



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário

Junior Augusto Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário

Junior Augusto Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

P492z Pereira, Junior Augusto.
Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário / Junior
Augusto Pereira. - Presidente Prudente : [s.n], 2015
84 p.

Orientador: Vanessa Avansini Botta Pirani
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Círculo Unitário. 2. Polinômio Auto-Recíprocos Reais. 3. Zeros de
Polinômios. I. Botta Pirani, Vanessa Avansini. II. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

BANCA EXAMINADORA



PROFA. DRA. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
ORIENTADORA



PROF. DR. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
UNESP/FCT



PROFA. DRA. CLEONICE FATIMA BRACCIALI
UNESP/IBILCE



JUNIOR AUGUSTO PEREIRA

Presidente Prudente (SP), 26 de fevereiro de 2015.

Resultado: Aprovado

*Aos meus pais,
Pedro e Laide.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me guiado durante toda esta jornada. À minha família, em especial aos meus pais, Pedro e Laide, que sempre me apoiaram e me motivaram nos momentos difíceis e nenhum instante deixaram de confiar em mim; à minha irmã Indiana, pelos incentivos.

À minha namorada Heloísa, pelo amor, apoio, companheirismo e por estar sempre comigo nos momentos bons e ruins.

À minha orientadora, Professora Dra. Vanessa, pela sua paciência, sabedoria, experiência, incentivo, amizade e pela excelente profissional que tive o privilégio de trabalhar.

À todos os meus amigos da UEM, pelo companheirismo e também aos amigos de Astorga e do distrito (Tupinambá), que não citarei para não esquecer de alguém.

Ao Professor Dr. Aldevino pelo seu apoio, convívio e por ter sido um grande conselheiro durante a minha graduação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, pelos seus ensinamentos e pelas amizades adquiridas durante a graduação.

Aos professores do Departamento de Matemática da FCT/UNESP, em especial ao Prof. Dr. Marcos Pimenta, pelos conselhos, apoio, amizade e por ser um grande profissional dedicado que me ofereceu muito conhecimento. Aos Profs. Drs. Alagacone Sri Ranga, Cleonice Bracciali, Kenier Castilho e Messias Meneguette pelas sugestões neste trabalho.

Aos meus amigos de Prudente, em especial do mestrado: Adriano (Japonês), Gustavo (Narigudo), Renata, Paola, Bruno, Carol, Crislaine, Joyce, Rafael (Pão), Jonas (Jim Carrey), Cintia, Leonardo, Rafael (Castanha), Eloiza, Vinicius, Luciano, Eduardo Ramos, Hemily, Daiane, Clovis (Choquinho), Mariane, José Vanterler (Pancada), Larissa, Alisson, Irineu, Wesley, Marília e Patrícia. O meu muito obrigado a todos, pelo acolhimento e amizade em Prudente.

Ao suporte financeiro oferecido pela CAPES.

A todos, que fizeram parte deste trabalho, direta ou indiretamente.

“Que os nossos esforços desafiem as impossibilidades.

*Lembraí-vos que as grandes proezas da história
foram conquistas daquilo que parecia impossível”.*

Charles Chaplin

Resumo

São apresentados resultados clássicos sobre zeros de polinômios, como também resultados mais recentes. O interesse deste trabalho é apresentar resultados que mostram o comportamento dos zeros de polinômios auto-recíprocos reais em relação ao círculo unitário. O comportamento dos zeros destes polinômios é interessante, pois se $P(z)$ é um polinômio auto-recíproco e z_0 um zero de $P(z)$ então o inverso conjugado de z_0 também será zero de $P(z)$. São apresentados resultados conhecidos sobre condições necessárias e suficientes para que esta classe de polinômios tenha todos os seus zeros no círculo unitário, além de alguns exemplos como aplicações dos resultados para a melhor compreensão do texto.

Em especial são estudadas duas classes de polinômios auto-recíprocos reais, denotadas por $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $S_n^{(\lambda)}(z)$, apresentando suas propriedades e mostrando condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de ambos polinômios estejam no círculo unitário.

Palavras-Chave: *Círculo Unitário, Polinômios Auto-Recíprocos Reais, Zeros de Polinômios.*

Abstract

Classical results of zeros of polynomials are presented, such as more recent results. The interest of this work is to present results on the behavior of zeros of real self-reciprocal polynomial with respect to the unit circle. The behavior of zeros of these polynomials is interesting, because if $P(z)$ is a self-reciprocal polynomial and z_0 is a zero of $P(z)$ so the inverse conjugate $\bar{z}_0$ will be zero of $P(z)$ as well. Known results about necessary and sufficient conditions are presented in order that this class of polynomial has all its zeros on the unit circle, also examples as applications of the results for the best comprehension of the text. In particular two real self-reciprocal polynomial classes are studied, denoted by $R_n^{(\lambda)}(z)$ and $S_n^{(\lambda)}(z)$, presenting its properties and showing necessary and sufficient conditions so all zeros of both polynomials are on the unit circle.

Keywords: *Unit Circle, Real Self-Reciprocals Polynomials, Zeros of Polynomials.*

Lista de Figuras

2.1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^5 + 3z^4 + 1.5z^3 + 0.1z^2 + 0.8z - 5$.	23
2.2	Localização dos zeros do polinômio $F_3(z) = 5z^4 - 13z^3 + 5z^2 + z + 2$.	24
2.3	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 5z^4 + 13z^3 + 5z^2 + z + 2$.	24
2.4	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 2z^2 + z - 1$.	26
2.5	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3.2z^4 + 2.9z^3 + 1.5z^2 + z + 0.5$.	27
2.6	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1$.	28
2.7	Gráficos dos Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_5(x)$, $T_6(x)$, $T_7(x)$ e $T_8(x)$.	34
2.8	Gráficos dos Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_5(x)$, $U_6(x)$, $U_7(x)$ e $U_8(x)$.	37
3.1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$.	40
3.2	Localização dos zeros do polinômio $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$.	40
3.3	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2iz^5 + iz^4 + 3z^3 + (1+3i)z^2 + iz - 3$.	41
3.4	Localização dos zeros do polinômio $P^*(z) = -3z^5 - iz^4 + (1-3i)z^3 + 3z^2 - iz - 2i$.	41
3.5	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 + 3z^2 + 0.375z + 0.04$.	45
3.6	Localização dos zeros do polinômio $P_1(z) = -0.255z^2 - 2.985z - 0.9984$.	45
3.7	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = -2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z - 2$.	47
3.8	Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = -8z^3 + 9z^2 + 6z + 3$.	47
3.9	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$.	47
3.10	Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 18z^5 - 20z^4 + 8z^3 - 6z^2 + 4z - 4$.	47
3.11	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^6 + 4z^5 + 2.5z^4 + 3z^3 + 2.5z^2 + 4z + 2$.	48
3.12	Localização dos zeros do polinômio $[P'(z)]^* = 4z^5 + 5z^4 + 9z^3 + 10z^2 + 20z + 12$.	48
3.13	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 6z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 5z + 6$.	49
3.14	Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 30z^4 + 20z^3 + 9z^2 + 6z + 5$.	49
3.15	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 3z + 4$.	50
3.16	Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 20z^4 + 12z^3 + 6z^2 + 4z + 3$.	50
4.1	Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(1)}(z) = z^6 + (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.	60
4.2	Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(-1)}(z) = z^6 - (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.	60
4.3	Localização dos zeros do polinômio $R_5^{(2)}(z) = z^5 + 2(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.	61

4.4	Localização dos zeros do polinômio $R_5^{(3)}(z) = z^5 + 3(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.	61
4.5	Gráficos dos polinômios $W_9^{(1.5)}(x) = U_9(x) + \frac{1}{2}U_7(x)$ e $W_8^{(1.5)}(x) = U_8(x) + \frac{1}{2}U_6(x)$.	65
4.6	Localização dos zeros do polinômio $W_8^{(3)}(x) = U_8(x) + 2U_6(x)$.	66
4.7	Localização dos zeros do polinômio $W_7^{(-2)}(x) = U_7(x) - 3U_5(x)$.	66
4.8	Gráficos dos polinômios $U_8(x)$, $W_8^{(1/2)} = U_8(x) - \frac{1}{2}U_6(x)$ e $U_6(x)$.	70
4.9	Gráficos dos polinômios $U_9(x)$, $W_9^{(1.7)} = U_9(x) + 0.7U_7(x)$ e $U_7(x)$.	70
4.10	Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(0)}(z) = z^6 + 1$.	74
4.11	Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(1)}(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.	74
4.12	Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(2)}(z) = z^6 + 2(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.	75
4.13	Localização dos zeros do polinômio $S_6^{(1)}(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^3 + 2z^2 + 2z + 1$.	78
4.14	Localização dos zeros do polinômio $S_6^{(-1)}(z) = z^6 - z^4 - 3z^3 - z^2 + 1$.	78
4.15	Localização dos zeros do polinômio $S_5^{(1)}(z) = z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.	79
4.16	Localização dos zeros do polinômio $S_5^{(3.5)}(z) = z^5 + 4.5z^4 + 8z^3 + 8z^2 + 4.5z + 1$.	79

Sumário

Resumo	9
Abstract	11
Lista de Figuras	12
Capítulos	
1 Introdução	17
2 Resultados Preliminares	19
2.1 Introdução	19
2.2 Relações entre coeficientes e zeros de um polinômio	20
2.3 Limitantes para os zeros de um polinômio	21
2.4 Polinômios ortogonais	28
2.4.1 Sequência de polinômios ortogonais	28
2.4.2 Zeros de polinômios ortogonais	29
2.4.3 Polinômios ortogonais simétricos	30
2.4.4 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie	31
2.4.5 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie	34
2.4.6 Polinômios quase-ortogonais	37
3 Polinômios <i>Self-Inversive</i>	39
3.1 Introdução	39
3.2 Sequência de polinômios	44
3.3 Zeros de polinômios <i>self-inversive</i>	46
4 Resultados Sobre Algumas Classes de Polinômios Auto-Recíprocos Reais	51
4.1 Algumas propriedades do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$	52
4.2 Zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$	54
4.3 Propriedades e zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$	61
4.4 Classes especiais	73
4.5 Zeros de $S_n^{(\lambda)}(z)$	75

5	Considerações Finais	81
	Referências	83

Introdução

Resultados relacionados aos zeros de polinômios são utilizados em diversas áreas da matemática para se estudar solução de inúmeros problemas. Por exemplo, no estudo da estabilidade de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias, são importantes os resultados que determinam a quantidade de zeros que um polinômio possui na região $|z| \leq 1$. A teoria de controle, que trata do comportamento de sistemas dinâmicos, também utiliza resultados sobre a localização de zeros de polinômios na análise da estabilidade do sistema.

Com base nas referências [3], [5] e [11], a busca por soluções de equações polinomiais é um assunto estudado há muitos anos. Os babilônios, em 1700 a.C., já conheciam regras para encontrar zeros dos polinômios quadráticos. Em 600 a.C., os hindus também já resolviam equações polinomiais quadráticas. Durante muito tempo procurou-se por métodos para solucionar problemas que envolviam equações do terceiro grau. No entanto, somente no ano de 1545, o italiano Girolamo Cardano publicou, em sua obra “Ars Magna”, soluções para as equações cúbicas de Sipione Del Ferro e as soluções para equações de quarto grau de Ludovico Ferrari. Mais tarde, Paolo Ruffini, um médico e matemático italiano, efetivou com argumentos muito vagos, do ponto de vista matemático, a impossibilidade de que as equações de grau maior ou igual a 5 fossem solúveis por radicais. Somente no início do século XIX é que foi dada a primeira prova da impossibilidade de se resolver uma equação polinomial de grau maior ou igual a 5 por meio de radicais pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel. O trabalho de Abel foi completado pelo francês Évariste Galois que caracterizou as equações $f(z) = 0$, com grau arbitrário n , que são solúveis por radicais, por meio de uma propriedade de certo grupo G_f de permutações de suas raízes, atualmente denominado o grupo de Galois de f .

Atualmente as funções polinomiais são temas de muita investigação, tanto do ponto de vista computacional quanto teórico.

Considere o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$ com $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$ e associado a $P(z)$ tome $P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k}$. Se existir $u \in \mathbb{C}$ onde $|u| = 1$ tal que $P(z) = uP^*(z)$, diz-se que $P(z)$ é *self-inversive*. E se $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ o polinômio $P(z)$ é chamado de auto-recíproco. Além disso, se os coeficientes de $P(z)$ forem todos reais, $P(z)$ é dito auto-recíproco real. As nomenclaturas auto-recíproco real e *self-inversive* já foram utilizada pelos autores em [12] e [17], respectivamente. O foco deste trabalho será o estudo de condições necessárias e suficientes para que algumas classes de polinômios auto-recíprocos reais tenham somente zeros em $|z| = 1$. O interesse por tal tema é atual, visto que existem diversas publicações sobre o assunto no últimos anos (por exemplo, [12], [13] e [14]).

Para o desenvolvimento deste trabalho, primeiramente serão estudados resultados mais gerais sobre a localização de zeros de polinômios. Serão estudados também alguns resultados sobre zeros de polinômios ortogonais, visto que tal assunto será abordado no Capítulo 4. Em seguida, serão apresentadas algumas propriedades e resultados sobre a localização de zeros de polinômios *self-inversive* no círculo unitário.

Ao final deste texto serão estudadas duas classes de polinômios auto-recíprocos reais $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $S_n^{(\lambda)}(z)$, sendo apresentadas suas propriedades e mostrando condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de ambos polinômios estejam no círculo unitário. Tal resultado sobre $S_n^{(\lambda)}(z)$ foi estendido a partir de problemas encontrado em [12], que estava em aberto, porém para uma determinada classe de polinômios de grau ímpar. Neste trabalho será ampliado tal resultado, onde o polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$ pode ter grau par.

Vários exemplos serão apresentados para facilitar a leitura. Para a elaboração das figuras apresentadas neste trabalho, foi utilizado o software *Mathematica*.

Para facilitar a leitura, será utilizado, no decorrer do texto, o termo círculo unitário para representar a região $|z| = 1$ e disco unitário para denotar a região $|z| \leq 1$.

Resultados Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados clássicos sobre zeros de polinômios, como também as relações existentes entre coeficientes e zeros de um polinômio, limitantes para os zeros e sequência de polinômios. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [15], [17] e [18].

2.1 Introdução

Dada uma sequência de números complexos $a_0, a_1, \dots, a_n$, tomemos a aplicação $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad n \geq 0.$$

A aplicação P é denominada aplicação polinomial ou polinômio associado à sequência dada. Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1z, a_2z^2, \dots, a_nz^n$ são chamadas de termos do polinômio $P(z)$.

Denota-se por $z_0 \in \mathbb{C}$ um zero do polinômio $P(z)$ quando $P(z_0) = 0$. Chamaremos z_0 de raiz da equação polinomial $P(z) = 0$ se z_0 pertencer ao conjunto solução da equação.

Seja z_0 um zero do polinômio $P(z)$. Diz-se que z_0 é um zero simples de $P(z)$ se z_0 tem multiplicidade um.

Os teoremas apresentados abaixo são resultados clássicos da Análise e podem ser encontrados nas referências [15], [17] e [18], assim como as suas demonstrações.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio não-nulo $P(z)$ de grau n com coeficientes complexos $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, tem exatamente n zeros complexos $z_1, z_2, \dots, z_n$.*

Teorema 2 (Teorema da Decomposição) *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau $n, n \geq 1$, com coeficientes complexos $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. O polinômio $P(z)$ pode ser*

unicamente representado por $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, onde $z_1, z_2, \dots, z_n$ são zeros complexos do polinômio $P(z)$.

Teorema 3 (Teorema de Rouché) *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas no interior de uma curva de Jordan C simples e fechada. Se P e Q são contínuas em C e $|P(z)| < |Q(z)|$, $z \in C$, então $F(z) = P(z) + Q(z)$ e $Q(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .*

Note que o círculo unitário é um caso particular de curva C do Teorema de Rouché.

2.2 Relações entre coeficientes e zeros de um polinômio

Agora serão deduzidas as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau n ($n \geq 1$). Seja o polinômio

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (2.1)$$

cujos zeros são $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Pelo Teorema da Decomposição, pode-se escrever $P(z)$ como $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. Assim, para todo z segue que

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n)}_{S_1} z^{n-1} \\ &\quad + a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n)}_{S_2} z^{n-2} \\ &\quad - a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n)}_{S_3} z^{n-3} \\ &\quad + \cdots + (-1)^k a_n S_k z^{n-k} + \cdots + (-1)^n a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 \cdots z_n)}_{S_n}. \end{aligned}$$

Logo, comparando os coeficientes da expansão acima com os coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, segue que

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_k &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

As relações acima entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial são conhecidas como fórmulas de Viète ou relações de Girard. Essas nomenclaturas estão relacionadas aos dois grandes matemáticos François Viète e Albert Girard. No século XVI, Viète havia descoberto estas fórmulas para o caso de zeros positivos de um polinômio. Mas a generalização das fórmulas para zeros quaisquer de um polinômio foi primeiro entendida por Girard no século XVII, a qual pode ser encontradas com mais detalhes em [11].

O resultado abaixo representa uma aplicação das fórmulas de Viète ou relações de Girard.

Lema 1 *Se o polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$ então $|a_0| \leq |a_n|$. Mas, se pelo menos um desses zeros estiver no interior do disco unitário, então $|a_0| < |a_n|$.*

Demonstração: Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ zeros de $P(z)$ em $|z| \leq 1$. Usando as fórmulas de Viète, obtém-se $(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = z_1 z_2 z_3 \cdots z_n$.

$$\text{Assim, } \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 z_2 z_3 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \cdots |z_n| \leq 1.$$

Logo, $|a_0| \leq |a_n|$. Sendo a desigualdade estrita se pelo menos um dos zeros estiver no interior do disco unitário.

□

2.3 Limitantes para os zeros de um polinômio

Nesta seção serão apresentados alguns resultados sobre a localização de zeros de polinômios, limitando-os em uma região anelar ou em $|z| \leq r$, $r > 0$. As principais referências foram [15], [16] e [17].

Teorema 4 *Sejam $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, onde $a_0, a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos,*

$$M = \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i| \quad e \quad M' = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Então, todos os zeros de $P(z)$ satisfazem

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}.$$

Demonstração: Considere $|z| > 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| \\
&= |a_nz^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \cdots - a_1z - a_0)| \\
&\geq |a_nz^n| - |-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \cdots - a_1z - a_0| \\
&= |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1z + a_0| \\
&\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\
&\geq |a_n||z|^n - M(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1) \\
&= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^n |z|^{-k} \right) \\
&> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k} \right). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Note que a série acima é bastante parecida com a série geométrica, diferenciando-se apenas no índice inicial, onde k varia de 0 até ∞ , e ainda como $\frac{1}{|z|} < 1$, tem-se que a série geométrica converge, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{|z|}{|z| - 1}.$$

Assim, voltando em (2.2), tem-se

$$\begin{aligned}
|P(z)| &> |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{|z|}{|z| - 1} - 1 \right) \right] \\
&= |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{1}{|z| - 1} \right) \right] \\
&= |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - \left(1 + \frac{M}{|a_n|} \right)}{|z| - 1} \right].
\end{aligned}$$

Agora veja que se $|z| \geq 1 + \frac{M}{|a_n|}$ segue que $P(z) > 0$, isto é, $P(z) \neq 0$ e portanto, os zeros de $P(z)$ estão em $|z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

Para mostrar que $\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z|$ considere

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \cdots + a_0z^n.$$

Ao aplicar o resultado obtido anteriormente observe que os zeros do polinômio $Q(z)$ encontram-se em $|z| < 1 + \frac{M'}{|a_n|}$. Seja z_k um zero de $Q(z)$. Então $\frac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$. Desta maneira, $\frac{1}{|z_k|} < 1 + \frac{M'}{|a_0|} \Rightarrow |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + M'}$.

Portanto, todos os zeros do polinômio $P(z)$ estão localizados na região anelar

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|} \right\}.$$

□

Exemplo 1 Seja $P(z) = 2z^5 + 3z^4 + 1.5z^3 + 0.1z^2 + 0.8z - 5$. Pelo Teorema 4 segue que a região A é dada por $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{5}{8} < |z| < \frac{7}{2}\}$. Note que todos os zeros de $P(z)$ encontram-se nesta região, sendo eles $z_0 = -1.31 - 0.75i$, $z_1 = -1.31 + 0.75i$, $z_2 = 0.11 - 1.09i$, $z_3 = 0.11 + 1.09i$ e $z_4 = 0.89$.

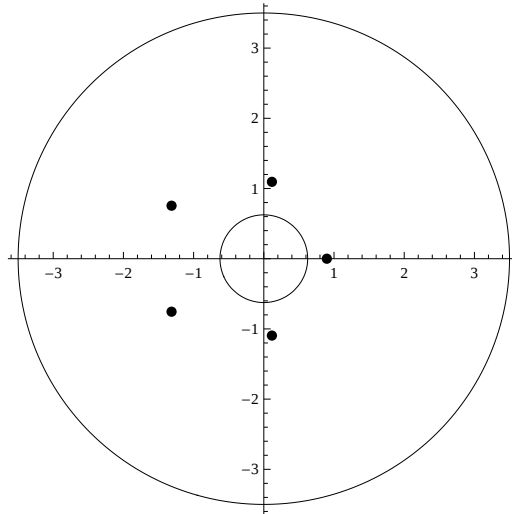


Figura 2.1: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^5 + 3z^4 + 1.5z^3 + 0.1z^2 + 0.8z - 5$.

