UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCOS VINÍCIUS FERREIRA DA SILVA

Introdução à Estrutura Matemática da Mecânica Quântica

Guaratinguetá
2017

Marcos Vinícius Ferreira da Silva

Introdução à Estrutura Matemática da Mecânica Quântica

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física .

Orientador: Prof^{o} Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá
2017

S586i

Silva, Marcos Vinicius Ferreira da

Introdução à estrutura matemática da mecânica quântica / Marcos Vinicius Ferreira da Silva – Guaratinguetá, 2017.

62 f.: il.

Bibliografia: f. 56

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Teoria quântica. 2. Física matemática. 3. Hilbert, Espaço de.
I. Título.

CDU 530.145

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8 3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCOS VINÍCIUS FERREIRA DA SILVA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "**GRADUANDO EM FÍSICA** "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Prof° Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof° Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG

Prof° Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG

Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti
UNESP-FEG

Dezembro , 2017

“Quanto mais nos elevamos, menores parecemos aos olhos daqueles que não sabem voar.“

(Friedrich Nietzsche)

RESUMO

É comum ver a falta de preocupação no rigor da matemática por parte dos físicos, especialmente no trato da Mecânica Quântica, mas isso pode levar a inconsistências na teoria. Neste trabalho vamos explorar parte desse universo matemático e depois o relacionaremos com a física, mostrando ao leitor a importância do formalismo matemático na física além de discutir alguns casos específicos em mecânica quântica.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica Quântica. Física-Matemática. Espaço de Hilbert.

ABSTRACT

It is common to see the lack of concern in the rigor of mathematics on the part of the physicists, specially in dealling whith quantum mechanics, but this can lead to inconsistency whitin the theory. In this work we explore part of this mathematical universe and then relate it to physics, evincing the importance of the mathematical formalism in physics and also discussing some specific cases in quantum mechanics.

KEYWORDS: Quantum Mechanics. Mathematical physics. Hilbert Space.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\|$	Paralelo a.
$\perp$	Perpendicular a.
$\stackrel{def}{=}$	Define-se que.
$\mathbb{X}$	Espaço métrico (nas figuras).
$\mathbb{R}$	Conjunto dos reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos Complexos.
$d(x,y)$	Distância de x a y.
$B(a;r)$	Bola aberta de raio r e centro a.
$B[a;r]$	Bola fechada de raio r e centro a.
$S(a;r)$	Esfera de raio r e centro a.
$intU$	Interior de U.
∂U	Fronteira de U.
$\mathfrak{O}$	Família de conjuntos abertos.
$\mathfrak{C}$	Família de conjuntos fechados.
$\bar{U}$	Fecho de U.
$supp(f)$	Suporte de uma função f.
f^{-1}	Função inversa de f.
$X \setminus Y$	Conjunto que contém todos os elementos de X que não pertencem a Y.
$ran(f)$	Imagem de f.
$span\,\{u_n\}$	Espaço vetorial finitamente gerado.
$Ref(x)$	Parte real de $f(x)$, onde $f(x) \in \mathbb{C}$.
$\mathfrak{H}$	Espaço de Hilbert.
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$.
$\mathfrak{S}(\mathbb{R})$	Espaço de Schwartz.

$\mathfrak{D}(F)$	Domínio de definição para F.
$\mathfrak{D}_{max}(F)$	Domínio máximo de definição para F.
$F^{\dagger}$	Tomar a transposta e o complexo conjugado $\big((F^T)^*\big)$.
$\mathbb{K}$	Corpo dos reais ou dos complexos (os elementos de $\mathbb{K}$ são escalares).
Sp	Espectro.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Se olharmos somente para física da mecânica quântica vemos que a mesma possui um bom grau de abstração. Existem análogos clássicos relevantes, mas surgem também conceitos novos, como o spin. Além disso, várias noções são bastante contra-intuitivas. Ao se deparar com isso os físicos já tem um grande problema em mãos e este é um possível motivo pelo qual alguns físicos não se atentam ao rigor matemático; esse, quando negligenciado, pode induzir a falácias e contradições na teoria.

Vamos apresentar primeiramente o formalismo matemático, onde são vistos desde conceitos corriqueiros da álgebra até tópicos de análise funcional. Esses temas são na sua grande maioria densos e complexos, mas aqui tomaremos o cuidado de selecionar o que for relevante para a física, sem enfadar o leitor.

Depois de explanarmos bem os vários conceitos matemáticos com o seu devido rigor, vamos apresentar exemplos de possíveis contradições na mecânica quântica e suas respectivas soluções, mostrando ao leitor a importância do rigor matemático.

O trabalho está organizado com segue: no capítulo 1 veremos um ferramental matemático, onde são apresentados os conceitos que dão base para a teoria. Alguns teoremas serão demonstrados, enquanto outros serão apenas descritos. Já no capítulo 2 trataremos dos problemas em mecânica quântica, que ocorrem quando o rigor matemático é negligenciado. Entretanto, ao decorrer do texto introduziremos alguns teoremas matemáticos que são vitais para a compreensão da física nos problemas. Por ultimo uma breve conclusão.

2 CAPÍTULO 1

Este capítulo introdutório serve como base para o trabalho. Aqui vamos discutir vários temas como *análise funcional, espaço de Lebesgue L^p, espaço de Banach e Hilbert e topologia geral*. Esses temas são extensos e complexos, por isso fizermos um resumo de tal modo que não falte nenhum conceito para a compreensão plena dos próximos capítulos.

2.1 ESPAÇO DE BANACH E HILBERT

2.1.1 Aquecimento: espaços métricos e topológicos.

Uma *métrica* em um conjunto X é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y e $z \in X$:

(i) $d(x, y) \geq 0$, (não negatividade);

(ii) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ (se (ii) não for garantida, d é pseudo-métrica);

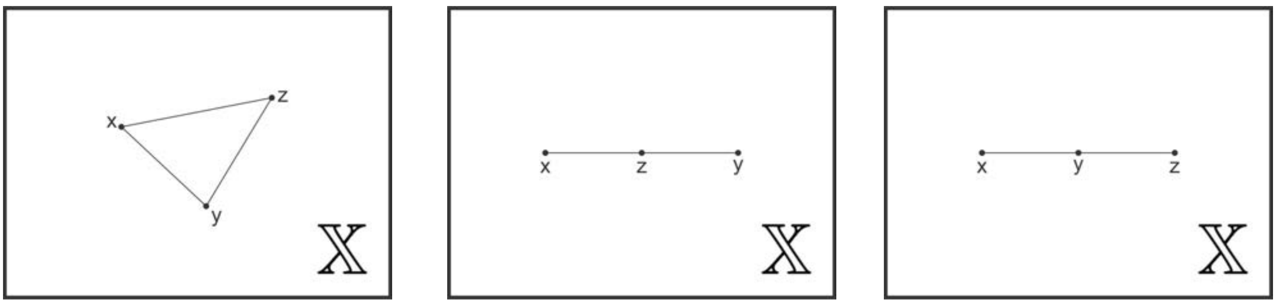
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$, (simetria);

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (desigualdade triangular).

A desigualdade triangular tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Figura 1 – Desigualdade triangular.

(a) $d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)$ (b) $d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)$ (c) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$



fonte: (LIMA, 2013).

Semelhantemente, temos que para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{1}$$

se $a + b \geq 0$ então $a + b = |a + b| \leq |a| + |b|$, ou se $a + b \leq 0$ então $-(a + b) = |a + b| \leq |a| + |b|$. Logo:

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z) \tag{2}$$

e

$$||x-y|-|z-y|| \leq |x-z|. \tag{3}$$

A inequação acima é demonstrada facilmente aplicado a propriedade (1) na equação $(x-z) = (x-y)+(y-z)$.

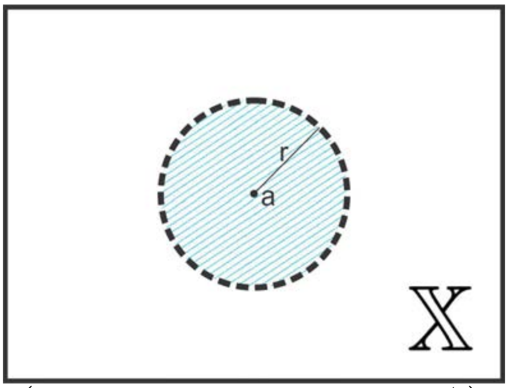
Definição: Um *espaço métrico* é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

Exemplo. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ junto com $d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$ é um espaço métrico e do mesmo modo $\mathbb{C}^n$ junto com $d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|^2\right]^{1/2}$ também é.

Definição: *Bola aberta* é o conjunto aberto de centro a e raio r e representado por

$$B(a;r) = \{a, x \in X \mid d(x,a) < r\}. \tag{4}$$

Figura 2 – Bola aberta.



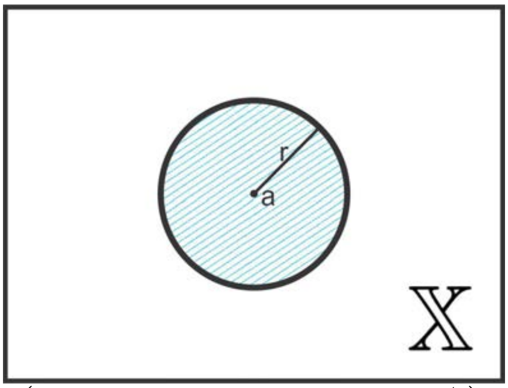
$\left(X = \mathbb{R}^2, d = \left[\sum_{k=1}^{2}(x_k - y_k)^2\right]^{1/2}\right)$

fonte: Produção do próprio autor.

Definição: *Bola fechada* é o conjunto fechado de centro a e raio r e representado por

$$B[a;r] = \{a, x \in X \mid d(x,a) \leq r\}. \tag{5}$$

Figura 3 – Bola fechada.



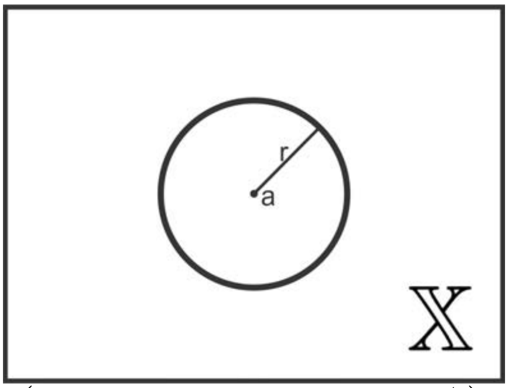
$\left(X = \mathbb{R}^2, d = \left[\sum_{k=1}^{2}(x_k - y_k)^2\right]^{1/2}\right)$

fonte: Produção do próprio autor.

Definição: *Esfera* é o conjunto formado pelos pontos de $x \in X$ tais que $d(x,a) = r$, onde r é o raio e a o centro, de modo que a representamos por

$$S(a;r) = \{a, x \in X \mid d(x,a) = r\}. \tag{6}$$

Figura 4 – Esfera.

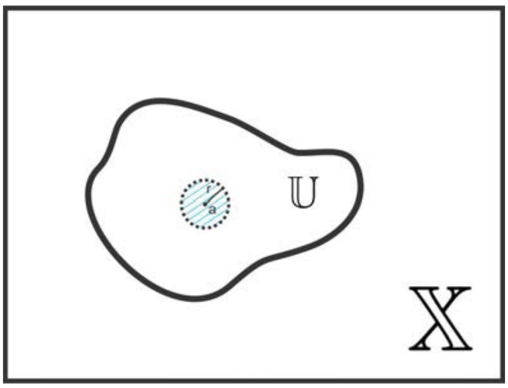


$\left(X = \mathbb{R}^2, d = \left[\sum_{k=1}^{2}(x_k - y_k)^2\right]^{1/2}\right)$
fonte: Produção do próprio autor.

Definição: Se U é subconjunto de um espaço métrico X, um ponto $x \in U$ é chamado *Ponto interior* de U se existir $r > 0$ tal que

$$B(a;r) \subset U. \tag{7}$$

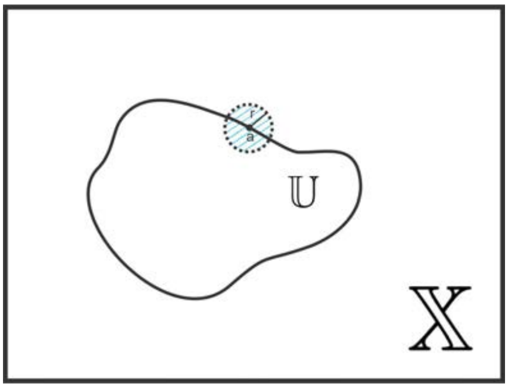
Figura 5 – Ponto interior.



$a \in int\, U$.
fonte: Produção do próprio autor.

Definição: Seja U um subconjunto de um espaço métrico X. Um ponto $a \in X$ é chamado ponto de *Ponto de fronteira* de U se para todo $r > 0$, a bola $B(a;r)$ contiver alguma parte de U e também algum ponto de $X - U$. Ao conjunto de todos os pontos de fronteira de U chamamos de *fronteira* de U e denotamos por ∂U.

Figura 6 – Ponto de fronteira.



$a \in \partial U$.
fonte: Produção do próprio autor.

Definição: Quando $\{x\}$ é um conjunto aberto em X dizemos que x é um *Ponto isolado*. Se todo $x \in X$ é isolado, X é dito discreto.

Um conjunto composto apenas de pontos interiores é chamado de *aberto*. A família de conjuntos abertos $\mathfrak{O}$ satisfaz as propriedades:

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{O}$. (O conjunto vazio e o espaço inteiro são abertos.)

(ii) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ implica $O_1 \bigcap O_2 \in \mathfrak{O}$. (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

(iii) $\{O_\alpha\} \subseteq \mathfrak{O}$ implica $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathfrak{O}$. (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

Em geral, um espaço X em conjunto com uma família de conjuntos $\mathfrak{O}$, os conjuntos abertos, satisfazem (i) e (iii) e são chamados de *espaço topológico*.

Definição: Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção $\mathfrak{O}$ de subconjuntos de X, chamados os *abertos* da topologia.

Exemplo. Observe que diferentes métricas podem dar origem à mesma topologia. Por exemplo, em $\Re^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) podemos comparar algumas distâncias $\left(\tilde{d}(x,y), \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{d}(x,y)\right)$ com a distância euclidiana $d(x,y)$.

$$\tilde{d}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| . \tag{8}$$

Então [1]

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| . \tag{9}$$

[1] Demonstração na apêndice A.

Também temos que $B_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(x) \subseteq \tilde{B}_r(x) \subseteq B_r(x)$, em que B, $\tilde{B}$ são bolas abertas calculadas usando $d, \tilde{d}$, respectivamente.

Exemplo. Sempre que realizamos a substituição da métrica $d(x, y)$ pela métrica delimitada

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \tag{10}$$

a topologia não se altera, pois uma família de bolas abertas não muda, ou seja

$$B_\delta(x) = \tilde{B}_{\frac{\delta}{1+\delta}}(x). \tag{11}$$

Todo subespaço Y de um espaço topológico X torna-se um espaço topológico e chamamos de $O \subseteq Y$ aberto se houver algum conjunto aberto $\tilde{O} \subseteq X$ tal que $O = \tilde{O} \subseteq X$. Esta topologia natural $\mathfrak{O} \subseteq Y$ é conhecida como *topologia relativa* (também *subespaço*, *traço* ou *topologia induzida*).

Exemplo. O conjunto $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ não é aberto na topologia de $X = \mathbb{R}$, mas é aberto na topologia relativa quando consideramos o subconjunto $X = [-1, 1]$.

Uma família de conjuntos abertos $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{O}$ é chamado de *base* para a topologia, se para cada x e cada vizinhança $U(x)$ existir algum conjunto $O \in \mathfrak{B}$ com $x \in O \subseteq U(x)$. Uma vez que o conjunto aberto O é vizinhança de cada um de pontos, podemos escrever como $O = \bigcup_{O \supseteq \in \tilde{O} \in \mathfrak{B}} \tilde{O}$ e nós temos o seguinte lema.

