação espacial desta espécie; "em" deriva-se de *innan*-, morar, habitar, deter-se; *an* significa: estou acostumado a, habituado a, familiarizado com, cultivo alguma coisa; possui o significado de *colo*, no sentido de *habito* e *diligo*. O ente, ao qual pertence o ser-em, neste sentido, é o ente que sempre eu mesmo sou. A expressão "sou" conecta-se a "junto"; "eu sou" diz, por sua vez: eu moro, detenho-me junto... ao mundo, como alguma

> coisa que, deste ou daquele modo, me é familiar. Como infinitivo de "eu sou", isto é, como existencial, ser significa morar junto a, ser familiar com. O ser-em é, pois, a expressão formal e existencial do ser da presença que possui a constituição essencial de ser-no-mundo. (HEIDEGGER, 2015, p. 100)

Compreendemos que da perspectiva do *ser-em* (HEIDEGGER, 2015), Hércules não está localizado em determinada posição no espaço no qual o gráfico em RA e seu elementos matemáticos também estão. Ao encontrar-se no centro dos eixos coordenados, Hércules *é* a origem. O corpo-próprio não é como os outros objetos do espaço físico que são tratados por Heidegger como "entes simplesmente dados", que não possuem a possibilidade de abertura ao mundo, da perspectiva de um *eu sou*. O corpo-próprio possui abertura para ser-no-mundo, e realizar-se nele. Hércules compreende a origem.

Em dado momento da Cena 8, durante uma tarefa de exploração do gráfico de uma função de duas variáveis e a verificação da existência do limite em relação ao ponto dado, Hércules diz:

> **Hércules:** Isso é o tipo de coisa que a gente não conseguiria observar. Com o desenho estático a gente não conseguiria ver isso daí, ficaria muito difícil. Porque a gente tinha que olhar do lado, para o outro, por cima, por baixo, para a gente ver que **z** estava assumindo valores diferentes. Tudo isso é complicado de desenhar, por exemplo, de tirar uma foto. Se tirasse o print ficaria complicado também de fazer isso. Esse negócio de limite é muito difícil imaginar. Em cálculo dois era uma coisa que eu tinha muita dificuldade. Era muito difícil pensar e imaginar esses caminhos.

Comparando a exploração de gráficos tridimensionais em RA com outros modos de representá-los, como no caso de imagens estáticas (prints, desenhos, fotos etc.), Hércules entende que com as imagens estáticas a visualização dos caminhos para a verificação de limites não seria possível. Para ele, trata-se de algo difícil de representar em um desenho, por exemplo, e difícil de *pensar* e *imaginar*, sendo estas, dificuldades que encontrou quando curso a disciplina de Cálculo.

Na Cena 09, os participantes Hércules e Helen analisam o gráfico e as interseções criadas com planos que permitem a exploração dos caminhos para verificação do limite.

> **Hércules**: Vamos criar a intersecção de superfície. Deixa eu ver se funciona aqui. Olha aí, funcionou! Agora vamos criar a intersecção… essa e essa. Ai, que bonito. Olha isso, a intersecção. Então se eu estiver indo por essa direção ele bate aqui e por essa direção ele bate aqui. Olha… vem ver! Legal né?! **-1** e **1**.

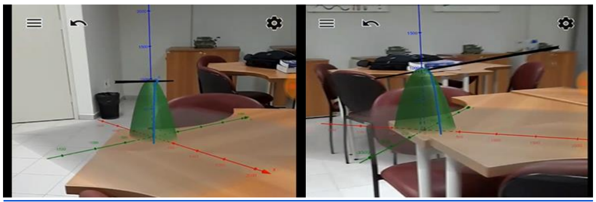
Helen: Então, quando ele vem… **Hércules**: Pelo plano, né?! **x = 0** e **y = 0**… depende do plano que você se aproxima… porque esse é o caminho. Muito legal de observar assim. **Hércules**: E se a gente for por outro caminho? Vamos tentar ir por outro caminho. Um caminho, quer ver, olha… vamos fazer um plano, um plano inclinado, **x = y**. Aí vamos fazer a intersecção. Olha aí… porque é por todas as direções, né?! Teoricamente. Vamos observar agora aqui… olha só, cruzando o zero. Olha, que legal!. **Helen**: Então aí ele não existe?! **Hércules**: É porque por cada direção ele é diferente. Por um (*caminho)* é **1**, por outro é **0**, e por outro é **-1**!

Hércules: Vamos fazer por outro plano? Porque isso é fantástico! Porque é uma coisa muito difícil de visualizar. Cálculo 2 a gente não conseguia visualizar desse jeito. Vamos fazer mais um plano. Qual outro plano a gente poderia… tem que ser em **x** e **y**… vamos tentar **x = 4y**, para mudar a angulação. Não sei onde está este plano. Aqui, eu acho. Opa, cadê agora… intersecção… aqui! Olha aqui, olha. Esta outra reta está no… não tá no **1** não, tá quase. Então, muitas direções. **Hércules**: A gente fez por várias direções. Cada uma deu uma coisa diferente. **Helen**: Eu quero ver uma agora que o limite existe.

Os participantes Helen e Hércules analisam os caminhos gerados pela intersecção entre a superfície e os planos e constatam que se estiverem *indo* por caminhos distintos, eles interceptam o eixo z em valores diferentes, no caso, em 1, 0 e -1. *Eles percorrem* esses caminhos e visualizam que *batem* em diferentes posições. Por considerarem que se trata de algo difícil de visualizar, Hércules propõe criar outro plano (x = 4y) e sua intersecção com a superfície, indo além do que a tarefa propunha, para ver onde esse caminho intercepta o eixo z. Constatam que o caminho também intercepta em um ponto diferente, no *quase 1*. Ao se moverem, *percorrendo* a superfície e seus caminhos, abrem-se às possibilidades para que compreendam que o limite da função não existe, de acordo com a definição de limite: "**Helen**: Então aí ele não existe?! **Hércules**: É porque por cada direção ele é diferente. Por um (*caminho)* é **1**, por outro é **0**, e por outro é **-1".**

Na Cena 15, vê-se outra situação em que os participantes procuram estabelecer uma *posição ideal* para que sejam capazes de *ver* a inclinação da reta tangente com a RA.

Alessandro: A gente está no Norte. A gente quer NorOeste. NorOeste é pra onde? Aqui é **y** positivo. Então, agora a gente está caindo. **Hélio:** Não, eu ainda estou perdido geograficamente. Vamos para o lugar certo, porque aqui a gente está meio perdido. O Norte é o **y** positivo. **Alessandro**: **x** negativo e **y** positivo. A gente tem que ir daqui pra cá agora. Então a gente está caindo, agora. Descendo.

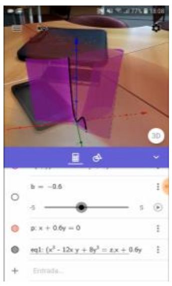


Alessandro: É, porque daqui pra cá parece que equilibrou. Mas dá pra ver a inclinação dela. Se você pegar daqui, parece que ela está reta. Eu acho que a inclinação dela é menor, desta vez. **Hélio:** Estamos descendo. Agora eu consegui ver. **Alessandro:** Nossa, é muito legal isso. Porque a reta tangente aponta para a direção certinho. **Hélio:** Não é tão fácil de ver, porque a reta é muito pouco inclinada. Então, não é na hora que você vê. **[...] Alessandro:** Dependendo do ponto que você vê no desenho, você não consegue ver essa inclinação. **Pesquisador:** E dependendo do lugar que olhar, você conseguiu ver que estava descendo? **Alessandro:** Exatamente. Isso é um ponto positivo dessa Realidade Aumentada. Porque dependendo do ângulo que você estiver, você consegue enxergar sim. **Hélio:** Sim. Se pegar o lugar certo dá pra ver tranquilo que tá decrescendo.

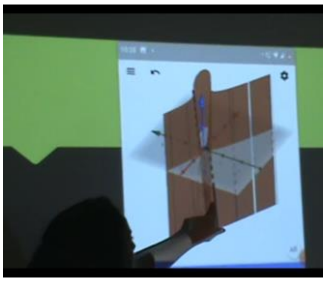
O que vai se mostrando em RA, está *ali* para o corpo-próprio, é possibilidade para esse organismo vivo *dar-se conta de... voltar-se para...* e buscar por modos de compreender o que vê. Alessandro e Hélio, movendo-se, exploram posições de onde podem ver o que estão buscando. “A gente está no Norte”, “A gente tem que ir daqui pra lá”, “A gente está caindo”, querem compreender a direção e inclinação da reta tangente e elegem o melhor *lugar* para ver, entendendo que dependendo da posição conseguem enxergar que a inclinação, naquela direção, está decrescendo. A *posição ideal* é do corpo-próprio que vê e que se situa, dando possibilidade de interpretar o objeto matemático que investigam.

Na Cena 24, Fabrícia e Jennifer apresentam uma atividade aos demais participantes, envolvendo o assunto de máximos e mínimos de funções de duas variáveis.

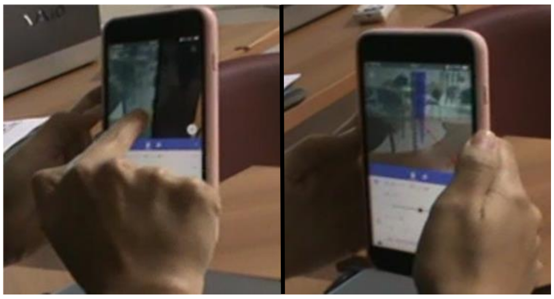
Hélio: Aqui é um ponto de inflexão, né? Aqui olha… é onde muda a concavidade. **Alessandro**: Parece que é na origem (0,0,0). **Fabrícia**: E por que na origem? **Jennifer**: Porque aqui ela está descendo e aqui ela está subindo.