Teorema 5 (Teorema de Pellet) Dado o polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_pz^p + \cdots + a_nz^n, \quad a_p \neq 0,$$

se o polinômio

$$F_p(z) = |a_0| + |a_1|z + |a_2|z^2 + \cdots + |a_{p-1}|z^{p-1} - |a_p|z^p + |a_{p+1}|z^{p+1} \cdots + |a_n|z^n$$

tem dois zeros positivos r e R , $r < R$, então $P(z)$ tem exatamente p zeros no disco $|z| \leq r$ e não tem zeros na região anelar $r < |z| < R$.

A prova do Teorema de Pellet pode ser encontrada em [15].

Exemplo 2 Considere o polinômio $F_3(z) = 5z^4 - 13z^3 + 5z^2 + z + 2$. Note que $r = 1$ e $R = 2$ são zeros de F_3 como é possível observar na Figura 2.2. Assim, pelo Teorema 5, o polinômio $P(z) = 5z^4 + 13z^3 + 5z^2 + z + 2$ contém três zeros em $|z| \leq 1$ e $P(z)$ não possui zeros em $1 < |z| < 2$. De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.77$, $z_1 = 0.15 - 0.46i$, $z_2 = 0.15 + 0.46i$ e $z_3 = -2.13$, onde $|z_i| < 1$, $i = 0, 1, 2$ e $|z_3| > 2$, como mostra a Figura 2.3.

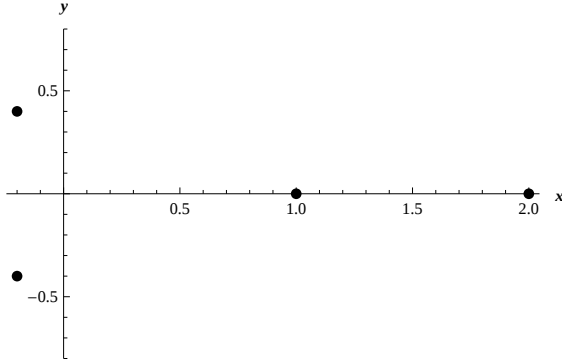


Figura 2.2: Localização dos zeros do polinômio $F_3(z) = 5z^4 - 13z^3 + 5z^2 + z + 2$.

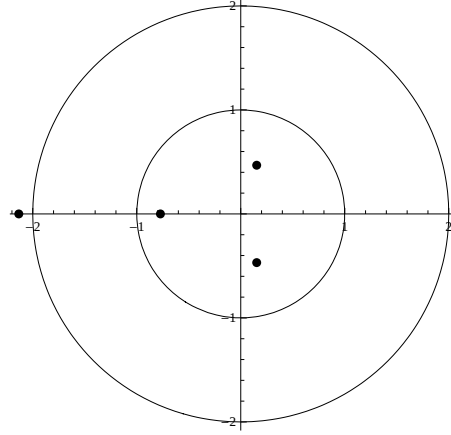


Figura 2.3: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 5z^4 + 13z^3 + 5z^2 + z + 2$.

Teorema 6 Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ um polinômio de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $a_n, a_0 \neq 0$. Então, todos os zeros de $P(z)$ estão no disco determinado por

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Demonstração: Seja $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_n z^{n+1} + (1 - z)P(z) \\ &= a_n z^{n+1} + (1 - z)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^k. \end{aligned}$$

Então, para $|z| \leq 1$,

$$|R(z)| = \left| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right| \leq |a_0| |z|^n + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right|.$$

Como $|z| \leq 1$, tem-se que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \right|.$$

Pelo fato de $a_{i-1} \leq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, segue que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = |a_0| + a_n - a_0,$$

ou seja,

$$|z^n| \left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq |a_0| + a_n - a_0$$

e

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n}.$$

Substituindo z por $\frac{1}{z}$, obtém-se que

$$|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \quad |z| \geq 1.$$

Para $|z| \geq 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} |(z-1)P(z)| &= |a_n z^{n+1} - Q(z)| \\ &\geq |a_n||z^{n+1}| - |Q(z)| \\ &\geq |a_n||z^{n+1}| - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\ &= |z|^n [|a_n||z| - |a_0| - a_n + a_0] \\ &= |z|^n |a_n| \left[|z| - \left(\frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $a_{i-1} \leq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, então

$$a_n - a_0 = |a_n - a_0| \geq |a_n| - |a_0|$$

e assim

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Note que se $|z| > r$, então $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$, ou seja, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq r$.

□

Exemplo 3 Seja $P(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 2z^2 + z - 1$. Pelo Teorema 6 temos que os zeros de $P(z)$ estão localizados no círculo $|z| \leq \frac{11}{9}$. De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.59 - 0.49i$, $z_1 = -0.59 + 0.49i$, $z_2 = 0.02 - 0.72i$, $z_3 = 0.02 + 0.72i$ e $z_4 = 0.34$. Veja a figura a seguir.

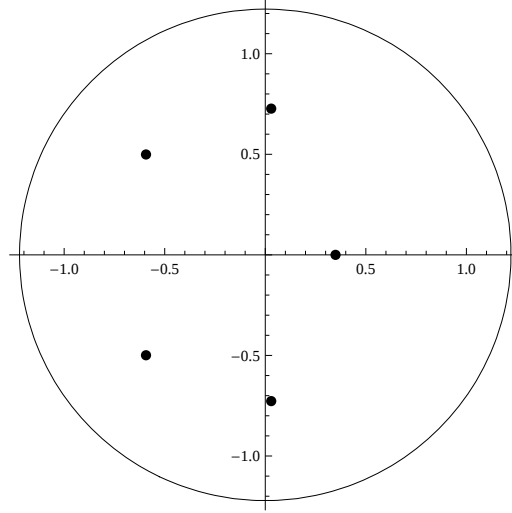


Figura 2.4: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 2z^2 + z - 1$.

O teorema a seguir é um resultado clássico da localização de zeros de polinômios, e é consequência do resultado anterior.

Teorema 7 (Eneström-Kakeya) *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujos coeficientes reais $a_i, i = 0, \dots, n$, satisfazem $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Então, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.*

Demonstração: Pelo Teorema 6 tem-se que os zeros do polinômio $P(z)$ estão em $|z| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|}$. Pelo fato de $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 > 0$ segue que

$$|z| \leq \frac{a_0 + a_n - a_0}{a_n} = 1.$$

Portanto, os zeros do polinômio $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.

□

Observe que, nas condições do Teorema de Eneström-Kakeya, todos os zeros do polinômio $P(z)$ atinge o círculo unitário se, e somente se, $a_i = 1, i = 0, \dots, n$. De fato, se $|z_i| = 1, i = 0, \dots, n$, tem-se por uma das relações de Girard que

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 z_2 z_3 \dots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \dots |z_n| = 1.$$

Como os coeficientes $a_i, i = 0, \dots, n$ são reais e positivos tem-se que $\frac{a_0}{a_n} = 1$. Agora, utilizando a ordenação dos coeficientes de $P(z)$, ou seja,

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0,$$

segue que

$$1 = \frac{a_n}{a_n} \geq \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \dots \geq \frac{a_2}{a_n} \geq \frac{a_1}{a_n} \geq \frac{a_0}{a_n} = 1.$$

Portanto, $a_i = 1$, $i = 0, \dots, n$. Por outro lado se $a_i = 1$, $i = 0, \dots, n$, segue pelo Teorema 28 (que será enunciado mais adiante) que os zeros de $P(z)$ estão no círculo unitário.

Exemplo 4 Seja o polinômio $P(z) = 3.2z^4 + 2.9z^3 + 1.5z^2 + z + 0.5$. Observe que $P(z)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 7. Portanto, os zeros de $P(z)$ se encontram em $|z| \leq 1$. Os zeros de $P(z)$ são dados por $z_0 = -0.59 - 0.28i$, $z_1 = -0.59 + 0.28i$, $z_2 = 0.13 - 0.58i$ e $z_3 = 0.13 + 0.58i$. A figura a seguir mostra a localização dos zeros de $P(z)$.

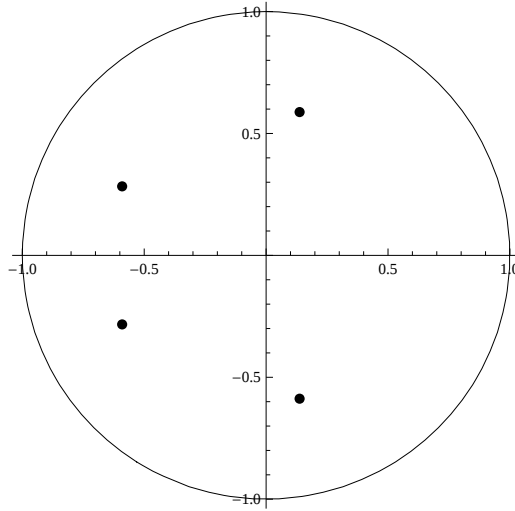


Figura 2.5: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3.2z^4 + 2.9z^3 + 1.5z^2 + z + 0.5$.

O próximo resultado é uma generalização do teorema de Eneström-Kakeya, onde é determinada a região anelar que contém todos os zeros de um certo polinômio. Esse resultado encontra-se em [1].

Teorema 8 Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n tal que $n \geq 1$ e $a_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Considere $\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$ e $\beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$. Todos os zeros de $P(z)$ estão na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq |z| \leq \beta\}$.

Exemplo 5 Seja o polinômio $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1$. Note que

$$\frac{a_0}{a_1} = 0.5, \quad \frac{a_1}{a_2} = 0.5, \quad \frac{a_2}{a_3} = 0.6667, \quad \frac{a_3}{a_4} = 0.75 \quad e \quad \frac{a_4}{a_5} = 0.8.$$

Logo, $\alpha = \min_{0 \leq k < 5} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 0.5$ e $\beta = \max_{0 \leq k < 5} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 0.8$. Pelo Teorema 8 segue que os zeros do polinômio $P(z)$ se encontram na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0.5 \leq |z| \leq 0.8\}$. De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_0 = -0.65$, $z_1 = -0.30 - 0.53i$, $z_2 = -0.30 + 0.53i$, $z_3 = 0.23 - 0.59i$ e $z_4 = 0.23 + 0.59i$. Observe a figura a seguir.

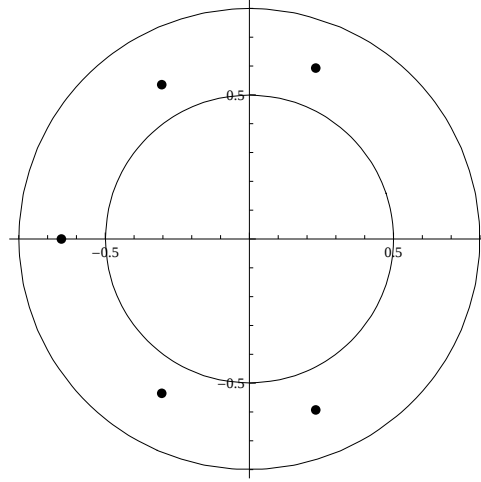


Figura 2.6: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^5 + 0.8z^4 + 0.6z^3 + 0.4z^2 + 0.2z + 0.1$.

2.4 Polinômios ortogonais

Esta seção apresenta alguns resultados relacionados aos polinômios ortogonais, que podem ser encontrados de forma mais detalhada em [2] e [8].

De acordo com [2], entre os polinômios associados a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. A teoria de polinômios ortogonais tem muitas aplicações em vários tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Esses polinômios são ferramentas essenciais para a solução de muitos problemas e vem contribuindo nos estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas, estabilidade numérica, algoritmos rápidos e super-rápidos, com aplicações que abrangem da Teoria dos Números à Teoria da Aproximação, da Combinatória à Representação de Grupos, da Mecânica Quântica à Física Estatística e da Teoria de Sistemas ao Processamento de Sinais.

Existem várias classes de polinômios ortogonais clássicas. De acordo com [8], esses polinômios são chamados de polinômios de Jacobi, de Chebyshev, de Laguerre, de Hermite e de Gegenbauer. Mas serão apresentadas aqui somente as classes dos polinômios de Chebyshev de 1ª e 2ª espécies; tais resultados da teoria de polinômios ortogonais serão importantes para o desenvolvimento do Capítulo 4.

2.4.1 Sequência de polinômios ortogonais

Será denotado os polinômios ortogonais de grau n , $P_n(x)$ por

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i, \quad a_{n,n} \geq 0,$$

será utilizado a notação $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$, para representar os zeros de $P_n(x)$.

Definição 1 *Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $w(x)$ uma função definida e não-negativa em (a, b) . Vamos supor que*

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x)dx > 0$$

para qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de (a, b) . Toda função que satisfaz essa propriedade é chamada de função peso em (a, b) .

Definição 2 *As funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais com relação à função peso em (a, b) se $\langle f, g \rangle = 0$, onde*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \quad (2.3)$$

Definição 3 (Sequência de Polinômios Ortogonais) *Diz-se que uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) se*

a) $P_n(x)$ é de grau exatamente n , $n \geq 0$;

$$b) \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Note que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $\int_a^b P_n^2(x)w(x)dx \geq 0$ em (a, b) .

Todo sistema de polinômios ortogonais satisfaz a relação de recorrência dada pelo teorema a seguir. Para maiores detalhes vide [2].

Teorema 9 (Relação de recorrência de três termos) *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, α_{n+1} , β_n , $\gamma_n \in \mathbb{R}$, onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

2.4.2 Zeros de polinômios ortogonais

Teorema 10 *Seja $P_n(x)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) , em relação a função peso $w(x)$. Então, os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração: Suponha que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Então ou $P_n(x) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) o que implica em $\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0$, ou $P_n(x) \leq$

0 (mas não identicamente nulo) em (a, b) donde segue que $\int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0$. Mas, da relação de ortogonalidade, tem-se que

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot P_n(x)w(x)dx = 0.$$

O que é um absurdo. Assim, $P_n(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez, logo existe pelo menos um zero real de $P_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponha que $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ ($r < n$) são os zeros distintos de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r})Q(x) = V(x)Q(x),$$

onde $V(x)$ é um polinômio de grau $r < n$ com zeros $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ e $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente zeros complexos ou zeros de multiplicidade par em (a, b) ou zeros fora de (a, b) . Logo, $Q(x)$ não muda de sinal em (a, b) .

Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b V(x)P_n(x)w(x)dx = 0. \quad (2.4)$$

Mas,

$$\int_a^b V(x)P_n(x)w(x)dz = \int_a^b V^2(x)Q(x)w(x)dz \neq 0. \quad (2.5)$$

Por (2.4) e (2.5) tem-se um absurdo. Assim, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ zeros de multiplicidade ímpar em (a, b) . Mas como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Deste modo, $P_n(x)$ tem n zeros de multiplicidade ímpar em (a, b) , da seguinte forma

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \dots (x - x_{n,n})^{i_n}.$$

Como $i_1, i_2, \dots, i_n$ são índices positivos e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$.

□

O próximo resultado pode ser encontrado em [2].

Teorema 11 *Seja $\{P_k(x)\}_{k=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n - 1$, $P_{n-1}(x)$, existe um único zero de $P_n(x)$.*

2.4.3 Polinômios ortogonais simétricos

Definição 4 *Sejam as aplicações $[\cdot] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definidas por*

$$[t] := \max(-\infty, t] \cap \mathbb{Z} \text{ e } \lceil t \rceil := \min[t, \infty) \cap \mathbb{Z}.$$

Tais aplicações são conhecidas como função piso e função teto, respectivamente.

Definição 5 Uma função peso $w(x)$ definida em um intervalo $[-b, b]$ é chamada de função par se $w(x) = w(-x)$.

O próximo resultado pode ser visto em [8].

Teorema 12 Seja $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a função peso $w(x)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $w(x)$ é uma função par;
- b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$;
- c) no Teorema 9, $\beta_n = 0$, $n \geq 1$.

Observação 2.1 Se $w(x)$ é par e $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ com $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$, denotam os zeros do polinômio ortogonal $P_n(x)$ com relação a $w(x)$, então

- 1) se $x_{n,k}$ é zero de $P_n(x)$, $-x_{n,k}$ também é, ou seja, $x_{n,k} = -x_{n,n+1-k}$ para $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- 2) Se n é ímpar $x_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1} = 0$.

2.4.4 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

De acordo com [8], os polinômios de Chebyshev recebem esse nome devido ao matemático russo Pafnuty Lvovich Chebyshev.

Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e são definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

e fazendo $x = \cos\theta$ na equação (2.6), obtém-se a relação de recorrência de três termos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Observe que tal classe de polinômios satisfaz as condições do Teorema 12. Logo $\{T_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais simétricos.

Calculando os primeiros polinômios, veremos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau. Assim,

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 \arccos x) = 1 \\
T_1(x) &= \cos(1 \arccos x) = x = 2^0 x \\
T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2^2 x^3 - 3x \\
&\vdots \\
T_n(x) &= 2^{n-1} x^n + \dots \text{ (por recorrência).}
\end{aligned}$$

Logo, $a_{n,n} = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Teorema 13 *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Demonstração: Note que por (2.3) e usando a equação (2.6),

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) w(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 \cos(n \cos x) \cos(m \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$, obtém-se

$$\langle T_n, T_m \rangle = - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

a) Se $m = n = 0$

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^{\pi} \cos(0) \cos(0) d\theta = \pi.$$

b) Se $m = n > 0$

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

Logo, integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta &= - \frac{\cos(n\theta) \operatorname{sen}(n\theta)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta) n \operatorname{sen}(n\theta) d\theta}{n} \\
&= \int_0^{\pi} [1 - \cos^2(n\theta)] d\theta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Assim,

$$2 \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Portanto,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

c) Considere $m \neq n$.

Tomando as seguintes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(m+n)\theta &= \cos(m\theta) \cos(n\theta) - \operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{sen}(n\theta), \\ \cos(m-n)\theta &= \cos(m\theta) \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{sen}(n\theta) \end{aligned}$$

somando-as e integrando ambos os lados da equação resultante, tem-se

$$\int_0^\pi [\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta] d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = 2 \langle T_n, T_m \rangle.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} 2 \langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^\pi \cos(m+n)\theta d\theta + \int_0^\pi \cos(m-n)\theta d\theta \\ &= \frac{\operatorname{sen}(m+n)\theta}{m+n} \Big|_0^\pi + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\theta}{m-n} \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

□

Observação 2.2 Sobre os zeros de $T_n(x)$, considere a equação

$$\cos(n\theta) = 0, \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

cuja a solução é

$$(n\theta)_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ou, ainda,

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Portanto os zeros dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie são dados por

$$x_{n,k} = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Os pontos de máximos e mínimos para $T_n(x)$ são os pontos onde

$$\cos(n\theta) = \pm 1, \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

ou seja, são os pontos

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Assim, os pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$ são dados por

$$m_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

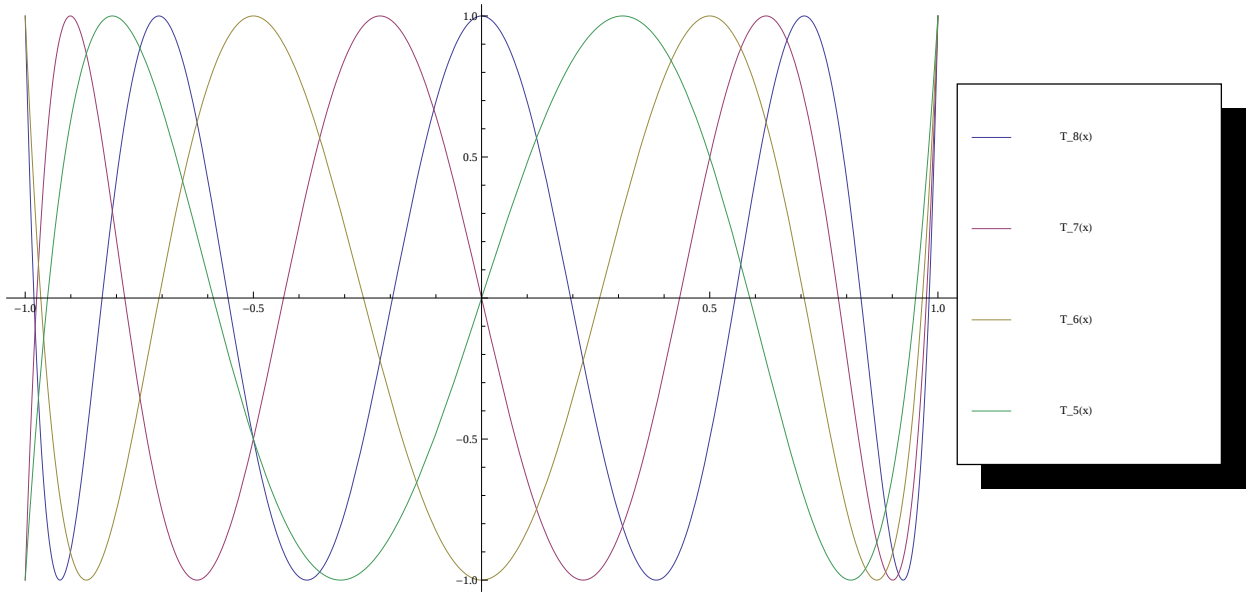


Figura 2.7: Gráficos dos Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_5(x)$, $T_6(x)$, $T_7(x)$ e $T_8(x)$.