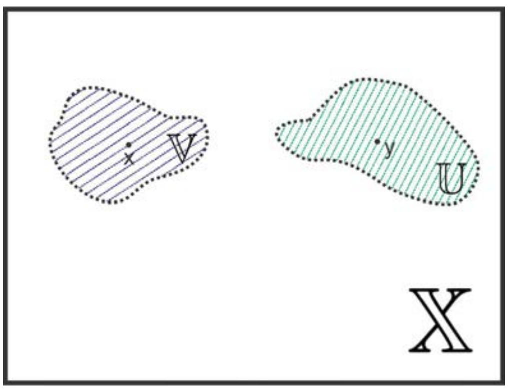
Lema 2.1.1. *Se $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{O}$ for uma base para a topologia, então cada conjunto aberto pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathfrak{B}$.*

Se existir uma base contável, então X é chamado de *segundo contável*.

Exemplo. Por construção, as bolas abertas $B_{\frac{1}{n}}(x)$ são base para a topologia em um espaço métrico. No caso de $\mathbb{R}^n$ (assim com $\mathbb{C}^n$) basta tomar bolas com centro $a \in \mathbb{Q}$ e portanto, $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) é segundo contável.

Definição: Um espaço topológico X é chamado de *espaço de Hausdorff* se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$ existir um conjunto aberto U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Figura 7 – Espaço de Hausdorff.



$x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
fonte: Produção do próprio autor.

Definição: Um espaço topológico X é *metrizável* se existir uma métrica em X que define a topologia de X.
Todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff como mostra a preposição abaixo.

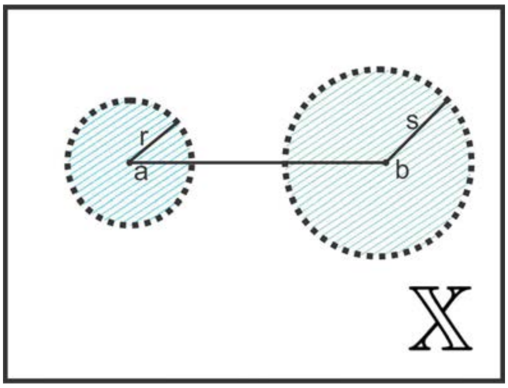
Proposição 2.1.2. *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico X, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $s + r \leq d(a, b)$. Então as bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Se existisse algum ponto $x \in B(a; r) \cap B(b; s)$, teríamos $d(a; x) < r$ e $d(b; x) < s$. Daí

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s \leq d(a, b), \tag{12}$$

um absurdo.

Figura 8 – Espaço metrizável.



fonte: (LIMA, 2013).

□

A topologia pseudo-métrica não será Hausdorff. O outro extremo é a *topologia caótica* (*trivial*), onde apenas $\emptyset$ e X são tomados como abertos. Logo se X tem mais de um elemento, a topologia caótica não é espaço de Hausdorff.

O complemento de um conjunto aberto é chamado de conjunto fechado. Isso decorre das regras de Morgan, onde uma família de conjuntos fechados $\mathfrak{C}$ tem que satisfazer

(i) $\emptyset$, $X \in \mathfrak{C}$. (O conjunto vazio e o espaço inteiro são fechados.)

(ii) $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$ implica $C_1 \cup C_2 \in \mathfrak{C}$. (A união de conjuntos fechados é um conjunto fechado.)

(iii) $\{C_\alpha\} \subseteq \mathfrak{C}$ implica $\bigcap_\alpha C_\alpha \in \mathfrak{C}$. (A interseção de uma família qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.)

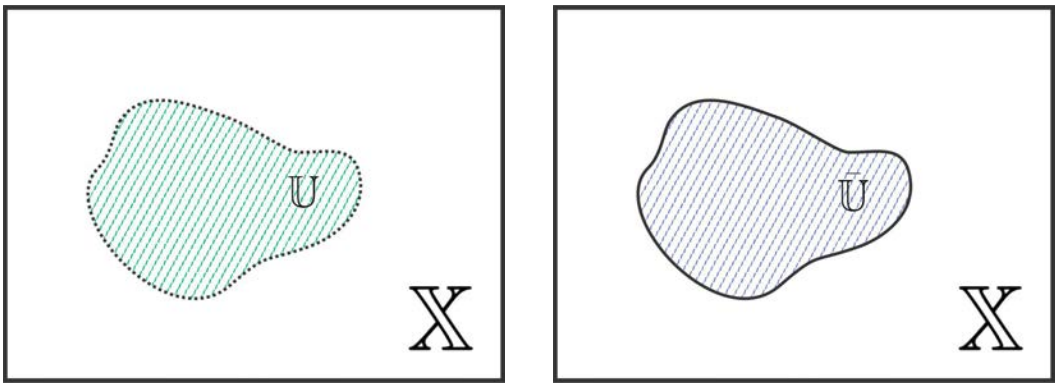
Definição: Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto U de um espaço métrico X quando $d(a, U) = 0$. Isto significa que existem pontos arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.

Exemplo. Todo ponto $a \in U$ é aderente a U. Além disso, os pontos da fronteira ∂U também são aderentes a U.

Definição: O *fecho* (ou *aderência*) é um conjunto fechado representado por $\bar{U}$, onde este é composto pelos pontos de X que são aderentes a U.

Figura 9 – Exemplo de fecho.

(a) $U \in \mathfrak{O}$. (b) $\bar{U} = U \cup \partial U, \bar{U} \in \mathfrak{C}$.



fonte: Produção do próprio autor.

Não é difícil ver que o fecho satisfaz os seguintes axiomas (axiomas de Kuratowski para fecho):

(i) $\bar{\emptyset} = \emptyset$. (O fecho do conjunto vazio é ele mesmo.)

(ii) $\bar{V} \subset V$. (Um conjunto qualquer está contido em seu fecho.)

(iii) $\bar{\bar{V}} \subset \bar{V}$. (O fecho de um conjunto fechado é igual a ele mesmo ou o fecho do fecho de um conjunto qualquer é igual ao seu fecho.)

(iv) $\overline{U \cup V} = \bar{U} \cup \bar{V}$. (O fecho da união é igual a união dos fechos.)

De fato, pode-se mostrar que eles podem ser usados de forma equivalentes para definir a topologia, observando que os conjuntos fechados satisfazem $\bar{V} = V$. Dado $V \subset X$, tem-se $\bar{V} = V$ se, e somente se, $X - V$ é aberto.

Lema 2.1.3. *Seja X um espaço topológico. Então, o interior de U é o conjunto de todos os pontos interiores de U e o fecho de U é a união de U com todos os pontos da fronteira de U.*

Exemplo: A bola fechada

$$B\,[a; r] = \{a, x \in X \mid d(x, a) \leq r\},$$

é um conjunto fechado. Mas, em geral temos apenas

$$\overline{B\,(a; r)} \subseteq B\,[a; r]\,, \tag{13}$$

uma vez que um ponto isolado y com $d(x, y) = r$ não será um ponto limite. Em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) naturalmente teremos a igualdade.

Uma sequência $(x_n^\infty) \subseteq X$ *converge* para algum ponto $x \in X$ se $d(x, x_n) \to 0$. Nós escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ com de costume nesse caso. Claramente, o limite é único se existir (se isso não é verdade, chamamos de pseudo-métrica).

Definição: Toda sequência convergente é uma *sequência de Cauchy*; isto é, para cada $\epsilon > 0$ há algum $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon; n, m \geq N. \tag{14}$$

Se o inverso também é verdadeiro, isto é, se cada sequência de Cauchy tiver um limite, então o espaço X é chamado de *completo*.

Exemplo: Tanto $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{C}^n$ são espaços métricos completos.

Observe que em um espaço métrico, x é um ponto limite de U se, e somente se, para cada sequência convergente o limite estiver em U. Em particular, temos o seguinte lema.

Lema 2.1.4. *Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é novamente um espaço métrico completo.*

Note que a convergência pode também ser equivalentemente formulada em termos topológico: uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para cada vizinhança de U de x existir algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq N$. Em um espaço Hausdorff, o limite é único.

Definição: Um conjunto U é chamado *denso* se o seu fecho é todo de X, ou seja, se $U = X$. Em um espaço métrico é chamado *separável* se ele contém um conjunto denso contável.

Lema 2.1.5. *Um espaço métrico é separável se, e somente se, é um espaço topológico segundo-contável.*

Demonstração. De cada conjunto denso obtemos uma base contável considerando bolas abertas com raios racionais e centros no conjunto denso. Por outro lado, a partir de cada base contável obtemos um conjunto denso escolhendo um elemento de de cada de cada elemento da base. □

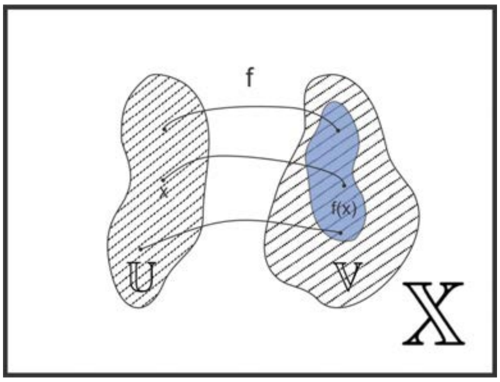
Lema 2.1.6. *Seja X um espaço métrico separável. Todo subconjunto Y de X é novamente separável.*

Demonstração. Seja $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto denso em X, o único problema é que $A \cap Y$ pode não conter elementos. No entanto, alguns elementos de A devem ser ao menos arbitrariamente fechados: Seja $J \subseteq \mathbb{N}^2$ o conjunto de todos os pares (n, m) para o qual $B_{\frac{1}{m}}(x_n) \cap Y \neq \emptyset$ e escolha alguns $y_{n,m} \in B_{\frac{1}{m}}(x_n) \cap Y$ para todos $(n, m) \in J$. Então, $B = \{y_{n,m}\}_{(n,m)\in J} \subseteq Y$ é contável. Para ver que B é denso, escolha $y \in Y$. Depois há uma sequência x_{n_k} com $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{k}$. Portanto, $(n_k, k) \in J$ e $d(y_{(n_k,k)}, y) = d(y_{(n_k,k)}, x_{(n_k)}) + d(x_{(n_k)}, y) \leq \frac{2}{k} \to 0$. □

Em seguida, chegamos a função $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$. Usamos convenções usuais $f(U) = \{f(x)/x \in U\}$ para $U \subseteq X$ e $f^{-1}(v) = \{x/f(x) \in V\}$ para $V \subseteq Y$. O conjunto $Ran(f) = f(X)$ é chamado *imagem* (*ranger*) de f, e X é chamado de *domínio* de f. Uma função f é chamado *injetora* se para cada $y \in Y$ há no máximo um $x \in X$ com $f(x) = y$ (isto é, $f^{-1}(\{x\}$ contém no máximo um ponto) e *sobrejetora* se $Ran(f) = Y$ (se o *contradomínio* é igual a imagem). Uma função f que é tanto injetora quanto sobrejetora é chamada *bijetora*.

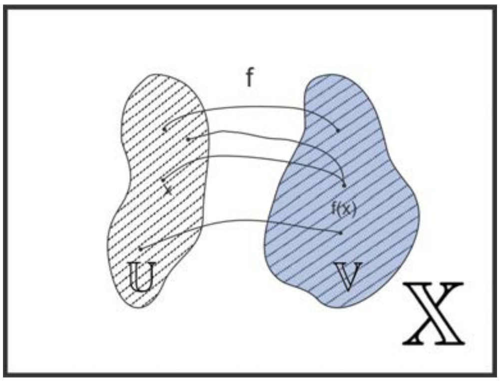
Exemplos: Sejam U e V subespaços de X. Uma função $f : U \to V$, $x \mapsto f(x)$ pode ser representada das seguintes formas

Figura 10 – Injetora.



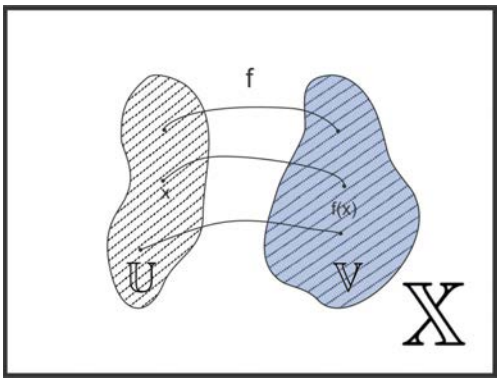
$f : U \to V, f(x) \subset V.$
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 11 – Sobrejetora.



$f : U \to V, f(x) = V.$
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 12 – Bijetora.



$f : U \to V, f(x) = V.$
fonte: Produção do próprio autor.

Definição: Uma função f que opera em U e leva a V é chamada *contínua* em um ponto $x \in U$ se para todo $\epsilon > 0$ podemos encontra $\delta > 0$ tal que

$$d_V\left(f(x), f(y)\right) \leq \epsilon \quad se \quad d_U(x, y) < \delta. \tag{15}$$

Se f é chamado *contínuo* se todos os pontos forem contínuos.

Lema 2.1.7. *Seja X um espaço métrico, os seguintes itens são equivalentes:*
(i) f é contínuo em x.
(ii) $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $x_n \to x$.
(iii) Para cada vizinhança V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) é óbvio.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : se (iii) não se sustenta, existe uma vizinhança V de $f(x)$ de modo que $B_\delta \nsubseteq f^{-1}(V)$ para todo δ. Portanto, podemos escolher um sequência $x_n \in B_{1/n}(x)$ tal que $f(x) \notin f^{-1}(V)$. Assim $x_n \to x$, mas $f(x_n) \nrightarrow f(x)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): faça $V = B_\epsilon(f(x))$ e observe que (iii), $B_\delta \subseteq f_{-1}(V)$ para algum δ. □

O último item implica que f é contínuo se, e somente se, a imagem da inversa de cada conjunto aberto é aberta novamente (de forma equivalente, a imagem da inversa de cada conjunto fechado é fechado). Se a imagem de cada conjunto aberto é aberta, então f é chamado *aberto*. Uma bijeção f é chamada de *homeomorfismo*, se ambos f e seu inverso f^{-1} são contínuos. Observe que se f for bijetiva, então f^{-1} é contínua se, e somente se, f é aberto.

Em um espaço topológico, (iii) é usado como definição de continuidade. No entanto, (ii) e (iii) de modo geral não serão mais equivalentes, a menos que se utilizarem *sequências generalizadas*, onde o conjunto de índice $\mathbb{N}$ é substituído por conjuntos arbitrários.

Definição: O *suporte* de uma função $f : X \to \mathbb{C}^n$ é o fecho de todos os pontos x para os quais $f(x)$ não vai a zero; isso é,

$$supp(f) = \overline{\{x \in X/f(x) \neq 0\}}. \tag{16}$$

Se X e Y são espaços métricos, então $X \times Y$ juntamente com

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2) \tag{17}$$

é um espaço métrico. Um sequência (x_n, y_n) converge para (x, y) se, e somente se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Em particular, a primeira projeção $(x, y) \mapsto x$ e respectivamente a segunda projeção $(x, y) \mapsto y$ são contínuas, logo (x, y) também é. Além disso, se X e Y são completos, o mesmo vale para $X \times Y$.

Em particular, pela desigualdade inversa triangular,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y), \tag{18}$$

vemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é contínuo.

Exemplo. Se considerarmos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nós não conseguimos a distância euclidiana de $\mathbb{R}^2$, a menos que modifiquemos (17) da seguinte forma:

$$\tilde{d}\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_x(x_1, x_2)^2 + d_y(y_1, y_2)^2}. \tag{19}$$

Conforme observado em nosso exemplo anterior (10), a topologia (portanto, tanto a convergência como a continuidade são preservadas) é independente dessa escolha.

Definição: Se X e Y são apenas espaços topológicos, a *topologia produto* é definida chamando $O \subseteq X \times Y$ de aberto se para cada ponto $(x, y) \in O$ houver vizinhanças abertas U de x e V de y de modo que $U \times V \subseteq O$. Em outras palavras, os produtos de conjuntos abertos são a base da topologia produto. No caso dos espaços métricos, isso concorda com a topologia definida pela métrica do produto (17).

Definição: Um *cobertura* de um conjunto $Y \subseteq X$ é uma família de conjuntos $\{U_\alpha\}$ tal que $Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Uma cobertura é chamada aberta se todos U_α são aberto. Qualquer subconjunto $\{U_\alpha\}$ que ainda é cobertura de Y é chamado *subcobertura*.