Jennifer: É, ali na origem é certo. A gente já viu que é um ponto de sela. Aí aqui, não sei se dá para perceber, tem um pedacinho não sei se dá pra ver. Aqui é - 8, aí depois ela sobe né. Então aqui seria um mínimo local (*utilizando um print da tela do aplicativo preparado anteriormente para fazer a apresentação, a dupla procura explicar porque concluíram que, determinado ponto do gráfico, é um ponto de mínimo local*). [...] **Hércules**: Ah, eu olhei aqui agora e deu para ver. Ele está bem escondidinho né? (*utilizando o seu smartphone com o GeogebraAR para visualizar o que o grupo apresentava).*



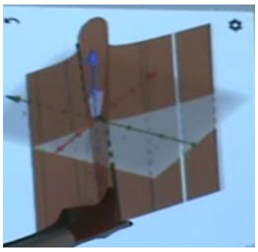
Fabrícia: É, dá para colocar na RA também. Aqui dá pra ver certinho. **Jennifer**: É, se vocês quiserem colocar na RA também, podem colocar. **Fabrícia**: Aqui a gente tá vendo o ponto de sela e onde ele é o mínimo. **Pesquisador**: Está bem. Você consegue visualizar o mínimo aí? Quanto ele seria mais ou menos? **Fabrícia**: Esse daqui olha, é o **-5**. Então, **-10**… ele está ali no **-8**. A gente fez o cálculo também.



Pesquisador: Entre o **-5** e o **-10**, né?! **Fabrícia**: Sim, a gente pode pegar pelos espacinhos (*referindo-se a escala numérica presente no **eixo z***). Nossa, na realidade aumentada ficou muito melhor. Deu pra ver certinho. **Hércules**: Nossa, consegui aqui. Pelo que eu vi tá próximo de **-10**. Aqui, a intersecção mostra que tá quase no **-10**. **Jennifer**: Se a gente for fazer as derivadas, as derivadas parciais os pontos críticos são **2** e **1**. E quando a gente substitui (*até tocar o gráfico da função*), dá **-8**. E aí a gente vê que o mínimo deu **-8**.

Neste recorte de cena, Fabrícia e Jennifer propõe aos participantes que analisem o gráfico de uma função e que apontem possíveis pontos de máximos, mínimos e de inflexão. Ao apresentarem a atividade e argumentarem sobre uma parte do gráfico que indicava um ponto de mínimo local, Jennifer utiliza um print do gráfico (na apresentação) em que esse ponto de mínimo está coberto por outra parte da superfície, como podemos observar na Figura 17 a seguir.

Figura 17 - Ponto de Mínimo indicado por Jennifer na apresentação



Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida, percebendo que os participantes analisavam a função em RA, também projeta o gráfico da função em RA. Fabrícia se move para ver a parte de baixo do gráfico e localiza o ponto de inflexão (comentado na cena por Jennifer) e o ponto de mínimo. Instigada pelo pesquisador, analisa o que vê e diz que o ponto de mínimo está, em relação ao eixo z, indicando o valor -8. Após um momento de exploração, Fabrícia explicita que pode contar os tracinhos do gráfico, entre -5 e -10, para indicar que realmente o mínimo em relação ao eixo z é -8. "**Fabrícia**: Sim, a gente pode pegar pelos espacinhos (*referindo-se a escala numérica presente no **eixo z***). Nossa, na realidade aumentada ficou muito melhor. Deu pra ver certinho.".

Com a imagem estática, a dupla encontrou dificuldade para mostrar aos colegas o ponto de mínimo. Com isso, os participantes tomam a iniciativa de projetarem em RA o gráfico da função e, analisando, conseguiram ver o que Jennifer indica na projeção da apresentação.

O que vai se mostrando acerca da constituição de conhecimento nesses modos de ver com a RA?

> De maneira mais explícita, Husserl (2012)[21], ao expor o modo pelo qual ocorre a constituição do sentido, fala do corpo-próprio, intencionalmente situado, que percebe, age, ao estar com as coisas e cossujeitos, comunicando, compreendendo e (re)criando seu entorno. Em diversas ações cotidianas o sujeito vivencia experiências espaciais: guia-se em certa direção, visualiza determinada profundidade, estabelece relações de comparação, como maior, menor, mais perto, mais longe etc. São vivências que articulam ideias espaciais e sustentam o desencadeamento de outras." (SANTOS; BICUDO, 2014, p. 239)

Assim como as autoras compreendem das ideias de Husserl, entendemos que os participantes do curso estão abertos e buscam por modos de serem e constituírem-se no mundo com a RA, lançando-se ao que a eles vai se mostrando, no movimento livre e

---

[21] HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental**: uma introdução à filosofia fenomenológica. Trad. Diogo Falcao Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

intencional do corpo-próprio, vendo, aproximando-se, afastando-se, agachando para buscarem o melhor lugar de ver, num modo de ser espacial já característico do corpo-próprio que busca se posicionar para ver com a RA. O corpo-próprio guiando-se em determinada direção percorre os caminhos para a verificação do limite, busca perspectivas distintas para ver a inclinação da reta tangente ou um valor, mesmo que aproximado, para um ponto de mínimo de uma função. Nesse percurso, os participantes vão percebendo, articulando compreensões, explicitando e constituindo conhecimento.

Retomando a questão do *movimento* para a *visualização*, presente nas ideias significativas que constituem esta categoria aberta, podemos compreender com Santos (2014) que “a visualização é tida por nós como uma experiência matemática e experiência é experienciar. Nada mais belo e legítimo do que viver a matemática, estudá-la não pelo seu exterior, mas interior, analisando suas transformações, movimento e criações.” (SANTOS, 2014, p. 90). Voltando-nos para a importância dada ao *experienciar*, temos o movimento intencional do corpo-próprio que, ao estar-com-RA, toma sua posição enquanto marco zero da experiência, não é apenas corpo que vê os objetos tridimensionais projetados. Enquanto organismo vivo, se movimenta intencionalmente, passa a *ser* a origem dos eixos coordenados, *entra* na esfera, *a gente está caindo*, *percorre* caminhos para verificar limites, está onde *há algo a se fazer* (MERLEAU-PONTY, 2018).

Para Cifuentes e Santos (2019), a compreensão de ideias matemáticas está diretamente relacionada aos modos em que a visualização se dá. Entendem que

> [...] compreender é tornar “evidente” o que não é. Portanto, há uma necessidade de “ver” para compreender. Assim, iremos conceber a visualização como sendo um recurso de “concretização” de conceitos, sejam abstratos ou não, dando-lhes forma, movimento, trazendo-os para o mundo da nossa intuição a fim de serem “vistos” por ela. (CIFUENTES; SANTOS, 2019, p. 2).

Para os autores, a visualização é um recurso para que a intuição *veja* conceitos matemáticos, dando a eles *forma* e *movimento*. Compreendem, ainda, que “a visualização não é somente o que vemos diante aos olhos, mas o que o pensamento é capaz de construir/imaginar por meio da analogia, da movimentação de imagens e da intuição” (CIFUENTES; SANTOS, 2019, p.14). É visualização que possibilita um modo *legítimo* para compreender matemática que prioriza a sensibilidade para o conhecimento (CIFUENTES; SANTOS, 2019).

> Para Cifuentes (2010)[22], a visualização precisa de um "espaço de representação" onde estejam localizados os padrões que sejam objeto da visualização, mesmo que este espaço não seja aquele da percepção visual. Trata-se de ver o que está ante os olhos, ou também ver com os olhos do intelecto, utilizando-se de conceitos e construções próprios da geometria, a fim de estabelecer relações matemáticas tanto geométricas quanto algébricas. (CIFUENTES; SANTOS, 2019, p.16)

Da experiência vivida no curso interpretamos que os participantes, ao estarem-com-RA, abrem-se às possibilidades que vão se mostrando para *verem* gráficos de funções, elementos matemáticos, fazer modificações, analisar suas representações algébricas e, pelo visto, modos de compreender e constituir conhecimento vão sendo articulados.

> A visualização também foi discutida como forma de experiência matemática, pois a partir do momento em que visualizamos um resultado matemático sem o recurso lógico, estamos enlaçando a esse resultado aspectos da realidade, do que é evidente para nós, nesse sentido, estamos experimentando por meio da intuição e da imaginação. (SANTOS, 2014, p.88)

Explorar pela visualização os assuntos matemáticos com a RA, tal qual estamos compreendendo, se dá no corpo-próprio, por atos da consciência, tais como os de comparar, imaginar, fantasiar, refletir, expressar, dentre outros (BICUDO, 2020), que possibilitam articular compreensões em que a constituição de conhecimento vai se dando. O sentido vai se fazendo para o sujeito no entrelaçamento das sensações que fluem no corpo-vivente em sua carnalidade e à medida que a consciência vai agindo, articulando-as na direção de dizerem algo do mundo. Esse dizer, entretanto, não ocorre de modo claro de imediato; a clareza vai sendo atualizada no próprio movimento no qual o sentido vai se fazendo. É sempre um fluxo vivo (BICUDO, 2020).

Compreendemos que à medida em que os participantes exploram os objetos em RA, eles vão se dando conta disso que estão vivenciando e que, na busca intencional por compreender as atividades em realização, vão constituindo conhecimento. Mais do que isso: ao estarem com os seus cossujeitos e com tarefas de Cálculo, vão expressando compreensões e dialogando, questionando, concordando, divergindo, buscando por respostas que lhes pareçam certas, ao mesmo tempo que intencionam validá-las.

Meu corpo *é* marco zero de toda a experiência possível (MERLEAU-PONTY, 2018). Nos modos de visualização vão sendo articuladas compreensões sobre o que é o limite da função e o que são os caminhos para verificar sua existência. Os participantes

[22] CIFUENTES, J. C. **Do conhecimento matemático à educação matemática: uma 'odisséia espiritual'**. In: Filosofia, Matemática e Educação Matemática, Editora UFJF, 2010, p. 13-31.

veem a inclinação das retas tangentes e o sentido das derivadas direcionais, enfim, vão constituindo conhecimento matemático com RA e explicitando suas interpretações.