2.4.5 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie denotados por $U_n(x)$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ e são definidos por

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $x = \cos\theta$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$\sin(n+2)\theta + \sin(n\theta) = 2\cos\theta\sin(n+1)\theta,$$

com $x = \cos\theta$, obtemos a relação de recorrência de três termos

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

Observe que a classe dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie também satisfaz as condições do Teorema 12. Logo $\{U_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais simétricos.

Calculando os primeiros polinômios, veremos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau.

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \frac{\text{sen}[\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = 1 \\ U_1(x) &= \frac{\text{sen}[2\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\text{sen}\theta \cos\theta}{\text{sen}\theta} = 2x \end{aligned}$$

e, pela relação de recorrência,

$$\begin{aligned} U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x) = 2^2x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x) = 2^3x^3 - 4x \\ &\vdots \\ U_n(x) &= 2^nx^n + \dots, \end{aligned}$$

obtém-se $a_{n,n} = 2^n$, $n \geq 0$.

Teorema 14 *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie é*

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\text{sen}[(m+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dx. \end{aligned}$$

Fazendo $x = \cos\theta$ na integral acima, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= - \int_{\pi}^0 \frac{[\text{sen}(n+1)\theta][\text{sen}(m+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \text{sen}\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen}[(n+1)\theta][\text{sen}(m+1)\theta] d\theta. \end{aligned}$$

a) Se $m = n$,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta] \text{sen}[(n+1)\theta] d\theta.$$

Integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_n \rangle &= \int_0^\pi \cos[(n+1)\theta] \cos[(n+1)\theta] d\theta \\ &= \int_0^\pi \{1 - \text{sen}^2[(n+1)\theta]\} d\theta \\ &= \pi - \int_0^\pi \text{sen}^2[(n+1)\theta] d\theta = \pi - \langle U_n, U_n \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

b) Seja $m \neq n$. Como

$$\int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta] \text{sen}[(m+1)\theta] d\theta,$$

integrando duas vezes por partes, segue que

$$\langle U_n, U_m \rangle = \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta] \text{sen}[(m+1)\theta] d\theta = \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \langle U_n, U_m \rangle.$$

Como $m \neq n$, então $\left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2 \neq 1$. Logo, $\langle U_n, U_m \rangle = 0$.

□

Observação 2.3 Os zeros de $U_n(x)$ são os pontos onde

$$\text{sen}[(n+1)\theta] = 0, \quad \text{para } 0 < \theta < \pi,$$

ou seja, são dados por

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo os zeros de $U_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, são pontos representados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Além disso, como $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ então $T'_n(x) = \text{sen}(n \arccos x) \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} = nU_{n-1}(x)$.

Portanto, os zeros de $U_{n-1}(x)$ são pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$.

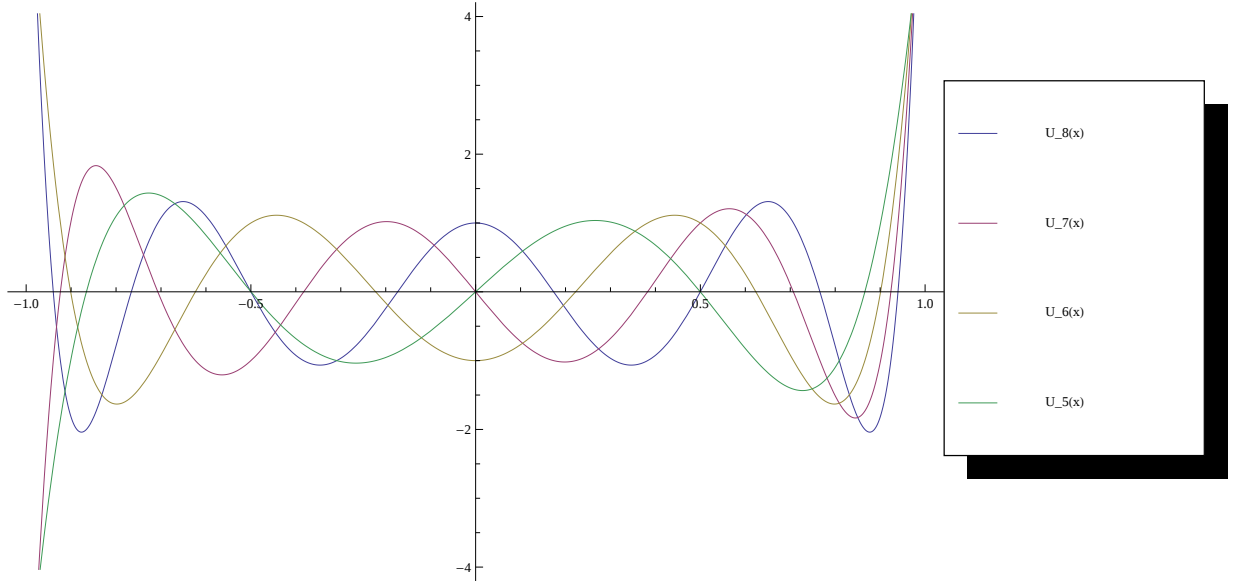


Figura 2.8: Gráficos dos Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_5(x)$, $U_6(x)$, $U_7(x)$ e $U_8(x)$.

2.4.6 Polinômios quase-ortogonais

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados relacionados a uma classe de polinômios conhecidos na literatura como polinômios quase-ortogonais. Para maiores detalhes sobre os resultados a seguir, vide [7], [8] e [21].

Definição 6 Um polinômio $Q(x)$, não identicamente nulo, é chamado polinômio quase-ortogonal de ordem $n + 1$ se, e somente se, o grau do polinômio $Q(x)$ é no máximo $n + 1$ e

$$\int_a^b x^k Q(x) w(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Observe que os polinômios ortogonais $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$ são polinômios quase-ortogonais de ordem $n + 1$. Com base em [7] tem-se o seguinte resultado:

Teorema 15 Seja $\{P_n\}$ uma família de polinômios ortogonais sobre $[a, b]$ com respeito a função peso $w(x)$. É necessário e suficiente para o polinômio $J_n(x)$ de grau n ser quase-ortogonal de ordem r sobre $[a, b]$ com respeito a $w(x)$ que

$$J_n(x) = c_0 P_n(x) + c_1 P_{n-1}(x) + \dots + c_r P_{n-r}(x),$$

onde os c_i 's são números que podem depender de n e $c_0 c_r \neq 0$.

Quando $r \geq 1$ o polinômio quase-ortogonal $J_n(x)$ nem sempre terá todos os seus zeros em (a, b) . Porém pode-se provar o seguinte resultado visto em [21].

Teorema 16 *Se $J_n(x)$ é quase-ortogonal de ordem r sobre $[a, b]$ com respeito a função peso positiva $w(x)$, então no mínimo $n - r$ zeros distintos de $J_n(x)$ estão no intervalo (a, b) .*

Polinômios *Self-Inversive*

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos relacionados aos polinômios *self-inversive*. Para este estudo, as principais referências utilizadas foram [9], [15], e [17].

3.1 Introdução

Seja $z \mapsto P(z)$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, dado por

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad a_i \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

cujos zeros $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Definição 7 Associado ao polinômio $P(z)$ considere o polinômio $P^*(z)$, dado por

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k} = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j^*), \quad (3.2)$$

cujos zeros $z_j^* = \frac{1}{\bar{z}_j}$ são os “inversos” conjugados dos zeros z_j .

Definição 8 Dado $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n . Se existir $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, tal que $P^*(z) = uP(z)$, então P é chamado de *self-inversive*.

Observação 3.1 Sejam $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ zeros do polinômio $P(z)$. Pela igualdade $P^*(z) = uP(z)$, pode-se ver que se P é *self-inversive*, então todo zero de P é também zero de P^* .

Definição 9 Se $P(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $P(z)$ é chamado de *auto-recíproco* (palindrômico). Além disso, se os coeficientes de $P(z)$ forem todos reais, $P(z)$ é chamado de *polinômio auto-recíproco real*.

Observe que os polinômios auto-recíprocos reais representam um caso especial dos polinômios *self-inversive*, ocorrendo quando $u = 1$ na Definição 8. Desta forma, serão apresentados alguns resultados relacionados aos polinômios *self-inversive*, que também são válidos para os polinômios auto-recíprocos reais.

Note ainda que, se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$ é auto-recíproco (palindrômico), ou seja, $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ então $a_k = a_{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Teorema 17 *Sejam $P(z)$ e $P^*(z)$ polinômios de grau n definidos em (3.1) e (3.2), respectivamente. Então,*

- a) *qualquer zero de $P(z)$ em $|z| = 1$ é também zero de $P^*(z)$;*
- b) *se todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| > 1$, ou seja, $P(z)$ não tem zero no disco unitário, então $P^*(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| < 1$;*
- c) *supondo que $P(z)$ possui p zeros em $|z| \leq 1$, então $P^*(z)$ tem $n - p$ zeros em $|z| < 1$.*

Exemplo 6 *Sejam os polinômios $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$, onde seus zeros são $z_0 = -0.75 - 0.66i$, $z_1 = -0.75 + 0.66i$, $z_2 = -0.37 - 0.33i$, $z_3 = -0.37 + 0.33i$ e $z_4 = 2$ e $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$, com zeros $z_0^* = -1.5 - 1.32i$, $z_1^* = -1.5 + 1.32i$, $z_2^* = -0.75 - 0.66i$, $z_3^* = -0.75 + 0.66i$ e $z_4^* = 0.5$. Nas ilustrações abaixo é possível observar a localização dos zeros dos respectivos polinômios.*

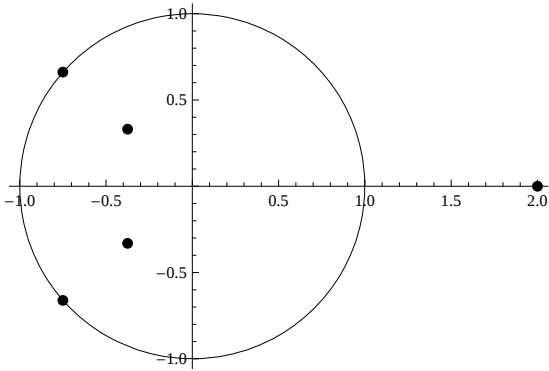


Figura 3.1: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$.

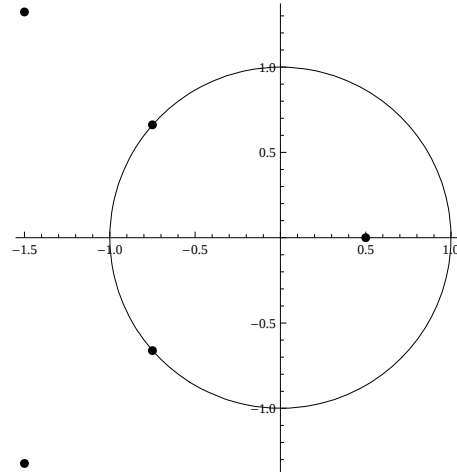


Figura 3.2: Localização dos zeros do polinômio $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$.

Veja que $|z_i| = 1$, $i = 0$ e 1 e pelo item a) do Teorema 17 o polinômio $P^*(z)$ também terá dois zeros no círculo unitário, a saber os zeros z_2^* e z_3^* . E pelo item c) do Teorema 17 pode-se notar que $P(z)$ possui quatro zeros em $|z| \leq 1$. Segue que $P^*(z)$ deve possuir um zero em $|z| < 1$.

Exemplo 7 Considere os polinômios $P(z) = 2iz^5 + iz^4 + 3z^3 + (1+3i)z^2 + iz - 3$, onde seus zeros são $z_0 = -1.41 - 0.51i$, $z_1 = -0.57 + 0.56i$, $z_2 = -0.11 - 1.03i$, $z_3 = -0.68 - 0.29i$ e $z_4 = 0.92 + 1.28i$ e $P^*(z) = -3z^5 - iz^4 + (1-3i)z^3 + 3z^2 - iz - 2i$, com zeros $z_0^* = -0.87 + 0.86i$, $z_1^* = -0.62 - 0.22i$, $z_2^* = -0.1 - 0.95i$, $z_3^* = 0.36 + 0.51i$ e $z_4^* = 1.23 - 0.53i$.

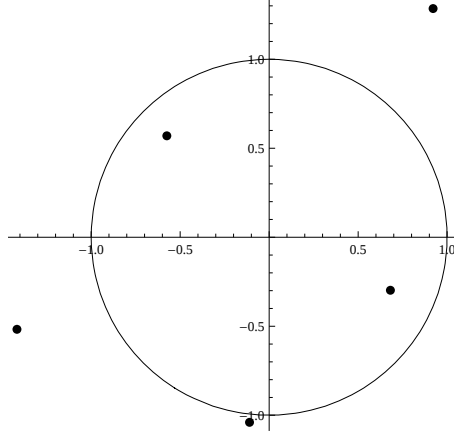


Figura 3.3: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2iz^5 + iz^4 + 3z^3 + (1+3i)z^2 + iz - 3$.

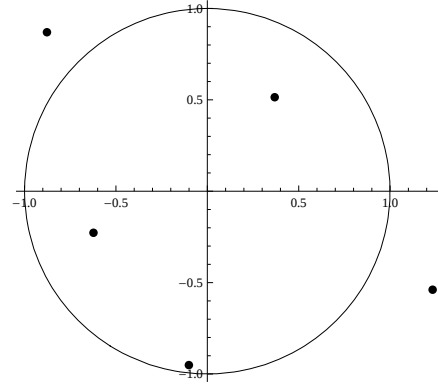


Figura 3.4: Localização dos zeros do polinômio $P^*(z) = -3z^5 - iz^4 + (1-3i)z^3 + 3z^2 - iz - 2i$.

Pelo item c) do Teorema 17 pode-se notar que $P(z)$ possui dois zeros em $|z| \leq 1$. Segue que $P^*(z)$ deve possuir três zeros em $|z| < 1$.

O valor do polinômio $P^*(z)$ no círculo unitário é dado por

$$P^*(e^{i\theta}) = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^n \left(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_j} \right) = \frac{\bar{a}_0 e^{in\theta} (-1)^n}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n} \prod_{j=1}^n (e^{-i\theta} - \bar{z}_j) = e^{in\theta} \overline{P(e^{-i\theta})}.$$

Assim, $|P^*(e^{i\theta})| = |P(e^{i\theta})|$.

Teorema 18 Se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) P é self-inversive;
- b) $\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ para cada número complexo z ;
- c) $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, onde $|u| = 1$.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ b) Note que

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^n \bar{a}_n \prod_{j=1}^n \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} - z_j\right)},$$

isto é,

$$P^*(z) = \bar{a}_n \prod_{j=1}^n \overline{\left(\frac{\bar{z}}{z} - \bar{z} z_j\right)} = \bar{a}_n \prod_{j=1}^n (1 - z \bar{z}_j) = \bar{a}_n (1 - z \bar{z}_1)(1 - z \bar{z}_2)(1 - z \bar{z}_3) \dots (1 - z \bar{z}_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P^*(z) &= \bar{a}_n \left(\bar{z}_1 \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z \right) \right) \left(\bar{z}_2 \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z \right) \right) \cdots \left(\bar{z}_n \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z \right) \right) \\ &= \bar{a}_n (\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n) \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z \right) \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z \right) \cdots \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z \right). \end{aligned}$$

Agora, utilizando a justificativa da Observação 3.1 segue que

$$\begin{aligned} P^*(z) &= \frac{\bar{a}_n}{z_1 z_2 z_3 \cdots z_n} (z_1 - z)(z_2 - z)(z_3 - z) \cdots (z_n - z) \\ &= \frac{(-1)^n \bar{a}_n}{z_1 z_2 z_3 \cdots z_n} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdots (z - z_n). \end{aligned}$$

Através de uma das fórmulas de Viète segue que

$$P^*(z) = \frac{\bar{a}_n}{a_0} P(z), \quad (3.3)$$

e assim

$$\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

b) $\Rightarrow$ c) Para pontos em $|z| = 1$ temos que $|P^*(z)| = |P(z)|$. Assim, de

$$|\bar{a}_n P(z)| = \left| a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|,$$

pode-se concluir que $|a_n| = |a_0|$. Tem-se que $u = \frac{\bar{a}_n}{a_0}$ onde $|u| = 1$. Como $\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, segue que

$$u(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n) = (\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \cdots + \bar{a}_1 z^{n-1} + \bar{a}_0 z^n).$$

Logo $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

c) $\Rightarrow$ a) Note que $P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n$. Como $\bar{a}_k = u a_{n-k}$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$, tem-se $P^*(z) = u a_n z^n + u a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + u a_0 = u P(z)$. Sendo $|u| = 1$, o resultado segue da Definição 8.

□

Teorema 19 *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$ um polinômio self-inversive. Então,*

$$\bar{a}_n [nP(z) - zP'(z)] = a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

$$e \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| = 1 \text{ para cada } z \text{ em } |z| = 1.$$

Demonstração: Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio *self-inversive*. Pelo Teorema 18 segue que

$$\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \quad (3.4)$$

Derivando tal expressão em relação à variável z segue que

$$\begin{aligned} \bar{a}_n P'(z) &= n a_0 z^{n-1} \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_0 z^n \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} (z^{-2}) \\ \Rightarrow z \bar{a}_n P'(z) &= n a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.4) na equação acima tem-se

$$\begin{aligned} \bar{a}_n P'(z) &= n \bar{a}_n P(z) - \bar{a}_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ \Rightarrow \bar{a}_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= \bar{a}_n n P(z) - \bar{a}_n z P'(z) \\ \Rightarrow \bar{a}_n [nP(z) - zP'(z)] &= a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \end{aligned}$$

Isso mostra a primeira parte do teorema. Agora tomando o módulo na expressão acima e z no círculo unitário, sabe-se que $|P^*(z)| = |P(z)|$ e, conseqüentemente, $|a_n| = |a_0|$. Assim é obtido o resultado, pois,

$$|\bar{a}_n [nP(z) - zP'(z)]| = \left| a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|.$$

Como $|a_n| = |a_0|$ e $|a_n| \neq 0$, implica que $a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{|\bar{a}_n| |nP(z) - zP'(z)|}{|a_0| \left| z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|} &= 1 \quad \Rightarrow \frac{|nP(z) - zP'(z)|}{|P^*(z)|} = 1 \\ \Rightarrow \frac{|nP(z) - zP'(z)|}{|P'(z)|} &= 1 \quad \Rightarrow \left| \frac{nP(z) - zP'(z)}{P'(z)} \right| = 1 \\ \Rightarrow |z| \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| &= 1 \quad \Rightarrow \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| = 1. \end{aligned}$$

□

3.2 Sequência de polinômios

Definição 10 Dado o polinômio $P(z)$, considere a sequência de polinômios $P_j(z)$ definida por $P_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k$, onde $P_0(z) = P(z)$ e

$$P_{j+1}(z) := \bar{a}_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.5)$$

com $P_0^*(z) = P^*(z)$.

Da igualdade (3.5) segue que os coeficientes de $P_{j+1}(z)$ satisfazem a relação de recorrência dada por

$$a_k^{(j+1)} = \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}, \quad (3.6)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1-j$ e $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Definição 11 Em cada polinômio da sequência $P_j(z)$, o termo constante $a_0^{(j)}$ é um número real que será denotado por δ_j . Desta maneira, segue que

$$\delta_{j+1} := a_0^{(j+1)} := \left| a_0^{(j)} \right|^2 - \left| a_{n-j}^{(j)} \right|^2,$$

com $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Lema 2 Se o polinômio $P_j(z)$ tem p_j zeros no interior do disco unitário e $\delta_{j+1} \neq 0$, então $P_{j+1}(z)$ tem

$$p_{j+1} = \begin{cases} p_j, & \text{se } \delta_{j+1} > 0 \\ n-j-p_j, & \text{se } \delta_{j+1} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

zeros em $|z| < 1$. Além disso, os zeros de $P_{j+1}(z)$ são os mesmos zeros de $P_j(z)$ em $|z| = 1$.

Demonstração: Primeiramente será mostrada a validade deste resultado para o caso que $\delta_{j+1} > 0$.

Note que se $\delta_{j+1} > 0$ tem-se

$$\delta_{j+1} = a_0^{(j+1)} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2 > 0.$$

Logo, $|a_0^{(j)}| > |a_{n-j}^{(j)}|$.

Sabe-se que $|P^*(z)| = |P(z)|$ para todo z no círculo unitário. Então

$$|a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)| < |a_0^{(j)} P_j(z)|, \quad z \in C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (3.8)$$

Como $P_{j+1}(z) = P_j(z) = \bar{a}_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, segue pelo Teorema de Rouché que o polinômio $P_{j+1}(z)$ tem o mesmo número de zeros no disco unitário que $\bar{a}_0^{(j)} P_j(z)$, ou seja, $P_{j+1}(z)$ possui p_j zeros no interior da curva C .

Agora se $\delta_{j+1} < 0$, é possível verificar, pelos mesmo argumentos acima, que

$$|a_0^{(j)} P_j(z)| < |a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)|, \quad z \in C. \quad (3.9)$$

Como $P_{j+1}(z) = P_j(z) = \bar{a}_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, segue novamente pelo Teorema 3 que P_{j+1} tem a mesma quantidade de zeros que $a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)$ no interior de C . Já que $P_j(z)$ possui p_j zeros no interior de C , pelo Teorema 17 tem-se que $P_j^*(z)$ possui $n - j - p_j$ zeros em $|z| < 1$. Portanto, $P_{j+1}(z)$ possui $n - j - p_j$ zeros em $|z| < 1$ quando $\delta_{j+1} < 0$.