Lema 2.1.8 (Lindelöf)**.** *Se X é segundo contável, então cada cobertura possui uma subcobertura contável.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta para Y e seja $\mathfrak{B}$ uma base contável. Cada U_α pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathfrak{B}$, ou seja, o conjunto de todos $B \in \mathfrak{B}$ que satisfazem $B \subseteq U_\alpha$ para algum α que de algum modo seja uma cobertura aberta contável para Y. Além disso, para cada B_n neste conjunto podemos encontrar um α_n tal que $B_n \subseteq U_{\alpha_n}$. Por construção podemos dizer que $\{U_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura contável. □

Definição: Um subconjunto $K \subset X$ é chamado de *compacto* se cada cobertura aberta tiver um subcobertura finita. Um conjunto é chamado de *relativamente compacto* se o seu fecho for compacto.

Lema 2.1.9. *Um espaço topológico é compacto se, e somente se, possuir a* ***propriedade de interseção finita*** *; a interseção de uma família de conjuntos fechados está vazia se, e somente se, a interseção de alguma subfamília finita estiver vazia.*

Demonstração. Ao tomar o complemento, para cada família de conjuntos abertos, há uma família correspondente de conjuntos fechados e vive-versa. Além disso, os conjuntos abertos são uma cobertura se, e somente se, os conjuntos fechados correspondentes tiverem uma interseção vazia. □

Lema 2.1.10. *Seja X um espaço topológico.*

(i) A imagem contínua de um conjunto compacto é compacta.

(ii) Todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.

(iii) Se X é Hausdorff, todos os conjuntos compactos são fechados.

(iv) O produto de muitos conjuntos compacto é compacto.

(v) A união finita de conjuntos compactos é novamente compacta.

(vi) Se X é Hausdorff, qualquer interseção de conjuntos compactos é novamente compacto.

Demonstração. (i) Observe que se $\{O_\alpha\}$ é uma cobertura aberta para $f(Y)$, então $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ é também uma cobertura para Y.

(ii) Seja Y um subconjunto de X, podemos por construção escolher uma cobertura aberta $\{O_\alpha\}$ para Y. Como $Y \subset X$ fica óbvio que quaisquer $O_\alpha \subset X$; sendo assim, podemos dizer que $\tilde{O} = (X - Y) \cup \{O_\alpha\}$ onde $\tilde{O}$ é uma cobertura aberta para X. Claramente, não exite nenhum ponto $y \in Y$

que pertença a $X \setminus Y$, então obrigatoriamente $Y \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$, o que nos prova a compacidade de Y e consequentemente a de X.

(iii) Seja $Y \subseteq X$ compacto, mostramos que $X \setminus Y$ é aberto. Fixando $x \in X \setminus Y$ (se $Y = X$, não há nada a se fazer). Pela definição de Hausdorff, para cada $y \in Y$ há vizinhanças disjuntos $V(y)$ de y e $U_y(x)$ de x. Por compacidade de Y, existem $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ tais que $V(y_i)$ é uma cobertura para Y. Mas $U(x) = \bigcap_{j=1}^n U_{y_j}(x)$ é vizinhança de x que não se intersecta com Y.

(iv) Seja $\{O_\alpha\}$ uma cobertura aberta $X \times Y$. Para cada $(x, y) \in X \times Y$ há algum $\alpha(x, y)$ tal que $(x, y) \in O_{\alpha(x,y)}$. Pela definição da topologia produto, há algum retângulo aberto $U(x, y) \times V(x, y) \subseteq O_{\alpha(x,y)}$. Por isso, para x fixo $\{V(x, y)\}_{y \in Y}$ é uma cobertura aberta de Y. Portanto, há muitos pontos $y_k(x)$ tais que $V(x, y_k(x))$ é uma cobertura para Y. Seja $U(x) = \bigcap_k U(x, y_k(x))$, uma vez que a interseção finita de conjuntos abertos são abertas, $\{U(x)\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta e há muitos pontos finitos x_j tal que $U(x_j)$ é cobertura de X. Por construção, o $U(x_j) \times V(x_j, y_k(x_j)) \subseteq O_{\alpha(x_j, y_k(x_j))}$ cobertura de $X \times Y$.

(v) Observe que uma cobertura da união é uma cobertura para conjunto individual e a união das subcobertura individuais é a cobertura que estamos procurando.

(vi) Segue de (ii) e (iii) uma vez que uma interseção de conjuntos fechados é fechada. □

Lema 2.1.11. *Sejam X e Y espaços topológicos com X compacto e Y Hausdorff. Então, cada bijeção contínua $f : X \to Y$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta mostrar que f mapeia conjuntos fechados para conjuntos fechados. Por (ii) cada conjunto fechado é compacto, por (i) sua imagem também é compacta e por (iii) também é fechada. □

Definição: Um subconjunto $K \subset X$ é chamado *sequencialmente compacto* se cada sequência de K tiver uma subsequência convergente. Em um espaço métrico, compacto e sequencialmente compacto são equivalentes.

Lema 2.1.12. *Seja X um espaço métrico. Então, um subconjunto é compacto se, e somente se, ele for sequencialmente compacto.*

Demonstração. Suponha que X seja compacto e que x_n seja uma sequência que não tem nenhum subsequência convergente. Então $K = \{x_n\}$ não tem pontos limites e portanto é compacto pelo lema 2.1.10 (ii). Para cada n existe uma bola $B_{\epsilon_n}(x_n)$ que contém apenas muitos elementos finitos de K. No entanto, o bastante para cobertura K uma contradição.

Por outro lado, suponha que X seja sequencialmente compacto e seja $\{O_\alpha\}$ uma cobertura aberta que não tenha subcobertura finita. Para cada $x \in X$ podemos escolher alguns $\alpha(x)$ tais que se $B_r(x)$ é a bola maior contida em $O_{\alpha(x)}$, então qualquer $r \geq 1$ ou se não, existe um β com $B_{2r}(x) \subset O_\beta$. Agora escolha uma sequência x_n tal que $x_n \notin \bigcup_{m<n} O_{\alpha(x_m)}$ e observe que, pela construção, a distância $d = d(x_m, x_n)$ para cada sucessor de x_m é maior do que 1 ou que a bola $B_{2d}(x_m)$ não se encaixa em nenhum dos O_α.

Agora, seja y o limite de alguma sequência convergente e fixe algum $r \in (0, 1)$ tal que $B_r(y) \subseteq O_{\alpha(y)}$. Então, esta subsequência deve estar em $B_{r/5}(y)$, mas isso é impossível, pois se $d = d(x_{n_1}, x_{n_2})$

é a distância entre dois elementos consecutivos desta subsequência, então $B_{2d}(x_{n_1})$ não pode caber em $O_{\alpha(y)}$ por construção, enquanto que por outro lado $B_{2d}(x_{n_1}) \subseteq B_{\frac{4r}{5}}(a) \subseteq O_{\alpha(y)}$. □

Definição: Em um espaço métrico, um conjunto é chamado *delimitado* se estiver contido dentro de uma bola. Observe que os conjuntos compactos são sempre limitados, pois as sequências de Cauchy são delimitadas, especialmente em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) que o inverso também é válido (se um conjunto é limitado ele será também compacto).

Teorema 2.1.13 (Heine-Borel)**.** *Em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) um conjunto é compacto se, e somente se, for delimitado e fechado.*

Demonstração. Pelo lema 2.1.10 (ii) e (iii) temos o suficiente para mostrar que o intervalo fechado em $I \subseteq \mathbb{R}$ é compacto. Além disso, o lema 2.1.12 é o suficiente para mostrar que todas as sequências em $I = [a, b]$ têm uma subsequência convergente. Seja x_n a nossa sequência, podemos dividi-la em $I = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Então, pelo menos um desses dois intervalos pode ser nomeado de I_1, que contém infinitamente muitos elementos de nossa sequência. Seja $y_1 = x_{n_1}$ o primeiro e subdividindo I_1 e escolhendo $y_2 = x_{n_2}$, com $n_2 > n_1$ como antes; fazendo assim, obtemos uma sequência de Cauchy y_n (note que por construção $I_{n+1} \subseteq I_n$ e por isso $|y_n + y_m| \leq \frac{b-a}{n}$ para $m \geq n$). Pelo lema 2.1.12 isso equivale ao próximo teorema. □

Teorema 2.1.14 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Todo subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) tem pelo menos um ponto extremo.*

Demonstração. Este teorema é combinação do teorema 2.1.13 com o lema 2.1.10 (i) e com isso obtemos o *Teorema do valor extremo*. □

Teorema 2.1.15 (Weierstraß)**.** *Seja X compacto. Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ atinge seu máximo e mínimo.*

Definição: Um espaço métrico para qual o teorema 2.1.13 (Heine-Borel) é válido é chamado de *apropriado* (*proper*). O lema 2.1.10 (ii) mostra que X é apropriado se, e somente se, cada bola fechada for compacta. Observe que um espaço métrico adequado deve ser compacto (Uma vez que as sequências de Cauchy são delimitadas). Um espaço topológico é chamado de *localmente compacto* se para cada ponto tiver uma vizinhança compacta. Claramente, um espaço métrico apropriado é localmente compacto.

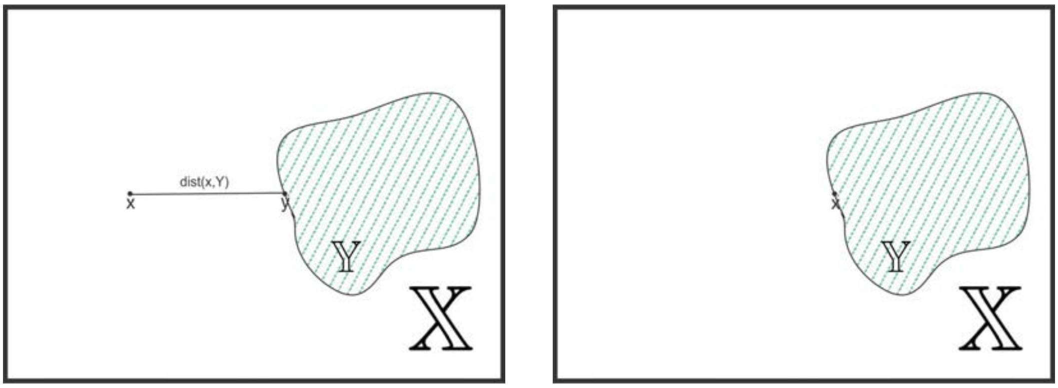
Definição: A *distância* entre um ponto $x \in X$ e um subconjunto $Y \subseteq X$ é

$$|dist(x, Y)| = \inf_{y \in Y} d(x, y). \tag{20}$$

Note que x é um ponto limite de Y se, e somente se, $dist(x, Y) = 0$. Na figura 13 veremos uma representação pictórica do conceito de distância não nula (a) e nula (b).

Figura 13 – Distância do ponto x ao conjunto Y.

(a) $dist(x, Y) \neq 0$. (b) $dist(x, Y) = 0$.

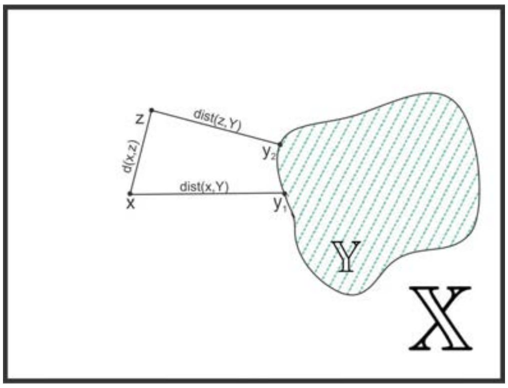


fonte: Produção do próprio autor.

Lema 2.1.16. *Seja X um espaço métrico e Y ($Y \neq \{\emptyset\}$) um subconjunto, dados dois pontos x e y, temos*

$$|dist(x, Y) - dist(z, Y)| \leq d(x, z). \tag{21}$$

Figura 14 – Comparação das distâncias de dois pontos ao conjunto.



$y_1, y_2 \in Y$ e $x, z \in X$.
fonte: Produção do próprio autor.

Demonstração. Se $|dist(x, Y) - dist(z, Y)| \leq d(x, z)$ é válido, ou seja, $Y \neq \{\emptyset\}$ e $x \mapsto dist(x, Y)$, $z \mapsto dist(z, Y)$ são contínuos, então podemos reescrever o módulo da seguinte forma $-d(x, z) \leq dist(x, Y) - dist(z, Y) \leq d(x, z)$. Temos também que para $y \in Y$, $dist(x, Y) \leq dist(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, logo: $dist(x, Y) - d(x, z) \leq d(z, y)$. Como a desigualdade vale para todo $y \in Y$, obtemos $dist(x, Y) - dist(x, z) \leq d(x, z) + d(z, Y)$ que equivale a $dist(x, Y) - dist(z, Y) \leq d(x, z)$. $\square$

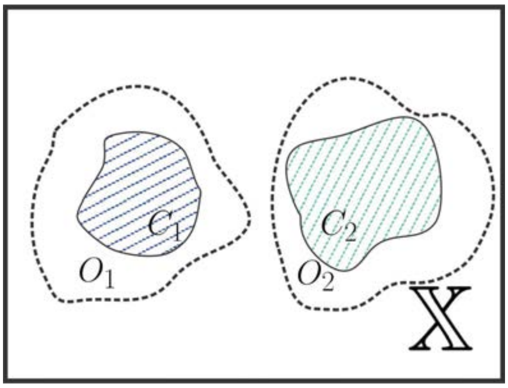
Lema 2.1.17 (Urysohn)**.** *Suponha que C_1 e C_2 sejam subconjuntos fechados e disjuntos de um espaço métrico X. Então, há uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ de modo que f é zero em C_2 e um em C_1.*

Se X for localmente compacto e C_1 também for compacto, pode-se escolher f com suporte compacto.

Demonstração. Para provar a primeira asserção, defina $f(x) = \frac{dist(x,C_2)}{dist(x,C_1)+dist(x,C_2)}$. Já para a segunda, observe que existe um conjunto aberto O tal que $\bar{O}$ é compacto e $C_1 \subset O \subset \bar{O} \subset X \setminus C_2$. De fato, para cada $x \in C_1$, há uma bola $B_\epsilon(x)$ tal que $\overline{B_\epsilon(x)}$ é compacto e $\overline{B_\epsilon(x)} \subset X \setminus C_2$. Como $x \in C_1$ é compacto, então um número finito deles cobrem C_1 e podemos escolher a união dessas bolas para ser O. Por fim, substitua C_2 por $X \setminus O$. $\square$

Note que o lema de Urysohn implica que um espaço métrico seja *normal*; isto é, para quaisquer dois conjuntos fechados e disjuntos C_1 e C_2, existem conjuntos abertos e disjuntos O_1 e O_2 tais que $C_j \subset O_j$, $j = 1, 2$.

Figura 15 – Espaço métrico normal.



$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ e $C_1, C_2 \in X$.
fonte: Produção do próprio autor.

Lema 2.1.18. *Seja X um espaço métrico localmente compacto, suponha que K é compacto e que $\{O_j\}_{j=1}^n$ é uma cobertura aberta. Então, temos uma* ***partição da unidade*** *para K subordinada a esta cobertura; isto é, existem funções contínuas $h_j : X \to [0,1]$ tais que h_j tem suporte compacto contido em O_j e*

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(x) \leq 1, \tag{22}$$

com igualdade para $x \in K$.

Demonstração. Para todo $x \in X$ há algum ϵ e algum j tais que $\overline{B_\epsilon}(x) \subseteq O_j$. Seja K_j a união das bolas que estão dentro de O_j. O lema de Urysohn garante que há funções contínuas $g_j : X \to [0,1]$ tais que $g_j = 1$ em K_j e $g_j = 0$ em $X \setminus O_j$. Agora defina

$$h_j(x) = g_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - g_k). \tag{23}$$

Então $h_j : X \to [0,1]$ tem suporte compacto no O_j e

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - g_j(x)), \tag{24}$$

mostra que a soma é uma para $x \in K$, uma vez que $x \in K_j$ para alguns j implica $g_j(x) = 1$ e faz com que o produto vá a zero. $\square$

2.1.2 Funções contínuas no espaço de Banach.

Estamos interessados em investigar o conjunto de funções contínuas $C(I)$ em um intervalo compacto $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, onde as funções podem assumir um valor complexo. Isso é necessário, pois em mecânica quântica as funções podem pertencer aos $\mathbb{C}$, mas apesar disso a norma (que $\in \mathbb{R}$) é fundamental para a interpretação física dos problemas.

Uma maneira de declarar uma distância bem conhecida é a chamada *norma uniforme* ou *norma do supremo* que é definida por

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)| = \lim_{p\to\infty} \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} . \tag{25}$$

Definição: Um espaço vetorial equipado com uma norma é chamado de *espaço vetorial normado*. Uma norma $\|.\|$ tem que satisfazer as seguintes propriedades:

(i) $\|f\| > 0$ para $f \neq 0$ (positividade),

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in X$ (homogeneidade positiva),

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ para todo $f, g \in X$ (desigualdade triangular).