7.3 Diálogos que comunicam o compreendido para se fazer entender

Esta categoria traz Ideias Significativas que convergem para o compreendido acerca de que os participantes, ao estarem com RA, buscam explicitar o que veem ao outro, num movimento de *diálogo*, que comunica e compartilha as ideias sobre o assunto que estão investigando. Há abertura ao diálogo quando, com a RA, os participantes buscam entendimento, procuram explorar e solucionar as tarefas e os objetos matemáticos, compreendendo o que vai se mostrando.

O visto em RA, mais do que um modo de representar visualmente objetos matemáticos, para eles, é possibilidade para compreender matemática, comparado aos processos de validação de demonstrações matemáticas. Vamos acompanhar o diálogo dos participantes explicitado na Cena 22.

> **Hércules**: Quando a gente usou o controle deslizante para mostrar que o limite existia. Isso é fantástico! É quase uma demonstração. Em todos os sentidos que você olhava era aquilo. Então é isso! **Auxiliar**: Sabe o que eu fico pensando? Quando vocês falam de "demonstração". Por que a gente fala assim "é quase uma demonstração"? Fico pensando: por que, não é? **Hércules**: Para mim é! Inclusive, vamos pensar na época de Euclides, porque tinha que usar a régua e o compasso. O pessoal não usava só régua e compasso. Naquele livro que fez isso e pronto. Misturava-se muito o exemplo com a prova, é um negócio muito interessante. **Auxiliar**: Igual quando você faz o triângulo no Geogebra, mede os ângulos internos e da 180°. Aí você pode mexer os lados do triângulo e para qualquer medida de lado que você colocar dá 180. Isso não é uma prova? **Hércules**: Aí você pode usar um controle deslizante. Muito bom! Que cobre uma área quase tudo, bem amplo, e você aperta lá para trocar e vai continuar. Isso que eu acho legal. Que nem a gente fez com o limite, construir uma reta de intersecção que gira quase tudo, abrangendo todos os caminhos, e sempre dá aquele valor. Então, pela definição do que é limite, está provado que o limite existe. Fica muito evidente. **Auxiliar**: Eu fico pensando: o que falta para que a gente possa validar isso?

No diálogo entre os participantes do curso, Hércules diz que em uma das tarefas para a verificação do limite de uma função, foi possível, recorrendo ao aplicativo, *mostrar* que o limite existia, pois ele conseguia *ver* em todas as direções, que os caminhos apontavam para o mesmo valor. Para ele, esse modo de ver traz clareza aos assuntos matemáticos que são explorados com a RA, o que considera uma "quase demonstração". A professora auxiliar questiona por que não podemos considerar o experienciado por ele como uma demonstração. Hércules acrescenta: "Para mim é (uma demonstração)!". O vivido por Hércules, possibilita que ele compreenda o que explora e vê em RA, fazendo analogia com uma demonstração matemática, dada a sua evidência. Há clareza do que investiga. Para defender sua analogia, argumenta, recorrendo ao *Os Elementos* de Euclides, considerando que algumas de suas demonstrações eram baseadas em construções realizadas apenas com régua e compasso.

> Vemos que o problema epistemológico proposto no início - o que é uma demonstração matemática - é difícil. De fato esse problema é tão complexo que é capaz de levar um matemático de alto calibre, G.H. Hardy, a afirmar, em um artigo de 1929, precisamente intitulado "Mathematical Proof"[23]:
>
> *Se fôssemos até seu extremo, seríamos levado a uma conclusão bem paradoxal: que não existe, estritamente, uma tal coisa chamada DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA; que não podemos, em última análise, fazer nada senão INDICAR; que as demonstrações, que Littlewood e eu chamamos GÁS, são floreios retóricos designados a afetar a psicologia.*
>
> Em suma, quando se trata de discorrer sobre a DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo. DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA - se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei. (BICUDO, I., 2002, s/n)

No artigo *Demonstração em Matemática*, Irineu Bicudo (2002) questiona o que matemáticos vêm desenvolvendo e o proposto pela Logica Matemática para organizar o conhecimento e o que se denomina demonstração. Demonstrar significa "demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas." (BICUDO, I., 2002, n.p). Porém, entende que a matemática tem sua base formada por proposições que não necessariamente foram definidas e demonstradas. Sendo assim, coloca em questão a própria definição de demonstração para os matemáticos.

> A demonstração, como definida nos textos de Lógica Matemática, deveria modelar as demonstrações matemáticas. Não é, no entanto, o que se vê nos livros e nos jornais matemáticos. A demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico. (BICUDO, I., 2002, n.p)

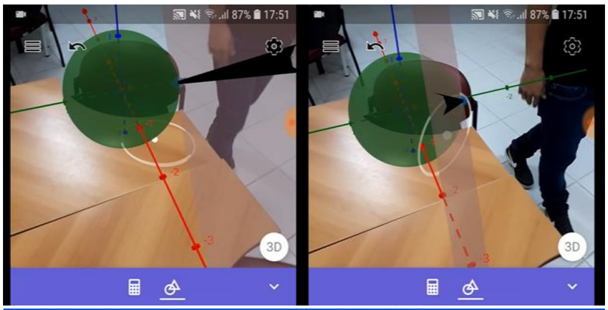
Entendemos que para Hércules, a exploração realizada em RA é algo "muito evidente" e, no diálogo com a professora auxiliar, isso que se mostra vai ganhando forma para que, desse objeto, ele possa falar. Vê-se que o evidenciado adquire validação na intersubjetividade que vai se constituindo no diálogo entre Hércules e a professora. Trata-se de um objeto que transcende o visto para se mostrar com características mais gerais que permitem a compreensão da ideia de limite.

---

[23] Disponível em http://wwwprof.uniandes.edu.co/~amartin/cursos/filomat/bibliografia/Hardy.pdf

Esse processo intersubjetivo vai se mostrando em diferentes situações do vivido. Na Cena 18, o diálogo entre Hélio e Alessandro, quando preparavam a tarefa de derivada direcional, mostra como os sentidos e significados vão se tornando claros.

> **Hélio**: É uma derivada direcional e ela pertence ao plano. O plano é composto por todas estas retas tangentes, que passam por este ponto. Eu estava pensando em usar uma reta, pegar um ponto e mirar um ponto no plano. Aí essa reta eu posso mover de acordo com o ponto. O ponto tem que ficar só no plano. **Hélio**: Deixa eu ver se está tangente mesmo (*o participante se move para verificar de outra perspectiva o plano, a reta tangente e o ponto*).



> **Hélio**: Tenta mexer o outro ponto. Se mexer o outro ponto a reta muda? **Alessandro**: Sim, varia em todas as direções. **Hélio**: Deixa eu ver. Ah, é isso mesmo, maravilha! **Hélio:** A gente pode mover a reta tangente usando este outro ponto aqui e ter várias retas tangentes ao ponto em várias direções. Só não tem o controle deslizante, mas a gente pode mover aqui pela tela mesmo. Essa reta vai ficar só no plano.

> **Alessandro**: Ah tá. É a reta tangente na direção do ponto que está movendo. Ah, é esse o sentido da derivada direcional?! Eu nunca entendi. Eu tô percebendo agora. Por isso que tem o sentido né? Você apontar para uma direção. Porque a reta tangente pode ter várias direções. Mas direcionar com o ponto, você está indicando uma direção específica. **Hélio**: Mas isso aí pensando em movimento. Porque se essa esfera fosse a função "profundidade", por exemplo, que eu tô vendo aqui, o verde (*eixo*) é o **y**, então nesse ponto aqui, do menor para o maior, eu tô ficando no ponto mais profundo.

Nesse recorte, a dupla projeta elementos na tela do smartphone com equações e ferramentas do GeoGebra AR, enquanto vão explorando em RA. Em dado momento, após terem construído uma esfera, um ponto móvel pertencente à superfície da esfera, um plano contendo o ponto e uma reta tangente e pertencente ao plano, explicitam o que estão entendendo sobre o gráfico e o assunto de derivadas direcionais.

Hélio questiona se realmente o plano e a reta (variável) são tangentes ao ponto da superfície. Analisa se, ao mover um ponto pertencente ao plano e que também pertence à reta tangente, essa reta mudaria de direção. Alessandro se movimenta, para ver de outras perspectivas, o que acontece com a reta que tangencia a superfície num dado ponto, quando movemos o outro ponto do plano. Hélio interroga se a direção da reta é alterada ao mover esse ponto que dá direção à reta tangente. Alessandro afirma que sim e diz compreender o sentido que tem as *direções* no assunto de derivadas direcionais:

> "**Alessandro**: *Ah tá. É a reta tangente na direção do ponto que está movendo. Ah, é esse o sentido da derivada direcional?! Eu nunca entendi. Eu tô percebendo agora. Por isso que tem o sentido né? Você apontar para uma direção. Porque a reta tangente pode ter várias direções*".

Com a RA, Hélio e Alessandro estão abertos um ao outro e exploram matemática juntos. No diálogo, vão compartilhando o que compreendem acerca da *direção* das derivadas direcionais. São temas tratados nas aulas de Cálculo, mas que, nem sempre, os alunos conseguem compreender os significados de tais assuntos matemáticos.

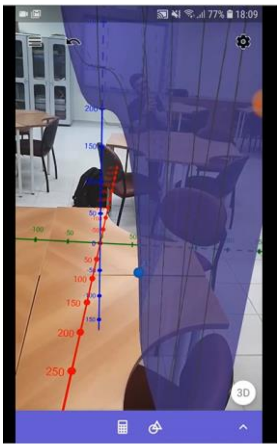
> **Alessandro**: Parando para pensar aqui nas atividades que cada um trouxe, ninguém quis cálculo, né? A gente só observou. Porque quando a gente estava discutindo aqui que, durante as aulas, pra pensar nos cálculos para ver se estaria certo. Aqui não. Foi tudo através de observação. A gente fez e observou né?!
> **Helen**: É legal porque dá pra ver mesmo. Eu aprendi cálculo na decoreba. Ah, "faz assim e assim!". Tá, mas pra que? Aí assim, agora eu vi o que acontece atrás das contas que a gente faz.