Para finalizar, note que todos os zeros de $P_j(z)$ na curva C , que também são zeros de $P_j^*(z)$, são zeros de $P_{j+1}(z)$ em C , de acordo com a equação (3.5)

Veja ainda que das desigualdades (3.8) e (3.9), qualquer ponto no círculo unitário que não é zero de $P_j(z)$, também não é zero de $P_{j+1}(z)$. O que demonstra este lema.

□

Exemplo 8 Seja $P(z) = z^3 + 3z^2 + 0.375z + 0.04$, onde seus zeros são $z_0 = -2.87$, $z_1 = -0.06 - 0.09i$ e $z_2 = -0.06 + 0.09i$. Como $|z_i| < 1$ para $i = 1$ e 2 temos, pelo Lema 2, que $P_1(z) = -0.255z^2 - 2.985z - 0.9984$ tem $n - j - p_j$ zeros em $|z| < 1$ já que $\delta_{j+1} < 0$, ou seja, $P_1(z)$ possui 1 zero no interior do disco unitário. De fato os zeros de $P_1(z)$ são $z'_0 = -11.36$ e $z'_1 = -0.34$.

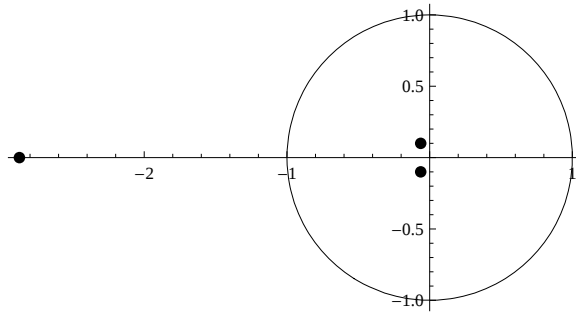


Figura 3.5: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^3 + 3z^2 + 0.375z + 0.04$.

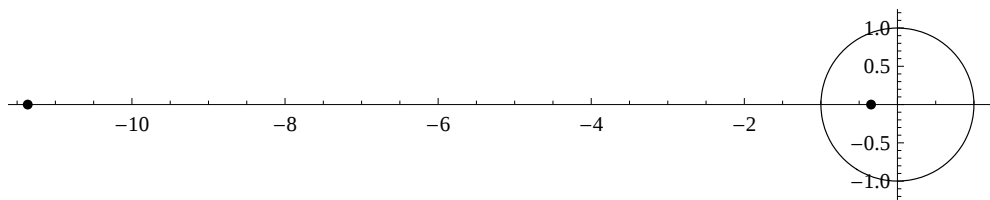


Figura 3.6: Localização dos zeros do polinômio $P_1(z) = -0.255z^2 - 2.985z - 0.9984$.

Lema 3 *Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $P(z)$ tem q zeros em $|z| \leq 1$, então $P_{n-q+1} \equiv 0$. Em particular, se $P(z)$ tem todos os seus zeros no disco unitário, então $P_1(z) \equiv 0$.*

Demonstração: Pelo Lema 2, $P_{n-q+1}(z)$ tem os mesmos zeros que $P_{n-q}(z)$ no círculo unitário. Utilizando o mesmo raciocínio é possível dizer que esse polinômio tem os mesmos zeros que P_{n-q-1} em $|z| = 1$. Usando o mesmo argumento sucessivas vezes, segue que $P_{n-q+1}(z)$ tem o mesmo número de zeros que $P(z)$ no círculo unitário, ou seja, $P_{n-q+1}(z)$ tem q zeros em $|z| = 1$, mas $P_{n-q+1}(z)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $q - 1$. Logo ele deve se anular.

□

3.3 Zeros de polinômios *self-inversive*

Teorema 20 *Se P é um polinômio self-inversive, então P' não tem zeros no círculo unitário, exceto os zeros múltiplos de P .*

Demonstração: Seja P um polinômio self-inversive de grau n , onde $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ são zeros de P e todos simples. Suponha por absurdo que exista ξ um zero de P' de modo que $|\xi| = 1$ e $\xi \neq z_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Pelo Teorema 19 sabe-se que

$$\left| \frac{zP'(z)}{nP(z) - zP'(z)} \right| = 1,$$

para z em $|z| = 1$. Assim $1 = \left| \frac{\xi P'(\xi)}{nP(\xi) - \xi P'(\xi)} \right| = 0$, o que é um absurdo. Portanto P' não possui zeros em $|z| = 1$.

Agora suponha que P possua um zero r de multiplicidade $m > 1$. Assim,

$$P(z) = (z - r)^m Q(z)$$

e então

$$P'(z) = m(z - r)^{m-1}Q(z) + (z - r)^m Q'(z).$$

Logo, $P'(z) = (z - r)^{m-1}[mQ(z) + (z - r)Q'(z)]$. Como,

$$mQ(r) + (r - r)Q'(r) = mQ(r) \neq 0,$$

decorre que r é zero de multiplicidade $m - 1$ de P' .

□

Exemplo 9 *Considere $P(z) = -2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z - 2$ e note que P é self-inversive, com zeros $z_0 = -0.63 - 0.77i$, $z_1 = -0.63 + 0.77i$, $z_2 = 0.42$ e $z_3 = 2.33$. Pelo Teorema 20*

tem-se que $P'(z) = -8z^3 + 9z^2 + 6z + 3$ não possui zeros em $|z| = 1$, visto que os zeros de P são zeros simples. De fato $z'_0 = -0.28 - 0.37i$, $z'_1 = -0.28 + 0.37i$ e $z'_2 = 1.69$, como mostra a figura a seguir.

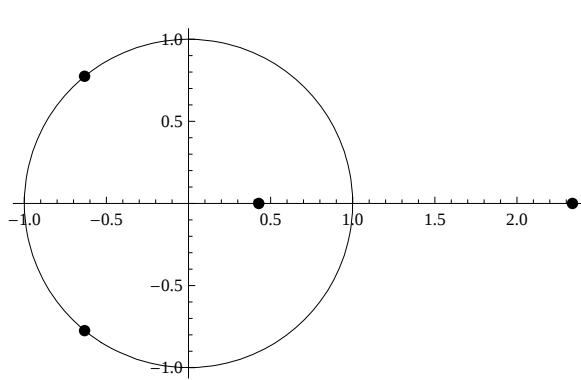


Figura 3.7: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = -2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z - 2$.

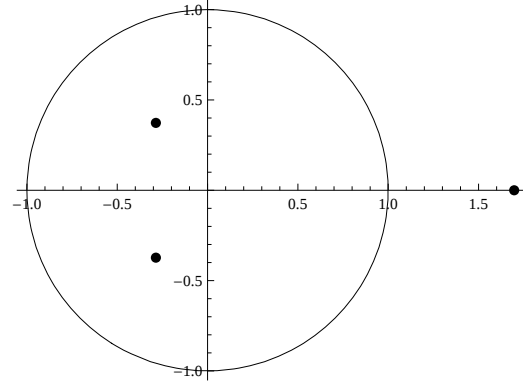


Figura 3.8: Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = -8z^3 + 9z^2 + 6z + 3$.

O próximo exemplo, trará o caso em que o polinômio *self-inversive* P tem um zero com multiplicidade maior do que 1 no círculo unitário e, conseqüentemente, este também será um zero de P' .

Exemplo 10 Seja $P(z) = 3z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$ *self-inversive* com zeros $z_0 = -0.69 + 0.72i$, $z_1 = -0.69 - 0.72i$, $z_2 = -0.39 - 0.93i$, $z_3 = 0.36 + 0.93i$, $z_4 = 1$ e $z_5 = 1$. Note que $z = 1$ é um zero de multiplicidade 2 de P . Assim, pelo Teorema 20, $z' = 1$ também é um zero de $P'(z) = 18z^5 - 20z^4 + 8z^3 - 6z^2 + 4z - 4$. De fato, seus zeros são $z_0 = -0.36 - 0.55i$, $z_1 = -0.36 + 0.55i$, $z'_2 = 0.41 - 0.57i$, $z'_3 = 0.41 + 0.57i$ e $z'_4 = 1$.

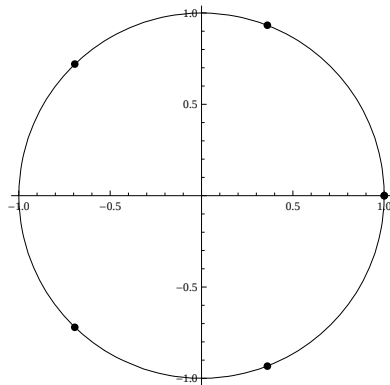


Figura 3.9: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$.

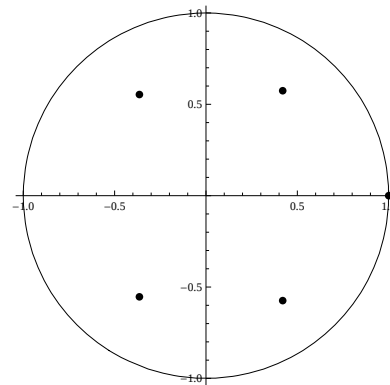


Figura 3.10: Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 18z^5 - 20z^4 + 8z^3 - 6z^2 + 4z - 4$.

O próximo resultado pode ser encontrado com mais detalhes em [17].

Teorema 21 Se o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, é um polinômio self-inversive, então P tem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$ que o polinômio

$$H_1(z) = [P'(z)]^* = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \bar{a}_{n-k} z^k.$$

Isto é, P e P' possuem o mesmo número de zeros em $|z| > 1$.

Exemplo 11 Seja o polinômio $P(z) = 2z^6 + 4z^5 + 2.5z^4 + 3z^3 + 2.5z^2 + 4z + 2$ com zeros $z_0 = -1.69$, $z_1 = -0.58$, $z_2 = -0.45 - 0.89i$, $z_3 = -0.45 + 0.89i$, $z_4 = 0.59 - 0.8i$ e $z_5 = 0.59 + 0.8i$. Assim, $[P'(z)]^* = 4z^5 + 5z^4 + 9z^3 + 10z^2 + 20z + 12$, onde seus zeros são dados por $z'_0 = -0.88 - 1.1i$, $z'_1 = -0.88 + 1.1i$, $z'_2 = -0.71$, $z'_3 = -0.62 - 1.29i$ e $z'_4 = 0.62 + 1.29i$. Pelo Teorema 21, P e $[P']^*$ possuem a mesma quantidade de zeros em $|z| < 1$. De fato, P tem um zero em $|z| < 1$, a saber z_1 e $[P'(z)]^*$ tem um zero z'_2 em $|z| < 1$.

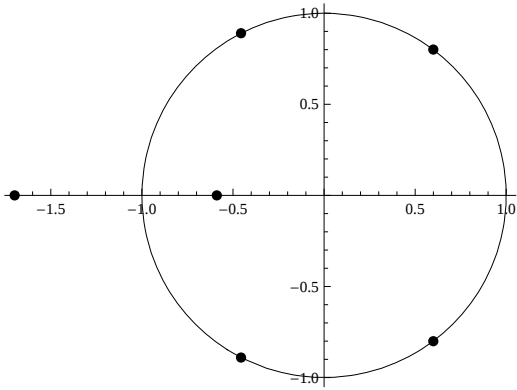


Figura 3.11: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^6 + 4z^5 + 2.5z^4 + 3z^3 + 2.5z^2 + 4z + 2$.

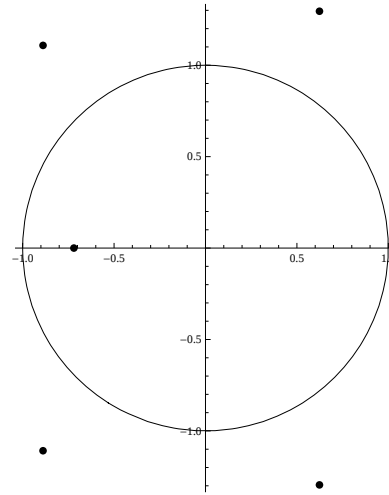


Figura 3.12: Localização dos zeros do polinômio $[P'(z)]^* = 4z^5 + 5z^4 + 9z^3 + 10z^2 + 20z + 12$.

Teorema 22 (Cohn) Seja $P(z)$ um polinômio self-inversive de grau n . Suponha que $P(z)$ tenha exatamente τ zeros no círculo unitário (contando suas multiplicidades) e exatamente ν pontos críticos no disco unitário (contando suas multiplicidades). Então

$$\tau = 2(\nu + 1) - n.$$

Para maiores detalhes ver [12] apud [9].

O próximo resultado é consequência do resultado anterior.

Teorema 23 Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n . $P(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| = 1$ se, e somente se, $P(z)$ é self-inversive e todos os zeros de $P'(z)$ estão em $|z| \leq 1$.

Exemplo 12 Seja $P(z) = 6z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 5z + 6$. Consequentemente, $P'(z) = 30z^4 + 20z^3 + 9z^2 + 6z + 5$. Pelo Teorema 7, P' possui todos os seus zeros em $|z| \leq 1$ e como P é self-inversive, pode-se concluir pelo Teorema 23 que todos os zeros de P estão no círculo unitário. De fato, seus zeros são $z_0 = -1$, $z_1 = -0.53 - 0.84i$, $z_2 = -0.53 + 0.84i$, $z_3 = 0.62 - 0.78i$ e $z_4 = 0.62 + 0.78i$.

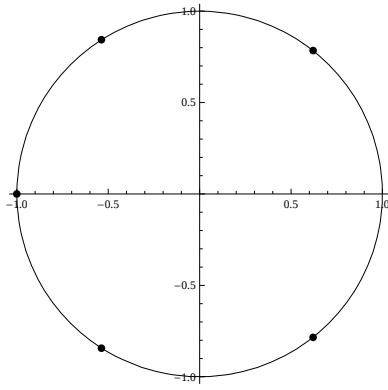


Figura 3.13: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 6z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 5z + 6$.

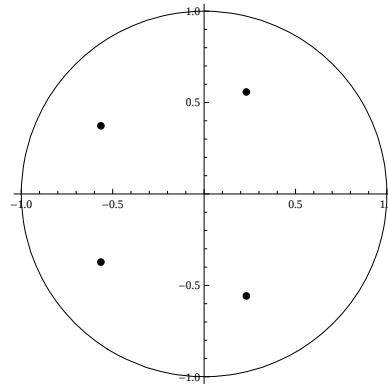


Figura 3.14: Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 30z^4 + 20z^3 + 9z^2 + 6z + 5$.

Observe que todos os resultados estudados para polinômios *self-inversive* são válidos para os polinômios auto-recíprocos reais, visto que todo polinômio auto-recíproco real é *self-inversive*, como já foi mencionado anteriormente.

O próximo resultado pode ser encontrado em [15] apud [20].

Teorema 24 Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n . $P(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| = 1$ se, e somente se, $a_k^{(1)} = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ e todos os zeros de $P'(z)$ estão em $|z| \leq 1$.

Note que os Teoremas 23 e 24 são equivalentes, pois um polinômio é *self-inversive* se, e somente se, $a_k^{(1)} = 0$.

De fato, se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ é *self-inversive* então pelo Teorema 18 tem-se que $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, onde $|u| = 1$ e pela equação (3.6)

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= \bar{a}_0 a_k - a_n \bar{a}_{n-k} \\ &= u a_n a_k - a_n u a_k \\ &= 0, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$. Por outro lado, se $a_k^{(1)} = 0$, tem-se que $\bar{a}_0 a_k = a_n \bar{a}_{n-k}$. Veja que se $k = 0$ obtém-se $|a_0|^2 = |a_n|^2$, isto é, $|a_0| = |a_n|$. Logo

$$a_k = \frac{a_n}{\bar{a}_0} \bar{a}_{n-k}, \text{ onde, } \left| \frac{a_n}{\bar{a}_0} \right| = 1.$$

Portanto, pelo Teorema 18 $P(z)$ é *self-inversive*.

Exemplo 13 Seja $P(z) = 4z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 3z + 4$. Logo, $P'(z) = 20z^4 + 12z^3 + 6z^2 + 4z + 3$. Observe que, pelo Teorema 7, P' possui todos os seus zeros em $|z| \leq 1$ e ainda temos que $a_k^{(1)} = 0$ para todo $k = 0, \dots, 4$, pois

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= |a_0|^2 - |a_5|^2 = 3^2 - 3^2 = 0 \\ a_1^{(1)} &= \bar{a}_0 a_1 - a_5 \bar{a}_5 = 4.3 - 4.3 = 0 \\ a_2^{(1)} &= \bar{a}_0 a_2 - a_5 \bar{a}_4 = 4.2 - 4.2 = 0 \\ a_3^{(1)} &= \bar{a}_0 a_3 - a_5 \bar{a}_2 = 4.2 - 4.2 = 0 \\ a_4^{(1)} &= \bar{a}_0 a_4 - a_5 \bar{a}_1 = 4.3 - 4.3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 24, conclui-se que todos os zeros de P se encontram no círculo unitário. De fato, $z_0 = -1$, $z_1 = -0.5 - 0.89i$, $z_2 = -0.5 + 0.86i$, $z_3 = 0.62 - 0.78i$ e $z_4 = 0.62 + 0.78i$, como mostra a figura a seguir.

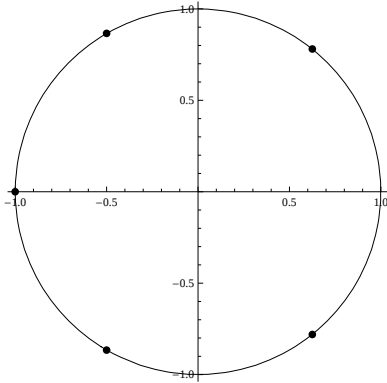


Figura 3.15: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 3z + 4$.

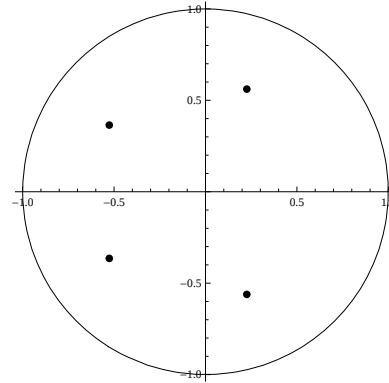


Figura 3.16: Localização dos zeros do polinômio $P'(z) = 20z^4 + 12z^3 + 6z^2 + 4z + 3$.

Resultados Sobre Algumas Classes de Polinômios Auto-Recíprocos Reais

Neste capítulo serão estudadas duas classes especiais de polinômios auto-recíprocos reais, dadas por

$$R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + z^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^n s_{n,k}^{(\lambda)} z^k, \quad \text{com } s_{n,0}^{(\lambda)} = s_{n,n}^{(\lambda)} = 1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad s_{n,n/2}^{(\lambda)} = \frac{n}{2}\lambda, \quad \text{se } n \text{ é par.} \end{aligned}$$

Algumas propriedades do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ já foi objeto de estudo de [4] e [16], onde foram determinadas condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estejam localizados no círculo unitário.

Com relação ao polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, em [12] os autores apresentam um estudo sobre o comportamento dos zeros destes polinômios no caso em que n é ímpar. Além disso, para os casos em que

$$2 < \lambda < 2 + \frac{2}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \quad \text{se } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ é ímpar,}$$

$$\lambda = -\frac{2}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \text{ e } \lambda = 2 + \frac{2}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \quad \text{se } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ é ímpar,}$$

os autores não obtiveram resultados, sendo problemas considerados em aberto. Porém no final deste capítulo, serão apresentadas respostas para tais problemas em aberto e

também um novo resultado sobre o comportamento dos zeros de $S_n^{(\lambda)}$ quando n é par, generalizando o resultado de [12].

4.1 Algumas propriedades do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$

Com base nos resultados encontrados em [22], serão apresentadas algumas propriedades do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ de grau n , $n \geq 1$.

A sequência de polinômios $\{R_n^{(\lambda)}\}$ é gerada pela relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}^{(\lambda)}(z) = (z+1)R_n^{(\lambda)}(z) - \alpha_{n+1}zR_{n-1}^{(\lambda)}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.1)$$

onde $R_0^{(\lambda)}(z) = 1$, $R_1^{(\lambda)}(z) = z+1$, $\alpha_2 = 2 - \lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha_n = 1$, $n \geq 3$.

De fato,

$$\begin{aligned} R_2^{(\lambda)}(z) &= (z+1)R_1^{(\lambda)}(z) - \alpha_2 z R_0^{(\lambda)}(z) \\ &= (z+1)(z+1) - (2-\lambda)z \\ &= 1 + \lambda z + z^2. \end{aligned}$$

Logo para $n = 1$, a relação é válida. Suponha que a relação de recorrência seja verdadeira para $R_n^{(\lambda)}(z)$, $n \geq 2$. Note que

$$\begin{aligned} R_{n+1}^{(\lambda)}(z) &= (z+1)R_n^{(\lambda)}(z) - \alpha_{n+1}zR_{n-1}^{(\lambda)}(z) \\ &= (z+1)[1 + \lambda(z+z^2+\dots+z^{n-1}) + z^n] - z[1 + \lambda(z+z^2+\dots+z^{n-2}) + z^{n-1}] \\ &= 1 + \lambda(z+z^2+\dots+z^n) + z^{n+1}. \end{aligned}$$

Teorema 25 Para todo $n \geq 1$, os dois polinômios consecutivos $R_n^{(\lambda)}$ e $R_{n+1}^{(\lambda)}$ não têm zeros em comum.