Definição: Se a propriedade (i) é substituída por $\|f\| \geq 0$ nos requisitos, então $\|.\|$ é chamada de *semi-norma*.

Corolário 2.1.19. *A partir da desigualdade triangular obtemos a* ***desigualdade triangular inversa***[2]

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\| . \tag{26}$$

Demonstração. $\|f\| = \|(f - g) + g\| \leq \|f - g\| + \|g\|$, então $\|f - g\| \geq \|f\| - \|g\|$ e portanto $\|f - g\| = \|g - f\| \geq \|g\| - \|f\|$. Se $\|g\| - \|f\|$ atingir o seu valor máximo, ou seja, $\|g - f\| = \|g\| - \|f\|$ podemos inferir que $\|g - f\| \geq |\|g\| - \|f\||$. Como o caso majorante (igualdade) já foi provado, fica óbvio que valerá para os outros (desigualdade). $\square$

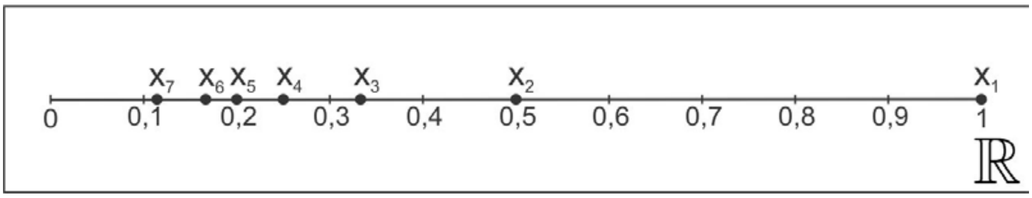
Definição: Uma vez que temos uma norma, temos também uma *distância* $d(f, g) = \|f - g\|$. Portanto, sabemos quando uma sequência de vetores f_n *converge* para um vetor f. Nós vamos escrever $f_n \to f$ ou $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, como de costume nesse caso. Além disso, um mapeamento $F : X \to Y$ entre dois espaços normados é chamado *contínuo* se $f_n \to f$ implica $F(f_n) \to F(f)$. Na verdade, a norma, adição de vetores e multiplicação por escalar são mapeamentos contínuos.

Definição: Se uma sequência x_n é convergente, então para índices m e n grandes, a distância entre os termos x_n e x_m é pequena. Ou seja, os termos desta sequência se aproximam uns dos outros e convergem para um ponto x do espaço. Esta propriedade é conhecida como a *propriedade de Cauchy*.

Exemplo. Na reta dos reais ($\mathbb{R}$) munida com a métrica usual, podemos considerar a sequência $x_n = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in \mathbb{R}^+$. Observe que para n grande os pontos x_n e x_{n+1} são bem próximos.

[2] Demonstração análoga a sugerida para à equação (3).

Figura 16 – Sequência de pontos na reta.



$x_n \in [0,1]$.
fonte: Produção do próprio autor.

Logo, podemos concluir que existe um limite dado por $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, como mostra a próxima figura.
Definição: Seja X um espaço métrico, uma dada sequência x_n é chamada de *sequência de Cauchy* se existir uma distância $d(x_n, x_m) < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é uma margem válida para uma ordem $N \leq n, m$.
Definição: Um espaço vetorial normado e completo em relação à métrica induzida por norma é chamado de *espaço de Banach*.

Proposição 2.1.20. *Todo subespaço fechado de Banach é novamente de Banach.*

Demonstração. Suponha um subespaço Y que seja fechado em X, onde X é um espaço de Banach. Se tomarmos uma sequência de Cauchy $(x_n)_n \subset Y$, sabemos que $(x_n)_n$ também é uma sequência de Cauchy em X. Portanto $(x_n)_n$ converge para algum $x \in X$. Logo $x \in \bar{Y}$ e como Y é fechado pelo axioma de Kuratowski (iii) (2.1.1), temos que $x \in Y$.

Acabamos de demonstrar que uma sequência de Cauchy em Y fechado converge para Y, logo Y é completo e portanto é espaço de Banach. Agora, se esse subespaço é aberto fica óbvio que Y não é espaço de Banach, pois uma sequência de Cauchy pode convergir para $\partial Y \in X$. Mas, como $\partial Y \notin Y$ fica claro que Y não é completo e tampouco um espaço de Banach. □

Estudamos agora a completude de $C(I)$. A sequência de funções $f_n(x)$ converge para f se, e somente se

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{27}$$

Ou seja, na linguagem de análise funcional, f_n converge uniformemente para f. Agora vejamos o caso em que f_n é apenas uma sequência de Cauchy. Então f_n é claramente uma sequência Cauchy se $n \in \mathbb{N}$ para cada $x \in I$. Em particular, pela completude de $\mathbb{C}$, existe um limite $f(x)$ para cada x. Assim, obtemos uma função limitante $f(x)$. Além disso, permitindo que $m \to \infty$ na inequação abaixo

$$|f_m - f_n| \leq \epsilon \qquad \forall m, n \in N_\epsilon, x \in I, \tag{28}$$

vemos que

$$|f - f_n| \leq \epsilon \qquad \forall n \in N_\epsilon, x \in I; \tag{29}$$

ou seja, $f_n(x)$ converge uniformemente pra $f(x)$. No entanto, até este ponto não sabemos se f está no nosso espaço vetorial $C(I)$, isto é, se ela é contínua. Felizmente, há um resultado bem conhecido da análise funcional que nos diz que o limite uniforme de funções contínuas é novamente contínuo: Fixamos $x \in I$ e $\epsilon > 0$ para mostrar que f é contínuo. Agora, precisamos encontrar um δ tal que

$|x-y|<\delta$ implique $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. Depois, precisamos escolher um n para que $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ e um δ para que $|x-y|<\delta$ implicando $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{3}$. Então $|x-y|<\delta$ implica

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \tag{30}$$

conforme o esperado. Consequentemente $f(x) \in C(I)$ e assim cada sequência de Cauchy em $C(I)$ converge. De forma equivalente temos o teorema abaixo.

Teorema 2.1.21. *$C(I)$ com a norma do supremo é um espaço de Banach.*

Esse resultado é verdadeiro para intervalos arbitrários (compactos). No entanto, se I for ilimitado a delimitação não vem de graça e portanto temos que adicionar isso como um requisito e considerar o conjunto de funções contínuas e limitadas $C_b(I)$.

Em seguida, queremos olhar para bases contáveis. Para este fim, apresentamos algumas definições primeiro.

Definição: O conjunto de todas as combinações lineares finitas de um conjunto de vetores $\{u_n\} \subset X$ é chamada *espaço vetorial finitamente gerado* e denotamos por $span\,\{u_n\}$. Um conjunto de vetores $\{u_n\} \subset X$ é chamado *linearmente independente* se admitir um conjunto gerador finito. Se $\{u_n\}_{n=1}^{N} \subset X$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é contável, podemos descartar todos os elementos que podem ser expressos como combinações lineares dos anteriores para obter um subconjunto de vetores linearmente independentes que tenham o mesmo intervalo (formam o mesmo espaço vetorial).

Definição: Chamaremos um conjunto contável de vetores $\{u_n\}_{n=1}^{N} \subset X$ de *bases de Schauder* se cada elemento $f \in X$ pode ser escrito de forma única com combinação linear contável dos elementos da base, como o demonstrado a baixo:

$$f = \sum_{n=1}^{N} C_n u_n \qquad C_n = C_n(f) \in \mathbb{C}, \tag{31}$$

onde a soma deve ser entendida como um limite se $N=\infty$ (a soma não é obrigada a convergir incondicionalmente). Desde que assumimos os coeficientes $C_n(f)$ para serem univocamente determinados, os vetores são necessariamente linearmente independentes.

Exemplo. O conjunto de vetores δ^n com $\delta^n_n = 1$ e $\delta^n_m = 0$, $n \neq m$ é base de Schauder para o espaço de Banach $l^1(N)$. Faça $a = (a_j)_{j=1} \in l^{\mathbb{N}}$ e defina $a^n = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_j$. Então

$$\|a - a_n\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \to 0 \tag{32}$$

desde que $a^n_j = a_j$ para $1 \leq j \leq n$ e $a^n_j = 0$ para $j > n$. Consequentemente

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta^j \tag{33}$$

e $\{\delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder (linearmente independente).

Definição: Um conjunto cujo intervalo é denso é chamado *total*, se termos um conjunto total contável, também temos um conjunto denso contável (considerando apenas combinações lineares com coeficientes racionais). Um espaço vetorial normado contendo um conjunto denso contável é chamada *separável*.

Exemplo. Toda base de Schauder é total e portanto todo o espaço de Banach com base de Schauder é separável (o inverso não é verdadeiro). Em particular, o espaço de Banach $l^1(\mathbb{N})$ é separável.

Embora não definimos uma base de Schauder para $C(I)$, mostraremos que é separável. Para tanto, precisamos do lema abaixo.

Lema 2.1.22 (Smoothing)**.** *Seja $u_n(x)$ uma sequência de funções não negativas e contínuas em $[-1,1]$ tal que*

$$\int_{|x|\leq 1} u_n(x)dx = 1 \quad e \quad \int_{\delta\leq|x|\leq 1} u_n(x)dx \to 0 \qquad \delta > 0 \tag{34}$$

(Em outras palavras, u_n tem "massa"e se concentra perto de $x = 0$ com $n \to \infty$.)

Então para cada $f \in C[-1/2, 1/2]$ que zera nas extremidades $f(-1/2) = f(1/2) = 0$, nós temos que

$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(y)dy, \tag{35}$$

converge uniformemente para $f(x)$.

Demonstração. Uma vez f é uniformemente contínua para um dado ϵ, podemos encontrar um $\delta < 1/2$ (independente de x) de tal modo que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ sempre que $|x - y| \leq \delta$. Além disso, podemos escolher n tal que $\int_{\delta\leq|y|\leq 1} u_n(y)dy \leq \epsilon$. Agora, abreviando $M = \max_{x\in[-1/2,1/2]}\{1, |f(x)|\}$, note que

$$\left| f(x) - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(x)dy \right| = |f(x)| \left| 1 - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy \right| \leq M\epsilon. \tag{36}$$

Na verdade, busca-se a distância de x para um dos pontos de fronteira $\pm 1/2$ menor que δ e portanto $|f(x)| \leq \epsilon$ ou de outra forma $[-\delta, \delta] \subset [x - 1/2, x + 1/2]$ e a diferença entre a unidade e a integral seja menor que ϵ. Usando isso, temos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)\,|f(y) - f(x)|\,dy + M\epsilon \\
&= \int_{|y|\leq 1/2, |y-x|\leq\delta} u_n(x-y)\,|f(y) - f(x)|\,dy \\
&+ \int_{|y|\leq 1/2, |y-x|\leq\delta} u_n(x-y)\,|f(y) - f(x)|\,dy + M\epsilon \\
&\leq \epsilon + 2M\epsilon + M\epsilon = (1 + 3M)\epsilon,
\end{aligned}$$

dando assim a prova final. □

Note que f_n será tão suave quanto u_n. Além disso, f_n será um polinômio se u_n for. A mesma ideia é usada para aproximar funções não contínuas por suavização (claro que a convergência não será mais uniforme nesse caso).

Agora temos as ferramentas necessárias para estudar o próximo teorema.

Teorema 2.1.23 (Weierstraß). *Seja I um intervalo compacto, então o conjunto de polinômios é denso em $C(I)$.*

Demonstração. Seja $f(x) \in C(I)$ e considerando $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ não há nenhum problema assumir que f vá a zero nos pontos de fronteira. Além disso, sem restrição consideramos apenas $I = [-1/2, 1/2]$.

Agora a asserção segue do Lema 2.1.22 (anterior), usando

$$u_n(x) = \frac{1}{I_n}(1-x^2)^n, \tag{37}$$

onde

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx = \cdots \\ &= \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n+1)}2^{2n+1} = \frac{n!}{1/2(1/2+1)\cdots(1/2+n)}. \end{aligned}$$

□

2.1.3 A geometria dos espaços de Hilbert.

Até então, $C(I)$ parece ter todas as propriedades desejáveis. No entanto, falta definir a ortogonalidade em $C(I)$.

Definição: No espaço euclidiano, dois vetores são chamados *ortogonais* se seu produto escalar vai a zero.

Definição: Suponha que $\mathfrak{H}$ é um espaço vetorial, um mapa $\langle .., .. \rangle : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{C}$ é chamado de *forma sesquilinear* se for conjugado linear no primeiro argumento e linear no segundo, isto é

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1^* \langle f_1, g \rangle + \alpha_2^* \langle f_2, g \rangle, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \tag{38}$$

e

$$\langle f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, g_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, g_2 \rangle, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \tag{39}$$

onde "$*$"denota complexo conjugado.

Uma forma sesquilinear que satisfaça os requisitos

(i) $\langle f, f \rangle > 0$ para $f \neq 0$ (positivo-definida),

(ii) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$ (simetria),

é o chamada *produto interno* ou *produto escalar*. Associado a cada produto escalar há uma norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \tag{40}$$

Definição: O par $(\mathfrak{H}, \langle .., .. \rangle)$ é chamado *espaço com produto interno*. Se $\mathfrak{H}$ é completo (em relação à norma (40)), é chamado de *espaço de Hilbert*.

Exemplo. Claramente $\mathbb{C}^n$ com o produto escalar usual

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j, \tag{41}$$

é um espaço de Hilbert de dimensão finita.

Definição: Um exemplo um pouco mais interessante é o espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$, ou seja o conjunto de todas as sequência de valores complexos

$$\left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}, \tag{42}$$

com o produto escalar

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^* b_j. \tag{43}$$

Definição: Um vetor $f \in \mathfrak{H}$ é chamado de *vetor normalizado* ou *vetor unitário* se $\|f\| = 1$. Dois vetores $f, g \in \mathfrak{H}$ são chamados *ortogonais* ou *perpendiculares* $(f \perp g)$ se $\langle f, g\rangle = 0$ e *paralelos* se um é múltiplo do outro.

Se f e g são ortogonais, temos o *teorema de Pitágoras*:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2, \qquad f \perp g. \tag{44}$$

Demonstração. É bem simples, basta desenvolver $\|f + g\|^2$:

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle, \tag{45}$$

com $f \perp g$ temos

$$\|f + g\|^2 = \langle f, f\rangle + \langle g, g\rangle, \tag{46}$$

e finalmente

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{47}$$

$\square$

Suponha que u seja um vetor unitário, então a projeção de f na direção de u é dado por

$$f_{\parallel} = \langle u, f\rangle u, \tag{48}$$

e $f_{\perp}$ é definido por

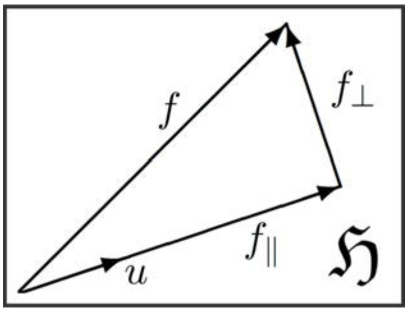
$$f_{\perp} = f - \langle u, f\rangle u. \tag{49}$$

O vetor u é perpendicular a $f_{\perp}$ se

$$\langle u, f_{\perp}\rangle = \langle u, f - \langle u, f\rangle u\rangle = \langle u, f\rangle - \langle u, f\rangle \langle u, u\rangle = 0. \tag{50}$$

Temos a seguir uma representação pictórica desses vetores (no espaço de Hilbert) com suas respectivas relações.

Figura 17 – Vetores no espaço de Hilbert.



fonte: (TESCHL, 2014).

Tomando qualquer outro vetor paralelo a u, obtemos de (44)

$$\|f-\alpha u\|^2 = \left\|f_\perp + (f_\parallel - \alpha u)\right\|^2 = \|f_\perp\|^2 + |\langle u, f\rangle - \alpha|^2\,, \tag{51}$$

e consequentemente $f_\parallel = \langle u, f\rangle\, u$ é o único vetor paralelo a f.

Teorema 2.1.24 (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski)**.** *Seja $\mathfrak{H}_0$ um espaço com produto interno e $g, f \in \mathfrak{H}_0$, então*

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\| + \|g\|\,, \tag{52}$$

vale ressaltar que a igualdade é válida se, e somente se, f e g forem paralelos.