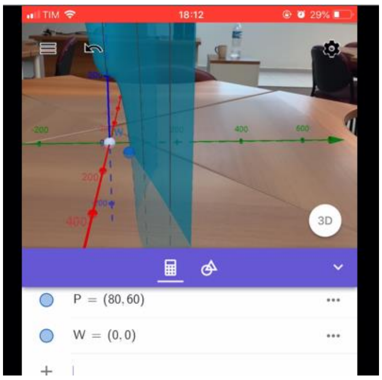
Esse recorte expressa a surpresa dos participantes ao se darem conta de que fizeram as explorações sem recorrer aos cálculos. Eles consideram que as tarefas desenvolvidas no curso possuem características distintas de uma aula de Cálculo. Helen diz que aprendeu Cálculo na *decoreba*, *faz assim e assim*. No curso, pôde compreender os cálculos que fazia conforme as estratégias que usava nas aulas. Consideramos que, na aula de Cálculo, ela aprendeu procedimentos importantes e que podem ajudá-la a chegar em respostas para as tarefas, mas que, conforme argumenta, com a RA ela conseguiu *ver* o sentido desses cálculos.

> Um algoritmo convencional - que aliás só tem sentido reportado à linguagem - exprimirá sempre a Natureza sem o homem. Portanto, rigorosamente, não existem signos convencionais, simples notação de um pensamento puro e claro para si mesmo, só existem falas nas quais se contrai a história de toda uma língua, e que realizam a comunicação sem nenhuma garantia, no meio de incríveis acasos linguísticos. (MERLEAU-PONTY, 2018, p.255)

Da fala de Merleau-Ponty, entende-se que Helen, embora tenha aprendido os procedimentos para calcular, o fazia usando técnicas algébricas que não lhe permitiam atribuir significado ao feito. O corpo-próprio é sempre no mundo, aberto às possibilidades e, nessa abertura os sentidos tornam-se claros para Helen que, ao estar-com a RA, compreende o que faz.

O diálogo dos participantes na Cena 12 se dá entorno da exploração de uma tarefa na qual tem-se uma equação que representa a profundidade de um lago e um ponto, que representa a posição de um barco. Deseja-se saber se, deslocando até uma boia localizada na origem dos eixos coordenados, o barco está indo para um local mais profundo ou mais raso.

> **Alessandro:** Eu não estou vendo o lago, para falar a verdade (*risos*). **Pesquisador:** É, realmente não tem o lago aí. Pense então no que a função representa para a gente. **Hélio:** Bom, eu achei que a função fosse a superfície do lago. Mas na verdade não é bem assim. A função é a profundidade. Então, quer dizer que se a gente jogar **(80,60)** no **z**… olha, pensa bem! No **0**, a profundidade é **200**. **Alessandro:** No **(0,0)** a profundidade é **200**.
>
> 
>
>
> **Hélio:** Agora, no **(80,60)**, a profundidade vai ser ou maior ou menor. Aí vai se ele está indo... se está ficando mais raso ou mais profundo. Deixa eu ver. **Alessandro:** Não consigo ver. **Hélio:** Deixa eu tentar uma coisa rápido?! **Alessandro:** Pode tentar (*o participante digita no campo Entrada **f (80,60)**. Deste modo, obtém o valor da função no ponto **(80,60)**, e a profundidade do barco naquele ponto, que é de **112m***).
>
> **Alessandro:** Então a profundidade vai ser **112**? **Hélio:** Sim. **Alessandro:** E agora, qual era a pergunta? **Hélio:** Ah, quer dizer que tá ficando mais raso… **Alessandro:** Não, está ficando mais fundo. **Hélio:** Não, está ficando mais raso. Se a profundidade é menor. **Alessandro:** Não, ele está se aproximando da origem. E na origem a gente viu que a profundidade é **200**. **Hélio:** Ah é! Quer dizer que está ficando mais fundo.
>
> [...]
>
> **Pesquisador**: Então vamos pensar mais um pouco. Coloque lá no ponto **(80,60)**. A partir daí, ele vai se mover para o ponto **(0,0)**, certo?! Na direção deste ponto. O que indica para você a função $\mathbf{z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3}$? Leia a atividade. **Fabrícia:** É a função que indica a profundidade. A profundidade é o **z**. **Pesquisador**: Então, olhando para o aplicativo, você sai de onde e vai até onde? **Fabrícia:** Sai daqui e vai até lá. Então aqui no **(80,60)** indica que está mais próximo da superfície. **Pesquisador:** E isso me indica o que? **Fabrícia:** Que é menos profundo. Então se ele se move, está aumentando a profundidade, isso? **Pesquisador:** Acho que sim, né?



> **Fabrícia**: Agora eu entendi. Porque o azul (*gráfico da função)* é o **z**, certo?! Então ele está mais próximo em **z**. Então ele tende a estar mais fundo. Porque a gente está falando de profundidade e o z indica isso. No caso ele está mais no raso e ele está indo para o mais fundo.

Nesse recorte de cena, Hélio e Alessandro, ao se voltarem para o gráfico da função, tentam compreendê-lo de acordo com a situação proposta na tarefa. Rapidamente apontam a profundidade do lago na origem: 200 metros. Fazem algumas inferências e à medida que vão se comunicando, vão expondo seu modo de compreender o que vai se mostrando e, juntos, vão validando ou não o que propõem, até que Hélio tem a ideia de verificar no aplicativo a profundidade do barco no ponto dado, com um comando, que verifica o valor da função "substituindo" os valores do ponto. No diálogo, chegam à conclusão de que o barco, ao se deslocar em direção à origem, estaria se direcionando para um lugar mais profundo. Fabrícia, em diálogo com o pesquisador, vai respondendo algumas perguntas e vai compreendendo o gráfico e o que se pede na tarefa. Chega à conclusão de que o gráfico aponta valores no eixo z e que, relacionando com a situação da tarefa, ao se deslocar para a origem, o barco estaria caminhando para um lugar mais profundo.

Entendemos que ao estarem com a RA, os participantes Hélio e Alessandro voltam-se para o gráfico e abrem-se às possibilidades de exploração. Com o que é proposto na tarefa, projetam o gráfico da função e voltam-se para ele com olhar indagador, querendo "ver o lago", o "barco", "a boia". É necessário buscar o outro, dizer o que não está "vendo" e aquilo que já se vê: a profundidade na origem é 200. Fabrícia, neste encontro, não estava com sua colega de dupla e, ao perceber isso, o pesquisador se aproxima dela para saber o que ela estava compreendendo da tarefa. Percebe que não havia avançado muito e faz algumas perguntas que vão dando possibilidades de ela compreender o que vai se mostrando.

Da perspectiva da fenomenologia,

> Um pensamento que se contentasse em existir para si, fora dos incômodos da fala e da comunicação, logo que aparecesse cairia na inconsistência, o que significa dizer que ele nem mesmo existiria para si. À famosa questão de Kant, podemos responder que pensar é com efeito uma experiência, no sentido em que nós nos damos nosso pensamento pela fala interior ou exterior. Ele progride no instante e como que por fulgurações, mas em seguida é preciso que nos apropriemos dele, e é pela expressão que ele se torna nosso. A denominação dos objetos não vem depois do reconhecimento, ela é o próprio reconhecimento. (MERLEAU-PONTY, 2018. p. 243).

No curso, os participantes se envolvem num movimento de exploração dos objetos matemáticos em RA. O corpo-próprio se dá conta do que lhe chega pelos órgãos do sentido e vivencia os objetos em RA, para compreendê-los. Na busca por compreensão, nunca perde de seu horizonte o outro. À medida em que explora, vai comunicando por seus modos de se expressar, seja pela fala, por gestos das mãos e pelos movimentos do corpo, utilizando canetas para representar uma superfície parabólica e as retas paralelas que a constituem, ou projetam em RA para mostrar ao outro o que estão compreendendo. Buscam o outro para, pelo diálogo, validarem o que pensam, e no movimento compreensivo vão constituindo conhecimento. Exploram gráficos tridimensionais, a ideia de caminhos para determinar o limite de uma função de duas variáveis, o sentido do cálculo de derivadas direcionais ou o infinito que é *visto* pela aproximação entre o volume dos prismas e da região abaixo (ou acima) de uma superfície. Da perspectiva fenomenológica, para compreensão de algo é necessário que o corpo-próprio expresse o visto e pensado. Não basta ver e não basta pensar. À medida em que o corpo-próprio retoma o visto/pensado, pelos atos da consciência, vai expressando (na linguagem), junto ao outro (ou nunca o perdendo de seu horizonte de possibilidades de vir-à-ser), e vai articulando compreensões, o conhecimento vai se constituindo.

> Em relação ao diálogo, Merleau-Ponty diz que na experiência do diálogo o falar do *outro* desperta em nós nossas próprias significações, assim como nosso falar, como forma de resposta, vai tocar no outro suas significações. O diálogo permite invadirmos "um ao outro na medida em que pertencemos ao mesmo mundo cultural, e, em primeiro lugar à mesma língua, e na medida em que meus atos de expressão e os do outro pertencem à mesma instituição" (MERLEAU-PONTY, 2002, p. 174)[24]. Ou seja, para o autor, o diálogo abre a possibilidade de compartilhamento entre sujeitos que são capazes de se comunicar, de dizer do percebido fazendo-se entender. O diálogo põe os sujeitos em 'sintonia' fazendo-os compartilhar o sentido do percebido. (FERREIRA, 2014, p.49)

Compreendemos o diálogo como uma das formas pelas quais o corpo-próprio pode trocar, com o outro, compreensões. Destacamos a importância da expressão para a constituição de conhecimento, visto que, pela expressão, as compreensões são articuladas,

---

[24] MERLEAU-PONTY, M. *A prosa do mundo*. São Paulo: Cosac & Naify, 2002, 192p.

para se tornarem inteligíveis, para dar fluidez ao pensado. No curso, o diálogo entre os participantes é importante para comunicar o percebido e evidenciar essa constituição do conhecimento.