Demonstração: Primeiramente note que $R_n^{(\lambda)}(0) = 1 \neq 0$, $n \geq 1$.

Suponha por absurdo que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $R_1^{(\lambda)}(w) = R_2^{(\lambda)}(w) = 0$. Assim por (4.1), $R_2^{(\lambda)}(w) = (w+1)R_1^{(\lambda)}(w) - \alpha_2 w R_0^{(\lambda)}(w)$, e então $w = 0$. O que é um absurdo, pois $R_n^{(\lambda)}(0) \neq 0$, $n \geq 1$.

Portanto $R_1^{(\lambda)}(z)$ e $R_2^{(\lambda)}(z)$ não têm zeros em comum.

Agora seja $n \geq 2$ e suponha que $R_{n-1}^{(\lambda)}(z)$ e $R_n^{(\lambda)}(z)$ não têm zeros em comum. Se $R_n^{(\lambda)}(w) = 0$ e $R_{n-1}^{(\lambda)}(w) \neq 0$ temos, novamente por (4.1),

$$R_{n+1}^{(\lambda)}(w) = -\alpha_{n+1}wR_{n-1}^{(\lambda)}(w) \neq 0.$$

Portanto, $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $R_{n+1}^{(\lambda)}(z)$ não têm zeros em comum. O teorema fica provado por indução sobre n .

□

Teorema 26 Os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ são os autovalores da matriz de Heissenberg inferior de ordem n

$$H_n^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} -1 & 2-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Observe que

$$R_n^{(\lambda)}(z) = \det \begin{pmatrix} z+1 & \lambda-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z+1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z+1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$R_n^{(\lambda)}(z) = \det(zA_n - B_n),$$

onde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_n = \begin{pmatrix} -1 & 2-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são matrizes de ordem n .

Note que A_n é não singular. Então,

$$R_n^{(\lambda)}(z) = \det(A_n) \det(zI - A_n^{-1}B_n).$$

Sendo $\det A_n = 1$ e

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pode-se ver que $R_n^{(\lambda)}(z)$ é o polinômio característico da matriz de Hessenberg inferior $H_n^{(\lambda)} = A_n^{-1}B_n$.

Portanto, os autovalores da matriz $H_n^{(\lambda)}$ são os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$.

□

4.2 Zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$

Utilizando a mesma notação de [13], sejam $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $L : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$L(a) := \min_{y \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|$$

com uma permutação σ em $\{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \dots \leq a_{\sigma(n-1)}. \quad (4.2)$$

a) Se n é par, então $L(a) := \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{\sigma(\frac{n}{2})}|$.

b) Se n é ímpar, então $L(a) := \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|$, para todo $y \in [a_{\sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}, a_{\sigma(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}]$.

Definição 12 O número $\overline{m}(a)$ é definido por $\overline{m}(a) := a_{\sigma(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}$ e o número $\underline{m}(a)$ é dado por $\underline{m}(a) := a_{\sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}$. Observe que quando n é par $\overline{m}(a) = \underline{m}(a)$.

Veja alguns exemplos das definições acima.

Exemplo 14 Seja o polinômio $P(z) = 2z^8 + 5z^7 + 6z^6 + 3z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 5z + 2$. Logo, a sequência $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \in \mathbb{R}^7$ é dada por $a = (5, 6, 3, 4, 3, 6, 5)$. Assim, de (4.2) segue que

$$a_{\sigma(1)} = 3 \leq a_{\sigma(2)} = 3 \leq a_{\sigma(3)} = 4 \leq a_{\sigma(4)} = 5 \leq a_{\sigma(5)} = 5 \leq a_{\sigma(6)} = 6 \leq a_{\sigma(7)} = 6.$$

Como n é par tem-se que $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = a_{\sigma(4)} = 5$ e $L(a) = \sum_{j=1}^7 |a_j - a_{\sigma(4)}| = 7$.

Exemplo 15 Considere o polinômio $P(z) = 4z^5 + 5z^4 + 7z^3 + 7z^2 + 5z + 4$. Logo, a sequência $a \in \mathbb{R}^4$ é dada por $a = (5, 7, 7, 5)$. Assim, de (4.2) segue

$$a_{\sigma(1)} = 5 \leq a_{\sigma(2)} = 5 \leq a_{\sigma(3)} = 7 \leq a_{\sigma(4)} = 7.$$

Neste caso, como n é ímpar, tem-se que $\underline{m}(a) = a_{\sigma(2)} = 5$, $\overline{m}(a) = a_{\sigma(3)} = 7$ e

$$L(a) = \sum_{j=1}^4 |a_j - y|, \text{ para todo } y \in [5, 7], \text{ ou seja, } L(a) = 4.$$

Lema 4 *Seja $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$ um polinômio auto-recíproco real de grau n e*

$$\begin{aligned} A_l^{(\lambda)}(z) &= \sum_{k=0}^l a_k^{(\lambda)} z^k, \text{ com } l \text{ natural e } a_k^{(\lambda)} = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ \lambda - 1, & k \text{ ímpar,} \end{cases} \\ B_{n-2}^{(\lambda)}(z) &= \sum_{k=0}^{n-2} b_k z^k, \text{ com } b_k = \frac{(k+2)(n-(k+1))}{(n-1)}, \\ C_{n-3}(z) &= \sum_{k=0}^{n-3} c_k z^k, \text{ com } c_k = \begin{cases} \frac{(k+2)(n-1-k)}{2(n-1)}, & k \text{ par} \\ -\frac{(k+1)(n-1-(k+1))}{2(n-1)}, & k \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

- 1) *Se n é ímpar, $z = -1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$.*
- 2) *Se n é ímpar e $\lambda = \frac{2n}{n-1} = 2 + \frac{2}{n-1}$, $n > 1$, $z = -1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ de multiplicidade 3 e $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)^3 C_{n-3}(z)$.*
- 3) *Se n é par e $\lambda = 2$, $n > 1$, $z = -1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ de multiplicidade 2 e $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)^2 A_{n-2}^{(1)}(z)$.*
- 4) *Se $\lambda = -\frac{2}{n-1}$, $n > 1$, $z = 1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ de multiplicidade 2 e $R_n^{(\lambda)}(z) = (z-1)^2 B_{n-2}(z)$.*

Demonstração:

- 1) Observe que $z = -1$ é zero do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$. Assim, $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)D(z)$, onde $D(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k z^k$. Agora note que

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(z) &= (z+1) \sum_{k=0}^{n-1} d_k z^k \\ &= (z+1)(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_{n-1} z^{n-1}) \\ &= d_0 z + d_1 z^2 + d_2 z^3 + \dots + d_{n-1} z^n + d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_{n-1} z^{n-1} \\ &= d_0 + (d_0 + d_1)z + (d_1 + d_2)z^2 + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})z^{n-1} + d_{n-1} z^n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios dos lados esquerdo e direito da igualdade anterior segue que

$$d_0 = 1, \quad d_0 + d_1 = \lambda, \quad d_1 + d_2 = \lambda, \quad \dots \quad d_{n-2} + d_{n-1} = \lambda \quad \text{e} \quad d_{n-1} = 1.$$

Logo,

$$d_k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ \lambda - 1, & k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Portanto $D(z) = A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$, ou seja, $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$.

2) Pelo Lema 4 item 1) temos que $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$, onde

$$A_{n-1}^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ \lambda - 1, & k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Sendo $\lambda = \frac{2n}{n-1}$, $n > 1$, é possível observar que $A_{n-1}^{(\lambda)}(-1) = 0$. Assim é possível reescrever $A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$ na forma $A_{n-1}^{(\lambda)}(z) = (z+1)E(z)$, onde $E(z) = (z+1) \sum_{k=0}^{n-2} e_k z^k$.

Observe que

$$\begin{aligned} A_{n-1}^{(\lambda)}(z) &= (z+1) \sum_{k=0}^{n-2} e_k z^k \\ &= (z+1)(e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \cdots + e_{n-2} z^{n-2}) \\ &= e_0 z + e_1 z^2 + \cdots + e_{n-2} z^{n-1} + e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \cdots + e_{n-2} z^{n-2} \\ &= e_0 + (e_0 + e_1)z + (e_1 + e_2)z^2 + \cdots + (e_{n-3} + e_{n-2})z^{n-2} + e_{n-2} z^{n-1}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios dos lados esquerdo e direito da igualdade acima segue que

$$e_k = \begin{cases} \frac{(n-1-k)}{(n-1)}, & k \text{ par} \\ \frac{(k+1)}{(n-1)}, & k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Agora observe que $E(-1) = 0$. Logo, com os mesmos argumentos anteriores, $T(z) = (z+1)F(z)$ onde

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-3} f_k z^k, \text{ com } f_k = \begin{cases} \frac{(k+2)(n-1-k)}{2(n-1)}, & k \text{ par} \\ -\frac{(k+1)(n-1-(k+1))}{2(n-1)}, & k \text{ ímpar,} \end{cases}$$

ou seja, $F(z) = C_{n-3}(z)$. Portanto,

$$R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z) = (z+1)^2 E(z) = (z+1)^3 C_{n-3}(z).$$

3) Note que $z = -1$ é zero de $R_n^{(2)}(z) = 1 + 2(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + z^n$ quando n é par.

Assim $R_n^{(2)}(z) = (z+1)G(z)$, onde $G(z) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k z^k$. Logo,

$$\begin{aligned} R_n^{(2)}(z) &= (z+1)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots + g_{n-1} z^{n-1}) \\ &= g_0 z + g_1 z^2 + \cdots + g_{n-1} z^n + g_0 + g_1 z + \cdots + g_{n-1} z^{n-1} \\ &= g_0 + (g_0 + g_1)z + \cdots + (g_{n-2} + g_{n-1})z^{n-1} + g_{n-1} z^n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios do lado esquerdo e direito da igualdade acima segue que $g_k = 1$ $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Agora observe que $z = -1$ também é zero de $G(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$. Logo, $G(z) = (z+1)H(z)$, onde $H(z) = \sum_{k=0}^{n-2} h_k z^k$. Assim ,

$$\begin{aligned} G(z) &= (z+1)(h_0 + h_1 + \dots + h_{n-2}) \\ &= h_0 z + h_1 z^2 + \dots + h_{n-1} z^n + h_0 + h_1 z + \dots + h_{n-1} z^{n-1} \\ &= h_0 + (h_0 + h_1)z + \dots + (h_{n-2} + h_{n-1})z^{n-1} + h_{n-1} z^n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios do lado esquerdo e direito da igualdade acima segue que

$$h_k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ \lambda - 1, & k \text{ ímpar}, \end{cases}$$

logo $H(z) = A_{n-2}^{(1)}(z)$. Portanto, $R_n^{(2)}(z) = (z+1)G(z) = (z+1)^2 A_{n-2}^{(1)}(z)$.

4) Note que $z = 1$ é um zero de $R_n^{(-\frac{2}{n-1})}(z) = 1 - \frac{2}{n-1}(z + \dots + z^{n-1}) + z^n$. Assim,

podemos escrever $R_n^{(-\frac{2}{n-1})}(z) = (z-1)L(z)$ onde $L(z) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k z^k$. Assim

$$\begin{aligned} R_n^{(-\frac{2}{n-1})}(z) &= (z+1)(l_0 + l_1 + \dots + l_{n-2}) \\ &= l_0 z + l_1 z^2 + \dots + l_{n-1} z^n - l_0 - l_1 z - \dots - l_{n-1} z^{n-1} \\ &= -l_0 + (l_0 - l_1)z + \dots + (l_{n-2} + l_{n-1})z^{n-1} + l_{n-1} z^n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios do lado esquerdo e direito da igualdade acima segue que

$$l_k = \begin{cases} -1, & k = 0 \\ \frac{-n + (2k+1)}{n-1}, & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Observe também que $z = 1$ é zero de $L(z) = -1 + \left(\frac{-n+3}{n-1}\right)z + \dots + \left(\frac{n-3}{n-1}\right)z^{n-2} + z^{n-1}$,

logo $L(z) = (z-1)Q(z)$ onde $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} q_k z^k$. Assim,

$$\begin{aligned} L(z) &= (z-1)(q_0 + q_1 z + \dots + q_{n-2} z^{n-2}) \\ &= q_0 z + q_1 z^2 + \dots + q_{n-1} z^n - q_0 - q_1 z - \dots - q_{n-2} z^{n-1} \\ &= -q_0 + (q_0 - q_1)z + \dots + (q_{n-3} + q_{n-2})z^{n-2} + q_{n-2} z^{n-1}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios do lado esquerdo e direito da igualdade acima segue que

$$q_k = \frac{(k+2)(n-(k+1))}{(n-1)}.$$

Logo, $Q(z) = B_{n-2}(z)$. Portanto, $R_n^{(-\frac{2}{n-1})}(z) = (z-1)L(z) = (z-1)^2 B_{n-2}(z)$.

□

O resultado a seguir pode ser encontrado em [13].

Teorema 27 *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio auto-recíproco real de grau n com $a_n > 0$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.*

1) *Suponha $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2a_n$.*

a) *Se $P(1) \geq 0$, então todos os zeros de P estão no círculo unitário. Neste caso existem pelo menos 2 zeros da forma $e^{i\theta}$ com $-\frac{2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.*

b) *Se $P(1) < 0$, então P tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.*

2) *Suponha $\overline{m}(a) \geq L(a) + 2a_n$. Então, uma das seguintes afirmações é válida.*

a) *Todos os zeros de P estão no círculo unitário. Quando n é ímpar existem 3 ou 5 zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{(n-1)\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{(n+1)\pi}{n}$. Quando n é par -1 é zero com multiplicidade 2 ou 4.*

b) *P tem zeros reais $\beta < -1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.*

Os resultados anteriores vistos neste capítulo serão de suma importância para a demonstração do próximo teorema, que se encontra em [4]. Serão dadas condições necessárias e suficientes para que todos os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$ estejam em $|z| = 1$.

Teorema 28 *Os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, de grau $n > 1$, estão no círculo unitário se, e somente se,*

i) $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ se n é par;

ii) $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}$ se n é ímpar.

Demonstração: Primeiramente serão feitas algumas considerações que são válidas para n arbitrário.

Pelo Teorema 27, $a = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$, $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \lambda$ e $L(a) = 0$. Se $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$, ou seja, $\lambda \leq 2$, como $R_n^{(\lambda)}(1) = 2 + (n-1)\lambda \geq 0$ quando $\lambda \geq -\frac{2}{n-1}$, segue do item 1) a) do Teorema 27 que todos os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão no círculo unitário quando

$$-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2. \quad (4.3)$$

Além disso, se $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda \leq 2$ e $R_n^{(\lambda)}(1) = 2 + (n-1)\lambda < 0$, isto é, $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero em $(1, +\infty)$. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow 1} R_n^{(\lambda)}(z) = 2 + (n-1)\lambda < 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow +\infty} R_n^{(\lambda)}(z) > 0,$$

ou seja, $R_n^{(\lambda)}(z)$ muda de sinal no intervalo $(1, +\infty)$. Este caso é descrito no item 1) b) do Teorema 27.

i) Agora se n é par e $\lambda > 2$, ou seja, $(\overline{m}(a) > L(a) + 2)$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} R_n^{(\lambda)}(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} R_n^{(\lambda)}(z) = 2 - \lambda < 0,$$

isto é, existe uma mudança de sinal de $R_n^{(\lambda)}(z)$ em $(-\infty, -1)$. Observe que as considerações acima são descritas no item 2) b) do Teorema 27.

Portanto, se n é par, os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão no círculo unitário se, e somente se, $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$.

ii) Será mostrado agora o caso em que n é ímpar.

Se $\lambda > 2$, isto é, $\overline{m}(a) > L(a) + 2$, considere as seguintes situações:

a) Se $\lambda > \frac{2n}{n-1}$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui um zero real em $(-\infty, -1)$. De fato, pelo Lema 4 item 1), $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$. Assim,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} A_{n-1}^{(\lambda)}(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} A_{n-1}^{(\lambda)}(z) = n - \frac{n-1}{2}\lambda < 0,$$

isto é, $A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$ muda de sinal no intervalo $(-\infty, -1)$ e, conseqüentemente, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$, como esperado do item 2) b) do Teorema 27.

b) Se $\lambda < \frac{2n}{n-1}$, como $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} A_{n-1}^{(\lambda)}(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} A_{n-1}^{(\lambda)}(z) = n - \frac{n-1}{2}\lambda > 0,$$

ou seja, $A_{n-1}^{(\lambda)}(z)$ não muda de sinal em $(-\infty, -1)$. Logo, todos os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão no círculo unitário, como esperado do item 2) a) do Teorema 27.

c) Se $\lambda = \frac{2n}{n-1}$, pelo Lema 4 item 2), $R_{n-1}^{(\lambda)}(z) = (z+1)^3 C_{n-3}(z)$. Além disso,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} C_{n-3}(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} C_{n-3}(z) > 0,$$

isto é, não há mudança de sinal de $U(z)$ no intervalo $(-\infty, -1)$ e $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui todos os seus zeros no círculo unitário, como descrito no item 2) a) do Teorema 27.

Analisando os três itens anteriores, podemos concluir que

$$2 < \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}. \quad (4.4)$$

Portando, de (4.3) e (4.4) é possível concluir que $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| = 1$ se, e somente se, $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq \frac{2n}{n-1}$, quando n é ímpar.

□

Exemplo 16 Considere o polinômio $R_6^{(\lambda)}(z) = z^6 + \lambda(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$. Pelo Teorema 28, segue que os zeros de $R_6^{(\lambda)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$ se, e somente se, $-\frac{2}{5} \leq \lambda \leq 2$. A Figura 4.1 ilustra a localização dos zeros de $R_6^{(1)}(z)$ que são $z_0 = -0.9 - 0.43i$, $z_1 = -0.9 + 0.43i$, $z_2 = -0.22 - 0.97i$, $z_3 = -0.22 + 0.97i$, $z_4 = 0.62 - 0.78i$ e $z_5 = 0.62 + 0.78i$. Note que os zeros de $R_6^{(1)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$, pois para $\lambda = 1$ a condição do Teorema 28 é satisfeita. Já no caso da Figura 4.2, pode-se observar que nem todos os zeros de $R_6^{(-1)}(z) = z^6 - (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$ encontram-se em $|z| = 1$, pois a condição estabelecida através do Teorema 28 não é satisfeita, visto que $\lambda = -1$. De fato, os zeros de $R_6^{(-1)}(z)$ são $z'_0 = -0.84 - 0.52i$, $z'_1 = -0.84 + 0.52i$, $z'_2 = -0.11 - 0.99i$, $z'_3 = -0.11 + 0.99i$, $z'_4 = 0.51$ e $z'_5 = 1.94$.

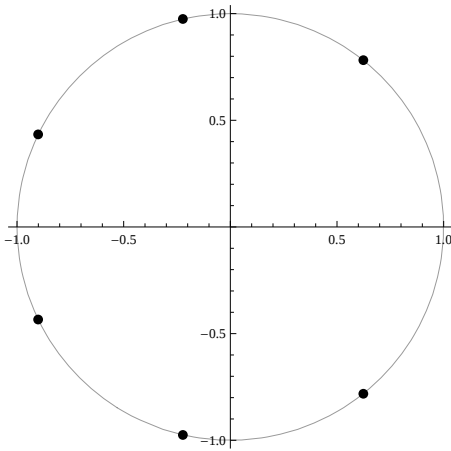


Figura 4.1: Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(1)}(z) = z^6 + (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.

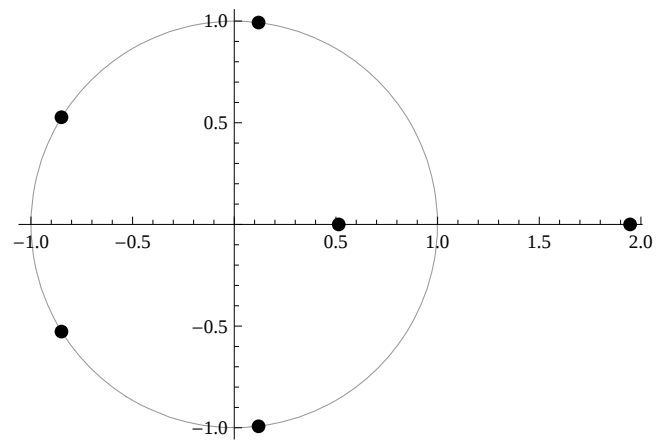


Figura 4.2: Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(-1)}(z) = z^6 - (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.

Exemplo 17 Seja o polinômio $R_5^{(\lambda)}(z) = z^5 + \lambda(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$. Através do Teorema 28, segue que os zeros de $R_5^{(\lambda)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$ se, e somente se, $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{5}{2}$. A Figura 4.3 mostra a localização dos zeros de $R_5^{(2)}(z)$, que são dados por $z_0 = -1$, $z_1 = -0.8 + 0.58i$, $z_2 = -0.8 + 0.58i$, $z_3 = -0.3 - 0.95i$ e $z_4 = 0.3 + 0.95i$. É fácil ver que os zeros de $R_5^{(2)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$, pois para $\lambda = 2$ a condição do Teorema 28 é satisfeita. Já no caso da Figura 4.4, pode-se notar que nem todos os zeros de $R_5^{(3)}(z) = z^5 + 3(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$ encontram-se em $|z| = 1$, pois a condição estabelecida através do Teorema 28 não é satisfeita, quando $\lambda = 3$. De fato, $z'_0 = -1$, $z'_1 = -1.88$, $z'_2 = 0.2 + 0.97i$, $z'_3 = -0.2 - 0.97i$ e $z'_4 = -0.53$.