Demonstração. Se os elementos de f e g são paralelos (linearmente dependentes), então há um número real tal que $f = \alpha g$, logo podemos verificar a igualdade

$$\begin{aligned} |\langle f, g\rangle| &= |\langle \alpha g, g\rangle| = |\alpha \langle g, g\rangle| = |\alpha|\, \langle g, g\rangle = |\alpha|\, \sqrt{\langle g, g\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle g, g\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\langle \alpha g, \alpha g\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} \\ &= \|f\|\,\|g\|\,. \end{aligned}$$

Agora se os elementos de f e g forem linearmente independentes, então podemos escolher um $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $f + \beta g \neq \gamma \mathfrak{H}_0$, onde ($\gamma \in \mathbb{R}$) e $\langle f + \beta g, f + \beta g\rangle > 0$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \langle f + \beta g, f + \beta g\rangle &= \langle f, f\rangle + \langle f, \beta g\rangle + \langle \beta g, f\rangle + \langle \beta g, \beta g\rangle \\ &= \langle f, f\rangle + 2\beta Re\,\langle f, g\rangle + \beta^2 \langle g, g\rangle > 0. \end{aligned}$$

A inequação acima é do segundo grau em relação a variável β, mas para resolvê-la precisamos solucionar a e equação abaixo.

$$\langle f, f\rangle + 2\beta Re\,\langle f, g\rangle + \beta^2 \langle g, g\rangle = 0 \tag{53}$$

Pelas condições impostas a β no início, ele não poderá assumir valores reais na igualdade. Portanto as raízes dessa equação são complexas e o discriminante logicamente será negativo:

$$\begin{aligned} 2^2 \langle f, g\rangle^2 - 4\langle g, g\rangle \langle f, f\rangle < 0, \\ \langle f, g\rangle^2 < -4\langle g, g\rangle \langle f, f\rangle, \\ \langle f, g\rangle^2 < \langle g, g\rangle \langle f, f\rangle. \end{aligned}$$

Pelas propriedades do produto interno podemos reorganizar e extrair a raiz de ambos os lados:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle f, g\rangle^2} &< \sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle}, \\ |\langle f, g\rangle| &< \|f\| \, \|g\| . \end{aligned}$$

□

Agora vamos voltar para $C(I)$. Podemos encontrar um produto escalar um produto escalar que tenha a norma do supremo com norma associada? Infelizmente, a resposta é não! A razão é que a norma máxima não satisfaz a lei do paralelogramo. Antes de exemplificar isso, vamos conhecer essa lei, demonstrada no teorema abaixo.

Teorema 2.1.25 (Jordan-von Neumann)**.** *A norma está associada a um produto escalar se, e somente se, a **lei do paralelogramo***

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \tag{54}$$

se mantiver.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle \\ &= \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle + \langle f, f\rangle - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\ &= 2\langle f, f\rangle + 2\langle g, g\rangle \\ &= 2\|f\| + 2\|g\| . \end{aligned}$$

Neste caso, o produto escalar pode ser recuperado de uma norma em virtude da *identidade de polarização*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f-ig\|^2 + i\|f+ig\|^2\right). \tag{55}$$

Se for dado um espaço com produto interno, a veracidade da lei do paralelogramo e da identidade de polarização são diretos. Para mostrar o inverso, nós definimos

$$s(f, g) = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f-ig\|^2 + i\|f+ig\|^2\right). \tag{56}$$

Então $s(f, f) = ||f||^2$ e $s(f, g) = s(g, f)^*$ são fáceis de verificar. Além disso, outro cálculo simples usando a lei do paralelogramo é

$$s(f, g) + s(f, h) = 2s\left(f, \frac{g+h}{2}\right). \tag{57}$$

Agora escolhemos $h = 0$ (e usando $s(f, 0) = 0$) temos que $s(f, g) = 2s\left(f, \frac{g}{2}\right)$ e assim $s(f, g) + s(f, h) = s(f, g+h)$. Além disso, por indução inferimos que $\frac{m}{2^n}s(f, g) = s(f, \frac{m}{2^n}g)$; isso é, $\alpha s(f, g) = s(f, \alpha g)$ para cada α racional positivo. Por continuidade (que resulta de uma desigualdade triangular para $\|.\|$) isso é válido para todos $d > 0$ e $s(f, -g) = -s(f, g)$. Então $s(f, ig) = is(f, g)$. □

Note que a lei do paralelogramo e a identidade de polarização ainda se prendem para formas sesquilineares.

Mas, como vamos definir o produto escalar $C(I)$? Uma possibilidade é

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx. \tag{58}$$

O espaço com produto interno correspondente é indicado por $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$. Note que temos

$$\|f\| \leq \sqrt{|b-a|}\, \|f\|_\infty\,, \tag{59}$$

e portanto, a norma do supremo é mais "forte "do que a norma $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$.

Suponha que temos duas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ em um espaço vetorial X. Então $\|.\|_2$ é mais forte do que $\|.\|_1$ se houver uma constante $m > 0$ de tal modo que

$$\|f\|_1 \leq m\, \|f\|_2\,. \tag{60}$$

Lema 2.1.26. *Se $\|.\|_2$ é mais forte do que $\|.\|_1$, então todo $\|.\|_2$ é uma sequência de Cauchy e consequentemente $\|.\|_1$ também será uma sequência de Cauchy.*

Portanto se uma função $F : X \to Y$ é contínua em $(X, ||.||_2)$, também será densa em $(x, ||.||_1)$.

Em particular, $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$ é separável. Mas, será completo? Infelizmente a resposta é não.

Exemplo. Tome $I = [0, 2]$ e defina

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ 1 + n(x-1), & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \tag{61}$$

Então $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$, mas não existe limite em $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$! Claramente, o limite deve ser a função degrau da qual é 0 para $0 \leq x < 1$ e 1 para $1 \leq x \leq 2$, mas essa função é descontínua!

Teorema 2.1.27. *Se X é um espaço de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Ou seja,* *para quaisquer duas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$, há constantes positivas m_1 e m_2 de tal modo que*

$$\frac{1}{m_2}\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq m_1 \|f\|_1 . \tag{62}$$

Demonstração. Como a equivalência das normas é uma relação de equivalência, nós podemos assumir que $||.||_2$ é a norma habitual euclidiana. Além disso, consideremos uma base ortogonal u_j, onde $1 \leq j \leq n$, de tal modo que

$$\left\|\sum_j \alpha_j u_j\right\|_2^2 = \sum_j |\alpha_j|^2 . \tag{63}$$

Seja $f = \sum_j \alpha_j u_j$, então pela desigualdade triangular e inequação de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|f\|_1 \leq \sum_j |\alpha_j| \, \|u_j\|_1 \leq \sqrt{\sum_j \|u_j\|_1^2}\, \|f\|_2 , \tag{64}$$

e podemos escolher $m_2 = \sqrt{\sum_j \|u_j\|_1}$. □

Em particular, se f_n é convergente em relação a $||.||_2$ consequentemente será também convergente em relação a $||.||_1$. Portanto, $||.||_1$ é contínua em reação a $||.||_2$ e atinge o mínimo $m > 0$ na esfera unitária (que é compacta pelo teorema de Heine-Borel (2.1.13)). Por fim $m_1 = \frac{1}{m}$.

2.2 ESPAÇO DE LEBESGUE

2.2.1 Completude.

Como $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$ não é completo, como podemos obter um espaço de Hilbert a partir dele?

Se X for um espaço normalizado (incompleto), considere o conjunto de todas as sequências de Cauchy $\tilde{X}$. Agora, chame duas sequências de Cauchy equivalentes se suas diferenças convergem para zero e denote por $\bar{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência. É fácil de ver que $\bar{X}$ (e $\tilde{X}$) herada estrutura do espaço vetorial de X.

Lema 2.2.1. *Se x_n é uma sequência de Cauchy, então $||x_n||$ converge.*

Consequentemente, a norma de uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}$ que podemos definir como sendo $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = \lim_{x\to\infty} \|x_n\|$ é independente da classe de equivalência. Portanto $\bar{X}$ é um espaço normado, mas $\tilde{X}$ não é.

Teorema 2.2.2. *Seja $\tilde{X}$ um espaço de Banach que contém X como um subespaço, e X é denso se identificarmos $x \in X$ com a classe de equivalência de todas as sequências convergem para x.*

Demonstração. Resta mostrar que $\bar{X}$ é completo. Seja $\xi_n = \left[(x_{n,j})_{j=1}^\infty\right]$ uma sequência de Cauchy em $\bar{X}$. Então não é difícil ver que $\xi = \left[(x_{j,j})_{j=1}^\infty\right]$ é o seu limite. □

Observe que a conclusão $\bar{X}$ é única. Mais precisamente, todos os outros espaços completos que contém X com um subconjunto denso são isomórficos a $\bar{X}$. Isso, por exemplo, pode ser visto ao se mostrar que o mapa identidade em X possui uma extensão única para $\bar{X}$. Em particular, não há nenhuma restrição que impeça assumir que um espaço vetorial normado ou um espaço com produto interno seja completo. No entanto em, $\mathfrak{L}^2_{cont}(I)$ é um pouco inconveniente trabalhar com classes de equivalência de sequências de Cauchy e, portanto, daremos uma caracterização diferente usando a *integral de Lesbesgue* mais tarde.

2.2.2 Espaço de Lebesgue $\mathfrak{L}^p$.

Seja um espaço de medidas[3] (X, Σ, μ) e $1 \leq p < \infty$, temos $\mathfrak{L}^p(\mu) = Q : X \to \mathbb{K}$ tais que

$$\left(\int_X |Q|^p \, d\mu \right) < \infty. \tag{65}$$

Dado $\mathfrak{L}^p(\mu)$ podemos definir o conjunto de todas as funções mensuráveis X em $\mathbb{K}$ tais que

$$\|Q\|_p \overset{def}{=} \left(\int_X |Q|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{66}$$

Perguntamos então, $\|.\|_p$ é uma norma completa em $\mathfrak{L}^p(\mu)$?
Para responder essa pergunta temos que verificar os axiomas da norma (2.1.2).
(i) Se tivermos $Q(x) = 0$ para μ-quase todo $x \in X$, então

$$\left(\int_X |Q|^p \, d\mu \right), \quad \text{logo}, \quad \|Q\|_p = 0. \tag{67}$$

Por exemplo uma função no intervalo $[0, 1]$, onde tem apenas um ponto diferente de zero, mas esse ponto é irrelevante perante a integração e consequentemente a sua integral é zero!
(ii) $\|\lambda Q\|_p = \left[\int |\lambda Q|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[|\lambda|^p \int |Q|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left[\int |Q|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|Q\|_p$.
(iii) $\|Q + \Psi\|_p \leq \|Q\|_p + \|\Psi\|_p$. (Minkowski).
Como o axioma (i) não se verifica, temos que resolver esse problema. Consideramos em $\mathfrak{L}^p(\mu)$ a seguinte relação

$$\Psi_1 \sim \Psi_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} (Q_1 - Q_2)(x) = 0 \qquad \text{para } \mu\text{-quase todo} \quad x \tag{68}$$

(i) $\sim$ é uma relação de equivalência.
(ii) $\Psi_1 \sim \Psi_2$ e $Q_1 \sim Q_2 \Rightarrow \Psi_1 + \Psi_2 \sim Q_1 + Q_2$
(iii) $Q_1 \sim Q_2 \Rightarrow \lambda Q_1 \sim \lambda Q_2$, onde $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sendo assim, podemos definir um espaço quociente onde o axioma (i) (2.1.2) se verifica. Faremos isso com mais detalhes na próxima seção.

2.2.3 Espaço de Lebesgue L^p.

Representamos por $L^p(\mu)$ o espaço quociente $\mathfrak{L}^p(\mu)/\sim$. Os elementos de $L^p(\mu)$ são os classes de equivalência $[Q]$ para relações $\sim$. Sendo assim, $L^p(\mu)$ é um espaço vetorial e são válidos as seguintes

[3] Vide Apêndice A

propriedades:
(i) $[Q]+[\Psi] \stackrel{def}{=} [Q+\Psi]$.
(ii) $\lambda[Q] \stackrel{def}{=} [\lambda Q]$.
Além disso, definimos

$$\|[Q]\|_p \stackrel{def}{=} \left(\int_X |Q|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{69}$$

Estamos interessados em verificar a completude de alguns espaços métricos para aplicações na física (especificamente mecânica quântica), mas para isso precisamos de alguns teoremas.

Teorema 2.2.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p,q>1$ tais que $1/p+1/q=1$ e (X,Σ,μ) um espaço de medida. Se $f \in L^p(X,\Sigma,\mu)$, $g \in L^q(X,\Sigma,\mu)$ e $fg \in L^1(X,\Sigma,\mu)$, então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{70}$$

Teorema 2.2.4 (Minkowski)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e (X,Σ,μ) um espaço de medida. Se $f,g \in L^p(X,\Sigma,\mu)$, então $f+g \in L^p(X,\Sigma,\mu)$ e*

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_p. \tag{71}$$

Teorema 2.2.5. *$(L^p, ||.||_p)$ é espaço de Banach para todo $p \in [1,\infty)$.*

Demonstração. Temos que $||.||_p$ é norma em $L^p(\mu)$. Agora, falta mostrar que essa norma é completa. Seja $(Q_n)_n$ uma sequência de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \geq 1 \quad \forall m,n \geq k \quad \|Q_m - Q_n\|_p \leq \varepsilon. \tag{72}$$

Basta encontrar alguma subsequência convergente. Consideraremos $\Psi_k = Q_{n_k}$ tal que $\|\Psi_k - \Psi_{k+1}\| \leq \frac{1}{2^k}$ $\forall k \geq 1$.
Definimos

$$\Psi(x) = |\Psi_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)| \tag{73}$$

e afirmamos

$$\Psi \in L^p(\mu). \tag{74}$$

Agora, antes de dar prosseguimento à demonstração devemos provar a afirmação acima (74). Note que

$$|\Psi(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \left(\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)|\right)^p, \tag{75}$$

$$\int |\Psi(x)|^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \left(\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)|\right)^p d\mu. \tag{76}$$

O limite pode sair da integral nesse caso, pois o teorema da convergência monótona (A.0.5) nos garante isso.

$$\int |\Psi(x)|^p \, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int \left(\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)| \right)^p d\mu, \tag{77}$$

$$\left(\|\Psi\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left[\int \left(\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)| \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{78}$$

Aplicando Minkowski (2.2.4), temos

$$\left\| |\Psi_1| + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)| \right\|_p \leq \|\Psi_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)\|_p \,, \tag{79}$$

portanto

$$\|\Psi\|_p \leq \|\Psi_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\Psi_{k+1} - \Psi_k\|_p \leq \|\Psi\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty. \tag{80}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é uma série geométrica e converge para um valor finito, sendo que $\|\Psi\|_1$ também possui um valor finito desde que $x : \Psi(x) = \infty$ tenha medida nula. Sendo assim, definimos

$$Q(x) \begin{cases} \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)) & \text{se} \quad \Psi(x) < \infty, \\ 0 & se \quad \Psi(x) = \infty. \end{cases} \tag{81}$$

Note que

(i) $Q(x)$ está bem definida para todo x (toda série absolutamente convergente é convergente).

(ii) $Q(x) = \lim_{n\to\infty} \{\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\} = \lim_{n\to\infty} \Psi_{n+1}(x)$ (o somatório é uma série telescópica, onde cada parcela cancela a anterior).

Provamos que $\lim_{n\to\infty} Q_{n_k}(x)$ existe para todo x. Agora resta provar que (i) $Q \in L^p(\mu)$ e (ii) $\|Q_{n_m} - Q\|_p \to 0$ quando $m \to \infty$.