8 CONSIDERAÇÕES SOBRE O COMPREENDIDO

Nesta seção, em que vamos conduzindo para o fechamento do trabalho, com as compreensões que se constituíram até agora, mostra-se necessário retomar, mais uma vez (pois assim o foi durante todo nosso caminhar investigativo), a pergunta que nos moveu: *como se mostra a constituição do conhecimento em Cálculo Diferencial e Integral ao se estar-com a Realidade Aumentada?* Entendemos que seja necessário retomá-la por tratar-se de um caminhar que buscou por compreensões e, neste momento, é necessário explicitá-las.

Para compreender o que nos inquietava precisávamos estar-com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática da Unesp campus Guaratinguetá e, para isso, preparamos um curso livre, de curta duração. Propusemos aos participantes que explorassem tarefas envolvendo assuntos presentes no conteúdo programático de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral a serem exploradas com um aplicativo de Realidade Aumentada, o GeoGebra AR.

Analisando a experiência vivida pelos participantes do curso foi possível compreender que, ao estarem-com-RA, constituem conhecimento: *Investigando assuntos matemáticos*; *ao moverem-se, potencializando formas de ver*; *dialogando e comunicando o compreendido para se fazer entender*. Esses são aspectos que destacamos nas Categorias Abertas constituídas no movimento de análise e que possibilitaram compreensões quando nos colocamos abertos para *deixar* e *fazer ver* aquilo que se mostrava relevante acerca da constituição de conhecimento em Cálculo desses participantes.

Vimos que os participantes, ao *Investigar assuntos matemáticos como modo de compreensão*, constituem conhecimento ao se envolverem no processo investigativo quando estão-com-RA. Ao voltarem-se para o que vai se mostrando, se abrem às possibilidades de exploração, elaboram conjecturas sobre o que veem, validam e refutam hipóteses e são capazes de articular os gráficos tridimensionais (em RA) com as formas algébricas de equações que os representam, com os enunciados de tarefas e com o assunto que lhes é apresentado pelas definições. Entendendo a perspectiva do corpo-próprio como tratada em Merleau-Ponty, vê-se que os participantes se movem querendo saber, voltando-se de modo atento e indagador para os objetos matemáticos que exploram com a RA.

O movimento que potencializa formas de ver os assuntos matemáticos, é uma categoria que nos permite destacar o movimento do corpo-próprio, a disposição dos participantes para a constituição de conhecimento ao explorarem com a RA, por exemplo, para que seja possível projetar e percorrer caminhos quando verificam o limite de uma função de duas variáveis, ou, quando compreendem a ideia de integral dupla, a aproximação entre o resultado dos cálculos com a somatória dos volumes dos prismas entre o plano xy e a superfície da função, ou o significado de seus limites de integração. São ideias constituídas na experiência vivida no curso e que se mostram como importantes para a compreensão dos assuntos e de alguns *porquês* que permanecem obscuros quando o foco está na aplicação de técnicas para calcular, como explicitado pelos participantes ao longo de alguns momentos.

Ao estarem-com-RA os participantes movem-se e fazem mover para si os objetos digitais, procurando outros *modos de ver* e *explorar* tarefas envolvendo assuntos do Cálculo e até mesmo comparando com os modos possibilitados por computadores. Para os participantes trata-se de um *ver* que se compara com os objetos do espaço físico, os objetos em RA podem ser explorados como se fossem "*essa mesa aqui*". O corpo-próprio se move e *vê*, para além daquilo que lhe chega pelos olhos. É organismo vivo que, para compreender em RA, pode abaixar e ver por baixo, se mover para os lados e ver por outra perspectiva, por exemplo, a inclinação e direção de uma reta tangente e compreender a ideia de derivadas direcionais. Move o controle deslizante para ver o infinito, compara a aproximação dos valores do volume dos prismas com o da superfície determinada pela região de integração.

O corpo-próprio vai *compreendendo a RA* e *ao estar-com-RA*. Sabe que pode, mesmo que virtualmente, enquanto potência de um movimento possível, *percorrer os caminhos*, analisar *no* movimento o que vivencia ao olhar para aquele ponto, visando entender o que ocorre com o limite da função. Nisso, ele entende o que é possível com a RA e como isso que é possível lhe dá condições de compreender os objetos matemáticos.

> **Alessandro**: Isso que eu queria falar. Eu estou tendo cálculo 2 e, mesmo assim, tive que retomar os conceitos. Então com a ajuda do Geogebra eu consegui assimilar muito melhor. Na compreensão. Então quando eu lia os conceitos e jogava no GeoGebra, foi muito mais fácil para mim, pelo menos, enxergar. Então essa questão do plano tangente. Porque no livro fala "é análogo à reta tangente à curva". Então depois você faz para a superfície e as derivadas parciais. Com o Geogebra foi mais fácil enxergar essa analogia que o livro fez.

A categoria *Diálogos que comunicam o compreendido para se fazer entender* é constituída por ideias que trazem a interlocução entre os participantes. Trata-se de formas de expressão, modos pelos quais os sujeitos comunicam o que vai sendo compreendido. É pela linguagem que os participantes expressam suas compreensões e, também, vão compreendendo o outro. Na experiência vivida no curso os sujeitos não se comunicam apenas pela oralidade ou escrita, mas se comunicam considerando seus atos totais de expressão.

Organismo vivo, corpo-próprio que é marco zero de todas as experiências possíveis, é corpo que expressa. À medida em que exploravam, movendo-se para ver, os participantes iam comunicando, buscando o outro para juntos irem articulando compreensões. Validavam ou refutavam o pensado e constituíam conhecimento com-RA. Vão compreendendo gráficos de funções de duas variáveis, como no caso das superfícies cilíndricas e quádricas, ou quando explicitam o significado das *direções* das derivadas direcionais, por exemplo.

Compreender e constituir conhecimento, como entendemos na perspectiva fenomenológica, envolve a expressão, ou seja, o vivido no corpo-próprio é expresso. Assim, não basta que eu veja e não basta que eu pense, é preciso que o visto/pensado seja retomado pelos atos da consciência e, à medida em que vai expressando, pela linguagem, esse organismo vivo que é o corpo-próprio vai compreendendo e constituindo conhecimento.

> É preciso reconhecer então essa potência aberta e indefinida de significar – quer dizer, ao mesmo tempo de apreender e de comunicar um sentido – como um fato último pelo qual o homem se transcende em direção a um comportamento novo, ou em direção ao seu próprio pensamento, através de seu corpo e de sua fala. [...] Não se pode dizer da fala nem que ela é uma “operação da inteligência”, nem que é um “fenômeno motor”: ela é integralmente motricidade e integralmente inteligência. (MERLEAU-PONTY, 2015. p. 263-264).

Na pesquisa, mostra-se que o corpo-próprio constitui conhecimento à medida em que *se volta para*... e se abre às possibilidades de *viver* assuntos do Cálculo ao *ser-com-RA*, ao *estar-com-RA*. Há um movimento intencional em que o aluno se volta para o que vai se mostrando e se abre às possibilidades de investigação, no qual *é*, enquanto corpo-próprio, potência de movimento; se move e faz mover para si, vendo, refletindo, explorando, retomando, percebendo o que a ele vai se mostrando ao estar com o outro, cossujeito com quem compartilha o percebido, semelhante a si, dotado de potência e aberto às possibilidades de vir-à-ser no mundo.

> Ao nível existencial, portanto, a relação entre Pensamento e Linguagem é simultânea e intrínseca na ação de expressão, o que exige uma nova concepção de Pensamento – que não seja um pensar prévio e determinante do sentido a ser expresso -, e também da Linguagem – que não se restrinja à Linguagem verbal instituída numa língua. [...] o Pensamento é um ato expressivo, vivido no mundo (SILVA, 1994, p.69).

Retomando ideias de Rosa e Bicudo (2018), ressaltamos que ao assumir o *ser-com-RA* e *estar-com-RA* não compreendemos a RA ou outras Tecnologias Digitais como substitutos ou próteses para suprir ausências no corpo-próprio. Com isso, queremos dizer que a RA está presente no próprio pensar do humano, "falamos do pensar-com-TD, de forma a se perceber com elas [as tecnologias], assim como de produzir conhecimento nas relações com o mundo e com ou outros" (ROSA; BICUDO, 2018, p. 24).

Ao retomar os trabalhos apresentados na seção de Revisão Bibliográfica (GARZELLA, 2013; DÖRR, 2017) que abordaram as disciplinas de Cálculo e o expresso pelos participantes do curso, entendemos que ambos apontam para uma predominância de práticas educativas que privilegiam a aplicação de técnicas e procedimentos para calcular e se obter resultados. Porém, compreender assuntos de Cálculo não deve se restringir a aplicação de processos que nem sempre fazem sentido ao aluno. Não estamos negando a importância de cálculos e técnicas de calcular, mas questionamos a ênfase que é dada a esses aspectos que pouco ou nada revelam acerca dos significados dos assuntos desenvolvidos na disciplina. Compreendemos que não é por acaso que a disciplina venha acompanhada, geralmente, de altos índices de reprovação e desistências nos cursos por parte dos alunos (BARUFI, 1999; GARZELLA, 2013; DÖRR, 2017).

> [...] a Linguagem instituída é meio básico para a comunicação, pois é preciso haver troca intersubjetiva. Porém, esta Linguagem convencional, por ela própria, não introduz significações novas, é preciso um outro elemento que caracterize a criação na expressão (SILVA, 1994, p. 68)

Com o que vai se mostrando na pesquisa, questionamos se as aulas de Cálculo podem ser ambientes abertos à exploração, ao levantamento e verificação de hipóteses e ao diálogo, se podemos compreendê-los como ambientes pensados para que *o sentido se faça*. Com a RA, ao explorarem assuntos da disciplina de Cálculo, como o assunto de Limites, os participantes abrem-se às possibilidades para que o sentido se faça, abrem-se a outros modos de compreender e constituir conhecimento, assumindo uma postura investigativa.