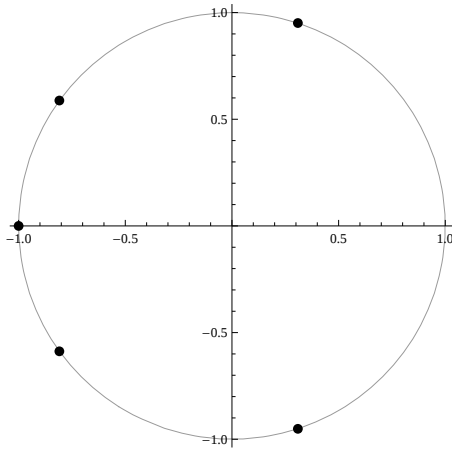


Figura 4.3: Localização dos zeros do polinômio $R_5^{(2)}(z) = z^5 + 2(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.

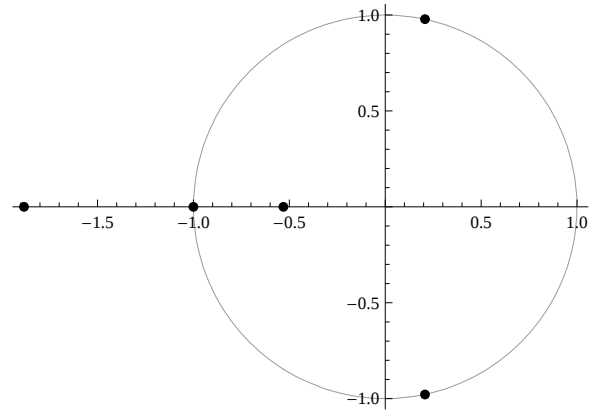


Figura 4.4: Localização dos zeros do polinômio $R_5^{(3)}(z) = z^5 + 3(z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.

Observação 4.1 Observe que quando a condição do Teorema 28 não é satisfeita, isto é, λ está fora dos intervalos descritos nos itens i) e ii) do Teorema 28, $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui sempre dois zeros reais, visto que neste caso a função polinomial possui uma mudança de sinal e como $R_n^{(\lambda)}(z)$ é auto-recíproco real, sabe-se que se $z_k \in \mathbb{R}$ é zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ então seu inverso $\frac{1}{z_k} \in \mathbb{R}$ também será. Veja os casos:

- Se $\lambda \in (-\infty, \frac{2}{n-1})$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos z_k e $\frac{1}{z_k}$ e os outros estão localizados no círculo unitário.
- Se $\lambda \in (2, +\infty)$ (caso par) e $\lambda \in (2 + \frac{2}{n-1}, +\infty)$ (caso ímpar), $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos z_k e $\frac{1}{z_k}$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

4.3 Propriedades e zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$

Considere a transformação

$$x = x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}, \text{ onde } z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tal transformação foi primeiro usada por Delsarte e Genin em [10] e depois usada também por Zhedanov em [24].

Pode-se ver que

$$x(z) = \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Observe que para $\theta \in [0, 2\pi]$ então $x \in [-1, 1]$ e $z = z(x) = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}$. Seja

$$W_n^{(\lambda)}(x) := z^{-\frac{n}{2}} R_n^{(\lambda)}(z), \quad n \geq 2.$$

Note que se $z = e^{i\theta_k}$ é zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ então $x_k = \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$ é zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$.

Vamos mostrar que

$$W_n^{(\lambda)}(x) = U_n(x) - (1 - \lambda)U_{n-2}(x), \quad (4.5)$$

onde o polinômio $U_n(x)$ é o polinômio de Chebyshev de 2ª espécie definido no Capítulo 2. De fato,

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(z) &= 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n \\ &= (z + \dots + z^n) + (\lambda - 1)z(z + \dots + z^{n-2}) \\ &= \frac{z^{n-1} - 1}{z - 1} + (\lambda - 1)z \frac{z^{n-1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{z^{(n+1)/2}(z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2})}{z^{1/2}(z^{1/2} - z^{-1/2})} + (\lambda - 1)z \frac{z^{(n-1)/2}(z^{(n-1)/2} - z^{-(n-1)/2})}{z^{1/2}(z^{1/2} - z^{-1/2})} \\ &= \frac{z^{n/2}(z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}} + (\lambda - 1) \frac{z^{n/2}(z^{(n-1)/2} - z^{-(n-1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Como $x = x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} z^{-n/2} R_n^{(\lambda)}(z) &= \frac{(z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}} + (\lambda - 1) \frac{(z^{(n-1)/2} - z^{-(n-1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)} + (\lambda - 1) \frac{\operatorname{sen}((n-1)\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)} \\ &= U_n(x) - (1 - \lambda)U_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Em [19], encontramos a relação $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$, onde o polinômio $T_n(x)$ é o polinômio de Chebyshev de 1ª espécie definido no Capítulo 2. Então,

$$W_n^{(\lambda)}(x) = \lambda U_n(x) + 2(1 - \lambda)T_n(x). \quad (4.6)$$

Sejam $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ e $x_{n-2,1}, x_{n-2,2}, \dots, x_{n-2,n-2}$ os zeros de $U_n(x)$ e $U_{n-2}(x)$, respectivamente. Sabe-se pelo Teorema 10 e pelas definições de $U_n(x)$ e $U_{n-2}(x)$ vistas

no Capítulo 2 que os zeros de $U_n(x)$ e $U_{n-2}(x)$ são reais, simples e estão localizados no intervalo $[-1, 1]$. Além disso, pelo Teorema 12, seus zeros são simétricos com respeito a origem. Deste modo é suficiente considerar somente os zeros positivos, isto é, $x_{n,1} > x_{n,2} > \cdots > x_{n,\lfloor n/2 \rfloor}$ e $x_{n-2,1} > x_{n-2,2} > \cdots > x_{n-2,\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$. Pelo Teorema 11 sabe-se que seus zeros satisfazem a propriedade de entrelaçamento:

$$x_{n,1} > x_{n-2,1} > \cdots > x_{n-2,\lfloor (n-2)/2 \rfloor} > x_{n,\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Observe pela equação (4.5) e pelo Teorema 15 que o polinômio $W_n^{(\lambda)}(x)$ é um polinômio quase-ortogonal de ordem 2 com respeito a função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre $[-1, 1]$ quando $\lambda \neq 1$. Além disso, pelo Teorema 15, $W_n^{(\lambda)}(x)$ tem no mínimo $n-2$ zeros reais distintos em $(-1, 1)$ para $\lambda \neq 1$.

Note agora que $w(x) = w(-x)$. Então, pelo Teorema 12, $W_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n W_n^{(\lambda)}(x)$ e consequentemente, seus zeros reais são simétricos com respeito a origem. Sejam $\xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}, \dots, \xi_n^{(\lambda)}$ os zeros de $W_n^{(\lambda)}$. Sendo os zeros reais de $W_n^{(\lambda)}(x)$ simétricos em relação a origem é suficiente considerar no mínimo $\xi_1^{(\lambda)} > \xi_2^{(\lambda)} > \cdots > \xi_{\lfloor n-2/2 \rfloor}^{(\lambda)}$ zeros positivos. Observe que se n é ímpar, $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor+1}^{(\lambda)} = 0$ é zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$, pois, pelo Lema 4, $z = -1$ é zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ quando n é ímpar e $x(-1) = 0$.

O próximo resultado nos fornece a localização dos zeros do polinômio $W_n^{(\lambda)}(x)$ para a escolha do parâmetro λ .

Lema 5 Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se os seguintes resultados sobre os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$:

- a) Se $\lambda = 1$, $W_n^{(\lambda)}(x) = U_n(x)$ e os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$ são reais, distintos e estão localizados em $(-1, 1)$.
- b) Se $\lambda \neq 1$, no mínimo $n-2$ zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$ são reais, distintos e localizados em $(-1, 1)$.
- c) Se $-\frac{2}{n-1} < \lambda < 2$ $\left(-\frac{2}{n-1} < \lambda < 2 + \frac{2}{n-1}\right)$ todos os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$ estão localizados em $(-1, 1)$ quando n é par (ímpar).
- d) Se $\lambda > 2$ $\left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1}\right)$, $W_n^{(\lambda)}(x)$ tem 2 zeros complexos imaginários puros quando n é par (ímpar).
- e) Se $\lambda = 2$ $\left(\lambda = 2 + \frac{2}{n-1}\right)$, $x = 0$ é zero de multiplicidade 2 (3) de $W_n^{(\lambda)}(x)$ quando n é par (ímpar).
- f) Se $\lambda = -\frac{2}{n-1}$, $x = 1$ e $x = -1$ são zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$.
- g) Se $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, $W_n^{(\lambda)}(x)$ tem dois zeros reais $(\xi_k^{(\lambda)} \text{ e } -\xi_k^{(\lambda)})$ fora do intervalo $[-1, 1]$.

Demonstração:

- a) Se $\lambda = 1$, $W_n^{(\lambda)}(x) = U_n(x)$. Como $U_n(x)$ é o polinômio de Chebyshev de 2ª espécie, o resultado segue de suas propriedades.
- b) Se $\lambda \neq 1$ sabe-se pelo Teorema 15 que $W_n^{(\lambda)}(x)$ é quase-ortogonal de ordem 2. Então, pelo Teorema 16, segue o resultado.
- c) Neste caso, pelo Teorema 28, sabe-se que $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem todos os seus zeros no círculo unitário. Consequentemente, todos os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$ estão em $(-1, 1)$. Observe que $z = 1$ não é zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $z(1) = z(-1) = 1$ não são zeros de $W_n^{(\lambda)}(x(z))$. Por esta razão considera-se o intervalo aberto $(-1, 1)$.
- d) Se $\lambda > 2 \left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1} \right)$, pelo Teorema 28 sabe-se que $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem 2 zeros negativos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ e $n - 2$ zeros no círculo unitário. Pode-se escrever $z_k^{(\lambda)} = -b$, $b > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x(z_k^{(\lambda)}) &= \frac{(-b)^{1/2} + (-b)^{-1/2}}{2} \\ &= \frac{i\sqrt{b} + \frac{1}{i\sqrt{b}}}{2} \\ &= \frac{(b-1)i}{2\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Como $|z_k^{(\lambda)}| = b$, segue que

$$x(z_k^{(\lambda)}) = \left(\frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}} \right) i = \beta_k^{(\lambda)} i.$$

Agora pode-se escrever $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} = \frac{-1}{b}$, $b > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right) &= \frac{\left(\frac{-1}{b}\right)^{1/2} + \left(\frac{-1}{b}\right)^{-1/2}}{2} \\ &= \frac{\frac{i}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{i}}{2} \\ &= \frac{(-b+1)i}{2\sqrt{b}} \\ &= -\left(\frac{b-1}{2\sqrt{b}}\right) i. \end{aligned}$$

Como $|z_k^{(\lambda)}| = b$, segue que

$$x\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right) = -\left(\frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}} \right) i = -\beta_k^{(\lambda)} i.$$

- e) Neste, caso $z = -1$ é zero de multiplicidade 2 (n par) e multiplicidade 3 (se n ímpar) de $R_n^{(\lambda)}(z)$. Observe que $x(-1) = \frac{(-1)^{1/2} + (-1)^{-1/2}}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$. Assim, $x = 0$ é zero de multiplicidade 2 (3) de $W_n^{(\lambda)}(x)$ quando n é par (ímpar).
- f) Se $\lambda = -\frac{2}{n-1}$, pelo item 4) do Lema 4, $z = 1$ é zero de multiplicidade 2 de $R_n^{(\lambda)}(z)$. Observe que $z(1) = z(-1) = 1$. Assim, $x = 1$ e $x = -1$ são zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$.
- g) Se $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, pelo Teorema 28 sabe-se que $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos, $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, e os $n-2$ zeros no círculo unitário. Note que se $z_k^{(\lambda)} \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$, então

$$\xi_k^{(\lambda)} = x(z_k^{(\lambda)}) = x\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right) \in (1, \infty).$$

Como os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$ são simétricos com respeito a origem, pode se concluir que $-\xi_k^{(\lambda)}$ é zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$. Assim, $W_n^{(\lambda)}(x)$ tem dois zeros fora do intervalo $[-1, 1]$.

□

Exemplo 18 Sejam $W_9^{(1.5)}(x) = U_9(x) + \frac{1}{2}U_7(x)$ e $W_8^{(1.5)}(x) = U_8(x) + \frac{1}{2}U_6(x)$. Pelo item c) do Lema 5, ambos polinômios possuem todos os seus zeros no intervalo $(-1, 1)$. Observe a figura.

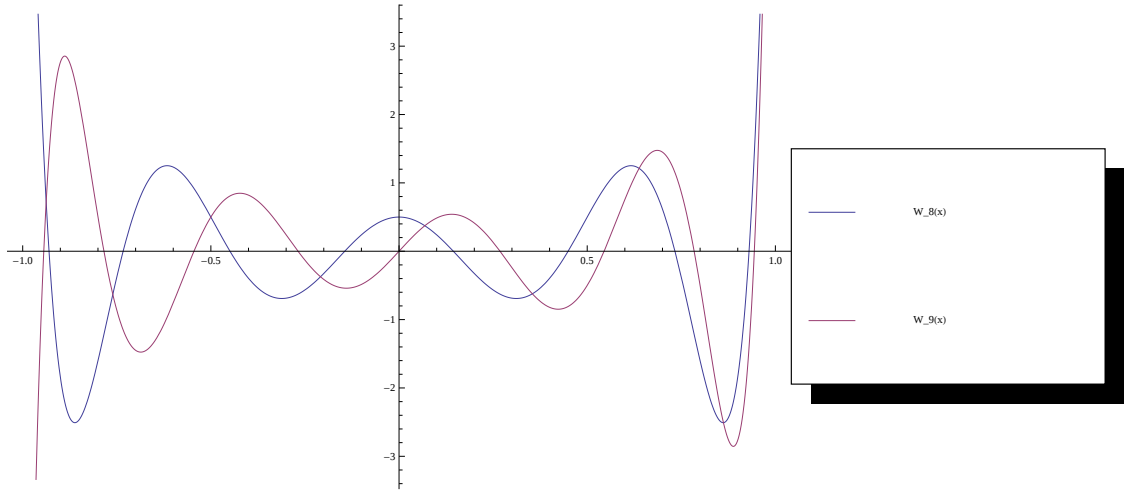


Figura 4.5: Gráficos dos polinômios $W_9^{(1.5)}(x) = U_9(x) + \frac{1}{2}U_7(x)$ e $W_8^{(1.5)}(x) = U_8(x) + \frac{1}{2}U_6(x)$.

Exemplo 19 Note que pelo item d) do Lema 5, $W_8^{(3)}(x) = U_8(x) + 2U_6(x)$ possui dois zeros imaginários puros, onde os zeros de $W_8^{(3)}(x)$ são dados por $z_0 = -0.91$, $z_1 = -0.67$, $z_2 = -0.28$, $z_3 = -0.35i$, $z_4 = 0.35i$, $z_5 = 0.28$, $z_6 = 0.67$ e $z_7 = 0.91$. Pelo item e) do Lema 5, $W_7^{(-2)}(x) = U_7(x) - 3U_6(x)$ possui dois zeros fora do intervalo $[-1, 1]$, onde os

zeros de $W_7^{(-2)}(x)$ são dados por $z_0 = -1.15$, $z_1 = -0.83$, $z_2 = -0.46$, $z_3 = 0$, $z_4 = 0.46$, $z_5 = 0.83$ e $z_6 = 1.15$. Como pode-se observar nas figuras a seguir.

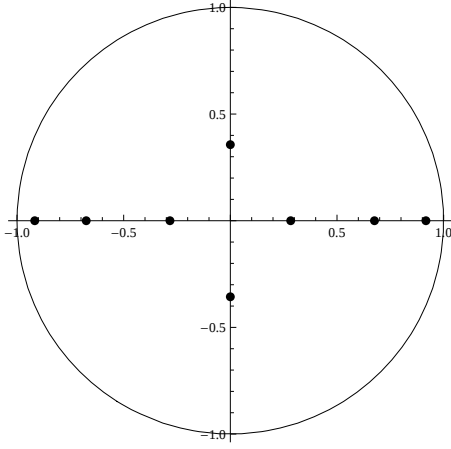


Figura 4.6: Localização dos zeros do polinômio $W_8^{(3)}(x) = U_8(x) + 2U_6(x)$.

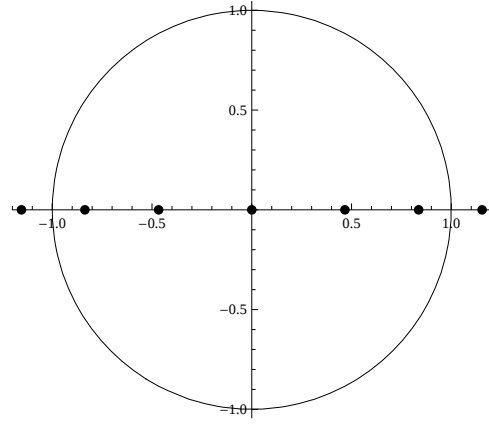


Figura 4.7: Localização dos zeros do polinômio $W_7^{(-2)}(x) = U_7(x) - 3U_5(x)$.

O seguinte resultado pode ser visto de modo geral em [6] e [23].

Lema 6 Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se o seguinte resultado sobre os zeros de $W_n^{(\lambda)}(x)$:

- Se $\lambda < 1$, $x_{n,1} < \xi_1^{(\lambda)}$ e $x_{n,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n-2,r-1}$, $r = 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, $\xi_1^{(\lambda)} > 1$ e se $-\frac{2}{n-1} < \lambda < 1$, $\xi_1^{(\lambda)} < 1$. Se $\lambda = -\frac{2}{n-1}$, $\xi_1^{(\lambda)} = 1$.
- Se $1 < \lambda < 2$ $\left(1 < \lambda < 2 + \frac{2}{n-1}\right)$, e n par (ímpar), $x_{n-2,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n,r}$, $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ e $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} < x_{n, \lfloor n/2 \rfloor} < 1$.
- Se $\lambda = 2$ $\left(\lambda = 2 + \frac{2}{n-1}\right)$ e n é par (ímpar), $x_{n-2,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n,r}$, $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ e $0 = \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} < x_{n, \lfloor n/2 \rfloor}$, isto é, 0 é zero de multiplicidade 2 (3) de $W_n^{(\lambda)}(x)$.
- Se $\lambda > 2$ $\left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1}\right)$ e n é par (ímpar), $x_{n-2,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n,r}$, $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ e o outro zero é $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} = \beta_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} i$.

Demonstração: Sejam $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$, $x_{n-2,1}, x_{n-2,2}, \dots, x_{n-2,n-2}$ e $\xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}, \dots, \xi_n^{(\lambda)}$ os zeros de $U_n(x)$, $U_{n-2}(x)$ e $W_n^{(\lambda)}(x)$, respectivamente. Tais zeros são simétricos com respeito a origem e então é suficiente considerar somente os zeros positivos, isto é, $x_{n,1} > x_{n,2} > \dots > x_{n, \lfloor n/2 \rfloor} > 0$, $x_{n-2,1} > x_{n-2,2} > \dots > x_{n-2, \lfloor (n-2)/2 \rfloor} > 0$ e $\xi_1^{(\lambda)} > \xi_2^{(\lambda)} > \dots > \xi_{n-2, \lfloor (n-2)/2 \rfloor}^{(\lambda)} > 0$. Sabe-se que os zeros de $U_n(x)$ e $U_{n-2}(x)$ satisfazem a propriedade de entrelaçamento. Logo,

$$x_{n,1} > x_{n-2,1} > \dots > x_{n-2, \lfloor (n-2)/2 \rfloor} > x_{n, \lfloor n/2 \rfloor} > 0.$$

Além disso, quando n é ímpar, $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)} = 0$ é zero de $W_n^{(\lambda)}$.

- a) Para $\lambda < 1$ e $r = 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, e considerando $W_n^{(\lambda)}(z) = U_n(x) - (1 - \lambda)U_{n-2}(x)$ e analisando o comportamento das funções polinômiais de Chebyshev de 1ª e 2ª espécies tem-se que

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n,r+1})) = -\text{senal}(U_{n-2}(x_{n,r+1})) = (-1)^{r-1}$$

e

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n-2,r})) = \text{senal}(U_n(x_{n-2,r})) = (-1)^r.$$

Assim, $W_n^{(\lambda)}(x)$ possui uma mudança de sinal no intervalo $(x_{n,r}, x_{n-2,r-1})$, ou seja, existe um zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$, $\xi_r^{(\lambda)}$, $r = 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tal que $x_{n,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n-2,r-1}$. Além disso

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n,1})) = -\text{senal}(U_{n-2}(x_{n,1})) = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W_n^{(\lambda)}(x) = +\infty.$$

Assim, $\xi_1^{(\lambda)}$ é zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$ e $x_{n,1} < \xi_1^{(\lambda)}$. Se $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, do item g) do Lema 5 segue que $\xi_1^{(\lambda)} > 1$. Se $-\frac{2}{n-1} < \lambda < 1$, do item c) do Lema 5 segue que $\xi_1^{(\lambda)} < 1$. Se $\lambda = -\frac{2}{n-1}$, do item f) do Lema 5 segue que $\xi_1^{(\lambda)} = 1$.