(i) $Q \in L^p(\mu)$.

$$Q(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] \right\}, \tag{82}$$

logo

$$\int |Q|^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \left| \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] \right|^p d\mu. \tag{83}$$

Nesse caso não podemos utilizar o teorema da convergência monótona (A.0.5), pois há garantia que os termos dessa série sejam não negativos (temos que ter certeza que a série não diverge); no caso anterior era verdade, pois considerávamos os valores absolutos dos termos. Agora podemos fazer a seguinte observação

$$\left| \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] \right| \leq |\Psi_1| + \sum_{k=1}^{n} |\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)| \leq \Psi \quad \forall n, \tag{84}$$

logo
$$\left|\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right|^p \leq |\Psi|^p \quad \forall n, \tag{85}$$
como
$$\int |\Psi|^p \, d\mu < \infty, \tag{86}$$
temos que
$$\left|\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right|^p < \infty. \tag{87}$$
Com base no que foi discutido, podemos utilizar o teorema da convergência dominada (A.0.8), portanto temos
$$\int |\Psi|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left|\Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right|^p d\mu, \tag{88}$$
logo
$$\|Q\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \left\|\Psi_1 + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right\|_p^p. \tag{89}$$
Tomando a raiz p-ésima.
$$\|Q\|_p = \lim_{n\to\infty} \left\|\Psi_1 + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right\|_p. \tag{90}$$
Utilizando Minkowski (2.2.4), temos que
$$\begin{aligned}
\|Q\|_p &= \lim_{n\to\infty} \left\|\Psi_1 + \sum_{k=1}^{n} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\right\|_p & (91)\\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|\Psi_1\| + \sum_{k=1}^{n} \|[\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]\| & (92)\\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|\Psi\|_p + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} & (93)\\
&\leq \|\Psi\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty. & (94)
\end{aligned}$$

(ii) $\|Q_{n_m} - Q\|_p \to 0$ para $m \to \infty$.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] & (95)\\
&= \Psi_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] + \sum_{k=m}^{\infty} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)]. & (96)
\end{aligned}$$

Logo podemos inferir que

$$\|Q_{n_m} - Q\| = \left\| \sum_{k=m}^{\infty} [\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)] \right\|_p \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|\Psi_{k+1}(x) - \Psi_k(x)\|_p \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0. \tag{97}$$

Note que essa passagem (97) é semelhante a Minkowski(2.2.4), mas essa desigualdade tem um número infinito de termos; portanto, podemos justificá-la a rigor utilizando o teorema da convergência dominada (A.0.8). □

Exemplo: Suponha que (X, Σ, μ) seja um espaço de probabilidade, ou seja

$$\mu(X) = 1. \tag{98}$$

Dado $Q \in L^P(\mu) 1 < p \leq \infty$, aplicando Hölder (2.2.3) temos

$$\int |Q \cdot 1| \, d\mu \leq \|Q\|_p \cdot \|1\| < \infty, \tag{99}$$

logo $L^p(\mu) \subset L^1(\mu)\ \forall p$ (note que utilizamos $\mu(X) = 1$, mas basta que $\mu(X) < \infty$ para que seja válido (99) e consequentemente todo o resto).
Dado $Q \in L^{\infty}(\mu)$, temos

$$\|Q\|_p = \left[\int |Q|^p \, d\mu \right] \leq \left[\int \|Q\|_{\infty}^p \right]^{\frac{1}{p}} = \|Q\|_{\infty} \left[\int 1^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} = \|Q\|_{\infty} \, \mu(x), \tag{100}$$

logo $L^{\infty}(\mu) \subset L^p(\mu)\ \forall p$.

Teorema 2.2.6. *Seja E um espaço normado, então a bola unitária fechada é compacta se, e somente se, a dimensão de E é finita.*

Vamos mostrar que se a $\dim E = \infty$, então existe $(x_n)_n$ na bola unitária fechada tal que
$*$ $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall m \neq n$;
$*$ não é de Cauchy;
$*$ nenhuma subsequência de $(x_n)_n$ é de Cauchy;
$*$ $(x_n)_n$ não tem subsequência convergente;
$*$ a bola unitária fechada não é compacta.

Lema 2.2.7 (Riesz)**.** *Se E é um espaço normado e M é subespaço vetorial fechado, então para qualquer $0 < \theta < 1$ existe $y \in E$ com $\|y\| = 1$ tal que $\|x - y\| \geq \theta$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Fixe $y_0 \in E \setminus M$ e seja $d = d(y_0, M)$ onde $d \overset{def}{=} \inf \{\|x - y_0\| : x \in M\}$, note $d > 0$ porque $y \notin M$ e M é fechado. Tome $x_0 \in M$ tal que $\|x_0 - y_0\| \leq \frac{d}{\theta}$ (com $\frac{d}{\theta} > d$).
Tome qualquer $x \in M$

$$\|x - y\| = \left\| x - \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} \right\| \geq \frac{d}{d/\theta} = 0. \tag{101}$$

Note que

$$-x \|x_0 - y_0\| + x_0 \in M, \tag{102}$$

logo

$$\|y_0 - (x_0 - x\,\|x_0 - y_0\|)\| \geq d. \tag{103}$$

$\square$

2.3 OPERADORES

2.3.1 Operadores limitados.

Um mapa linear A entre dois espaços normalizados X e Y é chamado *operador linear*

$$A : \mathfrak{D}(A) \subseteq X \to Y. \tag{104}$$

O subespaço linear $\mathfrak{D}$ no qual A é definido é chamado de *domínio* de A e normalmente é necessário que seja denso. Definimos o núcleo de A por

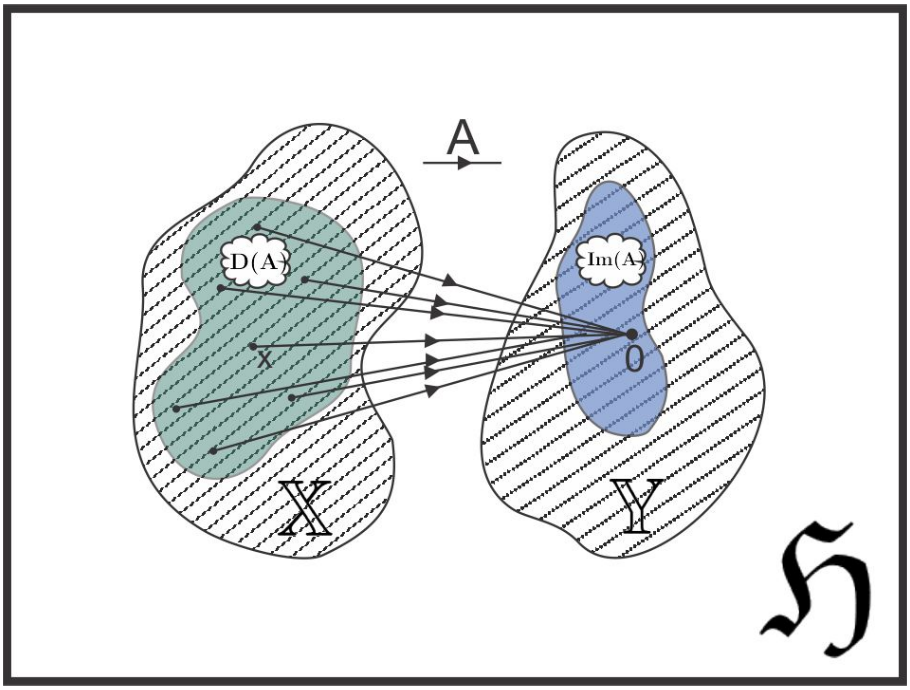
$$\mathrm{Ker}(A) = \{f \in \mathfrak{D}(A) \mid Af = 0\} \subseteq X. \tag{105}$$

É fácil demonstrar que A é injetor ("um-a-um") se, e somente se, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. A *imagem* de $A : X \to Y$ é normalmente denotada por $\mathrm{Ram}(A)$, mas também pode ser denotada por $\mathrm{Im}(A)$ e esta é definida por

$$\mathrm{Ram}(A) = \{Af \mid f \in \mathfrak{D}(A)\} = A\mathfrak{D} \subseteq Y. \tag{106}$$

Abaixo temos uma ilustração que elucidas os conceitos discutidos acima.

Figura 18 – Transformação linear.



$X, Y \subset \mathfrak{H}$ e $\mathfrak{D}(A) \subseteq X, \mathrm{Im}(A) \subseteq Y$.
fonte: Produção do próprio autor.

O operador A é chamado de *delimitado* se a norma do operador

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{D}(A), \|f\|_X = 1} \|Af\|_Y \,, \tag{107}$$

é finita. Por construção, um operador limitado é *Lipschitz* contínuo,

$$\|Af\|_Y \leq \|A\| \, \|f\|_X \,, \qquad f \in \mathfrak{D}, \tag{108}$$

e portanto contínuo. O inverso também é verdadeiro, como demonstra o próximo teorema.

Teorema 2.3.1. *Um operador A é limitado se, e somente, se for contínuo.*

Demonstração. Suponha que A seja contínuo, mas não é delimitado. Assim, há uma sequência de vetores unitários u_n tais que $\|Au_n\| \geq n$. Então $f_n = \frac{1}{n}$ converge para 0, mas $\|Af_n\| \geq 1$ não converge para 0.

Agora, se A é limitado, ou seja, tal que existe um $m > 0$ satisfazendo $||Ag||_Y \leq m||g||_X$ para todo $g \in X$. Seja ϵ um número positivo arbitrário e sejam g e h dois vetores de X tais que $||g - h||_X \leq \frac{\epsilon}{m}$. Então,

$$\|Ag - Ah\|_Y = \|A(g - h)\|_Y \leq m \, \|g - h\|_X \leq m\frac{\epsilon}{m}. \tag{109}$$

Portanto, verifica-se que A satisfaz as condições de continuidade.

Em particular, se X tiver dimensão finita, então cada operador é limitado. Observe que em geral uma e a mesma operação podem ser limitadas (também contínua) ou ilimitada, dependendo da norma escolhida. Segue o exemplo abaixo. $\square$

Exemplo. Considere o espaço de funções diferenciáveis (primeira derivada contínua) $C^1[0,1]$ com a seguinte norma

$$\|f\|_{\infty,1} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \,. \tag{110}$$

Seja $Y = C[0,1]$ e observe que o operador diferencial $A = \frac{d}{dx} : X \to Y$ é limitado desde que

$$\|Af\|_\infty = \max |f'(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \|f\|_{\infty,1} \,. \tag{111}$$

No entanto, se considerarmos $A = \frac{d}{dx} : \mathfrak{D} \subseteq Y \to Y$ de acordo com $\mathfrak{D} = C^1[0,1]$, então temos um operador ilimitado. Na verdade, escolha

$$u_n(x) = \sin(n\pi x) \tag{112}$$

que é normalizado, $\|u_n\|_\infty = 1$ e observe que

$$Au_n(x) = u_n'(x) = n\pi \cos(n\pi x), \tag{113}$$

é limitado $\|Au_n\|_\infty = n\pi$. Note que $\mathfrak{D}(A)$ contém o conjunto de polinômios e portanto é denso pelo teorema de Weierstraß (2.1.15).

Se A é delimitado e densamente definido, não há restrição para assumir que está definido para todo o X.

Teorema 2.3.2 (BLT - "Bounded linear transformation")**.** *Seja $A : \mathfrak{D}(A) \subseteq X \to Y$ um operador linear limitado e seja Y um espaço de Banach; se $\mathfrak{D}(A)$ for denso, existe uma extensão única (contínua) de A a X, que tem a mesma norma do operador.*

Demonstração. Uma vez que um operador limitado mapeia as sequências de Cauchy, essa extensão só pode ser dada por

$$\bar{A}f = \lim_{n\to\infty} Af_n, \qquad f_n \in \mathfrak{D}(A), f \in X. \tag{114}$$

Para mostrar que esta definição é independente da sequência $f_n = f$, estão seja $g_n = f$ uma segunda sequência e observe que

$$\|Af_n - Ag_n\| = \|A(f_n - g_n)\| \leq \|A\| \, \|f_n - g_n\| \to 0. \tag{115}$$

Uma vez que $f \in \mathfrak{D}(A)$, podemos escolher $f_n = f$ e com isso vemos que $\bar{A}f = Af$ para esse caso; isso é, $\bar{A}$ é de fato uma extensão. Da continuidade da adição vetorial e da multiplicação escalar, segue-se que $\bar{A}$ é linear. Finalmente, da continuidade da norma, concluímos que a norma do operador não aumenta. □

O conjunto de todos os operadores lineares limitados de X para Y é designado por $\mathfrak{L}(X, Y)$. Se $X = Y$, escrevemos $\mathfrak{L}(X, X) = \mathfrak{L}(X)$. Um operador em $\mathfrak{L}(X, \mathbb{C})$ é chamado *funcional linear limitado*, e o espaço $X^* = \mathfrak{L}(X, \mathbb{C})$ é de *espaço duplo de X* ou *bidual de X*.

Teorema 2.3.3. *O espaço $\mathfrak{L}(X, Y)$ junto com a norma do operador (107) é um espaço normado. E também será um espaço de Banach se Y o for.*

Demonstração. A equação (107) é uma norma e a sua verificação é direta. Se Y é completo e $A_n f$ converge para um elemento g para todo f. Defina um novo operador A linear e pela continuidade das operações vetoriais, A é linear e pela continuidade da norma $\|Af\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n f\| \leq (\lim_{n\to\infty} \|A_n\|) \, \|f\|$ é limitado. Além disso, dado $\epsilon > 0$ há algum N tal que $\|A_n - A_m\| \leq \epsilon$ para $n, m \leq N$ e portanto $\|A_n f - A_m f\| \leq \epsilon \|f\|$. Tomando o limite de $m \to \infty$, nós vemos que $\|A_n f - Af\| \leq \epsilon \|f\|$; ou seja, $A_n \to A$. □

O espaço de Banach dos operadores lineares limitados $\mathfrak{L}(X)$ possui uma multiplicação dada pela composição. Claramente, esse multiplicação satisfaz

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + BC, \qquad A, B, C \in \mathfrak{L}(X) \tag{116}$$

e

$$(AB)C = A(BC), \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \qquad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{117}$$

Além disso, é fácil ver que temos

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \,. \tag{118}$$

Em outras palavras, $\mathfrak{L}(X)$ é chamado de *álgebra de Banach*. No entanto, note que nossa multiplicação não é comutativa (a menos que X seja unidimensional). Nós temos até uma identidade, o operador de identidade $\mathbb{I}$ que satisfaz $\|\mathbb{I}\| = 1$.

Teorema 2.3.4 (Banach-Steinhaus)**.** *Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Seja $\{A_\alpha\} \subseteq \mathfrak{L}(X,Y)$ uma família de operadores limitados, suponha que $\|A_\alpha x\| \leq C(x)$ é limitado para $x \in X$ fixo. Então $\{A_\alpha\}$ é uniformemente delimitada $\|A_\alpha\| \leq C$.*

Demonstração. Para provar esse teorema, precisamos da seguinte observação

$$\sup_{y \in B_r(x)} \|A_y\| \geq r \,\|A\| \,, \tag{119}$$

que é válida para operadores limitados arbitrários $A \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Na verdade, isso decorre de $\max(||A(x,y) - A(x-y)||) = ||Ay||$ depois de tomar o supremo (sup) sobre todo $y \in B_r(0)$. Se o teorema estivesse errado, poderíamos encontrar uma sequência $A_n = A_{\alpha_n}$ com $\|A_n\| \geq 4_n$. Agora, inicie com $x_0 = 0$ e escolha um x_n tal que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^{-n}$ e $\|A_n x_n\| \geq \frac{2}{3}3^{-n}\,\|A_n\|$. Por construção, x_n é um sequência de Cauchy e o limite x satisfaz $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{2}3^{-n}$. Consequentemente $\|A_n x_n\| - \|A_n\,(x - x_n)\| \geq \frac{1}{6}3^{-n}\,\|A_n\| \geq \frac{1}{6}(4/3)^n \to \infty$ contradizendo a suposição. □

2.3.2 Operadores no espaço de Hilbert.

As definições apresentadas nessa seção não são restritas apenas ao espaço de Hilbert "concreto"$L^2(\mathbb{R}, dx)$ da mecânica ondulatória; basta que o espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ seja isomórfico, ou seja, um espaço complexo munido de uma base contável infinita. Entretanto, por simplicidade vamos utilizar $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Se observamos a maneira usual de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ veremos que seu domínio de definição é $\mathfrak{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Para um operador não é muito diferente. Podemos exemplificar o caso de um operador no espaço de Hilbert $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ e constataremos que seu domínio de definição atende as seguintes propriedades (definições):

Definição 1: Um operador no espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ é um mapa linear (transformação linear)

$$A: \quad \mathfrak{D}(A) \quad \to \mathfrak{H} \tag{120}$$

$$\Psi \qquad \mapsto A\Psi, \tag{121}$$

onde $\mathfrak{D}(A)$ representa um subespaço linear denso de $\mathfrak{H}$. De um modo restrito um operador no espaço de Hilbert é um par $(A, \mathfrak{D}(A))$ que consiste em uma prescrição da operação no espaço de Hilbert.