Com o findar desta pesquisa, estamos certos de que não esgotamos os assuntos tratados. Abrem-se, por ora, possibilidades para outras pesquisas acerca dessa temática, por exemplo: com um estudo que contemple uma turma da disciplina de Cálculo, geralmente com duração semestral e anual, o que possibilitaria mais tempo para tratar e discutir os assuntos do conteúdo programático da disciplina; mostra-se como importante um estudo que possa propor uma formação continuada com professores que lecionam disciplinas de Cálculo, envolvendo momentos para que possam voltarem-se para sua prática educativa e refleti-la, de uma perspectiva que considere as possibilidades que se abrem quando a pessoa está-com-RA.

A vivência com os participantes do curso revela que eles, ao estarem-com-RA, buscam entender o que fazem, abertos às possibilidades de exploração, movem-se (movidos pela intencionalidade dos atos da consciência), expressam o que vão compreendendo e constituem conhecimento. Trata-se de um movimento do corpo-próprio em que o *sentido* vai se fazendo.

Ao estar-com o GeoGebra AR, há possibilidade para que o corpo-próprio *perceba* os objetos digitais projetados e explore gráficos de funções, intersecções, retas e pontos, curvas, fazendo modificações e acompanhando simultaneamente suas inferências no gráfico. Com a RA, aquilo que vai se mostrando, vai fazendo *sentido* no corpo-próprio, um sentido que conforme explicita Bicudo

> "dá-se pela *percepção*. Percepção é tida por Merleau-Ponty como o primado do conhecimento, à medida que ela oferece verdade como *presença*, dizendo com isso tratar-se de uma verdade percebida com nitidez no momento em que o sentido se faz para o sujeito. Não se trata nem de verdade lógica, nem de concepções intelectualmente elaboradas. Husserl afirma que perceber uma coisa é vê-la, tocá-la, cheirá-la... é senti-la de diferentes maneiras e de acordo com as possibilidades dos sentidos. (BICUDO, 2002, 322)

A percepção se dá no movimento do corpo-próprio, que se *dirige para*... algo, buscando compreender e, nesse movimento, o sentido vai se fazendo. O movimento do corpo-próprio não é do tipo mecânico, previamente e meticulosamente pensado, do tipo penso e executo, concreto; mas um *movimento vivo*, no qual o corpo-próprio *é* e se *realiza*, constituindo-se. Trata-se de um movimento *livre*, motriz, movido na própria intencionalidade dos atos da consciência e que nos permite perceber o mundo e nos constituir nele "Não é nunca nosso corpo objetivo que movemos, mas nosso corpo fenomenal, e isso sem mistério, porque já era nosso corpo, enquanto potência de tais e tais regiões do mundo, que se levantava em direção aos objetos a pegar e que os percebia" (MERLEAU-PONTY, 2018, p. 153-154).

Vai se mostrando para nós os modos pelos quais o sentido foi se fazendo no corpo-próprio ao estar-com-RA que, enquanto condição de abertura às possibilidades de vir-à-ser, colocou-se em *movimento*, em *ação* de *dirigir-se à...*, explorando, analisando, movendo e expressando. Os participantes do curso são sujeitos em *atividade*, são *ativos* no processo, convidados a *aprender*.

Retomando uma pergunta feita na disciplina *Aprendizagem Matemática*, cursada junto à este PPGEM, *O que é aprender?*, posso expressar que ao final (por hora) desta pesquisa, compreendo melhor de que ela (a pergunta) trata, o que me permite elaborar uma resposta. Compreendo que o aprender é o próprio movimento no qual o sentido das coisas vai se fazendo para o sujeito e que, para aprender, o corpo-próprio se volta para... querendo saber e, pelos atos da consciência, vai analisando, explorando, comparando, compreendendo; num movimento em que o sentido se dá pela/na percepção.

Aprender algo, tal qual estou entendendo, é compreender o sentido desse algo como verdade *percebida*. A aprendizagem vai se dando no movimento em que o sentido vai se fazendo para cada um que, nas possibilidades de vir-à-ser, vai se percebendo *com* e *no* mundo da vida, quando se abre a conhecer e constituir-se, expondo o percebido. Ao estar-com-RA e com tarefas envolvendo assuntos matemáticos, aberto às possiblidades de experienciá-los com a Realidade Aumentada o conhecimento vai se constituindo, há aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução: Alfredo Bosi. 21 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ARAUJO, F. V. F., **Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio**: conceitos e aplicações. 2020, 112 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-árido. 2020.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática**: as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

AZUMA, T. R. A Survey of Augmented Reality. **Presence: Teleoperators and Virtual Environments,** v.6, n.4, 1997. Disponível em: < http://www.ronaldazuma.com/papers/ARpresence.pdf >. Acesso em: 20 jun. 2017

BACKENDORF, V. R., **Abstração reflexionante e matemática dinâmica**: compreensão do conceito de integral dupla. 2020, 127 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. 1999**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L.; GOMES, E. Cálculo, Análise e Álgebra Linear: indicações para novas pesquisas a partir das investigações do GT04 *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu, **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM - Paraná, 2018. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/371/596 > Acesso: 1 ago. 2019.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BICUDO, M. A. V. Sobre a Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C.(Org.) **A Pesquisa Qualitativa em educação**: um enfoque fenomenológico. Piracicaba, SP: Editora Unimep, 1994. p. 15-22.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia**: confrontos e avanços. Editora Cortez, 2000.

BICUDO, M. A. V. Construção do conhecimento e construção da realidade. In: BICUDO, M. A. V.; BELUZZO, R. C. B. (Org.). **Formação humana e educação**. Bauru: EDUSC, 2002. p. 317-326.

BICUDO, M. A. V. Realidade Virtual: uma abordagem filosófica. **Cienc. Hum. Soc. Rev. Seropédica**, v. 32, n. 1, p. 121-134, 2010.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. **Realidade e cibermundo**: horizontes filosóficos e educacionais antevistos. Canoas: Ed. ULBRA, 2010.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica**. São Paulo: Editora Cortez, 2011. p. 29-40.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática: sua importância na formação de professores de matemática. In: SILVA, R. S. R. (Org.). **Processos formativos em educação matemática**: perspectivas filosóficas e pragmáticas. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2018.

BICUDO, M. A. V.; AFONSO DA SILVA, A. Análise de vivências em situação de constituição de conhecimento. In: **A prática na Investigação Qualitativa**: exemplos de estudos. Aveiro, Pt. Edicão Ludomedia, 2018, p.158 – 178.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Fenomenológica em Educação: Possibilidades e desafios. **Revista Paradigma**, v. 41, p. 30-56, jun. 2020.

BULLA, F. D. **Modelagem matemática na perspectiva da realidade aumentada**: possibilidades à formação de professores. 2016, 102 f. Dissertação (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2016.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em Matemática. **Educere et Educare**, v.15, n.33, set./dez. 2019.

DETONI, A. R.; PAULO, R. M. A organização dos dados da pesquisa em cena: um movimento possível de análise. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica**. São Paulo: Editora Cortez, 2011. p. 99-120

DOMENICO, L. C. A. **Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de tecnologias de informação e comunicação**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

DÖRR, R. C.; MUNIZ, C. A.; NEVES, R. S. Operações algébricas e funções como obstáculos à aprendizagem no cálculo. In: 1º SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 2016, Bonito, MS. **Anais** do 1º LADIMA, Bonito, MS, 2016.

DÖRR, R. C. **Análise de aprendizagens em Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017, 237 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

FERREIRA, M. J. A. **A expressão no ciberespaço**: um voltar-se fenomenologicamente para o diálogo acerca de conteúdos matemáticos. 2014. 202 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP, 2014.

FIRER, M.; TOZONI, S.; SAA, A., O ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Unicamp. **Jornal da Unicamp**, n.587, Campinas, dez. 2013. Disponível em: < https://www.unicamp.br/unicamp/ju/587/o-ensino-de-calculo-diferencial-e-integral-na-unicamp> Acesso em: 20mai. 2021.

GARNICA, A. V. M., Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**. 1997, v. 1, n. 1. p. 109-122. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/S1414-32831997000200008 >. Acesso em: 23 jun. 2020.

GARZELLA, F. A. C., **A disciplina de Cálculo I**: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. 2013. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, 2013.

HEIDEGGER, M. **Ser e tempo**. Tradução: Márcia Sá Cavalcante. Petrópolis: Vozes. 2015.

HUSSERL, E. **Ideas Relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica**: libro segundo investigaciones fenomenológicas sobre la constitución. Tradução Antônio Zirión, México: Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2005.

KIRNER, C. Prototipagem Rápida de Aplicações Interativas de Realidade Aumentada. **Tendências e Técnicas em Realidade Virtual e Aumentada**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p. 29-54, jan. 2011.

LÉVY, P. **O Que é o Virtual?.** Trad. Paulo Neves. São Paulo: Editora 34, 1996.

LIMA, G. L. **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994.** 2012. 444 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

MACHADO, O. V. M. Pesquisa qualitativa: modalidade fenômeno situado. *In*: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Org.) **A Pesquisa Qualitativa em educação**: um enfoque fenomenológico. Piracicaba/SP: Editora UNIMEP, 1994.

MERLEAU-PONTY, M. **O visível e o invisível**. São Paulo, Editora Perspectiva, 3 ed, 1992.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 5 ed, 2018.

MIQUELINO, L. H. **As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de cálculo**. 2012.147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Uberaba, Uberaba, 2012.

MIRANDA, G. M. H. **Esculturas matemáticas**: a atividade para o estudo da integral dupla. 2018. 321 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018.

MISSAGGIA, J. O conceito husserliano de corpo: sua dualidade e função nas experiências perceptivas. **Problemata: Revista Internacional de Filosofía**, v. 8, n. 3, p. 196-208, 2017.