Para os próximos casos $1 < \lambda < 2$, $\lambda = 2$ e $\lambda > 2$ se n é par e $\left(1 < \lambda < 2 + \frac{2}{n-1}\right)$, $\left(\lambda = 2 + \frac{2}{n-1}\right)$ e $\left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1}\right)$ se n é (ímpar), ou seja, para $\lambda > 1$ e $n > 1$ $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ tem-se:

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n,r})) = \text{senal}(U_{n-2}(x_{n,r})) = (-1)^{r-1}$$

e

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n-2,r})) = \text{senal}(U_n(x_{n-2,r})) = (-1)^r.$$

Logo existe um zero de $W_n^{(\lambda)}$, $\xi_r^{(\lambda)}$, $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ tal que $x_{n-2,r} < \xi_r^{(\lambda)} < x_{n,r}$.

Além disso:

- b) Se $1 < \lambda < 2$ e n par, para $r = \lfloor n/2 \rfloor$:

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n-2,\lfloor n/2 \rfloor})) = (-1)^{r-1}$$

e

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(0)) = (-1)^{n/2-1} \text{senal}(2 - \lambda).$$

Assim se $\frac{n}{2}$ é par,

$$\text{senal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n-2,\lfloor n/2 \rfloor})) = -1 \text{ e } \text{senal}(W_n^{(\lambda)}(0)) = 1$$

e, para $\frac{n}{2}$ ímpar,

$$\text{sinal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n-2, \lfloor n/2 \rfloor})) = 1 \text{ e } \text{sinal}(W_n^{(\lambda)}(0)) = -1.$$

Assim, existe $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)}$, zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$, tal que $0 < \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} < x_{n, \lfloor n/2 \rfloor}$.

Se $1 < \lambda < 2 + \frac{2}{n-1}$ e n ímpar, para $r = \lfloor n/2 \rfloor$:

$$\text{sinal}(W_n^{(\lambda)}(x_{n, \lfloor n/2 \rfloor})) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$$

e

$$W_n^{(\lambda)}(0) = 0.$$

Então, é necessário analisar o comportamento de $[W_n^{(\lambda)}(0)]'$. Primeiramente observe que,

$$[W_n^{(\lambda)}(x)]' = \lambda[U_n(x)]' + 2(1 - \lambda)[T_n(x)]'.$$

Da relação vista em [2], $[T_n(x)]' = nU_{n-1}(x)$, tem-se que

$$[W_n^{(\lambda)}(x)]' = \lambda[U_n(x)]' + 2n(1 - \lambda)[U_{n-1}(x)]$$

logo,

$$[W_n^{(\lambda)}(0)]' = \lambda[U_n(0)]' + 2n(1 - \lambda)[U_{n-1}(0)]. \quad (4.7)$$

Note que $\lambda \in \left(1, 2 + \frac{2}{n-1}\right)$; assim, $1 - \lambda < 0$. Desta maneira basta analisar $[U_n(0)]'$ e $U_{n-1}(0)$. Como n é ímpar, pode-se ver facilmente que

$$(U_{n-1}(0)) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Agora, por [19], sabe-se que $U_n(x) = \frac{1}{n+1}[T_{n+1}(x)]'$. Assim,

$$\begin{aligned} [U_n(0)]' &= \frac{1}{n+1}[T_n(0)]'' \\ &= \frac{1}{n+1}2t_{2,n+1}. \end{aligned}$$

Mas, da referência [19] segue que

$$t_{n,n-2k} = (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k},$$

desta maneira,

$$\begin{aligned} t_{n+1,2} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=\frac{n-1}{2}}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2j} \binom{j}{\frac{n-1}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $[U_n(0)]' = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n+1) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}(n+1)$. Portanto, voltando na equação (4.7) tem-se que

$$\begin{aligned} [W_n^{(\lambda)}(0)]' &= \lambda(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}(n+1) + 2n(1-\lambda)(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}(\lambda(1-n) + 2n) \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}(n-1) \left(2 + \frac{2}{n-1} - \lambda \right). \end{aligned}$$

Como $(n-1) \left(2 + \frac{2}{n-1} - \lambda \right) > 0$, segue que

$$\text{sign}(W_n^{(\lambda)}(0))' = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Assim, $W_n^{(\lambda)}(x)$ é uma função crescente (decrecente) numa vizinhança do ponto $x = 0$ quando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par (ímpar). Consequentemente, $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)}$ é zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$ e $0 < \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} < x_{n, \lfloor n/2 \rfloor}$.

- c) Se $\lambda = 2 \left(\lambda = 2 + \frac{2}{n-1} \right)$ e n é par (ímpar), para $r = \lfloor n/2 \rfloor$, tem-se pelo Lema 5 que $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} = 0$ é zero de multiplicidade 2 (3) de $W_n^{(\lambda)}(x)$ e $0 = \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} < x_{n, \lfloor n/2 \rfloor}$.
- d) Se $\lambda > 2 \left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1} \right)$ e n par (ímpar), do Lema 5 segue que $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} = \beta_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} i$ é zero de $W_n^{(\lambda)}(x)$.

□

Exemplo 20 Sejam, $U_8(x)$, $W_8^{(1/2)} = U_8(x) - \frac{1}{2}U_6(x)$ e $U_6(x)$. Então pelo item a) do Lema 6, $x_{8,r} < \xi_r^{(1/2)} < x_{6,r-1}$, $r = 2, \dots, 4$. Observe os gráficos abaixo.

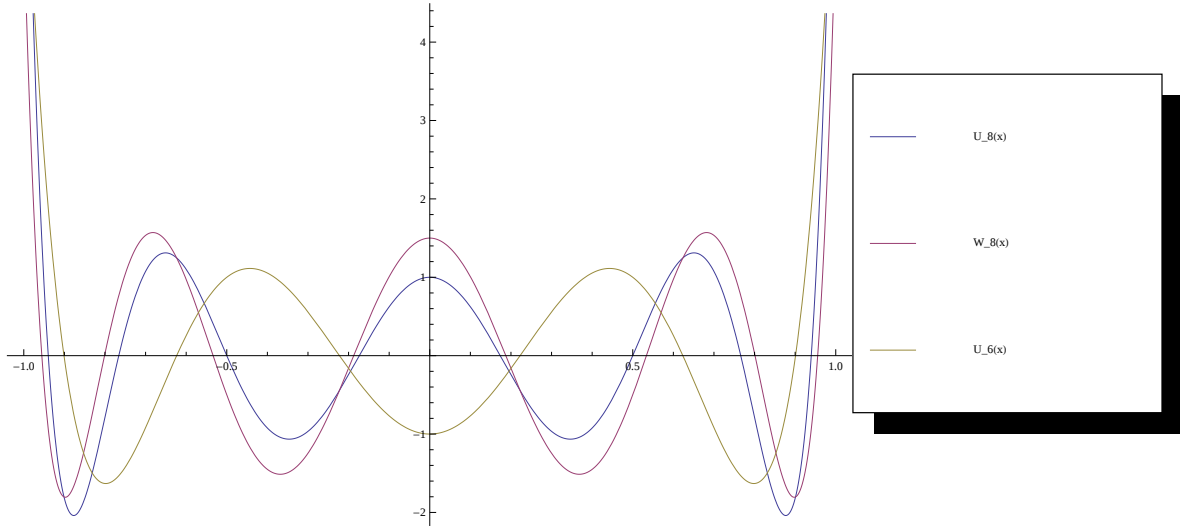


Figura 4.8: Gráficos dos polinômios $U_8(x)$, $W_8^{(1/2)} = U_8(x) - \frac{1}{2}U_6(x)$ e $U_6(x)$.

Exemplo 21 *Sejam $U_9(x)$, $W_9^{(1.7)} = U_9(x) + 0.7U_7(x)$ e $U_7(x)$. Pelo item b) do Lema 6, $x_{7,r} < \xi_r^{(1.7)} < x_{9,r}$, $r = 1, \dots, 3$. Observe a figura.*

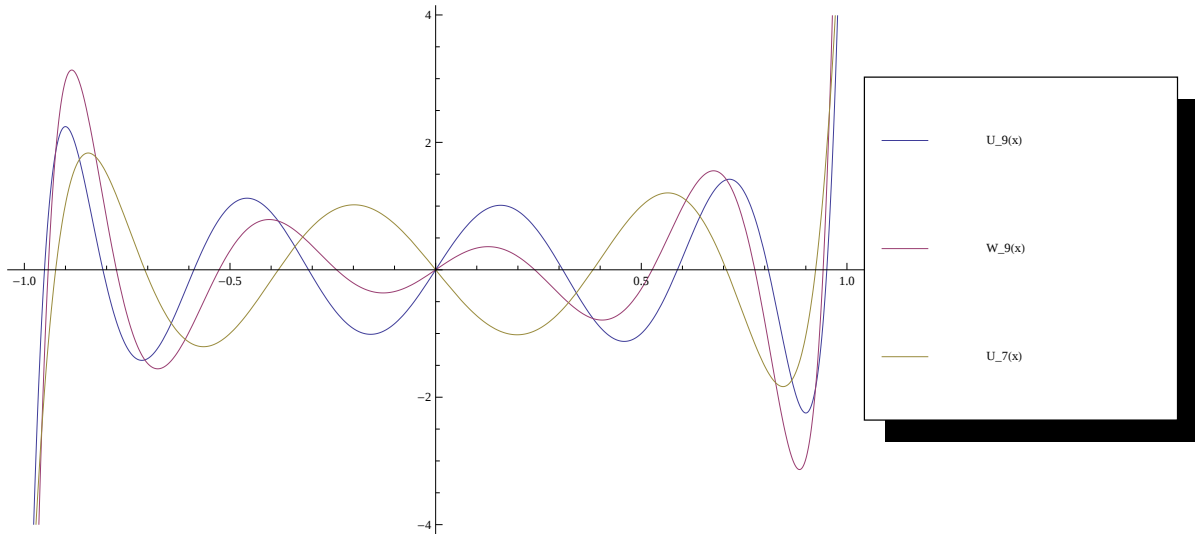


Figura 4.9: Gráficos dos polinômios $U_9(x)$, $W_9^{(1.7)} = U_9(x) + 0.7U_7(x)$ e $U_7(x)$.

O próximo resultado pode ser visto de forma geral em [6].

Lema 7 *Todo zero positivo $\xi_r^{(\lambda)}$, de $W_n^{(\lambda)}(x)$ para $r = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, é uma função crescente de $1 - \lambda$ (função decrescente de λ).*

Demonstração: Sejam $\epsilon \geq 0$ e

$$W_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(x) = U_n(x) - (1 - \lambda + \epsilon)U_{n-2}(x),$$

tal que seus zeros são representados por $\xi_1^{(\lambda)}(\epsilon) > \xi_2^{(\lambda)}(\epsilon) > \dots > \xi_n^{(\lambda)}(\epsilon)$. Note que $\xi_r^{(\lambda)} = \xi_r^{(\lambda)}(0)$ e

$$W_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(x) = W_n^{(\lambda)}(x) - \epsilon U_{n-2}(x).$$

Assim, $W_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(\xi_r^{(\lambda)}) = -\epsilon U_{n-2}(\xi_r^{(\lambda)})$ e então, para $\epsilon > 0$,

$$\text{senal}(W_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(\xi_r^{(\lambda)})) = -\text{senal}(U_{n-2}(\xi_r^{(\lambda)})) = (-1)^r$$

devido as propriedades de entrelaçamento. Assim, considerando os zeros reais de $W_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(x)$, tem-se que $\xi_r^{(\lambda)}(0) < \xi_r^{(\lambda)}(\epsilon)$. Portanto, $\xi_r^{(\lambda)}$ é uma função crescente de $1 - \lambda$ e, consequentemente, uma função decrescente de λ .

□

Teorema 29 Para $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ (n par) e $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}$ (n ímpar), os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ são representados por $z_{n,k}^{(\lambda)} = e^{i\theta_{n,r}^{(\lambda)}}$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar), com $\theta_{n,r}^{(\lambda)} = 2 \arccos(\xi_r^{(\lambda)})$, onde $\xi_r^{(\lambda)}$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar), são os zeros positivos de $W_n^{(\lambda)}(x)$. Além disso,

$$0 \leq \theta_{n,1}^{(\lambda)} < \theta_{n,2}^{(\lambda)} < \dots < \theta_{n,\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} \leq \pi,$$

$\theta_{n,\lfloor n/2 \rfloor+1}^{(\lambda)} = \pi$ (quando n é ímpar) e $\theta_{n,r}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ .

Demonstração: Como $\xi_1^{(\lambda)} > \xi_2^{(\lambda)} > \dots > \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)}$ e $\theta_{n,r}^{(\lambda)} = 2 \arccos(\xi_r^{(\lambda)})$ é uma função decrescente no intervalo $[-1, 1]$, segue que

$$0 \leq \theta_{n,1}^{(\lambda)} < \theta_{n,2}^{(\lambda)} < \dots < \theta_{n,\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)} \leq \pi.$$

Quando n é ímpar, $z = -1$ é zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$. Para $z = -1$ tem-se $x(-1) = 0 = \xi_{\lfloor n/2 \rfloor+1}^{(\lambda)}$, logo $\theta_{n,\lfloor n/2 \rfloor+1}^{(\lambda)} = \pi$.

Para $\lambda_j < \lambda_k$, pelo Lema 7 segue que $\xi_r^{(\lambda_j)} \geq \xi_r^{(\lambda_k)}$. Assim, como $\theta_{n,r}^{(\lambda)} = 2 \arccos(\xi_r^{(\lambda)})$ é uma função decrescente no intervalo $[-1, 1]$, tem-se que $\theta_{n,r}^{(\lambda_j)} < \theta_{n,r}^{(\lambda_k)}$. Portanto, para $\lambda_j < \lambda_k$, $\theta_{n,r}^{(\lambda_j)} < \theta_{n,r}^{(\lambda_k)}$. O que mostra que $\theta_{n,r}^{(\lambda)}$ é uma função crescente de λ .

□

Teorema 30 Se $\lambda < -\frac{2}{n-1}$, $n > 1$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, onde $z_k^{(\lambda)} \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$. Além disso, $z_k^{(\lambda)}$ é uma função decrescente de λ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .

Demonstração: Sejam $\epsilon \geq 0$, $\lambda + \epsilon < -\frac{2}{n-1}$, (garantindo a existência de dois zeros positivos) e

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z) = 1 + (\lambda + \epsilon)(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n,$$

onde seus zeros são representados por $z_k^{(\lambda)}(\epsilon)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}(\epsilon)}$. Note que $z_k^{(\lambda)} = z_k^{(\lambda)}(0)$ e

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z) = R_n^{(\lambda)}(z) + \epsilon(z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$$

Assim,

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z_k^{(\lambda)}) = \epsilon(z_k^{(\lambda)} + (z_k^{(\lambda)})^2 + \dots + (z_k^{(\lambda)})^{n-1})$$

e

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right) = \epsilon\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} + \left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right)^{n-1}\right)$$

e então, para $\epsilon > 0$,

$$\text{sinal}(R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z_k^{(\lambda)})) = 1$$

e

$$\text{sinal}\left(R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right)\right) = 1.$$

Assim, $z_k^{(\lambda)}(0) > z_k^{(\lambda)}(\epsilon)$, o que mostra que $z_k^{(\lambda)}$ é uma função decrescente de λ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}(0)} < \frac{1}{z_k^{(\lambda)}(\epsilon)}$, o que mostra que $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .

□

Teorema 31 Se $\lambda > 2$ (quando n é par) e $\lambda > 2 + \frac{2}{n-1}$, $n > 1$ (quando n é ímpar), $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, onde $z_k^{(\lambda)} \in (-1, -\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (-1, 0)$, além disso, $z_k^{(\lambda)}$ é uma função decrescente de λ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .

Demonstração: Sejam $\epsilon \geq 0$, $\lambda + \epsilon > 2$ (n par) e $\lambda + \epsilon > 2 + \frac{2}{n-1}$, (garantindo a existência de dois zeros negativos) e

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z) = 1 + (\lambda + \epsilon)(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n,$$

onde seus zeros são representados por $z_k^{(\lambda)}(\epsilon)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}(\epsilon)}$. Note que $z_k^{(\lambda)} = z_k^{(\lambda)}(0)$ e

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z) = R_n^{(\lambda)}(z) + \epsilon(z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$$

Assim ,

$$R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z_k^{(\lambda)}) = \epsilon(z_k^{(\lambda)} + (z_k^{(\lambda)})^2 + \dots + (z_k^{(\lambda)})^{n-1})$$

e então, para $\epsilon > 0$,

$$\text{sinal}(R_{n,\epsilon}^{(\lambda)}(z_k^{(\lambda)})) = (-1)^{n-1}.$$

Assim, $z_k^{(\lambda)}(0) > z_k^{(\lambda)}(\epsilon)$, o que mostra $z_k^{(\lambda)}$ ser uma função decrescente de λ . Consequentemente, $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .

□

Teorema 32 Se $\lambda > 2 \left(\lambda > 2 + \frac{2}{n-1} \right)$, e n é par (ímpar), os zeros imaginários $\pm \beta_k^{(\lambda)} i$ de $W_n^{(\lambda)}(x)$ são funções crescentes de λ .

Demonstração: Pelo item d) do Lema 5, os zeros imaginários $\pm \beta_k^{(\lambda)} i$ são representados por

$$x(z_k^{(\lambda)}) = \left(\frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}} \right) i = \beta_k^{(\lambda)} i \text{ e } x\left(\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}\right) = - \left(\frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}} \right) i = -\beta_k^{(\lambda)} i,$$

onde $z_k^{(\lambda)}$ é um zero negativo de $R_n^{(\lambda)}(x)$ e $\beta_k^{(\lambda)} = \frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}}$. Observe que $\beta_k^{(\lambda)} = \frac{|z_k^{(\lambda)}| - 1}{2\sqrt{|z_k^{(\lambda)}|}}$ é uma função decrescente de λ no intervalo $(-\infty, 0)$. Assim, pelo Teorema 31, $\lambda_j < \lambda_k$ implica que $z_k^{(\lambda_j)} > z_k^{(\lambda_k)}$ e, consequentemente, $x(z_k^{(\lambda_j)}) < x(z_k^{(\lambda_k)})$. Assim os zeros imaginários $\pm \beta_k^{(\lambda)} i$ de $W_n^{(\lambda)}(x)$ são funções crescente de λ .

□

4.4 Classes especiais

Nesta seção serão apresentados alguns resultados quando λ assume determinados valores, como $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Sabe-se que os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no 1º e 2º quadrantes e são representados por $z_{n,k}^{(\lambda)} = e^{i\theta_{n,r}^{(\lambda)}}$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar), com $\theta_{n,r}^{(\lambda)} = 2 \arccos(\xi_r^{(\lambda)})$, onde $\xi_r^{(\lambda)}$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar), são os zeros positivos de $W_n^{(\lambda)}(x)$.

Se $\lambda = 0$, pela equação (4.6) tem-se que

$$z^{-n/2} R_n^{(0)}(z) = W_n^{(0)}(x) = T_n(x).$$

Pela Observação 2.2, os zeros de $W_n^{(0)}(x)$ são representados por $\xi_r^{(0)} = \cos\left(\frac{(2r-1)\pi}{2n}\right)$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar). Assim, os zeros de $R_n^{(0)}(z)$ são dados por $z_{n,k}^{(0)} = e^{i\theta_{n,r}^{(0)}}$, com

$$\theta_{n,r}^{(0)} = 2 \arccos(\xi_r^{(0)}) = \frac{2(2r-1)\pi}{2n} = \frac{(2r-1)\pi}{n}.$$

Exemplo 22 Observe que os zeros de $R_6^{(0)}(z) = z^6 + 1$, são dados por $z_0 = -0.86 - 0.5i$, $z_1 = -0.86 + 0.5i$, $z_2 = -i$, $z_3 = i$, $z_4 = 0.86 - 0.5i$ e $z_5 = 0.86 + 0.5i$.

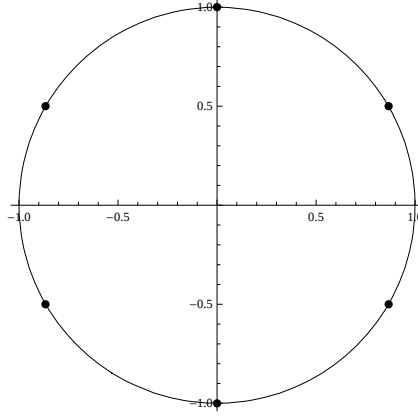


Figura 4.10: Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(0)}(z) = z^6 + 1$.

Se $\lambda = 1$, da equação (4.5) tem-se que

$$z^{-n/2}R_n^{(1)}(z) = W_n^{(1)}(x) = U_n(x).$$

Pela Observação 2.3, os zeros de $W_n^{(1)}(x)$ são representados por $\xi_r^{(1)} = \cos\left(\frac{r\pi}{n+1}\right)$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ (n par) e $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ (n ímpar). Assim, os zeros de $R_n^{(1)}(z)$ são dados por $z_{n,k}^{(1)} = e^{i\theta_{n,r}^{(1)}}$, com

$$\theta_{n,r}^{(1)} = 2 \arccos(\xi_r^{(1)}) = \frac{2r\pi}{n+1}.$$

Exemplo 23 Observe que os zeros de $R_6^{(1)}(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, são dados por $z_0 = -0.9 - 0.43i$, $z_1 = -0.9 + 0.43i$, $z_2 = -0.22 - 0.97i$, $z_3 = -0.22 + 0.97i$, $z_4 = 0.62 - 0.78i$ e $z_5 = 0.62 + 0.78i$.