Podemos introduzir um segundo operador e denotarmos por B, este também um operador que atua no espaço de Hilbert. Então, o operador A é dito igual a B se a prescrição e o domínio coincidirem, logo podemos representar por:

$$A\varphi = B\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B). \tag{122}$$

Agora, se (122) for satisfeita podemos dizer com segurança que $A = B$.

Se adentrarmos a fundo na literatura matemática, veremos que um operador é definido em termos mais gerais, ou seja, descartam-se os pressupostos de linearidade (mapa linear) e da densidade de $\mathfrak{D}(A)$. Mas esses são detalhes que não precisamos adentar *a priori*.

Para dar um exemplo aplicado a física, podemos pensar uma partícula confinada em um espaço compacto ($[0, 1]$, por exemplo) ou semi-infinito ($[0, +\infty]$, por exemplo). Logo, o operador momento, está submetido ao domínio de definição e as condições de contorno cuja escolha reflete, eventualmente, o arranjo experimental. Notoriamente, dois arranjos experimentais distintos não tem resultados idênticos para observáveis físico, logo obteremos valores distintos mesmo que o operador momento tenha a mesma prescrição em ambos os casos. Portanto, se ignorarmos o domínio de definição dos operados teremos sérios problemas.

Agora vamos considerar outro exemplo, com três operadores diferentes no espaço de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$.

1. a) Seja Q um operador de posição para uma partícula que está situada em uma linha (reta real) e esse operador consiste na "multiplicação por x"em $L^2(\mathbb{R}, dx)$:

$$(Q\Psi)(x) = x\Psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{123}$$

Definimos que o domínio máximo de definição para Q é aquele que garante que a função $Q\Psi$ exista e que ainda pertença ao espaço de Hilbert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{max}(Q) &= \{\Psi \in \mathfrak{H} | Q\Psi \in \mathfrak{H}\} & (124) \\ &= \left\{ \Psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \, \|Q\Psi\|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} x^2 \, |\Psi|^2 \, dx < \infty \right\}. & (125) \end{aligned}$$

Com base o Teorema (2.2.2) e no comentário subsequente a ele, fica claro que $L^2(\mathbb{R}, dx)$ é um subespaço denso e isomórfico.

b) No exemplo anterior analisamos o domínio máximo de definição para Q, então analogamente podemos obter $\mathfrak{D}_{max}(P)$ para o operador momento $P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$:

$$\mathfrak{D}_{max}(P) = \left\{ \Psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) | \Psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \right\}. \tag{126}$$

c) Algumas vezes não é conveniente definir um $\mathfrak{D}_{max}$, mas em vez disso é mais simples trabalhar com um espaço cujo o domínio seja invariante pelo operador. No caso do operador posição Q, o espaço sugerido é o *espaço de Schwartz* e este é denotado por $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$. Pela definição, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que pertença a $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ tem que ser diferenciável um número infinito de fezes, e tanto a função como suas respectivas derivas têm que decair mais rapiadamente no infinito do que o inverso de qualquer polinômio. Consequentemente concluímos que $\mathfrak{S}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}_{max}(Q)$ e

$$Q : \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{D}_{max}(\mathbb{R}). \tag{127}$$

Surpreendentemente o espaço de Schwartz também representa um domínio de definição invariante para o operador momento $P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ em $L^2(\mathbb{R}, dx)$, ou seja $P : \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{D}_{max}(\mathbb{R})$.

Agora, com as propriedades e definições impostas aos operadores Q e P no exemplo $1.c$, temos que estes são diferentes dos apresentados nos exemplos $1.a$ e $1.b$. Entretanto, no caso $1.c$ temos um intervalo infinito e essa diferença passa a ser puramente matemática, pois nesse caso as medidas físicas não nos permitem fazer distinção entre os diferentes domínios.

Definição 2: Para um operador A que atua em $\mathfrak{H}$, o domínio de $A^\dagger$ é definido por

$$\mathfrak{D}(A^\dagger) = \{\varphi \in \mathfrak{H} \,|\, \exists \tilde{\varphi} \in \mathfrak{H} \quad \text{tais que} \quad \langle\varphi|A\Psi\rangle = \langle\tilde{\varphi}|\Psi\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathfrak{D}(A)\}\,. \tag{128}$$

Pela relação (128) fica claro que $\tilde{\varphi}$ depende tanto de A com de φ. Para $\varphi \in \mathfrak{D}(A^\dagger)$, se define $A^\dagger\varphi = \tilde{\varphi}$, isto é

$$\langle\varphi, A\Psi\rangle = \langle A^\dagger\varphi, \Psi\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathfrak{D}(A). \tag{129}$$

Exemplo: Vamos tomar o operador momento como exemplo; este atua no espaço de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([0,1], dx)$. Utilizando a definição (128), o domínio de $P^\dagger$ é dado por

$$\mathfrak{D}(P^\dagger) = \{\varphi \in \mathfrak{H} \,|\, \exists \tilde{\varphi} \in \mathfrak{H} \quad \text{tal que} \quad \langle\varphi, P\Psi\rangle = \langle\tilde{\varphi}, \Psi\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathfrak{D}(P)\}\,. \tag{130}$$

Agora, temos que descrever a prescrição operacional de $P^\dagger$ que é determinada pela relação

$$\langle\varphi, P\Psi\rangle = \langle P^\dagger\varphi, \Psi\rangle \quad \forall\, \Psi \in \mathfrak{D}(P). \tag{131}$$

Utilizando as condições de contorno do exemplo 2 (3.1.2) e resolvendo por partes a equação (145), temos

$$\int_0^1 dx\,\big(\bar{\varphi}(P\psi) - (\overline{P\varphi})\psi\big)(x) = \int_0^1 dx\left(\bar{\varphi}(P\psi) - \left(\overline{\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi}{dx}}\right)\psi\right)(x) \tag{132}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[(\bar{\varphi}\psi)(x)\right]_0^1 = \frac{\hbar}{i}\left[\overline{\varphi(1)}\psi(1) - \overline{\varphi(0)}\psi(0)\right] \tag{133}$$

$$= 0 \quad \forall\, \Psi \in \mathfrak{D}(P). \tag{134}$$

As condições de contorno impostas fazem com que o termo de superfície seja nulo, resultando em $P \equiv P^\dagger$. Note que temos a mesma prescrição, mas os operadores não são iguais pois $\mathfrak{D}(P^\dagger) \supset \mathfrak{D}(P)$. Ou seja,

$$P^\dagger = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{D}(P^\dagger) = \{\varphi \in \mathfrak{H} \,|\, \exists \varphi' \in \mathfrak{H}\}\,. \tag{135}$$

Definição 3: O operador A em $\mathfrak{H}$ é Hermitiano se

$$\langle\varphi, A\Psi\rangle = \langle A\varphi, \psi\rangle \quad \forall\, \varphi, \Psi \in \mathfrak{D}(A), \tag{136}$$

isto é,

$$A^\dagger\varphi = A\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(A). \tag{137}$$

Ou seja, o operado A é Hermitiano se $A^\dagger$ atua da mesma maneira que A em todos os vetores pertencentes a $\mathfrak{D}(A)$, mesmo que $A^\dagger$ possa ser definido em subespaço maior que $\mathfrak{D}(A)$ $\big(\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(A^\dagger)\big)$. Agora, para um operador ser auto-adjunto é necessário que A e $A^\dagger$ coincidam $\big(A = A^\dagger\big)$, ou seja

$$\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^\dagger) \quad \text{e} \quad A^\dagger\varphi = A\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(A). \tag{138}$$

Deste modo, podemos afirmar que qualquer operador auto-adjunto é Hermitiano, mas um operador Hermitiano não é necessariamente auto-adjunto. O exemplo anterior nos dá uma demonstração clara de um operador que é Hermitiano, mas não é auto-adjunto. Notamos que P e $P^\dagger$ atuam da mesma forma, mas $\mathfrak{D}(P) \subset \mathfrak{D}(P^\dagger)$. Então, com base no que foi discutido concluímos que $P \neq P^\dagger$. Os desdobramentos dessa observação central serão discutidos no próximo capítulo.

3 CAPÍTULO 2

3.1 SURPRESAS MATEMÁTICAS DA MECÂNICA QUÂNTICA.

3.1.1 Exemplo 1.

Dirac percebeu que algumas relações quânticas tem análogo clássico e que essas relações são obtidas substituindo os parenteses de Poisson por comutadores, como demonstrado abaixo

$$[,]_{(\text{clássico})} \rightarrow \frac{[,]}{i\hbar}(\text{quântico}). \tag{139}$$

Sabemos que os parenteses de Poisson são definidos para funções dos $q's$ e $p's$ como

$$[A(q,p), B(q,p)] = \sum_s \left(\frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial B}{\partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial q_s} \right), \tag{140}$$

então, podemos exemplificar a relação de comutação para a posição e o momento:

Classicamente		Quanticamente	
$[Q_i, P_j] = \delta_{i,j},$	(141)	$[Q_i, P_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{i,j}.$	(142)

A regra de Dirac é plausível pois os parenteses de Poisson clássicos e os comutadores da mecânica quântica possuem propriedades semelhantes, como por exemplo:

(i) $[A, A] = 0$;

(ii) $[A, B] = -[B, A]$ (anticomutatividade);

(iii) $[A, c] = 0$, onde c é uma constante;

(iv) $[cA + dB, C] = a[A, C] + b[B, C]$, onde c, d são constantes (linearidade);

(v) $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$ (regra da cadeia);

(vi) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (identidade de Jacobi).

Agora vamos pensar em um caso bem simples, como o exemplo de uma partícula em uma dimensão, onde temos os operadores P e Q que satisfazem a relação de comutação canônica de Heisenberg (142). Se tomarmos o traço dessa relação (142), encontra-se um resultado nulo no lado esquerdo, enquanto do lado direito não é nulo. O que a matemática nos mostra? E o que podemos extrair disso, já que essa relação é básica na mecânica quântica?

Supondo que a relação (142) é realizada num espaço de Hilbert de dimensão finita n (ou seja, $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^n$). Nesse caso, uma matriz $n \times n$ pode representar os operadores P e Q, e o traço é uma operação bem definida. Logo,

$$Tr\,[Q, P] = Tr\,(QP) - Tr\,(PQ) = 0, \tag{143}$$

pela propriedade cíclica do traço. Por outro lado

$$Tr\left(\frac{\hbar}{i}\mathbb{I}_n\right) = \frac{n\hbar}{i}\mathbb{I}. \tag{144}$$

Parece que encontramos uma inconsistência na mecânica quântica. Note, entretanto, que a relação de comutação de Heisinberg não pode ser realizada em um espaço de dimensão finita ($\dim \mathfrak{H} < \infty$). Portanto, a mecânica quântica deve ser formulada em espaço de dimensão infinita ($\dim \mathfrak{H} = \infty$); nesse caso, o traço não pode ser aplicado, pois ele deixa de ser uma operação bem definida para todos os operadores (com por exemplo, operador identidade). Logo, podemos concluir que não há contradição na relação de comutação de Heisengerg. Esse é, tipicamente, o tipo de problema que se enfrenta com a falta de apreciação da matemática adequada.

Podemos ainda fazer uma discussão mais profunda, que consiste em analisar os domínios de definição dos operadores. Onde pelo menos um dos operadores deve ser ilimitado e, portanto, essa relação fundamental não pode ser discutida sem se preocupar com os domínios de definição de operadores.

3.1.2 Exemplo 2.

Imagine uma partícula confinada em um poço infinito de intervalo $[0, 1]$ e descrita por uma função de onda Ψ, satisfazendo as condições de contorno $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$. Então podemos ver que o operador momento $P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ é Hermitiano, uma vez que

$$\int_0^1 dx\left(\bar{\varphi}(P\psi) - (\overline{P\varphi})\psi\right)(x) = \frac{\hbar}{i}\left[(\bar{\varphi}\psi)(x)\right]_0^1 = 0. \tag{145}$$

Como P é Hermitiano, seus autovalores são reais. Isso é facilmente verificado se observamos a equação de autovalor

$$(P\psi_p)(x) = p\psi_p(x) \qquad (p \in \mathbb{R}, \psi_p \not\equiv 0), \tag{146}$$

cuja solução é $\psi_p = C_p e^{\frac{i}{\hbar}px}$ com $C_p \in \mathbb{C} - \{0\}$. A condição de contorno $\psi_p(0) = 0$ implica $\psi_p(x) \equiv 0$, portanto P não admite autovalores. No entanto, os autovalores de P devem ser observados. Como podemos entender isso?

Com base em tudo que foi discutido na seção anterior (2.3.2), concluímos que não é suficiente verificar se um operador é Hermitiano para identificá-lo com um observável. Assim, verificamos que P é Hermitiano, mas não é auto-adjunto $\big($uma vez que $P^\dagger\varphi = P\varphi$ e $\mathfrak{D}(P) \neq \mathfrak{D}(P^\dagger)\big)$.

Agora, os resultados relativos ao espectro de P que são citados neste exemplo indicam que o espectro de um operador Hermitiano não é simplesmente o conjunto de seus autovalores próprios ou generalizados. Mas contém uma parte "extra". Esse algo a mais é chamado de *espectro residual* que por definição, são todos os números ($Z \in \mathbb{C}$) que não são valores próprios de P, mas para os quais $\bar{Z}$ é um autovalor de $P^\dagger$. Podemos analisar os domínios de P e $P^\dagger$ respectivamente:

$$\mathfrak{D}(P) = \{\Psi \in \mathfrak{H} \mid \Psi' \in \mathfrak{H} \text{ e } \Psi(0) = \Psi(1) = 0\}, \tag{147}$$

$$\mathfrak{D}(P^{\dagger}) = \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid \exists \varphi' \in \mathfrak{H}\} . \tag{148}$$

Perceba que o domínio de definição $\mathfrak{D}(P) < \mathfrak{D}(P^{\dagger})$, pois não há condições de contorno impostas ao domínio de $P^{\dagger}$. Agora, temos a equação de autovalor

$$\left(P^{\dagger}\varphi_p\right)(x) = p\varphi_p(x) \quad \left(\varphi_p \in \mathfrak{D}(P^{\dagger}),\ P^{\dagger} \not\equiv 0\right), \tag{149}$$

cuja a solução é

$$\varphi_p(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{com} \quad p \in \mathbb{C}. \tag{150}$$

Todos os números complexos são autovalores de $P^{\dagger}$, mas nenhum desses é um autovalor de P; uma vez que φ_p não desaparece nos limites, consequentemente não pertence a $\mathfrak{D}(P)$. Logicamente o espectro residual de P é complexo, pois o seu espectro discreto e continuo estão vazios.

Aparentemente resolvemos o problema, entretanto P não é auto-adjunto e com isso o seu espectro não admite interpretação física direta. Agora podemos utilizar um estratagema matemático para fazer com que P que é Hermitiano possa ser ampliado de modo que P se torne auto-adjunto; para tanto precisamos aplicar o *Teorema de von Neumann*. Baseado nessa teoria, temos que estudar os autovalores complexos de $P^{\dagger}$. Utilizando a expressão (149) como exemplo, temos

$$P^{\dagger}\varphi_{\pm} = \pm i\varphi_{\pm} \;\; com \;\; \varphi_{\pm}(x) = e^{\mp x/\hbar}, \tag{151}$$

ou simplesmente

$$\left(P^{\dagger} \mp i\mathbb{I}\right)\varphi_{\pm} = 0. \tag{152}$$

Deste modo, o núcleo do operador $P^{\dagger} \mp i\mathbb{I}$ é um espaço vetorial unidimensional:

$$n_-(P) \;\; \equiv \;\; \dim\ker\left(P^{\dagger} + i\mathbb{I}\right) = 1; \tag{153}$$

$$n_+(P) \;\; \equiv \;\; \dim\ker\left(P^{\dagger} - i\mathbb{I}\right) = 1. \tag{154}$$

Os números naturais $n_-(P)$ e $n_+(P)$ são chamados de *índices de deficiência* ou *defeito* de P. O leitor ao se deparar com esses índices pode se questionar sobre a utilidade dos mesmos. Para responder essa indagação vamos apresentar os seguintes teoremas e definições:

Teorema 3.1.1. *Seja A um operador linear simétrico num espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$. Então as três afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) A é auto-adjunto.

(b) A é fechado e $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Ram}(A \pm i) = \mathfrak{H}$.