MONDINI, F., MOCROSKY, L. F., BICUDO, M. A. V. A hermenêutica em educação matemática: Compreensões e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v. 12, n. 1, p 1-10. Florianópolis, 2017. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n1p1 > Acesso em: 21 jan. 2020.

MOUSSA, A. H. **Uma Proposta de Aplicação de Realidade Aumentada no Ensino de Cálculo**. 2016. 70 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pampa, Bagé, 2016.

MURRAY, J. **Hamlet no holodeck:** o futuro da narrativa no ciberespaço. Tradução: Elissa Khoury Daher, Marcelo Fernandez Cuzziol. São Paulo: Unesp, 2003.

NASSER, L.; SOUSA, G. A.; TORRACA, M. A. Transição do ensino médio para o ensino superior: como minimizar as dificuldades em cálculo. **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 5, 2012.

NÓBREGA, T. P. Corpo, percepção e conhecimento em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**. v. 13, n. 2, p. 141-148. Natal, 2008.

PEREIRA, A. L. **Crenças e concepções de professores acerca do uso das tecnologias digitais em aulas de matemática**. 2017. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

PEREIRA, B. F. A., **Índices de permanência e continuidade nas disciplinas de cálculo diferencial e integral da UNESP - Campus de Guaratinguetá**. 2019. Dissertação (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Unesp. Guaratinguetá, 2019

PEREIRA, L., OLIVEIRA, D., COUTO, I., OLIVEIRA, A., SILVA, R. L. S. Uma ferramenta de apoio ao ensino de cálculo com realidade aumentada. *In*: **Simpósio brasileiro de informática na educação** (Vol. 28, p. 595-604), Recife, 2017. Disponível em: < https://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/7588 >. Acesso em: 8 set. 2018.

PONTE, J. P., Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em educação**, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Autêntica, 2013.

PORTER, M. E.; HEPPELMANN, J. E. Why every organization needs an augmented reality strategy. **Harvard Business Review**, Boston, p. 46–57, 2017. Disponível em: < https://hbr.org/2017/11/why-every-organization-needs-an-augmented-reality-strategy> Acesso em: 21 fev. 2021.

RAFAEL, R. C. **Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação. 2017. p. 103. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

RESENDE, B. **Realidade aumentada e interfaces naturais na formação do professor de matemática.** 2016, 132 f. Dissertação (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2016.

RODRIGUES, L, A,; NEVES, R. S. P. O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: em busca de estratégias de intervenção. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu, **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM - Paraná, 2018. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/629/467> Acesso: 1 ago. 2019.

ROSA, M.; BICUDO, M. A. V. Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. In: PAULO, R. M., FIRME, I. C., BATISTA, C. C. (Orgs.). **Ser professor com tecnologias**: sentidos e significados. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018. p. 13-36.

SANTOS, A. H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática:** o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 2014. 98f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR. 2014

SANTOS, M. R.; BICUDO, M. A. V., Compreensões pré-predicativas sobre o espaço geométrico. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 16, n. 1, 2014.

SCHAUN, T. T. **As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada.** 2019. 89f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

SCHUSTER, P. E. S. **Uma professora em cyberformação com tecnologias digitais de realidade aumentada**: como se dá a constituição do conhecimento matemático?. (2020) Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2020.

SILVA, A. A. **A produção do conhecimento em Educação Matemática em grupos de pesquisa**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Unesp, Rio Claro, 2017.

SILVA, U. R. **A linguagem muda e o pensamento falante**: sobre a filosofia da linguagem em Maurice Merleau-Ponty. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1994.

STEWART, J. **Cálculo, Volume 2**, Tradução: EZ2 Translate. ed. 7, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VALENTIM, T. A. **O uso da Realidade Aumentada no ensino da Geometria Espacial**. 2017. 44 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017

APÊNDICES

Apêndice A - Termo de consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a), você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, e aceitando fazer parte deste estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável.
Em caso de recusa, você não será penalizado (a) de forma alguma.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:
Instituição de Ensino: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" *Campus* Rio Claro.
Título do Projeto: "Realidade Aumentada e o Ensino de Cálculo: possibilidades para a constituição do conhecimento"
Pesquisador Responsável: Anderson Luis Pereira
Celular / WhatsApp: (12) 9 91473198
E-mail: anderson.pereira@unesp.br

• Com esta pesquisa, pretendo investigar a Produção do conhecimento matemático do aluno ao estar-com um *software* de Realidade Aumentada e atividades que envolvem conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

• Assinatura do pesquisador:

• CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS
Eu,____,
CPF: ________________, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos, riscos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimentos, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, o pesquisador Anderson Luís Pereira, do projeto de pesquisa intitulado "Realidade Aumentada e a Produção do conhecimento matemático" a realizar registros com imagens que se façam necessários e a colher meu depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes. Ao mesmo tempo, libero a utilização destas imagens e depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos científicos, comunicações orais e site do pesquisador), em favor do pesquisador acima especificado.

Guaratinguetá, 05/09/2019

Assinatura do participante: __________________________________

Apêndice B – Descrição das tarefas do curso

Neste apêndice, descrevemos as tarefas propostas aos participantes do curso. Essas tarefas foram elaboradas juntamente com a professora de umas das turmas de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Licenciatura em Matemática.

Encontro 1

Tarefa 1 – Cubo e sua planificação

Como primeira tarefa, propusemos aos participantes a construção e exploração de um cubo planificado. O objetivo era a familiarização com o *GeoGebra AR*, com o aplicativo de gravação das telas dos smartphones e com o uso do Google Drive.

Com as ferramentas ***Cubo*** e ***Planificação***, os participantes puderam construir o objeto e, após, explorar a planificação no ambiente em RA. Com o uso de um ***Controle Deslizante***, era possível, observar o abrir e fechar do cubo e suas faces planificadas. Essa fase de exploração foi gravada pelos participantes e compartilhada através do Google Drive.

Tarefa 2 – Esfera e sua posição no espaço

- **Criar: *m, n* e *o*;**
- **Criar *r*, raio da esfera;**
- **Digitar a equação da esfera de raio r;**
- $\mathbf{(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - o)^2 = r^2}$

Outra tarefa proposta, também visando a familiarização dos participantes com algumas ferramentas do *GeoGebraAR* envolvia a construção de uma esfera a partir da equação

$$\boxed{(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - o)^2 = r^2}$$

Para ***m, n, o*** e ***r*** foram criados ***Controles Deslizantes*** que possibilitaram manipular seus valores, movendo a esfera no espaço tridimensional em relação aos eixos ***x***, ***y*** e ***z***. Com a variação dos valores de **r**, podia-se alterar o raio da esfera. O aplicativo também permitia que, ao tocar na tela do smartphone, fosse ampliado ou reduzido o plano e os objetos.

Encontro 2

Tarefa 1a - Cilindros

Um **cilindro** é uma superfície constituída de todas as retas (chamadas **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana (STEWART, 2013).
a) Esboce o gráfico da superfície $z = x^2$

Dando início ao segundo encontro, apresentamos aos participantes uma definição de *Cilindro*, presente em Stewart: "Um **cilindro** é uma superfície constituída de todas as retas (chamadas **geratrizes**) que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana" (STEWART, 2013, p.744, grifo do autor). Em seguida, apresentamos a primeira atividade do encontro:

a) Esboce o gráfico da superfície $z = x^2$.

Solicitamos que os participantes identificassem os entes *reta*, *retas paralelas*, *curva plana*, *geratriz*, mencionados na definição e que, para o autor, constituem uma superfície cilíndrica.

Tarefas 1b e 1c – Cilindros

Explore no aplicativo as superfícies.
b) $x^2 + y^2 = \mathrm{m}$
c) $y^2 + z^2 = n$

As segunda e terceira tarefas era sobre superfícies cilíndricas e, desta vez, a curva plana que gerava a superfície era uma circunferência. Solicitamos que os participantes observassem os entes que permitem, a partir da definição de Stewart, denominar esta superfície de cilíndrica. A diferença entre a segunda e terceira tarefa está apenas na reta geratriz da superfície: na segunda, ela era paralela ao ***eixo z*** e na terceira, paralela ao ***eixo x***. As equações propostas foram

b) $x^2 + y^2 = m$

c) $y^2 + z^2 = n$

Tarefa 2a e 2b– Superfícies Quádricas

Essa tarefa envolve a definição de Superfícies Quádricas. Foi apresentada a definição de Stewart (2013)

Uma **superfície quádrica** é o gráfico de uma equação de segundo grau nas três variáveis *x*, *y* e *z*. A equação mais geral é:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$

Onde: *A*, *B*, *C*, . . . , *J* são constantes. (STEWART, 2013, p. 744, grifo do autor).

As tarefas propostas aos participantes, traziam as equações:

a) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = p$

b) $z = y^2 - x^2$

Para cada equação, propusemos que os participantes digitassem no campo entrada do aplicativo **x = m**, **y = n** e **z = o.** Com isso, foram gerados planos que interceptavam a superfície e a proposta era que eles observassem as curvas de intersecção com a RA.

Obs.: Na atividade, percebemos que alguns participantes tiveram dificuldades com os *smartphone* que, durante a exploração, travavam a imagem e prejudicava a exploração. Optamos, então, por retomar no encontro seguinte com outra tarefa semelhante.

Encontro 3

Tarefa 1 – Superfícies Cilíndricas e Quádricas

Vamos digitar no campo entrada do Geogebra AR a equação:

$mx^2 + ny^2 + oz^2 = p$

Iniciamos o terceiro encontro, com uma discussão das tarefas já realizadas nos encontros anteriores com o objetivo de entender como os participantes estavam vendo o modo de exploração possibilitado pelo aplicativo. A primeira solicitava que, dada a equação, manipulassem as constantes **m, n, o** e **p**.