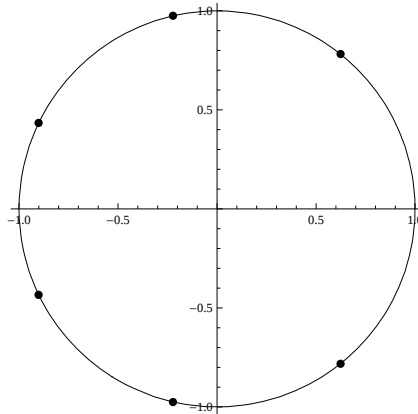


Figura 4.11: Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(1)}(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Se $\lambda = 2$, pela equação (4.6) tem-se que

$$z^{-n/2}R_n^{(2)}(z) = W_n^{(2)}(x) = 2(U_n(x) - T_n(x)).$$

Os zeros de $W_n^{(2)}(x)$ são representados por $\xi_r^{(2)} = \cos\left(\frac{r\pi}{n}\right)$, $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ e $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Assim, os zeros de $R_n^{(2)}(z)$ são dados por $z_{n,k}^{(2)} = e^{i\theta_{n,k}^{(2)}}$, com

$$\theta_{n,r}^{(2)} = 2 \arccos(\xi_r^{(2)}) = \frac{2r\pi}{n}, \quad r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \quad \text{e } \theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \pi.$$

Observe que, se $\lambda = 2$ e n é par, do Lema 4 segue que $z = -1$ é zero de multiplicidade 2 de $R_n^{(\lambda)}(x)$ e, conseqüentemente, $\theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor}^{(2)} = \theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \pi$.

Exemplo 24 Observe os zeros de $R_6^{(2)}(z) = z^6 + 2(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$. Como já foi mencionado $z = -1$, é um zero de multiplicidade 2. Os zeros de $R_6^{(2)}(z)$ são dados por $z_0 = -1$, $z_1 = -1$, $z_2 = -0.5 - 0.86i$, $z_3 = -0.5 + 0.86i$, $z_4 = 0.5 + 0.86i$ e $z_5 = 0.5 - 0.86i$.

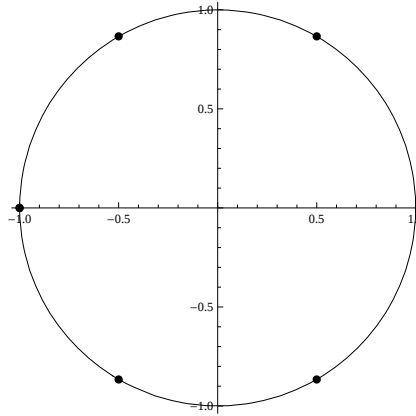


Figura 4.12: Localização dos zeros do polinômio $R_6^{(2)}(z) = z^6 + 2(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z) + 1$.

4.5 Zeros de $S_n^{(\lambda)}(z)$

O comportamento dos zeros do polinômio auto-recíproco real

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^n s_{n,k}^{(\lambda)} z^k, \quad \text{com } s_{n,0}^{(\lambda)} = s_{n,n}^{(\lambda)} = 1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad s_{n, n/2}^{(\lambda)} = \frac{n}{2}\lambda, \quad \text{se } n \text{ é par.} \end{aligned}$$

foi objeto de estudo por Kim e Park em [12], como já foi mencionado na introdução deste capítulo. O resultado que se encontra em [12] é o seguinte:

Teorema 33 *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio auto-recíproco real, onde n é ímpar e $a_k = 1 + k\lambda$, $k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, com $a_0 = a_n = 1$. Então tem-se o seguinte:*

- a) Se $\lambda < -\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, então $P(z)$ tem $(2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$ zeros em $|z| = 1$ e um zero em $(0, 1)$;
- b) Se $\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < \lambda \leq 2$, então $P(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| = 1$;
- c) Se $2 < \lambda < 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par, então $P(z)$ tem todos seus zeros em $|z| = 1$;
- d) Se $\lambda = 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par, então $P(z)$ tem todos seus zeros em $|z| = 1$;
- e) Se $\lambda > 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, então $P(z)$ tem $(2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$ zeros em $|z| = 1$.

Note que Kim e Park em [12] analisaram os zeros desta classe somente quando n é ímpar. Com base nisto, será estendido o resultado para a validade de grau n par. Além disso, serão provados os casos que foram deixados em aberto pelos autores em [12] quando, $2 < \lambda < 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é ímpar, $\lambda = -\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ e $\lambda = 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é ímpar.

Observe ainda a facilidade da demonstração quando comparado à demonstração de [12], pois os autores de tal artigo além de considerar somente quando n é ímpar, analisam condições para λ em cinco casos e com uma demonstração extensa e cansativa. Aqui será ampliado para o caso em que n é par e analisados todos os casos possíveis para λ com mais eficiência e tornando a demonstração mais “suave”, como segue.

Teorema 34 *Os zeros do polinômio*

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^n s_{n,k}^{(\lambda)} z^k$$

com $s_{n,0}^{(\lambda)} = s_{n,n}^{(\lambda)} = 1$ e

$$\begin{aligned} s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \quad \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ s_{n,k}^{(\lambda)} &= 1 + k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad s_{n,n/2}^{(\lambda)} = \frac{n}{2}\lambda, \quad \text{se } n \text{ é par,} \end{aligned}$$

estão no círculo unitário se, e somente se,

i) $-\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \lambda \leq 2$, se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é ímpar;

ii) $-\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par. Além disso,

1) Se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)$, $S_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k} \in (0, 1)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

2) Se $\lambda \in (2, +\infty)$ $\left(\lambda \in \left(2 + \frac{2}{n/2}, +\infty\right)\right)$ e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é ímpar ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ par), $S_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k} \in (-1, 0)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

Demonstração: Note que, se n é par,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \left(\frac{z^{n/2+1} - 1}{z - 1} \right) R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z) = R_{n/2-1}^{(1)}(z) R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z).$$

Assim, serão analisados os zeros de $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ e $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$. Pelo Teorema 28 tem-se que os zeros de $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ estão localizados no círculo unitário e são dados por

$$z_{n/2-1,r}^{(1)} = e^{i\theta_{n/2-1,r}^{(1)}},$$

onde $\theta_{n/2-1,r}^{(1)} = \frac{4r\pi}{n}$, $r = 1, \dots, \frac{n/2-1}{2} = \frac{n-2}{4}$ se $\frac{n}{2} - 1$ é par, e $r = 1, \dots, \frac{n/2-1}{2} + 1 = \frac{n+2}{4}$, se $\frac{n}{2} - 1$ é ímpar, onde $0 \leq \theta_{n/2-1,r}^{(1)} \leq \pi$ (considerando apenas os zeros no 1º e 2º quadrantes, os outros zeros são os complexos conjugados). Neste caso, os zeros são fixos, pois não depende de λ .

Pelo Teorema 28, os zeros de $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário quando

$$-\frac{2}{n/2} \leq \lambda \leq 2, \quad \text{se } \frac{n}{2} \text{ é ímpar,}$$

$$-\frac{2}{n/2} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n/2}, \quad \text{se } \frac{n}{2} \text{ é par.}$$

Além disso, se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{n/2}\right)$, $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k} \in (0, 1)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário. Do mesmo modo, se $\lambda \in (2, +\infty)$ $\left(\frac{n}{2} \text{ ímpar}\right)$ e $\lambda \in \left(2 + \frac{2}{n/2}, +\infty\right)$ $\left(\frac{n}{2} \text{ par}\right)$, $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k} \in (-1, 0)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

No caso em que n é ímpar,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \left(\frac{z^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - 1}{z - 1} \right) R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z) = R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z).$$

Assim, serão analisados os zeros de $R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)$ e $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$. Pelo Teorema 28 tem-se que os zeros de $R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)$ estão localizados no círculo unitário e são dados por

$$z_{\lfloor n/2 \rfloor - 1, r}^{(1)} = e^{i\theta_{\lfloor n/2 \rfloor - 1, r}^{(1)}},$$

onde $\theta_{\lfloor n/2 \rfloor - 1, r}^{(1)} = \frac{2r\pi}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, $r = 1, \dots, \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2}$ se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par, e $r = 1, \dots, \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} + 1$, se $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é ímpar, onde $0 \leq \theta_{\lfloor n/2 \rfloor - 1, r}^{(1)} \leq \pi$ (considerando apenas os zeros no 1º e 2º quadrantes, os outros zeros são os complexos conjugados). Neste caso, os zeros são fixos, pois não depende de λ .

Pelo Teorema 28 os zeros de $R_{[n/2]+1}^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário quando

$$-\frac{2}{[n/2]} \leq \lambda \leq 2 \text{ se } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ é ímpar,}$$

$$-\frac{2}{[n/2]} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{[n/2]} \text{ se } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ é par.}$$

Além disso, se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{[n/2]}\right)$, $R_{[n/2]+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k} \in (0, 1)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário. Do mesmo modo, se $\lambda \in (2, +\infty)$ ($\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ímpar) e $\lambda \in \left(2 + \frac{2}{[n/2]}, +\infty\right)$ ($\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ par), $R_{[n/2]+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k} \in (-1, 0)$ e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

□

Exemplo 25 Considere o polinômio

$S_6^{(\lambda)}(z) = z^6 + (1 + \lambda)z^5 + (1 + 2\lambda)z^4 + 3\lambda z^3 + (1 + 2\lambda)z^2 + (1 + \lambda)z + 1$. Pelo Teorema 34, segue que os zeros de $S_6^{(\lambda)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$ se, e somente se, $-\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 2$. A Figura 4.13 ilustra a localização dos zeros de $S_6^{(1)}(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^3 + 2z^2 + 2z + 1$ que são $z_0 = -0.8 - 0.58i$, $z_1 = -0.8 + 0.58i$, $z_2 = -0.5 - 0.86i$, $z_3 = -0.5 + 0.86i$, $z_4 = 0.3 - 0.95i$ e $z_5 = 0.3 + 0.95i$. Note que os zeros de $S_6^{(1)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$, pois para $\lambda = 1$ a condição do Teorema 34 é satisfeita. Já no caso da Figura 4.14, pode-se observar que nem todos os zeros de $S_6^{(-1)}(z) = z^6 - z^4 - 3z^3 - z^2 + 1$ encontram-se em $|z| = 1$, pois a condição estabelecida através do Teorema 34 não é satisfeita, visto que $\lambda = -1$. De fato, os zeros de $S_6^{(-1)}(z)$ são $z'_0 = -0.65 - 0.75i$, $z'_1 = -0.65 + 0.75i$, $z'_2 = -0.5 - 0.86i$, $z'_3 = -0.5 + 0.86i$, $z'_4 = 0.58$ e $z'_5 = 1.71$.

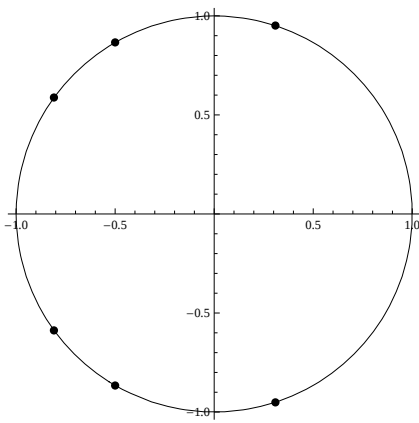


Figura 4.13: Localização dos zeros do polinômio $S_6^{(1)}(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^3 + 2z^2 + 2z + 1$.

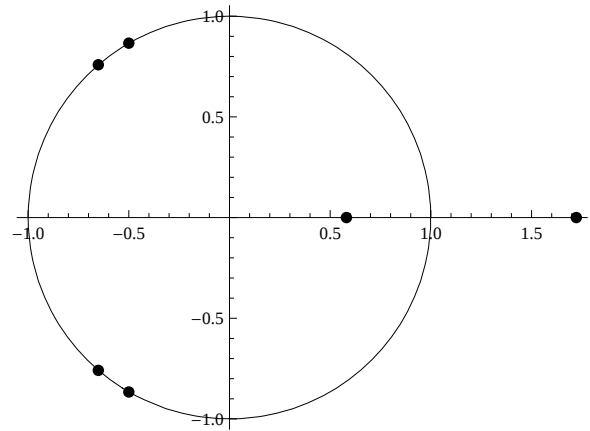


Figura 4.14: Localização dos zeros do polinômio $S_6^{(-1)}(z) = z^6 - z^4 - 3z^3 - z^2 + 1$.

Exemplo 26 *Seja o polinômio*

$S_5^{(\lambda)}(z) = z^5 + (1 + \lambda)z^4 + (1 + 2\lambda)z^3 + (1 + 2\lambda)z^2 + (1 + \lambda)z + 1$. *Através do Teorema 34, segue que os zeros de $S_5^{(\lambda)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$ se, e somente se, $-1 \leq \lambda \leq 1$. A Figura 4.15 mostra a localização dos zeros de $S_5^{(1)}(z) = z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, que são dados por $z_0 = -1$, $z_1 = -0.5 - 0.86i$, $z_2 = -0.5 + 0.86i$, $z_3 = i$ e $z_4 = i$. É fácil ver que os zeros de $S_5^{(1)}(z)$ encontram-se em $|z| = 1$, pois para $\lambda = 1$ a condição do Teorema 34 é satisfeita. Já no caso da Figura 4.16, pode-se notar que nem todos os zeros de $S_5^{(3.5)}(z) = z^5 + 4.5z^4 + 8z^3 + 8z^2 + 4.5z + 1$ encontram-se em $|z| = 1$, pois a condição estabelecida através do Teorema 34 não é satisfeita, quando $\lambda = 3.5$. De fato, $z'_0 = -2$, $z'_1 = -1$, $z'_2 = -0.5$, $z'_3 = -0.5 - 0.86i$ e $z'_4 = -0.5 + 0.86i$.*

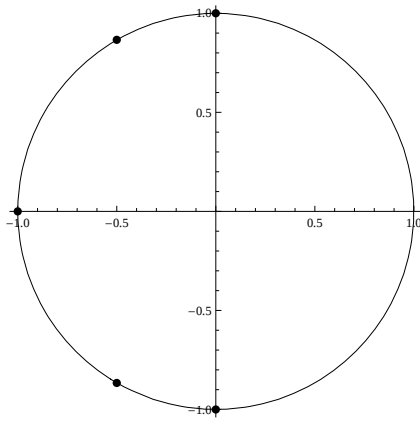


Figura 4.15: Localização dos zeros do polinômio $S_5^{(1)}(z) = z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.

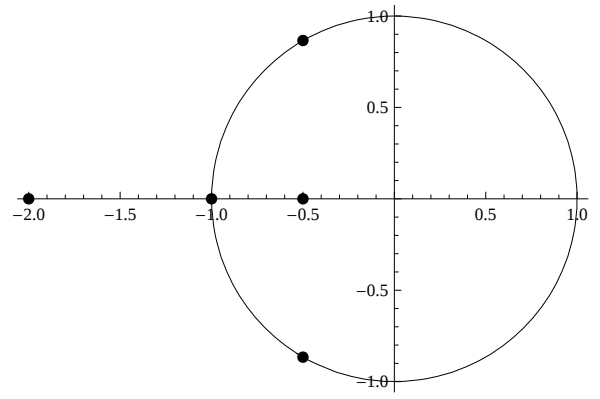


Figura 4.16: Localização dos zeros do polinômio $S_5^{(3.5)}(z) = z^5 + 4.5z^4 + 8z^3 + 8z^2 + 4.5z + 1$.

Como consequência do Lema 4 e o Teorema 34 tem-se os seguintes resultados.

Corolário 1 *Considerando o polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, $n \geq 3$ com n ímpar, tem-se que:*

a) *Se $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é ímpar,*

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)A_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{(1)}(z)R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z);$$

b) *Se $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é ímpar e $\lambda = 2$,*

$$S_n^{(2)}(z) = (z + 1)A_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{(1)}(z)(z + 1)^2 A_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{(1)}(z) = (z + 1)^3 \left(A_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{(1)}(z) \right)^2;$$

c) *Se $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é par,*

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)A_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(\lambda)}(z);$$

d) *Se $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é par e $\lambda = 2$,*

$$S_n^{(2)}(z) = (z + 1)R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)A_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(2)}(z) = (z + 1) \left(R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) \right)^2;$$

e) Se $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é par e $\lambda = 2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$,

$$S_n^{(2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor})}(z) = (z + 1)^3 R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) C_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}(z).$$

Corolário 2 Considerando o polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, $n \geq 2$ com n par, tem-se que:

a) Se $\frac{n}{2}$ é par,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z + 2)^2 A_{n/2-2}^{(1)}(z) A_{n/2}^{(\lambda)}(z);$$

b) se $\frac{n}{2}$ é par e $\lambda = 2 + \frac{2}{n/2}$,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)^4 A_{n/2-2}^{(1)}(z) C_{n/2-2}(z);$$

c) Se $\frac{n}{2}$ é ímpar e $\lambda = 2$,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)^2 R_{n/2-1}^{(1)}(z) A_{n/2-1}^{(1)}(z).$$

Corolário 3 Considerando o polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, $n \geq 2$ com $\lambda = -\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$, tem-se que:

a) Se n é par,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z - 1)^2 R_{n/2-1}^{(1)}(z) B_{n/2-1}(z);$$

b) Se n é ímpar,

$$S_n^{(\lambda)}(z) = (z - 1)^2 R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) B_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}(z).$$

Considerações Finais

Neste trabalho foram estudados vários resultados sobre a localização dos zeros de polinômios. No Capítulo 2 foram vistos resultados de forma geral sobre os zeros de um polinômio, muito interessantes, visto que quanto maior o grau do polinômio maior a dificuldade de controlar o comportamento dos seus zeros. Em seguida foram estudadas propriedades dos polinômios *self-inversive*, utilizadas posteriormente na análise dos zeros de polinômios auto-recíprocos. No capítulo final foram estudadas duas classes de polinômios auto-recíprocos reais $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $S_n^{(\lambda)}(z)$, onde foram apresentadas condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de ambos os polinômios estejam no círculo unitário.

Nesta dissertação foram obtidos novos resultados, como por exemplo, o Lema 5 e os Teoremas 29, 30, 31, 32 e 34. Vale destacar que o Teorema 29 é um novo resultado que mostra no mínimo $n-2$ zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ percorrendo o círculo unitário de modo que o argumento de cada zero esteja ordenado conforme a perturbação do parâmetro λ .

O Teorema 34 é um novo resultado que trata do comportamento dos zeros do polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, sendo que o estudo deste polinômio realizado pelos autores em [12] era somente para grau ímpar e neste teorema foi estendido para grau par e provado os casos em aberto deixados neste artigo.

Convém destacar que está sendo elaborado um artigo com alguns resultados apresentados no Capítulo 4, com o objetivo de publica-los em uma importante revista internacional da área de Matemática.

Os polinômios auto-recíprocos reais têm atraído muito o olhar de matemáticos pela maneira em que seus zeros se comportam, por isso as investigações destas classes tendem muito a crescer.

Referências

- [1] N. Anderson; B. Saff; R. S. Varga. On the Enerström-Kakeya theorem and its sharpness. *Linear Algebra Appl.*, 28:5–16, 1979.
- [2] E. X. L. Andrade; C. F. Bracciali; F. R. Rafaeli. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, São Carlos, 2012.
- [3] G. G. Bastos. *Resolução de Equações Algébricas por Radicais*. Disponível em: [http : //www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf](http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf) >, Acesso em Abril de 2014.
- [4] V. Botta; L. F. Marques; M. Meneguetto. Palindromic and perturbed polynomials: zeros location. *Acta Math. Hungar*, 143(1):81–87, 2014.
- [5] C. B. Boyer. *História da Matemática*. Edgard Blücher, 1974.
- [6] C. F. Bracciali, D. K. Dimitrov, A. Sri Ranga. Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 143:95–106, 2002.
- [7] T. S. Chihara. On quasi-orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8(4):765–767, 1957.
- [8] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [9] A. Cohn. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Einem Kreise. *Math. Z.*, 14:110–148, 1922.
- [10] P. Delsarte, Y. Genin. The split levinson algorithm. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, 34:470–478, 1986.
- [11] H. G. Funkhouser. A short account of the history of symmetric functions of roots of equations. *Amer. Math. Monthly*, 37(7):357–365, 1930.
- [12] S-H. Kim, C. W. Park. On the zeros of certain self-reciprocal polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 339:240–247, 2008.
- [13] D. Kwon. Reciprocal polynomials with all but two zeros on the unit circle. *Acta Math. Hungar*, 134(4):472–480, 2011.

- [14] P. Lakatos, L. Losonczy. Polynomials with all zeros on the unit circle. *Acta Math. Hungar*, 134(4):341–356, 2009.
- [15] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. Amer. Math. Soc., Providence, 2^a edition, 1966.
- [16] L. F. Marques. Zeros de Polinômios Perturbados. Master's thesis, FCT-UNESP, Presidente Prudente, 2013.
- [17] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [18] A. C. M. Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [19] T. J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials*. A Wiley-Interscience Publication, 1990.
- [20] J. Schur. Über Potenzreihen, die in Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 147:205–232, 1826.
- [21] J. A. Shohat. On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42(3):461–496, 2005.
- [22] A. P. da Silva, A. Sri Ranga. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros. *Linear Algebra Appl.*, 397:299–324, 2005.
- [23] B. Wendroff. On orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:554–555, 1961.
- [24] A. Zhedanov. On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval. *J. Approx. Theory*, 94:73–106, 1998.