Definição: A transformada de Cayley U de um operador linear simétrico $A : \mathfrak{D}(A) \to \mathfrak{H}$, é definida como

$$U = (A - i)(A + i)^{-1}. \tag{155}$$

Lema 3.1.2. *Seja $A : \mathfrak{D}(A) \to \mathfrak{H}$ um operador simétrico fechado com índices deficientes n_+, n_-. Então*

(a) A é auto-adjunto se, e somente se, $n_+ = n_- = 0$.

(b) Se $n_+ \neq n_-$, então A não possui extensões auto-adjuntas.

Demonstração. (a) Se $n_+ = n_- = 0$, então $\mathrm{Ram}(A \pm i)^{\perp} = \{0\}$ e portanto $\mathrm{Ram}(A \pm i)$ é denso em $\mathfrak{H}$. Mas A é fechado, logo $\mathrm{Ram}(A \pm i)$ é fechado, o que implica que $\mathrm{Ram}(A \pm i) = \mathfrak{H}$ e pelo Teorema (3.1.1) A é auto-adjunto. Agora, se A é auto-adjunto, então $\mathrm{Ram}(A \pm i) = \mathfrak{H}$ e pelo Teorema (3.1.1), logo $n_+ = n_- = 0$.

(b) Se $n_+ \neq n_-$, pode-se estender a transformada de Cayley, mas ela não será unitária. Então o operador definido pela equação abaixo

$$\mathfrak{D}(A_{V'}) = \mathrm{Ran}(1 - V) \tag{156}$$

$$A_{V'}x = i(1 + V)(1 - V)^{-1}x, \tag{157}$$

(onde V é sua transformada de Cayley) será uma extensão simétrica não auto-adjunta de A.

□

Teorema 3.1.3. *Seja A um operador Hermitiano com os índices de deficiência $n_-(P)$ e $n_+(P)$:*

(i) A é auto-adjunto se, e somente se, $n_- = n_+ = 0$. Neste caso (somente neste), o espectro de A é um subconjunto do eixo real.

(ii) A admite extensões auto-adjuntas (ou seja, transforma A em auto-adjunto ampliando seu domínio de definição) se, e somente se, $n_+ = n_-$. Se $n_- > 0$ e $n_+ > 0$, o espectro de A é todo no plano complexo.

(iii) Se $n_+ = 0 \neq n_-$ ou $n_- = 0 \neq n_+$, o operador A tem nenhuma extensão auto-adjunta não trivial. Logo, o espectro de A é respectivamente, a parte superior fechada, ou a inferior fechada do semi-plano complexo.

Para o nosso caso, a condição (ii) é satisfeita e as equações (153) e (154) fazem com que $n_+ = n_- > 0$. Portanto, P não é auto-adjunto e seu espectro é todo no plano complexo. Mas admite extensões auto-adjuntas, que está representada de forma explicita em (153) e (154). Assim, podemos escolher um $\alpha \in \mathbb{R}$ onde o operador

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\ ,\ \mathfrak{D}(P_\alpha) = \left\{\Psi \in \mathfrak{H} \mid \Psi' \in \mathfrak{H} \ \text{ e } \ \Psi(0) = e^{i\alpha}\Psi(1)\right\} \tag{158}$$

é auto-adjunto e pode ser verificado pela equação abaixo

$$\mathrm{Sp}P_\alpha = \mathbb{R}. \tag{159}$$

Voltando para a física, a condição de contorno $\Psi(0) = e^{i\alpha}\Psi(1)$ significa que tudo o que sai do intervalo [0, 1] no lado direito, entra novamente do lado esquerdo com um certo deslocamento de fase (determinado por $\alpha \in \mathbb{R}$). Agora, essa nova condição de contorno permite a existência de estados com um valor bem definido do momento, enquanto a condição de contorno anterior ($\Psi(0) = \Psi(1) = 0$) excluía tais estados.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados vários conceitos matemáticos importantes para uma boa apreciação da mecânica quântica, onde o leitor pode estudar uma parte desse universo matemático. Começamos com Topologia básica, passamos por análise funcional e por ultimo estudamos operadores e suas sutilezas. Já na área da física, que foi ilustrada no terceiro capítulo, vimos possíveis inconsistências na mecânica quântica. Essa inconsistências ocorrem quando o rigor matemático não é respeitado; como o dizia o matemático ucraniano Israel Gelfand (1913–2009):*"O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar ao de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar punições"*.

No ultimo capítulo vimos no primeiro exemplo a necessidade da mecânica quântica ser formulada em um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Já no segundo exemplo, foi ilustrado um problema que surge quando o domínio de definição de um operador não é analisado e também quando não se faz a distinção de operador Hermitiano para auto-adjunto. Essa diferença é sutil, mas pode levar a sérios problemas, como demonstrado no exemplo 2.

Na linha aqui investigada, dando continuidade ao programa estabelecido, podemos destacar a importância de se estudar de maneira completa o Teorema Espectral para espaços vetoriais complexos, como o espaço de Hilbert. Pois este, tem grande importância e muitas aplicações na mecânica quântica e assim podemos estabelecer um base sólida para a teoria, sem apelar para postulados ou sermos surpreendidos por inconsistências. Deste modo, podemos construir uma física robusta que explora e está de acordo com as sutilezas matemáticas.

5 NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

5.1 CAPÍTULO 1.

5.1.1 Espaço de Banach e Hilbert.

Essa seção é baseada em (TESCHL, 2014), capítulo 0, das páginas 03 a 31 (E-book) ou capítulo 0 das páginas 03 a 30 (versão impressa), usando como complemento (KELLEY, 2008). Também foram introduzidas definições, teoremas e exemplos dos livros (LIMA, 2014a), (LIMA, 2014b), (KUHLKAMP, 2012), (LIMA, 2013) e (LIMA, 2014c).

5.1.2 Espaço de Lebesgue.

Essa seção foi elaborada com base em (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012) e (APLICADA, 2015), usando como complemento (SIMON; REED, 1972), (TESCHL, 2014) e (PEDERSEN, 2001).

5.1.3 Operadores.

5.1.3.1 Operadores limitados.

A referência principal foi (TESCHL, 2014).

5.1.3.2 Operadores no espaço de Hilbert.

Esta seção foi escrita utilizando-se exemplos e definições de (GIERES, 2000) e (SIMON; REED, 1978).

5.2 CAPÍTULO 2.

5.2.1 Surpresas Matemáticas da Mecânica Quântica.

Para redigir essa seção foram utilizadas as referências (SIMON; REED, 1978) (GIERES, 2000) (SAKURAI, 1994) (MANOEL, 2008).

5.3 APÊNDICE A.

Demonstração própria referente a desigualdade (8), apresentada na página 5 (equação 0.4, E-book) (TESCHL, 2014).

5.4 ANEXO A.

Transcrição adaptada da apêndice C (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

REFERÊNCIAS

APLICADA, I. I. N. de Matemática Pura e. **Programa de Verão: Análise Funcional**. 2015. Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-analise-funcional>.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2012.

GIERES, F. Mathematical surprises and dirac's formalism in quantum mechanics. **Reports on Progress in Physics, Volume 63, 2000**, v. 2, n. 54, p. 1 – 27, 2000.

KELLEY, J. L. **General Topology**. [S.l.]: Editora, 2008.

KUHLKAMP, N. **Introdução à Topologia Geral**. Florianópolis, Santa Catarina - Brasil: Ufsc, 2012.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 1**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 2**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2014.

MANOEL, J. P. P. **Singularidades Quânticas Associadas a Defeitos Topológicos em Espaços-tempos Classicamente Singulares**. Campinas, SP - Brasil: [s.n.], 2008.

PEDERSEN, G. K. **Analysis Now**. New York - EUA: Springer-Verlag, 2001.

SAKURAI, J. **Mordern Quantum Mechanics**. [S.l.]: World Publishing Company, 1994.

SIMON, B.; REED, M. **Methods of Modern Mathematical Physics Vol.1 (Functional Analysis)**. New York - EUA: Academic Press, 1972.

SIMON, B.; REED, M. **Methods of Modern Mathematical Physics Vol.4 (Analysis of Operators)**. New York - EUA: Academic Press, 1978.

TESCHL, G. **Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrodinger Operators**. Providence, Rhode Island - EUA: American Mathematical Society, 2014.

APÊNDICE A – COMPARAÇÃO DAS MÉTRICAS

Neste curto apêndice, gostaríamos de nos familiarizarmos com a proposição

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k|\,. \tag{1}$$

Para facilitar a compreensão, vamos fazer $n = 2$ e escrever as métrica de forma explícita

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1| + |x_2|\right); \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2}; \left(|x_1| + |x_2|\right). \tag{2}$$

Agora, vamos elevar ao quadrado e depois tomar a raiz quadrada

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2|\right)^{1/2}; \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2}; \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2|\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Podemos agora escrever de modo crescente.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2|\right)^{1/2} \leq \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2} \leq \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\,|x_1|\,|x_2|\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Fica óbvio que a primeira métrica é menor que a terceira para qualquer n (finito). Mas, fica faltando provar de forma formal que primeira métrica é menor que a segunda para qualquer valor de n (finito). Podemos escrever a primeira métrica da seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}|x_k| = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 + \sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n,n}|x_i|\,|x_j|} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,n}|x_i|\,|x_j|}. \tag{5}$$

Elevando (5) ao quadrado, temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n,n}|x_i|\,|x_j|\,. \tag{6}$$

Se observamos a equação (6) veremos que é uma média aritmética e essa média tem seu ápice quando (nesse caso em particular) $x_i = x_j = x$. Então, podemos escolher o caso majorante ($x_i = x_j = x$) que obviamente irá servir para os outros casos. Portanto, temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n,n}|x_i|\,|x_j| = n\,|x|^2\,. \tag{7}$$

Fazendo $x_i = x_j = x$ na segunda métrica e também elevando-a ao quadrado, temos

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = n\,|x|^2\,. \tag{8}$$

Ou seja, no caso majorante e no caso trivial ($x = 0$) a primeira métrica é igual a segunda, mas para qualquer caso a relação fica

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}. \tag{9}$$

ANEXO A – NOÇÕES DE MEDIDAS E INTEGRAÇÃO

A.0.1 Espaços mensuráveis e a reta estendida.

Definição: Uma $\sigma - \acute{a}lgebra$ no conjunto X é uma família Σ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, X \in \Sigma$.

(ii) Se $A \in \Sigma$, então $A^c := X - A \in \Sigma$.

(iii) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Assim, o par (X, Σ) é chamado de *espaço mensurável*. Cada elemento da $\sigma - \acute{a}lgebra$ é chamado de *conjunto mensurável*. Seja $\mathfrak{F}$ uma coleção de subconjuntos de X, a intersecção de todas as $\sigma - \acute{a}lgebra$ que contêm $\mathfrak{F}$ é ainda uma $\sigma - \acute{a}lgebra$, chamada de $\sigma - \acute{a}lgebra\ gerada$ por $\mathfrak{F}$ e denotada por $\Sigma(\mathfrak{F})$. Perceba que $\Sigma(\mathfrak{F})$ é a menor $\sigma - \acute{a}lgebra$ em X que contém $\mathfrak{F}$.

Quando (X, Σ) é um espaço topológico, a $\sigma - \acute{a}lgebra$ $\Sigma(r)$ é chamada de $\sigma - \acute{a}lgebra\ de\ Borel\ de$ X e denotada por $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$. Os elementos de $\mathfrak{B}$ são chamados de *conjuntos de Borel ou borelianos*.

Definição: A reta estendida é o conjunto

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}, \tag{1}$$

também pode ser denotado por $[-\infty, \infty]$, onde ∞ e $-\infty$ são símbolos que têm as propriedades que intuitivamente deles esperamos, isto é:

$$-\infty < x < \infty \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Podemos operar aritmeticamente com os símbolos ∞ e $-\infty$ da seguinte forma: para $a \in \mathbb{R}$,

(i) $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

(ii) $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} +\infty, & se \quad a > 0 \\ -\infty, & se \quad a < 0 \end{cases}$ e $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & se \quad a > 0 \\ +\infty, & se \quad a < 0 \end{cases}$.

(iii) $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ e $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.

(iv) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

Perceba que algumas operações não estão definidas, pois podem ser indeterminadas. Por exemplo, pode haver a indagação do leitor a respeito da propriedade (iv), pois parece ser artificial. Entretanto essa propriedade é extremamente importante na Teoria de Medida. Temos também as seguintes notações:

$$[-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{-\infty\} \quad e \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \cup \{\infty\}. \tag{3}$$

Definição: A topologia usual de $\mathbb{R}$ induz uma topologia em $\bar{\mathbb{R}}$ considerando como abertos os subconjuntos $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ da forma:

(a) $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$, ou

(b) $A = [-\infty, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou

(c) $A = (a, \infty]$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou

(d) A é uma união de conjuntos como os de (a), (b) ou (c).

Consideraremos $\bar{\mathbb{R}}$ como espaço mensurável com a $\sigma - \acute{a}lgebra$ de Borel $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$ relativa a esta topologia.

A.0.2 Medidas.

Definição: Uma *medida* no espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu :\to [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{4}$$

A medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$, e é dita $\sigma\text{-}finita$ se existirem conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ tais que $X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. O termo (X, Σ, μ) é chamado de *espaço de medida*.

Proposição A.0.1. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então:*

(a) Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) Se $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(A) - \mu(B)$.

(c) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) A_n = \lim_n \mu(A_n)$.

(d) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\right) A_n = \lim_n \mu(A_n)$.

(e) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Teorema A.0.2 (Convergência em medida)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções mensuráveis no espaço de medida (X, Σ, μ):*

(a) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em medida, isto é, existe uma função mensurável $f \in M(X, \Sigma)$ tal que $\lim_n \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0$.

(b) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em medida, isto é, $\lim_{n,m} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0$ para todo $\epsilon > 0$.

Definição: Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, g, f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{R}$. Diz-se que:

(a) f é igual a g $\mu\text{-}quase\ sempre$ se existir $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f = g$ μ-quase sempre se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ para $x \in$. Deste modo escreve-se $f_n \to f$ μ-quase sempre ou $f_n \to f$ μ-q.s ou $f = \lim_n f_n$ μ-q.s.

Proposição A.0.3. *Se a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções mensuráveis no espaço de medida (X, Σ, μ) converge em medida para a função mensurável $f \in M(X, \Sigma)$, então existe uma subsequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge μ-quase sempre para f.*

A.0.3 Integrações.

Definição: Seja (X, Σ, μ) um espaço de medidas.

(a) A integral da função simples $\varphi \in M^+(X,\Sigma)$, cuja representação canônica é $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j\chi_{A_j}$, em relação à medida μ é definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j\mu(A_j). \tag{5}$$

(b) A integral da função $f \in M^+(X,\Sigma)$ em relação à medida μ é definida por

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X,\Sigma) \quad \text{é simples e} \quad 0 \leq \varphi \leq f\right\}. \tag{6}$$

(c) Para $f \in M^+(X,\Sigma)$ e $A \in \Sigma$, define-se

$$\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu. \tag{7}$$

Proposição A.0.4. *Sejam $f, g \in M^+(X,\Sigma)$ e $A, B \in \Sigma$.*

(a) Se $f \leq g$, então $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

(b) Se $A \subseteq B$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

(c) $\int_X f d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ μ-q.s.

Teorema A.0.5 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ um sequência em $M^+(X,\Sigma)$ tal que $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3 \leq \cdots$ parta todo $x \in X$.*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$, então $f \in M^+(X,\Sigma)$ e $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

(b) Se $f_n \to f$ μ-q.s. e $f \in M^+(X,\Sigma)$, então $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Lema A.0.6 (Lema de Fatou). *Se $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $M^+(X,\Sigma)$, então*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu. \tag{8}$$

Proposição A.0.7. *(a) Uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso tem-se*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu. \tag{9}$$

(b) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ integráveis e $a \in \mathbb{R}$. Então af e $f+g$ são integráveis e

$$\int_X af d\mu = a\int_X f d\mu \quad e \quad \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \tag{10}$$

Definição: Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida. Uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é *Lesbegue-integrável* (ou *integrável*) se as funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x) = Re(f(x)) \quad e \quad f_2 = Im(f(x)), \tag{11}$$

São integráveis. Neste definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu. \tag{12}$$

O conjunto de todas as funções integráveis $f : X \to \mathbb{K}$ é denotada por $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema A.0.8 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge μ-quase sempre pra uma função $f : X \to \mathbb{K}$. Se existe $g \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo n, então $f \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu. \tag{13}$$