Com os ***Controles Deslizantes*** **m, n, o** e **p**, os participantes acompanhavam as variações da superfície gerada pela equação. Após as explorações, pedimos que eles, movimentando os controles, construíssem os seguintes objetos:

Mova os controles e construa:

- **Uma esfera**
- **Uma superfície cilíndrica**

- **Um elipsoide**

Pedimos que, quando eles construíssem cada um desses objetos, fizessem um print da tela (captura de tela do *smartphone*) e compartilhassem conosco o arquivo pelo Google Drive. Com as imagens compartilhadas, discutimos com eles a proposta da tarefa.

Tarefa 2 – O limite não existe

Dando prosseguimento ao encontro, foram propostas duas tarefas acerca do assunto de Limites de funções em um ponto determinado. Inicialmente, pedimos que eles dissessem o que é preciso ocorrer para que o limite de uma função exista.

Obs.: Houve certa confusão com a definição de limite de funções de curvas planas, em que é necessário que os limites laterais (à esquerda e à direita) tendam a um mesmo valor. Porém, após uma conversa entre eles, perceberam que não bastava verificar a aproximação da função pela esquerda e pela direita, mas por infinitos **caminhos** pelos quais podemos nos aproximar deste ponto pela superfície, e que todos estes caminhos precisam tender a um mesmo valor. Caso contrário, o limite desta função, neste ponto, não existe**.**

A primeira tarefa solicitava que os participantes verificassem e explicassem o porquê da inexistência do limite da função, a seguir, no ponto (0,0).

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

Após explorarem a superfície no aplicativo, alguns participantes não compreenderam o *porquê* da não existência desse limite. Sugerimos que eles digitassem no *Campo Entrada* do aplicativo os planos **x = 0** e **y = 0** e, utilizando a ferramenta *Intersecção de Superfícies*, gerassem as curvas de intersecção desses planos com a superfície e observassem a aproximação destas curvas ao ponto **(0,0)**.

Tarefa 3 – O limite existe

A proposta era analisar o valor do limite de uma função, caso ele existisse, quando **x** e **y** tendem à **(0,0).** Assim, foi solicitado que os participantes digitassem no *Campo Entrada* do GeoGebra a função:

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Obs.: Para esta tarefa os participantes já demonstraram maior familiaridade com o aplicativo e, de imediato, houve manifestações acerca do comportamento da superfície quando observados alguns caminhos que passavam pelo ponto (0,0), situação diferente do caso anterior. Nesta atividade, o limite da função existe e é igual a 0. Durante a observação os participantes não tiveram dificuldades em perceber a existência deste limite e seu valor.

Encontro 4

Tarefa 1 – Limite

A tarefa do quarto encontro manteve a exploração da ideia de Limite pois, ao fim do encontro anterior, um dos participantes apresentou uma resolução para a tarefa que nem todos compreenderam. Propusemos então que eles retomassem a questão da existência ou não do limite de uma função, num dado ponto. A função proposta foi:

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)}$$

Eles digitaram a função no Campo Entrada do GeoGebra e iniciaram a exploração do gráfico. Todos concordaram que o limite, naquele ponto, não existe. Solicitamos que eles apresentassem sua forma de resolver a tarefa, justificando sua resposta.

Tarefa 2 – A profundidade do lago

Esta tarefa está presente em uma série de exercícios propostos em Stewart (2013, p.848), no capítulo 14 - *Derivadas Parciais*, dentro do tópico 14.6 - *Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente*. Trata-se do exercício 30 desta série do livro.

Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x,y) é z = 200 + 0,02x² - 0,001y³, em que x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto (80,60) em direção a boia, que está localizada no ponto (0,0).

a) **A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover?**
b) **Como você pensou para responder esta questão?**

c) **Qual a profundidade aproximada do lago no ponto (80,60)?**

d) **Qual a profundidade do lago no ponto (0,0)?**

Fizemos algumas adaptações na tarefa (itens **a**, **b**, **c** e **d**), visando auxiliar a exploração do gráfico da função pelos participantes.

Encontro 5

Tarefa 1 – A posição e o sentido

Essa tarefa também está presente na série de exercícios propostos em Stewart (2013, p.848), no capítulo 14 - *Derivadas Parciais*, dentro do tópico 14.6 - *Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente*. No livro, trata-se do exercício 34, porém com algumas modificações no enunciado.

Para a tarefa, os participantes foram convidados a investigar o gráfico da função que representa a altitude de uma montanha, dada pela equação $\mathbf{z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2}$. Explorando o gráfico, propusemos alguns questionamentos que envolviam as taxas de variação da altitude da montanha em determinadas direções, a partir de um ponto.

Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1000 – 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, em que x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas (60, 40, 966). O eixo x positivo aponta para o leste e o eixo y positivo aponta para o norte.

a) **Se você andar exatamente para o sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?**

b) **Se você caminhar em direção ao noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?**

c) Em que direção a inclinação é maior?

d) Neste mesmo ponto, há alguma direção em que a taxa de elevação seja maior? Qual é?

e) Qual o ângulo que o início desse caminho faz com a horizontal?

f) **Qual a taxa de elevação nessa direção?**

Nesta tarefa, os eixos **x** e **y** são utilizados para direcionar os deslocamentos na montanha, de acordo com os pontos cardeais.

Encontro 6

Tarefa 1 – Elegendo assuntos para elaborar tarefas

Neste encontro, os participantes se organizaram em duplas para eleger um assunto e discutir a tarefa que iriam apresentar nos encontros seguintes. A dinâmica do encontro se deu a partir do estudo nos grupos, cabendo, ao pesquisador, percorrer os grupos e dialogar sobre as tarefas e assuntos do cálculo que eles pretendiam explorar com a RA.

Encontro 7

Tarefa 1 – Apresentação: Integral dupla

Neste encontro, uma das duplas de participantes apresentou a proposta de trabalhar o assunto de Integral dupla. Iniciou com uma breve retomada da ideia de integral definida de curvas, ou seja, no plano **xy**, como sendo o cálculo da área da região compreendida entre o **eixo x** e essa curva. Dando continuidade, a dupla apresentou a ideia de Integral Dupla e sua relação com o cálculo do volume do sólido determinado por uma região do plano **xy**, definida pelos limites de integração, e a superfície da função, neste caso, uma função de duas variáveis do tipo **z = f(x,y)** (STEWART, 2013, p. 874).

No momento de exploração com a RA, foi proposto que os participantes pesquisassem por *Double Integral* na biblioteca online do GeoGebra e acessassem o applet escolhido.

Obs.: Como houve problema de suporte do applet pelos smartphones, apenas a dupla que estava apresentando realizou as explorações e compartilhou-as, projetando a tela do smartphone utilizando um projetor multimídia.

O applet escolhido pela dupla, inicialmente, apresentava uma função do tipo $z = -x^2 - y^2$, projetando o gráfico de um paraboloide com concavidade voltada para baixo. Ao longo da atividade, foi possível modificar a função e, consequentemente, sua representação gráfica. Com os Controles Deslizantes, podia-se: modificar os valores que determinam a região de integração; modificar o número de divisões desses limites em relação aos eixos x e y; e controlar o número de prismas que partem do plano **xy** até tocar a superfície projetada pela função. Com o aumento do número de divisões dos limites de integração, a dupla estabeleceu uma relação entre a ideia de limite e de infinito pois, quanto mais aumentava o número de divisões, maior era o número de prismas e, com isso, mais o sólido se aproximava da região de integração.

Com o objetivo de explorar os prismas projetados na parte inferior do plano xy, a dupla optou por exibir também uma função do tipo $z = x^2 - y^2$, que projetava um paraboloide hiperbólico.

Encontro 8

Tarefa 1 – Plano tangente e Derivadas direcionais

Nesta tarefa, uma das duplas apresentou sua proposta para explorar Planos Tangentes e Derivadas direcionais. Iniciaram com uma discussão envolvendo retas tangentes às curvas no plano xy. Propuseram analisar quais são as retas tangentes possíveis, em um determinado ponto pertencente a uma superfície, ou seja, passaram a discutir retas tangentes no espaço tridimensional.

Sugeriram construir a função $z = 3 - x^2 - y^2$ e um ponto móvel pertencente à superfície. Utilizando a ferramenta *Plano*, propuseram a criação de planos que passassem pelo ponto nas direções dos eixos x e y. Utilizando a ferramenta *Interseção de Superfícies*, criaram as curvas de intersecção desses planos com a superfície. Com essas curvas e o ponto em comum, propuseram a criação de duas retas tangentes, nas direções dos eixos x e y. E, utilizando uma ferramenta do GeoGebra AR, criaram um plano com essas duas retas tangentes. Esse plano, contém todas as retas que tangenciam o ponto, em todas as direções possíveis. Para mostrar as infinitas retas tangentes que constituem o plano tangente, a dupla sugeriu inserir um ponto móvel no plano, e construíram uma reta entre o ponto pertencente à superfície e esse ponto construído. Com isso, ao mover o ponto pertencente ao plano, teríamos a reta tangente à superfície, num determinado ponto e numa direção específica.

Tarefa 2 – Máximos e mínimos

Esta tarefa apresentada pela terceira dupla, envolve a ideia de máximos e mínimos, locais e absolutos, a partir de derivadas parciais. Iniciam questionando o que são os pontos de máximos e mínimos locais e absolutos e o que é um ponto de sela. Em seguida, apresentam definições e imagens retiradas de livros didáticos.

A dupla propõe uma exploração de uma função de duas variáveis no aplicativo.

$$\boxed{\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3}}$$

Para a exploração, a dupla pede para seja criado o plano **x = yb**, com controle deslizante em **b** e que gere a intersecção entre este plano e a superfície da função. O controle deslizante b permite que o plano gire em torno do eixo z, para poder ver a intersecção entre o plano e a superfície em diferentes direções.

No decorrer da exploração, foram feitas questões para relacionar o visto com a definição e imagens apresentadas inicialmente dos possíveis pontos de máximos e mínimos e, ainda, analisar se eles eram locais ou absolutos e se havia ponto de inflexão.